X Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Segundo Teste de Seleção

24 de Abril de 1999

Instruções

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em todas as folhas que usar.
- Entregue também seu rascunho, pois ele pode ser usado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.

▶ **Problema 1** Sejam p, q, r, s inteiros não negativos tais que

$$(p+q)^2 + q = (r+s)^2 + s$$

Prove que $p = r$ e $q = s$.

▶ **Problema 2** As mn casas de um tabuleiro $m \times n$ ($m, n > 1$ inteiros) são pintadas alternadamente de branco e preto, como em um tabuleiro de xadrez. Em seguida, colocamos em cada casa um número inteiro, de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam pares. Prove que a soma dos números escritos nas casas pretas é par.

▶ **Problema 3** Seja $ABCD$ um paralelogramo, H o ortocentro do triângulo ABD e O o circuncentro do triângulo BCD. Prove que os pontos H, O e C são colineares.

▶ **Problema 4** Determine todos os ternos (a, b, c) de inteiros positivos tais que a e b são pares e

$$a^b + b^a = 2^c$$