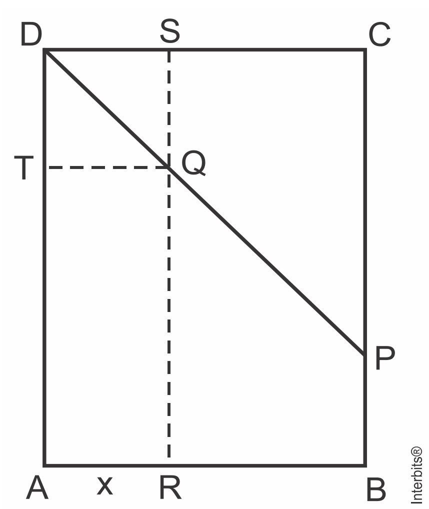
FUNÇÃO AFIM & FUNÇÃO QUADRÁTICA

Pegando Pesado

Questão 01

(Fuvest_2017)

O retângulo $ABCD$, representado na figura, tem lados de comprimento $AB = 3$ e $BC = 4$. O ponto P pertence ao lado $\overline{BC}$ e $BP = 1$. Os pontos R, S e T pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. O segmento $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DP}$ no ponto Q. O segmento $\overline{TQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$.



Sendo x o comprimento de $\overline{AR}$, o maior valor da soma das áreas do retângulo $ARQT$, do triângulo CQP e do triângulo DQS, para x variando no intervalo aberto $]0, 3[$, é

Ⓐ 61/8
Ⓑ 33/4
Ⓒ 17/2
Ⓓ 35/4
Ⓔ 73/8

Questão 02

(Epcar_2012)

Para angariar fundos de formatura, os cadetes do 1º ano da AFA vendem camisas de malha com o emblema da turma. Se o preço de venda de cada camisa é de 20 reais, eles vendem por mês 30 camisas.
Fizeram uma pesquisa e verificaram que, para cada 2 reais de desconto no preço de cada camisa, são vendidas 6 camisas a mais por mês.

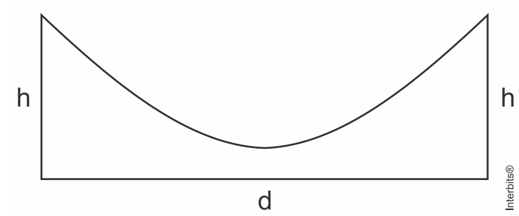
Dessa forma, é correto afirmar que

Ⓐ é possível fazer mais de 10 descontos de 2 reais.
Ⓑ tanto faz vender as camisas por 12 reais cada uma ou 18 reais cada uma que o faturamento é o mesmo.
Ⓒ o máximo faturamento ocorre se são vendidas menos de 40 camisas por mês.
Ⓓ se o preço de venda de cada camisa é de 14 reais, então o faturamento é maior que 680 reais.

Questão 03

(Fuvest_2005)

Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola.



Suponha também que

(i) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;
(ii) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$.

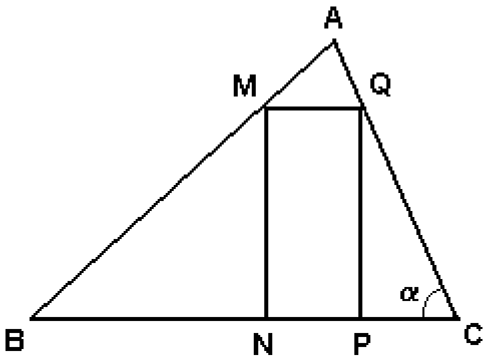
Se $h = 3\left(\frac{d}{8}\right)$, então d vale

Ⓐ 14
Ⓑ 16
Ⓒ 18
Ⓓ 20
Ⓔ 22

Questão 04

(Fuvest_1996)

No triângulo ABC, AC = 5 cm, BC = 20 cm e cosá = 3/5. O maior valor possível, em cm², para a área do retângulo MNPQ, construído conforme mostra a figura a seguir, é:

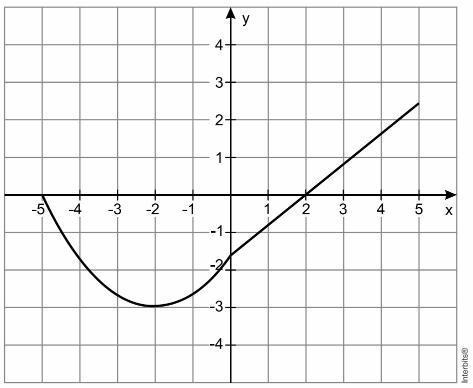


Ⓐ 16
Ⓑ 18
Ⓒ 20
Ⓓ 22
Ⓔ 24

Questão 05

(Fuvest_2016)

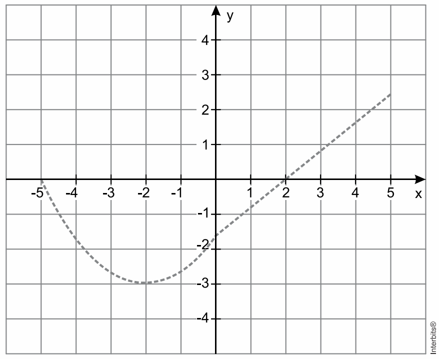
A figura abaixo representa o gráfico de uma função $f:[-5,\ 5] \to$ □. Note que $f(-5) = f(2) = 0$. A restrição de f ao intervalo $[-5, 0]$ tem como gráfico parte de uma parábola com vértice no ponto $(-2, -3)$; restrita ao intervalo $[0,5]$, f tem como gráfico um segmento de reta.



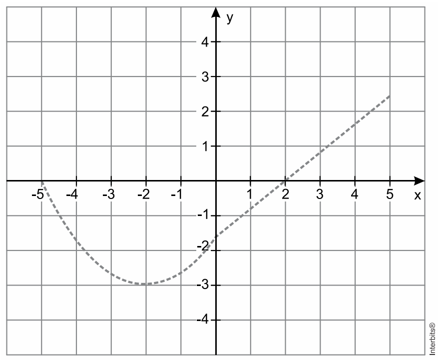
a) Calcule $f(-1)$ e $f(3)$.

Usando os sistemas de eixos abaixo de cada item e esboce

b) o gráfico de $g(x) = |f(x)|,\ x \in [-5, 5]$;



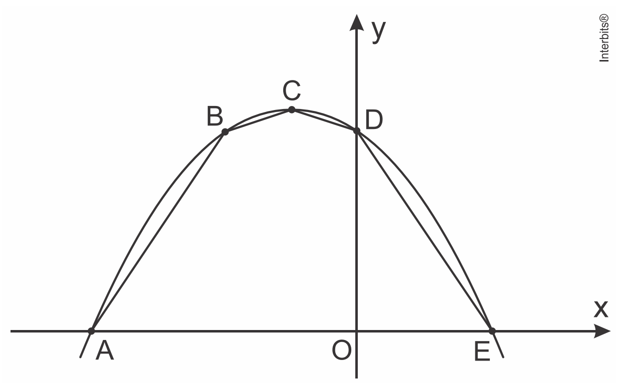
c) o gráfico de $h(x) = f(|x|),\ x \in [-5, 5]$.



Questão 06

(Epcar_2017)

No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função real f definida por $f(x) = -x^2 - x + 2$ e o polígono ABCDE.



Considere que:

- o ponto C é vértice da função f.
- os pontos B e D possuem ordenadas iguais.
- as abscissas dos pontos A e E são raízes da função f.

Pode-se afirmar que a área do polígono $ABCDE$, em unidades de área, é

A $8\frac{1}{16}$
B $4\frac{1}{8}$
C $4\frac{1}{4}$
D $8\frac{1}{2}$

Questão 07

(Efomm_2018)

A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ $(6 \le x \le 11)$. Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto $(2, 0)$. A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?

A (8, 9)
B (8, 6)
C (7, 9)
D (7, 5)
E (7, 4)

Questão 08

(Epcar_2019)

Para angariar fundos para a formatura, os alunos do 3º ano do CPCAR vendem bombons no horário do intervalo das aulas.

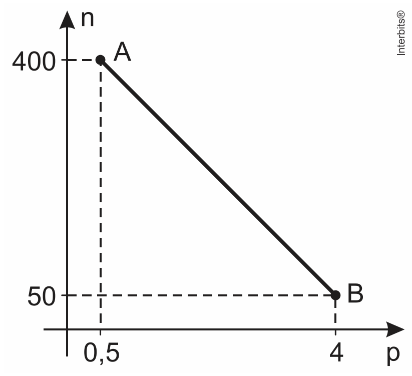
Inicialmente, começaram vendendo cada bombom por R$ 4,00. Assim, perceberam que vendiam, em média, 50 bombons por dia.

A partir dos conhecimentos que os alunos tinham sobre função, estimaram que para cada 5 centavos de desconto no preço de cada bombom (não podendo conceder mais que 70 descontos), seria possível vender 5 bombons a mais por dia.

Considere:
- p o preço de cada bombom;
- n o número de bombons vendidos, em média, por dia;
- $x \in$ □ o número de reduções de 5 centavos concedidas no preço unitário de cada bombom; e
- y a arrecadação diária com a venda dos bombons.

Com base nessas informações, analise as proposições abaixo.

(02) O gráfico que expressa n em função de p está contido no segmento $\overline{AB}$ do gráfico abaixo.



(04) A maior arrecadação diária possível com a venda dos bombons, considerando os descontos de 5 centavos, ocorre quando concederem 35 descontos de 5 centavos.
(08) Se forem concedidos 20 descontos de 5 centavos, serão vendidos mais de 100 bombons por dia.

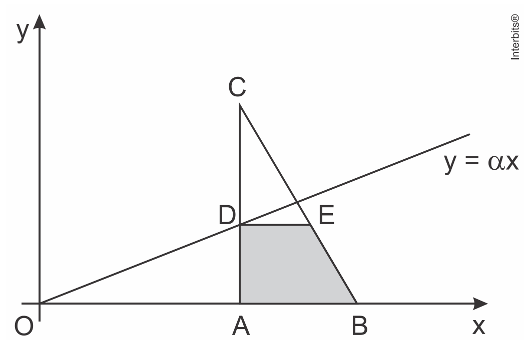
A soma das proposições verdadeiras é igual a

A 6
B 10
C 12
D 14

Questão 09

(Fuvest_2018)

No plano cartesiano real, considere o triângulo ABC, em que $A = (5, 0), B = (8, 0), C = (5, 5)$, e a reta de equação $y = \alpha x$, $0 < \alpha < 1$. Seja $f(\alpha)$ a área do trapézio $ABED$, em que D é a intersecção da reta $y = \alpha x$ com a reta de equação $x = 5$, e o segmento DE é paralelo ao eixo Ox.

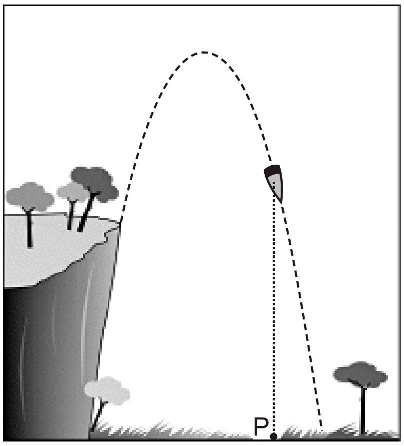


a) Encontre o comprimento do segmento DE em função de α.
b) Expresse $f(\alpha)$ e esboce o gráfico da função f.

Questão 10

(Fuvest_2015)

A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura abaixo. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre $30\,m$ desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de $200\,m$ acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de $10\,m$. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

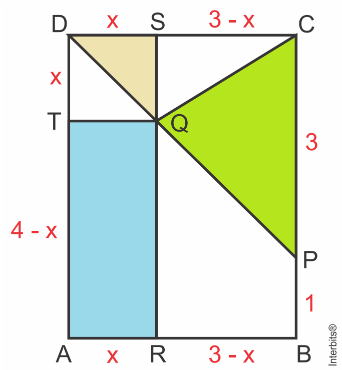


- **A** 60
- **B** 90
- **C** 120
- **D** 150
- **E** 180

Soluções

Resposta da questão 1: [A]

Diante do exposto, pode-se desenhar:



A soma das áreas hachuradas será:

$$S(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3\cdot(3-x)}{2}+x\cdot(4-x)=\frac{x^2+9-3x+8x-2x^2}{2}$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-x^2+5x+9\right)$$

$$S_{máx}=y_{máx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\left(5^2-4\cdot(-1)\cdot 9\right)}{4\cdot(-1)}\to S_{máx}=\frac{61}{8}$$

Resposta da questão 2: [B]

Seja R(x) o faturamento obtido com o valor das camisas.

$$R(x)=(30+6x)\cdot(20-2x)$$

a) Falso, pois se $x>10$ termos R(x) negativo.
b) Verdadeiro, pois para 12 reais o faturamento será $(30+6\cdot 4)\cdot(12)=648$ e o faturamento para 18 reais será $(30+\ 6\cdot 1)\cdot 18=648.$
c) Falso, ocorre para x = 2,5, ou seja, 45 camisetas.
d) Falso, pois $R(3)=(30+6\cdot 3)(20-6)=672{,}00.$

Resposta da questão 3: [B]

Resposta da questão 4: [C]

Resposta da questão 5:
a) De acordo com o gráfico, uma das raízes da parábola é -5. Por simetria pode-se perceber que a outra raiz será 1 e sua função será do tipo $f(x)=a\cdot(x+5)\cdot(x-1)$. Se o vértice da parábola é $(-2,-3)$, então pode-se escrever:

$$f(-2)=-3$$

$$f(-2)=a\cdot(-2+5)\cdot(-2-1)=-3\Rightarrow a\cdot(3)\cdot(-3)=-3\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

Assim, a função da parábola será:

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot(x+5)\cdot(x-1)$$

De acordo com o gráfico, ponto de encontro entre a parábola e a reta será quando x for igual a zero, ou seja:

$$f(0)=\frac{1}{3}\cdot(0+5)\cdot(0-1)\Rightarrow f(0)=-\frac{5}{3}$$

Sabe-se também que a equação de reta tem o formato $f(x)=bx+c$, e, pelo enunciado, que $f(2)=0$. Assim, pode-se escrever a função da reta:

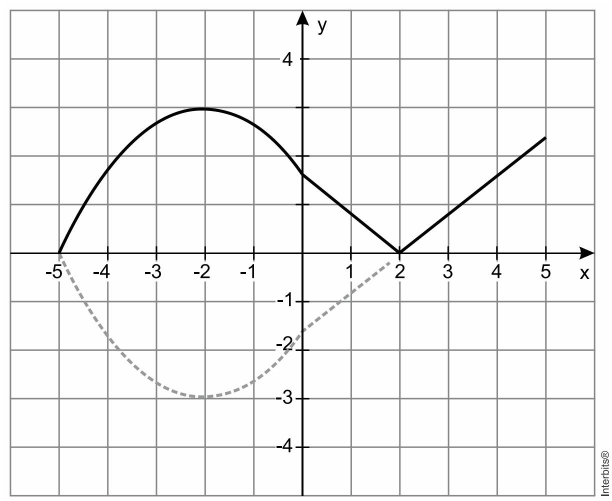
$$\left.\begin{array}{l} f(0)=b\cdot 0+c=-5/3\Rightarrow c=-5/3 \\ f(2)=b\cdot 2+c=0\Rightarrow b\cdot 2-5/3=0\Rightarrow b=5/6 \end{array}\right\rangle\Rightarrow f(x)=\frac{5}{6}x-\frac{5}{3}$$

Por fim, pode-se calcular $f(-1)$ e $f(3)$:

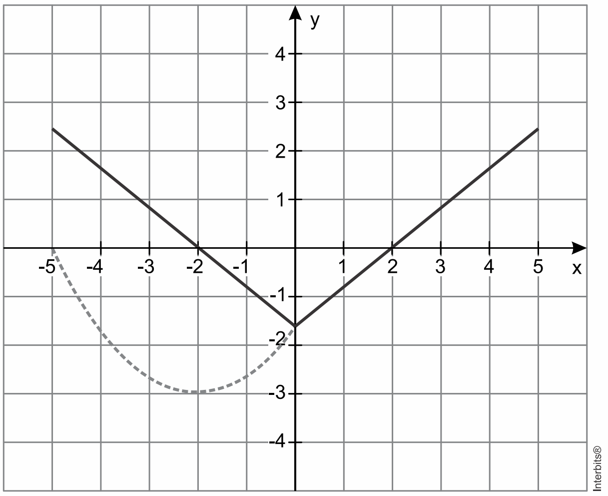
$$f(-1)\Rightarrow \text{Está na parábola!}\Rightarrow f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1+5)\cdot(-1-1)\Rightarrow f(-1$$

$$f(3)\Rightarrow \text{Está na reta!}\Rightarrow f(3)=\frac{5}{6}\cdot 3-\frac{5}{3}\Rightarrow f(3)=\frac{5}{6}$$

b) Desenhando o gráfico de $g(x)=|f(x)|,\ x\in[-5,5]$, tem-se:



c) Desenhando o gráfico de $h(x)=f(|x|),\ x\in[-5,5]$, tem-se:



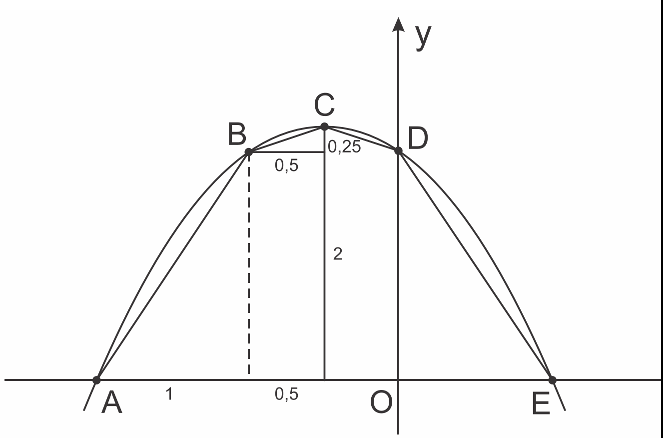
Resposta da questão 6: [B]

$$\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-1)}{2\cdot(-1)} \rightarrow x_V = -\dfrac{1}{2} \\ y_V = -\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{-1}{2}\right) + 2 \rightarrow y_V = \dfrac{9}{4} \end{array}\right\} C\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array} \right\} A(-2, 0) \text{ e } E(1, 0)$$

$$D(0, y_D) \rightarrow f(0) = -0^2 - 0 + 2 = 2 \rightarrow D(0, 2)$$

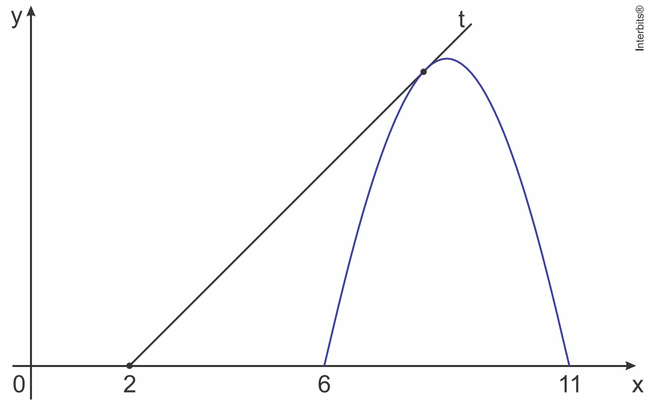
$$B(x_B, 2) \rightarrow 2 = -x^2 - x + 2 \rightarrow -x\cdot(x+1) = 0 \rightarrow B(-1, 2)$$



$$S = 2\cdot\left[\left(\frac{1{,}5 + 0{,}5}{2}\right)\cdot 2 + \frac{0{,}5\cdot 0{,}25}{2}\right] \rightarrow S = 4\frac{1}{8}$$

Resposta da questão 7: [B]

Teremos:



A equação da reta t é dada por:
$y = mx + n$

O ponto $(2, 0)$ é um ponto da reta t, logo,
$0 = 2m + n$
$n = -2m$

Então,
$(t) \quad y = mx - 2m$

O ponto de tangência entre a reta t e a parábola é dado por:
$mx - 2m = -x^2 + 17x - 66$
$x^2 + x(m - 17) + 66 - 2m = 0$
$\Delta = 0,$
$(m - 17)^2 - 4\cdot 1\cdot(66 - 2m) = 0$
$m^2 - 34m + 289 - 264 + 8m = 0$
$m^2 - 26m + 25 = 0$
$m = 25 \quad \text{ou} \quad m = 1$

Se $m = 1,$
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x^2 + 17x - 66 \end{cases}$$
$x - 2 = -x^2 + 17x - 66$
$x^2 - 16x + 64 = 0$
$(x - 8)^2 = 0$
$x = 8$

Substituindo $x = 8$ na equação $y = x - 2,$
$y = 6$

Se $m = 25,$

$$\begin{cases} y = 25x - 50 \\ y = -x^2 + 17x - 66 \end{cases}$$

$25x - 50 = -x^2 + 17x - 66$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x+4)^2 = 0$

$x = -4$

Como o ponto que garante a segurança do coelho está no primeiro quadrante, tal ponto é: $(8, 6)$.

Resposta da questão 8: [D]

Do enunciado,

número de bombons vendidos por dia	preço unitário
50	4
$50+5$	$4-0,05$
$50+2\cdot 5$	$4-2\cdot 0,05$
$50+3\cdot 5$	$4-3\cdot 0,05$
$\vdots$	$\vdots$
$50+x\cdot 5$	$4-x\cdot 0,05$

$p = 4 - 0,05x,\ 0 \le x \le 70$

$n = 50 + 5x,\ 0 \le x \le 70$

De $p = 4 - 0,05x,$

$p = 4 - \dfrac{x}{20}$

$\dfrac{x}{20} = 4 - p$

$x = 80 - 20p$

Substituindo $x = 80 - 20p$ na equação $n = 50 + 5x,$

$n = 50 + 5\cdot(80 - 20p)$

$n = 50 + 400 - 100p$

$n = 450 - 100p$

De $0 \le x \le 70,$

$-0,05\cdot 70 \le -0,05\cdot x \le -0,05\cdot 0$

$-3,5 \le -0,05x \le 0$

$4 - 3,5 \le 4 - 0,05x \le 4 + 0$

$0,5 \le p \le 4$

De $0 \le x \le 70,$

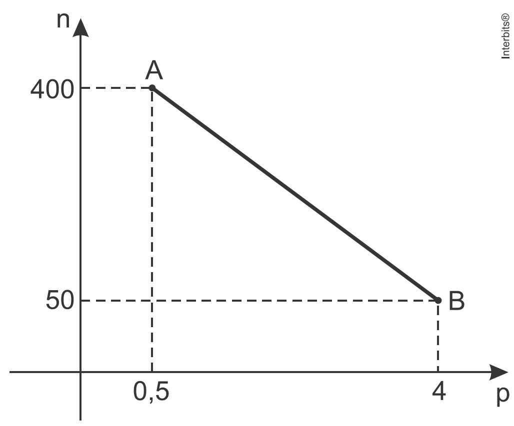
$5\cdot 0 \le 5x \le 5\cdot 70$

$0 \le 5x \le 350$

$50 + 0 \le 50 + 5x \le 50 + 350$

$50 \le n \le 400$

O gráfico que expressa n em função de p é dado abaixo:



Assim, a proposição [02] é verdadeira.
A receita R é dada por:

$R = p\cdot n$

$R = \left(4 - \dfrac{x}{20}\right)\cdot(50 + 5x)$

Fazendo $R = 0,$

$x = 80$ ou $x = -10$

Daí,

$x_V = \dfrac{-10 + 80}{2}$

$x_V = 35$

Se $x = 35,$ R é máximo.
Assim, a proposição [04] é verdadeira.

Se $x = 20,$

$n = 50 + 5\cdot 100$

$n = 550 > 100$

Assim, a proposição [08] é verdadeira.

Portanto, a soma das proposições verdadeiras é 14.

Resposta da questão 9:

a) Sendo α o coeficiente angular da reta $y = \alpha x,$ temos $\operatorname{tg} A\hat{O}D = \alpha.$ Logo, como a abscissa do ponto D é $x_D = 5,$ segue que a sua ordenada pode ser escrita sob a forma $y_D = 5\alpha.$ Ademais, a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é dada por

$$y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 8) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}(x - 8).$$

Sabendo que DE é paralelo a $AB,$ vem

$$5\alpha = -\frac{5}{3}(x-8) \Leftrightarrow x_E = 8 - 3\alpha.$$

Por conseguinte, a resposta é

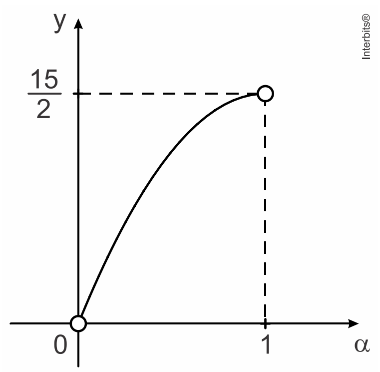
$$\begin{aligned}\overline{DE} &= x_E - x_D \\ &= 8 - 3\alpha - 5 \\ &= 3 - 3\alpha.\end{aligned}$$

b) Tem-se que

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot(\overline{DE} + \overline{AB})\cdot \overline{AD} = -\frac{15}{2}\cdot\alpha\cdot(\alpha - 2),$$

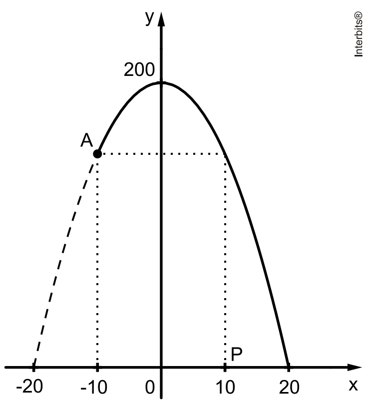
com $0 < \alpha < 1.$

Logo, o gráfico de f é um arco de parábola, cujas interseções com o eixo x são os pontos de abscissa zero e $2,$ e vértice em $\left(1, \frac{15}{2}\right).$



Resposta da questão 10: [D]

Adotando convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas, considere a figura.



Sejam A o ponto de lançamento do projétil e a função quadrática $f: [-20, 20] \to \mathbb{R},$ dada na forma canônica por $f(x) = a\cdot(x-m)^2 + k,$ com $a, m, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0.$ É imediato que $m = 0$ e $k = 200.$ Logo, sabendo que $f(20) = 0,$ vem

$$0 = a\cdot 20^2 + 200 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, temos $f(x) = 200 - \frac{x^2}{2}$ e, desse modo, segue que o resultado pedido é

$$f(-10) = 200 - \frac{(-10)^2}{2} = 150 \text{ m}.$$