01. **(PUC)** Se $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, um possível valor de sen2x é:

A. ( ) $\frac{4}{5}$ B. ( ) $\frac{6}{5}$ C. ( ) $\frac{5}{12}$

D. ( ) $\frac{24}{25}$ E. ( ) $\frac{12}{13}$

02. **(UERJ)** Lembrando que cos (a + b) = cos a cos b – sen a sen b e sen(a + b) = sen a cos b + sen b cos a, demonstre as identidades:

1) $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

2) $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

03. Sabendo-se que x – y = 60º, assinale a alternativa que corresponde ao valor da expressão $(\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)^2$:

A. ( ) 1 B. ( ) $\frac{1}{2}$ C. ( ) 2

D. ( ) 3 E. ( ) $\frac{3}{2}$

04. **(PUC)** Os anglos agudos a e b são tais que $\operatorname{tg} a = \frac{1}{3}$ e $\operatorname{tg} b = \frac{1}{2}$. O ângulo a + b é igual a:

A. ( ) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$ B. ( ) 30°

C. ( ) 45° D. ( ) 60°

E. ( ) 90°

05. **(UFRJ)** Seja x tal que sen x + cos x = 1. Determine todos os valores possíveis para sen 2x + cos 2x.

06. $\hat{M}$, $\hat{N}$ e $\hat{P}$ são ângulos internos de um triângulo não-retângulo, pode-se afirmar que $\operatorname{tg}\hat{M} + \operatorname{tg}\hat{N} + \operatorname{tg}\hat{P}$ é:

A. ( ) –1 B. ( ) 0

C. ( ) $\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{M} + \operatorname{tg}\hat{N} + \operatorname{tg}\hat{P}}$ D. ( ) $\operatorname{tg}\hat{M} \cdot \operatorname{tg}\hat{N} \cdot \operatorname{tg}\hat{P}$

E. ( ) $\operatorname{tg}\hat{M} \cdot \operatorname{tg}\hat{N} + \operatorname{tg}\hat{P}$

07. **(UFF)** Sendo $k \in Z$, $n \in N^*$ e $x \in R$, a expressão $\left[(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - \operatorname{sen}(2x)\right]^n$ é equivalente a:

A. ( ) $[\operatorname{sen}(2k\pi)]^n$ B. ( ) $[\cos(2k\pi + \pi)]^n$

C. ( ) $\cos(nk\pi)$ D. ( ) $\left[\operatorname{sen}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]^n$

E. ( ) $\operatorname{sen}(nk\pi)$

08. **(PUC)** A soma das soluções de sen 2x = cos x contidas no intervalo fechado $[0, 2\pi]$ é:

A. ( ) $\frac{3\pi}{2}$ B. ( ) 2π C. ( ) $\frac{3\pi}{2}$

D. ( ) 3π E. ( ) $\frac{7\pi}{2}$

09. O valor de $(\operatorname{sen} 22{,}5° + \cos 22{,}5°)^2$ é:

A. ( ) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ B. ( ) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ C. ( ) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

D. ( ) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ E. ( ) 1

10. Sendo a = 3b, tg a = x + 1, tg b = x – 1, calcular x.

11. **(UFRRJ)** Em um triângulo ABC, cujos ângulos são designados por A, B e C supõe-se que: $2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ e $0 < A < \frac{\pi}{2}$

A relação que vale neste triângulo é:

A. ( ) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3$

B. ( ) $\cos(B + C) = 2\cos A$

C. ( ) $\cos(B + C) = 2\cos A$

D. ( ) $\cos(B + C) = 2\cos A$

E. ( ) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A$

12. **(FUVEST)** O valor de $(\operatorname{tg}10° + \operatorname{cotg}10°)\operatorname{sen}20°$ é:

A. ( ) $\frac{1}{2}$ B. ( ) 1 C. ( ) 3

D. ( ) $\frac{5}{2}$ E. ( ) 4

14. Calcular:

a) cos 6° cos 42° cos 66° cos 78°

b) tg 20° tg 40° tg 60° tg 80°

16. Resolva a equação do 2° grau

$(\cos 2a + \cos 2b)\, x^2 - 2\,(\operatorname{sen}2a)\, x - \cos 2a + \cos 2b = 0$

17. Pedrinho ficou admirado em ver um sistema de equações trigonométricas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} a + y \operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen} 3a \\ x \operatorname{sen} 3a + y \operatorname{sen} 6a = \operatorname{sen} 9a \end{cases}$$

Tentou resolvê-lo, e terá acertado se encontrar que valores para x e y.

18. Sendo a e b arcos tais que sen a + sen b = 1 e h = sen $\frac{a+b}{2}$ calcular em função de h:

cos (a + b), cos $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ e cos (a – b).

19. Usando o triângulo 36° - 72° - 72°, prove que $\text{sen } 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

20. A expressão $\cos(x+\pi)+\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-\text{tg}(-x)+\text{ctg}x$, em que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, é equivalente a:

A. ( ) $\dfrac{2}{\text{sen } 2x}$ B. ( ) x C. ( ) $2 \cdot \cos 2x$

D. ( ) $\dfrac{\text{tg } x}{x}$ E. ( ) ctg x

21. **(AFA 1998)** O valor da expressão

$\cos 35°(\text{sen}25° + \cos 55°) + \text{sen}35°(\cos 25° - \text{sen}55°) + \dfrac{\text{tg}31° + \text{tg}14°}{1 - \text{tg}31°\text{tg}14°}$ é:

A. ( ) $\dfrac{\sqrt{2}-3}{2}$ B. ( ) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

C. ( ) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ D. ( ) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$

22. **(AFA 1998)** Seja P o produto dos fatores $(\text{sen } n° + \cos n°)$, onde $n = 45, 46, 47, \ldots, 149, 150$. Pode-se afirmar que:

A. ( ) $P = 0$ B. ( ) $P = 2^{90}$

C. ( ) $1 \le P < 8$ D. ( ) $8 \le P \le 2^{90}$

23. **(AFA 1999)** O valor da expressão $\cos 15° + \text{sen } 105°$ é:

A. ( ) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ B. ( ) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

C. ( ) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D. ( ) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

24. **(AFA 2000)** Os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\sqrt{2}(\text{sen}x - \cos x) = m^2 - 2$ admite soluções, são

A. ( ) $-1 \le m \le 1$ B. ( ) $-2 \le m \le 2$

C. ( ) $0 \le m \le \sqrt{2}$ D. ( ) $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$

27. **(EN 1996)** Sabendo-se que $\text{tg}\, x = a$ e $\text{tg}\, y = b$; pode-se reescrever $Z = \dfrac{\text{sen}2x + \text{sen}2y}{\text{sen}2x - \text{sen}2y}$ como

A. ( ) $\left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)$ B. ( ) $\left(\dfrac{1+ab}{1-ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

C. ( ) $\left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)$ D. ( ) $\left(\dfrac{1+ab}{1-ab}\right)\cdot\left(\dfrac{-a+b}{a-b}\right)$

E. ( ) $\left(\dfrac{1+ab}{1-ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)$

28. **(EN 1998)** Sendo $y = \text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, o valor numérico de y é

A. ( ) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ B. ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. ( ) $\dfrac{1}{2}$

D. ( ) $\sqrt{3}+2$ E. ( ) $2(\sqrt{3}+1)$

29. **(ITA 1984)** Num triângulo isósceles a razão entre a altura referente à base e esta é $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sobre o ângulo α oposto à base, podemos afirmar que:

A. ( ) $\alpha = \pi/4$ B. ( ) $\alpha = \pi/2$

C. ( ) $\alpha = \pi/3$ D. ( ) $\alpha = \pi/6$

E. ( ) não temos dados suficientes para determiná-lo.

30. Se $\cos^4 4x - \text{sen}^4 4x = a \ne 0$, então cos 8x vale:

A. ( ) 2a B. ( ) a C. ( ) 4a

D. ( ) zero E. ( ) a + 4

31. **(ITA 1987)** Suponha x e y números reais, tais que: $\begin{cases} \text{tg}(x-y) = \sqrt{3} \\ (\text{tg}x)\cdot(\text{tg}y) = 1 \end{cases}$. Calcule o módulo do número S = tg x + tg y.

32. **(ITA 1989)** Se tg (2A) = 5 então $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)-\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)$ é igual a:

A. ( ) –40/21 B. ( ) –2 C. ( ) 5

D. ( ) 8 E. ( ) 10

33. Das relações a·sen x + b·cos x = c = a·csc x + b·sec x, provar que: $\text{sen } 2x = \dfrac{2ab}{c^2 - a^2 - b^2}$.

35. Prove que o resultado da eliminação dos arcos x e y, tais que $\cos 2x \ne \cos 2y$, entre as equações:

$$\begin{cases} a\cos 2x + b\,\text{sen}2x = 2c \\ a\cos 2y + b\,\text{sen}2y = 2c \\ 2\,\text{sen}x\,\text{sen}y = 1 \end{cases}$$

é $b^2 = 4c\cdot(c-a)$.

36. Sendo $\text{sen}^3 x \cdot \text{sen}\dfrac{x}{2} = \cos^3 x \cdot \cos\dfrac{x}{2}$, demonstrar: $3\cdot\cos\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{5x}{2} = 0$.

37. Ache o valor máximo e o mínimo de $y = A\cdot\text{sen}x + B\cdot\cos x$, onde A e B são constantes reais.

38. Sendo $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$, demonstre que:

$$\text{tg}\alpha_1 < \frac{\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + \cdots \text{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots \cos\alpha_n} < \text{tg}\alpha_n.$$

40. Sabendo que $a = \dfrac{2}{\text{sen } 4x} - \text{cotg } 2x$ e $b = \dfrac{\text{tg}^2(45°+x)-1}{\text{tg}^2(45°+x)+1}$, então $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}$ é igual a:

A. ( ) 1

B. ( ) –1

C. ( ) 0

D. ( ) 2

E. ( ) $\dfrac{1}{2}$

4 Considere as igualdades abaixo:

(1) $\dfrac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\sec\alpha$

(2) $\dfrac{2}{\operatorname{sen}4\alpha}-\operatorname{cotg}2\alpha=\operatorname{tg}2\alpha$

(3) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$

São sempre verdadeiras:
A. ( ) somente (1) e (2).
B. ( ) somente (1) e (3).
C. ( ) somente (2) e (3).
D. ( ) todas.
E. ( ) nenhuma.

43. Sejam A, B e C três pontos distintos de uma reta, com B entre A e C. Sejam a e b (a > 2b) os comprimentos de AB e BC, respectivamente. Se o segmento BD é perpendicular ao segmento AC, quanto deve medir BD = x, para que o ângulo $B\hat{D}C$ seja a metade de $B\hat{D}A$?

A. ( ) $x=\dfrac{a}{\sqrt{b(a-2b)}}$ B. ( ) $x=\dfrac{ab}{\sqrt{b(a-2b)}}$

C. ( ) $x=\dfrac{b}{\sqrt{a(a-2b)}}$ D. ( ) $x=\dfrac{ab}{\sqrt{a(a-2b)}}$

E. ( ) $x=\dfrac{b^2}{\sqrt{a(a-2b)}}$

44. Sabendo que a equação $2x=3\sec\theta$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, define implicitamente θ como uma função de x, considere a função f de variável real x onde f(x) é o valor da expressão $\frac{5}{2}\operatorname{cossec}\theta+\frac{2}{3}\operatorname{sen}2\theta$ em termos de x. Qual o valor do produto $\left(x^2\sqrt{4x^2-9}\right)f(x)$?

A. ( ) $5x^3-4x^2-9$ B. ( ) $5x^3+4x^2-9$
C. ( ) $-5x^3-4x^2+9$ D. ( ) $5x^3-4x^2+9$
E. ( ) $-5x^3+4x^2-9$

45. Sejam x e y dois números reais com $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}<y<\pi$, satisfazendo $\operatorname{sen}y=\frac{4}{5}$ e $11\operatorname{sen}x+5\cos(y-x)=3$. Nessas condições, o valor de sem 2x é:

A. ( ) $\frac{11}{25}$ B. ( ) $\frac{52}{121}$ C. ( ) $\frac{55}{144}$
D. ( ) $\frac{91}{144}$ E. ( ) $\frac{120}{169}$

46. **(ITA 2010)** Considere a equação. $\left(3-2\cos^2x\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)-6\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

a) Determine todas as soluções *x* no intervalo [0, π [.
b) Para as soluções encontradas em *a*), determine cotg x.

47. **(IME 2010)** Considere a sequência:

$a_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ a_2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}},\ a_3=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}},\ldots\ldots$

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

Gabarito

01. D
02. Demonstração.
03. D
04. C
05. –1 e 1
06. D
07. D
08. D
09. C
10. 0, $\pm\sqrt{2}$
11. A
12. C
14. a) $\frac{1}{16}$ b) 3
16. tg (a + b), tg (a – b)
17. x = –sen 5a cossec ay = sen 4a cossec a
18. $2h^2$, $\frac{1}{2h}$ e $\frac{1-2h^2}{2h^2}$
19.
20. A
21. C
22. A
23. C
24. B
27. E
28. A
29. A
30. B
31. 4
32. E
33.
35.
36.
37. $\sqrt{A^2+B^2}$ e $-\sqrt{A^2+B^2}$
38.
40. B
41. D
43. D
44. C
45. E
46. a) $S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=0$ e $\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$

47. DESAFIO