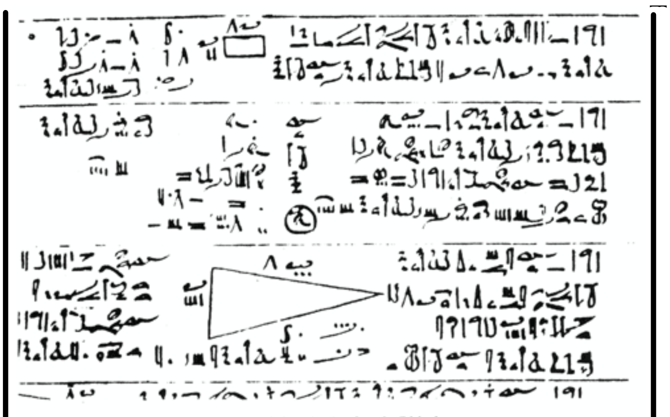
Módulo 05

EQUAÇÕES

latim: equatione

igualar, pesar

↳ Surgem com os egípcios no papiro de Rhind (1650 a.C.)



Uma página do Papiro de Rhind.

↳ Com os árabes (séc. IX) as equações adquirem o formalismo algébrico.

5.1 Equações do Primeiro Grau

↳ maior potência da variável na equação.

Exemplo:

- $3x^2 + 4x = 0$ (2º grau)
- $2x^3 - x + 7 = 0$ (3º grau)
- $-17x + 5 = 0$ (1º grau)
- $4x^6 - 3x^5 + 1 = 0$ (6º grau)

↳ Regras do jogo para manipulação de equações:

- Coisas iguais adicionadas a coisas iguais formam coisas iguais.
- Coisas iguais subtraídas de coisas iguais formam coisas iguais.

(NOÇÕES COMUNS)

5.1.1 **Sistemas Lineares**

Exemplo 01

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (\mathrm{I}) \\ x - y = 2 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Caminho 01 :

$x - y + y = 2 + y \quad \therefore \quad x = 2 + y$ $\quad (\mathrm{I})$

$2 \cdot (2 + y) + y = 7$

$4 + 2y + y = 7$

$3y = 7 - 4$

$3y = 3$

$\boxed{y = 1}$ $\quad x = 2 + y$

$\boxed{x = 3}$

UNIVERSO NARRADO

Caminho 02 :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (\mathrm{I}) \\ x - y = 2 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$\times(2)$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (\mathrm{I}) \\ 2x - 2y = 4 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$(\mathrm{I}) - (\mathrm{II})$:

$$2x + y - (2x - 2y) = 7 - 4$$

$$\cancel{2x} + y - \cancel{2x} + 2y = 3$$

$$3y = 3$$

$$\boxed{y = 1} \dashrightarrow \boxed{x = 3}$$

UNIVERSO NARRADO

Exemplo 02

$$\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)}$$

$$\begin{array}{r} 6x \cancel{-2y} = 4 \\ (+) \quad -4x \cancel{+2y} = -2 \\ \hline 2x = 2 \end{array}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$2 \cdot 1 - y = 1$$

$$y = 2 - 1$$

$$y = 1$$

$$\boxed{y = 1}$$

Exemplo 03

$$\begin{cases} 8x = y & (\mathrm{I}) \\ 4x = y + 1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}) \div (\mathrm{II}) : \quad \frac{8\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{y}{y+1}$$

$$2 = \frac{y}{y+1} \quad \therefore \quad 2(y+1) = y$$

$$2y + 2 = y \quad \therefore \quad 2y - y = -2$$

$$\boxed{y = -2}$$

$8x = y$

$$\boxed{x = -1/4}$$

UNIVERSO NARRADO

Exemplo 04

$$\begin{cases} 2y + 4x = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow[\times(2)]{} \begin{cases} 2y + 4x = 10 \\ 2y + 4x = 8 \end{cases}$$

$$8 \cancel{=} 10$$

Impossível !

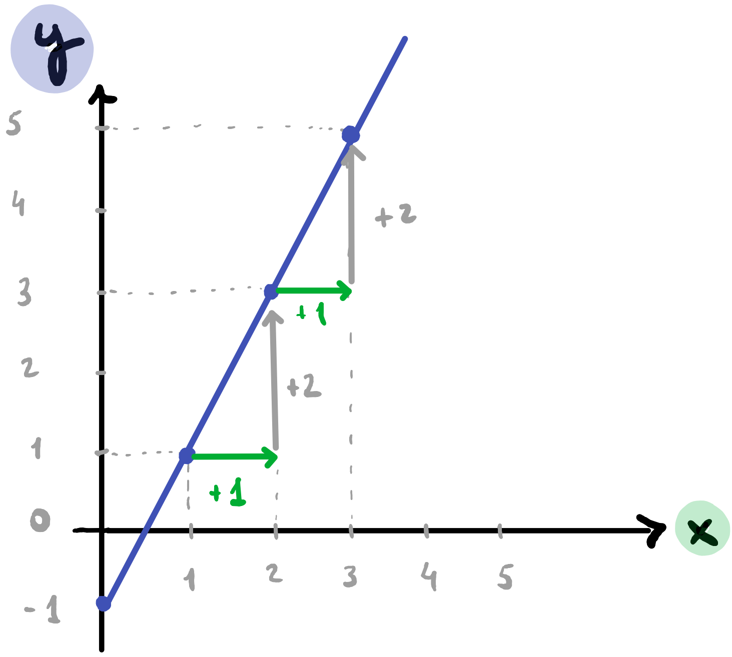
5.1.2 Interpretação Geométrica

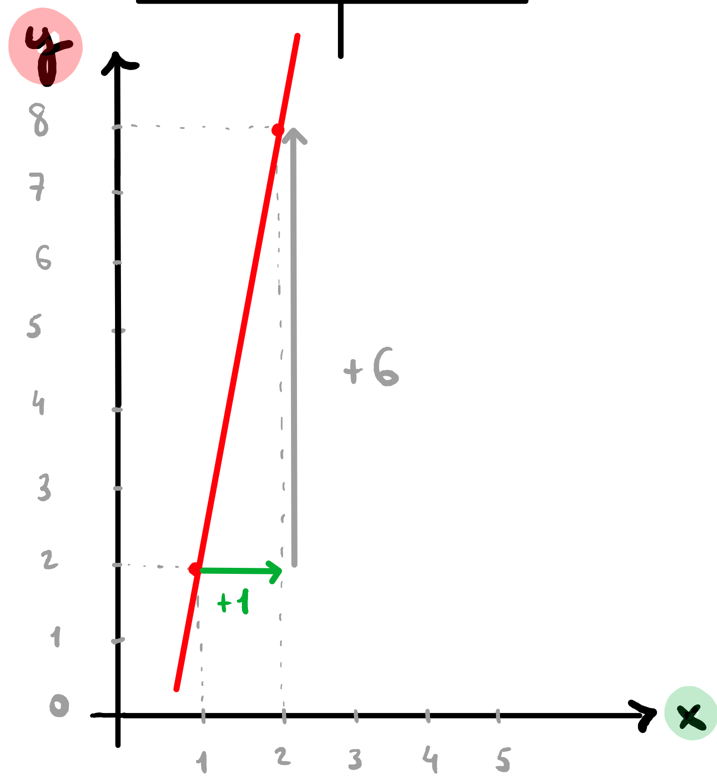
$$\boxed{y = 2 \cdot x - 1}$$

y	x
-1	0
1	1
3	2
5	3
7	4

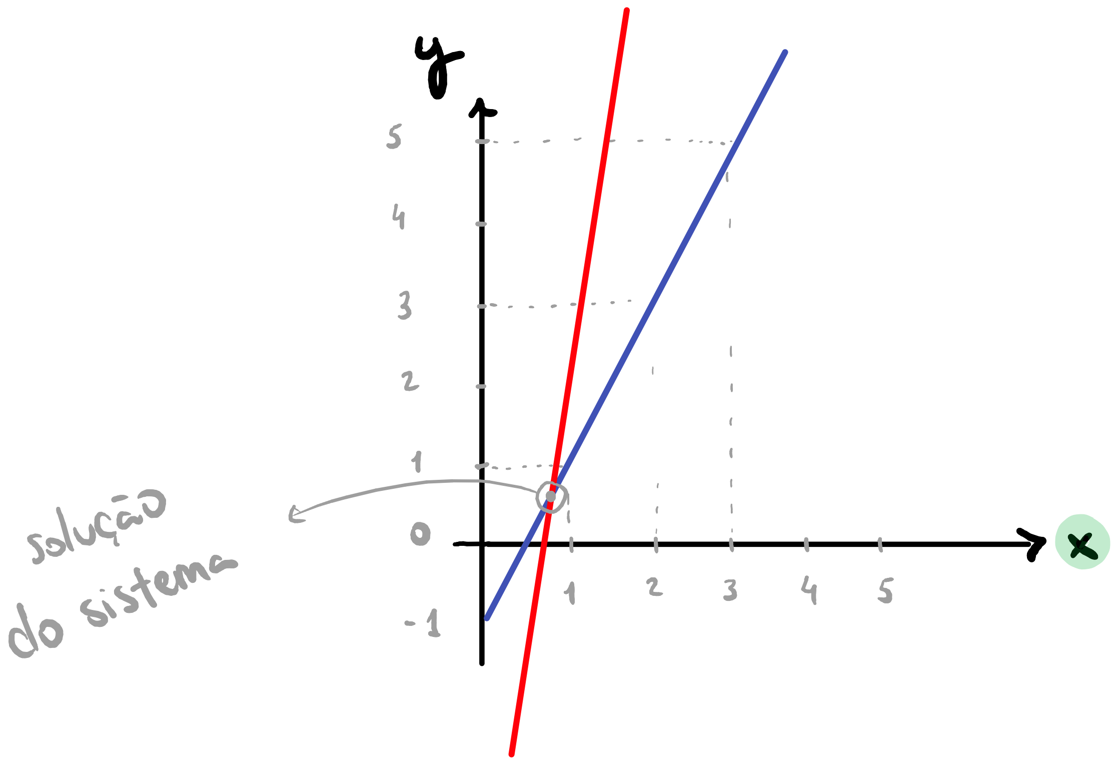
$$\boxed{y = 6 \cdot x - 4}$$

y	x
-4	0
2	1
8	2
14	3
20	4





Visualizando as duas equações:



↳ A solução de um sistema linear é o ponto de encontro das duas retas!

Do exemplo (04):

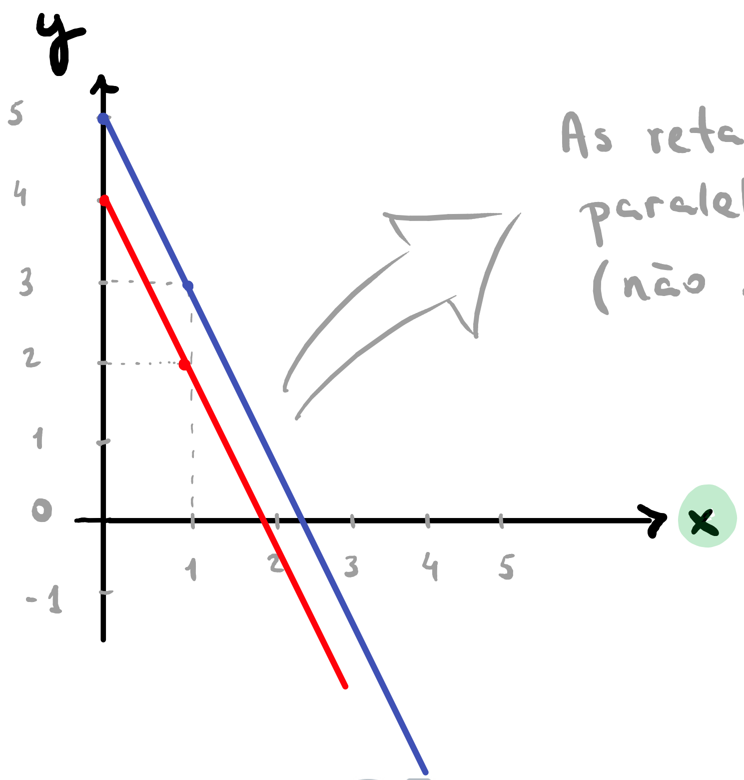
$$\begin{cases} 2y + 4x = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$\boxed{y = -2 \cdot x + 5}$

y	x
5	0
3	1
1	2
-1	3
-3	4

$\boxed{y = -2 \cdot x + 4}$

y	x
4	0
2	1
0	2
-2	3
-4	4



As retas são paralelas (não se encontram)

5.2. Equação do Segundo Grau

$$\boxed{ax^2 + b \cdot x + c = 0}$$

$(a \neq 0)$

As soluções da equação do 2º grau são dadas pela fórmula de Bháskara:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

em que Δ é o discriminante da equação, dado por: $\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

Exemplo

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2 = 0 \\ \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{array}$$

$$\text{(i)} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$= 1 + 8 = 9$$

$$\Delta = 9 \quad \therefore \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$\text{(ii)} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \boxed{x_1 = -2} \quad \boxed{x_2 = 1}$$

5.2.1

A dedução da fórmula de Bháskara

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$(\div)\,a$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x + \square)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \square + \square^2$$

$$\frac{b}{a} = 2 \cdot \square \quad \therefore \quad \square = \frac{b}{2a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \cancel{2} \cdot x \cdot \frac{b}{\cancel{2}a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\xrightarrow{\div a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{\cancel{2}}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x + \cancel{\frac{b}{2a}} \cancel{- \frac{b}{2a}} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemplos

(i) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(i) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

(ii) $x = \dfrac{6 \pm 0}{2 \cdot 1} \therefore \boxed{x = 3}$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$y = 3$ $\quad (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$(x-3)^2 = 0 \therefore x - 3 = 0$

$\boxed{x = 3}$

(ii) $x^2 - 15x = 0$

(i) $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 225$

(ii) $x = \dfrac{15 \pm 15}{2}$

$\boxed{x_1 = 15}$ $\boxed{x_2 = 0}$

$x \cdot x - 15x = 0$

$x \cdot (x - 15) = 0$

i) $\boxed{x_2 = 0}$

ii) $x - 15 = 0 \therefore \boxed{x_1 = 15}$

(iii) $x^2 - 10x + 24 = 0$

$$(x - \boxed{5})^2 = x^2 - 2 \cdot \boxed{5} \cdot x + \boxed{5}^2$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 + 1 = 0 + 1$$

$$\underbrace{x^2 - 10x + 25} = 1$$

$$(x-5)^2 = 1$$

$$\sqrt{(x-5)^{\cancel{2}}} = \sqrt{1} = 1$$

$$x - 5 = \pm 1 \quad \therefore \quad x = 5 \pm 1 \rightarrow \boxed{x_1 = 6}, \quad \boxed{x_2 = 4}$$

UNIVERSO NARRADO

5.2.2. Relações de Girard

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(i) Soma das raízes da eq. do 2º grau

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}$$

$$S = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}$$

$$\boxed{S = -b/a}$$

(ii) Produto das raízes da eq. do 2º grau

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\underbrace{(a + b) \cdot (a - b)}_{a^2 - b^2}$$

$$P = \frac{(\sqrt{\Delta} - b) \cdot (-1)(\sqrt{\Delta} + b)}{4a^2} = -\frac{(\sqrt{\Delta} + b)(\sqrt{\Delta} - b)}{4a^2}$$

$$P = -\frac{(\sqrt{\Delta}^2 - b^2)}{4a^2} = -\frac{(\Delta - b^2)}{4a^2}$$

$$P = -\frac{(\cancel{b^2} - 4ac - \cancel{b^2})}{4a^2} = -\frac{(-4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}\cancel{a} \cdot a}$$

$$\boxed{P = c/a}$$

Exemplo

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

$x_1 = 2$

$x_2 = 5$

$$\boxed{P = c/a}$$

Exemplo

(Fuvest) Se **m** e **n** são raízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, então $1/m + 1/n$ vale :

a) 6

b) 2

c) 1

d) $3/5$

e) $1/6$

$$R = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$R = \frac{1 \cdot n}{m \cdot n} + \frac{1 \cdot m}{n \cdot m}$$

$$R = \frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{S}{P} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

5.2.3. Equação Biquadrada

Exemplo: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$\boxed{y = x^2} \dashrightarrow y^2 = x^4$

$$y^2 - 13 \cdot y + 36 = 0$$

(i) $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

(ii) $y = \dfrac{13 \pm 5}{2}$

$\boxed{y_1 = 9}$ → $\boxed{x_1 = 3}$, $\boxed{x_2 = -3}$

$\boxed{y_2 = 4}$ → $\boxed{x_3 = 2}$, $\boxed{x_4 = -2}$

$y = x^2$

5.3 . Equações Irracionais

Exemplos

#01

$$\boxed{\sqrt{x-5} - 4 = 0}$$

$$\sqrt{x-5} - \cancel{4} \cancel{+4} = 0 + 4$$

$$\sqrt{x-5} = 4$$

$$\left(\cancel{\sqrt{x-5}}\right)^{\cancel{2}} = 4^2$$

$$(x-5) = \pm 16$$

$$\cancel{5} + (x - \cancel{5}) = \pm 16 + 5$$

$$x = 5 \pm 16$$

$$\boxed{x = 21}$$

ou

$$\boxed{\cancel{x = -11}}$$

#02

$$\boxed{\sqrt{x+4} - 2 = x}$$

$$\sqrt{x+4} - 2 + 2 = x + 2$$

$$\sqrt{x+4} = x + 2$$

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (x+2)^2$$

$$x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

$$x + \cancel{4} = x^2 + 4x + \cancel{4}$$

$$x = x^2 + 4x \quad \therefore \quad 0 = x^2 + 3x \quad \therefore \quad x(x+3) = 0$$

$$x(x+3) = 0 \nearrow \boxed{x = 0}$$

$$\searrow \cancel{\boxed{x = -3}}$$

teste: $\sqrt{x+4} - 2 = x$

(i) $x = 0$: $\sqrt{0+4} - 2 = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0$ ✓

(ii) $x = -3$: $\sqrt{-3+4} - 2 = -3 \quad \therefore \quad -1 \cancel{=} -3$

↳ Cuidado ao criar raízes nas manipulações!

$$\sqrt{x+4} - 2 = x$$

$$\sqrt{x+4} - 2 + 2 = x + 2$$

$$\boxed{\sqrt{x+4} = x + 2}$$

PAU!

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (x+2)^2$$

$$x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

-3

$$x = x^2 + 4x$$

$x = 0$ ✓ ou $x = -3$ ✗

UNIVERSO NARRADO

#03

$$\boxed{\sqrt{x} = \sqrt{x-5} + 1}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{x-5} + 1$$

$$\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x-5} + 1 - 1$$

$$\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x-5}$$

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{x-5}\right)^2$$

$$x - 2\sqrt{x} \cdot 1 + 1^2 = x - 5$$

$$\cancel{x} - 2\sqrt{x} \cdot 1 + 1^2 - \cancel{x} = \cancel{x} - 5 - \cancel{x}$$

$$-2\sqrt{x} + 1 = -5$$

$$-2\sqrt{x} = -6$$

$$\left(-2\sqrt{x}\right)^2 = \left(-6\right)^2$$

$$4 \cdot x = 36$$

$$\boxed{x = 9}$$

UNIVERSO NARRADO