LÓGICA

1. PROPOSIÇÃO

▸ **Proposição ou Sentença** é toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou falsa. Toda proposição apresenta um, e somente um, dos valores lógicos: verdadeira (V) ou falsa (F).

Exemplo: São proposições verdadeiras: $9 \neq 5$ e $2 \in \mathbb{Z}$. São proposições falsas: $-1 \in \mathbb{N}$ e $2 > 5$.

▸ **Tautologia (proposição logicamente verdadeira)** é a proposição que possui valor V (verdadeira) independente dos valores lógicos das proposições das quais depende.

Exemplo: A frase "O recém-nascido é menino ou menina" é sempre verdadeira, pois sendo menino teremos "V ou F", sendo menina teremos "F ou V" e em ambos os casos o resultado é verdadeiro.

▸ **Contradição (proposição logicamente falsa)** é a proposição que possui valor F (falsa) independente dos valores lógicos das proposições das quais depende.

Exemplo: A frase "O recém-nascido é menino e menina" é sempre falsa, pois sendo menino teremos "V e F", sendo menina teremos "F e V" e em ambos os casos o resultado é falso.

▸ **Sentenças abertas** são proposições cujo valor lógico depende do valor de uma ou mais variáveis.

O conjunto de todos os valores que as variáveis podem assumir denomina-se **Universo**.

O subconjunto do universo para o qual a sentença aberta é verdadeira denomina-se **Conjunto –Verdade** ou **Conjunto–Solução**.

Exemplo: No universo $U = \mathbb{N}$, o conjunto verdade da sentença $x^2 < 5$ é $V = \{0, 1, 2\}$.

2. NEGAÇÃO

A negação de uma proposição p é indicada por $\overline{p}$ (ou $\sim p$) e tem sempre valor oposto ao de p.

Tabela–verdade	
p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Exemplo: A negação de $p: 9 = 5 \ (F)$ é $\overline{p}: 9 \neq 5 \ (V)$.

3. CONECTIVOS

A **conjunção** (e), denotada por $p \wedge q$ ou $p \cdot q$, é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

A **disjunção** (ou), denotada por $p \vee q$ ou $p + q$, é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira; se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Tabela–verdade			
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exemplos:

$(9 > 5) \wedge (0 \geq 1)$ é falsa, pois $V \wedge F$ é falsa.

$(9 > 5) \vee (0 \geq 1)$ é verdadeira, pois $V \vee F$ é verdadeira.

4. CONDICIONAIS

O **condicional**, denotado por $p \to q$ é falso somente quando p é verdadeira e q é falsa; caso contrário, $p \to q$ é verdadeiro.

O **bicondicional**, denotado por $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer $p \leftrightarrow q$ é falso.

Tabela–verdade			
p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

A **recíproca** de $p \to q$ é a proposição $q \to p$.

A **contrária** de $p \to q$ é a proposição $\overline{p} \to \overline{q}$.

A **contrapositiva** de $p \to q$ é a proposição $\overline{q} \to \overline{p}$.

PROBIZU

Uma proposição e sua contrapositiva são equivalentes: $p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$.

A recíproca e a contrária de uma proposição são equivalentes: $q \to p \equiv \overline{p} \to \overline{q}$.

4.1. RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO

Diz-se que p implica q $(p \Rightarrow q)$ quando na tabela de p e q não ocorre VF em nenhuma linha, ou seja, quando o condicional $p \to q$ é verdadeiro.

Nesse caso pode-se dizer que "**p é condição suficiente para q**" ou que "**q é condição necessária para p**".

PROBIZU

$$p \Rightarrow q$$

$$\equiv$$

"p é condição suficiente para q"

$$\equiv$$

"q é condição necessária para p"

Uma condição é dita **necessária** quando ela precisa acontecer para o resultado ser verdadeiro, mas não garante que ele seja verdadeiro.

Exemplo: $x \geq 0$ é uma condição necessária de $\sqrt{x} > 1$.

Um **teorema** é uma implicação da forma $(\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese})$. Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que, sempre que a hipótese for verdadeira, a tese também será verdadeira.

Exemplo: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ (note que a volta não é necessariamente verdadeira)

A proposição $(p \Rightarrow q)$ será falsa se existir um objeto matemático que satisfaça a hipótese p e não satisfaça a conclusão q (VF). Esse objeto é chamado **contra exemplo** para a proposição $(p \Rightarrow q)$.

Por outro lado, um objeto matemático que satisfaça a hipótese p e a tese q se diz um **exemplo** para a proposição $(p \Rightarrow q)$.

PROBIZU

Um único contra exemplo é suficiente para provar que uma proposição é falsa, entretanto enumerar exemplos não garante que a proposição seja verdadeira.

4.2. RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Diz-se que **p é equivalente a q** ($p \Leftrightarrow q$ ou $p \equiv q$) quando p e q têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando p e q têm sempre o mesmo valor lógico, ou seja, $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

Nesse caso diz-se que "p é condição necessária e suficiente para q" ou que "p se, e somente se, q".

PROBIZU

$$p \Leftrightarrow q$$

$$\equiv$$

"p é condição necessária e suficiente para q"

$$\equiv$$

"p se, e somente se, q"

Uma proposição do tipo "p se, e somente se, q" é verdadeira quando $p \Rightarrow q$ (p é condição necessária para q) e $q \Rightarrow p$ (p é condição suficiente para q) são ambas verdadeiras.

Exemplo: $3x + 1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 4 - 1$

Na resolução de equações e inequações deve-se atentar para o significado das relações de implicação e equivalência. Passagens relacionadas por equivalência mantêm exatamente o mesmo conjunto verdade, pois ambas são verdadeiras ou falsas simultaneamente. Já passagens relacionadas por implicação não garantem o mesmo conjunto verdade. Nesse caso, o novo conjunto verdade contém o anterior, devendo-se ter cuidado com a introdução de raízes que não são válidas. Isso ocorre com frequência na resolução de equações irracionais.

Exemplo: Resolver a equação $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$

$\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = 0 \lor x = 3)$

Testando as raízes obtidas verifica-se que $x=0$ não é uma raiz válida. Essa raiz apareceu exatamente quando se elevou ao quadrado ambos os membros da equação, pois, nesse caso, não valia a relação de equivalência, mas somente a implicação. Como se pode notar, o novo conjunto solução $S=\{0,3\}$ continha o conjunto solução da equação inicial $S=\{3\}$.

Outra maneira de resolver a equação utilizando somente equivalências seria:

$$\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+1}=2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+5x+1=(2x-1)^2 \quad \wedge \quad (2x-1\geq 0)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-9x=0 \quad \wedge \quad x\geq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x=0 \vee x=3) \wedge \left(x\geq \frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow x=3$$

5. ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

Propriedade Idempotente:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Propriedade Comutativa:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Propriedade Associativa

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

Distributividade:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Absorção:

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Dupla negação:

$\sim(\sim p) \equiv p$

Contrapositiva:

$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Transformação de implicação em disjunção:

$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

6. QUANTIFICADORES

O **quantificador universal** ($\forall$) indica “qualquer que seja”, “para todo”.

Exemplo: $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$

O **quantificador existencial** ($\exists$) indica “existe”, “existe pelo menos um”, “existe um”. $\exists|$ indica “existe um único”, “existe um e um só”.

Exemplos: $(\exists x \in \mathbb{N})(x+1>2)$ e $(\exists| x \in \mathbb{N})(x+1<2)$.

7. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES (LEIS DE DE MORGAN)

A negação de proposições com conectivos ou condicionais é feita com base nas relações seguintes:

Leis de De Morgan

$$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

$$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

$$\overline{(p \rightarrow q)} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$$

A Leis de De Morgan mostram que:

i) Negar que duas proposições são verdadeiras ao mesmo tempo equivale a afirmar que pelo menos uma delas é falsa.

ii) Negar que pelo menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Exemplos:

1) A negação de “Juca é bom e honesto” é “Juca não é bom ou não é honesto”.

2) A negação de “Juca é bom ou honesto” é “Juca não é bom e não é honesto”.

3) A negação de “Se Juca é bom, então é honesto” é “Juca é bom e não é honesto”.

A negação de uma proposição do tipo: “Para todo objeto, com uma certa propriedade, algo acontece” é: “Existe um objeto com a certa propriedade, tal que aquele algo não acontece.”

A negação de uma proposição do tipo: “Existe um objeto, com uma certa propriedade, para o qual algo acontece” é: “Para todo objeto com a certa propriedade, aquele algo não acontece.”

PROBIZU

Em geral, usa-se o quantificador existencial para negar proposições com quantificador universal, e o quantificador universal para negar proposições com quantificador existencial.

Atente para os casos a seguir:

PROPOSIÇÃO	NEGAÇÃO
Todos os alunos usam óculos.	**Existe pelo menos um aluno que não usa óculos.**
Algum aluno usa óculos.	**Nenhum aluno usa óculos.**
Todo homem é honesto.	**Algum homem não é honesto.**
Algum homem é honesto.	**Todo homem não é honesto.**
$9 > 5$	$9 \leq 5$

8. TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

8.1. DEMONSTRAÇÃO INDIRETA OU REDUÇÃO AO ABSURDO

Consiste em admitir a negação da conclusão q e daí deduzir logicamente uma contradição qualquer c (uma proposição logicamente falsa como p. ex. $p \wedge \bar{p}$).

Isso pode ser verificado observando que $(\sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (\sim\sim q \vee c) \Leftrightarrow (q \vee c) \Leftrightarrow q$.

Exemplo: Sendo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, prove que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Supondo por absurdo a negação da proposição inicial $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 2$, teremos:

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}<2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}<2 \Leftrightarrow x^2+y^2<2xy \Leftrightarrow (x-y)^2<0 \Leftrightarrow$ CONTRADIÇÃO.

Logo, a proposição inicial é válida.

8.2. CONTRA EXEMPLO

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)(p(x))$ é falsa (F), basta mostrar que a sua negação $(\exists x \in A)(\sim p(x))$ é verdadeira (V), isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa (F). O elemento x_0 diz-se um contra exemplo para a proposição $(\forall x \in A)(p(x))$.

Exemplo: Prove que a proposição $(\forall x \in \mathbb{N})(2^n > n^2)$ é falsa.

Basta verificar que para $n=2$ tem-se $(2^2 > 2^2)$ é falsa. Logo 2 é um contraexemplo para a proposição apresentada que, em consequência, é falsa.

8.3. PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA (P.I.F.)

AXIOMAS DE PEANO

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelas seguintes propriedades:

(1) Existe uma função injetiva $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n\in\mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n.

Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.

(2) Existe um único número natural $1\in\mathbb{N}$ tal que $1\neq s(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.

(3) Se um conjunto $X\subset\mathbb{N}$ é tal que $1\in X$ e $s(X)\subset X$ (isto é, $n\in X \Rightarrow s(n)\in X$) então $X=\mathbb{N}$.

Se um conjunto de número naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais. (Princípio da Indução)

Método da Indução Finita (recorrência)

“Se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n daí resultar que P é válida também para seu sucessor s(n), então P é válida para todos os números naturais.”

APLICAÇÃO DO PIF

Passo1: demonstrar que a afirmação é verdadeira para um caso particular, por exemplo, $n=1$ (ou o menor elemento do conjunto);

Passo2: supor que a afirmação é válida para $n=k$ (hipótese de indução);

Passo3: demonstrar, a partir disto, que a afirmação é válida para $n=k+1$.

Exemplo: Demonstrar que $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Vamos aplicar o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA (PIF)**:

Passo1:

$$n=1:\ 1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}\ (V)$$

Passo 2:

Supondo que a propriedade é válida para $n=k$, então $1+2+3+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$.

Passo 3:

Para $n=k+1$, temos:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Como a propriedade é válida também para $n=k+1$, ela é válida para todo natural. C.Q.D.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EPCAR 2012) Uma pessoa foi realizar um curso de aperfeiçoamento. O curso foi ministrado em x dias nos períodos da manhã e da tarde desses dias. Durante o curso foram aplicadas 9 avaliações que ocorreram em dias distintos, cada uma no período da tarde ou no período da manhã, nunca havendo mais de uma avaliação no mesmo dia. Houve 7 manhãs e 4 tardes sem avaliação. O número x é divisor natural de

a) 45

b) 36

c) 20

d) 18

2. (CN 2002) Um torneio de judô é disputado por 10 atletas e deve ter apenas um campeão. Em cada luta não pode haver empate e aquele que perder três vezes deve ser eliminado da competição. Qual o número máximo de lutas necessário para se conhecer o campeão?

a) 27

b) 28

c) 29

d) 30

e) 31

3. (CN 2001) Numa prova de vinte questões, valendo meio ponto cada uma, três questões erradas anulam uma certa. Qual é a nota de um aluno que errou nove questões em toda essa prova?

a) Quatro

b) Cinco

c) Quatro e meio

d) Cindo e meio

e) Seis e meio

4. (CN 2001) Um bebedouro que usa garrafão de água tem $2{,}5$ metros de serpentina por onde a água passa para gelar. Sabe-se que tal serpentina gasta 12 segundos para ficar totalmente gelada. Colocando-se um garrafão de 10 litros e ligando-se o bebedouro, leva-se 5 minutos para que toda a água saia gelada. Se nas mesmas condições fosse colocado um garrafão de 20 litros no lugar do de 10 litros, o tempo gasto para que toda a água saísse gelada seria de:

a) $9 \text{ min } 36 \text{ seg}$

b) 9 min 48 seg

c) 10 min

d) 10 min 12 seg

e) 11 min

5. (CN 1994) Em um navio existem 6 barcos e 15 guarnições. Cada barco tem uma guarnição de serviço por dia. Quantos dias, no mínimo, serão necessários para que todas as guarnições tenham ficado de serviço o mesmo número de vezes?

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 15

6. (CN 1991) Uma fábrica de fósforo usa as seguintes definições:

Caixa: conjunto de 45 fósforos

Maço: conjunto com 10 caixas

Pacote: conjunto com 12 maços

Dividindo-se 13 pacotes, 5 maços, 8 caixas e 22 fósforos por 8, obtém-se um número $\underline{p}$ de pacotes, $\underline{m}$ de maços, $\underline{c}$ de caixas e $\underline{f}$ de fósforos, tais que $p+m+c+f$ é igual a:

a) 25

b) 26

c) 27

d) 28

e) 29

7. (UFF 2002) As três filhas de Seu Anselmo – Ana, Regina e Helô – vão para o colégio usando, cada uma, seu meio de transporte preferido: bicicleta, ônibus ou moto. Uma delas estuda no Colégio Santo Antônio, outra no São João e outra no São Pedro. Seu Anselmo está confuso em relação ao meio de transporte usado e ao colégio em que cada filha estuda. Lembra-se, entretanto, de alguns detalhes:

- Helô é a filha que anda de bicicleta;

- a filha que anda de ônibus não estuda no Colégio Santo Antônio;

- Ana não estuda no Colégio São João e Regina estuda no Colégio São Pedro.

Pretendendo ajudar Seu Anselmo, sua mulher junta essas informações e afirma:

I. Regina vai de ônibus para o Colégio São Pedro.

II. Ana vai de moto.

III. Helô estuda no Colégio Santo Antônio.

Com relação a estas afirmativas, conclui-se:

a) Apenas a I é verdadeira.

b) Apenas a I e a II são verdadeiras.

c) Apenas a II é verdadeira.

d) Apenas a III é verdadeira.

e) Todas são verdadeiras.

8. Quatro suspeitos de praticar um crime fazem as seguintes declarações:

André: Carlos é o criminoso,

Bernardo: Eu não sou o criminoso,

Carlos: Danilo é o criminoso,

Danilo: Carlos está mentindo.

Sabendo que apenas um dos suspeitos disse a verdade, o criminoso é:

a) André

b) Bernardo

c) Carlos

d) Danilo

e) impossível determinar

9. Eduardo mente nas quartas, quintas e sextas e diz a verdade no resto da semana. André mente aos domingos, segundas e terças e diz a verdade no resto dos dias. Se ambos dizem: “amanhã é um dia no qual eu minto”. Que dia da semana será amanhã?

a) Sábado

b) Terça-feira

c) Quarta-feira

d) Sexta-feira

10. (UFF 1998) Na cidade litorânea de Ioretin é rigorosamente obedecida a seguinte ordem do prefeito: “Se não chover, então todos os bares à beira-mar deverão ser abertos.” Pode-se afirmar que:

a) Se todos os bares à beira-mar estão abertos, então choveu.

b) Se todos os bares à beira-mar estão abertos, então não choveu.

c) Se choveu, então todos os bares à beira-mar não estão abertos.

d) Se choveu, então todos os bares à beira-mar estão abertos.

e) Se um bar à beira-mar não está aberto, então choveu.

11. (CEFET 2001) Qual o número mínimo de vezes que uma pessoa deverá lançar um dado (não viciado) para, com certeza, obter pelo menos três resultados repetidos?

a) 6

b) 12

c) 13

d) 18

e) 20

12. (CEFET 2007) Considere as seguintes afirmativas:

- Todos os matemáticos são cientistas.
- Alguns cientistas são filósofos.
- Todos os filósofos são cientistas ou professores.
- Nem todo professor é cientista.

Agora, considere as seguintes afirmativas:

- Alguns matemáticos são filósofos.
- Nem todo filósofo é cientista.
- Alguns filósofos são professores.
- Se um filósofo não é matemático, ele é professor.
- Alguns filósofos são matemáticos.

Partindo do princípio de que as 4 (quatro) primeiras afirmativas são verdadeiras, quantas afirmativas do 2º grupo são NECESSARIAMENTE verdadeiras:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

13. (UFRJ 1999) Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais fabricadas pela Nascebem S.A. foi enviada para a fiscalização sanitária.

No teste de qualidade, 60 foram aprovadas e 40 reprovadas, por conterem pílulas de farinha. No teste de quantidade 74 foram aprovadas e 26 reprovadas, por conterem um número de pílulas menor do que o especificado.

O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas foram reprovadas em ambos os testes.

Quantas caixas foram aprovadas em ambos os testes?

a) 24

b) 30

c) 36

d) 48

e) 50

14. (PUCRJ 1993) Três caixas etiquetadas estão sobre uma mesa. Uma delas contém apenas canetas; outra, apenas lápis; e há uma que contém lápis e canetas. As etiquetas são “lápis”, “canetas” e “lápis e canetas”, porém nenhuma caixa está com a etiqueta correta. É permitida a operação escolher uma caixa e dela retirar um único objeto. O número mínimo de operações necessárias para identificar corretamente as etiquetas é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

15. (FGV 81) Simplificando a expressão $\overline{\overline{(X \cap Y)} \cup (\overline{X} \cap Y)}$, teremos:

a) universo

b) vazio

c) $X \cap Y$

d) $\overline{X} \cap Y$

e) $X \cap \overline{Y}$

16. Sendo p e q proposições lógicas, pode-se afirmar que a proposição composta $\left((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge \left(\overline{\overline{p} \wedge q}\right)\right)$ é equivalente a:

a) p

b) q

c) $p \vee q$

d) $p \wedge q$

e) $p \Rightarrow q$

17. (EN 1989) Dada a proposição $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ podemos afirmar que é:

a) logicamente falsa

b) uma tautologia

c) equivalente a $(p \vee q) \Leftrightarrow r$

d) equivalente a $(p \Leftrightarrow q) \vee r$

e) equivalente a $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow r$

18. (CPII 2013) A sentença logicamente equivalente a "Se a matemática não é divertida, então eu sou triste" é:

a) "Se eu não sou triste, então a matemática é divertida."

b) "Se eu não sou triste, então a matemática não é divertida."

c) "Se eu sou triste, então a matemática é divertida."

d) "Se eu sou triste, então a matemática não é divertida."

19. (CPII 2007) Dada a proposição: "Se um quadrilátero é um retângulo então suas diagonais cortam-se ao meio", podemos afirmar que:

a) Se um quadrilátero tem as diagonais cortando-se ao meio então ele é retângulo.

b) Se um quadrilátero não tem as diagonais cortando-se ao meio então ele não é um retângulo.

c) Se um quadrilátero não é um retângulo então suas diagonais não se cortam ao meio.

d) Se em um quadrilátero as diagonais se cortam ao meio então ele não é um retângulo.

20. Sejam x, y e z números reais distintos, prove que $\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0$.

21. Demonstrar que, para $n > 1$, é válida a desigualdade $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, onde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

22. Demonstrar a seguinte fórmula, $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

23. (OEMRJ 1990) Demonstre que, num triângulo retângulo de hipotenusa a, catetos b e c e altura relativa à hipotenusa h, tem-se $a + h > b + c$.

24. (IME 2002)

a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$. Em que condições se verifica a igualdade?

b) Considere um paralelepípedo de lados a, b e c, e área total S_0. Determine o volume máximo desse paralelepípedo em função de S_0. Qual a relação entre a, b e c para que o volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

GABARITO

1. Observe que o número de manhãs e o número de tardes é o igual ao número x de dias.

Se houve 7 manhãs sem avaliação, então houve $(x-7)$ manhãs com avaliação.

Se houve 4 tardes sem avaliação, então houve $(x-4)$ tardes com avaliação.

Como foram aplicadas 9 avaliações, então $(x-7)+(x-4)=9 \Leftrightarrow 2x=20 \Leftrightarrow x=10$.

Logo, o número $x=10$ é um divisor natural de 20.

RESPOSTA: C

2. Em cada luta é computada uma vitória e uma derrota. O número máximo de lutas necessário para se conhecer o campeão ocorre quando 9 atletas tiverem perdido três vezes e o atleta campeão tiver perdido duas vezes. Isso resulta em um total de $9 \cdot 3+2=29$ derrotas, ou seja, 29 lutas.

Vamos mostrar um caso em que essa quantidade de lutas ocorre: 8 dos 10 atletas lutam três vezes contra um dos outros dois atletas, perdem as três lutas e são eliminados, totalizando 24 lutas; os 2 atletas restantes disputam 5 lutas entre si, um deles vence as duas primeiras, outro as duas seguintes e o vencedor da quinta luta é o campeão, perfazendo um total de $24+5=29$ lutas.

RESPOSTA: C

3. Se o aluno errou 9 questões, então acertou $20-9=11$.

As 9 questões erradas anulam $\frac{9}{3}=3$ certas, então a nota do aluno corresponde a $11-3=8$ acertos.

Portanto, a sua nota é $8 \cdot 0,5=4$.

RESPOSTA: A

4. O tempo necessário para gelar os $10\,\ell$ de água, após gelar a serpentina, é $5\,\text{min}-12\,\text{seg}=4\,\text{min}\,48\,\text{seg}$.

Assim, para gelar um garrafão de $20\,\ell$ são necessários $12\,\text{seg}$ mais $2 \cdot (4\,\text{min}\,48\,\text{seg})=9\,\text{min}\,36\,\text{seg}$ e o tempo total é $9\,\text{min}\,36\,\text{seg}+12\,\text{seg}=9\,\text{min}\,48\,\text{seg}$.

RESPOSTA: B

5. Seja D o número de dias passados até que todas as guarnições tenham ficado de serviço o mesmo número N de vezes pela primeira vez.

O número de guarnições escaladas em D dias é $6 \cdot D$ e, como cada guarnição foi escalada N vezes, o número de guarnições escaladas é $15 \cdot N$. Logo, $6 \cdot D=15 \cdot N$.

Para que o número de dias D seja o menor possível o resultado $6 \cdot D = 15 \cdot N$ deve ser o menor múltiplo comum (m.m.c.) de 6 e 15.

$\text{mmc}(6,15) = 30 \Rightarrow 6 \cdot D = 15 \cdot N = 30 \Leftrightarrow D = 5 \text{ e } N = 2$

Logo, após 5 dias, cada guarnição ficou de serviço 2 vezes.

RESPOSTA: A

6. 22 fósforos

8 caixas contêm $8 \cdot 45 = 360$ fósforos

5 maços contêm $10 \cdot 5 = 50$ caixas, que contém $50 \cdot 45 = 2250$ fósforos

13 pacotes contêm $13 \cdot 12 = 156$ maços, que contém $156 \cdot 10 = 1560$ caixas, que contêm $1560 \cdot 45 = 70200$ fósforos

Logo, o total de fósforos é $22 + 360 + 2250 + 70200 = 72832 = 8 \cdot 9104$.

Como 1 pacote contém $12 \cdot 10 \cdot 45 = 5400$ fósforos e um maço contém $10 \cdot 45 = 450$ fósforos, então o resultado da divisão dos fósforos por 8, que resulta 9104 fósforos, equivale a 1 pacote e restam $9104 - 5400 = 3704$; 8 maços e restam $3704 - 8 \cdot 450 = 104$; 2 caixas e restam $104 - 2 \cdot 43 = 14$; e 14 fósforos. Portanto, $p = 1$, $m = 8$, $c = 2$, $f = 14$, e $p + m + c + f = 1 + 8 + 2 + 14 = 25$.

RESPOSTA: A

7.

	BICICLETA	ÔNIBUS	MOTO
S. ANTÔNIO	--	--	ANA
S. JOÃO	HELÔ	--	--
S. PEDRO	--	REGINA	--

O diagrama acima mostra a colégio e o meio de transporte de cada uma das filhas. Note-se que não pode haver mais de um nome na mesma linha ou coluna.

As conclusões acima foram alcançadas como segue:

1º) Ana não estuda no SJ e Regina estuda no SP, implica que Ana estuda no SA.

2º) Como Ana estuda no SA não usa ônibus e como Helô usa a bicicleta, Ana usa moto.

3º) Como Ana estuda no SA e Regina no SP, então Helô estuda no SJ.

4º) Finalmente Regina estuda no SP e usa ônibus.

RESPOSTA: B

8. A declaração de Bernardo é a ideal para começarmos a análise.

Vamos supor que ele esteja falando a verdade, então ele não é o criminoso e todos os outros estão mentindo. Mas, nesse caso, a declaração de Danilo – “Carlos está mentindo” – seria verdadeira. Isso implica que dois dos suspeitos estariam falando a verdade, o que contradiz o enunciado.

Assim, Bernardo deve estar mentido e ele mesmo é o criminoso. Vamos analisar as outras afirmações apenas para checar a coerência do problema. As declarações de André e Carlos são falsas, já que o criminoso é Bernardo. Portanto, Danilo deve estar falando a verdade, o que realmente ocorre.

RESPOSTA: B

9. Se Eduardo diz “amanhã é um dia no qual eu minto”, então pode ser terça (verdade) ou sexta (mentira).

Se André diz “amanhã é um dia no qual eu minto”, então pode ser sábado (verdade) ou terça (mentira).

O dia comum em ambos os casos é a terça. Portanto, amanhã será quarta-feira.

RESPOSTA: C

10. A ordem é uma proposição do tipo $\overline{p} \Rightarrow q$. Essa proposição é equivalente à sua contrapositiva $\overline{q} \Rightarrow \overline{(\overline{p})} \equiv \overline{q} \Rightarrow p$.

Assim, podemos afirmar que: Se um bar à beira-mar não está aberto, então choveu.

RESPOSTA: E

11. Essa é uma aplicação do **Princípio das Casas dos Pombos**. Se uma pessoa lançar um dado $6+1=7$ vezes, pelo menos um número aparecerá duas vezes. Já se ela lançar o dado $2\cdot 6+1=13$ vezes pelo menos um número aparecerá três vezes.

Para chegar a essa conclusão, basta observar que, se cada número aparecesse no máximo duas vezes, o número máximo de lançamentos seria $2\cdot 6=12$.

RESPOSTA: C

12. **Afirmativas VERDADEIRAS (enunciado):**

• Todos os matemáticos são cientistas.

Está no diagrama: o conjunto dos Matemáticos está contido no dos Cientistas.

• Alguns cientistas são filósofos.

Garante que a região azul não é vazia.

• Todos os filósofos são cientistas ou professores.

Está no diagrama: O conjunto dos Filósofos está contido na união dos Cientistas e dos Professores.

• Nem todo professor é cientista.

Garante que a região amarela não é vazia.

Afirmativas a ANALISAR:

• Alguns matemáticos são filósofos.

Não é possível garantir isso. Sabemos que a região azul inteira é não vazia, mas não temos certeza se isso é verdade para a interseção entre Matemáticos e Filósofos (regiões 2 e 3).

• Nem todo filósofo é cientista.

Não é possível garantir isso. Sabemos que a região amarela inteira é não vazia, mas não temos certeza se isso é verdade para o conjunto dos Filósofos não Cientistas (região 1)

• Alguns filósofos são professores.

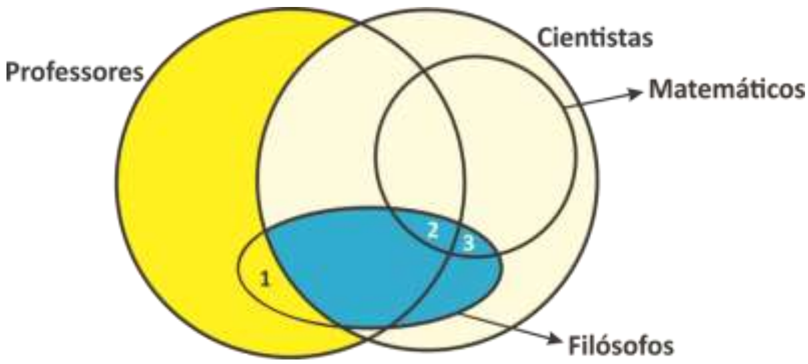
Não é possível garantir isso. A justificativa é a mesma da afirmativa anterior.

• Se um filósofo não é matemático, ele é professor.

Não é possível garantir isso. Se um filósofo não é Matemático, ele pode ser um Cientista não Matemático e pode nem haver Filósofos que sejam Professores.

• Alguns filósofos são matemáticos.

Não é possível garantir isso. A justificativa é a mesma da primeira afirmativa.



RESPOSTA: A

13. Com as informações do enunciado é possível construir o diagrama a seguir:

100 caixas	**Aprovado Qualidade Total = 60**	**Reprovado Qualidade Total = 40**
Aprovado Quantidade Total = 74	**x**	**y**
Reprovado Quantidade Total = 26	**z**	**14**

A partir do diagrama, podemos escrever as equações:

$z+14=26 \Leftrightarrow z=12$

$x+12=60 \Leftrightarrow y=48$

Caixas aprovadas em ambos os testes: $y=48$.

RESPOSTA: D

14. Como nenhuma caixa está com a etiqueta correta, podemos identificar todas as caixas com uma única operação. Basta retirar um objeto da caixa “lápis e canetas”, essa caixa deverá ter apenas um tipo de objeto. Vamos supor sem perda de generalidade que sejam lápis. Essa deve ser a etiqueta dessa caixa. A caixa que tiver a etiqueta “lápis” errada deve ser a caixa das canetas e a caixa que tiver a etiqueta “canetas” errada deve ser a caixa dos lápis e canetas.

RESPOSTA: B

15. $\overline{\overline{(X \cap Y)} \cup (\overline{X} \cap Y)} = (X \cap Y) \cap \overline{(\overline{X} \cap Y)} = (X \cap Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = Y \cap X \cap (X \cup \overline{Y}) = Y \cap X$

RESPOSTA: C

16. $\left((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge \left(\overline{\overline{p} \wedge q}\right)\right) \equiv \left(\left(\overline{\overline{p}} \vee q\right) \wedge \left(\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}\right)\right) \equiv \left((p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})\right) \overset{(*)}{\equiv} (p \vee \underbrace{(q \wedge \overline{q})}_{F}) \equiv p$

(*) volta da distributividade da disjunção em relação à conjunção

RESPOSTA: A

17. A expressão representa a distributividade da conjunção em relação à disjunção. Portanto, é uma tautologia.

RESPOSTA: B

18. A sentença é uma proposição do tipo $\overline{p} \Rightarrow q$. Essa proposição é equivalente à sua contrapositiva $\overline{q} \Rightarrow \overline{(\overline{p})} \equiv \overline{q} \Rightarrow p$.

Assim, podemos afirmar que: “Se eu não sou triste, então a matemática é divertida.”

RESPOSTA: A

19. A sentença é uma proposição do tipo $p \Rightarrow q$. Essa proposição é equivalente à sua contrapositiva $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Assim, podemos afirmar que: Se um quadrilátero não tem as diagonais cortando-se ao meio então ele não é um retângulo.

RESPOSTA: B

20. Considere a identidade de Gauss

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$

Supondo por absurdo $\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}=0$ e definindo $\sqrt[3]{x-y}=a$, $\sqrt[3]{y-z}=b$ e $\sqrt[3]{z-x}=c$.

$\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Rightarrow (x-y)+(y-z)+(z-x)=3\sqrt[3]{x-y}\sqrt[3]{y-z}\sqrt[3]{z-x}\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$

A última igualdade implica que um dos três fatores deve ser nulo, ou seja, dois dos números x, y e z devem ser iguais, o que é uma contradição.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0_{\text{C.Q.D.}}$

21. Vamos aplicar o Princípio da Indução Finita.

1° passo: A desigualdade é válida para $n=2$, pois $2!=2<\frac{9}{4}=\left(\frac{2+1}{2}\right)^2$.

2° passo: Supondo que a desigualdade é verdadeira para $n=k$ (hipótese de indução), ou seja, $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$.

3° passo: Vamos demonstrar que a desigualdade é verdadeira para $n=k+1$.

$$(k+1)!=k!\cdot(k+1)<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k\cdot(k+1)=\frac{(k+1)^k}{2^k}<\frac{(k+2)^k}{2^k}=\left(\frac{k+2}{2}\right)^k<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$$

Portanto, pelo P.I.F., a desigualdade é válida para todo $n>1$, como queríamos demonstrar.

22. Princípio da Indução Finita (PIF):

Para $n=1$, tem-se $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$ (verdadeira).

Supondo válido para $n=k$ (Hipótese de Indução).

Vamos provar para $n=k+1$:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\cdot\left[\frac{k\cdot(2k+1)}{6}+k+1\right]=$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=\frac{(k+1)\cdot(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

Como vale para $n=k+1$, pelo P.I.F., está demonstrada a proposição.

23. Seja por absurdo, $a+h\le b+c$.

Como $a+b>0$ e $b+c>$, então $a+h\le b+c\Rightarrow(a+h)^2\le(b+c)^2\Leftrightarrow a^2+2ah+h^2\le b^2+2bc+c^2$.

Sabemos que em um triângulo retângulo $ah = bc$ e $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras), então $h^2 \leq 0$ (absurdo). Portanto, $a + h > b + c$ (C.Q.D.).

24.

a)

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc =$$
$$= (a+b+c)\left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\right] - 3ab(a+b+c) =$$
$$= (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\right] \geq 0$$

Logo, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ e a igualdade só ocorre quando $a = b = c$.

Fazendo $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ e $c = \sqrt[3]{z}$, temos:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z} \geq 0 \Leftrightarrow x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Da mesma forma, a igualdade só ocorre quando $x = y = z$.

b) Em um paralelepípedo de lados a, b e c, a área total S_0 é dada por $S_0 = 2(ab + ac + bc)$ e o volume V por $V = abc$.

Usando a desigualdade do item (a):

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} \Rightarrow \frac{\frac{S_0}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{V^2} \Leftrightarrow V \leq \frac{\sqrt{S_0^3}}{6\sqrt{6}}$$

Logo, o volume máximo é $V_{MAX} = \frac{\sqrt{S_0^3}}{6\sqrt{6}}$, que ocorre quando ocorre a igualdade inicial, ou seja, quando $a = b = c$.

Nesse caso, o paralelepípedo é um cubo.