LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 2

9 **UFRJ 2011** Um ponto P desloca-se sobre uma reta numerada, e sua posição (em metros) em relação à origem é dada, em função do tempo t (em segundos), por $P(t) = 2(1 - t) + 8t$.

a) Determine a posição do ponto P no instante inicial ($t = 0$).

b) Determine a medida do segmento de reta correspondente ao conjunto dos pontos obtidos pela variação de t no intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

8 **Unifesp 2012** Numa classe há x meninas e y meninos, com x, $y \geq 4$. Se duas meninas se retirarem da classe, o número de meninos na classe ficará igual ao dobro do número de meninas.

a) Dê a expressão do número de meninos na classe em função do número de meninas e, sabendo que não há mais que 14 meninas na classe, determine quantos meninos, no máximo, pode haver na classe.

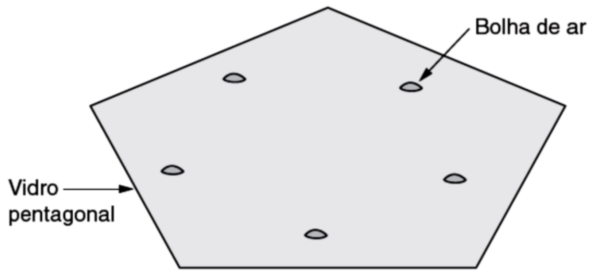
b) A direção do colégio deseja formar duas comissões entre os alunos da classe, uma com exatamente 3 meninas e outra com exatamente 2 meninos. Sabendo-se que, nessa classe, o número de comissões que podem ser formadas com 3 meninas é igual ao número de comissões que podem ser formadas com dois meninos, determine o número de alunos da classe.

7 **Unifesp 2012** Por motivos técnicos, um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto (reservatório 1), completamente cheio, será totalmente esvaziado e sua água será transferida para um segundo reservatório, que está completamente vazio, com capacidade maior do que o primeiro, também na forma de um cilindro circular reto (reservatório 2). Admita que a altura interna h(t), em metros, da água no reservatório 1, t horas a partir do instante em que se iniciou o processo de esvaziamento, pôde ser expressa pela função $h(t) = \frac{15t - 120}{t - 12}$.

a) Determine quantas horas após o início do processo de esvaziamento a altura interna da água no reservatório 1 atingiu 5 m e quanto tempo demorou para que esse reservatório ficasse completamente vazio.

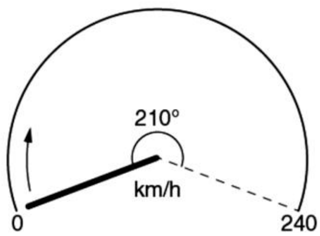
b) Sabendo que o diâmetro interno da base do reservatório 1 mede 6 m e o diâmetro interno da base do reservatório 2 mede 12 m, determine o volume de água que o reservatório 1 continha inicialmente e a altura interna H, em metros, que o nível da água atingiu no reservatório 2, após o término do processo de esvaziamento do reservatório 1.

6 **Unesp 2012** Um artesão foi contratado para ornamentar os vitrais de uma igreja em fase final de construção. Para realizar o serviço, ele precisa de pedaços triangulares de vidro, os quais serão cortados a partir de um vidro pentagonal, com ou sem defeito, que possui n bolhas de ar (n = 0, 1, 2…).
Sabendo que não há 3 bolhas de ar alinhadas entre si, nem 2 delas alinhadas com algum vértice do pentágono, e nem 1 delas alinhada com dois vértices do pentágono, o artesão, para evitar bolhas de ar em seu projeto, cortou os pedaços de vidro triangulares com vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos vértices do pentágono.



Nessas condições, determine a lei de formação do número máximo de triângulos (T) possíveis de serem cortados pelo artesão, em função do número (n) de bolhas de ar contidas no vidro utilizado.

5 **Unicamp 2012** O velocímetro é um instrumento que indica a velocidade de um veículo. A figura a seguir mostra o velocímetro de um carro que pode atingir 240 km/h. Observe que o ponteiro no centro do velocímetro gira no sentido horário à medida que a velocidade aumenta.



a) Suponha que o ângulo de giro do ponteiro seja diretamente proporcional à velocidade. Nesse caso, qual é o ângulo entre a posição atual do ponteiro (0 km/h) e sua posição quando o velocímetro marca 104 km/h?

b) Determinado velocímetro fornece corretamente a velocidade do veículo quando ele trafega a 20 km/h, mas indica que o veículo está a 70 km/h quando a velocidade real é de 65 km/h. Supondo que o erro de aferição do velocímetro varie linearmente com a velocidade por ele indicada, determine a função v(x) que representa a velocidade real do veículo quando o velocímetro marca uma velocidade de x km/h.

4 **Unicamp 2014** O consumo mensal de água nas residências de uma pequena cidade é cobrado como se descreve a seguir. Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a 20 reais. Para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos. Considere $c(x)$ a função que associa o gasto mensal com o consumo de x metros cúbicos de água.

a) Esboce o gráfico da função $c(x)$ no plano cartesiano para x entre 0 e 30.

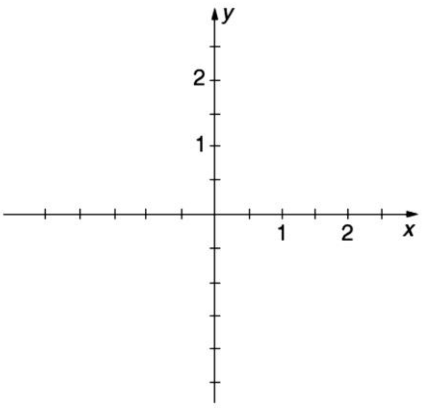
b) Para um consumo mensal de 4 metros cúbicos de água, qual é o preço efetivamente pago por metro cúbico? E para um consumo mensal de 25 metros cúbicos?

3 **Fuvest 2014** Dados m e n inteiros, considere a função f definida por $f(x) = 2 - \dfrac{m}{x+n}$, para $x \neq -n$.

a) No caso em que $m = n = 2$, mostre que a igualdade $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ se verifica.

b) No caso em que $m = n = 2$, ache as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

c) No caso em que $m = n = 2$, esboce a parte do gráfico de f em que $x > -2$, levando em conta as informações obtidas nos itens a) e b). Utilize o par de eixos dado na página de respostas.



d) Existe um par de inteiros $(m, n) \neq (2, 2)$ tal que a condição $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ continue sendo satisfeita?

1 **Fuvest 2015** A função f está definida da seguinte maneira: para cada inteiro **ímpar** n,

$$f(x) = \begin{cases} x-(n-1), & \text{se } n-1 \le x \le n \\ n+1-x, & \text{se } n \le x \le n+1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f para $0 \le x \le 6$.

b) Encontre os valores de x, $0 \le x \le 6$, tais que $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

2 **Unicamp 2015** Seja a um número real positivo e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x.

a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x)g(x) > 0$.

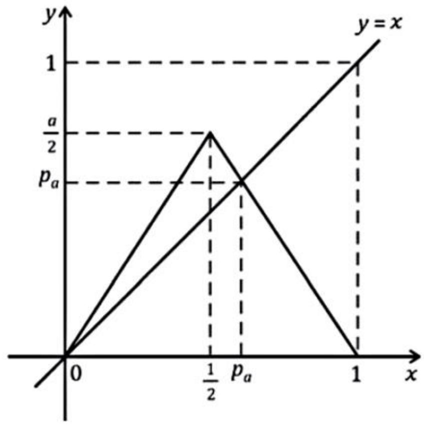
b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo número real x.

1 **Fuvest 2017** Considere a função $f_a : [0,1] \to [0,1]$ que depende de um parâmetro $a \in]1,2]$, dada por

$$f_a(x) = \begin{cases} ax, & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ a(1-x), & \text{se } \dfrac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Sabe-se que existe um único ponto $p_a \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ tal que $f_a(p_a) = p_a$.

Na figura a seguir, estão esboçados o gráfico de f_a e a reta de equação $y = x$.



a) Encontre uma expressão para o ponto p_a em função de a.

b) Mostre que $f_a\left(f_a\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) < \dfrac{1}{2}$ para todo $a \in]1,2]$.

c) Utilizando a desigualdade do item b), encontre $a \in]1,2]$ tal que $f_a\left(f_a\left(f_a\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)\right) = p_a$, em que p_a é o ponto encontrado no item a).

Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 1

9. a) P(0) = 2
b) 9 metros

8. a) A expressão $y = f(x)$ do número de meninos em função do número de meninas é $y = 2(x - 2)$.

Como se trata de uma função crescente, temos que:

$y_{máx} = 2(x_{máx} - 2) \Rightarrow y_{máx} = 2(14 - 2) \Rightarrow y_{máx} = 24$

$y_{mín} = 2(x_{mín} - 2) \Rightarrow 4 = 2(x_{mín} - 2) \Rightarrow x_{mín} = 4$

Portanto, $\boxed{y = 2x - 4,\ \text{com } x \in \mathbb{N},\ \text{tal que } 4 \le x \le 14}$ e o número máximo de meninos na sala é 24.

b) O número de combinações com exatamente 3 dentre as x meninas é expresso por:

$$\frac{x!}{3! \cdot (x-3)!} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

O número de combinações com exatamente 2 dentre os y meninos é expresso por:

$$\frac{y!}{2! \cdot (y-2)!} = \frac{y(y-1)}{2} = \frac{2(x-2)(2x-4-1)}{2} = (x-2)(2x-5)$$

Assim, temos que: $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} = (x-2)(2x-5)$.

Como $4 \le x \le 14$, podemos simplificar o fator $(x - 2)$, que é necessariamente positivo, obtendo a equação: $x(x-1) = 6(2x-5) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 10$.

Como a única solução no intervalo $4 \le x \le 14$ é $x = 10$, temos $x = 2 \cdot 10 - 4 = 16$; portanto, o número de alunos na classe é igual a $10 + 16 = \boxed{26}$.

7. a) Com $h(t) = 5$, temos:

$$5 = \frac{15t - 120}{t - 12} \Rightarrow \boxed{t = 6 \text{ horas}}$$

Para que o reservatório fique completamente vazio, temos $h(t) = 0$. Logo:

$$0 = \frac{15t - 120}{t - 12} \Rightarrow \boxed{t = 8 \text{ horas}}$$

b) No $t = 0$, o reservatório 1 tem altura:

$$h(0) = \frac{15 \cdot 0 - 120}{0 - 12} \Rightarrow h(0) = 10 \text{ m}$$

O volume é:

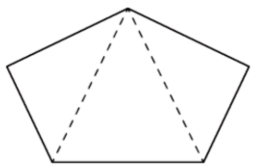
$$V = \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{V = 90\pi \text{ m}^3}$$

Como esse volume será totalmente transferido para o reservatório 2, a altura H, em metros, que o nível da água atinge corresponde a:

$$90\pi = \pi \cdot \left(\frac{12}{2}\right)^2 \cdot H \Rightarrow \boxed{H = 2{,}5 \text{ m}}$$

6. Do enunciado, observamos que:

Se $n = 0$, o artesão cortará 3 triângulos $T_0 = 3$.



Se $n = 1$, aparecerá uma bolha interna em um dos 3 triângulos, fazendo com que ele desapareça e dê origem a 3 outros triângulos.

Logo, $T_1 = 3 - 1 + 3 \Rightarrow T_1 = 5$.

Se $n = i + 1$:

$T_{i+1} = T_i - 1 + 3 \Rightarrow T_{i+1} = T_i + 2,\ i \in \mathbb{N}$, ou seja, uma progressão aritmética com $T_0 = 3$ e $r = 2$.

Portanto, o número máximo de triângulos cortados pelo artesão em função do número de bolhas n é:

$T_n = T_0 + r(n - 0) \Rightarrow \boxed{T_n = 3 + 2n}$

5. a) Por proporção, temos:

$$\left.\begin{matrix} 240 \text{ km/h} \to 210° \\ 104 \text{ km/h} \to \theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{240}{104} = \frac{210°}{\theta} \therefore \theta = 91°$$

b) A função pedida expressa a velocidade real, $v(x)$, em função da velocidade registrada, x.

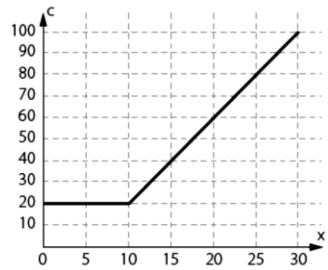
Como o erro varia linearmente com x, a velocidade real também varia linearmente com ele, de modo que temos uma função de 1º grau (do tipo $y = m \cdot x + n$).

O enunciado também fornece dois pares de coordenadas: $v(x) = 20$, para $x = 20$; e $v(x) = 65$, para $x = 70$. Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$v(x) = m \cdot x + n \Rightarrow \begin{cases} 20 = m \cdot 20 + n \\ 65 = m \cdot 70 + n \end{cases} \Leftrightarrow m = 0{,}9 \text{ e } n = 2$$

Logo, a função pedida é: $\boxed{v(x) = 0{,}9 \cdot x + 2}$.

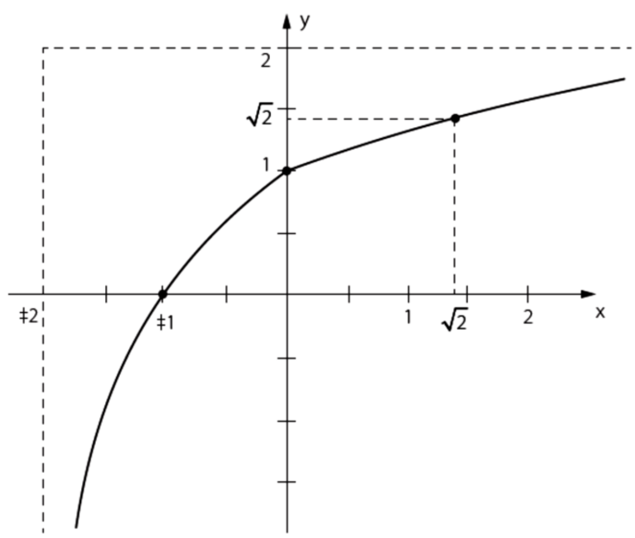
4. a) Se o consumo for 30 m³ de água, o gasto mensal será de $20 + (30 - 10) \cdot 4 = 100$, logo o gráfico será:



b) Para um consumo de 4 m³, o preço efetivo por metro cúbico é $\dfrac{20}{40} = 5$ reais.

Para um consumo de 25 m³, o preço efetivo por metro cúbico é $\dfrac{20 + (25 - 10) \cdot 4}{25} = 3{,}2$ reais.

c)



d) Tomando $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$, temos:

$$2-\frac{m}{\sqrt{2}+n}=\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2-\sqrt{2}=\frac{m}{\sqrt{2}+n}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2}-2+2n-n\sqrt{2}=m\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}(2-n)=m+2-\overset{(n\neq 2)}{2n}\Rightarrow$$
$$\sqrt{2}=\frac{m+2-2n}{2-n}$$

O que implica que não existem m e n inteiros diferentes de 2; caso contrário, $\sqrt{2}$ seria um racional, já que (n + 2 – 2n) e (2 – n) seriam inteiros, pois são soma de múltiplos de inteiros.

3. a) Tomando m = n = 2, obtemos $f(x)=2-\frac{2}{x+2}$. Agora basta calcular $f\left(\sqrt{2}\right)$:

$$f\left(\sqrt{2}\right)=2-\frac{2}{\sqrt{2}+2}=\frac{2\sqrt{2}+4-2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{4+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4}{4-2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

b) • Interseções com eixo x(y = 0)

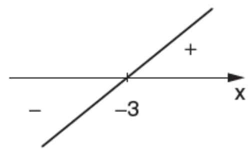
$$2-\frac{2}{x+2}=0\Rightarrow\frac{2}{x+2}=2\Rightarrow x+2=1\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

• Interseções com eixo y(x = 0)

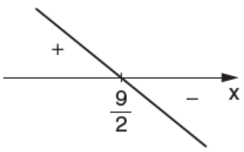
$$\boxed{f(0)=2-\frac{2}{0+2}=1}$$

2. a) Fazendo o estudo do sinal das funções, temos:

f(x): como a > 0



g(x)



Quadro de sinais:

	$x<-3$	$-3<x<\frac{9}{2}$	$x>\frac{9}{2}$
f	–	+	+
g	–	+	+
f · g	–	+	–

Portanto, o conjunto-solução será, nos reais, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -3<x<\frac{9}{2}\right\}$, o que implica em sete soluções inteiras: –2, –1, 0, 1, 2, 3 e 4.

b) $f(g(x))=f(9-2x)=a(9-2x)+3a$

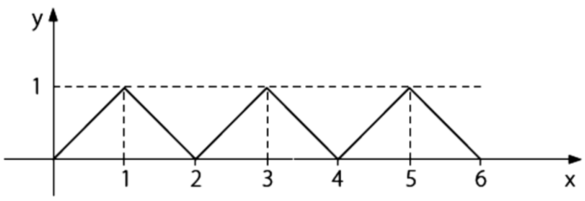
$g(f(x))=g(ax+3a)=9-2(ax+3a)$

Se $f(g(x))=g(f(x))$, então

$$9a-2ax+3a=9-2ax-6a$$
$$18a=9$$
$$a=\frac{1}{2}$$

1. a) Tomando n = 1, n = 2 e n = 3, temos:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{, se } 0\le x\le 1\\ -x+2 & \text{, se } 1\le x\le 2\\ x-2 & \text{, se } 2\le x\le 3\\ -x+4 & \text{, se } 3\le x\le 4\\ x-4 & \text{, se } 4\le x\le 5\\ -x+6 & \text{, se } 5\le x\le 6\end{cases}$$



b) $$f(x)=\frac{1}{5}\ \therefore\ \begin{cases} x=\frac{1}{5} & \text{, se } 0\le x\le 1\\ -x+2=\frac{1}{5} & \text{, se } 1\le x\le 2\\ x-2=\frac{1}{5} & \text{, se } 2\le x\le 3\\ -x+4=\frac{1}{5} & \text{, se } 3\le x\le 4\\ x-4=\frac{1}{5} & \text{, se } 4\le x\le 5\\ -x+6=\frac{1}{5} & \text{, se } 5\le x\le 6\end{cases}\ \therefore\ S=\left\{\frac{1}{5},\frac{9}{5},\frac{11}{5},\frac{19}{5},\frac{21}{5},\frac{29}{5}\right\}$$

1.

a)

Se $f_a(p_a)=p_a$ e $p_a\in\left]\frac{1}{2},1\right[$, então:

$$\boxed{a(1-p_a)=p_a\Rightarrow p_a=\frac{a}{1+a}}$$

b)

$$f_a\left(f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f_a\left(\frac{a}{2}\right)=a\left(1-\frac{a}{2}\right)=a-\frac{a^2}{2}$$

Tome agora a função $f(x)=\frac{-x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$ e vamos verificar onde $f(x)<0$:

$$\frac{-x^2}{2}+x-\frac{1}{2}<0\Rightarrow -x^2+2x-1<0\Rightarrow (x-1)^2>0\Rightarrow x\neq 1$$

Portanto, $f(x)<0$ para todo $x\neq 1$, e, ainda, $\frac{-x^2}{2}+x<\frac{1}{2}$, para todo $x\neq 1$.

Tomando x = a, tem-se $\frac{-a^2}{2}+a<\frac{1}{2}$, se $a\neq 1$.

Logo: $f_a\left(f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)<\frac{1}{2}$, se $a\in\left]1,2\right]$.

c) Sabendo que $f_a\left(f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right) = a - \frac{a^2}{2} < \frac{1}{2}$ e que $p_a = \frac{a}{1+a}$, tem-se:

$$f_a\left(f_a\left(f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = f_a\left(a - \frac{a^2}{2}\right) = a\left(a - \frac{a^2}{2}\right) = a^2 - \frac{a^3}{2} \text{ e, portanto,}$$

$$f_a\left(f_a\left(f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = p_a$$

é o mesmo que

$$a^2 - \frac{a^3}{2} = \frac{a}{1+a} \Rightarrow a\left(-a^3 + a^2 + 2a - 2\right) = 0 \Rightarrow a(a-1)\left(-a^2+2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0,\ a = 1,\ a = \sqrt{2} \text{ ou } a = -\sqrt{2}$$

Como $a \in \left]1,2\right]$, então: $\boxed{a = \sqrt{2}}$

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 3

10 **Unicamp 2014** Sejam a e b reais. Considere as funções quadráticas da forma $f(x) = x^2 + ax + b$, definidas para todo x real.

a) Sabendo que o gráfico de $y = f(x)$ intercepta o eixo y no ponto (0,1) e é tangente ao eixo x, determine os possíveis valores de a e b.

b) Quando $a + b = 1$, os gráficos dessas funções quadráticas têm um ponto em comum. Determine as coordenadas desse ponto.

11 **Unifesp 2014** Chamando de y' e y" as equações das parábolas geradas quando a curva $y = 2x^2 - 12x + 16$ é refletida pelos eixos x e y, respectivamente, determine:

a) a distância entre os vértices das parábolas definidas por y' e y".

b) y' e y".

9 **Unifesp 2015** A concentração C, em partes por milhão (ppm), de certo medicamento na corrente sanguínea após t horas da sua ingestão é dada pela função polinomial $C(t) = -0{,}05t^2 + 2t + 25$. Nessa função, considera-se t = 0 o instante em que o paciente ingere a primeira dose do medicamento.

Álvaro é um paciente que está sendo tratado com esse medicamento e tomou a primeira dose às 11 horas da manhã de uma segunda-feira.

a) A que horas a concentração do medicamento na corrente sanguínea de Álvaro atingirá 40 ppm pela primeira vez?

b) Se o médico deseja prescrever a segunda dose quando a concentração do medicamento na corrente sanguínea de Álvaro atingir seu máximo valor, para que dia da semana e horário ele deverá prescrever a segunda dose?

8 **Unicamp 2017**

Veja também em:
Matemática • Livro 2 • Frente 3 • Capítulo 13

Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x.

No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.

a) Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \le x \le 4$.

b) Considere os pontos de coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M = (1, c)$, determine a e b.

7 **Fuvest 2017** Um caminhão deve transportar, em uma única viagem, dois materiais diferentes, X e Y, cujos volumes em m^3 são denotados por x e y, respectivamente. Sabe-se que todo o material transportado será vendido. A densidade desses materiais e o lucro por unidade de volume na venda de cada um deles são dados na tabela a seguir.

Material	Densidade	Lucro
X	125 kg/m³	R$ 120,00/m³
Y	400 kg/m³	R$ 240,00/m³

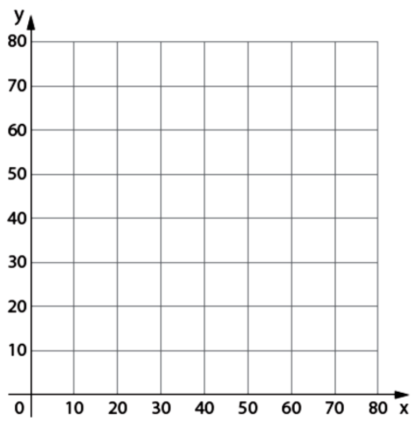
Para realizar esse transporte, as seguintes restrições são impostas:

I. o volume total máximo de material transportado deve ser de 50 m^3;

II. a massa total máxima de material transportado deve ser de 10 toneladas.

Considerando essas restrições:

a) esboce, no plano cartesiano a seguir, a região correspondente aos pares (x, y) de volumes dos materiais X e Y que podem ser transportados pelo caminhão;



b) supondo que a quantidade transportada do material Y seja exatamente 10 m^3, determine a quantidade de material X que deve ser transportada para que o lucro total seja máximo;

c) supondo que a quantidade total de material transportado seja de 36 m^3, determine o par (x, y) que maximiza o lucro total.

6 **Fuvest 2018** Considere a função real definida por $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x.$

a) Qual é o domínio de *f*?

b) Encontre o(s) valor(es) de *x* para o(s) qual(is) *f*(*x*) = 0.

Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 3

10. a) Como f(0) = 1, então b = 1.

Como o gráfico é tangente ao eixo x, tem-se:

$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$ ou $a = -2$

Portanto: a = 2 ou a = –2 e b = 1.

b) Sejam $a_1 \neq a_2$ e $b_1 + a_1 = 1$ e $b_2 + a_2 = 1$.

Agora, chamemos de $f_1(x) = x^2 + a_1x + b_1$ e $f_2(x) = x^2 + a_2x + b_2$.

No ponto de interseção

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \Rightarrow x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{(1-a_2)-(1-a_1)}{a_1 - a_2} = 1$$

e $f_2(1) = 1^2 + a_1 \cdot 1 + (1 - a_1) = 2$, para todo a_1.

Logo, o ponto de interseção será (1, 2).

11. a) Sendo V o vértice parábola $y = 2x^2 - 12x + 16$, tem-se:

$$V(x_V, y_V) = V\left(\frac{-(-12)}{2 \cdot 2}, \frac{-16}{8}\right) = (3, -2)$$

Logo, seu simétrico em relação ao eixo x é (3, 2) e em relação ao eixo y é (–3, –2).

Assim, a distância entre os dois pontos é dada por:

$$\sqrt{[3-(-3)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{36+16} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

b) Por simetria dos pontos em relação ao eixo x, tem-se:

$y' : -y = 2x^2 - 12x + 16$

Portanto: $y' = -2x^2 + 12x - 16$

Por simetria dos pontos em relação ao eixo y, tem-se:

$y'' = +2(-x)^2 - 12 \cdot (-x) + 16$

Então: $\boxed{y'' = +2x^2 + 12x + 16}$

9. a) Pelo enunciado, temos:

$C(t) = -0{,}05t^2 + 2t + 25$

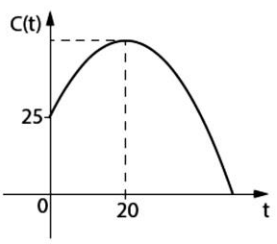
$40 = -0{,}05t^2 + 2t + 25$

$0{,}05t^2 - 2t + 15 = 0$

$t = 10$ h ou $t = 30$ h

Logo, a concentração do medicamento na corrente sanguínea de Álvaro atingirá 40 ppm pela primeira vez às 11 + 10 = 21h da segunda-feira.

b) Construindo o gráfico da função, temos:



Ao calcular o x do vértice, obtemos $t = \frac{-2}{2 \cdot (-0{,}05)} = 20$ h. Dessa forma, ele deverá prescrever a segunda dose do medicamento 20 horas após a primeira, que foi ministrada às 11 horas da segunda-feira, portanto às 7 horas da terça-feira.

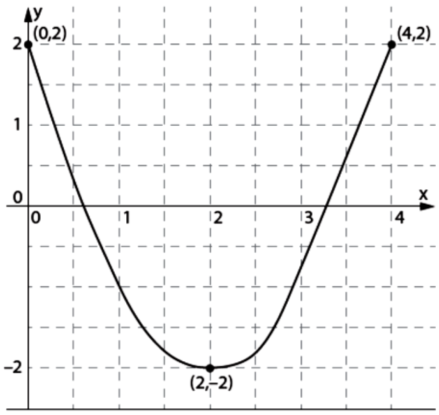
8. a) Se $f(x) = x^2 - 4x + c$, então $X_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot (1)} = 2$. Conclui-se, pelo enunciado, que $Y_v = -2$, uma vez que $(X_v + Y_v = 0)$.

(I): Sendo o vértice da parábola dado por (2, –2), logo f(2) = –2.

(II): Sabe-se, pois, que $f(2) = (2)^2 - 4 \cdot (2) + c \Rightarrow f(2) = c - 4$.

De (I) e (II), tem-se que: $c - 4 = -2 \Rightarrow c = 2$

Desta feita, a função é determinada por $f(x) = x^2 - 4x + 2$, cujo gráfico perfaz uma parábola de vértice (2, –2) e que passa por (0, 2). Tendo a reta $X_v = 2$ como eixo de simetria da parábola, pode-se concluir que a parábola passa pelo ponto (4, 2). Ademais, se f(x) = 0 (raízes da função), então $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$ e $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4$. Assim, o esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 2$ se dará nos seguintes moldes:



$\boxed{c = 2}$

b) A e B são extremos de um segmento de reta, no qual M é ponto médio, então:

(I): $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, que, de acordo com os dados do enunciado:

$\frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2 - a$

(II): $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$, que, de acordo com os dados do enunciado:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = c \Rightarrow f(a) + f(b) = 2c$$

(III): Se $f(x) = x^2 - 4x + c$, então: $f(a) = a^2 - 4a + c$ e $f(b) = b^2 - 4b + c$

(IV): De (II) e (III), conclui-se que: $(a^2 - 4a + c) + (b^2 - 4b + c) = 2c \Rightarrow$ $a^2 + b^2 - 4a - 4b = 0$

(V): De (I) e (IV), pode-se afirmar que:

$a^2 + (2-a)^2 - 4a - 4(2-a) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

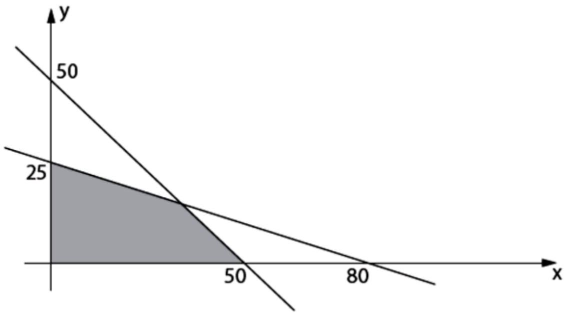
Se $a = 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{(I)} b = 1 - \sqrt{3}$ (não convém, pois a < b).

Se $a = 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{(I)} b = 1 - \sqrt{3}$.

$\boxed{a = 1 - \sqrt{3} \xrightarrow{(I)} b = 1 + \sqrt{3}}$

7. a) Como x e y são volumes, as primeiras restrições serão $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Além disso, o volume total deve ser menor que 50 m³, o que implica que $x + y \leq 50$. E a massa máxima deve ser 10.000 kg, o que implica que $125x + 400y \leq 10.000$.

Logo, a região solução do sistema de inequações será:



b) Se y = 10 m³, o que corresponde a 4.000 kg, pode-se transportar mais 40 m³ ou 6.000 kg de X.

Para que o lucro seja máximo, deve-se enviar o máximo possível, que será 40 m³ (5.000 kg).

c) Quanto maior a quantidade de Y, maior o lucro, pois o lucro por m³ de Y é o dobro do lucro por m³ de X. Contudo, o máximo que podemos transportar de Y é 25 kg.

De acordo com o gráfico, o lucro máximo ocorrerá no ponto de interseção das retas $x + y = 36$ e $125x + 400y = 10.000$. Resolvendo o sistema, obtemos o ponto (16, 20) como solução. Logo, o lucro máximo ocorrerá em (16, 20).

6. a) As condições de existência da expressão são:

I. $x \neq 0$

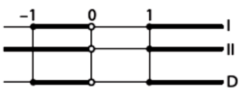
II. $x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x} \geq 0$

+	−1	−	0	−	1	+
−		−		+		+
−		+		−		+

III. $1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x} \geq 0$

−	0	−	1	+
−		+		+
+		−		+

Logo, o domínio será:



$D = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$

b) Primeiro, é preciso notar que x deve ser positivo. Agora, basta resolver a equação:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x} = x^2 - x + 1$$

Chamando $\sqrt{x^2 - x} = t$, tem-se:

$$2t = t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Logo:

$$\sqrt{x^2 - x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, não pode ser raiz.

Basta verificar se $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz.

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$$

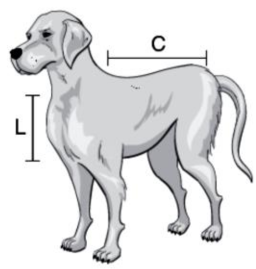
$$= 1 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0$$

Logo: $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 1

23 **Unifesp 2013** Sabe-se que o comprimento C de um quadrúpede, medido da bacia ao ombro, e sua largura L, medida na direção vertical (espessura média do corpo), possuem limites para além dos quais o corpo do animal não se sustentaria de pé.

Por meio da física médica, confrontada com dados reais de animais, é possível identificar que esses limites implicam na razão $C : L^{\frac{2}{3}}$ ser, no máximo, próxima de 7 : 1, com as medidas de C e L dadas em centímetros.



a) Qual é, aproximadamente, a largura L, em centímetros, de um cachorro que tenha comprimento C igual a 35 cm, para que ele possa se sustentar de pé na situação-limite da razão $C : L^{\frac{2}{3}}$? Adote nos cálculos finais $\sqrt{5} = 2,2$, dando a resposta em número racional.

b) Um elefante da Índia de L = 135 cm possui razão $C : L^{\frac{2}{3}}$ igual a 5,8 : 1. Calcule o comprimento C desse quadrúpede, adotando nos cálculos finais $\sqrt[3]{5} = 1,7$ e dando a resposta em número racional.

22 **Unesp 2015** Para cada n natural, seja o número

$$K_n=\underbrace{\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot(...)\cdot\sqrt{3}}}}}_{\text{n vezes}}-\underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2(...)\cdot\sqrt{2}}}}}_{\text{n vezes}}$$

. Se $n\to+\infty$, para que valor se aproxima K_n?

Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 1

23. a) Na população, há:

32% de 500 = 160 indivíduos **AA**

46% de 500 = 230 indivíduos **Aa**

Acrescentando N indivíduos de genótipo **aa**, a probabilidade de que seja sorteado um que tenha o gene **A** é de 50%. Logo:

$$\frac{160+230}{500+N}=50\%\Leftrightarrow\frac{390}{500+N}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\boxed{N=280}$$

b) Após y anos, sem os indivíduos de genótipo **aa**, a probabilidade pedida é:

$$P=\frac{230}{230+160}=\frac{230}{390}=\frac{23}{39}\Rightarrow\boxed{P=\frac{23}{39}}$$

22. Para $n\to+\infty$, K_n corresponde a uma diferença entre duas séries, cada uma envolvendo produto de raízes:

$$S_1=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}...=3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{8}}...=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...}$$

$$S_2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}...=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{8}}...=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...}$$

Note que os expoentes são somas de séries infinitas convergentes em PG, de modo que:

$$S_\infty=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\Rightarrow S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

Assim: $S_1=3^1=3$, da mesma forma que $S_2=2^1=2$.

Finalmente, temos: $K_{n\to\infty}=S_1-S_2=3-2=1$.

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 2

25 **Unifesp 2011** Para testar a durabilidade de uma bateria elétrica foram construídos dois pequenos aparatos móveis, A e B, que desenvolvem, respectivamente, as velocidades constantes de 30 cm/s e 20 cm/s. Cada um dos aparatos é inicialmente posicionado em uma das duas extremidades de uma pista retilínea e horizontal de 9 m de comprimento, e correm em sentido contrário, um em direção ao outro, cada um em sua faixa. Ao chegarem à extremidade oposta, retornam ao início, num fluxo contínuo de idas e vindas, programado para durar 1 hora e 30 minutos. O tempo gasto pelos aparatos para virarem-se, em cada extremidade da pista, iniciarem o retorno rumo à extremidade oposta, é desprezível e, portanto, desconsiderado para o desenvolvimento do experimento.

a) Depois de quantos segundos os aparatos A e B vão se encontrar, pela primeira vez, na mesma extremidade da pista?

b) Determine quantas vezes, durante toda a experiência, os aparatos A e B se cruzam.

24 **Unesp 2012** O número de quatro algarismos 77XY, onde X é o dígito das dezenas e Y o das unidades, é divisível por 91. Determine os valores dos dígitos X e Y.

Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 2

25. a) Os carros estarão em uma das extremidades quando a distância percorrida por eles for múltipla de 900 cm:

$$\begin{array}{l}\text{Carro A: } 30\cdot t_A=K_1 900\\ \text{Carro B: } 20\cdot t_B=K_2 900\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}t_A=30K_1\\ t_B=45K_2\end{array}\Rightarrow MMC(30,45)=90\text{ s}$$

b) Para o 1º encontro:

$$t=\frac{d_{rel}}{V_{rel}}=\frac{900\text{ cm}}{(20\text{ cm/s}+30\text{ cm/s})}=18\text{ s}$$

A partir de um encontro qualquer, o encontro seguinte ocorrerá quando os aparatos tiverem percorrido, na soma das distâncias, 18 m à velocidade relativa de 50 cm/s.

Logo:

$$\Delta t=\frac{18\text{ m}}{50\text{ cm/s}}=36\text{ s}$$

Assim, o número de encontros total é dado por n, onde:

$5.400\text{ s}\ge18\text{ s}+(n-1)36\text{ s}\Rightarrow300\ge1+2n-2\Rightarrow n\le150{,}5$

Logo: $n=150$

24. Dividindo 7.700 por 91, temos:

$7.700=91\cdot84+56$

Somando 35 nos dois membros, obtém-se:

$7.700+35=91\cdot84+56+35$

$7.735=91\cdot84+91$

$7.735=91\cdot85$

Assim, o número 7.735 é divisível por 91.

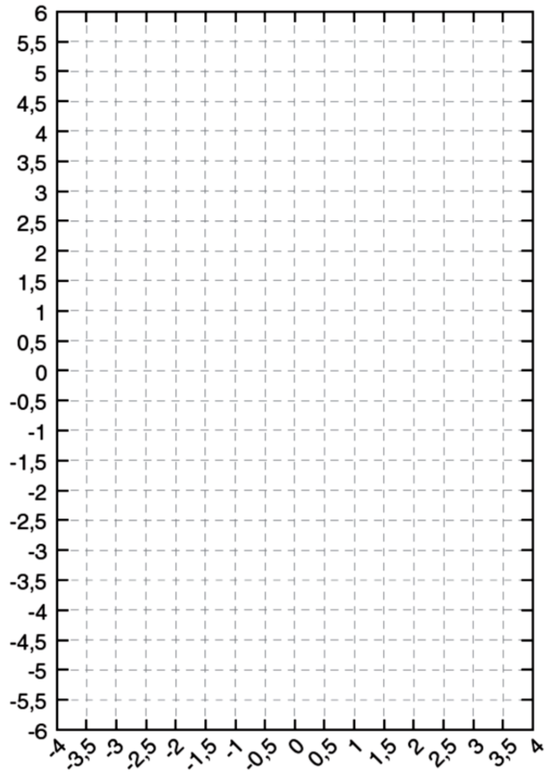
$\boxed{\text{O dígito X tem valor 3, e o dígito Y tem valor 5.}}$

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 4

27 **Unicamp 2011** Define-se como ponto fixo de uma função f o número real x tal que f(x) = x. Seja dada a função $f(x)=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}+1$.

a) Calcule os pontos fixos de f(x).

b) Na região quadriculada a seguir, represente o gráfico da função f(x) e o gráfico de g(x) = x, indicando explicitamente os pontos calculados no item (a).



26 **Fuvest 2014** Um recipiente hermeticamente fechado e opaco contém bolas azuis e bolas brancas. As bolas de mesma cor são idênticas entre si e há pelo menos uma de cada cor no recipiente. Na tentativa de descobrir quantas bolas de cada cor estão no recipiente, usou-se uma balança de dois pratos. Verificou-se que o recipiente com as bolas pode ser equilibrado por:

i) 16 bolas brancas idênticas às que estão no recipiente ou
ii) 10 bolas brancas e 5 bolas azuis igualmente idênticas às que estão no recipiente ou
iii) 4 recipientes vazios também idênticos ao que contém as bolas.

Sendo P_A, P_B e P_R, respectivamente, os pesos de uma bola azul, de uma bola branca e do recipiente na mesma unidade de medida, determine

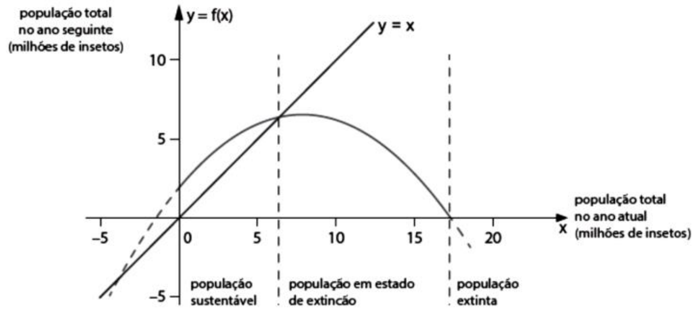
a) os quocientes $\frac{P_A}{P_B}$ e $\frac{P_R}{P_B}$;
b) o número n_A de bolas azuis e o número n_B de bolas brancas no recipiente.

15 **Unifesp 2016** A densidade populacional de cada distrito da cidade de South Hill, denotada por D (em número de habitantes por km^2), está relacionada à distância x, em quilômetros, do distrito ao centro da cidade. A fórmula que relaciona D e x é dada por $D = 5 + 30x - 15x^2$.

a) Um distrito, localizado no centro da cidade de São Paulo, tem densidade populacional de 16,5 hab/km^2. Comparando a densidade populacional do distrito que fica no centro da cidade de South Hill com a do distrito do centro da cidade de São Paulo, a segunda supera a primeira em y%. Calcule y.
b) Determine a que distância do centro da cidade de South Hill a densidade populacional é máxima. Qual é o valor dessa densidade máxima?

14 **Unesp 2016** O gráfico da parábola dada pela função $f(x)=-\frac{3}{40}\left(x^2-16x-24\right)$ indica, para uma determinada população de insetos, a relação entre a população total atual (x) e a população total no ano seguinte, que seria f(x). Por exemplo, se a população atual de insetos é de 1 milhão (x = 1), no ano seguinte será de 2,925 milhões, já que f(1) = 2,925.

Dizemos que uma população de insetos está em tamanho sustentável quando a população total do ano seguinte é maior ou igual à população total atual, o que pode ser identificado graficamente com o auxílio da reta em azul (y = x).



Determine a população total atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero $\left(\text{adote } \sqrt{22}=4{,}7\right)$, e determine a população total atual para qual a sustentabilidade é máxima, ou seja, o valor de x para o qual a diferença entre a população do ano seguinte e do ano atual, nessa ordem, é a maior possível.

13 **Unifesp 2018** Raquel imprimiu um número x de fotografias ao custo unitário de 54 centavos. Cada foto foi vendida ao preço de 75 centavos sobrando, no final do período de vendas, y fotografias sem vender, o que resultou em um prejuízo de 12 reais em relação ao custo total das impressões.

a) Calcule quantas fotografias foram impressas, para o caso em que y = 100.
b) Determine a expressão de y em função de x para a situação descrita no enunciado.

Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 4

27. a) Os pontos fixos de f são as raízes da equação $\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+1=x$.

Simplificando, tem-se: $2x^2 - x - 3 = 0$, cujas raízes são -1 e $\frac{3}{2}$.

b) O gráfico de f: $y=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+1 \therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(y-1)=1$ (hipérbole).

Assíntotas: $x=-\frac{1}{2}$ e $y=1$.

Raiz: $x=-\frac{3}{2}$.

Eixo y: (0; 3).

26. a) Como ocorre o equilíbrio do recipiente com os três casos, temos:

$$\begin{cases} 16P_B = 10P_B + 5P_A \\ 16P_B = 4P_R \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{P_A}{P_B} = \frac{6}{5}} \text{ e } \boxed{\frac{P_R}{P_B} = 4}$$

b) Igualando agora com o peso do recipiente com as n_A bolas azuis e n_B bolas brancas, temos:

$$n_B \cdot P_B + n_A \cdot P_A + P_R = 16P_B \Rightarrow n_B + n_A \frac{P_A}{P_B} = 16 - \frac{P_R}{P_B} \Rightarrow 5n_B + 6n_A = 60$$

com n_A e n_B inteiros positivos.

Isolando n_B, temos:

$$n_B = \frac{60 - 6n_A}{5} = \frac{6(10 - n_A)}{5}$$

O que implica que:

n_B é múltiplo de 6 e

$10 - n_A$ é múltiplo de 5.

Logo $n_B \in \{6, 12, 18, 24, ...\}$

Se $n_B = 6 \Rightarrow n_A = 5$

Se $n_B = 12 \Rightarrow n_A = 0$ (não convém)

Se $n_B > 12 \Rightarrow n_A < 0$ (não convém)

Portanto: $n_A = 5$ e $n_B = 6$

15. a) De acordo com o enunciado, a densidade populacional do distrito que fica no centro da cidade de South Hill é dada por $D = 5 + 30 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 \Leftrightarrow D = 5$ hab/km².

Como a densidade populacional do distrito localizado no centro de São Paulo é 16,5 hab/km², temos $\frac{16{,}5 - 5}{5} = 2{,}3 = 230\%$. Ou seja $\boxed{y = 230}$.

b) A distância do centro da cidade de South Hill, onde a densidade é máxima é dada por $x_v = \frac{-(30)}{2 \cdot (-15)} = 1$km, e o valor da densidade máxima é dado por $D = 5 + 30 \cdot 1 - 15 \cdot 1^2 = \boxed{20 \text{ hab/km}^2}$.

14. Segundo o enunciado, x representa a população de insetos atual, enquanto f(x) representa a população de insetos daqui a um ano.

A **primeira pergunta** pede a condição para o qual "a população daqui a um ano será zero". Ou seja, para o qual teremos f(x) = 0. Assim:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{40} \cdot (x^2 - 16x - 24) = 0 \Rightarrow x^2 - 16x - 24 = 0$$

Por se tratar de uma equação comum de 2º grau, resolvendo por Báskhara, temos:

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 16 \cdot 16 + 4 \cdot 24 = 16 \cdot (16 + 6) = 16 \cdot 22$$

$$x = \frac{-(-16) \pm 4 \cdot \sqrt{22}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{16 \pm 4 \cdot \sqrt{22}}{2} \Rightarrow x = 8 \pm 2 \cdot \sqrt{22} \Rightarrow x \cong 8 \pm 2 \cdot 4{,}7$$

Repare que uma das raízes é negativa (e deve ser descartada). A outra raiz é a correta, com valor de aproximadamente **17,4 milhões de insetos** – o que está de acordo com o valor sugerido no gráfico.

A **segunda pergunta** estabelece uma ideia chamada sustentabilidade da população e a define como sendo a diferença entre a população futura, f(x), e a atual, x. Matematicamente: S = f(x) – x.

Desenvolvendo, criaremos outra função de 2º grau:

$$S(x) = -\frac{3}{40}(x^2 - 16x - 24) - x \Rightarrow S(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{9}{5} - x \Rightarrow S(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$$

O valor de x que maximiza essa função ocorre no vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{40}\right)} \therefore x_v \cong 1{,}33$$

Ou seja, a máxima sustentabilidade ocorre quando a população atual for de aproximadamente **1,33 milhão de insetos**.

13. a) De acordo com o enunciado, tem-se:

- Preço de custo total das fotos: 0,54x.
- Total de unidades vendidas: x – y.
- Valor arrecadado com a venda: 0,75 · (x – y).

Sendo prejuízo a diferença negativa entre o preço de venda e o preço de custo, tem-se:

$-12 = 0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x$

E, para y = 100, tem-se:

$\boxed{x = 300 \text{ fotos}}$

b) $-12 = 0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x \Leftrightarrow$

$-12 = 0{,}75x - 0{,}75y - 0{,}54x \Leftrightarrow$

$-12 = 0{,}21x - 0{,}75y \Leftrightarrow$

$12 = -0{,}21x + 0{,}75y$

$$\boxed{\frac{4}{3} \cdot (12 + 0{,}21 \cdot x) = y \text{ com } x \text{ e } y \in \mathbb{N}^*}$$

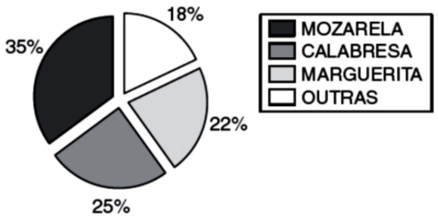
LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 5

31 **Unifesp 2014** O carro modelo *flex* de Cláudia, que estava com o tanque vazio, foi totalmente abastecido com 20% de gasolina comum e 80% de etanol. Quando o tanque estava com o combustível em 40% de sua capacidade, Cláudia retornou ao posto para reabastecimento e completou o tanque apenas com gasolina comum.

a) Após o reabastecimento, qual a porcentagem de gasolina comum no tanque?

b) No primeiro abastecimento, o preço do litro de gasolina comum no posto superava o de etanol em 50% e, na ocasião do reabastecimento, apenas em 40%. Sabe-se que houve 10% de aumento no preço do litro de etanol, do primeiro para o segundo abastecimento, o que fez com que o preço da gasolina comum superasse o do etanol em R$ 0,704 na ocasião do reabastecimento. Calcule o preço do litro de gasolina comum na ocasião do primeiro abastecimento.

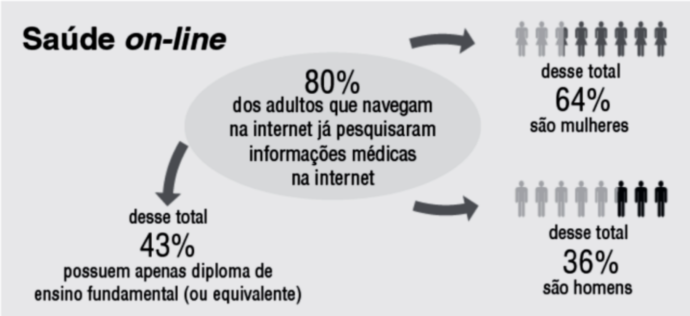
30 **Unicamp 2014** A *pizza* é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de *pizzas*, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico abaixo exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de *pizza*.



a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas *pizzas* são consumidas diariamente no Brasil?

b) Quantas *pizzas* de mozarela e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

29 **Unifesp 2015**



Os resultados apresentados no infográfico foram obtidos a partir de um levantamento informal feito com 1.840 adultos, dos quais 210 eram mulheres que nunca haviam navegado na internet, 130 eram homens que nunca haviam navegado na internet, e os demais pesquisados navegam na internet.

a) Dos 1.840 adultos, quantos nunca pesquisaram informações médicas na internet?

b) Do grupo das pessoas que navegam na internet e já fizeram pesquisas de informações médicas nesse ambiente, sabe-se que 12,5% das mulheres possuem apenas o diploma de ensino fundamental (ou equivalente) em sua escolarização. Desse mesmo grupo de pessoas, quantos são os homens que possuem apenas o diploma de ensino fundamental (ou equivalente) em sua escolarização?

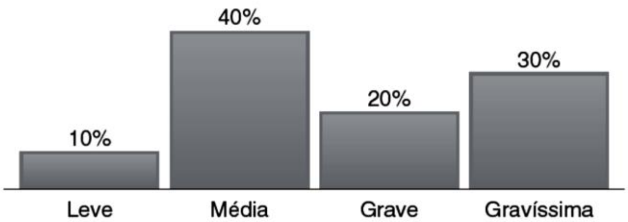
28 **Unicamp 2015** O Código de Trânsito Brasileiro classifica as infrações, de acordo com a sua natureza, em leves, médias, graves e gravíssimas. A cada tipo corresponde uma pontuação e uma multa em reais, conforme a tabela abaixo.

Infração	Pontuação	Multa*
Leve	3 pontos	R$ 53,00
Média	4 pontos	R$ 86,00
Grave	5 pontos	R$ 128,00
Gravíssima	7 pontos	R$ 192,00

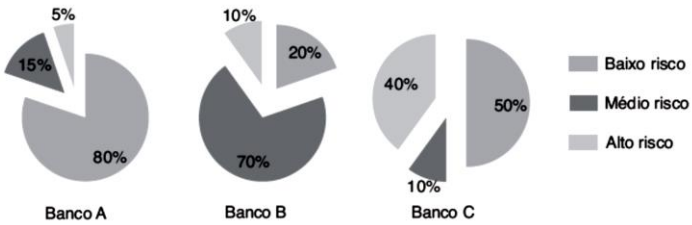
* Valores arredondados

a) Um condutor acumulou 13 pontos em infrações. Determine todas as possibilidades quanto à quantidade e à natureza das infrações cometidas por esse condutor.

b) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição de 1.000 infrações cometidas em certa cidade, conforme a sua natureza. Determine a soma das multas aplicadas.



20 **Unesp 2016** Os gráficos indicam a diversificação de aplicações para um investimento, por grau de risco, sugeridas por cada um dos bancos A, B e C.

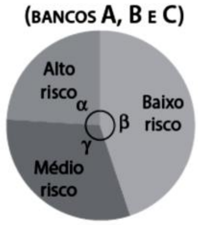


Um investidor decidiu aplicar um capital de R$ 6.000,00, em partes que foram distribuídas pelos três bancos, seguindo a diversificação do grau de risco sugerida por cada banco. O capital aplicado foi distribuído da seguinte forma:

- Total de R$ 1.000,00 no banco A (considerando os três graus de risco juntos).
- R$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco (nos três bancos juntos).
- R$ 1.850,00 em investimentos de médio risco (nos três bancos juntos).
- R$ 1.450,00 em investimentos de alto risco (nos três bancos juntos).

O gráfico a seguir representa a diversificação da aplicação, por grau de risco, juntando os três bancos.

Investimento total de R$ 6.000,00
(bancos A, B e C)



Calcule os montantes de capital que foram investidos nos bancos B e C, e as medidas dos ângulos α, β e γ, indicados no gráfico.

19 **Unifesp 2018** Um estudo médico recrutou 160 pacientes homens com histórico de alterações no antígeno prostático específico (PSA). Os pacientes foram submetidos aos exames laboratoriais de PSA total e de PSA livre e, em seguida, a uma biópsia da próstata. A biópsia apontou, em cada caso, se a patologia era maligna ou benigna. A tabela apresenta os resultados das médias dos exames laboratoriais do grupo de pacientes com patologia maligna e do grupo de pacientes com patologia benigna.

PSA (média)	Biópsia com indicação de patologia maligna	Biópsia com indicação de patologia benigna
PSA total (ng/mL)	10	8
PSA livre (ng/mL)	1,9	2
PSA livre ÷ PSA total	0,19	0,25

Pedro foi um dos pacientes que participou do estudo e seus exames indicaram PSA total = 9,5 ng/mL e PSA livre = 2,28 ng/mL.

a) Calcule o quociente entre o PSA livre e o PSA total de Pedro. Usando esse indicador como referência na comparação com os dados da tabela, indique se o resultado do exame de Pedro está numericamente mais próximo ao resultado médio do exame de quem tem a patologia maligna ou de quem tem a patologia benigna.

b) Sabendo que 40% dos pacientes foram diagnosticados com patologia maligna, calcule a média do PSA total dos 160 pacientes que participaram do estudo.

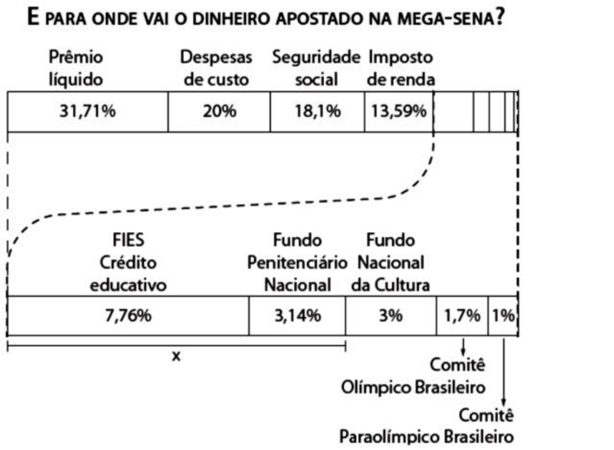
18 **Unicamp 2018** A tabela a seguir exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

ANO	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1.000,00	R$ 1.200,00	R$ 1.500,00
2018	R$ 1.150,00	R$ 1.320,00	R$ 1.680,00

a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.

b) Uma família tem três filhos matriculados na **Escola B**. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

17 **Unesp 2018** Observe o infográfico, publicado recentemente em um jornal digital.



(www.nexojornal.com.br. Adaptado.)

a) Admitindo-se que o total de dinheiro apostado em determinado concurso da Mega-Sena tenha sido 15 milhões de reais, calcule quanto desse dinheiro, em reais, foi destinado ao esporte brasileiro (comitês olímpico e paraolímpico, juntos).

b) Admita que o comprimento da barra do gráfico correspondente às "Despesas de custo" tenha 13,28 unidades de comprimento (13,28 u). Para que a proposta do infográfico esteja matematicamente correta, calcule a medida indicada no infográfico por x, em unidades u de comprimento.

Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 5

31. a) Sendo P a porcentagem de gasolina, tem-se:

$$P = \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot T + \frac{60}{100} \cdot T, \text{ em que T é o volume do tanque.}$$

$$\therefore P = \frac{68}{100} \cdot T. \text{ Logo, } P = 68\% \cdot T$$

b) Sendo, inicialmente, x o preço do etanol, tem-se que, no primeiro abastecimento, os preços eram:

$P_i\text{etanol} = x$ e $P_i\text{gasolina} = 1{,}5x$

No segundo abastecimento, os preços eram:

$P_f\text{etanol} = 1{,}1x$ e $P_f\text{gasolina} = 1{,}4 \cdot 1{,}1x$

Do texto, tem-se:

$P_f\text{gasolina} - P_f\text{etanol} = 0{,}704$

$1{,}54x - 1{,}1x = 0{,}704$

$x = 1{,}6$

Logo, o preço inicial da gasolina era $P_i\text{ gasolina} = 1{,}5 \cdot 1{,}6 \Rightarrow$ $P_i\text{gasolina} = \text{R\$ } 2{,}40$.

30. a) Desconsiderando o consumo no Estado de São Paulo, restarão 47% das *pizzas* consumidas no Brasil por dia, portanto são consumidas $\frac{47}{100} \cdot 1.500.000 = 705.000$ *pizzas* por dia.

b) Já em São Paulo, temos 1.500.000 – 705.000 = 795.000 *pizzas* por dia, das quais 60% são mozarela ou calabresa, logo $\frac{60}{100} \cdot 795.000 = 477.000$ *pizzas*.

29. a) Dos 1.840 adultos consultados, aqueles que nunca pesquisaram informações médicas na internet são 210 + 130 = 340. Portanto, 340 pessoas nunca navegaram na internet.

Portanto, restaram 1.500 pessoas que navegaram na internet. Considerando esse grupo, 20% (300 pessoas) nunca pesquisaram informações médicas.

Logo, o valor total pedido é de 340 + 300 = 640 pessoas.

b) Por meio do enunciado, sabemos que 64% de 1.200 = 768. Assim, 768 são mulheres e, dessas, 12,5% (96) possuem diploma de Ensino Fundamental. Porém, do enunciado, temos também que 43% de 1.200 = 516. Assim, 516 pessoas possuem diploma de Ensino Fundamental.

Logo, o número de homens que possui esse diploma é de 516 – 96 = 420.

28. a) Podemos formar 13 pontos de 4 maneiras distintas:

1. Uma gravíssima e duas leves;
2. Duas graves e uma leve;
3. Uma grave e duas médias;
4. Uma média e três leves.

b) Do total de 1.000 infrações, 100 são multas leves, 400 médias, 200 graves e 300 gravíssimas.

Multiplicando a quantidade de cada tipo de infração pelo respectivo valor da multa, temos, em reais:

$100 \cdot 53 + 400 \cdot 86 + 200 \cdot 128 + 300 \cdot 192 = 122.900$

Portanto, a soma das multas aplicadas será de R$ 122.900,00.

20. Dos 1.000,00 reais aplicados no banco, 5% foram investidos em aplicações de alto risco. Restaram 6.000 – 1.000 = 5.000 reais para os bancos B e C. Sendo x o valor que foi aplicado no banco B e 5.000 – x no banco C, as quantias aplicadas em investimentos de alto risco foram 10% e 40%, respectivamente.

Assim, nas aplicações de alto risco, temos:

$$5\% \text{ de } 1.000 + 10\% \text{ de } x + 40\% \text{ de } (5.000 - x) = 1.450$$
$$50 + 0{,}1x + 2.000 - 0{,}4x = 1.450$$
$$-0{,}3x = -600$$
$$x = 2.000$$

Portanto, 2.000 reais foram aplicados no banco B e 5.000 – 2.000 = 3.000 reais no banco C.

No gráfico fornecido, os ângulos são proporcionais às quantias aplicadas. Então, podemos montar as regras de três a seguir:

Aplicações de alto risco

Valor (reais)		Ângulos
6.000	–	360°
1.450	–	α

$$\alpha = \frac{360 \cdot 1.450}{6.000}$$

Aplicações de alto risco

Valor (reais)		Ângulos
6.000	–	360°
2.700	–	β

$$\beta = \frac{360 \cdot 2.700}{6.000}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 360°$$
$$87° + 162° + \gamma = 360°$$
$$\gamma = 111°$$

19. a) O quociente é $\frac{2{,}28}{9{,}5} = 0{,}24$. O resultado do exame de Pedro está mais próximo de quem tem a patologia benigna.

b) Se 40% dos pacientes foram diagnosticados com patologia maligna, há 100% – 40% = 60% dos pacientes com patologia benigna.

Utilizando os dados da tabela, a média do PSA total é:

$$\frac{40 \cdot 10 + 60 \cdot 8}{100} = \boxed{8{,}8 \text{ ng/mL}}$$

18. a) Sabe-se que a variação percentual Δ% é dada por:

$$\Delta\% = \left(\left(\frac{\text{valor final} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}}\right) \cdot 100\right)\%.$$

Assim, tem-se:

$$\Delta\%_A = \left(\frac{1.150 - 1.000}{1.000}\right) \cdot 100\% = 15\%$$
$$\Delta\%_B = \left(\frac{1.320 - 1.200}{1.200}\right) \cdot 100\% = 10\%$$
$$\Delta\%_C = \left(\frac{1.680 - 1.500}{1.500}\right) \cdot 100\% = 12\% .$$

Logo, a escola que apresentou o MAIOR aumento percentual foi a escola A.

b) Em 2018, a família pagará na escola B:

100% da mensalidade do primeiro filho: R$ 1.320,00.

90% da mensalidade do segundo filho: R$ 1.188,00.

80% da mensalidade do terceiro filho: R$ 1.056,00.

Assim, a família pagará, em 2018, um total de R$ 3.564,00.

17. a) O valor destinado ao esporte brasileiro foi de (1,7% + 1%) de 15.000.000, ou seja, $0{,}027 \cdot 15.000.000 = 405.000$ reais.

b) Os comprimentos de cada barra são proporcionais às porcentagens. Como a primeira barra se refere a 100%, pode-se calcular seu comprimento y utilizando a regra de três:

Porcentagem		Comprimento
20%	——	13,28 u.c.
100%	——	y

$$y = \frac{100 \cdot 13{,}28}{20} = 66{,}4 \text{ u.c.}$$

A segunda barra tem o mesmo comprimento, mas refere-se a apenas 7,76% + 3,14% + 3% + 1,7% + 1% = 16,6%. O valor de x está associado a 7,76% + 3,14% = 10,9%. Assim, é possível montar a seguinte regra de três:

Porcentagem		Comprimento
16,6%	——	66,4 u.c.
10,9%	——	x

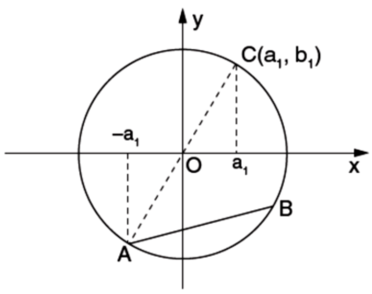
$$\boxed{x = \frac{66{,}4 \cdot 10{,}9}{16{,}6} = 43{,}6 \text{ u.c.}}$$

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 3

35 **Unifesp 2011** Considere a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 números reais estritamente positivos, tais que os pontos (a_1, b_1), (a_2, b_2) e (a_3, b_3) pertençam à reta y = 2x.

a) Sabendo-se que $Q(x) \dfrac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{b_1x^2 + b_2x + b_3}$ (com $b_1x^2 + b_2x + b_3 \neq 0$) independe de x, pede-se determinar seu valor.

b) Na figura, se os pontos A, B e C são vértices de um triângulo isósceles e o segmento $\overline{AC}$ é um dos diâmetros da circunferência convenientemente centrada na origem do sistema ortogonal, pede-se determinar a medida do segmento $\overline{AB}$ em função de a_1.



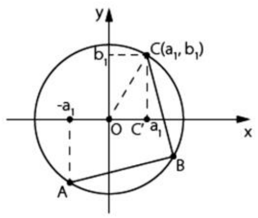
Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 3

35. $\left.\begin{matrix}(a_1, b_1)\\(a_2, b_2)\\(a_3, b_3)\end{matrix}\right\}$ pertencem à reta $y = 2x \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2a_1 \\ b_2 = 2a_2 \\ b_3 = 2a_3 \end{cases}$

a) $Q(x) = \dfrac{a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3}{b_1 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + b_3} = \dfrac{a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3}{2a_1 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x + 2a_3} =$

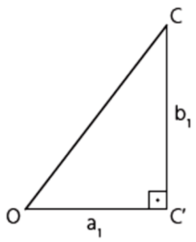
$= \dfrac{(a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3)}{2 \cdot (a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3)} \Rightarrow \boxed{Q(x) = \dfrac{1}{2}}$

b)



- Por semelhança de triângulos, tem-se que as coordenadas do ponto A é $(-a_1, -b_1)$.
- Como o triângulo ABC está inscrito na circunferência e o lado $\overline{AC}$ é um diâmetro, temos que o ângulo $A\hat{B}C$ é reto.

I) $\Delta OCC'$

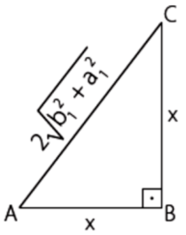


Pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{OC}^2 = b_1^2 + a_1^2 \Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{b_1^2 + a_1^2}$

II) $\overline{AC} = 2\overline{OC} \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{b_1^2 + a_1^2}$

III) ΔACB



Pelo Teorema de Pitágoras:

$4(b_1^2 + a_1^2) = x^2 + x^2$ (com $\overline{AB} = \overline{BC} = x$)

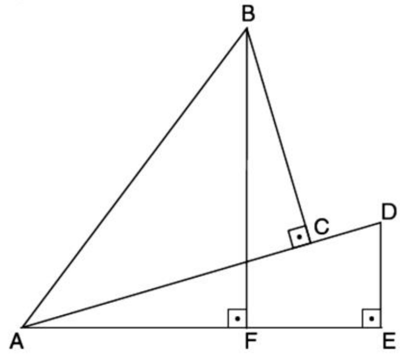
$4(b_1^2 + a_1^2) = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2(b_1^2 + a_1^2)}$

IV) Como $b_1 = 2a_1 \Rightarrow x = \sqrt{2((2a_1)^2 + a_1^2)} \Rightarrow x = \sqrt{2(4a_1^2 + a_1^2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{10a_1^2} \therefore \overline{AB} = a_1 \cdot \sqrt{10}$

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 4

36 **UFPE 2011** Na figura a seguir $\overline{AB} = \overline{AD} = 25$, $\overline{BC} = 15$ e $\overline{DE} = 7$. Os ângulos $D\hat{E}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{F}A$ são retos. Determine $\overline{AF}$.



Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 4

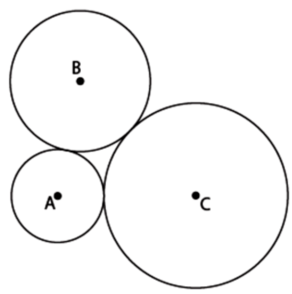
36. 15

LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 6

40 **ITA 2011** Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}$. No interior desse triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais, e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

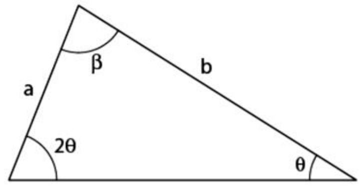
a) Determine o valor de *r*.
b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.
c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

26 **Unicamp 2017** A figura a seguir exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em *A*, *B* e *C* e raios de comprimentos *a*, *b* e *c*, respectivamente.



a) Determine os valores de *a*, *b* e *c*, sabendo que a distância entre *A* e *B* é de 5 *cm*, a distância entre *A* e *C* é de 6 *cm* e a distância entre *B* e *C* é de 9 *cm*.
b) Para *a* = 2 *cm* e *b* = 3 *cm*, determine o valor de *c* > *b* de modo que o triângulo de vértices em *A*, *B* e *C* seja retângulo.

25 **Unicamp 2018** A figura a seguir exibe um triângulo com lados de comprimentos *a*, *b* e *c* e ângulos internos θ, 2θ e β.



a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.

b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90°$.

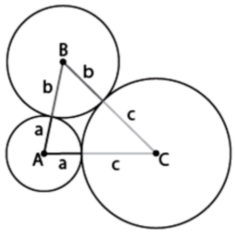
Gabarito - LIVRO 1 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 6

40. a) $r = \dfrac{1}{2}$

b) $(3\sqrt{3} - \pi)\text{cm}^2$

c) 1 cm

26. a) Do enunciado:



$$\begin{cases} AB = 5 \\ AC = 6 \\ BC = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a+c=6 \\ b+c=9 \end{cases}$$

Somando as equações, tem-se: $2a + 2b + 2c = 20 \Leftrightarrow a + b + c = 10\,\text{cm}$

Assim: $\begin{cases} a = (a+b+c) - (b+c) = 10 - 9 = 1\,\text{cm} \\ b = (a+b+c) - (a+c) = 10 - 6 = 4\,\text{cm} \\ c = (a+b+c) - (a+b) = 10 - 5 = 5\,\text{cm} \end{cases}$

$\boxed{a = 1\text{ cm},\ b = 4\text{ cm e } c = 5\text{ cm}}$

b) O triângulo ABC terá lados de medidas AB = a + b = 5 cm, AC = a + c = = 2 + c cm e BC = b + c = 3 + c cm.

O maior lado é necessariamente BC, já que AB = 5 = 2 + 3 = 2 + b < 2 + c < 3 + c = BC (pois b = 3 < c).

Se o triângulo satisfizer o teorema de Pitágoras, será retângulo.

Como o maior lado é BC, tem-se:

$(3+c)^2 = 5^2 + (2+c)^2 \Leftrightarrow 2c = 20 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}$

O valor c = 10 cm é a resposta procurada e gera o triângulo de lados AB = 5 cm, AC = 12 cm e BC = 13 cm.

27. a) Para c = 1, tem-se $f(x) = 2x + 1$. Assim:

$[f(x)]^3 = (2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

e

$f(x^3) = 2x^3 + 1\cdot$

Logo,

$[f(x)]^3 = f(x^3) \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^3 + 12x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1)^2 = 0$.

b) Por hipótese, a função g(x) é logarítmica de base 10. Com isso, a função g(x) está definida para todo *x* real se satisfizer a condição de existência da função logarítmica:

1. Base > 0.
2. Base ≠ 1.
3. Logaritmando > 0.

Assim, g(x) está definida para todo *x* real se:

$x \cdot f(x) + c > 0 \Rightarrow x \cdot (2x + c) + c > 0 \Rightarrow 2x^2 + cx + c > 0$, para todo *x* real.

Sabe-se que a função $2x^2 + cx + c$ é quadrática com a concavidade voltada para cima e, com isso, $2x^2 + cx + c > 0$, se, e somente se, o discriminante da expressão $2x^2 + cx + c$, que é dado por $c^2 - 8c$, for negativo.

Logo, $2x^2 + cx + c > 0 \Leftrightarrow c^2 - 8c < 0 \Leftrightarrow \boxed{0 < c < 8}$.

Portanto, g(x) está definida para todo 0 < c < 8.

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1– Capitulo 5

46 **Fuvest 2011** Determine o conjunto de todos os números reais *x* para os quais vale a desigualdade:

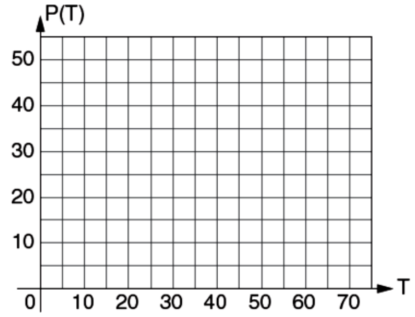
$$\left|\log_{16}(1-x^2) - \log_4(1+x)\right| < \frac{1}{2}.$$

45 **Unicamp 2012** Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma $P(T) = a \cdot 10^{bT}$, em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

Temperatura (°C)	Perda anual de capacidade (%)
0	1,6
55	20,0

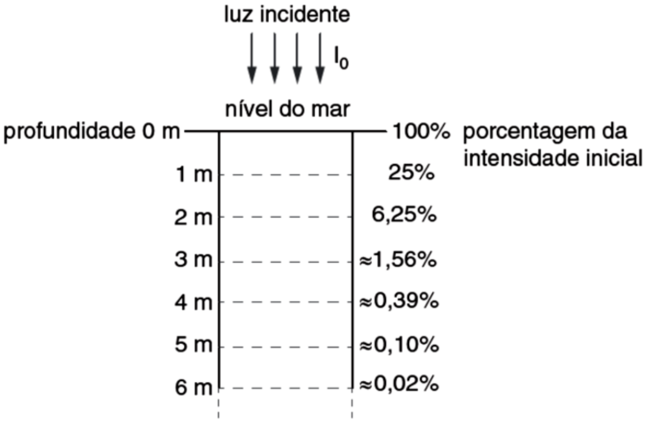
Com base na expressão de P(T) e nos dados da tabela:

a) esboce, a seguir, a curva que representa a função P(T), exibindo o percentual exato para T = 0 e T = 55;



b) determine as constantes a e b para a bateria em questão. Se necessário, use $\log_{10}(2) \approx 0{,}30$, $\log_{10}(3) \approx 0{,}48$ e $\log_{10}(5) \approx 0{,}70$.

44 **Unifesp 2014** A intensidade luminosa na água do mar razoavelmente limpa, que é denotada por I, decresce exponencialmente com o aumento da profundidade, que por sua vez é denotada por x e expressa em metro, como indica a figura.



a) Utilizando as informações da figura e denotando por I_0 a constante que representa a intensidade luminosa na água razoavelmente limpa ao nível do mar, determine I em função de x, com x sendo um inteiro positivo.

b) A relação empírica de Bouguer-Lambert nos diz que um feixe vertical de luz, quando penetra na água com intensidade de luz I_0, terá sua intensidade I de luz reduzida com a profundidade de x metros determinada pela fórmula $I = I_{0e}^{-\mu x}$, com *e* sendo o número de Euler, e μ um parâmetro denominado de coeficiente de absorção, que depende da pureza da água e do comprimento de onda do feixe. Utilizando a relação de Bouguer-Lambert no estudo da intensidade luminosa na água do mar razoavelmente limpa (dados da figura), determine o valor do parâmetro μ. Adote nos cálculos finais $\ln 2 = 0{,}69$.

43 **Unicamp 2014** A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0{,}5 + \log_3(t + 1)$, onde o tempo $t \geq 0$ é dado em anos.

a) Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?

b) Suponha que outro arbusto, nessa mesma fase de desenvolvimento, tem sua altura expressa pela função composta $g(t) = h(3t + 2)$. Verifique que a diferença $g(t) - h(t)$ é uma constante, isto é, não depende de *t*.

41 **Fuvest 2015** Resolva as inequações:

a) $x^3 - x^2 - 6x > 0$

b) $\log_2 (x^3 - x^2 - 6x) \leq 2$

42 **Unicamp 2015** Considere a função $f(x)=10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real *x*.

a) Mostre que $f(\log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_{10} 2 \approx 0.3$, encontre os valores de *x* para os quais $f(x) = 52$.

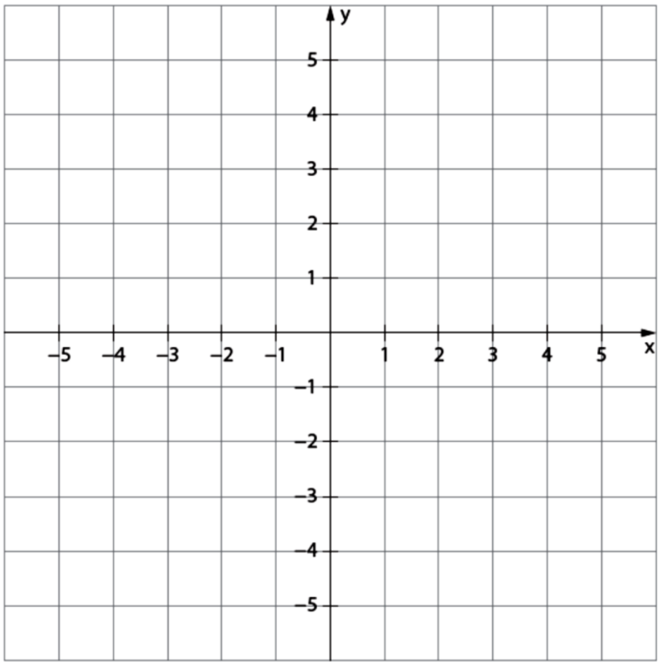
31 **Fuvest 2016** Considere as funções *f* e *g* definidas por

$$f(x) = 2\log_2(x-1),\ se\ x \in \mathbb{R}\ \ x > 1,$$
$$g(x) = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right),\ se\ x \in \mathbb{R}\ \ x < 4.$$

a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right), f(2), f(3), g(-4), g(0)$ e $g(2)$.

b) Encontre x, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.

c) Levando em conta os resultados dos itens a) e b), esboce os gráficos de *f* e de *g* no sistema cartesiano a seguir.



30 **Unifesp 2017**

Veja também em:
Matemática • Livro 1 • Frente 1 • Capítulo 4

Em um experimento, uma população inicial de 100 bactérias dobra a cada 3 horas. Sendo y o número de bactérias após x horas, segue que $y = 100 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$.

a) Depois de um certo número de horas a partir do início do experimento, a população de bactérias atingiu 1.677.721.600. Calcule esse número de horas. (dado: $1.677.721.600 = 256^3$)

b) Sabendo-se que da 45ª para a 48ª hora o número de bactérias aumentou de $100 \cdot 2^k$, calcule o valor de k.

Nota: Substituir o dado da questão por este : $16.777.216 = 256^3$.

29 **Unesp 2017** Leia a matéria publicada em junho de 2016.

Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias

O dia mundial do vento, 15 de junho, terá um marco simbólico este ano. Antes do final do mês, a fonte de energia que começou a se tornar realidade no país há seis anos alcançará 10 GW, sendo que o potencial brasileiro é de 500 GW. A perspectiva é a de que, em metade deste tempo, o Brasil duplique os 10 GW.

Disponível em: <www.portalabeeolica.org.br>. (Adapt.).

Considerando que a perspectiva de crescimento continue dobrando a cada três anos, calcule o ano em que o Brasil atingirá 64% da utilização do seu potencial eólico. Em seguida, calcule o ano aproximado em que o Brasil atingirá 100% da utilização do seu potencial eólico, empregando um modelo exponencial de base 2 e adotando log 2 = 0,3 no cálculo final.

28 **Fuvest 2017** Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$$c(t) = 400 - k\log_3(at+1),$$

em que t é dado em horas e $c(t)$ é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas.

a) Qual é a concentração do analgésico no instante inicial $t = 0$?

b) Calcule as constantes a e k, sabendo que, no instante $t = 2$, a concentração do analgésico no sangue é metade da concentração no instante inicial e que, no instante $t = 8$, a concentração do analgésico no sangue é nula.

27 **Unicamp 2018** Sendo c um número real, considere a função afim $f(x) = 2x + c$, definida para todo número real x.

a) Encontre todas as soluções da equação $[f(x)]^3 = f(x^3)$, para $c = 1$.

b) Determine todos os valores de c para os quais a função $g(x) = \log(xf(x) + c)$ esteja definida para todo número real x.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 5

46. Partiremos da condição de existência do logaritmo em que o logaritmando deve ser um número positivo.

Para que $\log_{16}(1-x^2)$ exista: $(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ (I)

Para que $\log_4(1+x)$ exista: $(1+x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$ (II)

Logo, das relações (I) e (II): $-1 < x < 1$ (III)

Agora, vamos resolver o módulo da equação:

$$\left|\log_{16}(1-x^2) - \log_4(1+x)\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\left|\frac{\log_4(1-x^2)}{2} - \log_4(1+x)\right| < 1$$

$$\left|\log_4(1-x^2) - 2\cdot\log_4(1+x)\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\log_4(1-x^2) - \log_4(1+x)^2\right| < 1$$

$$\left|\log_4\left[\frac{(1-x^2)}{(1+x)\dagger}\right]\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\log_4\left[\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x)\dagger}\right]\right| < 1$$

$$\left|\log_4\left[\frac{(1-x)}{(1+x)}\right]\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_4\left[\frac{(1-x)}{(1+x)}\right] < 1 \Leftrightarrow \log_4\frac{1}{4} < \log_4\left[\frac{(1-x)}{(1+x)}\right] < \log_4 4 \quad \text{(IV)}$$

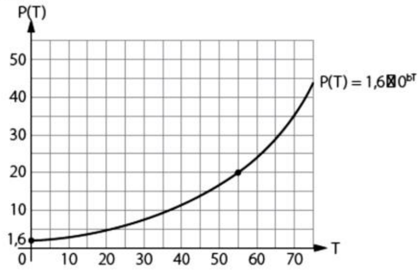
$$\frac{1}{4} < \left[\frac{(1-x)}{(1+x)}\right] < 4$$

$$\begin{cases}(1-x) < (1+x)\cdot 4 \Leftrightarrow 1-x < 4+1x \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5} \\ (1-x)\cdot 4 > (1+x) \Leftrightarrow 4-4x > 1+x \Leftrightarrow x < \frac{3}{5}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$$

Das condições (III) e (IV), podemos determinar o conjunto de todos os números reais x para os quais vale a desigualdade proposta.

$$\boxed{V = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}\right\}}$$

45. a) Temos uma função exponencial crescente e com assíntota horizontal (y = 0, eixo x):



b) $P(T) = a\cdot 10^{bT} \Rightarrow \begin{cases}1{,}6 = a\cdot 10^{b\cdot 0} \\ 20 = a\cdot 10^{b\cdot 55}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1{,}6 = a \\ 20 = a\cdot 10^{55b}\end{cases}$

Substituindo a primeira equação do sistema anterior na segunda equação, tem-se:

$$20 = 1{,}6\cdot 10^{55b} \Leftrightarrow 10^{55b} = \frac{20}{1{,}6} = \frac{200}{16} = \frac{25}{2} = \frac{5^2}{2}$$

Aplicando "log na base 10" aos dois membros da equação:

$$\log 10^{55b} = \log\frac{5^2}{1}$$

$$(55\cdot b)\log 10 = 2\log 5 - \log 2$$

$$55\cdot b = 2\cdot 0{,}70 - 0{,}3$$

$$b = \frac{1{,}1}{55} = 0{,}02$$

$$\therefore \boxed{a = 1{,}6 \text{ e } b = 0{,}02}$$

44. a) Notemos que, a cada metro, a porcentagem fica dividida por 4 e, como x deve ser inteiro, tem-se que I(x) é uma PG de razão $q=\frac{1}{4}$, logo:

$$\boxed{I(x)=I_0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x}$$

b) Igualando a expressão obtida em (a) com a dada no texto, tem-se:

$$I_0\left(\frac{1}{4}\right)^x=I_0\cdot e^{-\mu x}$$

Utilizando x = 1, tem-se:

$$\frac{1}{4}=e^{-\mu}\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(e^{-\mu}\right)\Rightarrow -\mu=\ln\left(2^{-2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu=-2\cdot\ln 2\Rightarrow -\mu=-2\cdot 0{,}69$$

$$\therefore \boxed{\mu=1{,}38}$$

43. a) Chamaremos t_i o instante de tempo em que o arbusto tem altura 0,5 m e t_f o instante em que tem altura 1,5 m, logo:

$h(t_i) = 0{,}5$ e $h(t_f) = 1{,}5$

Portanto:

$0{,}5 + \log_3(t_i + 1) = 0{,}5 \Rightarrow t_i = 0$

$0{,}5 + \log(t_f + 1) = 1{,}5 \Rightarrow t_f = 2$

Então, o tempo necessário para crescer de 0,5 m para 1,5 m é de 2 anos.

b) $g(t) = h(3t + 2) = 0{,}5 + \log_3(3t + 2 + 1)$

Logo:

$g(t) - h(t) = 0{,}5 + \log_3(3t + 3) - [0{,}5 + \log_3(t + 1)] =$

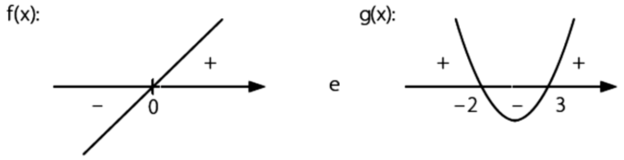
$= \log_3(3t + 3) - \log_3(t + 1) = \log_3 3 + \log_3(t + 1) - \log_3(t + 1) = \log_3 3 = 1$

Portanto:

$g(t) - h(t) = 1$ m

41. a) $x^3 - x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) > 0$

Fazendo o estudo do sinal de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - x - 6$, temos:



Quadro de sinais:

−2 0 3

−	−	+	+	f
+	−	−	+	g
−	+	−	+	f − g

$\therefore\ S=\{x\in\mathbb{R}\,/-2<x<0 \text{ ou } x>3\}$

b) $\log_2\left(x^3-x^2-6x\right)\le 2$

$\boxed{CE\ \therefore\ -2<x<0 \text{ ou } x>3}$

$\log_2\left(x^3-x^2-6x\right)\le\log_2 4\ \therefore x^3-x^2-6x-4\le 0$

Como −1 é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 6x - 4$, p(x) é divisível por (x+1), logo:

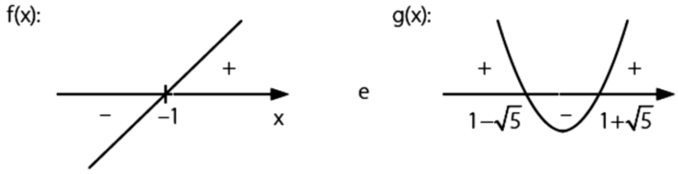
$p(x)=(x+1)\left(x^2-2x-4\right)$, pois

	1	−1	−6	−4
−1	1	−2	−4	0

Dessa forma, as raízes de p(x) são −1, $1-\sqrt{5}$ e $1+\sqrt{5}$.

Portanto, a inequação fica $(x+1)\left(x^2-2x-4\right)\le 0$.

Fazendo o estudo do sinal de $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 - 2x - 4$, temos:



Quadro de sinais:

$1-\sqrt{5}$ −1 $1+\sqrt{5}$

−	−	+	+	f
+	−	−	+	g
−	+	−	+	f − g

Logo, a solução de $\log_2\left(x^3-x^2-6x\right)\le 2$ é

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/-2<x\le 1-\sqrt{5} \text{ ou } -1\le x<0 \text{ ou } 3<x\le 1+\sqrt{5}\right\}$

42. a) $f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=10^{1+\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+10^{1-\log\left(2+\sqrt{3}\right)}=10\cdot 10^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{10}{10^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}}=$

$=10\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{10}{2+\sqrt{3}}=20+10\sqrt{3}+20-10\sqrt{3}\ \therefore\ f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=40,$

logo é um número inteiro.

b) $f(x)=52 \rightarrow 10^{1+x}+10^{1-x}=52$

$10\cdot 10^x+\frac{10}{10^x}=52$

Substituindo $10^x = y$, temos:

$10y^2-52y+10=0 \rightarrow y=5 \text{ ou } y=\frac{1}{5}$

Logo, $10^x = 5$ ou $10^x=\frac{1}{5}\rightarrow$

$x = \log 5$ ou $x = -\log 5$

Porém, $\log 5=\log\left(\frac{10}{2}\right)=1-0{,}3=0{,}7$

$\therefore\ x=0{,}7 \text{ ou } x=-0{,}7$

$S=\{-0{,}7;0{,}7\}$

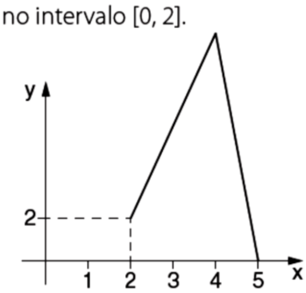
LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capítulo 6

50 **Fuvest 2012** Considere a função f, cujo domínio é o intervalo fechado [0, 5] e que está definida pelas condições:

para $0 \le x \le 1$, tem-se $f(x) = 3x + 1$;

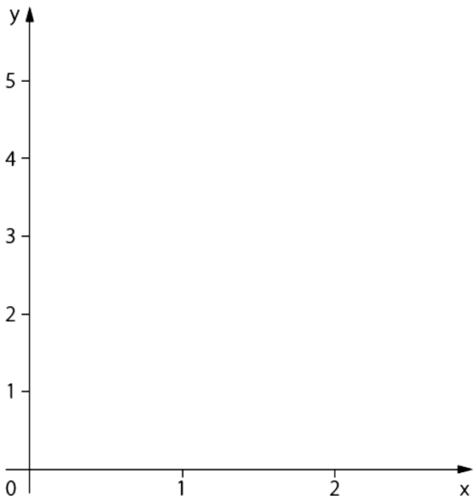
para $1 < x < 2$, tem-se $f(x) = -2x + 6$;

- f é linear no intervalo [2, 4] e também no intervalo [4, 5], conforme mostra a figura a seguir;
- a área sob o gráfico de f no intervalo [2, 5] é o triplo da área sob o gráfico de f no intervalo [0, 2].



Com base nessas informações:

a) desenhe, no sistema de coordenadas a seguir, o gráfico de f no intervalo [0, 2];



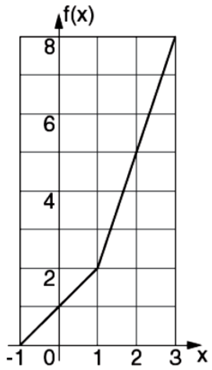
b) determine a área sob o gráfico de ***f*** no intervalo [0, 2];

c) determine ***f*** (4).

51 **Fuvest 2012** Determine para quais valores reais de ***x*** é verdadeira a desigualdade $\left|x^2 - 10x + 21\right| \leq |3x - 15|$.

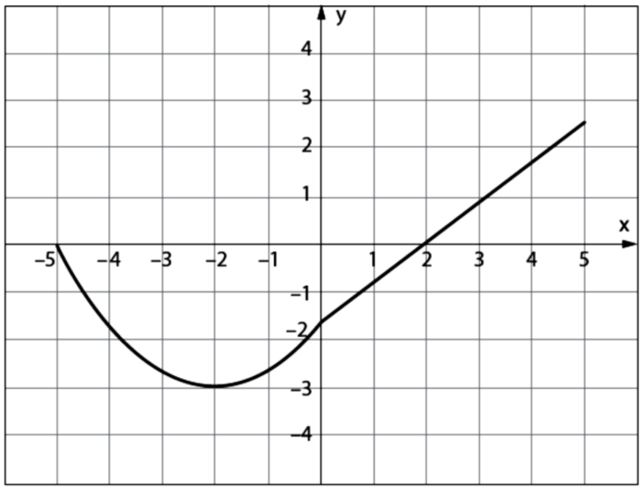
52 **Unicamp 2012** Considere a função f(x) = 2x + |x + p|, definida para x real.

a) A figura a seguir mostra o gráfico de f(x) para um valor específico de p. Determine esse valor.



b) Supondo, agora, que p = −3, determine os valores de x que satisfazem a equação f(x) = 12.

36 **Fuvest 2016** A figura a seguir representa o gráfico de uma função $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Note que $f(-5) = f(2) = 0$. A restrição de f ao intervalo [−5, 0] tem como gráfico parte de uma parábola com vértice no ponto (−2, 3); restrita ao intervalo [0, 5], f tem como gráfico um segmento de reta.



a) Calcule $f(-1)$ e $f(3)$.

Usando os sistemas de eixos da folha de respostas, esboce

b) o gráfico de $g(x) = |f(x)|$, $x \in [-5, 5]$;

c) o gráfico de $h(x) = f(|x|)$, $x \in [-5, 5]$.

37 **Unicamp 2016** Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

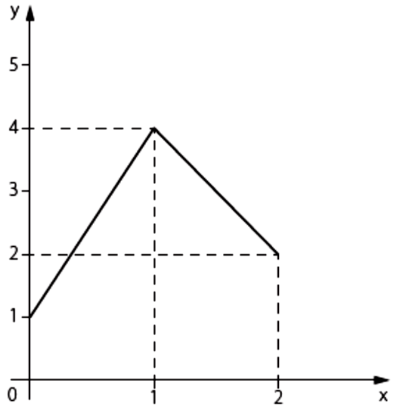
a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leq x \leq 4$.

b) Determine os valores dos números reais a e b para os quais a equação $\log_a(x + b) = f(x)$ admite como soluções $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$.

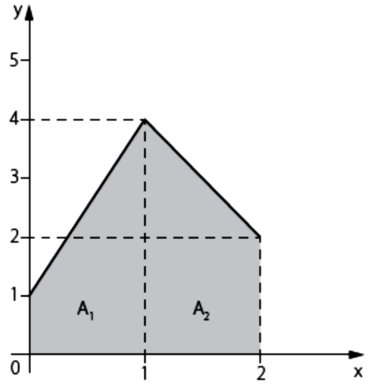
50. a) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & 0\le x\le 1\\ -2x+6, & 1<x<2\end{cases}$

$x=0 \Rightarrow y_1=1 \quad x=1 \Rightarrow y_2=4$

$x=1 \Rightarrow y_1=4 \quad x=2 \Rightarrow y_2=2$



b)



$$\text{Área: } A_1+A_2=(4+1)\cdot\frac{1}{2}+(4+2)\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+3=\frac{11}{2}$$

$$\boxed{\text{Área: } \frac{11}{2}}$$

c) $A_3+A_4=(f(4)+2)\cdot\frac{2}{2}+(f(4))\cdot\frac{1}{2}=3\cdot\frac{11}{2}$

$2f(4)+4+f(4)=33 \Rightarrow f(4)=\frac{29}{3}$

$$\boxed{f(4)=\frac{29}{3}}$$

51. $|x^2-10x+21|\le|3x-15|$

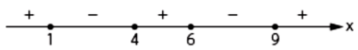
$(x^2-10x+21)^2-(3x-15)^2\le 0$

$(x^2-10x+21-3x+15)\cdot(x^2-10x+21+3x-15)\le 0$

$(x^2-13x+36)\cdot(x^2-7x+6)\le 0$

$(x-9)(x-4)(x-1)(x-6)\le 0$

Vamos montar o quadro de sinais da função:



Assim: $\boxed{S=[1;4]\cup[6;9]}$

52. a) Podemos tomar os pontos do gráfico para obter o valor de p. Um ponto muito conveniente é (1; 2), onde a função modular "quebra" de padrão.

Assim: $f(x) = 2x + |x + p|$, mas, como $f(1) = 2$, tem-se:

$2 = 2\cdot 1 + |1 + p| \Rightarrow |1 + p| = 0 \Rightarrow 1 + p = 0 \therefore \boxed{p=-1}$

b) Substituindo os valores fornecidos, temos:

$f(x) = 2x + |x + p| \Rightarrow 12 = 2x + |x - 3|$

Uma possível abordagem para resolver essa equação modular é criar *hipóteses complementares* sobre seu conteúdo, assim:

1ª hipótese: $x - 3 \ge 0$.

A equação pode ser reescrita:

$12=2x+(x-3) \Leftrightarrow 3x=15 \Leftrightarrow x=5$(compatível com a hipótese).

36. a) Por simetria, a segunda raiz da parábola vale 1. Assim, a equação geral para parábola é: $f(x) = a\cdot(x - 1)\cdot(x + 5)$. Como $f(-2) = -3$, então:

$-3=a\cdot(-2-1)\cdot(-2+5)\Rightarrow a=\frac{1}{3}$

Assim, $f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1-1)\cdot(-1+5)\Rightarrow \boxed{f(-1)=-\frac{8}{3}}$

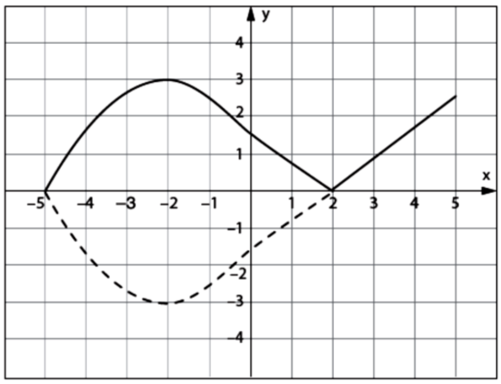
Em $x = 0$, a parábola e a reta se encontram, logo $f(0)=-\frac{5}{3}$.

Assim, a equação da reta para $x > 0$ é: $f(x)=ax-\frac{5}{3}$.

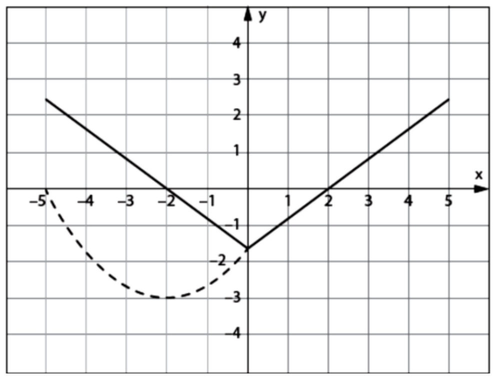
Como $f(2) = 0$, então: $0=a\cdot 2-\frac{5}{3}\Rightarrow a=\frac{5}{6}$

Assim, $f(3)=3\cdot\frac{5}{6}-\frac{5}{3}\Rightarrow \boxed{f(3)=\frac{5}{6}}$

b)



c)



37. Inicialmente, cumpre esclarecer que, pela definição de módulo, pode-se concluir que:

$$\begin{cases} |2x-4| = 2x-4, \text{ para } x \geq 2 \\ |2x-4| = -2x+4, \text{ para } x < 2 \end{cases}$$

Sendo assim, para o intervalo real $-4 \leq x \leq 4$, define-se a função $f(x) = |2x-4| + x - 5$ da seguinte forma:

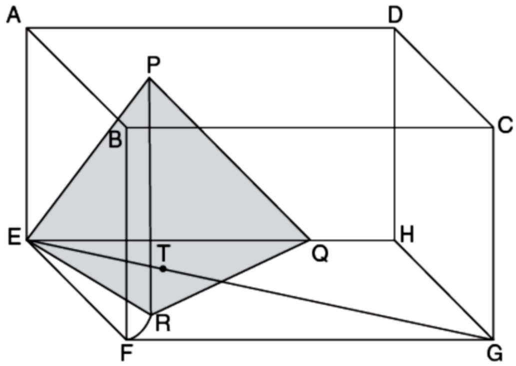
$$\begin{cases} f(x) = 2x-4+x-5 \Rightarrow f(x) = 3x-9, \text{ para } 2 \leq x \leq 4 \\ f(x) = -2x+4+x-5 \Rightarrow f(x) = -x-1, \text{ para } -4 \leq x < 2 \end{cases}$$

a) Insta observar que a função supramencionada é composta de dois intervalos em cada um dos quais tem-se uma função do primeiro grau; resultando, portanto, em dois segmentos de reta. Para traçá-los, faz-se necessário obter dois pontos para cada intervalo. Sendo assim, cria-se a tabela:

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1– Capitulo 7

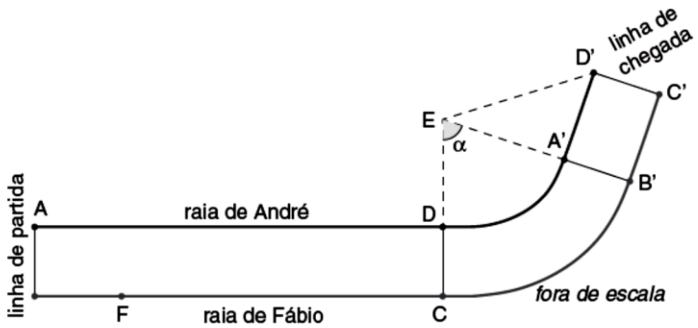
56 **Unifesp 2013** Na figura, ABCDEFGH é um paralelepípedo reto-retângulo, e PQRE é um tetraedro regular de lado 6 cm, conforme indica a figura. Sabe-se ainda que:

- P e R pertencem, respectivamente, às faces ABCD e EFGH;
- Q pertence à aresta $\overline{EH}$;
- T é baricentro do triângulo ERQ e pertence à diagonal $\overline{EG}$ da face EFGH;
- $\widehat{RF}$ é um arco de circunferência de centro E.



a) Calcule a medida do arco $\widehat{RF}$, em centímetros.
b) Calcule o volume do paralelepípedo ABCDEFGH, em cm^3.

55 **Unesp 2015** A figura representa duas raias de uma pista de atletismo plana. Fábio (F) e André (A) vão apostar uma corrida nessa pista, cada um correndo em uma das raias. Fábio largará à distância FB da linha de partida para que seu percurso total, de F até a chegada em C', tenha o mesmo comprimento do que o percurso total de André, que irá de A até D'.



Considere os dados:

- ABCD e A'B'C'D' são retângulos.
- B', A' e E estão alinhados.
- C, D e E estão alinhados.
- $\widehat{A'D}$ e $\widehat{B'C}$ são arcos de circunferências de centro E.

Sabendo que AB = 10 m, BC = 98 m, ED = 30 m, ED' = 34 m e $\alpha = 72°$, calcule o comprimento da pista de A até D' e, em seguida, calcule a distância FB. Adote nos cálculos finais $\pi = 3$.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 7

56. a) Do enunciado, tem-se:

$H\hat{E}R = 60°$ e $H\hat{E}F = 90°$; assim, $R\hat{E}F = 30°$.

A medida do comprimento do arco $\widehat{RF}$ é dada por:

$$C = \frac{30°}{360°} \cdot 2\pi R = \frac{30°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6 \Rightarrow \boxed{C = \pi \text{ cm}}$$

b) Dado que T é baricentro do ΔERQ e pertence à diagonal $\overline{EG}$, tem-se:

$H\hat{E}G = 30°$; $\overline{RQ} \perp \overline{EG}$ e $\overline{RQ} \cap \overline{EG} = \{M\}$, tal que M é ponto médio de $\overline{RQ}$.

O triângulo MEQ é semelhante ao triângulo HEG, pois $E\hat{M}Q \cong E\hat{H}G$ e $H\hat{E}G \cong M\hat{E}Q$; assim:

$$\frac{HE}{ME} = \frac{HG}{MQ} \Leftrightarrow \frac{HE}{\frac{6\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow HE = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

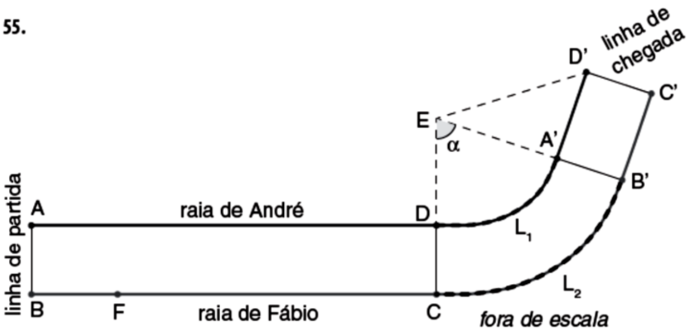
A altura H do tetraedro é tal que H = PT é dada por:

$$(PT)^2 + (ET)^2 = (EP)^2 \Leftrightarrow H^2 + 12 = 36 \Leftrightarrow H = 2\sqrt{6} \quad (H > 0)$$

Logo, o volume do paralelepípedo ABCDEFGH é de

$$V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{V = 216\sqrt{2} \text{ cm}^3}$$

55.



Inicialmente, note que 72° equivale a $\frac{2\pi}{5}$ radianos.

Assim, $\frac{L1}{30} = \frac{2\pi}{5}$. E, então, L1 = 12πm = 36m

Ademais, $\frac{L_2}{L_1} = \frac{40}{30}$. Logo, $L_2 = \frac{4}{3} \cdot 36 = 48$ m

Pelo Teorema de Pitágoras (ΔA'ED'), temos:

$(A'D')^2 + (30)^2 = (34)^2 \therefore A'D' = 16$ m

Portanto, o comprimento da pista de A até D' é igual a:

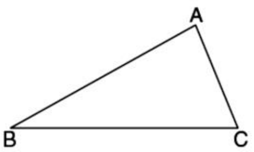
98 m + 36 m + 16 m = 150 m

Temos também: $FB = L_2 - L_1$

Logo, FB = 48 m – 36 m = 12 m

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 8

59 **Fuvest 2012** No triângulo acutângulo *ABC*, ilustrado na figura, o comprimento do lado $\overline{BC}$ mede $\sqrt{15}/5$, o ângulo interno de vértice *C* mede α, e o ângulo interno de vértice B mede α/2.



Sabe-se, também, que 2cos(2 α) + 3cos α + 1 = 0.
Nessas condições, calcule:

a) o valor de sen α;

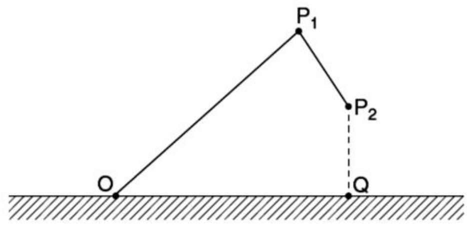
b) o comprimento do lado $\overline{AC}$.

60 **Unifesp 2012** A função $D(t) = 12 + (1{,}6) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180}(t+10)\right)$ fornece uma aproximação da duração do dia (diferença em horas entre o horário do pôr do sol e o horário do nascer do sol) numa cidade do Sul do país, no dia t de 2010. A variável inteira t, que representa o dia, varia de 1 a 365, sendo t = 1 correspondente ao dia 1° de janeiro e t = 365 correspondente ao dia 31 de dezembro. O argumento da função cosseno é medido em radianos. Com base nessa função, determine:

a) a duração do dia 19.02.2010, expressando o resultado em horas e minutos.

b) em quantos dias no ano de 2010 a duração do dia naquela cidade foi menor ou igual a doze horas.

57 **Fuvest 2013** Um guindaste, instalado em um terreno plano, tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão.



Na figura, os pontos O, P_1 e P_2 representam, respectivamente, a articulação de um dos braços com a base, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço $\overline{OP_1}$ tem comprimento 6 e o braço $\overline{P_1P_2}$ tem comprimento 2. Num dado momento, a altura de P_2 é 2, P_2 está a uma altura menor do que P_1 e a distância de O a P_2 é $2\sqrt{10}$. Sendo Q o pé da perpendicular de P_2 ao plano do chão, determine:

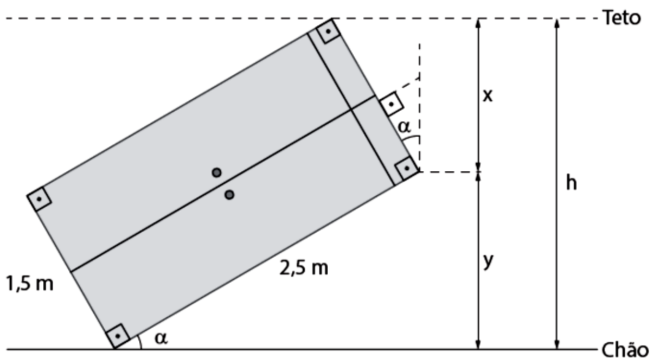
a) o seno e o cosseno do ângulo $P_2\hat{O}Q$ entre a reta $\overleftrightarrow{OP_2}$ e o plano do chão;

b) a medida do ângulo $O\hat{P_1}P_2$ entre os braços do guindaste;

c) o seno do ângulo $P_1\hat{O}Q$ entre o braço $\overline{OP_1}$ e o plano do chão.

58 **Unesp 2013** Sabendo-se que cos (2x) = $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$, para quais valores de x a função $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \le x \le 2\pi$?

40 **Unifesp 2016** Por razões técnicas, um armário de altura 2,5 metros e largura 1,5 metro está sendo deslocado por um corredor, de altura h metros, na posição mostrada pela figura.



a) Calcule h para o caso em que α = 30º.

b) Calcule h para o caso em que x = 1,2 m.

39 **Fuvest 2018** Considere as funções $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ e $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$ definidas por *f*(*x*) = *sen x* e *g*(*x*) = *cos x*. Sendo *f* e *g* bijetoras, existem funções f^{-1} e g^{-1} tais que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$ e $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = id$, em que *id* é a função identidade.

a) Para $0 \le \alpha \le 1$, mostre que $(g \circ f^{-1})(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

b) Mostre que $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

59. a) Dado que 2 cos(2α) + 3 cosα + 1 = 0, temos que:

$$2\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) + 3\cos\alpha + 1 = 0$$

$$2\left(2\cos^2\alpha - 1\right) + 3\cos\alpha + 1 = 0$$

$$4\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 1 = 0$$

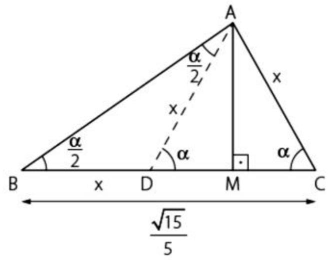
$$\cos\alpha = -1 \text{ (não convém, pois } 0 < \alpha < 180^\circ\text{)}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{4} \text{ (convém)}$$

Assim, pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \therefore \boxed{\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

b)



Traçar $AD = x$, dessa forma teremos 2 triângulos isósceles, ΔADC e ΔABD.

Sendo $\overline{AM}$ a altura do ΔADC e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, temos que $DM = MC = \frac{x}{4}$.

Assim, $BD + DM + MC = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow x + \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5} \therefore \boxed{x = \frac{2\sqrt{15}}{15}}$.

60. a) O dia 19 de fevereiro é o 50º dia do ano (t = 50).

Assim:

$$D(50) = 12 + 1{,}6 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{180} \cdot (50 + 10)\right] = 12 + 1{,}6 \cdot \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(50) = 12{,}8\text{h}$$

A duração do dia pedido será $\boxed{\text{12 horas e 48 minutos}}$.

b) Uma abordagem possível é avaliar em quais dias, ao longo do ano, a duração é de exatamente 12 horas:

$$D(t) = 12 \Leftrightarrow 12 + 1{,}6 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{180} \cdot (t + 10)\right] = 12\text{h}$$

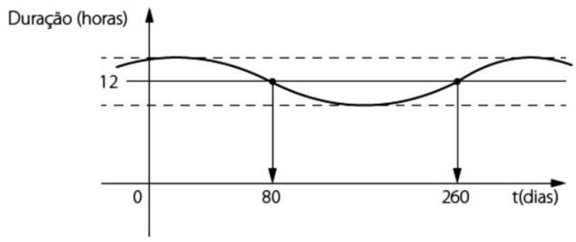
$$\cos\left[\frac{\pi}{180} \cdot (t + 10)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{180} \cdot (t + 10) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Leftrightarrow t = 80 + 180 \cdot k \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Como temos o intervalo de $1 \le t \le 365$, existem 2 soluções possíveis:

Para $k = 0 \Rightarrow t = 80$ dias

Para $k = 1 \Rightarrow t = 260$ dias

O padrão pode ser mais bem interpretado em um gráfico:



Entre o 80º e o 260º dia, incluindo os extremos, existe um total de $260 - 79 = \boxed{181 \text{ dias}}$.

57. a) O triângulo OQP_2 é retângulo em Q, assim temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2}{2\sqrt{10}} \therefore \boxed{\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{10} \therefore \boxed{\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

b) Os triângulos OP_1P_2 e OQP_2 são congruentes, logo o ângulo $O\hat{P}_1P_2$ é também 90º.

c) O ângulo $P_1\hat{O}Q$ mede 2α, logo:

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\text{sen}2\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \therefore \boxed{\text{sen}2\alpha = \frac{3}{5}}$$

58. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cdot \left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)$$

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cdot \left[\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\right]$$

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \cos^2 x - 1\right)$$

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x - \frac{1}{2}$$

A função assumirá seu valor mínimo quando cosx for igual a $x_v = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x_v = -\frac{1}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_v = -\frac{1}{2}$.

Então, como $0 \le x \le 2\pi$ e $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}}$.

40. a) De acordo com o enunciado, temos:

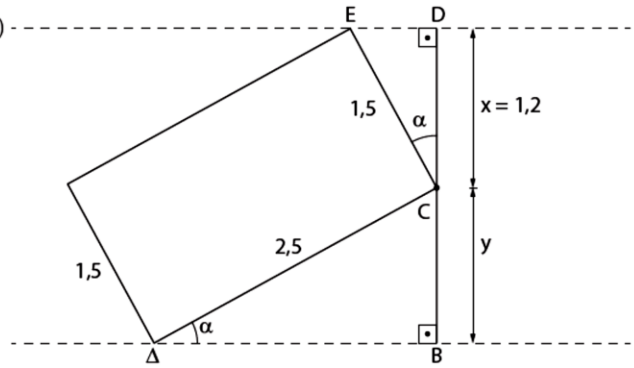
$$\text{sen}30^\circ = \frac{y}{2{,}5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2{,}5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{1{,}5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1{,}5\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Assim: } h = y + x = \frac{5}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\text{O valor de } h = \left(\frac{5 + 3\sqrt{3}}{4}\right)\text{m.}}$$

b)



No Δ CDE, tem-se: $\cos\alpha = \frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{4}{5}$

Lembrando que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \text{ e } \left(0^\circ < \alpha < 90^\circ\right)$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$$

No triângulo ABC, temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{2{,}5} = \frac{3}{5}$$
$$y = 3 \cdot \frac{2{,}5}{5} = 1{,}5$$
Assim, $h = x + y = 1{,}2 + 1{,}5 = 2{,}7\text{m}$.

$\boxed{\text{O valor de } h = 2{,}7 \text{ m}}$

39. a) Vamos primeiro analisar $f^{-1}(\alpha)$.

Digamos que $f^{-1}(\alpha) = \beta \Rightarrow f(\beta) = \alpha \Rightarrow \text{sen}\beta = \alpha$.

Agora, vamos a $(g \circ f^{-1})(\alpha)$:

$$(g \circ f^{-1})(\alpha) = g(f^{-1}(\alpha)) = g(\beta) = \cos\beta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\beta} = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

b) Agora, vamos calcular $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$:

Sabe-se que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Ainda, tem-se que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\frac{\pi}{4}.\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Logo: $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 6

64 **Unicamp 2011** Uma empresa imprime cerca de 12.000 páginas de relatórios por mês, usando uma impressora jato de tinta colorida. Excluindo a amortização do valor da impressora, o custo de impressão depende do preço do papel e dos cartuchos de tinta. A resma de papel (500 folhas) custa R$ 10,00. Já o preço e o rendimento aproximado dos cartuchos de tinta da impressora são dados na tabela a seguir.

Cartucho (cor/modelo)	Preço (R$)	Rendimento (páginas)
Preto BR	R$ 90,00	810
Colorido BR	R$ 120,00	600
Preto AR	R$ 150,00	2.400
Colorido AR	R$ 270,00	1.200

a) Qual cartucho preto e qual cartucho colorido a empresa deveria usar para o custo por página ser o menor possível?

b) Por razões logísticas, a empresa usa apenas cartuchos de alto rendimento (os modelos do tipo AR) e imprime apenas em um lado do papel (ou seja, não há impressão no verso das folhas). Se 20% das páginas dos relatórios são coloridas, quanto a empresa gasta mensalmente com impressão, excluindo a amortização da impressora? Suponha, para simplificar, que as páginas coloridas consomem apenas o cartucho colorido.

63 **Unicamp 2014** O peso médio (média aritmética dos pesos) dos 100 alunos de uma academia de ginástica é igual a 75 kg. O peso médio dos homens é 90 kg e o das mulheres é 65 kg.

a) Quantos homens frequentam a academia?

b) Se não são considerados os 10 alunos mais pesados, o peso médio cai de 75 kg para 72 kg. Qual é o peso médio desses 10 alunos?

43 **Unifesp 2016** A heparina é um medicamento de ação anticoagulante prescrito em diversas patologias. De acordo com indicação médica, um paciente de 72 kg deverá receber 100 unidades de heparina por quilograma por hora (via intravenosa).

No rótulo da solução de heparina a ser ministrada consta a informação 10.000 unidades/50 mL.

a) Calcule a quantidade de heparina, em mL, que esse paciente deverá receber por hora.

b) Sabendo que 20 gotas equivalem a 1 mL, esse paciente deverá receber 1 gota a cada x segundos. Calcule x.

42 **Fuvest 2016** O Sistema Cantareira é constituído por represas que fornecem água para a Região Metropolitana de São Paulo. Chama-se de "volume útil" do Sistema os 982 bilhões de litros que ficam acima do nível a partir do qual a água pode ser retirada sem bombeamento. Com o uso de técnicas mais elaboradas, é possível retirar e tratar parte da água armazenada abaixo desse nível. A partir de outubro de 2014, a Sabesp passou a contabilizar uma parcela de 287 bilhões de litros desse volume adicional, denominada "reserva técnica" ou "volume morto", e chamou de "volume total" a soma do volume útil com a reserva técnica. A parte do volume total ainda disponível para consumo foi chamada de "volume armazenado".

O primeiro índice usado pela Sabesp para divulgar o nível do Sistema, após o início do uso da reserva técnica, foi o percentual do volume armazenado em relação ao volume útil (e não ao volume total). Chama-se este percentual de Índice 1.

a) Calcule o valor que terá o Índice 1 quando as represas estiverem completamente cheias, supondo que a definição de "volume armazenado" não tenha mudado.

A partir de abril de 2015, a Sabesp passou a divulgar outros dois índices, além do Índice 1 (veja o Quadro). Note que o Índice 3 pode assumir valores negativos e valerá 100% quando as represas do Sistema estiverem completamente cheias.

b) No momento em que o Índice 1 for 50%, que valores terão os Índices 2 e 3?

c) Qual é o valor do Índice 2 no momento em que o Índice 3 é negativo e vale –10%?

Quadro	
$\text{Índice } 1 = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume útil}} \times 100\%$	$\text{Índice } 2 = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume total}} \times 100\%$
$\text{Índice } 3 = \frac{(\text{volume armazenado}) - (\text{volume da reserva técnica})}{\text{volume útil}} \times 100\%$	

41 Unicamp 2017

Veja também em:
Matemática • Livro 1 • Frente 2 • Capítulo 5

Diversas padarias e lanchonetes vendem o "cafezinho" e o "cafezinho com leite". Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, **A** e **B**, que vendem esses produtos com um volume de 60 mL, conforme mostra a tabela a seguir.

Produto	A	B
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento **A** para o estabelecimento **B**, para os dois produtos.

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos conforme indica a figura a seguir. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento **B**, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.

Cafezinho | Cafezinho com leite

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 6

64. a) Vamos calcular quantas páginas podemos imprimir por real gasto:

Preto BR: $\frac{810}{90} = 9$ pág/R\$ Colorido BR: $\frac{600}{120} = 5$ pág/R\$

Preto AR: $\frac{2400}{150} = 16$ pág/R\$ Colorido AR: $\frac{1200}{270} \approx 4{,}4$ pág/R\$

Os cartuchos que deveriam ser usados são Colorido BR e Preto AR.

b) 12.000 páginas equivalem a 24 resmas, assim o custo com o papel será de R$ 240,00 por mês.

O número de páginas coloridas é de $0{,}2 \cdot 12.000 = 2.400$.

Gasto com a impressão das páginas coloridas:

$2.400 \cdot \frac{270}{1.200} = \text{R\$ } 540{,}00$

O número de páginas em preto: 9.600.

Gasto com a impressão das páginas em preto:

$9.600 \cdot \frac{150}{2.400} = \text{R\$ } 600{,}00$

Assim, o custo total da impressão é de:

R$ 240,00 + R$ 540,00 + R$ 600,00 = R$ 1.380,00

63. a) Com h representando o número de homens da academia, tem-se:

$\frac{90h + 65(100 - h)}{100} = 75 \Rightarrow h = 40$

Portanto, 40 homens frequentam a academia.

b) A soma do peso médio dos alunos é 7.500 kg.

Com x representando a soma dos 10 mais pesados, tem-se:

$\frac{7.500 - x}{90} = 72 \Rightarrow x = 1.020$

Portanto, o peso médio desses alunos é $\frac{1.020}{10} = 102$ kg.

43. a) O número de unidades de heparina a serem ministradas a esse paciente em uma hora é: $72 \cdot 100 = 7.200$ unidades. Portanto, em mL, temos:

$\frac{50 \cdot 7.200}{10.000} = \boxed{36 \text{ mL}}$.

b) Do item a, temos:

$36 \cdot 20$ gotas $= 720$ gotas. Logo, $\frac{720}{3.600} = 0{,}2$ gotas a cada segundo, ou seja, 1 gota a cada 5 segundos. Portanto $\boxed{x = 5}$.

42. a) $\text{índice } 1 = \frac{(982 + 287) \text{ bilhões}}{982 \text{ bilhões}} \cdot 100\% \cong 129\%$

b) Para o índice 1 ser 50%, o volume armazenado deve ser metade do volume útil, logo, 491 bilhões de litros.

$\text{índice } 2 = \frac{491 \text{ bilhões}}{(982 + 287) \text{ bilhões}} \cdot 100\% \cong 39\%$

$\text{índice } 3 = \frac{(491 - 287) \text{ bilhões}}{982 \text{ bilhões}} \cong 21\%$

c) Para o índice 3 ser –10%, tem-se o volume armazenado (V_A):

$-10\% = \frac{V_A - 287 \text{ bilhões}}{982 \text{ bilhões}} \cdot 100\% \Rightarrow V_A \cong 189 \text{ bilhões}$

$\text{índice } 2 = \frac{189 \text{ bilhões}}{(982 + 287) \text{ bilhões}} \cdot 100\% \cong 15\%$

41. a) Tomando como base os preços de A, as variações percentuais dos preços do cafezinho e do cafezinho com leite foram, respectivamente, iguais a:

cafezinho: $\frac{\text{R\$ } 3{,}00 - \text{R\$ } 2{,}00}{\text{R\$ } 2{,}00} = 0{,}5 = \boxed{50\%}$

cafezinho com leite $\frac{\text{R\$ } 4{,}00 - \text{R\$ } 2{,}50}{\text{R\$ } 2{,}50} = 0{,}6 = \boxed{60\%}$

b) Cada porção, tanto do cafezinho quanto do cafezinho com leite, tem volume de 60 mL. Assim, para o estabelecimento B, podemos dizer que o preço de 60 mL de café é igual a R$ 3,00. No cafezinho com leite, $\frac{2}{3}$ do volume é cafezinho, ou seja, $\frac{2}{3} \cdot 60 \text{ mL} = 40 \text{ mL}$, com um custo de $\frac{2}{3} \cdot \text{R\$ } 3{,}00 = \text{R\$ } 2{,}00$. Para os 20 mL de leite que sobraram, o custo é de R$ 4,00 – R$ 2,00 = R$ 2,00. Dessa forma, o custo do leite em B é igual a $\frac{\text{R\$ } 2{,}00}{0{,}02 \text{ L}} \cong \boxed{\text{R\$ } 100{,}00 \text{ por litro}}$.

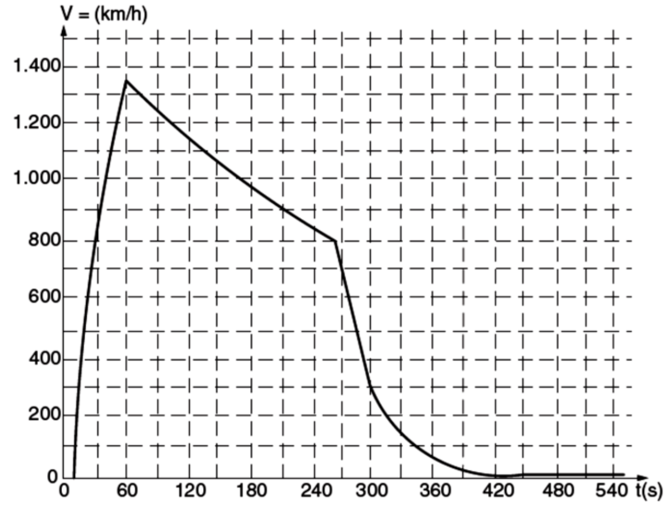
LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 7

66 Unicamp 2013 Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na tabela e no gráfico a seguir.

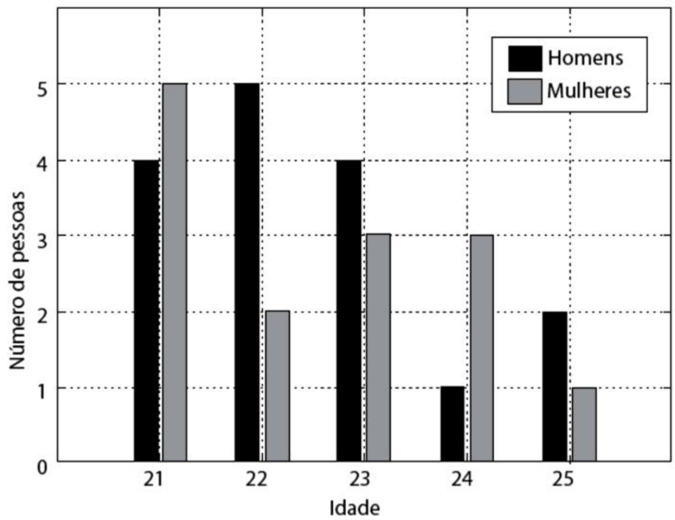
a) Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no 30º segundo.

Tempo (segundos)	0	1	1	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

b) Com base no gráfico, determine o valor aproximado da velocidade máxima atingida e o tempo, em segundos, em que Felix superou a velocidade do som. Considere a velocidade do som igual a 1.100 km/h.



45 **Unicamp 2016** O gráfico de barras a seguir exibe a distribuição da idade de um grupo de pessoas.



a) Mostre que, nesse grupo, a média de idade dos homens é igual à média de idade das mulheres.

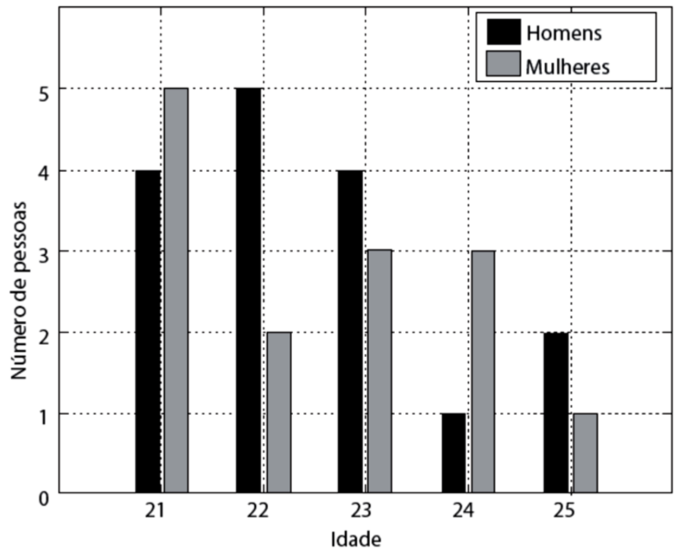
b) Escolhendo ao acaso um homem e uma mulher desse grupo, determine a probabilidade de que a soma de suas idades seja igual a 49 anos.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 7

66. a) De acordo com os dados da tabela, a velocidade é dada pelo produto do segundo considerado por 35. O valor da velocidade no minuto 30º é 30 × 35 = 1.050 km/h.

b) Observando o gráfico, a velocidade máxima está entre 1.300 km/h e 1.400 km/h e pode-se adotar o valor de 1.350 km/h como valor máximo. Félix superou a velocidade do som entre 30 s e 45 s, um valor aproximado para tal feito é a média aritmética entre eles, ou seja, 37, 5 s.

45. a) Observe o gráfico apresentado.



De acordo com seus dados, observa-se que a média (ponderada) das idades dos homens deste grupo (M_H) mensura-se por:

$$M_H = \frac{4 \cdot 21 + 5 \cdot 22 + 4 \cdot 23 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 25}{4 + 5 + 4 + 1 + 2} = 22{,}5$$

Analogamente, a média (também ponderada) das mulheres deste mesmo grupo (M_M), é dada por:

$$M_M = \frac{5 \cdot 21 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 23 + 3 \cdot 24 + 1 \cdot 25}{5 + 2 + 3 + 3 + 1} = 22{,}5$$

Com efeito, demonstra-se, como solicitado pelo enunciado, que a média de idade dos homens deste grupo é igual à média das mulheres.

b) Restringindo-se aos dados do enunciado, segundo o qual existem 16 homens e 14 mulheres, conclui-se que: para que a soma das idades de um homem e de uma mulher, escolhidos ao acaso dentre as condições apresentadas no problema, resulte em 49, ter-se-á, como estrutura lógica, os seguintes eventos: H_{24} e M_{25} ou H_{25} e M_{24} (sendo H_{24} um homem com 24 anos e M_{25} uma mulher com 25 anos; e H_{25} um homem com 25 anos e M_{24} uma mulher com 24 anos).

Sendo assim, tem-se:

H_{24} e M_{25} ou H_{25} e M_{24}

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{14} + \frac{2}{16} \cdot \frac{3}{14} = \frac{7}{224} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 = 3{,}125\%$$

Portanto, a probabilidade de a soma das idades de um homem e uma mulher, escolhidos ao acaso, resultar em 49 é 3,125%.

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 8

72 **Unifesp 2011** Progressão aritmética é uma sequência de números tal que a diferença entre cada um desses termos (a partir do segundo) e o seu antecessor é constante. Essa diferença constante é chamada "razão da progressão aritmética" e usualmente indicada por r.

a) Considere uma PA genérica finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) de razão r, na qual n é par. Determine a fórmula da soma dos termos de índice par dessa PA, em função de a_1, n e r.

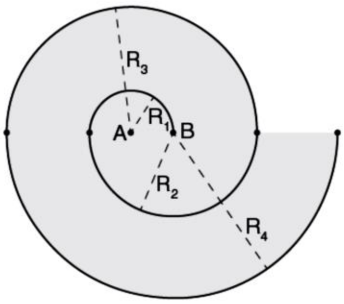
b) Qual a quantidade mínima de termos para que a soma dos termos da PA (−224, −220, −216, ...) seja positiva?

71 **Unicamp 2011** No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R$ 600 mil e uma despesa de R$ 800 mil. A empresa estuda, agora, alternativas para voltar a ter lucro.

a) Primeiramente, assuma que a receita não variará nos próximos meses, e que as despesas serão reduzidas, mensalmente, em exatos R$ 45 mil. Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de **n**, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.

b) Suponha, agora, que a receita aumentará 10% a cada mês, ou seja, que a receita obedecerá a uma progressão geométrica (PG) de razão 11/10. Nesse caso, escreva a expressão do termo geral dessa PG em função de **n**, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Determine qual será a receita acumulada em 10 meses. Se necessário, use $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}1^3 \approx 1{,}33$ e $1{,}1^5 \approx 1{,}61$.

70 **Unicamp 2012** Uma curva em formato espiral, composta por arcos de circunferência, pode ser construída a partir de dois pontos A e B, que se alternam como centros dos arcos. Esses arcos, por sua vez, são semicircunferências que concordam sequencialmente nos pontos de transição, como ilustra a figura a seguir, na qual supomos que a distância entre A e B mede 1 cm.



a) Determine a área da região destacada na figura.

b) Determine o comprimento da curva composta pelos primeiros 20 arcos de circunferência.

69 **Fuvest 2012** Considere uma progressão aritmética cujos três primeiros termos são dados por $a_1 = 1 + x$, $a_2 = 6x$, $a_3 = 2x^2 + 4$, em que x é um número real.

a) Determine os possíveis valores de *x*.

b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de *x* encontrado no item a.

68 **Unifesp 2013** A sequência (12, a, b), denominada S_1, e a sequência (c, d, e), denominada S_2, são progressões aritméticas formadas por números reais.

a) Somando 1 ao segundo termo e 5 ao terceiro termo de S_1, a nova sequência de três números reais passa a ser uma progressão geométrica crescente. Calcule a razão dessa PG.

b) Aplicando a função trigonométrica seno aos três termos de S_2, a nova sequência que se forma tem soma dos três termos igual a zero, e termo do meio diferente de zero. Determine a razão r de S_2, para o caso em $\frac{\pi}{2} < r < \pi$.

67 **Unicamp 2013** Numa piscina em formato de paralelepípedo, as medidas das arestas estão em progressão geométrica de razão $q > 1$.

a) Determine o quociente entre o perímetro da face de maior área e o perímetro da face de menor área.

b) Calcule o volume dessa piscina, considerando q = 2 e a área total do paralelepípedo igual a 2.

66 **Unicamp 2014** Dizemos que uma sequência de números reais não nulos ($a_1, a_2, a_3, a_4, ...$) é uma <u>progressão harmônica</u> se a sequência dos inversos ($1/a_1, 1/a_2, 1/a_3, 1/a_4, ...$) é uma progressão aritmética (PA).

a) Dada a progressão harmônica (2/5, 4/9, 1/2, …), encontre o seu sexto termo.

b) Sejam *a*, *b* e *c* termos consecutivos de uma progressão harmônica. Verifique que $b = 2ac/(a + c)$.

65 **Fuvest 2014** Considere o triângulo equilátero ΔA_0OB_0 de lado 7 cm.

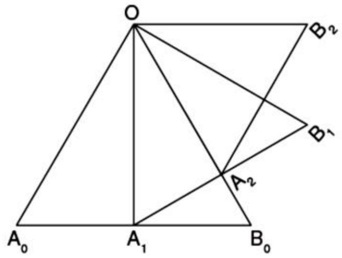


Figura obtida após aplicar o procedimento duas vezes.

a) Sendo A_1 o ponto médio do segmento $\overline{A_0B_0}$, e B_1 o ponto simétrico de A_1 em relação à reta determinada por O e B_0, determine o comprimento de $\overline{OB_1}$.

b) Repetindo a construção do item a), tomando agora como ponto de partida o triângulo ΔA_1OB_1, pode-se obter o triângulo ΔA_2OB_2 tal que A_2 é o ponto médio do segmento $\overline{A_1B_1}$, e B_2 o ponto simétrico de A_2 em relação à reta determinada por O e B_1. Repetindo mais uma vez o procedimento, obtém-se o triângulo ΔA_3OB_3. Assim, sucessivamente, pode-se construir uma sequência de triângulos ΔA_nOB_n tais que, para todo $n \geq 1$, A_n é o ponto médio de $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$, e B_n, o ponto simétrico de A_n em relação à reta determinada por O e B_{n-1}, conforme a figura. Denotando por A_n, para $n \geq 1$, o comprimento do segmento $\overline{A_{n-1}A_n}$, verifique que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma progressão geométrica. Determine sua razão.

c) Determine, em função de *n*, uma expressão para o comprimento da linha poligonal $A_0A_1A_2 ... A_n$, $n \geq 1$.

O ponto P' é simétrico ao ponto P em relação à reta r se o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta r e a interseção de $\overline{PP'}$ e r é o ponto médio de $\overline{PP'}$.

46 **Fuvest 2018** Considere a sequência $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, e $an = a_{n-4}$, para $n \geq 5$. Defina $S_n^k = a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}$ para $k \geq 0$, isto é, S_n^k é a soma de $k + 1$ termos consecutivos da sequência começando do n-ésimo, por exemplo, $S_2^1 = 4 + 1 = 5$.

a) Encontre n e k tal que $S_n^k = 20$.

b) Para cada inteiro j, $1 \leq j \leq 12$, encontre n e k tal que $S_n^k = j$.

c) Mostre que, para qualquer inteiro j, $j \geq 1$ existem inteiros $n \geq 1$ e $k \geq 0$ tais que $S_n^k = j$.

47 **Unicamp 2018** Considere a sequência de números reais (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 8

72. a) A sequência (a_2, a_4, a_6, ..., a_n) é PA com primeiro termo a_2, razão $2r$ e $\frac{n}{2}$ termos.

Lembrando que a soma de n termos é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$ e a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$S = S_{\frac{n}{2}} = \frac{\left(a_2 + a_2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\cdot 2r\right)\cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{\left(a_2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)r\right)n}{2} =$$

$$= \frac{\left(a_1 + r + \left(\frac{n}{2} - 1\right)r\right)\cdot 1}{2} = \frac{\left(a_1 + \frac{n}{2}r\right)n}{2}$$

$$S = \frac{(2a_1 + nr)n}{4}$$

b) PA (−224, −220, −216, ...)

$a_1 = -224$, $R = 4$

$a_n = -224 + (n - 1)\cdot 4$

$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$

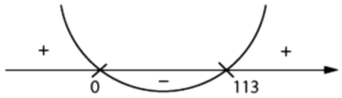
$S_n > 0$

$(-224 + (-224 + (n - 1)4))\frac{n}{2} > 0$

$-224n + (n - 1)n\cdot 2 > 0$

$2n^2 - 2n - 224n > 0$

$n^2 - 113n > 0$



$$n(n - 113) > 0 \Rightarrow \begin{cases} n < 0 \text{ (não convém, pois } n > 0) \\ n > 113 \end{cases}$$

Logo, $\boxed{n_{min} = 114}$.

71. a) Seja PA (x_1; x_2; x_3; ...; x_n) a sequência de despesas.

Como $x_1 = 800$ mil reais e $r = -45$ mil reais, assim:

$x_n = 800 + (n - 1)\cdot(-45) \Rightarrow x_n = (845 - 45n)$ mil reais.

A despesa é menor que a receita de 600 mil reais quando

$845 - 45n < 600 \Rightarrow n > 5{,}4 \therefore n \geq 6$.

A despesa passará a ser menor que a receita em 6 − 1 = 5 meses.

b) Seja PG (x_1; x_2; x_3; ...; x_n) a sequência de receitas.

Temos $x_1 = 600$ mil e a razão $q = 1{,}1$. Termo geral das receitas:

$x_n = 600\cdot(1{,}1)^{n-1}$

Receita acumulada em 10 meses, em milhões de reais:

$$S_{10} = 600\cdot\frac{(1{,}1^{10} - 1)}{1{,}1 - 1} = \frac{600}{0{,}1}\cdot\left[(1{,}1)^5\right]^2 - 1 = 6.000\cdot\left[(1{,}61)^2 - 1\right] = 9.552{,}60$$

$\boxed{\text{Logo}: x_n = \text{R\$ } 9.552.600}$

70. a) Na figura, observa-se 4 semicircunferências, cujos raios são tais que: $R_1 = 1$; $R_2 = 2$; $R_3 = 3$ e $R_4 = 4$ (em centímetros).

A área da região destacada é dada pela soma das áreas das 2 semicircunferências de raios $R_3 = 3$ e $R_4 = 4$, assim:

Área: $\frac{\pi 3^2}{2} + \frac{\pi 4^2}{2}$

$\boxed{\text{Área}: \frac{25\pi}{2}\text{cm}^2}$

b) Os comprimentos dos arcos de circunferência formam uma progressão aritmética e o comprimento da curva é dado pela soma dos 20 primeiros termos dessa PA, assim:

$$PA = \left(\frac{2\pi 1}{2}, \frac{2\pi 2}{2}, \frac{2\pi 3}{2}, ..., \frac{2\pi 20}{2}\right)$$

$$PA = (\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, ..., 20\pi)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Leftrightarrow S_{20} = \frac{(\pi + 20\pi)20}{2} = 210\pi$$

$\boxed{\text{Comprimento da curva} = 210\pi \text{ cm.}}$

69. a) $PA\left(1 + x, 6x, 2x^2 + 4\right)$

$6x\cdot 2 = 1 + x + 2x^2 + 4$

$2x^2 - 11x + 5 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4}$$

$$x=\frac{11\pm 9}{4}\left\langle\begin{array}{l} x_1=5 \\ \\ x_2=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\boxed{x=5 \text{ ou } x=\frac{1}{2}}$$

b) Para $x=\frac{1}{2}$, temos: $PA\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} ...\right)$

$$a_1=\frac{3}{2}$$

$$R=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_{100}=a_1+99R \Rightarrow a_{100}=\frac{3}{2}+99\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow a_{100}=100\cdot\frac{3}{2}=150$$

Logo, a soma será dada por:

$$S_{100}=(a_1+a_{100})\cdot\frac{100}{2}$$

$$S_{100}=\left(\frac{3}{2}+150\right)\cdot 50$$

$$S_{100}=\frac{303}{2}\cdot 50=7.575$$

$$\boxed{S_{100}=7.575}$$

68. a) De acordo com o enunciado, tem-se:

$S_1=(12, a, b) \rightarrow PA$

Logo: $\frac{12+b}{2}=a \Leftrightarrow b=2a-12$ (I)

Somando 1 ao 1° termo e 5 ao 3° termo, tem-se:

$(12, a+1, b+5) \rightarrow PG$

Logo: $(a+1)^2=12\cdot(b+5)$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$a^2+2a+1=12\cdot[(2a-12)+5]$

$a^2+2a+1=12\cdot[2a-7]$

$a^2-22a+85=0$

Resolvendo a equação, tem-se:

$$a=\frac{22\pm 12}{2}\left\langle\begin{array}{l} 17 \\ \\ 5 \text{ (não convém, pois a PG é crescente)}\end{array}\right.$$

Sendo a = 17, temos $b=2\cdot(17)-12=22$, e a PG então é (12, 18, 27), cuja razão é $\boxed{q=\frac{3}{2}}$.

b) Se a sequência S_2 é uma PA de razão r, ela pode ser reescrita como:

$$S_2=(\underbrace{d-r}_{c}, d, \underbrace{d+r}_{e}).$$

Após aplicar a função trigonométrica "seno", os novos elementos passam a ser:

sen(d − r), sen d, sen(d+r).

Uma vez que sua soma é zero, tem-se:

$$\text{sen}(d-r)+\text{sen}\,d+\text{sen}(d+r)=0$$

$$\text{sen}\,d\cdot\cos r-\text{sen}\,r\cdot\cos d+\text{sen}\,d+\text{sen}\,d\cdot\cos r+\text{sen}\,r\cdot\cos d=0$$

$$2\cdot\text{sen}\,d\cdot\cos r+\text{sen}\,d=0$$

$$\text{sen}\,d\cdot(2\cos r+1)=0$$

$$\begin{cases}\text{sen}\,d=0 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ 2\cdot\cos r+1=0 \qquad \Rightarrow \cos r=\frac{-1}{2}, \text{como } \frac{\pi}{2}<r<\pi, \boxed{r=\frac{2\pi}{3}}.\end{cases}$$

67. a) Área das faces

$A_I=a^2q$ (menor)

$A_{II}=a^2q^2$

$A_{III}=a^2q^3$ (maior)

$2P_I=2a+2aq=2a(q+1)$

$2P_{III}=2aq+2aq^2=2aq(q+1)$

$$\boxed{\frac{2P_{III}}{2_I}=q}$$

b) $A_T=2(A_I+A_{II}+A_{III})=2(2a^2+4a^2+8a^2)=28a^2$

$28a^2=252 \Rightarrow a=3$

$V=a^3\cdot q^3$

$$\boxed{V=216\,m^3}$$

66. a) Se $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, ...\right)$ é PH, então $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2, ...\right)$ é PA, com $a_1=\frac{5}{2}$ e $r=-\frac{1}{4}$, logo o sexto termo da PA será $a_6=\frac{5}{2}+5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}$, o que implica que o sexto termo da PH é $\frac{4}{5}$.

b) Se (a, b, c) é uma PH, então $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ é PA.

O que implica que:

$$\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac} \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$$

65. a) A_1 é ponto médio de $\overline{A_0B_0} \Rightarrow \overline{OA_1}$ é mediana $\Rightarrow \overline{OA_1}$ é altura, pois ΔA_0OB_0 é equilátero.

B_1 é simétrico a A_1 em relação a $\overline{OB_0} \Rightarrow med(A_1\hat{A}_2B_0)=90°$

E, como $med(A_2\hat{B}_0A_1)=60°$ (triângulo equilátero), tem-se $med(B_0\hat{A}_1A_2)=30° \Rightarrow med(O\hat{A}_1A_2)=60°$

Como a figura é simétrica, $med(O\hat{B}_1A_2)=60°$, o que implica ΔOA_1B_1 é equilátero com lado $\overline{OB_1}$ medindo a altura do ΔA_0OB_0, logo: $\boxed{OB_1=\frac{7\sqrt{3}}{2}cm}$

b) Seguindo o raciocínio do item a), podemos concluir que cada um dos triângulos ΔA_nOB_n é equilátero, e seus lados medem a altura do triângulo $\Delta A_{n-1}OB_{n-1}$ e $\overline{A_{n-1}A_n}$ mede a metade dos lados do $\Delta A_{n-1}OB_{n-1}$.

$$\therefore a_1=A_0A_1=\frac{7}{2}\,cm$$

e

$$a_n=A_nA_{n-1}=\frac{altura_{\Delta A_{n-2}OB_{n-2}}}{2}=\frac{2(A_{n-1}\cdot A_{n-2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(A_{n-1}\cdot A_{n-2})$$

$$\therefore \boxed{a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n-1}} \Rightarrow (a_n) \text{ é progressão geométrica com razão } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) O comprimento da poligonal $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ é a soma $A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_n$. Logo, tem-se:

$$\boxed{S_n=\frac{7}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

46. a) Primeiro, deve-se perceber que $4 + 1 + 2 + 6 + 4 + 1 + 2 = 20$, portanto são necessários sete termos consecutivos da sequência, a partir do número 4, para se obter a soma 20, logo podem-se tomar $n = 2$ e $k = 6$.

Nota: Qualquer sequência que comece com o número 4 pode ser utilizada; logo, é possível tomar $k = 6$ e $n \in \{2, 6, 10, 14, ...\}$.

b) $S_n^k = 1$ para $n = 3$ e $k = 0$

$S_n^k = 2$ para $n = 4$ e $k = 0$

$S_n^k = 3$ para $n = 3$ e $k = 1$

$S_n^k = 4$ para $n = 2$ e $k = 0$

$S_n^k = 5$ para $n = 2$ e $k = 1$

$S_n^k = 6$ para $n = 1$ e $k = 0$

$S_n^k = 7$ para $n = 2$ e $k = 2$

$S_n^k = 8$ para $n = 4$ e $k = 1$

$S_n^k = 9$ para $n = 3$ e $k = 2$

$S_n^k = 10$ para $n = 1$ e $k = 1$

$S_n^k = 11$ para $n = 1$ e $k = 2$

$S_n^k = 12$ para $n = 4$ e $k = 2$

Nota: Existem outras possibilidades para n em todos os casos.

c) Para demonstrar, basta notar que a soma dos quatro primeiros termos é 13, portanto:

- Para qualquer múltiplo de 13, basta tomar uma quantidade de termos múltiplos de 4, ou seja, $k \in \{3, 7, 11, 15, ...\}$.
- Se o número não for múltiplo de 13, então será da forma $13q + r$, com $0 < r < 13$. Logo, é possível podemos tomar as possibilidades obtidas no item b e ir acrescentando sequências de mais 4 termos.

47. a) Se (a_1, a_2, a_3) é uma PG, então temos: $a_2 = \frac{a_3}{w} = \frac{3}{2}$ e $a_1 = \frac{a_3}{w^2} = \frac{3}{4}$.

Se (a_3, a_4, a_5) é uma PA, então temos: $a_4 = a_3 + w = 5$ e $a_5 = a_3 + 2w = 7$.

Logo, a sequência é: $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right)$.

b) A sequência pode ser descrita por: $(1, w, w_2, w_2 + w, w_2 + 2w)$.

Mas $w^2 + 2w = 8$, o que implica que $w = 2$ ou $w = -4$.

Logo, a sequência pode ser: $(1, 2, 4, 6, 8)$ ou $(1, -4, 14, 12, 8)$.

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 9

75 Unicamp 2013 Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$, que depende do parâmetro real $\alpha > 0$.

a) Calcule a matriz $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2$.

b) Um ponto no plano cartesiano com as coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é transformado pela matriz A_α em um novo ponto da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ -\frac{1}{a}x - y \end{bmatrix}.$$

Calcule o valor de α, sabendo que o sistema $A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ admite solução.

76 Unicamp 2012 Seja dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix}$, em que x é um número real.

a) Determine para quais valores de x o determinante de A é positivo.

b) Tomando $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, e supondo que, na matriz A, $x = -2$, calcule $B = AC$.

51 Unicamp 2014 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde *a*, *b* e *c* são números reais.

a) Encontre os valores de *a*, *b* e *c* de modo que $A^T = -A$.

b) Dados $a = 1$ e $b = -1$, para que valores de *c* e *d* o sistema linear $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ tem infinitas soluções?

50 Unicamp 2018 Sabendo que *p* e *q* são números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

a) Prove que para quaisquer *p* e *q* teremos $B^TAB \geq 0$.

b) Determine os valores de *p* e *q* para os quais o sistema linear nas variáveis reais *x*, *y* e *z*, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$, tem infinitas soluções.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 9

75. a) $A_\alpha + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ -\frac{1}{2\alpha} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}$

$$(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\frac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

b)

$$A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{1}{\alpha}x - y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{1}{\alpha}x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y = -6 \\ -\frac{1}{\alpha}x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \alpha y = -6 \\ -\frac{1}{\alpha}x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y = -6 \\ -x - \alpha y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y = -6 \\ x + \alpha y = -2\alpha \end{cases}$$

O sistema só terá solução se $-2\alpha = -6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}$.

76. a) $A=\begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}.$

$|A|>0 \Leftrightarrow 16x^3-64x-36x>0 \Leftrightarrow 16x^3-100x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x\cdot\left(4x^2-25\right)>0$

Resolvendo a inequação do produto, obtemos $-2{,}5 < x < 0$ ou $x > 2{,}5$.

$\boxed{S=\{x \in R\,|-2{,}5<x<0 \cup x>2{,}5\}}$

b) Para $x = -2$, temos:

$B = A \cdot C$

$B=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B=\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}}$

50. a) Sabendo que:

1) B^T é a transposta da matriz B;

2) O produto de matrizes é associativo, isto é: $B^TAB = (B^TA)B = B^T(AB)$,

tem-se:

$$B^TAB=\left(B^TA\right)B=\begin{bmatrix} p & 0 & q \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix}=(p+q)^2.$$

Como todo quadrado de números reais é não negativo, $(p + q)^2 \geq 0$, e a relação está demonstrada.

b) O sistema linear dado é obtido de uma equação matricial da forma $A \cdot X = B$, na qual a matriz A é a matriz dos coeficientes do sistema de equações.

A discussão do número de soluções do sistema linear é feita a partir do cálculo do determinante da matriz A:

$$\det A=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{bmatrix}=p-p^2=p(1-p).$$

Por hipótese, o sistema deve ter infinitas soluções, e isso ocorre se $\det A = 0 \Rightarrow p(1-p) = 0 \Rightarrow p = 0$ ou $p = 1$.

1) Se $p = 0$, o sistema a ser analisado fica:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+2y=0 \\ x+z=q \end{cases}$$

e para que o sistema tenha infinitas soluções, uma possibilidade é o sistema apresentar duas equações idênticas (ou proporcionais).

Assim: $q = 0$ (1ª e 3ª equações).

2) Se $p = 1$, o sistema a ser analisado fica:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+z=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 2y+1=0 \\ y+1=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ y=q-1 \end{cases}$$

e para que o sistema tenha infinitas soluções, uma possibilidade é o sistema apresentar duas equações idênticas (ou proporcionais).

Assim: $q=\frac{1}{2}$ (2ª e 3ª equações).

Logo, os valores de *p* e *q* são: $p = 0$ e $q = 0$ ou $p=1$ e $q=\frac{1}{2}$.

51. a) $A^T=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ e $-A=\begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -b \\ -c & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Como $AT = -A$, temos:

$a=-a \Rightarrow \boxed{a=0}$

$c=-1$ e $-c=1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$

$b=2$ e $-b=-2 \Rightarrow \boxed{b=2}$

b) $a=1, b=-1$ e $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$

Esse sistema tem infinitas soluções se:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ c & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

Donde obtemos:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x \quad -z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=2 \\ -2y \ =d \end{cases}$$

Portanto,

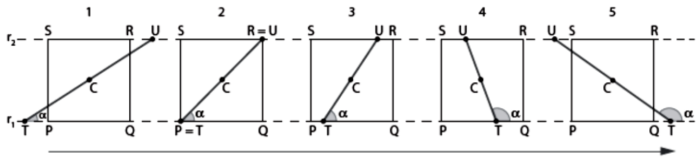
$-2\cdot 2=d \Rightarrow \boxed{d=-4}$

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 8

52 **Unifesp 2017**

Veja também em:
Matemática • Livro 2 • Frente 1 • Capítulo 8

Os pontos T e U deslocam-se sobre retas paralelas r_1 e r_2 de tal forma que $\overline{TU}$ passe sempre pelo centro C de um quadrado PQRS, de lado 2, e forme um ângulo de medida α com r_1, conforme indica, como exemplo, a sequência de cinco figuras.



a) Calcule as medidas de $\overline{TU}$ nas situações em que $\alpha = 45°$ e $\alpha = 90°$.

b) Denotando TU por y, determine y em função de α e o respectivo domínio dessa função no intervalo de α em que a posição de T varia de P até Q.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 8

52. a) Para $\alpha = 45°$, tem-se a medida do segmento $\overline{TU}$ igual à medida da diagonal $\overline{PR}$ do quadrado PQRS. Assim:

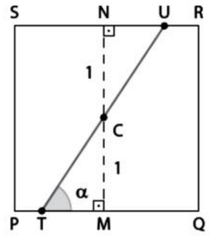
$d = \ell\sqrt{2}$

$\boxed{TU = 2\sqrt{2}}$

Para $\alpha = 90°$, tem-se o segmento $\overline{TU}$ paralelo ao lado $\overline{PS}$. Assim: $\boxed{TU = \ell = 2.}$

b) Seja $\overline{MN}$ o segmento paralelo ao lado $\overline{PS}$ do quadrado, passando pelo centro C.

Os triângulos CNU e CMT são congruentes. Assim: CM = CN = 1 e $TC = \frac{y}{2}$.



Quando T varia de P até Q, tem-se $45° \le \alpha \le 135°$.

No triângulo TMC, tem-se:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\frac{y}{2}}$$

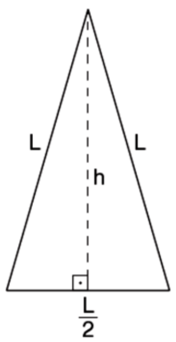
$$\frac{y}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$y = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}, \text{com } 45° \le \alpha \le 135°$$

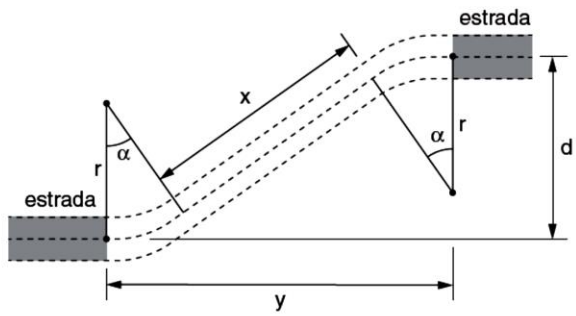
LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 9

83 **Unesp 2011** Considere um triângulo isósceles de lados medindo L, $\frac{L}{2}$ e L centímetros. Seja h a medida da altura relativa ao lado de medida $\frac{L}{2}$.

Se L, h e a área desse triângulo formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, determine a medida do lado L do triângulo.



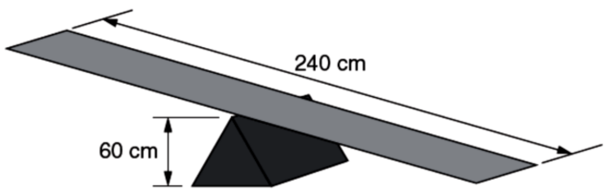
82 **Unicamp 2011** Um engenheiro precisa interligar de forma suave dois trechos paralelos de uma estrada, como mostra a figura a seguir. Para conectar as faixas centrais da estrada, cujos eixos distam d metros um do outro, o engenheiro planeja usar um segmento de reta de comprimento x e dois arcos de circunferência de raio r e ângulo interno α.



a) Se o engenheiro adotar $\alpha = 45°$, o segmento central medirá $x = d\sqrt{2} - 2r\left(\sqrt{2} - 1\right)$. Nesse caso, supondo que d = 72 m, e r = 36 m, determine a distância y entre as extremidades dos trechos a serem interligados.

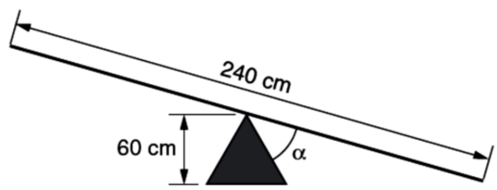
b) Supondo, agora, que $\alpha = 60°$, r = 36 m e d = 90 m, determine o valor de x.

81 **Unicamp 2011** Considere uma gangorra composta por uma tábua de 240 cm de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de altura igual a 60 cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal.

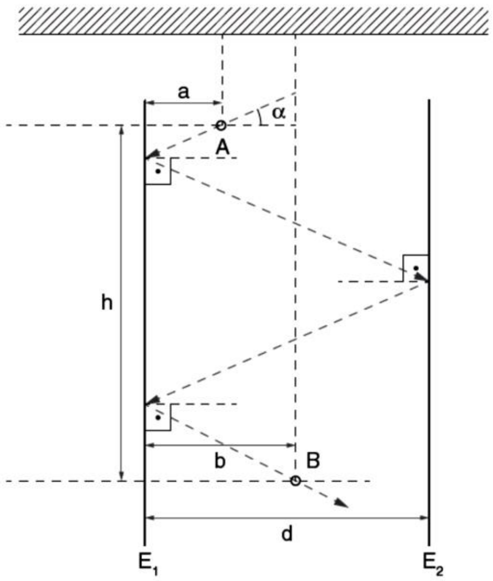


a) Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade de direita da gangorra está a 20 cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.

b) Supondo, agora, que a extremidade direita da tábua toca o chão, determine o ângulo α formado entre a tábua e a lateral mais próxima do prisma, como mostra a vista lateral da gangorra, exibida a seguir.

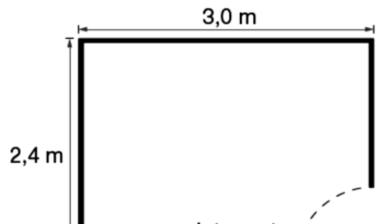


80 **Unesp 2012** Sejam dois espelhos planos (E_1 e E_2), posicionados verticalmente, com suas faces espelhadas voltadas uma para outra, e separados por uma distância d, em centímetros. Suspensos por finas linhas, dois pequenos anéis (A e B) são posicionados entre esses espelhos, de modo que as distâncias de A e B ao espelho E_1 sejam, respectivamente, a e b, em centímetros, e a distância vertical entre os centros dos anéis seja h, em centímetros, conforme mostra a figura.



Determine o ângulo de incidência α, em relação à horizontal, em função de a, b, d e h, para que um feixe de luz atravesse o anel A, se reflita nos espelhos E_1, E_2 e E_1 e atravesse o anel B, como indica o percurso na figura. Admita que os ângulos de incidência e de reflexão do feixe de luz sobre um espelho sejam iguais.

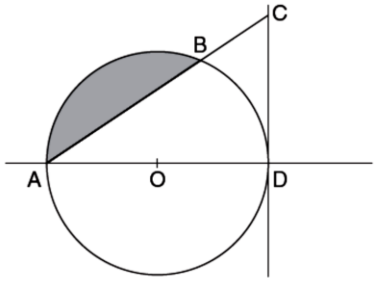
79 **Unicamp 2012** A planta de um cômodo que tem 2,7 m de altura é mostrada a seguir.



a) Por norma, em cômodos residenciais com área superior a 6 m^2, deve-se instalar uma tomada para cada 5 m ou fração (de 5 m) de perímetro de parede, incluindo a largura da porta. Determine o número mínimo de tomadas do cômodo representado na figura e o espaçamento entre as tomadas, supondo que elas serão distribuídas uniformemente pelo perímetro do cômodo.

b) Um eletricista deseja instalar um fio para conectar uma lâmpada, localizada no centro do teto do cômodo, ao interruptor, situado a 1,0 m do chão, e a 1,0 m do canto do cômodo, como está indicado na figura. Supondo que o fio subirá verticalmente pela parede, e desprezando a espessura da parede e do teto, determine o comprimento mínimo de fio necessário para conectar o interruptor à lâmpada.

78 **Fuvest 2012** Na figura, a circunferência de centro *O* é tangente à reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto *D*, o qual pertence à reta $\overleftrightarrow{AO}$. Além disso, *A* e *B* são pontos da circunferência, $AB = 6\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$.



Nessas condições, determine:

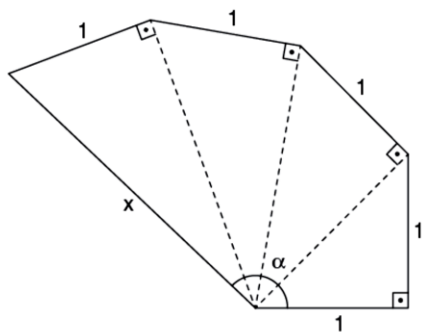
a) a medida do segmento $\overline{CD}$.

b) o raio da circunferência;

c) a área do triângulo *AOB*;

d) a área da região hachurada na figura.

77 **Unicamp 2014** Considere um hexágono, como o exibido na figura abaixo, com cinco lados com comprimento de 1 *cm* e um lado com comprimento de *x cm*.

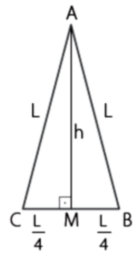


a) Encontre o valor de *x*.

b) Mostre que a medida do ângulo α é inferior a 150°.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 9

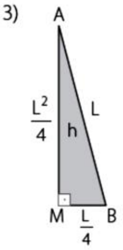
83.



1) Área do ΔABC: $h \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{hL}{4}$.

2) $PG\left(L; h; \frac{hL}{4}\right) \to h^2 = L \cdot \frac{hL}{4} \therefore h = \frac{L^2}{4}$

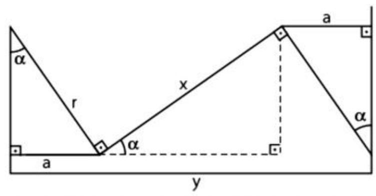
3)



$L^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{4}\right)^2 \Rightarrow L^4 = 15 \cdot L^2$

$\therefore \boxed{L = \sqrt{15}\,\text{cm}}$

82. a) Para d = 72 m e r = 36 m, temos $x = 72\sqrt{2} - 2 \cdot 36 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \therefore x = 72\,\text{m}$.



Do desenho, temos que y = 2a + x · cos α e a = r · sen α.

Assim, y = 2 · 36 · sen 45° + 72 · cos 45° = ∴ $\boxed{y = 72\sqrt{2}\,\text{m}}$.

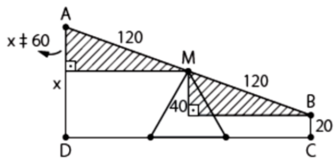
b) Do desenho, temos que a largura da estrada é 2r(1 – cos α).

Assim, d = 2r (1 – cos α) + x · sen α.

Para a = 60°, r = 36 m e d = 90 m, poderemos calcular x.

$90 = 2 \cdot 36 \cdot (1 - \cos 60°) + x \cdot \text{sen}\,60° \therefore \boxed{x = 36\sqrt{3}\,\text{m}}$

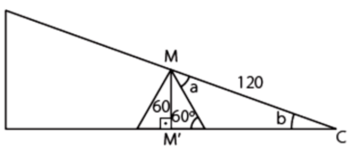
81. a) A situação descrita corresponde ao desenho a seguir.



Os triângulos hachurados são congruentes.

Assim, x – 60 = 40 ∴ $\boxed{x = 100\,\text{cm}}$.

b) De acordo com o texto, temos a seguinte situação:

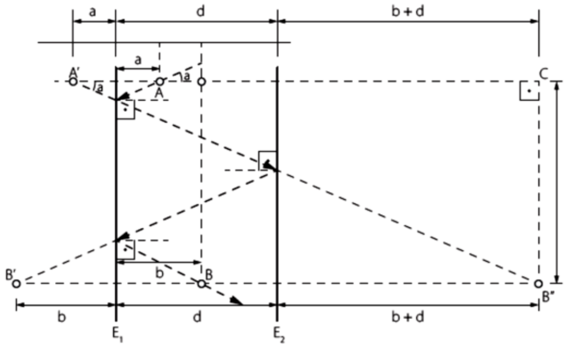


No ΔMM'C, temos $\text{sen}\,\beta = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \therefore \beta = 30°$.

Assim, 60° = α + β (ângulo externo).

60° = 30° + α ∴ $\boxed{\alpha = 30°}$

80.



Desenhando-se a imagem A' do anel A no espelho E_1, a imagem B' do anel B no espelho E_1 e a imagem B" de B' no espelho E_2, temos o triângulo retângulo A'CB". Assim:

$$tg\alpha = \frac{h}{a + d + b + d} \Rightarrow tg\alpha = \frac{h}{a + b + 2d} \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{h}{a + b + 2d}\right)}$$

79. a) Sabendo que o cômodo tem perímetro igual a 10,8 metros e seja n($n \in \mathbb{N}^*$) o número mínimo de tomadas no cômodo, temos:

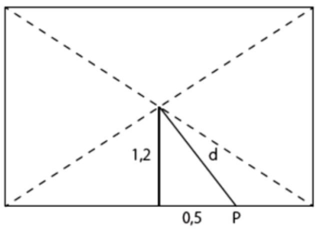
$\frac{10,8}{n} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{10,8}{5} \leq n \Leftrightarrow n \geq 2,16 \therefore n = 3$

O espaçamento entre as tomadas é dado por $\frac{10,8}{3} = 3,6$ m.

O número mínimo de tomadas é 3 e o espaçamento entre elas é 3,6 metros.

b) Como o interruptor está instalado a 1 metro do chão, o fio terá comprimento de 1,7 metro até atingir o teto, em um ponto P.

Seja d a distância desse ponto P até o centro do teto, temos:



Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$d^2 = 1,2^2 + 0,5^2$

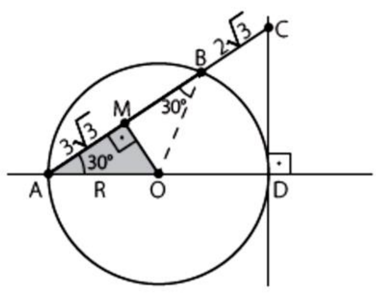
$d^2 = 1,44 + 0,25$

$d^2 = 1,69 \Leftrightarrow d = 1,3$

Comprimento mínimo: 1,7 + 1,3

Comprimento mínimo: 3,0 m.

78.



a) Utilizando relações métricas no círculo, temos:

$BC \cdot AC = \left(DC^2\right)$

$2\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = (DC)^2$

$\therefore \boxed{DC = 4\sqrt{3}}$

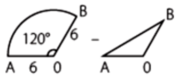
b) $CD = \frac{1}{2} \cdot AC \Rightarrow C\hat{A}D = 30^\circ$

ΔAOM: $\cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{R}$ $\boxed{\therefore R = 6}$

c) Área ΔAOB: $\frac{1}{2} \cdot AO \cdot AB \cdot \text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 9\sqrt{3}$

$\therefore \boxed{\text{Área } \Delta AOB = 9\sqrt{3}}$

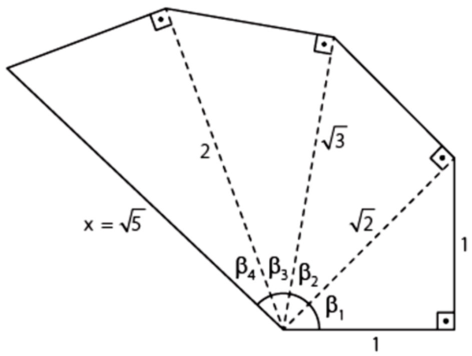
d) Área do segmento circular:



Área do segmento circular: $\frac{\pi \cdot 6^2}{3} - 9\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Área do segmento circular: } 12\pi - 9\sqrt{3}}$

77. a) Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

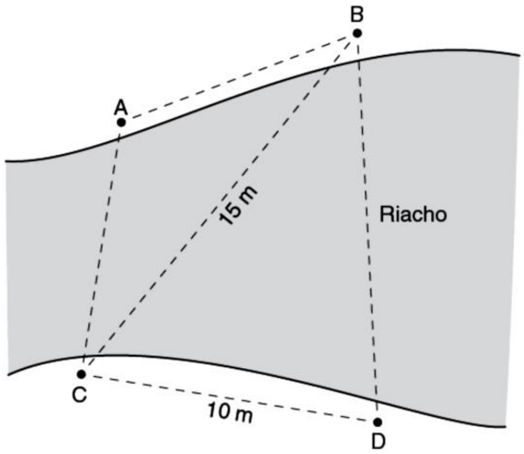


$x = \sqrt{5}$ (cm)

b) Da figura anterior, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\,\beta_1 = 1 \quad \Rightarrow \beta_1 = 45^\circ \\ \text{tg}\,\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta_2 < 45^\circ \\ \text{tg}\,\beta_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta_3 = 30^\circ \\ \text{tg}\,\beta_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta_4 < 30^\circ \end{array}\right\} \alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 < 150^\circ$$

91 **Unicamp 2012** Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela a seguir, obtidos com a ajuda de um teodolito.

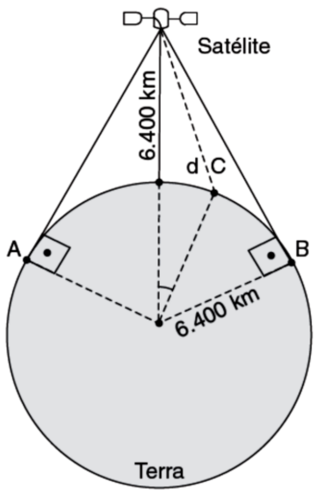


Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

a) Calcule a distância entre A e B.

b) Calcule a distância entre B e D.

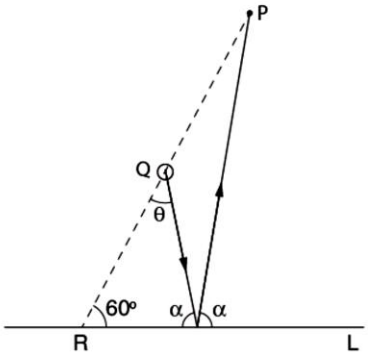
90 **Unicamp 2013** Um satélite orbita a 6.400 km da superfície da Terra. A figura a seguir representa uma seção plana que inclui o satélite, o centro da Terra e o arco de circunferência AB. Nos pontos desse arco o sinal do satélite pode ser captado. Responda às questões a seguir, considerando que o raio da Terra também mede 6.400 km.



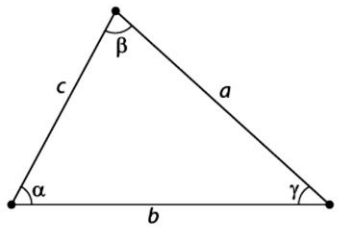
a) Qual o comprimento do arco AB indicado na figura?

b) Suponha que o ponto C da figura seja tal que $\cos(\theta) = 3/4$. Determine a distância d entre o ponto C e o satélite.

57 **Fuvest 2014** Uma bola branca está posicionada no ponto *Q* de uma mesa de bilhar retangular, e uma bola vermelha, no ponto *P*, conforme a figura. A reta determinada por *P* e *Q* intersecta o lado *L* da mesa no ponto *R*. Além disso, *Q* é o ponto médio do segmento $\overline{PR}$, e o ângulo agudo formado por $\overline{PR}$ e *L* mede 60°. A bola branca atinge a vermelha, após ser refletida pelo lado *L*. Sua trajetória, ao partir de *Q*, forma um ângulo agudo θ com o segmento $\overline{PR}$ e o mesmo ângulo agudo α com o lado *L* antes e depois da reflexão. Determine a tangente de α e o seno de θ.

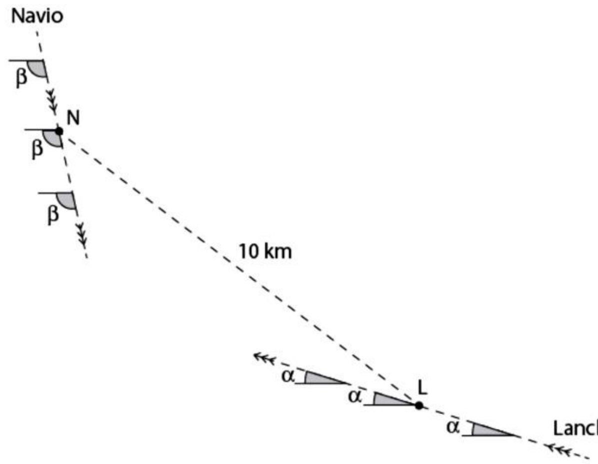


56 **Unicamp 2016** Considere o triângulo exibido na figura a seguir, com lados de comprimentos *a*, *b* e *c* e ângulos α, β e γ.



a) Suponha que a sequência (α, β e γ) é uma progressão aritmética (PA). Determine a medida do ângulo β.
b) Suponha que a sequência (*a*, *b* e *c*) é uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \sqrt{2}$. Determine o valor de tan β.

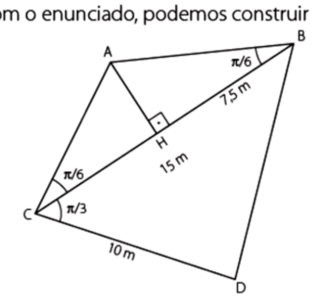
55 **Unesp 2017** Uma lancha e um navio percorrem rotas lineares no mar plano com velocidades constantes de 80 e 30 km/h, respectivamente. Suas rotas, como mostra a figura, estão definidas por ângulos constantes de medidas iguais a α e β, respectivamente. Quando a lancha está no ponto L e o navio no ponto N, a distância entre eles é de 10 km.



Sendo P o ponto em que a lancha colidirá com o navio, demonstre que o ângulo obtuso $L\hat{P}N$ será igual a $\alpha + \beta$. Em seguida, calcule a distância entre N e P, considerando $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{9}{16}$.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 10

91. a) De acordo com o enunciado, podemos construir a seguinte figura:



O triângulo ABC é isósceles e o segmento AH é sua altura; assim, no triângulo ABH, temos:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{BH}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7{,}5}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{15}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{AB = 5\sqrt{3}}$$

b) Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo BCD, temos:

$$BD^2 = 10^2 + 15^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$BD^2 = 100 + 225 - 300\cdot\frac{1}{2}$$

$$BD^2 = 175 \Leftrightarrow \boxed{BD = 5\sqrt{7}}$$

90. a) Sendo O o centro do círculo que representa a Terra, S o ponto onde se encontra o satélite e α o ângulo $B\hat{O}S$, temos:

$$\cos\alpha = \frac{6.400}{12.800} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°, \text{ pois } 0° < \alpha < 90°.$$

O ângulo $A\hat{O}B$ tem medida igual a $2\alpha = 120°$, pois os triângulos AOS e BOS são congruentes.

Assim, o comprimento c do arco AB é dado por:

$c = \frac{120°}{360°} \cdot 2\pi R$

$c = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 6.400$

$\boxed{c = \frac{12.800\pi}{3} \text{ km}}$

b) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OCS, tem-se:

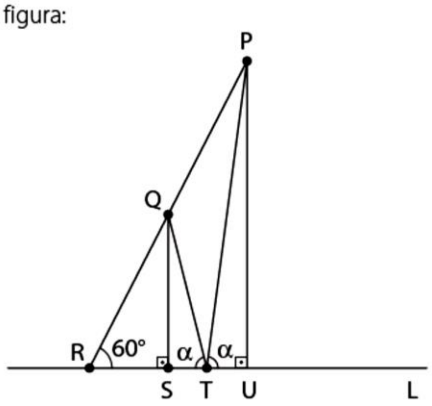
$d^2 = 6.400^2 + (2 \cdot 6.400)^2 - 2 \cdot 6.400 \cdot 2 \cdot 6.400 \cdot \cos\theta$

$d^2 = 6.400^2 + 4 \cdot 6.400^2 - 4 \cdot 6.400^2 \cdot \frac{3}{4}$

$d^2 = 5 \cdot 6.400^2 - 3 \cdot 6.400^2$

$d^2 = 2 \cdot 6.400^2 \Leftrightarrow \boxed{d = 6.400\sqrt{2} \text{ km}}$

57. I. Observe a figura:



Chamando $PQ = QR = x$, temos:

$QS = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $PU = x\sqrt{3}$ e $RS = \frac{x}{2}$.

Além disso, como $\Delta RSQ \sim \Delta RUP$, temos $SU = \frac{x}{2}$

Agora, chamando $ST = y$, temos $TU = \frac{x}{2} - y$.

II. $\Delta QST \sim \Delta PUT (AA\sim) \Rightarrow \frac{PU}{QS} = \frac{TU}{TS} \Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{x}{2} - y}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{6}$

III. Pitágoras em ΔQST, temos:

$(QT)^2 = (QS)^2 + (ST)^2 \Rightarrow QT = \frac{x\sqrt{7}}{3}$

Logo: $\boxed{tg\alpha = \frac{QS}{ST} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{6}} = 3\sqrt{3}}$ e

Pela lei dos senos:

$\frac{QT}{sen60°} = \frac{RT}{sen\theta} \Rightarrow sen\theta = \frac{RT}{QT} \cdot sen60° = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{6}}{\frac{x\sqrt{7}}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{sen\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}}$

56. a) De acordo com o enunciado, (α, β, γ) formam uma progressão aritmética (PA), para a qual será denotado R como razão. Sendo assim, pode-se concluir que:

(I) $\begin{cases} \alpha = \beta - R \\ \gamma = \beta + R \end{cases}$

Como α, β e γ denotam também as medidas dos ângulos do triângulo apresentado no enunciado, pode-se concluir que:

(II) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

De (I) e (II), obtém-se que:

$$\beta - R + \beta + \beta + R = 180° \Rightarrow \beta = 60°$$

b) Pelo enunciado, os lados (a, b, c) formam uma progressão geométrica (PG) de razão $\sqrt{2}$. Com efeito, pode-se afirmar que:

(I) $\begin{cases} b = a \cdot \sqrt{2} \\ c = a \cdot (\sqrt{2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = a \cdot \sqrt{2} \\ c = 2a \end{matrix}$

Escolhendo-se como referência o lado b, tendo, por consequência, β como seu ângulo oposto e aplicando-se a lei dos cossenos, chega-se à seguinte conclusão:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$

$(\sqrt{2} \cdot a)^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot (2a) \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{4}$

É bom lembrar que $\beta < 90°$, pois é ângulo de um triângulo não oposto ao maior lado. Logo, sen β e cos β são positivos.

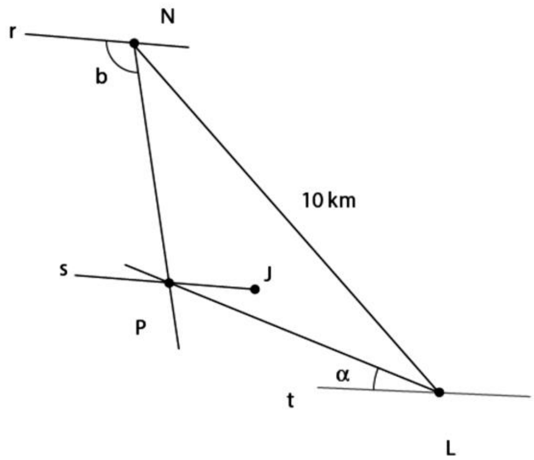
Sendo assim, utilizando a relação fundamental e a conclusão acima exposta, obtém-se:

$$sen^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow sen^2\beta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow sen\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Por fim, como $\tan\beta = \frac{sen\beta}{\cos\beta}$, então $\tan\beta = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Vale observar que tan β é abreviação americana para a nossa notação tg β.

55.



Sendo J o ponto da figura acima e as retas r, s e t paralelas, tem-se que $m(L\hat{P}J) = \alpha$ e $m(N\hat{P}J) = \beta$, pois são alternos internos. Assim,

$\boxed{m(L\hat{P}N) = \alpha + \beta}$

Sendo t o tempo decorrido até a colisão, tem-se que $PL = t \cdot 80$ e $PN = t \cdot 30$, em km.

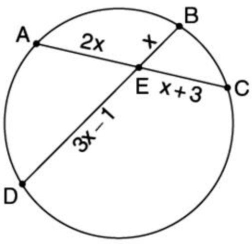
Aplicando a lei dos cossenos em ΔLPN, obtém-se:

$10^2 = (30t)^2 + (80t)^2 - 2 \cdot (30t) \cdot (80t) \cdot \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow t^2 = \frac{1}{100} \Rightarrow t = \frac{1}{10}$h, daí,

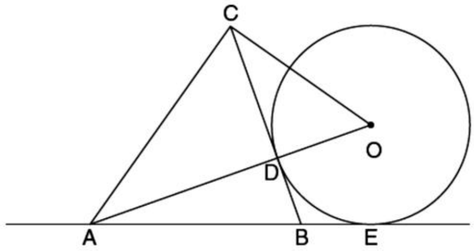
$NP = \frac{1}{10} \cdot 30 \Rightarrow \boxed{NP = 3 \text{ km}}$

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 11

96 **Unesp 2014** Em um plano horizontal encontram-se representadas uma circunferência e as cordas AC e BD. Nas condições apresentadas na figura, determine o valor de x.

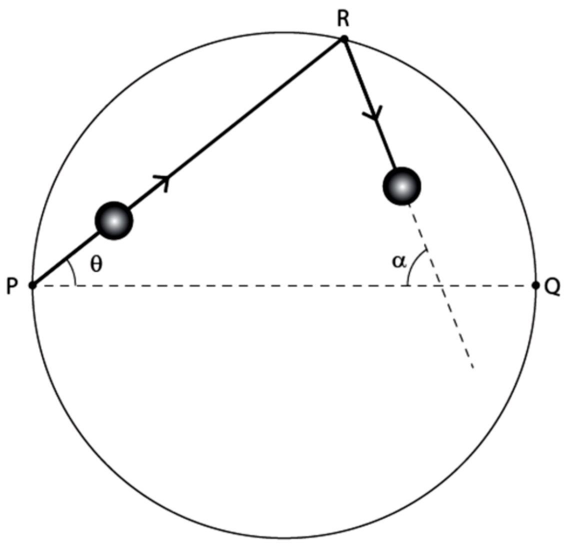


95 **Fuvest 2015** Na figura a seguir, a circunferência de centro em O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, AD = 2r e o ângulo $\widehat{ACO}$ é reto. Determine, em função de r,



a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC;
b) a medida do segmento $\overline{CO}$.

58 **Fuvest 2016** Uma bola de bilhar, inicialmente em repouso em um ponto *P*, situado na borda de uma mesa de bilhar com formato circular, recebe uma tacada e se desloca em um movimento retilíneo. A bola atinge a borda no ponto *R* e é refletida elasticamente, sem deslizar. Chame de *Q* o ponto da borda diametralmente oposto a *P* e de θ a medida do ângulo $Q\hat{P}R$.



a) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será paralela ao diâmetro $\overline{PQ}$?
b) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será perpendicular a $\overline{PQ}$?
c) Supondo agora que $30^\circ < \theta < 60^\circ$, encontre uma expressão, em função de θ, para a medida α do ângulo agudo formado pela reta que contém *P* e *Q* e pela reta que contém a trajetória da bola após a primeira reflexão na borda.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 11

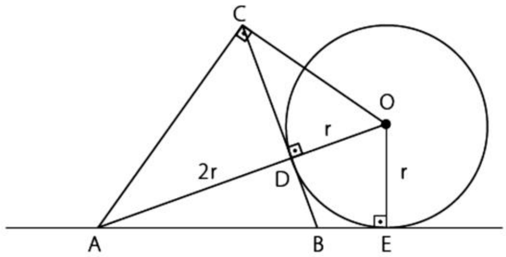
96. Pelo teorema das cordas, tem-se:

$(AE)\cdot(EC) = (BE)\cdot(ED) \Rightarrow 2x\cdot(x+3) = x\cdot(3x-1)$

Como $x \neq 0$:

$\cancel{2x}\cdot(x+3) = \cancel{x}\cdot(3x-1) \Rightarrow 2x+6 = 3x-1 \Rightarrow x = 7$

95.



a) $\Delta OAE \sim \Delta BAD$, pelo caso $(AA\sim)$, pois $med\left(E\hat{A}O\right) = med\left(D\hat{A}B\right)$ e $med\left(A\hat{E}O\right) = med\left(A\hat{D}B\right) = 90°$,

logo: $\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AE}{AD}$ (I)

Além disso, $(3r)^2 = r^2 + (AE)^2$, Pitágoras em ΔAOE, logo: $AE = 2\sqrt{2}r$ (II)

Substituindo em (I), temos:

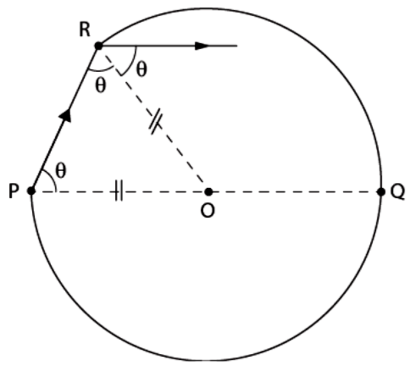
$\dfrac{3r}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}r}{2r} \therefore \boxed{AB = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}r}$

b) No triângulo CDO, retângulo, temos:

$(CO)^2 = (AO)\cdot(DO) \therefore (CO)^2 = 3r\cdot r \therefore \boxed{CO = r\sqrt{3}}$

58. Em todas as colisões a seguir, o ângulo de incidência é igual ao de reflexão.

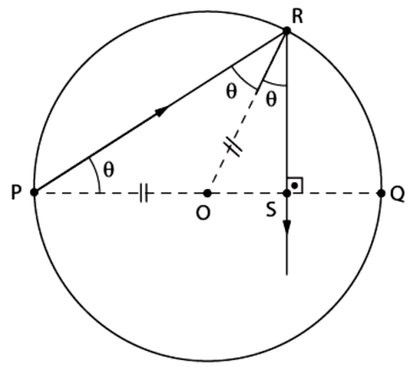
a) Na figura a seguir, $R\hat{O}P$ é igual a θ, logo ΔPRO é equilátero.



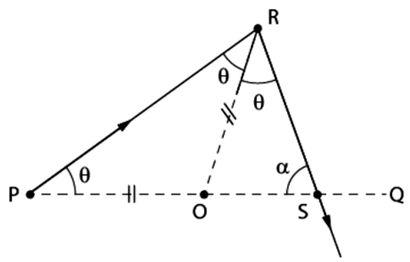
Assim, tem-se que $\theta = 60°$.

Há também a possibilidade de $\theta = 0°$, em que a trajetória coincide com o diâmetro $\overline{PQ}$ e a bola colide exatamente em Q ($Q \equiv R$) e retorna sobre $\overline{PQ}$.

b) Na figura, para o ΔPRS, tem-se $3\theta + 90° = 180° \Rightarrow \theta = 30°$.

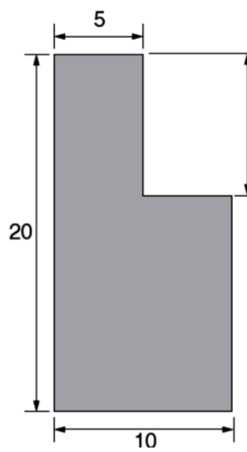


c) Na figura, para o ΔPRS, tem-se $3\theta + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 3\theta$



LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 12

104 Unicamp 2011 Uma placa retangular de madeira, com dimensões 10 x 20 cm, deve ser recortada conforme mostra a figura a seguir.



Depois de efetuado o recorte, as coordenadas do centro de gravidade da placa (em função da medida w) serão dadas por

$$x_{CG}(w) = \frac{400 - 15w}{80 - 2w} \text{ e } y_{CG}(w) = \frac{400 + (w - 20)^2}{80 - 2w},$$

em que x_{CG} é a coordenada horizontal e y_{CG} é a coordenada vertical do centro de gravidade, tomando o canto inferior esquerdo como a origem.

a) Defina A(w), a função que fornece a área da placa recortada em relação a w. Determine as coordenadas do centro de gravidade quando $A(w) = 150 \text{ cm}^2$.

b) Determine uma expressão geral para $w(x_{CG})$, a função que fornece a dimensão w em relação à coordenada x_{CG}, e calcule y_{CG} quando $x_{CG} = 7/2$ cm.

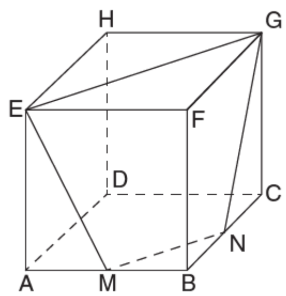
103 Fuvest 2011 As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta t é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ no ponto Q. Sendo assim, determine:

a) o comprimento P_1P_2.

b) a área do quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$.

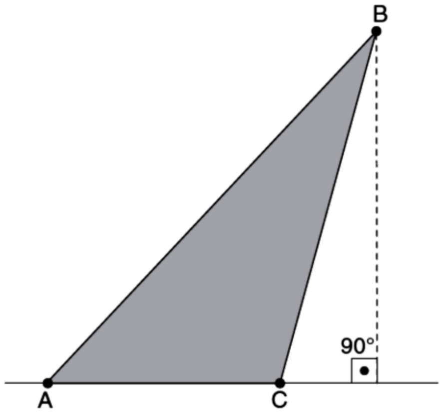
c) a área do triângulo QO_2P_2.

102 Fuvest 2011 Na figura a seguir, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H tem lado ℓ. Os pontos M e N são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule a área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F, G.



101 Unicamp 2013 A superfície de um reservatório de água para abastecimento público tem 320.000 m^2 de área, formato retangular e um dos seus lados mede o dobro do outro. Essa superfície é representada pela região hachurada na ilustração a seguir. De acordo com o Código Florestal, é necessário manter ao redor do reservatório uma faixa de terra livre, denominada Área de Proteção Permanente (APP), como ilustra a figura a seguir. Essa faixa deve ter a largura constante e igual a 100 m, medidos a partir da borda do reservatório.

100 **Unicamp 2013** Os lados do triângulo ABC da figura abaixo têm as seguintes medidas: $\overline{AB} = 20$, $\overline{BC} = 15$ e $\overline{AC} = 10$.

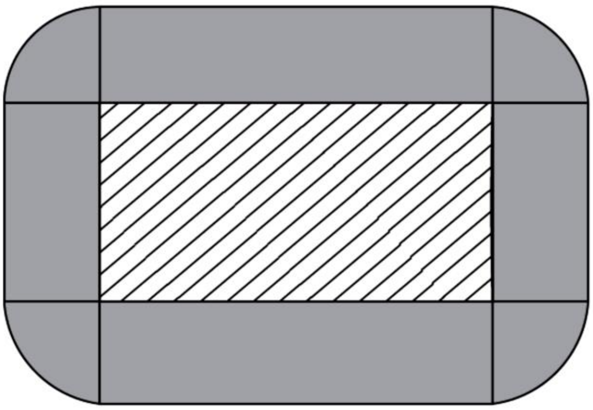


a) Sobre o lado BC marca-se um ponto D tal que $\overline{BD} = 3$ e traça-se o segmento DE paralelo ao lado de AC. Ache a razão entre a altura H do triângulo ABC relativa ao lado AC e a altura h do triângulo EBD relativa ao lado ED, sem explicar os valores de h e H.

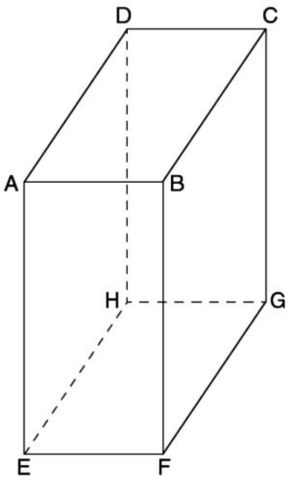
b) Calcule o valor explícito da altura do triângulo ABC em relação ao lado AC.

a) Calcule a área da faixa de terra denominada APP nesse caso.

b) Suponha que a água do reservatório diminui de acordo com a expressão $V(t) = V_0 2^{-t}$, em que V_0 é o volume inicial e t é o tempo decorrido em meses. Qual é o tempo necessário para que o volume se reduza a 10% do volume inicial? Utilize, se necessário, $\log_{10}2 \approx 0{,}30$;



99 **Fuvest 2013** No paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH* da figura, tem-se AB = 2, AD = 3 e AE = 4.



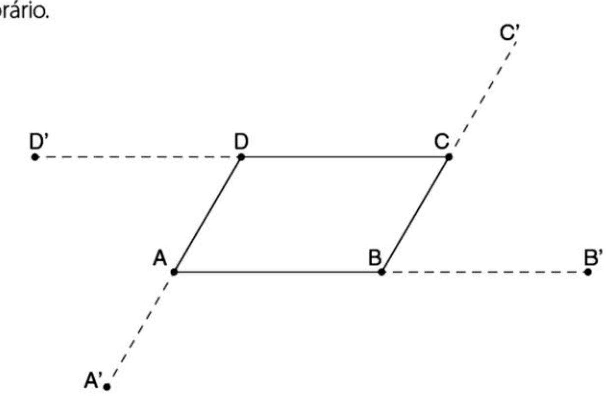
a) Qual é a área do triângulo ABD?

b) Qual é o volume do tetraedro ABDE?

c) Qual é a área do triângulo BDE?

d) Sendo Q o ponto do triângulo BDE mais próximo do ponto A, quanto vale AQ?

98 **Fuvest 2013** Percorre-se o paralelogramo ABCD em sentido anti-horário.



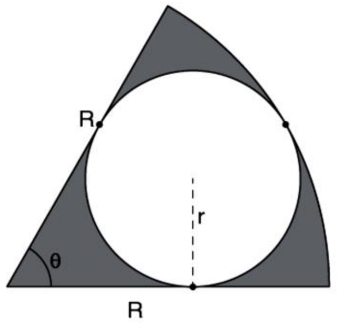
A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento de mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D' de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Dado que AB = 4 e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do:

a) paralelogramo ABCD;

b) triângulo BB'C';

c) quadrilátero A'B'C'D'.

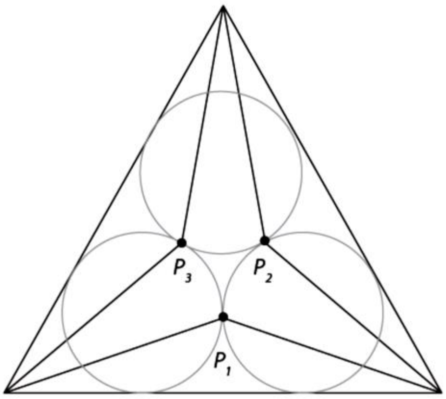
97 **Unicamp 2015** A figura abaixo exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.



a) Para $\theta = 60^o$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

63 **Fuvest 2016** São dadas três circunferências de raio r, duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são P_1, P_2 e P_3.

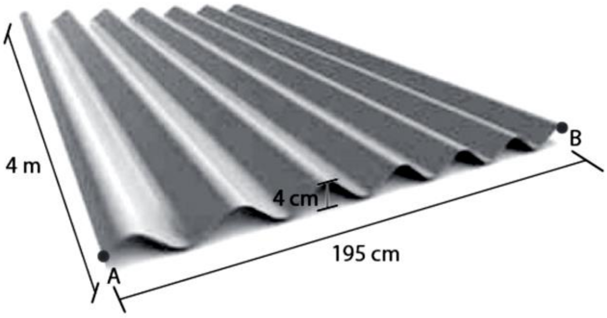


Calcule, em função de r,

a) o comprimento do lado do triângulo equilátero T determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira;

b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.

62 **Unifesp 2018** Uma chapa retangular metálica, de área igual a 8,132 m^2, passa por uma máquina que a transforma, sem nenhuma perda de material, em uma telha ondulada. A figura mostra a telha em perspectiva.



A curva que liga os pontos A e B, na borda da telha, é uma senoide. Considerando um sistema de coordenadas ortogonais com origem em A, e de forma que as coordenadas de B, em centímetros, sejam (195, 0), a senoide apresentará a seguinte configuração:

a) Calcule o comprimento da senoide indicada no gráfico, do ponto A até o ponto B.

b) Determine a expressão da função cujo gráfico no sistema de coordenadas é a senoide de A até B. Determine o domínio, a imagem e o período dessa função.

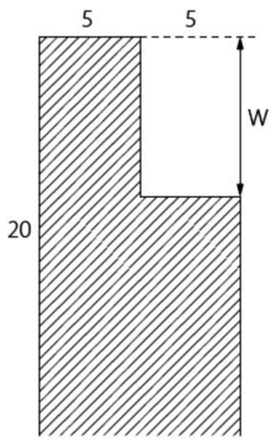
61 **Fuvest 2018** Uma cerca tem formato de um polígono regular de n lados, cada lado com comprimento l. A égua Estrela pasta amarrada à cerca por uma corda, também de comprimento l, no exterior da região delimitada pelo polígono. Calcule a área disponível para pasto supondo que:

a) a extremidade da corda presa à cerca está fixada num dos vértices do polígono;

b) a extremidade da corda pudesse deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 12

104. a)



Área = $A(w) = 20 \cdot 10 - 5 \cdot w$

$A(w) = 200 - 5w$

$A(w) = 150 \Rightarrow 200 - 5w = 150$

$w = 10$ cm

Assim:

$$x_{CG}(10) = \frac{400 - 15 \cdot 10}{80 - 2 \cdot 10} = \frac{25}{6}\text{ cm}$$

$$y_{CG}(10) = \frac{400 + (10-20)}{80 - 2 \cdot 10} = \frac{25}{3}\text{ cm}$$

b) $x_{CG}(w) = \dfrac{400 - 15w}{80 - 2w} \therefore x_{CG} \cdot 80 - 2w \cdot x_{CG} = 400 - 15w \therefore$

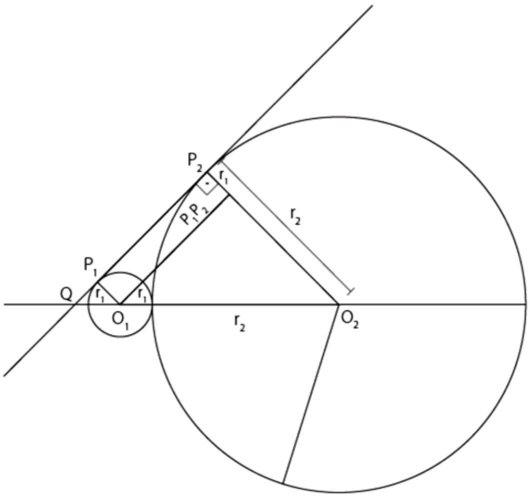
$$\boxed{w(x_{CG}) = \frac{80x_{CG} - 400}{2x_{CG} - 15}}$$

$$x_{CG} = \frac{7}{2} \rightarrow w\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{80 \cdot \frac{7}{2} - 400}{2 \cdot \frac{7}{2} - 15} = 15\text{ cm}$$

$$w = 15\text{ cm} \Rightarrow y_{CG}(15) = \frac{400 + (15-20)^2}{80 - 2 \cdot 15} = 8{,}5\text{ cm}$$

$$\boxed{y_{CG}(15) = 8{,}5\text{ cm}}$$

103.



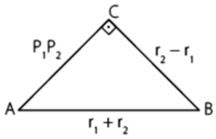
a) Podemos determinar o comprimento P_1P_2 por meio do triângulo ABC a seguir.

$(r_1+r_2)^2=(r_2-r_1)^2+(P_1P_2)^2$

$(3+12)^2=(12-3)^2+(P_1P_2)^2$

$(P_1P_2)^2=15^2-9^2=144$

$\boxed{P_1P_2=12}$



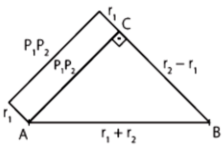
b) A área do quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$ pode ser calculada somando-se a área do triângulo ABC à área do retângulo ACP_2P_1

$S_{O_1O_2P_2P_1}=S_{ABC}+S_{ACP_2P_1}$

$S_{ABC}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{P_1P_2(r_2-r_1)}{2}\Rightarrow S_{ABC}=54$

$S_{ACP_2P_1}=b\cdot h=P_1P_2\cdot r_1\Rightarrow S_{ACP_2P_1}=36$

$\boxed{S_{O_1O_2P_2P_1}=90}$



c) A área do triângulo QO_2P_2 pode ser determinada pela relação:

$S_{QO_2P_2}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{QP_2\cdot P_2O_2}{2}$

Aplicando o critério de semelhança nos triângulos QO_2P_2 QO_1P_1, temos:

$\dfrac{O_2P_2}{O_1P_1}=\dfrac{QO_2}{QO_1}\Rightarrow\dfrac{12}{3}=\dfrac{15+QO_1}{QO_1}\Rightarrow 4QO_1=15+QO_1$

$QO_1=5$

Logo,

$QO_2=20$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo QO_2P_2:

$(QO_2)^2=(QP_2)^2+(P_2O_2)^2\Rightarrow 20^2=(QP_2)^2+12^2$

$QP_2=16$

$\boxed{S_{QO_2P_2}=\dfrac{16\cdot 12}{2}=96}$

102. A área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F, G é dada pela soma das áreas de suas faces.

$S=S_{MBN}+S_{EFG}+S_{MNGE}+S_{MBFE}+S_{NGFB}$

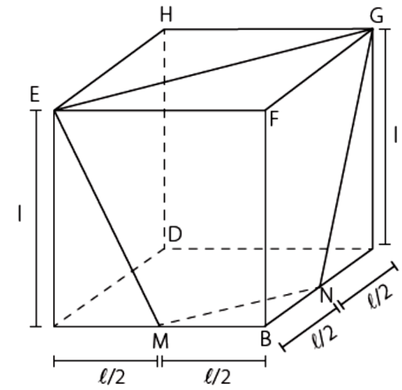
$S_{MBN}=\dfrac{B\cdot h}{2}=\dfrac{MB\cdot BN}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ell}{2}\cdot\dfrac{\ell}{2}=\dfrac{\ell^2}{8}$

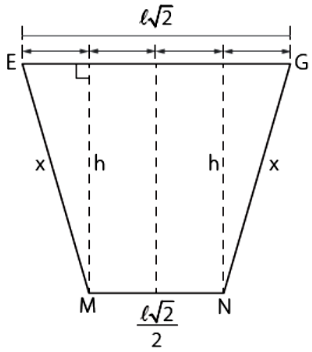
$S_{EFG}=\dfrac{B\cdot h}{2}=\dfrac{EF\cdot FG}{2}=\dfrac{\ell\cdot\ell}{2}=\dfrac{\ell^2}{2}$

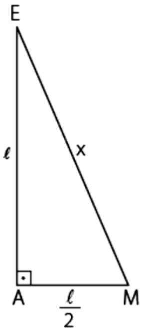
$S_{MBFE}=\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}=\dfrac{(EF+MB)\cdot BF}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\ell+\dfrac{\ell}{2}\right)\cdot\ell=\dfrac{3\ell^2}{4}$

$S_{MBFE}=S_{NGFB}=\dfrac{3\ell^2}{4}$

$S_{MNGE}=\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}=\dfrac{(EG+MN)\cdot h}{2}$







$h^2+\left(\dfrac{EG}{4}\right)^2=x^2;\ EG^2=\ell^2+\ell^2\Rightarrow EG=\ell^2\sqrt{2}$

$x^2=\ell^2+\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2$

$h^2+\dfrac{2\ell^2}{16}=\ell^2+\dfrac{\ell^2}{4}\Rightarrow h^2=\ell^2+\dfrac{\ell^2}{4}-\dfrac{2\ell^2}{16}\Rightarrow h=\dfrac{3\ell}{2\sqrt{2}}$

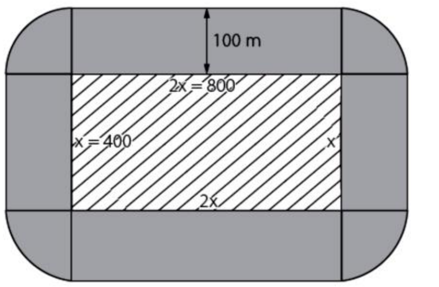
$S_{MNGE}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\ell\sqrt{2}+\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\dfrac{3\ell}{2\sqrt{2}}=\dfrac{9\ell^2}{8}$

$S=\dfrac{\ell^2}{8}+\dfrac{\ell^2}{2}+\dfrac{3\ell^2}{4}+\dfrac{3\ell^2}{4}+\dfrac{9\ell^2}{8}=\dfrac{\ell^2+4\ell^2+6\ell^2+6\ell^2+9\ell^2}{8}$

$\boxed{S=\dfrac{13\ell^2}{4}}$

101. a) Sendo x (x > 0) a medida de um dos lados do retângulo, a do outro é 2x e sua área é de 320.000 m². Logo

$x\cdot 2x=320\cdot000\Leftrightarrow x^2=160.000\Leftrightarrow x=400\text{ m}\Rightarrow 2x=800\text{ m}$



Unindo as regiões dos quatro vértices do reservatório temos um círculo de raio 100 m e área

$\pi 100^2=10.000\pi$ m².

Somando a esse círculo as áreas dos dois pares de retângulos, temos:

$A=10.000\pi+2(800\cdot100+400\cdot100)$

$A=(10.000\pi+240.000)$ m²

b) Após t meses, o volume fica reduzido a 10% de $V_0 = 0{,}1V_0$. Substituindo na expressão e utilizando a aproximação fornecida:

$V(t) = V_0 \cdot 2^{-t}$

$0{,}1V_0 = V_0 \cdot 2^{-t}$

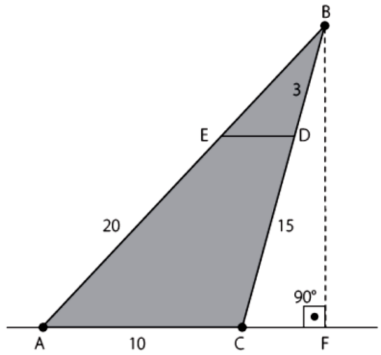
$\log 10^{-1} = \log 2^{-t}$

$-1 = -t \cdot \log 2$

$1 = t \cdot 0{,}3$

$\boxed{t \simeq 3{,}3 \text{ meses}}$

100. a) De acordo com o enunciado, podemos construir a seguinte figura:



Os triângulos ABC e EBD são semelhantes, assim:

$\frac{H}{h} = \frac{BC}{BD} = \frac{15}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{H}{h} = 5}$

b) A área do triângulo pode ser calculada por $S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$.

Lembrando que a área do triângulo também pode ser calculada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que p é o semiperímetro do triângulo de lados a, b e c, podemos escrever a seguinte equação:

$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Substituindo as medidas dos lados do triângulo ABC, temos:

$\frac{10 \cdot H}{2} = \sqrt{\left(\frac{45}{2}\right)\left(\frac{45}{2} - 20\right)\left(\frac{45}{2} - 15\right)\left(\frac{45}{2} - 10\right)}$

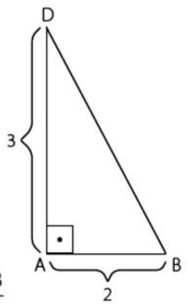
$5 \cdot H = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2}}$

$5 \cdot H = \sqrt{\frac{9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 25}{16}}$

$5 \cdot H = \frac{3.5.5\sqrt{15}}{4}$

$\boxed{H = \frac{15\sqrt{15}}{4}}$

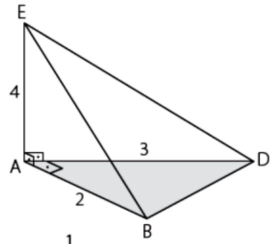
99. a)



$A_{\Delta ABD} = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2}$

$\boxed{A_{\Delta ABD} = 3}$

b)



$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4$

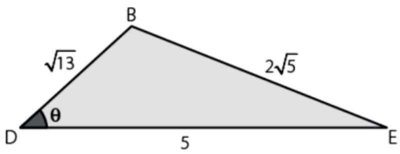
$\boxed{V_{tetraedro} = 4}$

c) Inicialmente, observe que, pelo Teorema de Pitágoras, teremos:

$BD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$BE = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$DE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



Aplicando a teoria dos cossenos:

$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\theta \therefore \cos\theta = \frac{9\sqrt{13}}{65}$

Da relação fundamental da trigonometria:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\text{sen}^2\theta = 1 - \left(\frac{9\sqrt{13}}{65}\right)^2 \therefore \text{sen}\theta = \frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}$

Finalmente:

$A_{\Delta BDE} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DE \cdot \text{sen}\theta$

$A_{\Delta BDE} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}$

$\boxed{A_{\Delta BDE} = \sqrt{61}}$

d) Como o ponto Q pertence ao triangulo BDE e é o mais próximo de A, ele é o pé de uma altura do tetraedro ABDE, então:

$\frac{1}{3} \cdot A_{\Delta BDE} \cdot AQ = V_{tetraedro}$

$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot AQ = 4$

$\boxed{AQ = \frac{12\sqrt{61}}{61}}$

98. a) A base do paralelogramo dado, ABCD, mede 4, e a altura relativa à base mede 3; logo, a área é dada por:

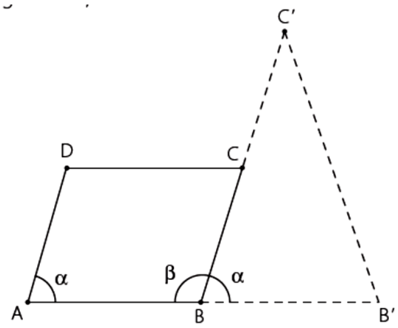
$A_{ABCD} = 4 \cdot 3$

$\boxed{A_{ABCD} = 12}$

b) Dentre várias, uma das formas de calcular a área de um triângulo é:

$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\theta}{2}$

Para o triângulo BB'C', temos:



$\overline{AB} = \overline{BB'}$ e $\overline{BC'} = 2 \cdot \overline{BC}$.

$$A_{BB'C'} = \frac{\overline{BB'} \cdot \overline{BC'} \cdot \text{sen}\alpha}{2}$$

$$A_{BB'C'} = \frac{\overline{AB} \cdot 2 \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\alpha}{2}$$

$$A_{BB'C'} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\alpha$$

A área do paralelogramo ABCD é dada por:

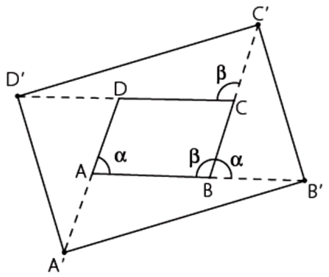
Note que:

$$A_{ABCD} = \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\alpha}{2} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\alpha = 12$$

Assim, a área do triângulo BB′C vale:

$$A_{BB'C'} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow \boxed{A_{BB'C'} = 12}$$

c) Para o quadrilátero A′B′C′D′, temos:



$$A_{A'B'C'D'} = A_{ABCD} + 2 \cdot A_{BB'C'} + 2 \cdot A_{CC'D'}$$

$$A_{A'B'C'D'} = 12 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot A_{CC'D'}$$

$$A_{A'B'C'D'} = 36 + 2A_{CC'D'}$$

Assim, a área do triângulo CC′D′ pode ser obtida por:

$$A_{CC'D'} = \frac{\overline{CC'} \cdot \overline{CD'} \cdot \text{sen}\beta}{2}$$

Sabendo que: $\overline{BC} = \overline{CC'}$ e $\overline{CD'} = 2 \cdot \overline{AB}$.

$$A_{CC'D'} = \frac{\overline{BC} \cdot 2 \cdot \overline{AB} \cdot \text{sen}\beta}{2} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\beta$$

Note que a área do paralelogramo ABCD também é dada por:

$$A_{ABCD} = \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\beta}{2} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\beta = 12$$

Assim, a área do triangulo CC′D′ vale:

$$A_{CC'D'} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen}\beta = 12$$

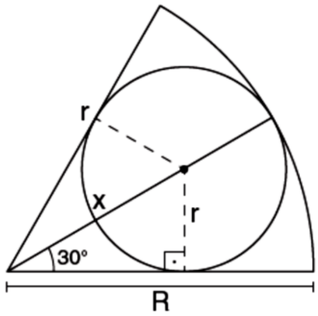
Logo, a área do quadrilátero A′B′C′D′ é:

$$A_{A'B'C'D'} = 36 + 2 \cdot A_{CC'D'}$$

$$A_{A'B'C'D'} = 36 + 2 \cdot 12$$

$$\boxed{A_{A'B'C'D'} = 60}$$

97. a)

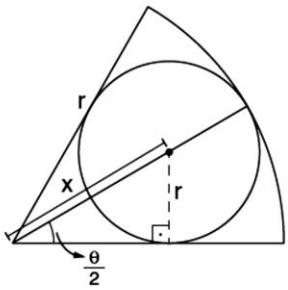


$$\text{sen}30° = \frac{r}{x} \Rightarrow x = 2r \Rightarrow R = x + r = 3r$$

$$\frac{A_{circ}}{A_{setor}} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{6}\pi R^2} = \frac{6r^2}{R^2} = \frac{6r^2}{(3r)^2} = \frac{6r^2}{9r^2}$$

$$\therefore \frac{A_{circ}}{A_{setor}} = \frac{2}{3}$$

b)



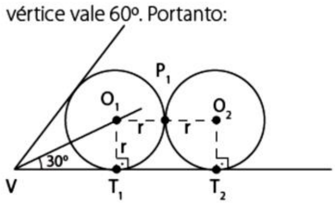
$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{x}, \text{ mas } x = R - r = 3r$$

$$\therefore \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo } \frac{\theta}{2} = \text{arc sen}\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \theta = 2 \text{ arc sen}\frac{1}{3}$$

63. a) Como o triângulo é equilátero, e as esferas são todas iguais, a bissetriz do ângulo de cada vértice do triângulo passa pelo centro da circunferência que está mais próxima do vértice. Logo, sendo equilátero, o ângulo do vértice vale 60º. Portanto:



$$\text{tg}30° = \frac{r}{V \cdot T_1} \Rightarrow VT_1 = r\sqrt{3}.$$

Assim, o lado triângulo vale $\ell = 2\left(r + r\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{\ell = 2r \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)}$

b) A área do hexágono pode ser calculada pela diferença entre a área do triângulo equilátero e o triplo da área do triângulo formado por dois vértices e o ponto de tangência entre duas circunferências.

$$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{\ell \cdot r}{2} = \frac{4r^2}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{2r}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot r$$

$$A = r^2 \cdot \left(4\sqrt{3} + 6 - 3 - 3\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{A = r^2 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)}$$

62. a) Seja ℓ a medida do comprimento da senoide.

De acordo com o enunciado, tem-se:

$4 \cdot \ell = 8{,}132 \Leftrightarrow \boxed{\ell = 2{,}033\ \text{m}}$

b) Seja $f(x) = a \cdot \text{sen}(k \cdot x)$ a função que representa o gráfico da senoide de A até B.

O gráfico representa 6 períodos da senoide, assim:

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{195}{6} = \frac{65}{2}$$

$$k = \frac{12\pi}{195} \Leftrightarrow k = \frac{4\pi}{65}$$

Como a altura da telha é de 4 cm, então a imagem é dada pelo intervalo $-2 \le y \le 2$, assim $a = 2$.

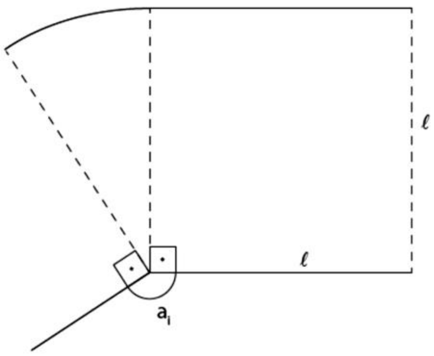
Portanto, $\boxed{f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{65} \cdot x\right);\ D_f = [0;195];\ \text{Im}_{(f)} = [-2,\ 2] \text{ e } p = \frac{65}{2}}$.

61. a) Se a corda fica presa a um dos vértices do polígono, então, a região de pastagem é um setor circular com centro neste vértice e ângulo central $360° - \frac{n-2}{n}180°$. Assim:

$$A = \frac{360 - \frac{n-2}{n}180}{360}\pi\ell^2$$

$$A = \frac{n+2}{2n}\pi\ell^2$$

b) Se a corda pudesse deslizar livremente ao longo de todo o perímetro do polígono, então, a área de pastagem seria n vezes a área da figura a seguir:



Ou seja, a área será:

$$A = \left(\ell^2 + \frac{180 - \frac{n-2}{n}180}{360}\pi\ell^2\right)n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \ell^2(n + \pi)$$

LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 13

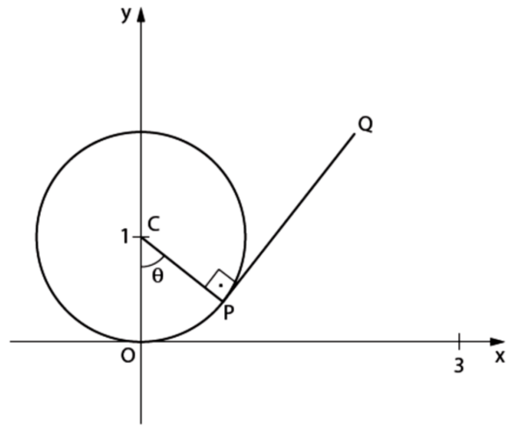
108 **Unicamp 2014** Considere no plano cartesiano os pontos $A = (-1,1)$ e $B = (2,2)$.

a) Encontre a equação que representa o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos A e B.

b) Seja C um ponto na parte negativa do eixo das ordenadas. Determine C de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 8.

65 **Fuvest 2017** O centro de um disco de raio 1 é colocado no ponto $C = (0,1)$ do plano cartesiano $0xy$. Uma das extremidades de um fio de espessura desprezível e comprimento 3 é fixada na origem 0 e a outra extremidade está inicialmente no ponto (3,0). Mantendo o fio sempre esticado e com mesmo comprimento, enrola-se, no sentido anti-horário, parte dele em torno do disco, de modo que a parte enrolada do fio seja um arco OP da circunferência que delimita o disco. A medida do ângulo $O\hat{C}P$, em radianos, é denotada por θ. A parte não enrolada do fio é um segmento retilíneo $\overline{PQ}$ que tangencia o disco no ponto P.

A figura a seguir ilustra a situação descrita.



a) Determine as coordenadas do ponto Q quando o segmento $\overline{PQ}$ for paralelo ao eixo y.

b) Determine as coordenadas do ponto Q quando o segmento $\overline{PQ}$ for paralelo à reta de equação $y = x$.

c) Encontre uma expressão para as coordenadas do ponto Q em função de θ, para θ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Gabarito - LIVRO 2 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 13

108. a) Seja $0(x,y)$ o centro do círculo que passa por A e B, temos:

$d(0,A) = d(0,B) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

$\Rightarrow 3x + y - 3 = 0$

b) Como C pertence à parte negativa do eixo das ordenadas, C(0,y); $y < 0$.

Mas $A_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2}$, em que $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix}$

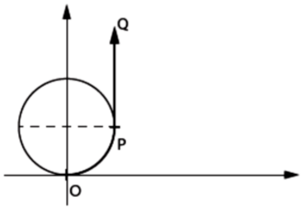
Portanto: $\frac{|4-3y|}{2} = 8$

$4 - 3y = 16$ ou $4 - 3y = -16$

$y = -4 \mid y = \frac{20}{3}$

Como y deve ser negativo, então $y = -4$, portanto $C(0, -4)$.

65. a) Segue a ilustração da situação descrita:



Como PQ é paralelo ao eixo y, segue direto que a coordenada x de Q é 1.

Em y, a coordenada será de 1 + PQ.

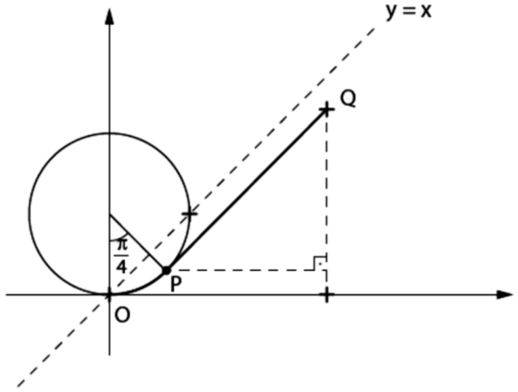
No entanto, OQ = OP + PQ:

$$3 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 + PQ$$

$$PQ = 3 - \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\boxed{Q\left(1, 4 - \frac{\pi}{2}\right)}$.

b) Segue a ilustração da situação descrita:



Primeiro, encontra-se as coordenadas do ponto P.

A coordenada x será dada por $1 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A coordenada y será de $1 - 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Agora, calcula-se o segmento PQ.

OQ = OP + PQ

$$3 = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 + PQ$$

$$PQ = 3 - \frac{\pi}{4}$$

Para finalmente encontrar as coordenadas de Q, são necessárias as projeções do segmento PQ nos eixos coordenados.

Posição em $x = \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 45° = \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Projeção em $y = \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{sen} 45° = \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

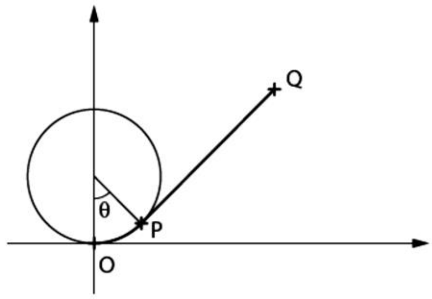
Logo, as coordenadas serão assim calculadas:

Coordenada em x: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(4 - \frac{\pi}{4}\right)$

Coordenada em y: $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(3 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$

Assim: $\boxed{Q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(4 - \frac{\pi}{4}\right); 1 + \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)\right)}$

c)



$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Seguindo os mesmos passos do item anterior, tem-se:

Coordenadas do ponto P

$P = (\text{sen}\theta, 1 - \cos\theta)$

Comprimento do segmento PQ

OQ = OP + PQ

$3 = \theta + PQ$

$PQ = 3 - \theta$

Projeção sobre os eixos coordenados

Projeção em x: $(3 - \theta)\cos\theta$

Projeção em y: $(3 - \theta)\cos\theta$

Coordenadas de Q em função de θ

$\boxed{Q = (\text{sen}\theta + (3 - \theta)\cos\theta; 1 - \cos\theta + (3 - \theta)\text{sen}\theta)}$