

M.01

A figura apresenta uma parte de uma tabela na qual cada linha e cada coluna seguem de acordo com o padrão representado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	...
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	...
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Com relação a essa tabela de números:

- Escolha um quadrado 3×3 e, exibindo a soma de seus 9 números, verifique que o resultado é múltiplo de 9.
- Um quadrado com 16 números tem por soma de todos esses números o valor de 1.056 (mil e cinquenta e seis). Descubra o menor número desse quadrado.
- A soma de todos os números de um quadrado $n \times n$, com menor número igual a 4, é de 108.000 (cento e oito mil). Qual é o valor de n ?

Resolução

- a) Um quadrado 3×3 é do tipo

x	$x + 1$	$x + 2$
$x + 7$	$x + 8$	$x + 9$
$x + 14$	$x + 15$	$x + 16$

Se S for a soma dos nove elementos desse quadrado então:

$$S = (3x + 3) + (3x + 24) + (3x + 45) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = 9x + 72 \Leftrightarrow S = 9 \cdot (x + 8) \text{ que é um múltiplo de } 9.$$

- b) Um quadrado de 16 números é 4×4 e é do tipo

x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$
$x + 7$	$x + 8$	$x + 9$	$x + 10$
$x + 14$	$x + 15$	$x + 16$	$x + 17$
$x + 21$	$x + 22$	$x + 23$	$x + 24$

A soma dos 16 elementos é 1056 e, portanto:

$$(4x + 6) + (4x + 34) + (4x + 62) + (4x + 90) = 1056 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x + 192 = 1056 \Leftrightarrow 16x = 864 \Leftrightarrow x = 54$$

Assim, o menor número desse quadrado é 54.

- c) Um quadrado $n \times n$, cujo primeiro elemento é o 4, é do tipo:

linha 1	4	5	6	...	$n + 3$
linha 2	11	12	13	...	$n + 10$
linha 3	18	19	20	...	$n + 17$
⋮
linha n	$7n - 3$	$8n - 4$

Note que:

- 1) O primeiro elemento da n -ésima linha é $4 + (n - 1) \cdot 7 = 4 + 7n - 7 = 7n - 3$.
- 2) O último elemento da n -ésima linha é $7 \cdot n - 3 + n - 1 = 8n - 4$.

Se S_1 for a soma dos elementos da linha 1 e S_n for a soma dos elementos da linha n , então:

$$S_1 = \frac{4 + n + 3}{2} \cdot n = \frac{n + 7}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{7n - 3 + 8n - 4}{2} \cdot n = \frac{15n - 7}{2} \cdot n$$

A soma S dos n elementos da P.A.

$(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ em que $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ representam as soma dos elementos da linha 1, linha 2, linha 3, ..., é tal que:

$$S = \frac{\frac{n + 7}{2} \cdot n + \frac{15n - 7}{2} \cdot n}{2} \cdot n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\frac{16n}{2} \cdot n}{2} \cdot n = 4n^3$$

$$\text{Logo: } 4n^3 = 108\,000 \Leftrightarrow n^3 = 27\,000 \Leftrightarrow n = 30$$

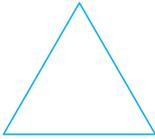
Respostas: a) demonstração

b) o menor número é 54

c) 30

M.02

O *Floco de Neve de Koch* (ou *Estrela de Koch*) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

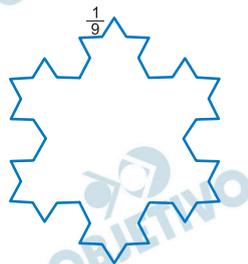
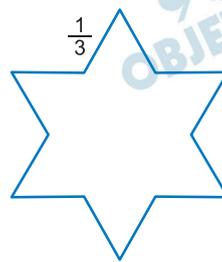
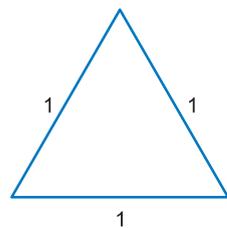
Passo 0: começa-se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.	Passo 1: divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.	Passo 2: repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior
		

Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda:

- Qual é o número de lados da figura no Passo 3?
- Qual é o perímetro da figura no Passo 5?
- A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6.000.000.000.000 (seis trilhões)?

Note e adote:
 $\log_{10} 2 \cong 0,301$

Resolução



- a) Com os dados fornecidos podemos montar a tabela:

Passo	Número de lados	Perímetro
0	3	$3 \cdot 1$
1	12	$12 \cdot \frac{1}{3}$
2	48	$48 \cdot \frac{1}{9}$

Os números de lados estão em P.G. de primeiro termo 3 e razão 4.

A figura do Passo 3 possui $3 \cdot 4^3 = 192$ lados.

- b) Os perímetros estão em P.G. de primeiro termo 3 e razão $\frac{4}{3}$.

A figura do Passo 5 possui perímetro

$$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^5}{3^4} = \frac{1024}{81}$$

- c) Como o número de lados no passo n é dado por $3 \cdot 4^n$, este número supera 6 trilhões se

$$3 \cdot 4^n > 6 \cdot 10^{12} \Rightarrow 2^{2n} > 2 \cdot 10^{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2^{2n} > \log (2 \cdot 10^{12}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n \cdot \log 2 > \log 2 + \log 10^{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n \cdot 0,301 > 0,301 + 12 \Rightarrow n > \frac{12,301}{0,602} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 20,4$$

Portanto, a partir do Passo 21

Respostas: a) 192 lados

b) $\frac{1024}{81}$

c) Passo 21

M.03

Um jogo educativo possui 16 peças nos formatos: círculo, triângulo, quadrado e estrela, e cada formato é apresentado em 4 cores: amarelo, branco, laranja e verde. Dois jogadores distribuem entre si quantidades iguais dessas peças, de forma aleatória.

O conjunto de 8 peças que cada jogador recebe é chamado de **coleção**.

- Quantas são as possíveis coleções que um jogador pode receber?
- Qual é a probabilidade de que os dois jogadores recebam a mesma quantidade de peças amarelas?
- A regra do jogo estabelece pontuações para as peças, da seguinte forma: círculo = 1 ponto, triângulo = 2 pontos, quadrado = 3 pontos e estrela = 4 pontos. Quantas são as possíveis coleções que valem 26 pontos ou mais?

Resolução

- a) O número de possíveis coleções é dado por:

$$C_{16,8} = \frac{16!}{8! \cdot 8!} = 12870$$

- b) A probabilidade de que os dois jogadores recebam a mesma quantidade de peças amarelas, isto é, duas peças amarelas cada um é dado por:

$$\frac{C_{4,2} \cdot C_{12,6}}{C_{16,8}} = \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{12!}{6! \cdot 6!}}{\frac{16!}{8! \cdot 8!}} = \frac{28}{65}$$

- c) As coleções possíveis são:

- 1) 4 estrelas e 4 quadrados (28 pontos):

$$C_{4,4} \cdot C_{4,4} = 1$$

- 2) 4 estrelas, 3 quadrados e 1 triângulo (27 pontos):

$$C_{4,4} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,1} = 16$$

- 3) 4 estrelas, 3 quadrados e 1 círculo (26 pontos):

$$C_{4,4} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,1} = 16$$

- 4) 4 estrelas, 2 quadrados e 2 triângulos (26 pontos):

$$C_{4,4} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} = 36$$

- 5) 3 estrelas, 4 quadrados e 1 triângulo (26 pontos):

$$C_{4,3} \cdot C_{4,4} \cdot C_{4,1} = 16$$

Portanto, existem: $1 + 16 + 16 + 36 + 16 = 85$ coleções possíveis.

Respostas: a) 12870

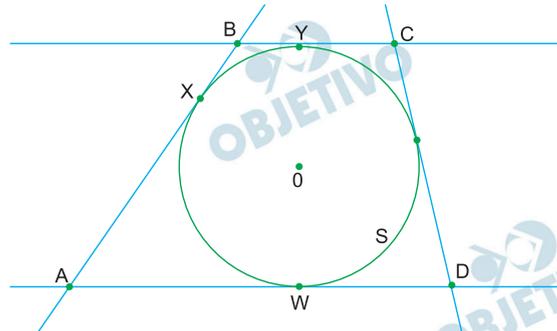
b) $\frac{28}{65}$

c) 85

M.04

São dados:

- uma circunferência S de centro O e raio 5 ;
- quatro pontos X, Y, Z e W em S de tal forma que as retas tangentes a S nesses pontos formam um trapézio $ABCD$, como na figura;
- $\text{sen}(\widehat{BAW}) = \frac{3}{5}$ e $CD = 15$.

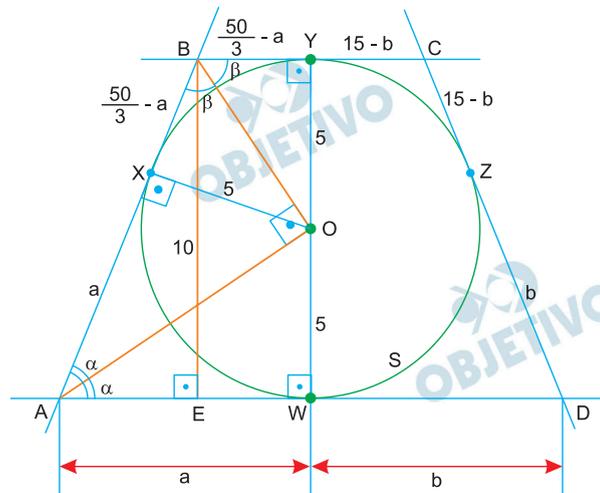


Determine

- a medida de \overline{AB} ;
- a medida de \overline{AW} e \overline{AX} ;
- a área da região delimitada pelo trapézio $ABCD$.

Resolução

a)



No triângulo retângulo BAE , temos:

$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{BAE} &= \frac{10}{AB} \Rightarrow \text{sen } \hat{BAW} = \frac{10}{AB} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3}{5} &= \frac{10}{AB} \Rightarrow AB = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

b) Como $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ temos $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Assim, o triângulo AOB é retângulo em O .

Sendo $AW = AX = a$, temos:

$$BX = BY = \frac{50}{3} - a$$

$$\text{Logo, } (OX)^2 = (AX) \cdot (BX) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^2 = a \cdot \left(\frac{50}{3} - a \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{50a}{3} - a^2 \Rightarrow 3a^2 - 50a + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 15, \text{ pois } a > 5$$

c) Sendo $DW = DZ = b$, temos $CZ = CY = 15 - b$, portanto, a área do trapézio é dada por:

$$\frac{(AD + BC) \cdot YW}{2} =$$

$$= \frac{(AW + DW + BY + CY) \cdot YW}{2} =$$

$$= \frac{\left(a + b + \frac{50}{3} - a + 15 - b \right) \cdot 10}{2} = \frac{475}{3}$$

Respostas: a) $AB = \frac{50}{3}$

b) $AW = AX = 15$

c) $\frac{475}{3}$

M.05

É dada a função $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{cos}^4 x, \text{ para todo } x \in [0, \pi].$$

a) Apresente três valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $f(x) = 1$.

b) Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais

$$f(x) = \frac{5}{8}.$$

c) Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais

$$\frac{1}{2} f(x) + \frac{3}{8} \operatorname{sen}(2x) \geq \frac{5}{8}.$$

Resolução

a) Lembrando que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^4 x + 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cos}^4 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{cos}^4 x = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x, \text{ temos:}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ ou } \operatorname{cos} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \pi, \text{ pois } x \in [0; \pi]$$

b) $f(x) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x = \frac{3}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\operatorname{sen}(2x)]^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} + n\pi, (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + n \frac{\pi}{2}, (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6},$$

pois $x \in [0; \pi]$

c) $\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{3}{8} \cdot \operatorname{sen}(2x) \geq \frac{5}{8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos}^2 x) +$$

$$+ \frac{3}{8} \cdot (2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x) \geq \frac{5}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x - 6 \cdot \text{sen} x \cdot \text{cos} x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\text{sen}(2x))^2 - 3 \cdot \text{sen}(2x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \text{sen}(2x) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12},$$

pois $x \in [0, \pi]$

Respostas: a) $V = \left\{ 0; \frac{\pi}{2}; \pi \right\}$

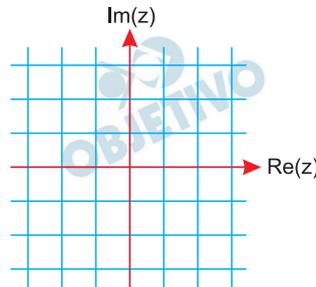
b) $V = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

c) $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} \right\}$

M.06

Resolva os três itens abaixo:

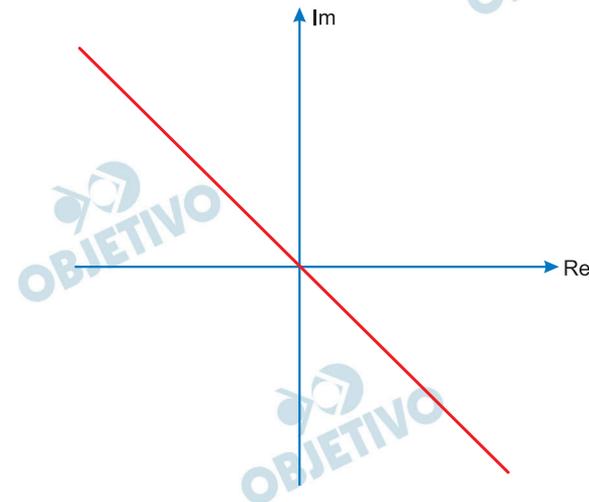
- a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) da folha de respostas o conjunto resultante após essa transformação.



- b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\frac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.
- c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z , i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.

Resolução

- a) Os complexos tais que $\text{Re}(Z) = \text{Im}(Z)$ podem ser representados como $Z = a + ai$, com $a \in \mathbb{R}$. A transformação mencionada no enunciado associa cada complexo $Z = a + ai$ com seu conjugado $\bar{Z} = a - ai$. O conjunto dos números da forma $\bar{Z} = a - ai$ pode ser representado de acordo com o gráfico abaixo (bissetriz dos quadrantes pares):



- b) Para $Z = a + bi$, tem-se:

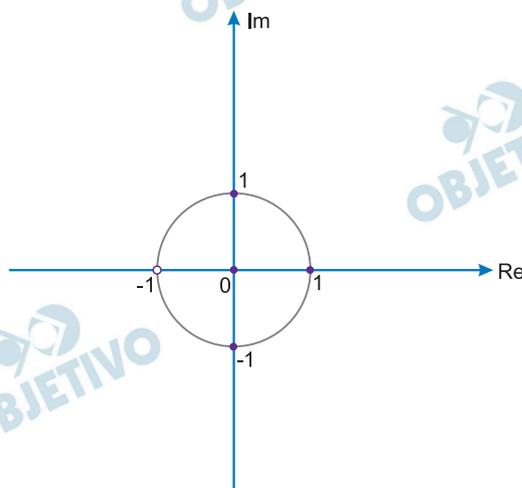
$$\frac{Z-1}{Z+1} = \frac{a+bi-1}{a+bi+1} =$$

$$= \frac{(a-1) + bi}{(a+1) + bi} \cdot \frac{(a+1) - bi}{(a+1) - bi} = \frac{a^2 + b^2 - 1 + 2bi}{(a+1)^2 + b^2} =$$

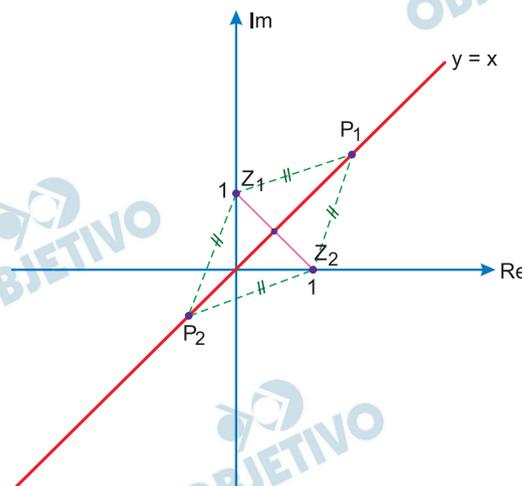
$$= \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+1)^2 + b^2} + \frac{2b}{(a+1)^2 + b^2} i$$

Para que $\frac{Z-1}{Z+1}$ seja imaginário puro deve-se ter:

$(Z+1 \neq 0 \text{ e } a^2 + b^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow Z \neq -1 \text{ e } a^2 + b^2 = 1$, que é uma circunferência com centro na origem e raio 1, sem o ponto $(-1, 0)$.



- c) Considerando os afixos de $Z_1 = i$ e $Z_2 = 1$ como dois dos vértices do triângulo equilátero, tem-se $\sqrt{2}$ é a medida de um dos lados deste triângulo. Como o terceiro afixo P deve formar com os afixos de Z_1 e Z_2 o triângulo equilátero tem-se para $P(x, y)$ duas possibilidades (P_1 e P_2)



Como P_1 e P_2 pertencem à reta $y = x$ e a distância ao ponto $(1, 0)$ deve ser $\sqrt{2}$, tem-se

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{2}$$

como $y = x$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Portanto, tem-se:

$$P\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{ou}$$

$$P\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right). \text{ Esses pontos são os afi-}$$

xos dos números complexos cujas partes reais são:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

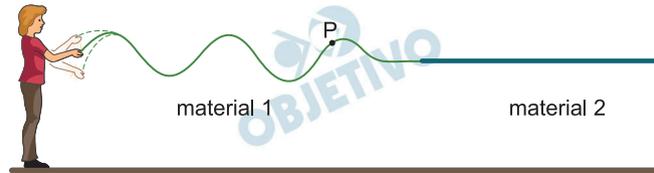
Respostas: a) Gráfico

b) Circunferência com centro na origem e raio 1, sem o ponto $(-1, 0)$

c) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

F.01

Uma pessoa produz oscilações periódicas em uma longa corda formada por duas porções de materiais diferentes 1 e 2, nos quais a velocidade de propagação das ondas é, respectivamente, de 5,0 m/s e 4,0 m/s. Segurando a extremidade feita do material 1, a pessoa abaixa e levanta sua mão regularmente, completando um ciclo a cada 0,5s, de modo que as ondas propagam-se do material 1 para o material 2, conforme mostrado na figura. Despreze eventuais efeitos de reflexão das ondas.



- a) Circule, dentre os vetores na folha de respostas, aquele que melhor representa a velocidade do ponto P da corda no instante mostrado na figura.

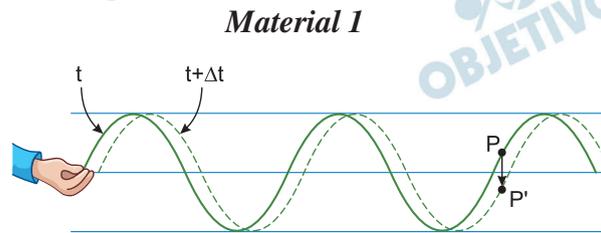


- b) Calcule a frequência e o comprimento de onda no material 1.
c) Calcule a frequência e o comprimento de onda no material 2.

Resolução

- a) No esquema abaixo está representado um trecho da corda 1 à qual pertence o ponto P. Foi caracterizada a corda em um instante t e em um instante posterior $t + \Delta t$.

(Δt é menor que um período de oscilação, isto é, menor que 0,5s).



O ponto P oscila verticalmente com movimento harmônico simples (MHS) e no intervalo de tempo Δt esse ponto se desloca para baixo, como indica a seta a seguir.

↓ (Representação da velocidade)
vetorial do ponto P.

b) (I) $f_1 = \frac{1}{T_1} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{0,5} \text{ (Hz)}$

$f_1 = 2,0 \text{ Hz}$

$$(II) \quad V_1 = \lambda_1 f_1 \Rightarrow 5,0 = \lambda_1 \cdot 2,0$$

Da qual: $\lambda_1 = 2,5\text{m}$

- c) (I) Na refração do pulso da corda 1 para a corda 2, a frequência se mantém.

Logo:

$$f_2 = f_1 = 2,0\text{Hz}$$

$$(III) \quad V_2 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow 4,0 = \lambda_2 \cdot 2,0$$

Da qual: $\lambda_2 = 2,0\text{m}$

Respostas: a) ↓

b) 2,0Hz e 2,5m

c) 2,0Hz e 2,0m

F.02

Um mol de um gás ideal monoatômico é resfriado adiabaticamente de uma temperatura inicial T_1 até uma temperatura final $T_1/3$.

Com base nessas informações, responda:

- O gás sofreu expansão ou compressão ao final do processo? Justifique sua resposta.
- Encontre o valor do trabalho realizado pelo gás nesse processo em termos da constante universal dos gases ideais R e de T_1 .
- Encontre a razão entre as pressões final e inicial do gás após o processo.

Note e adote:

Em um processo adiabático, não há troca de calor com o ambiente.

Energia interna por mol de um gás ideal monoatômico: $U = 3RT/2$.

Para o processo adiabático em questão, vale a relação $PV^{5/3} = \text{constante}$.

Resolução

- a) Conforme o 1.º princípio da Termodinâmica, $Q = \tau + \Delta U$, em que Q é a quantidade de calor, τ é o trabalho e ΔU é a variação de energia interna, tem-se:
- $$0 = \tau + \Delta U \quad (Q = 0, \text{ já que a transformação é adiabática})$$

$$\tau = -\Delta U$$

Se o gás é resfriado, $\Delta T < 0$ e $\Delta U < 0$. Logo: $\tau > 0$.

Se o trabalho é positivo, o gás realiza trabalho, sofrendo *expansão* (aumento de volume).

b) $\tau = -\Delta U \Rightarrow \tau = -(U_f - U_i) = U_i - U_f$

$$\tau = \frac{3}{2}R(T_i - T_f) \Rightarrow \tau = \frac{3}{2}R\left(T_1 - \frac{T_1}{3}\right)$$

$$\tau = \frac{3}{2}R \cdot \frac{2}{3}T_1$$

Da qual: $\tau = RT_1$

- c) (I) $(PV^{5/3})_f = (PV^{5/3})_i$ (Lei de Poisson-Laplace)
(II) $PV = RT$ (Equação de Clapeyron para 1 mol de gás)

$$V = \frac{RT}{P} \begin{cases} V_i = \frac{RT_1}{P_i} \\ V_f = \frac{RT_1}{3P_f} \end{cases}$$

Substituindo-se na primeira equação, vem:

$$P_f \left(\frac{RT_1}{3P_f} \right)^{5/3} = P_i \left(\frac{RT_1}{P_i} \right)^{5/3}$$

$$P_f \sqrt[3]{\frac{1}{243 P_f^5}} = P_i \sqrt[3]{\frac{1}{P_i^5}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{P_f^3}{243 P_f^5}} = \sqrt[3]{\frac{P_i^3}{P_i^5}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{243 P_f^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{P_i^2}}$$

Elevando-se os dois membros da igualdade ao cubo, segue-se que :

$$\frac{1}{243 P_f^2} = \frac{1}{P_i^2}$$

$$\left(\frac{P_f}{P_i} \right)^2 = \frac{1}{243}$$

$$\text{Da qual: } \frac{P_f}{P_i} = \frac{1}{\sqrt{243}}$$

$$\text{ou } \frac{P_f}{P_i} = \frac{\sqrt{3}}{27}$$

Respostas: a) Expansão

b) RT_1

c) $\frac{\sqrt{3}}{27}$

F.03

A tomografia por emissão de pósitrons (PET) é uma técnica de imagem por contraste na qual se utilizam marcadores com radionuclídeos emissores de pósitrons. O radionuclídeo mais utilizado em PET é o isótopo 18 do flúor, que decai para um núcleo de oxigênio-18, emitindo um pósitron. O número de isótopos de flúor-18 decai de forma exponencial, com um tempo de meia-vida de aproximadamente 110 minutos.

A imagem obtida pela técnica de PET é decorrente da detecção de dois fótons emitidos em sentidos opostos devido à aniquilação, por um elétron, do pósitron resultante do decaimento. A detecção é feita por um conjunto de detectores montados num arranjo radial. Ao colidir com um dos detectores, o fóton gera cargas no material do detector, as quais, por sua vez, resultam em um sinal elétrico registrado no computador do equipamento de tomografia. A intensidade do sinal é proporcional ao número de núcleos de flúor-18 existentes no início do processo.

- a) Após a realização de uma imagem PET, o médico percebeu um problema no funcionamento do equipamento e o reparo durou 3h40min. Calcule a razão entre a intensidade do sinal da imagem obtida após o reparo do equipamento e a da primeira imagem.
- b) Calcule a energia de cada fóton gerado pelo processo de aniquilação elétron-pósitron considerando que o pósitron e o elétron estejam praticamente em repouso. Esta é a energia mínima possível para esse fóton.
- c) A carga elétrica gerada dentro do material do detector pela absorção do fóton é proporcional à energia desse fóton.

Sabendo-se que é necessária a energia de 3 eV para gerar o equivalente à carga de um elétron no material, estime a carga total gerada quando um fóton de energia 600 keV incide no detector.

Note e adote:

O elétron e o pósitron, sua antipartícula, possuem massas iguais e cargas de sinais opostos.

Relação de Einstein para a energia de repouso de uma partícula: $E = mc^2$.

Carga do elétron = $1,6 \times 10^{-19}$ C

Massa do elétron: $m = 9 \times 10^{-31}$ kg

Velocidade da luz: $c = 3 \times 10^8$ m/s

1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J

“Tempo de meia-vida”: tempo necessário para que o número de núcleos radioativos caia para metade do valor inicial.

Resolução

- a) 1) A meia-vida T vale 110 min:

$$\Delta t = 3\text{h} + 40\text{ min} = 220\text{ min} = 2T$$

2) O número de núcleos no final é dado por:

$$N = \frac{N_0}{2^n} = \frac{N_0}{2^2} = \frac{N_0}{4}$$

3) De acordo com o texto:

$$I = k N$$

$$I_0 = k N_0$$

$$\text{Portanto: } \frac{I}{I_0} = \frac{N}{N_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = \frac{1}{4}$$

b) No processo de aniquilamento:

$$2 E_f = E_p + E_e = 2m c^2$$

$$E_f = m c^2$$

$$E_f = 9 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ (J)}$$

$$E_f = 8,1 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

c) De acordo com o texto:

$$3eV \dots\dots\dots 1e$$

$$600 \cdot 10^3 \text{ eV} \dots\dots\dots Q$$

$$Q = 200 \cdot 10^3 e$$

Como $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, vem:

$$Q = 200 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$Q = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

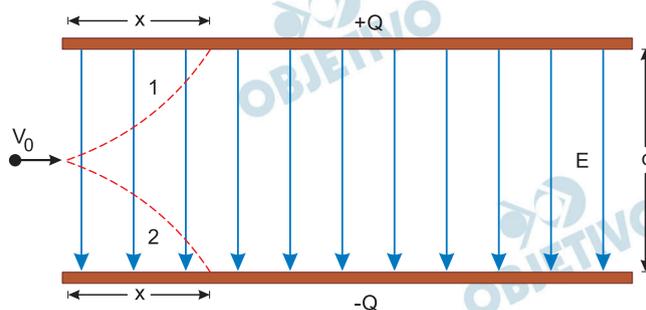
Respostas: a) $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{4}$

b) $E_f = 8,1 \cdot 10^{-14} \text{ J}$

c) $Q = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ C}$

F.04

Em um ambiente do qual se retirou praticamente todo o ar, as placas de um capacitor estão arranjadas paralelamente e carregadas com cargas de mesma magnitude Q e sinais contrários, produzindo, na região entre as placas, um campo elétrico que pode ser considerado uniforme, com módulo igual a 10^6 V/m. Uma partícula **carregada negativamente**, com carga de módulo igual a 10^{-9} C, é lançada com velocidade de módulo V_0 igual a 100 m/s ao longo da linha que passa exatamente pelo centro da região entre as placas, como mostrado na figura.



A distância d entre as placas é igual a 1 mm. Despreze os efeitos gravitacionais.

- Aponte, entre as trajetórias 1 e 2 mostradas na figura, aquela que mais se aproxima do movimento da partícula na região entre as placas.
- Sabendo que a massa da partícula é igual a $10 \mu\text{g}$, determine a que distância horizontal x a partícula atingirá uma das placas, supondo que elas sejam suficientemente longas.
- Quais seriam o sentido e o módulo de um eventual campo magnético a ser aplicado na região entre as placas, perpendicularmente ao plano da página, para que a partícula, em vez de seguir uma trajetória curva, permaneça movendo-se na mesma direção e no mesmo sentido com que foi lançada?

Resolução

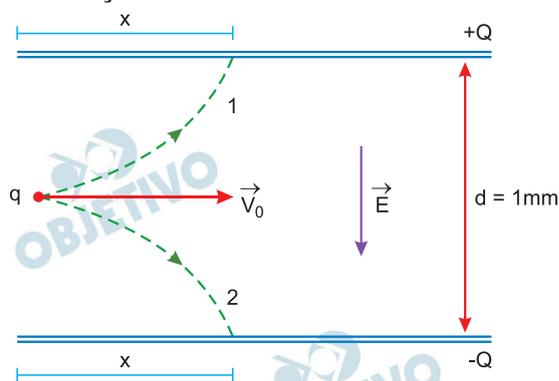


fig. 1

- A carga elétrica q lançada no campo elétrico uniforme é negativa e recebe do campo uma força elétrica \vec{F}_{el} no sentido contrário ao do vetor campo elétrico \vec{E} (ver figura 2). Logo a partícula é desviada para cima, de acordo com a trajetória 1.

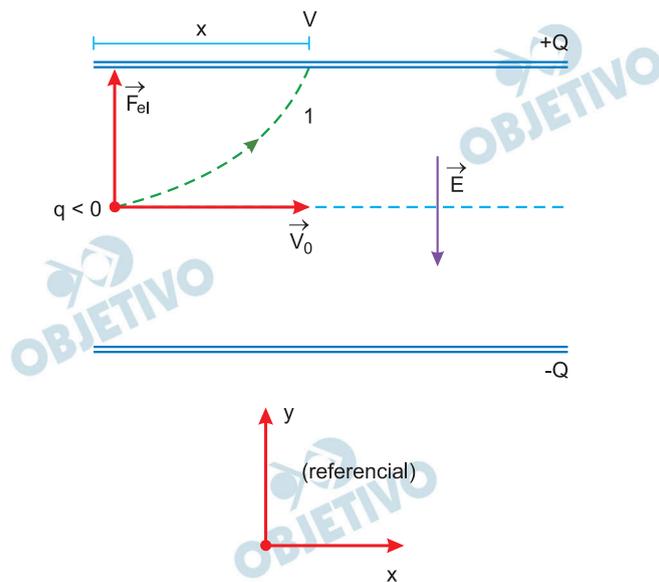


fig. 2

b) 1) Cálculo do módulo da aceleração na direção y:

$$F_{el} = |q| \cdot E$$

$$F_{el} = F_{res} = m \cdot a$$

$$m \cdot a = |q| \cdot E$$

$$a = \frac{|q| \cdot E}{m}$$

Sendo $|q| = 10^{-9}C$; $E = 10^6V/m$

$m = 10\mu g = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}kg = 10^{-8}kg$, vem:

$$a = \frac{10^{-9} \cdot 10^6}{10^{-8}} \text{ (unid. SI)} \Rightarrow a = 10^5 m/s^2$$

2) Cálculo do intervalo de tempo entre o lançamento e o instante em que a partícula atinge a placa positiva.

$$y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$0,5 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 10^5 \cdot T^2 \text{ (unid. SI)}$$

$$T = 10^{-4}s$$

3) Cálculo da distância x:

$$x = V_0 \cdot T$$

$$x = 100 \cdot 10^{-4} m \Rightarrow x = 10^{-2}m \text{ ou } x = 1cm$$

c) 1) Cálculo do módulo do campo magnético.

Para que a partícula mantenha-se na direção de lançamento em movimento uniforme, ou seja, em M.R.U., a força resultante sobre ela deverá ser nula. A força magnética deverá ser oposta à força elétrica.

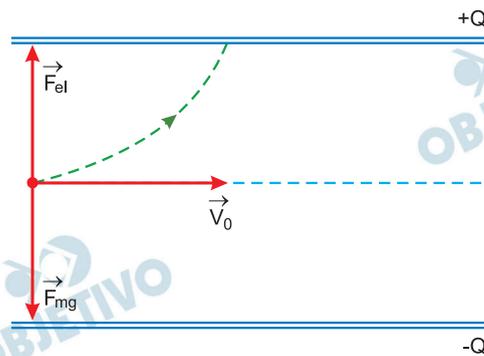


fig. 3

Da condição de equilíbrio dinâmico

$$|\vec{F}_{mg}| = |\vec{F}_{el}|$$

$$|q| V \cdot B = |q| \cdot E$$

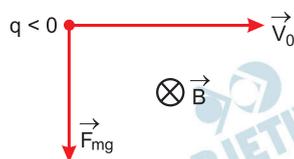
$$V \cdot B = E$$

$$B = \frac{E}{V} \Rightarrow B = \frac{10^6}{10^2} \text{ (unid. SI)}$$

$$B = 10^4 \text{ T}$$

2) Determinação do sentido do campo \vec{B} .

Usando a regra da mão esquerda na fig. 3, e observando que a carga é negativa, obtemos o sentido do campo \vec{B} .



Respostas: a) trajetória 1

b) $x = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$

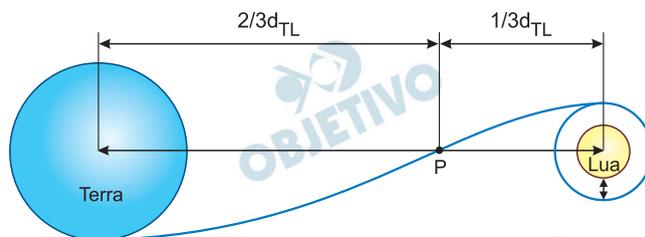
c) $B = 1 \cdot 10^4 \text{ T}$

sentido: entrando no plano da figura

F.05

Em janeiro de 2019, a sonda chinesa *Chang'e 4* fez o primeiro pouso suave de um objeto terrestre no lado oculto da Lua, reavivando a discussão internacional sobre programas de exploração lunar.

Considere que a trajetória de uma sonda com destino à Lua passa por um ponto P, localizado a $\frac{2}{3} d_{TL}$ do centro da Terra e a $\frac{1}{3} d_{TL}$ do centro da Lua, sendo d_{TL} a distância entre os centros da Terra e da Lua.



- a) Considerando que a massa da Terra é cerca de 82 vezes maior que a massa da Lua, determine a razão F_T/F_L entre os módulos da força gravitacional que a Terra e a Lua, respectivamente, exercem sobre a sonda no ponto P.

Ao chegar próximo à Lua, a sonda foi colocada em uma órbita lunar circular a uma altura igual ao raio da Lua (R_L), acima de sua superfície, como mostra a figura. Desprezando os efeitos da força gravitacional da Terra e de outros corpos celestes ao longo da órbita da sonda,

- b) determine a velocidade orbital da sonda em torno da Lua em termos da constante gravitacional G , da massa da Lua M_L e do raio da Lua R_L ;
- c) determine a variação da energia mecânica da nave quando a altura da órbita, em relação à superfície da Lua, é reduzida para $0,5 R_L$. Expresse seu resultado em termos de G , R_L , M_L e da massa da sonda m_s .

Note e adote:

O módulo da força gravitacional entre dois objetos de massas M e m separados por uma distância d é

$$\text{dado por } F = \frac{GMm}{d^2}.$$

A energia potencial gravitacional correspondente é

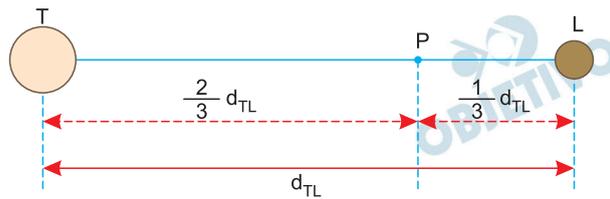
$$\text{dada por } U = -\frac{GMm}{d}.$$

Assuma a distância da Terra à Lua como sendo constante.

Resolução

- a) A força gravitacional tem intensidade F dada por:

$$F = \frac{GMm}{d^2}$$

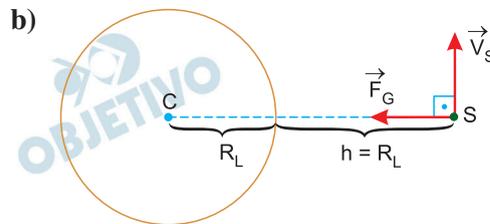


$$F_T = \frac{G M_T m_S}{4 d_{TL}^2}; \quad F_L = \frac{G M_L m_S}{1 d_{TL}^2}$$

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{M_T}{\frac{4}{9} d_{TL}^2} \cdot \frac{1}{9} d_{TL}^2$$

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{82}{4} \Rightarrow \frac{F_T}{F_L} = 20,5$$



O movimento da sonda será circular e uniforme e a força gravitacional aplicada pela Lua faz o papel de resultante centrípeta.

$$F_G = F_{cp}$$

$$\frac{G M_L m_S}{(2R_L)^2} = \frac{m_S V_S^2}{2R_L}$$

$$V_S^2 = \frac{G M_L}{2R_L} \Rightarrow V_S = \sqrt{\frac{G M_L}{2R_L}}$$

c) 1) Cálculo da energia cinética:

$$F_G = F_{cp} \Rightarrow \frac{G M_L m_S}{(2R_L)^2} = \frac{m_S V_S^2}{2R_L}$$

$$m_S V_S^2 = \frac{G M_L m_S}{2R_L} \Rightarrow E_c = \frac{m_S V_S^2}{2} = \frac{G M_L m_S}{4R_L}$$

2) Energia mecânica total:

$$E_p = -\frac{G M_L m_S}{2R_L} \text{ e } U = -2E_c$$

$$E_m = U + E_c = -2E_c + E_c$$

$$E_m = -E_c = -\frac{G M_L m_S}{4R_L}$$

3) Para $r = R_L + 0,5 R_L = 1,5 R_L$, temos:

$$E'_m = -\frac{G M_L m_S}{3R_L}$$

$$\Delta E_m = E'_m - E_m = -\frac{G M_L m_S}{3R_L} + \frac{G M_L m_S}{4R_L}$$

$$\Delta E_m = \frac{G M_L m_S}{R_L} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{G M_L m_S}{R_L} \left(\frac{3-4}{12} \right)$$

$$\Delta E_m = -\frac{1}{12} \frac{G M_L m_S}{R_L}$$

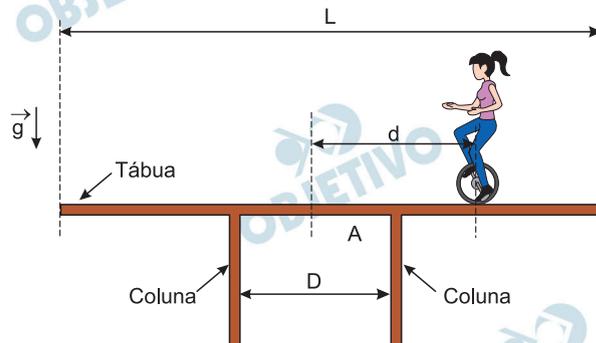
Respostas: a) $\frac{F_T}{F_L} = 20,5$

b) $V_S = \sqrt{\frac{G M_L}{2R_L}}$

c) $\Delta E_m = -\frac{1}{12} \frac{G M_L m_S}{R_L}$

F.06

Uma equilibrista de massa M desloca-se sobre uma tábua uniforme de comprimento L e massa m apoiada (sem fixação) sobre duas colunas separadas por uma distância D ($D < L$) de modo que o centro da tábua esteja equidistante das colunas. O ponto de apoio da equilibrista está a uma distância d (tal que $D/2 < d < L/2$) do centro da tábua, como mostra a figura.



- Considerando que a tábua está em equilíbrio, faça um diagrama indicando todas as forças que atuam sobre a tábua e seus respectivos pontos de aplicação.
- Calcule o torque resultante exercido pelos pesos da equilibrista e da tábua em relação ao ponto A (ponto de apoio da tábua na coluna mais próxima da equilibrista). Escreva sua resposta em termos de grandezas mencionadas no enunciado (M , L , m , D , d) e da aceleração da gravidade g .
- Calcule a distância máxima $d_{\text{máx}}$ da equilibrista ao centro da tábua para que o conjunto permaneça em equilíbrio estático. Considere os seguintes dados: comprimento da tábua: $L = 5$ m; massa da tábua: $m = 20$ kg, massa da equilibrista: $M = 60$ kg, distância entre as colunas: $D = 3$ m.

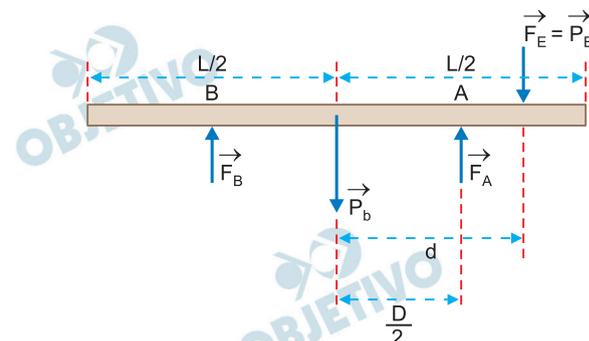
Note e adote:

Despreze as espessuras da tábua e da coluna.

Use $g = 10 \text{ m/s}^2$

Resolução

- Esquema de forças na barra:



\vec{P}_b : força gravitacional aplicada pela Terra

\vec{F}_E : força de contato aplicada pelo equilibrista

\vec{F}_A : força aplicada pelo apoio A

\vec{F}_B : força aplicada pelo apoio B

b) Torques em relação ao ponto A:

$$T_{F_E} = F_E \cdot \left(d - \frac{D}{2} \right)$$

Como $F_E = P_E = Mg$, vem:

$$T_{F_E} = Mg \left(d - \frac{D}{2} \right)$$

$$T_{P_b} = P_b \frac{D}{2} \Rightarrow T_{P_b} = mg \frac{D}{2}$$

O torque resultante entre \vec{F}_E e \vec{P}_b para $F_B \neq 0$ deverá ter sentido anti-horário e seu módulo é dado por:

$$T_R = mg \frac{D}{2} - Mg \left(d - \frac{D}{2} \right)$$

c) A distância d será máxima quando a força aplicada pelo apoio B se anular.

Neste caso, o torque resultante em relação ao ponto A deverá ser nulo:

$$F_E \cdot \left(d_{\text{máx}} - \frac{D}{2} \right) = P_b \frac{D}{2}$$

$$Mg \left(d_{\text{máx}} - \frac{D}{2} \right) = mg \frac{D}{2}$$

$$M d_{\text{máx}} - M \frac{D}{2} = \frac{mD}{2}$$

$$M d_{\text{máx}} = \frac{D}{2} (m + M)$$

$$d_{\text{máx}} = \frac{D}{2} \left(\frac{m + M}{M} \right)$$

$$d_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \left(\frac{80}{60} \right) (\text{m})$$

$$d_{\text{máx}} = 2 \text{ m}$$

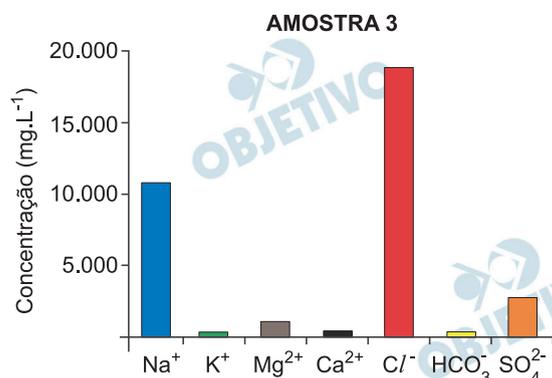
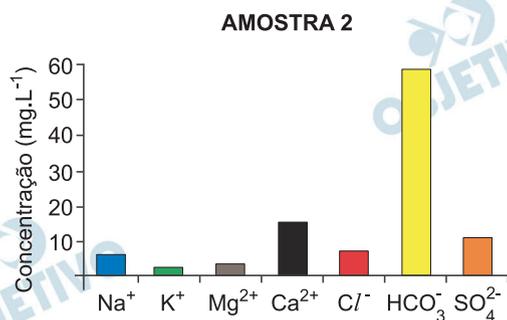
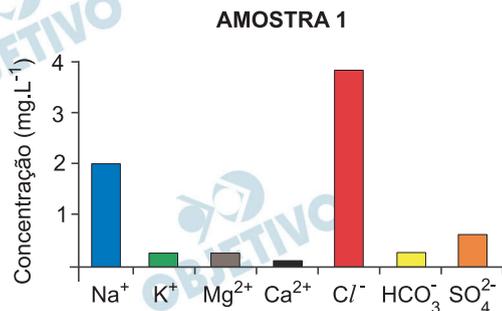
Respostas: a) ver figura

$$b) T_R = mg \frac{D}{2} - Mg \left(d - \frac{D}{2} \right)$$

$$c) d_{\text{máx}} = 2\text{m}$$

Q.01

As concentrações de alguns íons em amostras de água estão representadas nos gráficos a seguir. A origem de cada amostra (1, 2 e 3) foi omitida, mas pode corresponder a: amostra de água do mar; amostra de água de chuva numa região costeira; amostra de água doce de rio.



Maria Lúcia A. Moura Campos, *Introdução à Biogeoquímica de Ambientes Aquáticos*. Editora Átomo: 2010.

- O bicarbonato na água pode vir de diferentes fontes. Cite uma fonte de bicarbonato comum às três amostras.
- Preencha a tabela da folha de respostas com a correspondência entre as amostras 1, 2 e 3 e o ambiente em que foram coletadas.

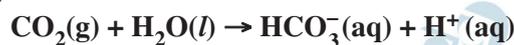
Ambientes	Água do mar	Água de chuva em região costeira	Água doce de rio
Amostra			

É esperado que a concentração de íons cloreto na água coletada da chuva em um ambiente continental seja igual, maior ou menor à de ambientes costeiros (ambos sem poluição)? Justifique sua resposta.

Resolução

A água do mar contém grande quantidade de sais dissolvidos, principalmente na forma de íons Cl^- (aq) e íons Na^+ (aq), portanto, o gráfico corresponde àquele em que a concentração de íons Cl^- é 18 000 mg/L e a de íons Na^+ é 10 000 mg/L, aproximadamente \Rightarrow gráfico 3. Devido à evaporação da água do mar, haverá arraste de íons principalmente Cl^- e Na^+ que se incorporarão à água da chuva costeira, mas em menor quantidade e cujas concentrações seriam: Cl^- 4 mg/L e Na^+ 2mg/L, o que corresponde ao gráfico 1.

Na água dos rios, entre os diversos íons, o de maior concentração é o bicarbonato (HCO_3^-), 60 mg/L, que pode ser proveniente da dissolução de solos calcáreos e da absorção de gás carbônico atmosférico segundo a equação:



Isso corresponde ao gráfico 2.

a) A fonte comum de bicarbonato presente nas 3 amostras é devida à absorção do CO_2 atmosférico.

b)

Ambientes	Água do mar	Água de chuva em região costeira	Água doce de rio
Amostra	3	1	2

A chuva continental apresenta menor concentração de íons Cl^- que a chuva em região costeira.

Q.02

O experimento conhecido como “chuva de ouro” consiste na recristalização, à temperatura ambiente, de iodeto de chumbo (PbI_2). A formação desse sal pode ocorrer a partir da mistura entre nitrato de chumbo ($\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$) e iodeto de potássio (KI). Outro produto dessa reação é o nitrato de potássio (KNO_3) em solução aquosa.

Tanto o $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ quanto o KI são sais brancos solúveis em água à temperatura ambiente, enquanto o PbI_2 é um sal amarelo intenso e pouco solúvel nessa temperatura, precipitando como uma chuva dourada.

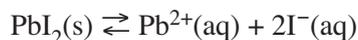


Em um laboratório, o mesmo experimento foi realizado em dois frascos. Em ambos, 100 mL de solução $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ e 100 mL de solução $0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de KI foram misturados. Ao primeiro frasco foi também adicionado 20 mL de água destilada, enquanto ao segundo frasco foi adicionado 20 mL de solução $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de iodeto de sódio (NaI).

A tabela a seguir apresenta os dados de solubilidade dos produtos da reação em diferentes temperaturas.

	Massa molar ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	Solubilidade em água em diferentes temperaturas ($\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$)		
		4°C	32°C	80°C
PbI_2	461,0	0,410	0,922	3,151
KNO_3	101,1	135	315	1700

Responda aos itens a seguir considerando os dados do enunciado e o equilíbrio químico de solubilidade do iodeto de chumbo:



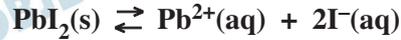
- Indique se o procedimento do segundo frasco favorece ou inibe a formação de mais sólido amarelo.
- Para separar o precipitado da solução do primeiro frasco e obter o PbI_2 sólido e seco, foi recomendado que, após a precipitação, fosse realizada uma filtração em funil com papel de filtro, seguida de lavagem do precipitado com água para se retirar o KNO_3 formado e, na sequência, esse precipitado fosse colocado para secar. Nesse caso, para se obter a maior quantidade do

PbI_2 , é mais recomendado o uso de água fria (4 °C) ou quente (80 °C)? Justifique.

- c) Encontre a constante do produto de solubilidade (K_{PS}) do iodeto de chumbo a 32 °C.

Resolução

- a) A equação que representa o equilíbrio químico de solubilidade do $\text{PbI}_2(\text{s})$ (sólido amarelo) é dada por:



A adição de $\text{NaI}(\text{aq})$ (procedimento do segundo frasco) provoca aumento da concentração de $\text{I}^{-}(\text{aq})$ de acordo com a equação:



O aumento da concentração de íons $\text{I}^{-}(\text{aq})$ provoca o deslocamento do equilíbrio para a esquerda, segundo o princípio de Le Châtelier.

Logo, favorece a formação de mais sólido amarelo.

- b) De acordo com os dados da tabela, a solubilidade do $\text{PbI}_2(\text{s})$ é menor em temperaturas mais baixas. Logo, para se obter mais $\text{PbI}_2(\text{s})$, utiliza-se água fria.

- c) I) Cálculo da solubilidade em mol/L a 32°C:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol de } \text{PbI}_2 \text{ ————— } 461\text{g} \\ \text{S} \text{ ————— } 0,922\text{g/L} \\ \text{S} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L} \end{array}$$

- II) Cálculo do K_{PS} do PbI_2 :



$$\text{Solubilidade} = \text{S} \qquad \qquad \qquad \text{S} \qquad \qquad \qquad 2\text{S}$$

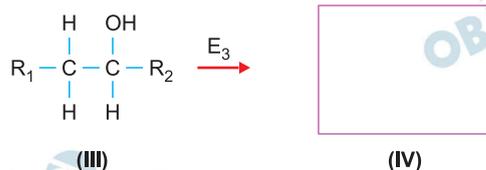
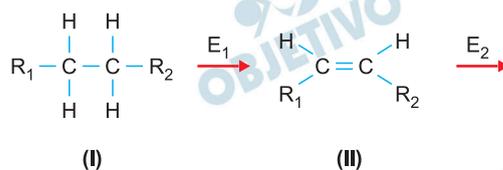
$$K_{\text{PS}} = [\text{Pb}^{2+}]^1 \cdot [\text{I}^{-}]^2$$

$$K_{\text{PS}} = (2 \cdot 10^{-3})^1 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2$$

$$K_{\text{PS}} = 32 \cdot 10^{-9} = 3,2 \cdot 10^{-8}$$

Q.03

O médico Hans Krebs e o químico Feodor Lynen foram laureados com o Prêmio Nobel de Fisiologia e Medicina em 1953 e 1964, respectivamente, por suas contribuições ao esclarecimento do mecanismo do catabolismo de açúcares e lipídios, que foi essencial à compreensão da obesidade. Ambos lançaram mão de reações clássicas da Química Orgânica, representadas de forma simplificada pelo esquema que mostra a conversão de uma cadeia saturada em uma cetona, em que cada etapa é catalisada por uma enzima (E) específica:



- a) Complete, no espaço determinado na folha de respostas, a fórmula estrutural do produto (IV) formado pela oxidação do álcool representado na estrutura (III).



(IV)

- b) Identifique pelo número qual das espécies (I, II ou III) possui isomeria geométrica (*cis-trans*) e desenhe os isômeros.

Número da espécie:	
$\boxed{}$	$\boxed{}$
Isômero <i>cis</i>	Isômero <i>trans</i>

- c) Se R_1 e R_2 forem cadeias carbônicas curtas, os compostos representados por (III) serão bastante solúveis em água, enquanto que, se R_1 e/ou R_2 forem cadeias carbônicas longas, os compostos representados por (III) serão pouco solúveis ou insolúveis em água.

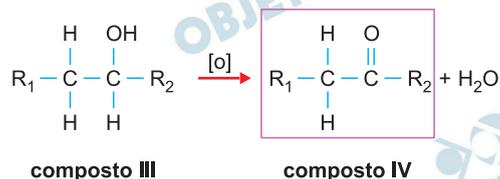
Por outro lado, os compostos representados por (I) e (II) serão pouco solúveis ou insolúveis em água independentemente do tamanho das cadeias. Explique a diferença do comportamento observado entre as espécies (I) e (II) e a espécie (III).

Note e adote:

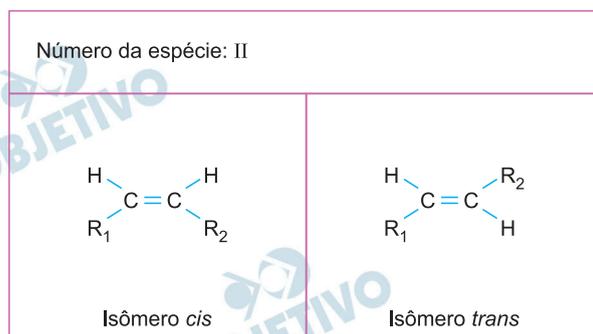
Considere R_1 e R_2 como cadeias carbônicas saturadas diferentes, contendo apenas átomos de carbono e hidrogênio.

Resolução

- a) Oxidação de álcool secundário produz cetona, portanto,



- b) O composto II apresenta isomeria cis-trans. As fórmulas estruturais são:



- c) Os compostos I e II são hidrocarbonetos e, portanto, apolares. Neste caso, independentemente do tamanho da cadeia, serão pouco solúveis ou insolúveis em água.

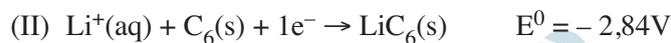
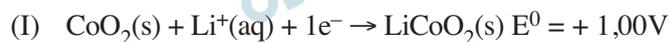
O composto III apresenta um grupo hidroxila, que é polar e estabelece ligações de hidrogênio com a água.

Se R_1 e R_2 forem curtos, o grupo hidroxila predomina deixando o composto mais polar, e solúvel em água.

Se R_1 e R_2 forem longos, a cadeia hidrocarbônica predomina, tornando o composto menos polar, e pouco solúvel em água.

Q.04

O lítio foi identificado no século XIX a partir das observações do naturalista e estadista brasileiro José Bonifácio de Andrada e Silva. Em 2019, esse elemento ganhou destaque devido ao Prêmio Nobel de Química, entregue aos pesquisadores John Goodenough, Stanley Whittingham e Akira Yoshino pelas pesquisas que resultaram na bateria recarregável de íon lítio. Durante o desenvolvimento dessa bateria, foi utilizado um eletrodo de $\text{CoO}_2(\text{s})$ (semirreação I) em conjunto com um eletrodo de lítio metálico intercalado em grafita ($\text{LiC}_6(\text{s})$) (semirreação II) ou um eletrodo de lítio metálico ($\text{Li}(\text{s})$) (semirreação III).



Considerando essas semirreações:

- Escreva a reação global da bateria que utiliza o lítio metálico como um dos eletrodos.
- Indique qual dos dois materiais, lítio metálico ou lítio metálico intercalado em grafita, será um agente redutor mais forte.

Justifique com os valores de potencial de redução padrão.

Em 1800, José Bonifácio descobriu o mineral petalita, de fórmula $\text{XA/Si}_4\text{O}_{10}$ (na qual X é um metal alcalino). Em 1817, ao assumir que $\text{X} = \text{Na}$, o químico sueco Johan Arfwedson observou que a petalita apresentaria uma porcentagem de metal alcalino superior ao determinado experimentalmente. Ao não encontrar outros substitutos conhecidos que explicassem essa incongruência, ele percebeu que estava diante de um novo elemento químico, o Lítio (Li).

- Explique, mostrando os cálculos, como a observação feita por Arfwedson permitiu descobrir que o elemento novo era o Lítio.

Note e adote:

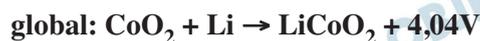
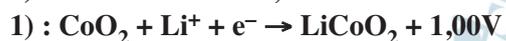
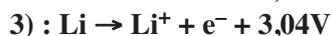
Massas molares ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$): Li = 7; O = 16;

Na = 23; Al = 27; Si = 28.

% em massa de Al na petalita: 8,8%.

Resolução

- Equação global utilizando lítio metálico como eletrodo. Mantendo a primeira semirreação e invertendo a terceira, temos:**



b) O melhor redutor é o lítio metálico, pois o seu cátion (Li^+) apresenta menor potencial de redução ($-3,04\text{V}$) que o lítio intercalado em grafita ($-2,84\text{V}$).

c) Considerando X a massa molar do metal alcalino, a massa molar do composto $\text{XAlSi}_4\text{O}_{10}$ será:

$$X + 27 + 112 + 160 = X + 299$$

$$X + 299 \text{ ——— } 100\%$$

$$\text{Al} \rightarrow 27 \text{ ——— } 8,8\%$$

$$x = 7,8$$

A massa molar do elemento X determinada ($7,8\text{g/mol}$) por meio dos dados fornecidos é menor que a do sódio (23g/mol).

Conclusão: Deve haver um novo elemento com massa molar em torno de 7g/mol (lítio).

Q.05

Arla 32 é uma solução de aproximadamente 32 g de ureia (H_2NCONH_2) em 100 mL de água utilizada em veículos a diesel para diminuir as emissões de óxidos de nitrogênio (NO e NO_2), que podem causar problemas ambientais quando em excesso na atmosfera. A solução de Arla, ao ser adicionada aos gases de escape do motor, em alta temperatura, forma amônia (reação I).

Em uma segunda etapa, a amônia formada reage com NO_2 e gera gás nitrogênio e água (reação II).



a) Escreva a fórmula de Lewis da ureia.

b) Calcule quantos litros de solução de Arla 32 são necessários para consumir todo o NO_2 produzido em uma viagem de 100 km, considerando que a quantidade de NO_2 formado por esse veículo é de 460 mg por km rodado. Indique os cálculos.

c) Considerando que a reação entre NH_3 e NO forma os mesmos produtos que a reação II, o volume gasto de Arla 32 para consumir o NO seria menor, igual ou maior ao usado para consumir uma mesma quantidade em mol de NO_2 ? Justifique mostrando a reação entre NH_3 e NO .

Note e adote:

Considerar todas as reações com 100% de rendimento.

Massas molares: ureia = $60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;

$\text{NO}_2 = 46 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

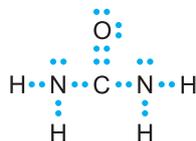
Distribuição eletrônica: H: $1s^1$; C: $1s^2 2s^2 2p^2$;

N: $1s^2 2s^2 2p^3$; O: $1s^2 2s^2 2p^4$

Resolução

a) Fórmula de Lewis da ureia

Pelos dados fornecidos, o número de elétrons na camada de valência do nitrogênio, carbono, oxigênio e hidrogênio são respectivamente, 5, 4, 6 e 1.

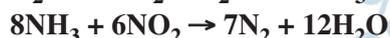
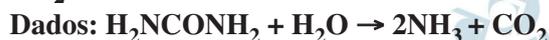


b) Cálculo da massa de NO_2 liberada num percurso de 100km.

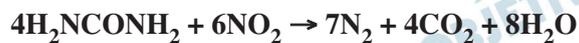
$$\begin{array}{r} 460\text{mg de NO}_2 \text{ ———— } 1 \text{ km} \\ x \quad \quad \quad \text{————— } 100\text{km} \end{array}$$

$$x = 46000\text{mg} = 46\text{g de NO}_2$$

Cálculo da massa de ureia para reagir com 46g de NO_2 :



Multiplicando a 1ª equação por 4 e somando, temos:



Cada

4 mols de H_2NCONH_2 reagem com 6 mols de NO_2

$$\begin{array}{r} \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 4 \cdot 60\text{g} \text{-----} 6 \cdot 46\text{g} \\ x \text{-----} 46\text{g} \end{array}$$

$$x = 40\text{g de ureia}$$

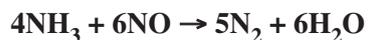
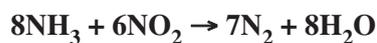
Cálculo do volume de Arla 32 necessário

$$32\text{g de ureia} \text{-----} 100 \text{ mL de solução}$$

$$40\text{g de ureia} \text{-----} y$$

$$y = 125 \text{ mL} = 0,125\text{L de Arla 32}$$

- c) Equações balanceadas das reações de NO_2 e NO com NH_3 .

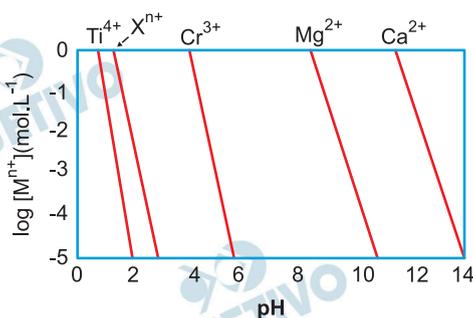


Para uma mesma quantidade de matéria de NO_2 e NO (6 mols), a quantidade de NH_3 necessária para reagir com NO_2 será o dobro (8 mols) que para reagir com NO (4 mols).

Será gasto o dobro do volume de Arla 32 para reagir com NO_2 do que com NO .

Q.06

Muitos metais (M^{n+}) em água, dependendo do pH da solução, formam hidróxidos ($M(OH)_n$) insolúveis.

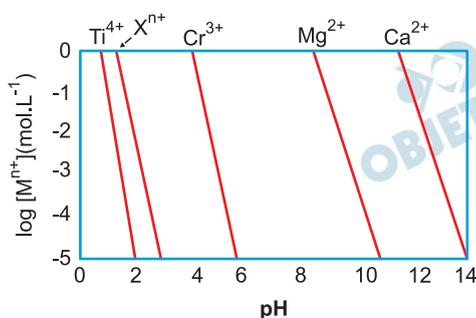


Esse comportamento pode ser descrito pela equação (I), que relaciona o valor de pH com o logaritmo da concentração do metal ($\log [M^{n+}]$), para uma dada temperatura, em que K_{PS} é a constante do produto de solubilidade do hidróxido do metal.

$$\text{Equação (I): } \log[M^{n+}] = \log(K_{PS}) + 14n - n(\text{pH})$$

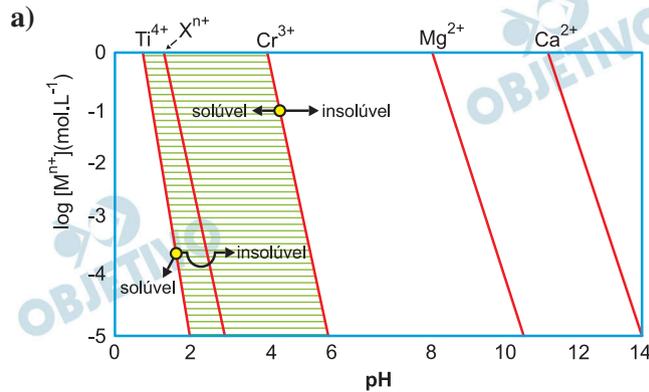
O comportamento da equação (I) é representado no gráfico, no qual as linhas mostram o valor de pH e $\log[M^{n+}]$ em que se inicia a precipitação de cada um dos metais. Em condições mais alcalinas do que a apresentada na linha de cada metal, será observada a espécie insolúvel como hidróxido e, em condições mais ácidas do que a apresentada na linha, será observada a espécie em sua forma solúvel.

- a) Pinte, no gráfico da folha de respostas, a região onde o Cr^{3+} se encontra na forma solúvel e o Ti^{4+} se encontra na forma de $Ti(OH)_4$ insolúvel.

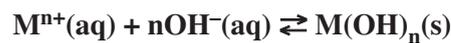


- b) As linhas que representam Mg^{2+} e Ca^{2+} possuem a mesma inclinação, mas diferem da inclinação das linhas que representam Cr^{3+} e X^{n+} , que possuem a mesma inclinação entre si. Indique a carga n de X^{n+} e justifique com base na equação (I).
- c) Indique qual das espécies tem maior valor de K_{PS} : $Ca(OH)_2$ ou $Mg(OH)_2$. Justifique com base nas informações dadas.

Resolução



Considerando a formação de hidróxidos insolúveis à partir dos cátions livres, a precipitação é favorecida com valores mais elevados de pH. Pode-se perceber conceitualmente a explicação acima pela equação a seguir:



Com maiores valores de pH, maiores as concentrações dos íons OH⁻, mais deslocado para os produtos estará o equilíbrio supracitado. Portanto, a região à direita das curvas apresenta o composto precipitado, à esquerda o composto solubilizado (cátion livre). Na região pintada, o Cr³⁺ se encontra na forma solúvel e o Ti⁴⁺ na forma de Ti(OH)₄ insolúvel.

- b) A análise da equação I indica que o parâmetro “n”, o qual se refere à carga do íon, é o coeficiente angular das retas. Assim, gráficos com a mesma inclinação se relacionam com cátion com a mesma valência.

$$\text{Eq. (I): } \log [\text{M}^{n+}] = \log (\text{K}_{\text{PS}}) + 14n - n (\text{pH})$$

É a equação de uma reta:

$$\log [\text{M}^{n+}] = -n (\text{pH}) + \log \text{K}_{\text{PS}} + 14n$$

$$y = ax + b$$

Portanto, n é o coeficiente angular da reta.

- c) Isolando-se o termo log (K_{PS}) da equação I, tem-se:

$$\log (\text{K}_{\text{PS}}) = \log [\text{M}^{n+}] - 14n + n(\text{pH})$$

A partir do gráfico, admitiu-se um ponto para cada uma das curvas, como demonstradas a seguir:

Para o Mg(OH)₂, quando log [M²⁺] = -3, o pH é igual a 10.

$$\log (\text{K}_{\text{PS}}) = \log [\text{M}^{n+}] - 14n + n (\text{pH})$$

$$\log (\text{K}_{\text{PS}}) = -3 - 14 \cdot (+2) + 2(10)$$

$$\log (\text{K}_{\text{PS}}) = -11 \Rightarrow \text{K}_{\text{PS}} = 10^{-11} \text{ (para o Mg(OH)}_2\text{)}$$

Para o Ca(OH)₂, quando log [Ca²⁺] = -5, o pH é igual a 14.

$$\log (K_{PS}) = \log [M^{n+}] - 14n + n(\text{pH})$$

$$\log (K_{PS}) = - 5 - 14 \cdot (+2) + 2 \cdot (14)$$

$$\log (K_{PS}) = - 5 \Rightarrow K_{PS} = 10^{-5} \text{ (para o } \text{Ca(OH)}_2\text{)}$$

Portanto, $K_{PS_{\text{Ca(OH)}_2}} > K_{PS_{\text{Mg(OH)}_2}}$

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

 **OBJETIVO**

B.01

Indivíduos intolerantes à lactose não conseguem digerir esse açúcar presente no leite. A principal causa da intolerância à lactose é a diminuição da produção da enzima lactase, especialmente na idade adulta. A indústria de laticínios beneficia-se da biotecnologia para incluir uma lactase de levedura nos alimentos, fazendo com que a lactose seja digerida antes de ser consumida, gerando, assim, os produtos lácteos sem lactose.

- a) Considerando que o pH ótimo para funcionamento da lactase é de aproximadamente 7,5, em que região do sistema digestório humano ocorre a atividade dessa enzima?
- b) A região codificadora dos genes é precedida e controlada por uma região regulatória. Uma mutação (C para T) na região destacada na tabela aconteceu há cerca de 10 mil anos em pessoas do norte europeu e foi conservada, resultando em manutenção da expressão do gene na idade adulta e consequente permanência da habilidade de digerir a lactose. Essa mutação aconteceu em que região do gene? Baseado nessa mutação, qual é o padrão de herança da característica “Tolerância à lactose na idade adulta”?

Indivíduo	Fenótipo	Sequência (19 mil nucleotídeos antes do primeiro éxon)
1	Tolerante à lactose	Alelo 1 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG T CCCTGG
		Alelo 2 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG T CCCTGG
2	Tolerante à lactose	Alelo 1 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG T CCCTGG
		Alelo 2 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG C CCCTGG
3	Tolerante à lactose	Alelo 1 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG C CCCTGG
		Alelo 2 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG T CCCTGG
4	Intolerante à lactose	Alelo 1 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG C CCCTGG
		Alelo 2 cromossomo 2: TAAGATAATGTAG C CCCTGG

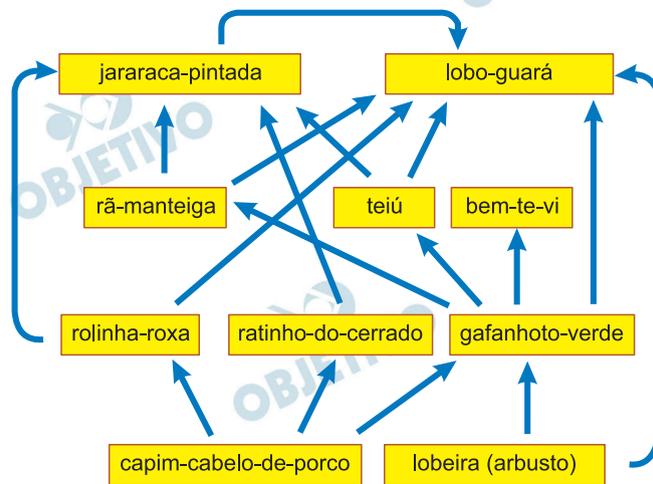
- c) Bactérias transgênicas que expressam o gene da lactase de levedura (organismo eucariótico) são utilizadas para a produção dessa enzima em larga escala. Cite uma manipulação em laboratório necessária no gene da lactase de levedura para que ele possa ser expresso em bactérias. Justifique sua resposta.

Resolução

- a) A lactase atua no intestino delgado.
- b) Conforme a informação da tabela, a mutação ocorre em uma região encontrada a 19 mil nucleotídeos antes do 1.º exon. Assim, a mutação ocorreu em uma região não codificadora do gene, região essa relacionada a regulação gênica.
O padrão de herança apresentada pela tolerância à lactose é autossômica dominante.
- c) Para a expressão do gene da lactase em bactérias é necessário obter o DNA complementar (cDNA) do gene da levedura (isto porque o cDNA não apresenta introns) e posteriormente cloná-lo em plasmídeo bacteriano para sua expressão.

B.02

Em um cerrado campestre bem preservado, ocorre a teia trófica representada no esquema.



- Cite uma espécie dessa teia alimentar que ocupa mais de um nível trófico, especificando quais são eles.
- Cite cinco espécies de uma cadeia alimentar que faça parte dessa teia. Desenhe um esquema da pirâmide de energia desse ambiente.
- Com relação à dinâmica dessa teia alimentar, descreva o efeito indireto da extinção local do bem-te-vi sobre a população do predador de topo dessa teia (ou seja, aquele que preda sem ser predado por nenhum outro componente da teia). Caso o capim-cabelo-de-porco venha a sofrer uma grande queda em sua biomassa, qual interação biológica seria esperada entre os consumidores primários que se alimentam desse recurso?

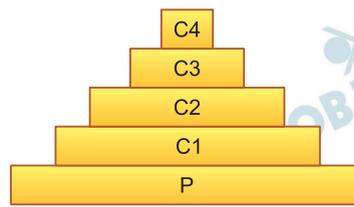
Resolução

- A jararaca pintada é um espécie que pode ocupar mais de um nível trófico. Assim, quando consumidora secundária ocupa o terceiro nível e quando é consumidora terciária ocupa o quarto nível de alimentação.

O lobo guará, também pode ocupar mais de um nível trófico. Sendo consumidor primário, secundário, terciário e quaternário, ocupa, respectivamente o segundo, terceiro, quarto e quinto níveis tróficos.

- A cadeia alimentar que possui cinco espécies é:
lobeira(arbusto)(P) \Rightarrow gafanhoto verde(C1) \Rightarrow
 \Rightarrow rã manteiga (C2) \Rightarrow jararaca pintada(C3) \Rightarrow
 \Rightarrow lobo guará (C4).

A pirâmide de energia é:



- c) Com relação à dinâmica da teia alimentar descrita, o efeito indireto esperado da extinção local do bem-te-vi, seria o aumento da população do lobo guará, como consequência da maior disponibilidade alimentar.

Caso o capim-cabelo-de-porco venha a sofrer uma queda em sua biomassa, a competição interespecífica entre os consumidores primários aumentaria.

B.03

O catabolismo de proteínas e ácidos nucleicos gera grupos aminos que, quando acumulados no organismo, são tóxicos e precisam ser excretados na forma de ácido úrico, amônia ou ureia.

- Ordene ácido úrico, amônia e ureia do mais para o menos tóxico, considerando os animais em geral.
- Dentre os três compostos, qual é o mais abundante na excreção de um peixe ósseo de água doce e qual é o mais abundante na urina do ser humano?
- Há uma relação entre a osmolaridade sanguínea (i), a secreção do hormônio antidiurético (ADH) (ii), o volume reabsorvido de água (iii) e o volume de urina (iv).

O que ocorre com os itens (i) a (iv) quando uma pessoa bebe água excessivamente? Responda diretamente na tabela da Folha de Respostas se cada item “aumenta”(↑), “diminui” (↓) ou “permanece inalterado” (=) .

Item	↓, ↑, =
(i) osmolaridade sanguínea	
(ii) secreção do hormônio antidiurético (ADH)	
(iii) volume reabsorvido de água	
(iv) volume de urina	

Resolução

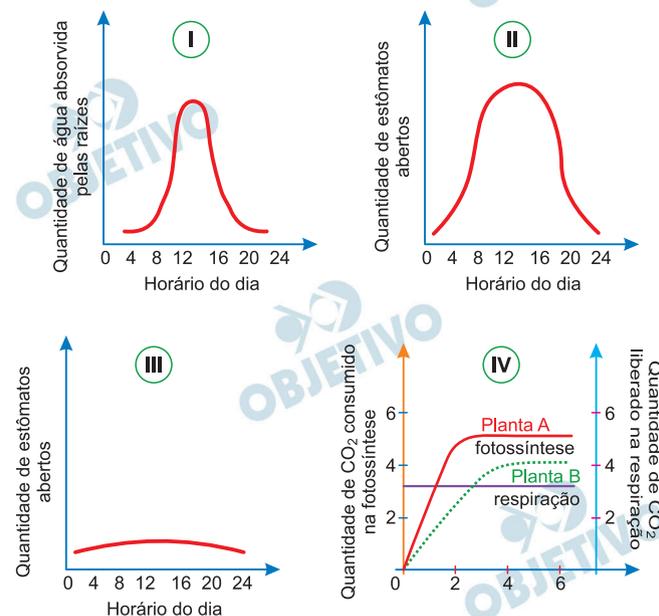
- Amônia (excreta mais tóxica), ureia (excreta de toxicidade intermediária) e ácido úrico (excreta menos tóxico). A maioria dos animais aquáticos excretam amônia. Mamíferos excretam ureia. Répteis, aves e insetos, excretam, principalmente, o ácido úrico.**
- Os peixes ósseos dulçaquícolas excretam, principalmente, a amônia. O homem excreta, principalmente, a ureia.**

c)

Item	↓, ↑, =
(i) osmolaridade sanguínea	↓
(ii) secreção do hormônio antidiurético (ADH)	↓
(iii) volume reabsorvido de água	↓
(iv) volume de urina	↑

B.04

Analise os gráficos relativos ao comportamento de plantas sujeitas a diferentes condições ambientais:



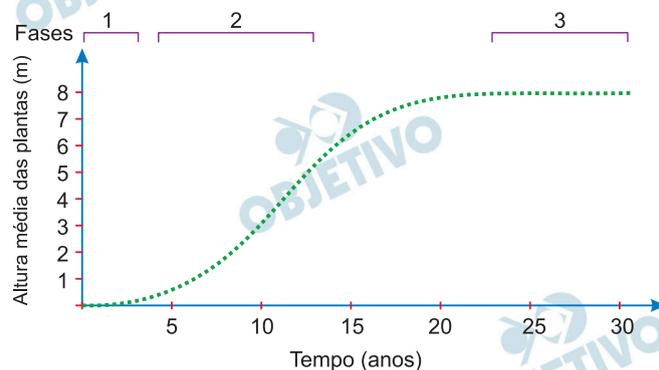
- Em relação ao gráfico I, em que horário aproximado do dia se espera maior quantidade de estômatos abertos?
- Considerando os gráficos II e III, como representativos de indivíduos da mesma espécie, indique aquele associado a plantas em estresse hídrico e aquele associado à maior taxa de fotossíntese no período de maior luminosidade.
- Pela análise do gráfico IV, qual planta cresce melhor na sombra? Qual é a intensidade mínima de luz, aproximadamente, para que a planta B consuma mais CO₂ do que produza?

Resolução

- Em torno de 14h tem-se a maior quantidade de estômatos abertos uma vez que a absorção de água pela raízes depende diretamente da perda de água por transpiração estomática.
- No estresse hídrico o número de estômatos abertos é reduzido – gráfico III. Maior taxa de fotossíntese ocorre com a maior difusão de CO₂ para o interior da folha, decorrente da maior abertura de estômatos – gráfico II.
- Planta de sombra é aquela que apresenta ponto de compensação luminoso baixo – planta A. A planta B consome mais CO₂ do que produz na intensidade luminosa acima do ponto de compensação fótico em torno de 3 horas.

B.05

A curva do gráfico mostra a variação da altura média de plantas durante a sucessão primária, em uma área na qual a vegetação nativa, de floresta tropical úmida, foi totalmente destruída pelo derrame de lava de um vulcão. No início da sucessão, o solo era composto por rocha nua (lava consolidada). Na parte superior do gráfico, estão representadas três fases da sucessão (1, 2 e 3).



- Cite um grupo de organismos pioneiros que possa ter predominado na fase 1 da sucessão.
- No gráfico de sua Folha de Respostas, desenhe uma curva que represente a tendência quanto à biomassa da comunidade vegetal em relação ao tempo decorrido durante essa sucessão, indicando sua fase climáxica.

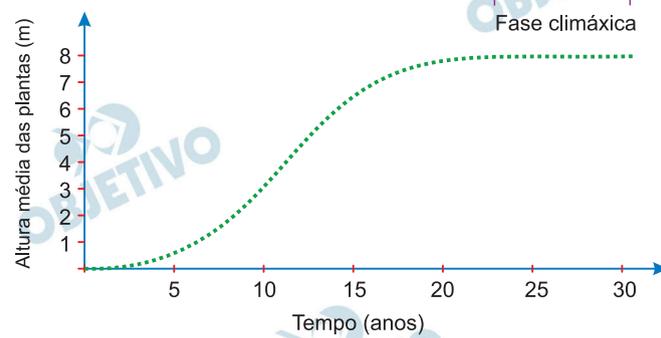


- A que se deve o aumento na altura média das plantas na fase 2 e sua estabilização na fase 3? Em qual(is) fase(s) da sucessão apresentada(s) no gráfico a quantidade de oxigênio liberado pelas plantas por meio da fotossíntese é semelhante à quantidade de oxigênio utilizado por elas na respiração?

Resolução

a) Líquens.

b)

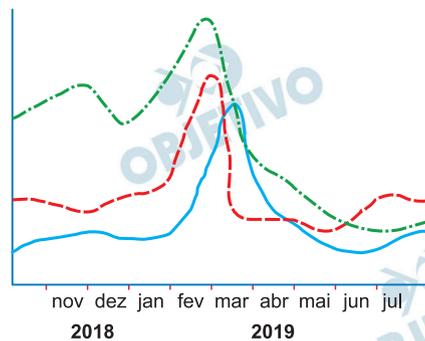


c) Durante a fase 2 a altura média das plantas aumenta porque neste período plantas de menor porte são substituídas progressivamente por plantas maiores.

Na fase climática, praticamente, há um equilíbrio entre a produção do O_2 pela fotossíntese e seu consumo na respiração celular.

B.06

Ao investigarem as razões para um evento de maré vermelha que ocorreu em uma região costeira do Brasil, os cientistas e técnicos encontraram uma relação entre a pluviosidade na área, o tratamento e destino de esgotos domésticos nos municípios vizinhos e a abundância de algumas espécies de microalgas com toxinas (nocivas à saúde humana) do grupo dos dinoflagelados, segundo o gráfico abaixo.



- Abundância de dinoflagelados (célula / litro de água do mar)
- Pluviosidade (mm de chuva)
- Contagem de coliformes fecais (CF / litro de água do mar)

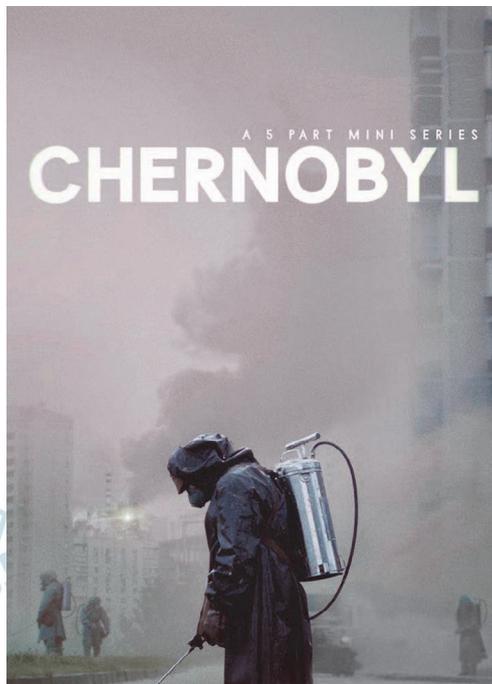
- a) Qual é o mês de ocorrência da maré vermelha?
- b) Como esse aumento da concentração de dinoflagelados chega na dieta de uma pessoa e como ela pode evitar uma intoxicação?
- c) Pelo demonstrado no gráfico, qual a razão para o rápido aumento na abundância de dinoflagelados no evento de maré vermelha? E para seu rápido declínio?

Resolução

- a) **O mês de ocorrência da maré vermelha é março.**
- b) **O aumento da concentração de dinoflagelados chega na dieta de uma pessoa, através da ingestão das toxinas desses organismos, ao longo da cadeia alimentar, ao passar pelos diferentes níveis tróficos.**
A intoxicação humana pode ser evitada com a redução do consumo de peixes e “frutos” marinhos.
- c) **O aumento da abundância de dinoflagelados é causado pela maior oferta de nutrientes minerais, em consequência da decomposição de matéria orgânica, do esgoto doméstico. O declínio, ocorre pela escassez de nutrientes e devido ao aumento da DBO (demanda bioquímica do O₂)**

G.01

A minissérie de TV com cartaz ao lado é uma ficção que remete à história de um dos piores desastres nucleares que ocorreram no século XX: a explosão na usina nuclear de Chernobyl, na Ucrânia sob domínio soviético, em 26 de abril de 1986. Em razão de problemas operacionais e de projeto, um dos reatores da usina lançou uma nuvem na atmosfera, atingindo outras partes da então União Soviética e regiões da Europa Ocidental.



Apesar de relevante, Chernobyl corria o risco de desaparecer na névoa do passado da Guerra Fria, ao mesmo tempo em que novas gerações cresciam com seus próprios traumas. Para os ucranianos, é conflito sempre presente com a Rússia.

Disponível em <https://exame.abril.com.br/mundo/>.

- Aponte a causa dos impactos na saúde humana sugerida no cartaz.
- Cite e explique um aspecto positivo do uso da energia nuclear.
- Qual a relação entre o desenvolvimento da tecnologia nuclear e o contexto da Guerra Fria?

Resolução

- Trata-se da radiação, emanada pela explosão da usina nuclear.**
- A utilização da energia nuclear apresenta diversas vantagens, como alta capacidade de produção energética com volume relativamente baixo de combustível e maior extensão de tempo na produção de energia antes do esgotamento dos componentes energéticos; versatilidade de instalação da usina, o que permite sua localização próxima aos centros consumidores, economizando no transporte da energia; trata-se de um sistema**

energético “fechado”, não produzindo emissões atmosféricas, assim evitando a poluição, bem como qualquer outro tipo de emissão de elementos radioativos, a não ser em caso de acidentes.

- c) O desenvolvimento da tecnologia para o aproveitamento da energia nuclear foi um dos elementos mais marcantes da Guerra Fria, já que seu uso inicial era para a confecção de ogivas nucleares, dentro do contexto que contrapôs os EUA e a antiga URSS. Esses países estabeleceram uma “corrida armamentista”, na qual cada um deles procurava desenvolver um número cada vez maior de bombas atômicas e seus meios de lançamento, aumentando perigosamente o risco de um conflito nuclear de proporções catastróficas. Por sorte e por bom senso dos oponentes, tal guerra nunca aconteceu, mas marcou profundamente a disputa estabelecida entre o capitalismo e socialismo, conhecida como Guerra Fria.

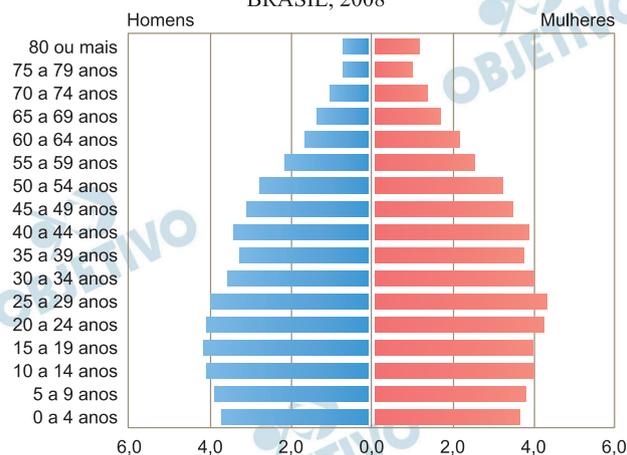
G.02

Introduzido nos anos 1990, o fator previdenciário vinculou o acesso à aposentadoria ao envelhecimento da população, visando à sustentabilidade financeira da previdência. Assim, cada aumento da expectativa de vida implica em aumento do tempo necessário de contribuição para manutenção do mesmo valor do benefício. (...) Ao desconsiderar as diferenças raciais em relação à expectativa de vida, o fator previdenciário é um fator de discriminação racial no Brasil. Tal evidência não pode ser ignorada pelas políticas públicas, sob o risco de ficar cada vez mais distante a meta de alcançar um país mais justo.

Disponível em:

<http://dssbr.org/site/2012/01/fator-previdenciario-fator-de-discriminacao-racial/>.

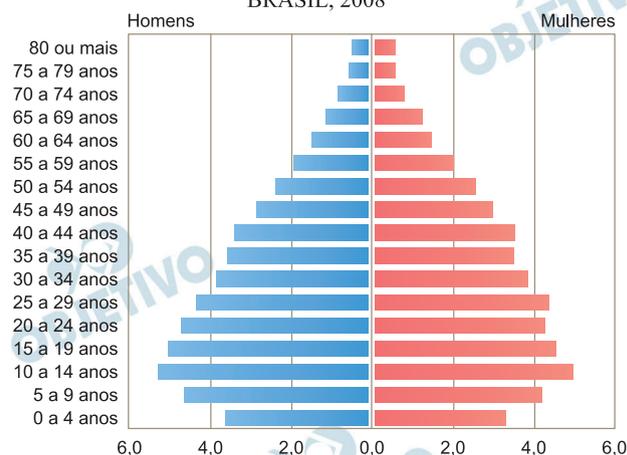
PIRÂMIDE ETÁRIA DA POPULAÇÃO RESIDENTE DE COR OU RAÇA BRANCA, SEGUNDO FAIXAS ETÁRIAS SELECIONADAS E SEXO, BRASIL, 2008



Fonte: IBGE, microdados PNAD

Tabulações LAESER: Fichário das Desigualdades Raciais

PIRÂMIDE ETÁRIA DA POPULAÇÃO RESIDENTE DE COR OU RAÇA PRETA E PARDA, SEGUNDO FAIXAS ETÁRIAS SELECIONADAS E SEXO, BRASIL, 2008



Fonte: IBGE, microdados PNAD

Tabulações LAESER: Fichário das Desigualdades Raciais

- Numa pirâmide etária, que aspecto visual (em relação à sua forma) permite estimar a proporção da população idosa em relação ao total da população?
- Cite e explique dois fatores de natureza socioeconômica que contribuem para a diferenciação entre as

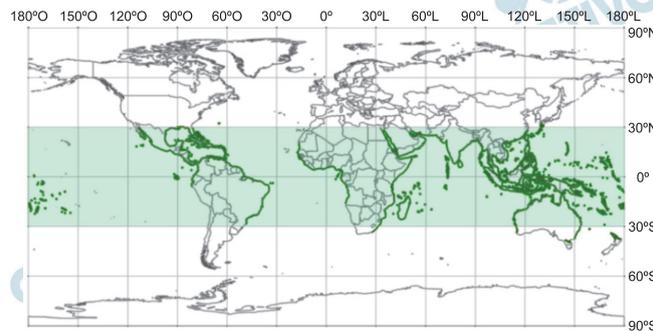
pirâmides etárias.

- c) Usando dados da comparação entre as pirâmides etárias, explique por que o texto afirma que “o fator previdenciário é um fator de discriminação racial no Brasil”.

Resolução

- a) Na análise de uma pirâmide etária, a população idosa – com 60 anos ou mais – corresponde a sua parte superior, portanto o estreitamento do topo de uma pirâmide etária evidencia um reduzido número de idosos, reflexo de uma baixa expectativa de vida, relativa à população preta e parda. Ao contrário, uma pirâmide etária que apresenta sua parte superior mais larga indica um maior número de idosos, o que permite concluir que é maior a expectativa de vida, reflexo de melhores condições socioeconômicas, observáveis na pirâmide etária relativa à população branca.
- b) Podem-se citar como fatores socioeconômicos:
- **Distribuição de renda:** a desigualdade existente entre brancos, com maior renda, e pretos e pardos, com menor renda, reflete-se nas condições de vida da população brasileira, bem como na mortalidade, que é maior na pirâmide etária de pretos e pardos.
 - **Saúde:** o acesso aos serviços públicos são limitados e as políticas ofertadas pelo Estado são precárias, porém a população preta e parda depende desses serviços e políticas públicas, conforme se observa na pirâmide desse setor social. Já a população branca tem maior acesso aos serviços privados e de melhor qualidade, resultando na maior longevidade, conforme se observa no topo de sua respectiva pirâmide.
 - **Educação:** historicamente, pretos e pardos têm menor escolaridade devido à dificuldade de acesso, precárias estruturas ofertadas pelo poder público e evasão decorrente da necessidade de complemento de renda familiar. A população branca, com maior escolaridade, tem maior acesso à informação e adota planejamento familiar espontâneo, reduzindo a base de sua pirâmide.
- c) As pirâmides etárias indicam que a população branca apresenta melhor padrão socioeconômico, portanto apresenta maior expectativa de vida. A menor longevidade da população parda e preta, decorrente de seu menor padrão socioeconômico, faz com que a reforma do sistema previdenciário pese mais sobre esses segmentos da população, os quais apresentarão menor percentual de indivíduos que conseguirão desfrutar da aposentadoria.

G.03



Disponível em <http://www.iucn.org/>. Adaptado.

Consiste em uma área úmida, definida como “ecossistema costeiro, de transição entre os ambientes terrestre e marinho, característico de regiões tropicais e subtropicais, sujeito ao regime das marés”.

(SCHAEFFER-NOVELLI, 1995).

- Qual é o ecossistema representado em destaque no mapa e descrito no excerto?
- Aponte as razões da ocorrência desse ecossistema na faixa destacada do mapa e explique uma de suas funções ambientais.
- Cite e explique dois fatores antrópicos que ameaçam esse ecossistema no Brasil.

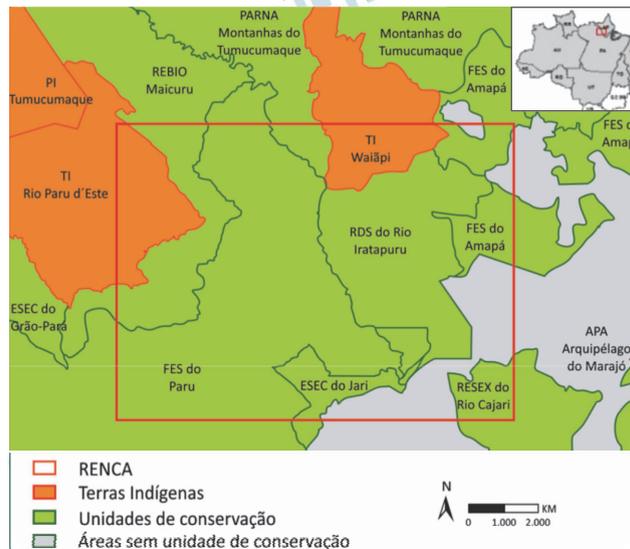
Resolução

- Manguezal ou mangue.**
- Trata-se de um ecossistema de uma faixa quente e úmida, e integrado ao fluxo das marés e à rede de drenagem, definido como um ambiente ecótono (área de transição ambiental).**
Entre suas principais funções, estão a preservação de espécies flúvio-marinhas, a prevenção ao assoreamento dos rios e o sequestro de dióxido de carbono da atmosfera.
- O mangue é considerado um dos ambientes mais ameaçados, no qual ocorre a exploração de recursos naturais, a ocupação desordenada, o turismo predatório e a poluição de suas águas (mais recentemente, derramamento de petróleo, principalmente no litoral do Nordeste).**

G.04

A RENCA (Reserva Nacional do Cobre e Associados) é uma área de 46.450 km² criada em 1984 que comporta diversos tipos de jazidas minerais, onde a CPRM (Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais) detém exclusividade na condução de trabalhos de pesquisa geológica, determinando a viabilidade quanto às atividades de extração. Há séculos, essa área é ocupada por povos originários que tiveram em suas terras a prospecção mineral. A demarcação das terras indígenas nessa área teve início somente a partir da década de 1990.

RESERVA NACIONAL DE COBRE E SEUS ASSOCIADOS (RENCA)



APA	- Área de Proteção Ambiental
ESEC	- Estação Ecológica
FES	- Floresta Estadual
PARNA	- Parque Nacional
PI	- Parque Indígena
RDS	- Reserva de Desenvolvimento Sustentável
REBIO	- Reserva Biológica
RESEX	- Reserva Extrativista
TI	- Terra Indígena

Disponível em <https://www.socioambiental.org/>. Adaptado.

- Cite uma aplicação econômica de um dos minérios que podem ser encontrados na região.
- Utilizando a legenda do mapa, destaque dois conflitos sociais passíveis de ocorrência na região.
- Cite e explique dois tipos de impactos ambientais decorrentes da exploração minerária.

Resolução

- O cobre, principal minério existente na região, é um dos principais recursos minerais utilizados na indústria eletroeletrônica, por ser dúctil, maleável e bom condutor de eletricidade, além de ser usado na fabricação de ligas metálicas, como o latão e o bronze.
- O mapa destaca duas áreas passíveis de conflitos sociais: as Terras Indígenas e as Unidades de

conservação. A revogação do decreto de criação, por parte do Governo Federal, colocaria estas áreas sob pressão da atividade mineradora que, se liberada, permitiria o avanço da ocupação sobre áreas naturais preservadas, comprometendo o uso sustentável dos recursos. Além disso, possibilitaria o aumento dos conflitos pela posse das terras, tendo em vista o conseqüente aumento da entrada de garimpeiros na área.

- c) São impactos ambientais decorrentes da mineração: o desmatamento, decorrente da remoção da cobertura vegetal para abertura de áreas de exploração, intensificando os processos erosivos; a contaminação do solo e dos recursos hídricos pelo uso de produtos químicos, bem como o assoreamento dos rios pelo acúmulo dos rejeitos produzidos pela atividade.

G.05

Analise os dados de precipitação média anual para as localidades.

Localidade e estado	Precipitação média anual (mm)	Coordenadas Geográficas
Rio de Janeiro, RJ	1.287,0	Latitude: 22° 54' Sul, Longitude: 43° 10' Oeste e altitude 08 m.
Cabo Frio, RJ	784,5	Latitude: 22° 52' Sul, Longitude: 42° 01' Oeste e altitude de 10 m.
Macaé, RJ	1.126,0	Latitude: 22° 22' Sul, Longitude: 41° 47' Oeste e altitude de 07 m.

Disponível em <https://pt.climate-data.org/>.

“A velha identificação desse setor costeiro de exceção – o ‘cabo frio’ – possibilitou interpretar a combinação de fatores que responde pela presença de aludido reduto de caatingas na referida região”.

(AB’SÁBER, 2003).

Com base na análise dos dados de precipitação média anual, na localização das estações meteorológicas e em seus conhecimentos sobre a dinâmica climática e oceanográfica da região, responda:

- Que fenômeno oceanográfico ocorre nas águas oceânicas da região de Cabo Frio-RJ?
- Qual é a atividade de extração mineral conhecida associada à região de Cabo Frio-RJ? Explique como um fenômeno natural que ocorre na região corrobora para a existência dessa atividade.
- Qual a explicação física para a redução das precipitações em Cabo Frio-RJ e qual sua manifestação na paisagem continental?

Resolução

- O fenômeno oceanográfico que ocorre nas águas de Cabo Frio-RJ é a ressurgência.
- A atividade corroborada pelas condições naturais é a extração de sal marinho. A ressurgência, fenômeno em que ocorre o movimento ascensional de águas mais profundas e frias em direção à superfície marinha, promove a diminuição da

precipitação pluviométrica, pois implica menor evaporação e precipitação, condição fundamental para a concentração do mineral nas salinas instaladas na região.

- c) A redução das precipitações em Cabo Frio-RJ é provocada pela menor temperatura das águas oceânicas, o que diminui a capacidade de evaporação e, assim, dificulta a formação de mecanismos de precipitação. Além disso, a maior atuação de ventos diminui a capacidade atmosférica de formação de núcleos higroscópicos. Entre as manifestações na paisagem continental, estão a menor densidade da cobertura vegetal, com características xerófitas, a formação de dunas e a formação de lagos e lagunas em razão do processo morfológico de deposição de sedimentos.

G.06

China contra-ataca tarifas americanas com uma das armas que mais irritam Trump

O Banco Central da China, no dia 5 de agosto de 2019, permitiu que o yuan, moeda oficial do país, ultrapassasse pela primeira vez uma barreira de onze anos na relação com o dólar americano. A cotação do yuan ficou acima de 7 para 1, num claro contra-ataque de Pequim às novas tarifas anunciadas pelo presidente Trump sobre US\$ 300 bilhões em produtos chineses.

O mercado teme que a medida provoque ainda mais a ira do presidente Trump, que acusa Pequim de desvalorizar artificialmente sua moeda para impulsionar as exportações.

“Devido ao unilateralismo, ao _____ (I) comercial e às tarifas impostas à China, o yuan se depreciou em relação ao dólar americano, quebrando a barreira dos 7 para 1”, diz nota do Banco Central chinês.

Disponível em <https://www.gazetadopovo.com.br/>

IMPORTAÇÃO E EXPORTAÇÃO DOS EUA NO COMÉRCIO COM A CHINA



Disponível em <https://www.bbc.com/portuguese/internacional/>.

Adaptado.

Considerando o excerto e o gráfico, responda:

- A palavra omitida no texto é um conceito que caracteriza a posição dos EUA ao tarifar os produtos chineses. Qual é esse conceito? Responda na folha de respostas.
- Utilizando elementos do gráfico, caracterize a relação comercial entre os EUA e a China.
- Explique como a desvalorização cambial do Yuan influencia a balança comercial entre esses países.

Resolução

- Trata-se do conceito de **protecionismo**.
- O gráfico apresenta a balança comercial entre as duas maiores potências econômicas mundiais atuais: Estados Unidos e China. Os EUA apresentam elevado déficit comercial nas trocas com a China desde 1985, evidenciando a entrada

significativa de produtos chineses no mercado estadunidense. Tal diferença comercial tornou-se mais acentuada a partir de 2001, quando a China entrou na Organização Mundial do Comércio e passou a ser considerada uma economia de mercado, o que ampliou suas relações comerciais exteriores, sobretudo com os Estados Unidos. Destaca-se também que a mão de obra de baixo custo, a redução de tarifas e a criação de Zonas Econômicas Especiais baratearam o produto chinês e aumentaram a sua preferência no mercado dos Estados Unidos.

- c) A desvalorização cambial do yuan, moeda oficial da China, traz como efeito inicial o barateamento dos produtos chineses no mercado internacional, o que permite o aumento das exportações desses produtos, inclusive para os Estados Unidos. Dessa forma, tal desvalorização cambial pode ampliar o déficit comercial dos EUA com a China, apresentado pelo gráfico, anulando a sobretaxa imposta pelo governo estadunidense. Além disso, a desvalorização do yuan beneficia a economia chinesa ao ampliar a lucratividade nas transações comerciais.

H.01

Os efeitos sociais do futebol enquanto elemento de uma dinâmica cultura popular impelira o estado colonial a intervir sobre este universo. Depois da abolição [...] do indigenato, o desporto servirá para alimentar a propaganda luso-tropicalista, nomeadamente depois das vitórias do Benfica de Coluna e Eusébio (este só na segunda) na Taça dos Campeões Europeus em 1961 e 1962, mais tarde, com a participação da seleção no Mundial de 1966.

Nuno Domingos, “Desporto moderno e situações coloniais: o caso do futebol em Lourenço Marques”. In: MELO, V. A. de e outros (orgs.) *Mais que um jogo: o esporte e o continente africano*. Rio de Janeiro: Apicuri, 2010.

- a) Explique a relação entre Moçambique e Portugal na década de 1960.
- b) Quais as relações da propaganda luso-tropicalista portuguesa com a imagem da democracia racial no Brasil?
- c) As conquistas do Benfica e o desempenho da seleção portuguesa no Mundial de 1966 fortaleceram a propaganda oficial do governo português? Justifique.

Resolução

- a) **Na década de 1960, malgrado os esforços da metrópole portuguesa para integrar os naturais da colônia no universo lusitano, teve início, em 1964, a luta pela independência de Moçambique, a qual se concluiria dez anos depois, no quadro da descolonização afro-asiática.**
- b) **É possível estabelecer um paralelismo entre os dois processos, ambos utilizados para promover o mito da integração dos africanos e afrodescendentes (respectivamente em Portugal e no Brasil) em sociedades predominantemente brancas. Essa pseudointegração ocorreu por meio do esporte, por se tratar de uma via popular, e portanto de mais fácil aceitação.**
- c) **As vitórias do Benfica – nas quais os africanos Eusébio e Coluna desempenharam papel decisivo – contribuíram para a propaganda oficial, pois os dois atletas passaram a ser considerados heróis portugueses. No entanto, esse enfoque não enfraqueceu os sentimentos nacionalistas das províncias ultramarinas (colônias portuguesas), o que provocou o início da Guerra de Independência, irrompida em 1964.**

H.02

O suplício tem então uma função jurídico-política. É um cerimonial para reconstituir a soberania lesada por um instante [...]. A execução pública, por rápida e cotidiana que seja, se insere em toda a série dos grandes rituais do poder eclipsado e restaurado (coroação, entrada do rei numa cidade conquistada, submissão dos súditos revoltados). [...]

O suplício não restabelecia a justiça; reativava o poder. No século XVII, e ainda no começo do XVIII, ele não era, com todo o seu teatro de terror, o resíduo ainda não extinto de uma outra época. Suas crueldades, sua ostentação, a violência corporal, o jogo desmesurado de forcas, o cerimonial cuidadoso, enfim, todo o seu aparato se engrenava no funcionamento político da penalidade. [...]

Mas nessa cena de terror o papel do povo é ambíguo. Ele é chamado como espectador: é convocado para assistir às exposições, às confissões públicas; os pelourinhos, as forcas e os cadafalsos são erguidos nas praças públicas ou à beira dos caminhos; os cadáveres dos supliciados muitas vezes são colocados bem em evidência perto do local de seus crimes. As pessoas não só têm que saber, mas também ver com seus próprios olhos. Porque é necessário que tenham medo; mas também porque devem ser testemunhas e garantias da punição, e porque até certo ponto devem tomar parte nela.

Michel Foucault, *Vigiar e Punir*. Petrópolis: Vozes, 1983.

- Identifique uma das práticas punitivas descritas no texto empregadas na sociedade colonial brasileira.
- Explique as relações entre a exibição do poder monárquico e as punições judiciais na sociedade do Antigo Regime europeu.
- A participação do povo nas execuções conferia a elas um caráter democrático? Justifique.

Resolução

- a) **Pelourinho: execução pública de castigos corporais aplicados a escravos que houvessem infringido determinadas condutas impostas pelo escravismo.**

Forca: execução capital em praça pública, aplicada aos inculpados de crimes especialmente graves, como o de lesa-majestade.

Cadafalso: estrado elevado utilizado para a execução pública de castigos físicos, capitais ou não.

- b) **As punições físicas impostas pelo Antigo Regime tinham caráter exemplar, alcançando simultaneamente três objetivos, todos relacionados com a demonstração do poder do Estado: função punitiva, afirmação do poder instituído e soberania do Estado no território sob sua jurisdição.**

- c) Não, pois a presença de uma assistência de populares tinha apenas as funções de intimidar os súditos do Estado e afirmar o poder das autoridades. Outrossim, pode-se considerar que a cerimônia punitiva não tinha caráter democrático, pois reduzia o povo à mera condição de espectador.

H.03

Leia o poema e responda ao que se pede.

Mas a taba cresceu... Tigueras agressivas,
Para trás! Agora o asfalto anda em Tabatinguera.
Mal se esgueira um pajé entre locomotivas
E o forde assusta os manes** lentos do Anhanguera.
[...]
Segue pra forca da Tabatinguera. Lento
O cortejo acompanha a rubra cadeirinha
Pro Ipiranga. Será que em tão pequeno assento
A marquesa botou sua imperial bundinha!...*

Mário de Andrade, "Tabatinguera", Losango Cáqui (1924). In:
Poesias completas v.1. São Paulo: Martins Fontes, 1979.

* área plantada onde já se fez a colheita.

** alma dos mortos, restos mortais.

- Identifique um aspecto mencionado no poema que justifique a expressão "a taba cresceu".
- Destaque um argumento histórico e outro de caráter estético para o emprego de expressões indígenas no poema.
- Explique as condições históricas que favoreceram a citação do "asfalto", das "locomotivas" e do "forde".

Resolução

- "As tigueras agressivas, para trás"**: referência ao abandono de áreas até então ocupadas pela agricultura de subsistência, diante do avanço resultante da expansão urbana.
"Lento, o cortejo acompanha a rubra cadeirinha pro Ipiranga": incorporação do Ipiranga (um bairro até então distante) ao conjunto urbano de São Paulo.
- Argumento histórico: influência da toponímia indígena na formação cultural brasileira desde o período colonial.**
Argumento de caráter estético: influência do modernismo, que valorizava a utilização de elementos nacionais nas composições artísticas.
- As referências citadas relacionam-se com a crescente prosperidade de São Paulo, decorrente da expansão cafeeira e do processo de industrialização, tendo como característica complementar o acelerado crescimento demográfico da cidade.

H.04

A semente da integração nacional seria, pois, lançada pela nova Corte como um prolongamento da administração e da estrutura colonial, um ato de vontade de portugueses adventícios, cimentada pela dependência e colaboração dos nativos e forjada pela pressão dos ingleses que queriam desfrutar do comércio sem ter de administrar. A insegurança social cimentaria a união das classes dominantes nativas com a “vontade de ser brasileiros” dos portugueses imigrados que vieram fundar um novo Império nos trópicos. A luta entre as facções locais levaria fatalmente à procura de um apoio mais sólido no poder central. Os conflitos inerentes à sociedade não se identificam com a ruptura política com a Mãe Pátria, e continuam como antes, relegados para a posteridade.

Maria Odila Leite da Silva Dias, *A interiorização da metrópole e outros estudos*. São Paulo: Alameda, 2005.

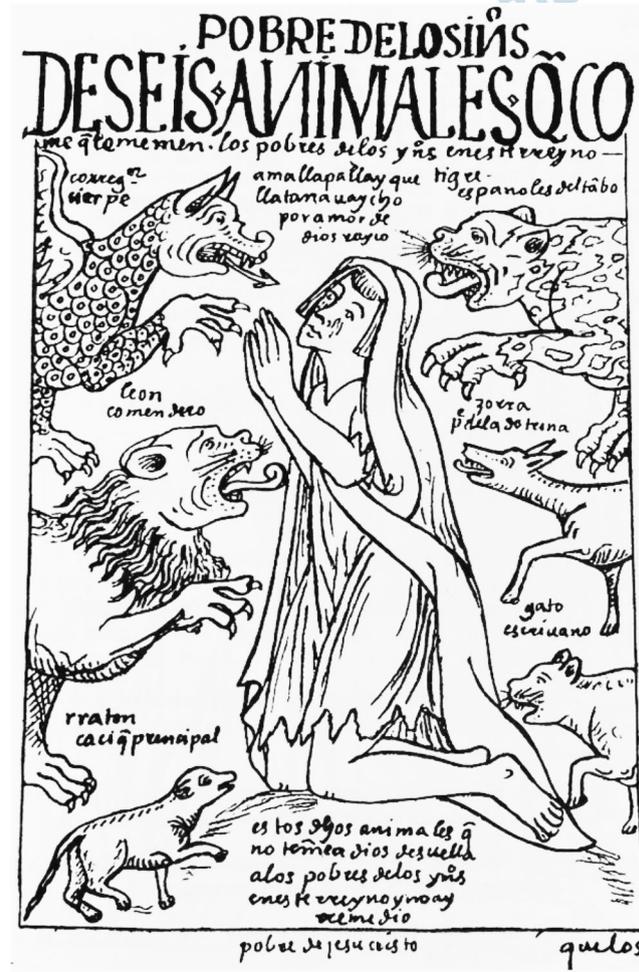
- a) Caracterize o período histórico de que trata o texto.
- b) Descreva os projetos dos principais grupos políticos do período.
- c) Explique a frase: “Os conflitos inerentes à sociedade não se identificam com a ruptura política com a Mãe Pátria, e continuam como antes, relegados para a posteridade”.

Resolução

- a) **Período correspondente ao processo da Independência do Brasil (1821-22), tendo como antecedente o Período Joanino (1808-21) e incluindo a formação do Estado Nacional Brasileiro, depois de 1822.**
- b) **Defensores da manutenção do Reino Unido e partidários da Independência do Brasil, sob a forma de Monarquia constitucional unitária ou federativa (em ambos os casos, dentro de um projeto continuísta da Dinastia de Bragança).**
- c) **Os debates sobre eventuais alterações na estrutura socioeconômica do País não chegaram a conflitar com a futura organização do Estado Brasileiro, pois somente ganharam protagonismo em momentos posteriores à Independência, quando esta foi implementada, pois prevaleceu a proposta de manutenção da ordem monárquico-aristocrático-latifundiário-escravista.**

H.05

Observe a imagem e leia o texto.



Felipe Guamán Poma de Ayala, o autor da imagem, foi um cronista ameríndio de ascendência incaica que viveu no Peru entre 1534 e 1615. A imagem faz parte de sua *Nueva Corónica y Buen Gobierno*, finalizada no começo do século XVII e endereçada ao rei Felipe III, sendo acompanhada da seguinte legenda, traduzida do espanhol:

“Pobre dos índios, de seis animais que comem e a que temem os pobres dos índios deste reino: serpente, corregedor; tigre, espanhóis das cidades; leão, *encomendero*; cadela, padre da doutrina; gato, escrivão; rato, cacique principal. Estes ditos animais que não temem a Deus esfolam aos pobres índios deste reino, e não há remédio, pobre Jesus Cristo”.

- Identifique a situação do Peru quando da elaboração da obra.
- Descreva as estruturas de poder político e econômico que são comentadas na imagem e no texto que a acompanha.
- Análise as tensões no mundo indígena sugeridas por texto e imagem.

Resolução

- Colônia espanhola de exploração, submetida à espoliação mercantilista prevista pelas regras do Pacto Colonial.

- b) As estruturas solicitadas estão compreendidas nas seguintes denominações: corregedor (encarregado da aplicação das normas judiciárias), comerciantes (controladores das atividades econômicas coloniais), *encomenderos* (proprietários rurais de origem espanhola), padres (responsáveis pela conversão e aculturação da população indígena), escrivães (burocratas coloniais) e caciques (líderes de comunidades nativas cooptados pelos espanhóis).
- c) O texto e a imagem sugerem que os ameríndios estavam sujeitos à opressão, aculturação e exploração praticadas pelos colonizadores espanhóis e seus cooptados, por meio de mecanismos administrativos, econômicos e culturais.

H.06

Em 29 de outubro de 1956, uma grave crise política descambou em uma intervenção militar na região do Canal de Suez e da Península do Sinai (Egito).

- a) Indique a importância dessa região nos quadros da política internacional do período.
- b) Mencione as potências envolvidas diretamente nesse conflito e os seus respectivos interesses.
- c) Explique as tensões associadas à articulação política entre os diversos Estados árabes nesse período.

Resolução

- a) O Canal de Suez, localizado no Oriente Médio (ou Oriente Próximo), constituía um importantíssimo ponto de passagem para o petróleo extraído na região, direcionando-o para os países consumidores.
- b) Reino Unido e França, interessados em manter sua influência sobre o Canal de Suez, que fora recém-nacionalizado pelo ditador egípcio Gamal Nasser. E União Soviética, interessada em eliminar os resquícios do neocolonialismo na região, substituindo-os pela influência da potência socialista.
- c) No contexto da Guerra Fria, a União Soviética posicionou-se contra a intervenção da França e da Grã-Bretanha (aliadas dos Estados Unidos) no Egito. Paralelamente, o mundo árabe apresentava dissensões entre os Estados republicanos considerados "progressistas" (Egito e Síria, mobilizados em torno do Pan-arabismo) e as monarquias tradicionalistas do Golfo Pérsico.