Guia de estudos: Livro 1 – Matemática – Frente 2
Página 164 – Revisando: 1, 2, 3
Página 165 – Propostos: 1, 2, 4, 5, 18, 20, 22, 28
Página 174 – Complementares: 1, 28

1. (Uepb 2014) Dado $x - \frac{1}{x} = 13$, o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é igual a:
a) 171
b) 169
c) 167
d) 130
e) $\frac{168}{13}$

2. (UFV) Seja A o conjunto de números reais que são soluções da equação $\sqrt{x-1} = x-3$. O número total de subconjuntos de A é:

a) 2
b) 1
c) 8
d) 4

3. (utfpr 2014) O conjunto solução S da equação $\sqrt{x+3} = x-3$, é:
a) $S = \{6\}$.
b) $S = \{1, 6\}$.
c) $S = \{3\}$.
d) $S = \varnothing$.
e) $S = \{4\}$.

4. (utfpr 2012) A equação irracional $\sqrt{9x-14} = 2$ resulta em x igual a:
a) –2.
b) –1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

5. (Upe 2014) Na sequência de quadros a seguir, o valor da primeira célula de cada quadro é a soma dos valores das duas últimas células do quadro anterior.

1	2	3	⇨	5	4	3	⇨	7	8	9	⇨	17	16	15	⇨ ● ● ●

Interbits®

Se o número da célula central do último quadro dessa sequência é 2^{2013}, quanto vale o produto dos números das duas outras células?

a) $2^{2013} - 1$
b) $2^{2013} + 1$
c) 2^{2013+1}
d) $2^{4026} + 1$
e) $2^{4026} - 1$

6. (Uece 2016) Se x é um número real tal que $x + \frac{1}{x} = 3$, então, o valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é

Sugestão: Você pode usar o desenvolvimento do cubo de uma soma de dois números reais.
a) 9.
b) 18.
c) 27.
d) 36.

7. (ifal 2017) Determine o valor do produto $(3x+2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$.
a) 27.
b) 31.
c) 38.
d) 49.
e) 54.

8. (ifal 2016) Simplifique a seguinte expressão de produtos notáveis:

$$(2x+y)^2 - (2x-y)^2 - 4xy.$$

Qual o resultado obtivo?
a) $4xy$.
b) $2xy$.
c) 0.
d) $-2xy$.
e) $-4xy$.

9. (Espm 2018) Se $x^2 = x+3$, a expressão $x^3 - x - 3$ é igual a:
a) $x^2 - 9$
b) $x - 6$
c) $x^2 - 2x + 1$
d) $x^2 + 6x - 1$
e) $x^2 + 2x - 3$

10. (Ufrgs 2010) O quadrado do número $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ é
a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

11. (ifal 2016) Reduzindo a expressão
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ao numeral mais simples, temos:
a) 2.
b) $\sqrt{2}$.

c) $2-\sqrt{2}$.
d) $\sqrt{6}$.
e) $2+\sqrt{2}$.

12. (Ufrgs 2016) Se $x+y=13$ e $x\cdot y=1$, então x^2+y^2 é
a) 166.
b) 167.
c) 168.
d) 169.
e) 170.

13. (Espm 2010) O valor da expressão $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{y-x}{x+y}\right):\frac{6}{x^2-y^2}$ para x = 24 e y = 0,125 é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

14. (utfpr 2018) Dados $A=x+y$, $B=x-y$ e $C=x\cdot y$, para $x\neq y$, $x\neq 0$ e $y\neq 0$. Simplificando a expressão algébrica $\frac{A^2-B^2}{C}$, obtém-se:
a) 0.
b) $\frac{2y}{x}$.
c) 4.
d) $-\frac{2x}{y}$.
e) $-\frac{2x}{y}$.

15. (Espm 2023) As raízes da equação $x^2-3x-5=0$ são m e n. O valor da expressão $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$ é igual a:
a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{17}{25}$
c) $\frac{19}{25}$
d) 1
e) $\frac{4}{5}$

Aprofundamento:

16. (Unisinos 2022) Sobre números reais são feitas as seguintes afirmações;

I. Para quaisquer números reais a e b temos que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
II. Para qualquer número real x vale que $\sqrt{x^2}=x$.
III. Para quaisquer números reais a e b temos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Sobre as proposições acima, pode-se afirmar que
a) apenas I está correta.
b) apenas III está correta.
c) apenas I e II estão corretas.
d) apenas II e III estão corretas.
e) I, II e III estão corretas.

17. (Uece 2022) O número irracional $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^6$ é igual a
a) $198-485\sqrt{6}$.
b) $485-198\sqrt{6}$.
c) $-198+485\sqrt{6}$.
d) $-485+198\sqrt{6}$.

18. (Unicamp indígenas 2022) A expressão $A=(m+n)^2-(m-n)^2$ é equivalente a

a) A = 2 mn.
b) A = 4 mn.

c) A = 0.

d) $A = 2m^2$

19. (ifce 2020) Se a e b são números reais positivos, então a expressão $M=\left(a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}+b\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$ é equivalente a

a) $\frac{a}{b^3}+\frac{b^3}{a}+2ab$.
b) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+2a^2b$.
c) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+2ab^3$.
d) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+2a^3b^3$.
e) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+2ab$.

20. (ifmt 2020) Desenvolva o produto notável: $\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\right)^3$

a) $\frac{x^3}{125}-\frac{3}{100}x^2+\frac{3}{80}x-\frac{1}{64}$
b) $\frac{x^3}{125}-\frac{3}{100}x^2-\frac{3}{80}x+\frac{1}{64}$
c) $\frac{x^3}{125}+\frac{3}{100}x^2+\frac{3}{80}x-\frac{1}{64}$
d) $\frac{x^3}{125}-\frac{3}{100}x^2-\frac{3}{80}x-\frac{1}{64}$
e) $\frac{x^3}{125}+\frac{3}{100}x^2-\frac{3}{80}x+\frac{1}{64}$

21. (Insper 2015) Considere dois números positivos x e y, com $x>y$, tais que

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=8 \\ \sqrt{x^2-y^2}=15 \end{cases}.$$

Nessas condições, $2x$ é igual a

a) 31.
b) 32.
c) 33.
d) 34.
e) 35.

22. (Fgv 2013) Se $x^2+\frac{1}{x^2}=14$, com $x>0$, então $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ é igual a

a) $2^2 \cdot 7^2$
b) 7^3
c) $2^3 \cdot 7^2$
d) 2^{10}
e) 7^{10}

23. (Ucpel 2017) Sendo $m+n=-2$ e $\frac{a}{b}=2$, pode-se afirmar que a expressão $\dfrac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^m \cdot \left(a-\frac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^m \cdot \left(b-\frac{1}{a}\right)^n}$ é igual a

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) 0
d) 4
e) 2

24. (Uece 2015) O conjunto das soluções da equação $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}+2$ é formado por

a) uma única raiz, a qual é um número real.
b) duas raízes reais.
c) duas raízes complexas.
d) uma raiz real e duas complexas.

25. (Espm 2016) O inverso multiplicativo do número $7+\sqrt{x}$ é o número $7-\sqrt{x}$. O valor de $\sqrt{x+1}$ é igual a:

a) 7
b) 3
c) 12
d) 8
e) 5

26. (ifsc 2016) Considerando-se a equação $E=\left(\sqrt[2]{x^2-7x+12}=2\sqrt{3}\right)$, sendo $U=\square$, é **CORRETO** afirmar que seu conjunto solução será:

a) $S=\{7\}$.
b) $S=\{0,-7\}$.
c) $S=\{0\}$.
d) $S=\{0,7\}$.
e) $S=\{2,3\}$.

27. (Fgv/2021) Em relação à expressão algébrica $\left(\frac{x^2-x^3}{x^4}\right)^{-2}$, sua condição de existência no universo dos números reais e sua simplificação máxima são, respectivamente,

a) $x \neq 0$; x^4-x^2
b) $x \neq 0$ e $x \neq 1$; $\frac{x^4}{1-x^2}$
c) $x \neq -1$ e $x \neq 1$; $\frac{x^4}{1-x^2}$
d) $x \neq 0$ e $x \neq 1$; $\frac{x^4}{x^2-2x+1}$
e) $x \neq -1$ e $x \neq 1$; $\frac{x^4}{x^2-2x+1}$

28. (Ime/2021) Considere que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $(a+b) \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$, determine o valor de $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)^2}$.

a) 0,1
b) 0,3
c) 0,6
d) 0,8
e) 1,0

Gabarito:

Resposta da questão 1: [A]

$$x-\frac{1}{x}=13$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=13^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=169$$

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}=169$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=171$$

Resposta da questão 3: [A]

$$\sqrt{x+3}^{2} = (x-3)^2$$
$$x+3 = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

Logo, x = 1 ou x = 6.

Verificação:
x = 1: $\sqrt{1+3} = -2$ (não convém)

x = 6: $\sqrt{6+3} = 3$ (convém)

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{6\}$.

Resposta da questão 4: [E]

$$\sqrt{9x-14} = 2 \Rightarrow 9x - 14 = 4 \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = 2.$$

Verificação:
$\sqrt{9 \cdot 2 - 14} = 2(V).$

Logo, x = 2 é solução da equação.

Resposta da questão 5: [E]

Tomando um quadro qualquer, e sendo ζ o número da célula central nesse quadro, é fácil ver que os números das outras duas células são $\zeta - 1$ e $\zeta + 1.$ Portanto, se $\zeta = 2^{2013}$, então

$$\begin{aligned}(\zeta-1)(\zeta+1) &= \zeta^2 - 1\\ &= (2^{2013})^2 - 1\\ &= 2^{4026} - 1.\end{aligned}$$

Resposta da questão 6: [B]

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\cdot(a+b)$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) \rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Mas,
$$x + \frac{1}{x} = 3$$
$$(3)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\cdot(3) \rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Resposta da questão 7: [D]

Aplicando a fórmula do quadrado perfeito temos:
$$(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2y + (2y)^2$$
$$(3x+2y)^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

Sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2.$
$$(3x+2y)^2 = 25 + 12\cdot 2 = 49$$

Resposta da questão 8: [A]
$$(2x+y)^2 - (2x-y)^2 - 4xy$$
$$4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 + 4xy - y^2 - 4xy = 4xy$$

Resposta da questão 9: [E]

De $x^2 = x + 3,$
$$x\cdot x^2 = x\cdot(x+3)$$
$$x^3 = x^2 + 3x$$
$$x^3 - x - 3 = x^2 + 3x - x - 3$$
$$x^3 - x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

Resposta da questão 10: [C]

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 =$$
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}^{2} + 2.\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}^{2} = 2+\sqrt{3}+2.\sqrt{4-3}+2-\sqrt{3} = 6$$

Resposta da questão 11: [A]
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Produto notável:
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{4-2}\right) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$$

Resposta da questão 12: [B]

$$x + y = 13 \Rightarrow (x+y)^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2\cdot x\cdot y = 169$$

Como $x\cdot y = 1,$ temos:
$$x^2 + y^2 + 2\cdot 1 = 169 \Rightarrow x^2 + y^2 = 167$$

Resposta da questão 13: [C]

$$\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{y-x}{x+y}\right) : \frac{6}{x^2-y^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2-y^2} : \frac{6}{x^2-y^2} = \frac{4xy}{x^2-y^2} . \frac{x^2-y^2}{6} = \frac{4xy}{6} = \frac{4.24.0,125}{6} = 2$$

Resposta da questão 14: [C]

$$\frac{A^2 - B^2}{C} = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x\cdot y} =$$
$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - \left(x^2 + 2xy + y^2\right)}{x\cdot y} =$$
$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x\cdot y} =$$
$$= \frac{4x\cdot y}{x\cdot y} = 4$$

Resposta da questão 15: [C]

Das relações de Girard, sabemos que:

$$\begin{cases} m+n=3 \\ mn=-5 \end{cases}$$

Elevando a primeira relação ao quadrado e utilizando a segunda, obtemos:

$$(m+n)^2 = 3^2$$
$$m^2+2mn+n^2=9$$
$$m^2+2\cdot(-5)+n^2=9$$
$$m^2+n^2=19$$

Logo:

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{m^2+n^2}{(mn)^2}=\frac{19}{(-5)^2}=\frac{19}{25}$$

Resposta da questão 16: [B]

[I] Falsa. A relação correta é:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

[II] Falsa. Devemos ter:

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

[III] Verdadeira. Do produto da soma pela diferença, obtemos:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Resposta da questão 17: [B]

Tem-se que

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^6 &= [(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2]^3 \\ &= [(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2)^3 \\ &= (5-2\sqrt{6})^3 \\ &= 5^3-3\cdot 5^2\cdot 2\sqrt{6}+3\cdot 5\cdot(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{6})^3 \\ &= 485-198\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 18: [B]

Desenvolvendo a expressão, chegamos a:

$$A=(m+n)^2-(m-n)^2$$
$$A=[(m+n)+(m-n)]\cdot[(m+n)-(m-n)]$$
$$A=2m\cdot 2n$$
$$\therefore A=4mn$$

Resposta da questão 19: [E]

Desenvolvendo o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$$M=\left(a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}+b\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=a^2\cdot\frac{a}{b}+2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+b^2\cdot\frac{b}{a}=$$
$$=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}++2\cdot a\cdot b$$

Resposta da questão 20: [A]

Desenvolvendo, chegamos a:

$$\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\right)^3=\left(\frac{x}{5}\right)^3-3\cdot\left(\frac{x}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{x}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{x^3}{125}-3\cdot\frac{x^2}{25}\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{64}$$
$$\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{x^3}{125}-\frac{3x^2}{100}+\frac{3x}{80}-\frac{1}{64}$$

Resposta da questão 21: [D]

Tem-se que

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=8\Rightarrow(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2=8^2$$
$$\Rightarrow 2x+2\sqrt{x^2-y^2}=64.$$

Logo, sendo $\sqrt{x^2-y^2}=15,$ vem

$$2x+2\cdot 15=64\Leftrightarrow 2x=34.$$

Resposta da questão 22: [D]

Se $x^2+\frac{1}{x^2}=14,$ com $x>0,$ então

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 &= x^2+\frac{1}{x^2}+2 \\ &= 14+2 \\ &= 16.\end{aligned}$$

Daí, $x+\frac{1}{x}=4$ e, portanto, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=4^5=2^{10}.$

Resposta da questão 23: [B]

Calculando:

$$\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^m\cdot\left(a-\frac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^m\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)^n}=\left(\frac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}\right)^m\cdot\left(\frac{a-\frac{1}{b}}{b-\frac{1}{a}}\right)^n=\left(\frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{ab+1}{a}}\right)^m\cdot\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

Resposta da questão 24: [A]

Tem-se que

$$\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}+2\Rightarrow 3x-2=x+4\sqrt{x}+4$$
$$\Rightarrow x-3=2\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow x^2-10x+9=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=9.$$

Substituindo na equação original, concluímos que apenas $x = 9$ é solução. Portanto, a equação possui uma única raiz, a qual é um número real.

Resposta da questão 25: [A]

Tem-se que
$$(7+\sqrt{x})\cdot(7-\sqrt{x}) = 1 \Leftrightarrow 49 - x = 1 \Leftrightarrow x = 48.$$

Por conseguinte, vem
$$\sqrt{x+1} = \sqrt{48+1} = 7.$$

Resposta da questão 26: [D]

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - 7x + 12}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 12 \Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 7$$

Portanto, $S = \{0, 7\}.$

Resposta da questão 27: [D]

Tem-se que
$$\left(\frac{x^2 - x^3}{x^4}\right)^{-2} = \left(\frac{x^4}{x^2(1-x)}\right)^2.$$

Logo, sendo $x \neq 0$ e $x \neq 1$, vem
$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2 - x^3}{x^4}\right)^{-2} &= \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^2 \\ &= \frac{x^4}{1 - 2x + x^2}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 28: [B]

Desenvolvendo a equação:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3ab$$

Substituindo este resultado na expressão dada, obtemos:
$$\frac{a^2 + b^2}{2(a+b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{2\left(a^2 + b^2 + 2ab\right)} = \frac{3ab}{2\left(3ab + 2ab\right)} = \frac{3\cancel{ab}}{10\cancel{ab}} = 0{,}3$$