1ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Dada a função $f(x) = \dfrac{(156^{x} + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

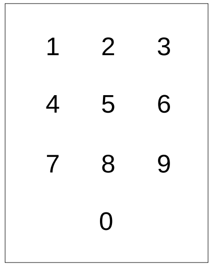
$$f(x+y) + f(x-y) = 2\, f(x)\, f(y)$$

2ª QUESTÃO — Valor: 1,0

O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.



Teclado numérico

3ª QUESTÃO — Valor: 1,0

ANULADA

Sejam *a*, *b*, *c* e *d* números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que:

$$c^2 = (a\,c)^{\log_a d}$$

4ª QUESTÃO — Valor: 1,0

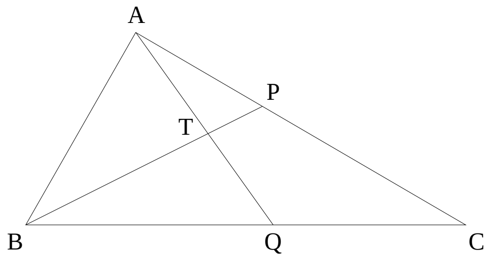
Determine o valor das raízes comuns das equações $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$ e $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$.

5ª QUESTÃO — Valor: 1,0

Resolva a equação $2\,\text{sen}\,11x + \cos 3x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,3x = 0$.

6ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Considere um triângulo ABC de área S. Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que $\overline{PA}/\overline{PC} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{QB}/\overline{QC} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de S, q e r.



7ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{MF}$ e $\overline{MF'}$, que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{MF}/\overline{FP}) + (\overline{MF'}/\overline{F'P'})$ é constante.

Sugestão: calcule inicialmente a soma $(1/\overline{MF}) + (1/\overline{FP})$.

8ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.

a. Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t.

b. Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k.

9ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Calcule o determinante da matriz n x n em função de b, onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

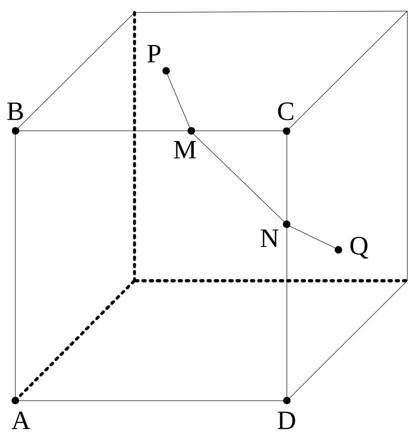
$$\underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{n \text{ colunas}} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \text{ linhas}$$

10ª QUESTÃO **Valor: 1,0**

Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

a. Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b. Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



RASCUNHO

RASCUNHO