O problema das torneiras

Uma abordagem alternativa a problemas matemáticos que envolvem interpretações físicas

Felipe Guisoli

1 Introdução

Minha motivação com este texto é tentar mostrar para você, estudante, uma abordagem mais intuitiva sobre alguns problemas clássicos da matemática do ensino fundamental e médio que costumam confundir muito os alunos.

São raríssimos os alunos que conheci que realmente compreendiam e sabiam trabalhar com os conceitos de MDC – Máximo Divisor Comum – e MMC – Mínimo Múltiplo Comum. Pela minha experiência com alunos e a percepção acerca de sua compreensão desses assuntos, acredito que essa área seja bastante delicada e, dessa forma, decidi que seria melhor não abordá-la aqui.

Assim, não pretendo ensinar ou explicar os conceitos de MMC ou MDC aqui, que, em certa instância, serão necessários para as discussões que serão propostas. Entretanto, caminharei bastante devagar ao longo das resoluções, para tentar apresentar um raciocínio intuitivo em cima da resolução de determinados problemas, a fim de mostrar para os estudantes que a matemática é uma ciência que exige muito raciocínio, mas também muita criatividade e uso da intuição.

Com isso, talvez a discussão sobre os conceitos de MDC e MMC fiquem para outro texto, enquanto isso vamos trabalhar nossa intuição junto com as expressões algébricas.

2 Conceitos e Problema Inicial

Os problemas que pretendo resolver aqui são aqueles problemas do tipo "Se uma primeira torneira demora *x* horas para encher um tanque, e uma segunda torneira demora *y* horas para encher o mesmo tanque, quanto tempo levará para que as duas encham o tanque juntas?".

Para o leitor que já está familiarizado com esse tipo de problema e conhece amplamente todos os caminhos para resolvê-lo, estimulo-o a, ainda assim, prosseguir na leitura, pois, à medida que construirmos alguns raciocínios, vamos partir com o mesmo tratamento para resolução de alguns outros problemas semelhantes, porém mais sofisticados e interessantes.

Sendo assim, vamos começar com o primeiro problema, da natureza mais simples, proposto a seguir.

1) Uma torneira *A* enche uma piscina em 6 horas, enquanto uma torneira *B* leva 18 horas para encher a mesma piscina. Quanto tempo levará para encher a piscina com as duas torneiras trabalhando simultaneamente?

Antes de começarmos a desenvolver o problema, vamos definir uma grandeza que os físicos costumam chamar de vazão. A vazão tem a ver com fluxo de água que escoa por unidade de tempo, sendo assim, a vazão é a razão entre o volume de água por unidade de tempo, ou seja:

$\phi = \dfrac{V}{\Delta t}$, em que ϕ é a vazão, V é o volume e Δt é o intervalo de tempo.

Ou seja, pensando em uma torneira, a vazão basicamente diz respeito à "velocidade" com que a torneira despeja água.

Quando calculamos a velocidade de um carro, dividimos seu deslocamento – a distância percorrida – pelo intervalo de tempo no qual ele esteve se deslocando. Como uma torneira não se desloca, mas sim despeja água, sua "velocidade de despejo" – vazão – será, analogamente, a razão entre o volume de água despejado pelo intervalo de tempo no qual ela esteve despejando a água. Perceba, matematicamente, a analogia entre tais grandezas conforme indicado a seguir.

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} \Rightarrow \text{vazão} = \frac{\text{volume}}{\text{tempo}}$$

Sendo assim, seja ϕ_A e ϕ_B as vazões das torneiras *A* e *B*, respectivamente, e seja *V* o volume total da piscina. Assim, temos que:

$$\phi_A = \frac{V}{\Delta t} = \frac{V}{6 \text{ horas}} = \frac{V}{6\,\text{h}} \quad \text{(I)}$$

$$\phi_B = \frac{V}{\Delta t} = \frac{V}{18 \text{ horas}} = \frac{V}{18\,\text{h}} \quad \text{(II)}$$

Como este é o primeiro problema, vamos estipular um valor para o volume da piscina, a fim de simplificar o trabalho algébrico. Ao concluirmos a resolução dessa maneira, vamos resolver o mesmo problema sem atribuirmos um valor para o volume *V* da piscina, e, através da interpretação matemática e de manipulação algébrica, entenderemos porque o tempo que procuramos não depende do valor de *V*.

Sendo assim, a fim de facilitar os cálculos, vamos dizer que o volume da piscina é igual a 18 litros.

Logo, as vazões das torneiras *A* e *B,* substituindo V = 18 L em (I) e (II) são:

$$\phi_A = \frac{V}{6h} = \frac{18L}{6h} = 3L/h$$

$$\phi_B = \frac{V}{18h} = \frac{18L}{18h} = 1L/h$$

Ou seja, a "velocidade" com que a torneira *A* enche a piscina é de 3 litros de água a cada hora, enquanto a torneira *B* enche com uma velocidade de 1 litro por hora. É natural que a velocidade – vazão – com que a torneira *A* encha a piscina seja maior do que a da torneira *B*, uma vez que a torneira *A* demora *menos* tempo para encher a piscina – se dois carros percorrem uma mesma distância, e o carro *A* demora menos tempo do que o carro *B* para completar o percurso, então podemos concluir que o carro *A* desenvolveu uma velocidade maior do que o carro *B.*

Não apenas é intuitivo que a vazão de *A* seja maior do que a de *B*, mas também devemos observar que a vazão de *A* é maior do que a de *B* em uma proporção específica. Vemos que ϕ_A (3 L/h) é o triplo de ϕ_B (1 L/h), o que era de se esperar, pois a torneira *B* leva 18 horas para encher a piscina, que é triplo do tempo que torneira *A* leva – 6 horas.

Assim, como a torneira *B* leva o triplo do tempo para encher, então podemos concluir que isso acontece porque a "velocidade" com que ela enche é 3 vezes menor.

Vale a pena notarmos que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, pois $V = \frac{d}{t}$. Se o carro *A* caminha o mesmo trajeto que o carro *B*, porém na metade do tempo, então é porque o veículo *A* percorreu o trajeto com o dobro da velocidade do veículo *B*, e mais uma vez a intuição prova que nossos cálculos estão corretos.

Agora, para resolvermos de fato o problema, basta o argumento final: é intuitivo pensarmos que, se *A* enche a piscina com uma certa "velocidade" – despejando água a uma certa velocidade – e *B* despeja água com uma determinada velocidade, quando as duas torneiras estiverem trabalhando juntas, a velocidade com que elas encherão a piscina será igual a soma das velocidades com que elas enchem a piscina individualmente – a quantidade água que será despejada na piscina em, por exemplo, uma hora, será igual ao volume de água que *A* despeja em uma hora – 3 litros – somado do volume de água que *B* despeja em uma hora – 1 litro.

Logo, sendo ϕ a vazão "final" ou vazão "resultante" das duas torneiras trabalhando em conjunto, temos que $\phi = \phi_A + \phi_B$ = 3 L/h + 1 L/h = 4 L/h.

Ou seja, trabalhando em conjunto, as torneiras irão despejar 4 litros de água na piscina a cada hora. Agora, quanto tempo levará até que enchamos toda a piscina? Basta lembrarmos que o volume total da piscina é de 18 litros, logo, por uma regra de 3:

4 litros – 1 hora

18 litros – x horas

Logo, temos que

$$\frac{4}{18} = \frac{1}{x} \therefore 4x = 18 \therefore x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ horas}.$$

Ou, para os mais rigorosos, utilizando a definição de vazão, temos que:

$\phi = \frac{V}{\Delta t}$, logo $\Delta t = \frac{V}{\phi}$. Como a vazão é de 4 L/h, e o volume em questão é de 18 litros, o tempo necessário para encher tal volume com uma vazão igual a 4 L/h é $\Delta t = \frac{V}{\phi} = \frac{18L}{4L/h} = 4,5 \text{ horas}$.

Utilizando a regra de três ou a definição de vazão, caímos na mesma proporção, que nos diz que as torneiras, trabalhando em conjunto, levarão 4,5 horas para encher a piscina.

Novamente, vale a pena ressaltarmos mais uma observação que nossa intuição deve mostrar. A torneira *A* é a que enche mais rapidamente a piscina, ela leva 6 horas para enchê-la enquanto a torneira *B* leva 18 horas. Sendo assim, com as duas trabalhando em conjunto, certamente o tempo necessário para encher a piscina será *menor* do que o menor tempo que é necessário para que uma das torneiras encham a piscina individualmente. Ou seja, sendo *A* a torneira mais rápida, que leva 6 horas para encher a piscina, certamente na situação procurada em que *A* e *B* estarão trabalhando juntas o tempo necessário para encher será inferior a 6 horas, pois 6 horas é o tempo que *A* leva para completar a tarefa *"sozinha".* Com o auxílio de outra torneira despejando água na piscina, certamente o tempo necessário para enchê-la será inferior a 6 horas. Essa observação pode ser importante como uma estratégia para averiguarmos se nosso resultado está correto. Se nossa resposta desse um intervalo de tempo superior a 6 horas, certamente teríamos errado algum cálculo no meio do processo.

Agora que resolvemos detalhadamente o problema, vamos à pergunta que deve estar te incomodando: será mesmo que nossa resposta realmente independe do volume da piscina?

Para iniciar nossa discussão, vamos fazer rapidamente mais dois casos. Como fizemos inicialmente considerando um volume de 18 litros, resolveremos agora o mesmo problema para piscinas de volume igual a 36 e 72 litros (você pode fazer para qualquer valor, esses dois foram escolhidos apenas para facilitar os cálculos). Como já detalhamos todo o processo cognitivo por traz da resolução do problema, vamos desenvolvê-la mais rapidamente nessa etapa.

(I) Piscina de 36 litros.

A vazão da torneira *A* é $\phi_A = \frac{v}{6\,h} = \frac{36\,L}{6\,h} = 6\,L/h$.

A vazão da torneira *B* é $\phi_B = \frac{v}{18\,h} = \frac{36\,L}{18\,h} = 2\,L/h$.

Com as duas torneiras trabalhando simultaneamente, a vazão total será $\phi = \phi_A + \phi_B = 6 + 2 = 8$ L/h, ou seja, elas, juntas, despejarão 8 litros de água a cada hora. O tempo necessário para encher os 36 litros será tal que:

8 litros – 1 hora

36 litros – x horas

$\frac{8}{36} = \frac{1}{x} \therefore 8x = 36 \therefore x = 4{,}5$ horas. Coincidência?

Vamos para o segundo caso.

(II) Piscina de 72 litros.

A vazão da torneira A é $\phi_A = \frac{v}{6\,h} = \frac{72\,L}{6\,h} = 12\,L/h$

A vazão da torneira B é $\phi_B = \frac{v}{18\,h} = \frac{72\,L}{18\,h} = 4\,L/h$

Com as duas torneiras trabalhando simultaneamente, a vazão total será $\phi = \phi_A + \phi_B = 12 + 4 = 16$ L/h. Logo, se são despejados 16 litros em 1 hora, para encher os 72 litros será necessário um intervalo de tempo tal que:

$$\phi = \frac{v}{\Delta t} \therefore 16\frac{L}{h} = \frac{72\,L}{\Delta h} \therefore \Delta t = \frac{72}{16}h = 4{,}5 \text{ horas.}$$

Acho que a essa altura você já percebeu que não estamos lidando com coincidências. Por qual motivo, então, o tempo necessário para encher uma piscina de 72 litros é igual ao tempo necessário para encher uma piscina de 18 litros?

O ponto chave aqui é que a pergunta correta não é essa. Na verdade, considerando que as vazões das torneiras não mudam, certamente irá demorar mais para encher um tanque de 72 litros do que um de 18. Podemos prever, inclusive, que o tempo que levará para encher o tanque de 72 litros será 4 vezes maior do que o tempo necessário para encher o tanque de 18, uma vez que o volume deste é 4 vezes menor do que o daquele e vemos que o tempo é diretamente proporcional ao volume do tanque, assim como o tempo é diretamente proporcional à distância percorrida por um carro. Mas, por que nossos cálculos não mostram isso?

A questão aqui, como exposto, não é que o tempo necessário para encher uma piscina de 72 litros seja igual ao tempo necessário para encher uma de 18, mas sim que, se supusermos que nossa piscina desconhecida tem um volume de 72 litros, ou se supusermos que seu volume é de 18 ou 36 litros ou qualquer outro valor, nosso resultado final será o mesmo. Quantos litros têm a nossa piscina? Essa não é uma pergunta que cabe a nós responder, por isso não é a pergunta correta. Não nos interessa saber qual é o seu volume, mas sim, de acordo com as condições de vazão fornecidas, quanto tempo será necessário para enchê-la. O volume da piscina não é o ente geométrico importante, mas sim o tempo que irá levar para enchê-la. Para entender isso melhor, vamos dissertar um pouco mais sobre esse aparente paradoxo, e em seguida iremos dar um tratamento mais algébrico para o problema, que nos dará uma base para partirmos para problemas mais sofisticados e difíceis.

Em última instância, tente entender que nossa resposta independe do volume da piscina, pois, independente do seu volume, a torneira *A* continuará demorando 6 horas para encher a piscina. É por isso que podemos supor um valor qualquer para o volume, porque, independente desse valor, seja 5, 10, 36 ou 150 litros, a torneira *A* continuará demorando 6 horas para encher este volume, enquanto a torneira *B* continuará demorando 18 horas. Dessa forma, o volume será diferente, às vazões também serão diferentes, mas o tempo necessário para encher é o mesmo. Logo, como queremos o tempo necessário para encher a piscina com as duas torneiras trabalhando simultaneamente, podemos simplesmente supor um valor para o volume, pois, como vimos, o tempo é uma grandeza que não se altera com o valor do volume da piscina.

Apesar dessa técnica de "chutar" um valor para o volume ser eficiente, ela é menos elegante ao mesmo tempo em que é mais confusa. Isso porque o aluno nem sempre identifica corretamente as situações nas quais pode supor valores, e acaba supondo valores em situações na qual não poderia o fazer, acarretando em erros no desenvolvimento do problema gerado por essa confusão. Além disso, é menos elegante, pois exige que atribuamos um valor para uma incógnita, um valor que de fato não representa o que ela é, pois, como vimos, é impossível determinar o volume da piscina nessas condições. Além do mais, isso pode mostrar uma falta de habilidade do aluno em trabalhar com incógnitas, o que certamente deve ser sanado, uma vez que trabalhar com incógnitas é de extrema importância para resolução e compreensão de problemas mais complicados.

Agora vamos resolver pela última vez o problema número um, dando um enfoque maior no tratamento e na interpretação algébrica.

Já sabemos que as vazões das torneiras *A* e *B* são:

$$\phi_A = \frac{v}{\Delta t} = \frac{v}{6 \text{ horas}} = \frac{v}{6\,h} \text{ (I)}$$

$$\phi_B = \frac{v}{\Delta t} = \frac{v}{18 \text{ horas}} = \frac{v}{18\,h} \text{ (II)}$$

Agora, ao invés de supormos um valor para o volume *V*, vamos deixá-lo exatamente dessa maneira. O volume da nossa piscina será, portanto, igual a *V* litros.

Como sabemos, na situação em que as duas torneiras estiverem trabalhando juntas, a vazão final será $\phi_A + \phi_B = \frac{v}{6} + \frac{v}{18} = \frac{3v}{18} + \frac{v}{18} = \frac{4v}{18}$ (eq. A).

Logo, temos que $\phi = \frac{4v \text{ litros}}{18 \text{ hora}}$ (eq. B). Aqui, há duas formas de resolvermos o problema. A primeira delas é utilizando a definição de vazão, que nos diz que $\phi = \frac{v}{\Delta t}$ (eq. C).

Das equações B e C segue que:

$$\frac{v}{\Delta t} = \frac{4v}{18} \text{ (1)}$$

$$4v\Delta t = 18v \text{ (2)}$$

$$4\Delta t = 18 \text{ (3)}$$

$$\Delta t = \frac{18}{4} = 4,5 \text{ horas (4)}$$

Nesse ponto, a resolução não foi muito diferente do que fizemos anteriormente, mas vale a pena fazer uma observação na manipulação feita de (2) para (3). Nesse passo, dividimos ambos os membros da equação por *V*, e vimos que o valor de *V* se simplificava dos dois lados e sumia da nossa equação. Isso prova matematicamente porque o tempo que procuramos não depende do valor de *V*, pois no final das contas ele se simplifica nos cálculos e desaparece da equação.

Esse desenvolvimento foi para esclarecer para os mais céticos a independência do resultado final em relação ao volume da piscina. Eu, particularmente, prefiro visualizar o que foi desenvolvido na equação A de outra maneira.

Nessa equação, encontramos que $\phi = \frac{4v}{18}$. Podemos escrever essa relação como $\phi = \frac{v}{\frac{18}{4}}$, pois, multiplicando a fração de cima pelo inverso da primeira, retornaremos ao que tínhamos na equação A.

Agora, observe atentamente à expressão $\phi = \frac{v}{\frac{18}{4}}$. A vazão ϕ, como definimos e discutimos, representa a quantidade de volume *V* que escoa/é despejado em um tempo Δt. Ou seja, a expressão $\phi = \frac{v}{\frac{18}{4}}$, nos diz que a vazão fornece um volume *V*, que é o volume da nossa piscina, em um intervalo de tempo $\Delta t = \frac{18}{4} = 4,5$ horas. Logo, a tática de reescrever a expressão $\phi = \frac{4v}{18}$ como $\phi = \frac{v}{\frac{18}{4}}$, serve simplesmente para deixarmos no numerador apenas nosso volume *V*, logo, o que se encontra no denominador embaixo, é o tempo necessário para que, à taxa de vazão constante, as torneiras despejem um volume igual à *V*, que é o volume da nossa piscina.

Assim, novamente, chegamos à nossa resposta de 4,5 horas, com bastante rapidez e uma boa interpretação da expressão algébrica da vazão.

Nesse ponto, aconselho o leitor a se certificar de que compreendeu todos os passos desenvolvidos até aqui, inclusive a última abordagem algébrica, que será amplamente utilizada nas resoluções dos problemas propostos daqui pra frente. É importante que o leitor compreenda todo o raciocínio exposto para que consiga acompanhar as resoluções dos próximos problemas, que não serão amplamente detalhadas como foi feito neste primeiro problema, cujo fim fora de nivelar todos os leitores e se certificar de que todos pudessem acompanhar o que será discutido daqui pra frente.

3 Mais Problemas de Torneiras (Nível 02)

Antes de começarmos, encorajo o leitor a ler e tentar desenvolver a solução de cada problema antes de olhar a resolução.

1) Uma torneira A enche um tanque em x horas, enquanto as torneiras B e C levam, respectivamente, y e z horas para encher o mesmo tanque, individualmente.

a) Qual é a expressão que fornece o tempo que será necessário para que as torneiras A e B encham o tanque trabalhando simultaneamente.

b) Qual é a expressão que fornece o tempo que será necessário para que as três torneiras encham o tanque trabalhando simultaneamente.

2) Duas torneiras, juntas, enchem um tanque em n horas. Sozinha, uma delas demora m horas para encher o mesmo tanque. Quanto tempo, em horas, a outra tornaria precisa para, sozinha, encher o mesmo tanque?

Resoluções

1) Seja V o volume do tanque a ser enchido. Logo, se a torneira A demora x horas para encher o tanque de volume V, sua vazão é $\phi_A = \frac{V}{x}$. Analogamente, como as torneiras B e C demoram y e z horas para despejar o mesmo volume V de água, suas vazões são, respectivamente, $\phi_B = \frac{V}{y}$ e $\phi_C = \frac{V}{z}$.

a) Com as torneiras A e B trabalhando juntas, a vazão final será

$$\phi = \phi_A + \phi_B = \frac{V}{x} + \frac{V}{y} = V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{V}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}}.$$

Logo, chegamos que $\phi = \frac{V}{\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}}$, ou seja, com a vazão resultante, para encher um volume V (volume do tanque), será necessário um tempo igual a $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, ou $\frac{xy}{x+y}$.

Vale destacar aqui que não conhecemos o valor do volume *V* do tanque. A interpretação e a manipulação correta da expressão $\phi = \frac{V}{\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}}$ é essencial nesse ponto, pois conseguimos entender que, para que seja despejado um volume V de água, que é o que queremos, será necessário um intervalo de tempo igual a $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. Assim, nossa resposta dessa alternativa é $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, ou $\frac{xy}{x+y}$.

b) Com as três torneiras trabalhando simultaneamente, a vazão final será

$$\phi = \phi_A + \phi_B + \phi_C = \frac{V}{x} + \frac{V}{y} + \frac{V}{z} = V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{V}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}}}$$

Ou seja, para encher o volume V, será necessário um tempo igual a $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$, ou $\frac{xyz}{xy + xz + yz}$.

2) Sejam A e B as torneiras, sendo a torneira A aquela que enche o tanque em *m* horas. Seja *V* o volume total do tanque em questão, e *x* o tempo que a torneira B leva para encher o tanque sozinha (valor que queremos determinar).

Inicialmente, para as vazões das torneiras A e B temos que:

A: $\phi_A = \frac{v}{m}$

B: $\phi_B = \frac{v}{x}$

Para a situação em que as duas torneiras trabalham em conjunto, a vazão resultante é:

$\phi = \phi_A + \phi_B = \frac{v}{m} + \frac{v}{x} \therefore \phi = \frac{v(x+m)}{mx} \therefore \phi = \frac{v}{\frac{mx}{x+m}}$, ou seja, para encher o volume *V,* será necessário um tempo *t* dado por $t = \frac{mx}{x+m}$. Entretanto, tal tempo foi dado no enunciado, que é igual a *n* horas. Ou seja, temos que:

$$n = \frac{mx}{x+m} \therefore nx + mn = mx \therefore x(m-n) = mn \therefore x = \frac{mn}{m-n} \text{ horas.}$$

4 Problemas Mais Elaborados (Nível 03)

1) Três trabalhadores, André, Bruno e Carlos, foram contratados para a construção de uma laje.

Quando André e Bruno trabalham juntos, eles levam 10 dias para fazer o serviço. Se André está trabalhando com Carlos, eles levam 8 dias, e se Bruno trabalha com Carlos, eles levam 12 dias para concluir o serviço.

Quando tempo será necessário para concluir a obra, se André, Bruno e Carlos trabalharem juntos?

2) As torneiras A e B, trabalhando juntas, demoram *x* horas para encher um tanque. Sabe-se que, sozinha, a torneira B leva *b* horas para encher o tanque.

Quando as duas são ligadas, após *t* horas, a torneira B é desligada. Quanto tempo faltará para que se encha o tanque?

Resoluções

1) Sejam *a*, *b* e *c,* respectivamente, os tempos que André, Bruno e Carlos levam para completar o serviço trabalhando individualmente.

Seja *T* o total de serviço a ser realizado. Assim, a "velocidade de trabalho" de cada um dos três trabalhadores, isto é, a taxa com que eles trabalham em relação ao tempo, é:

André: $v_a = \frac{T}{a}$

Bruno: $v_b = \frac{T}{b}$

Carlos: $v_c = \frac{T}{c}$

Seja x o tempo necessário para que o trabalho seja concluído na situação em que os três amigos trabalham juntos.

Com os três amigos trabalhando simultaneamente, a taxa com que o trabalho será realizado será a soma das taxas individuais, ou seja, $v = v_A + v_B + v_C$. Entretanto, tal taxa é a razão entre o trabalho realizado – T – pelo tempo que leva para que tal trabalho seja realizado – x.

Logo, temos que

$$v = v_a + v_b + v_c = \frac{T}{x} \Rightarrow v_a + v_b + v_c = \frac{T}{x} \text{ (eq A).}$$

Contudo, não sabemos os valores de *a*, *b* e *c*, ou v_A, v_B ou v_C.

Mas temos os dados dos trabalhadores dois a dois, logo, temos que:

- André e Bruno:

A taxa de realização de trabalho resultante será $v = v_A + v_B$. Mas tal taxa é a razão entre o trabalho realizado – *T* – pelo intervalo de tempo no qual se realiza o trabalho – 10 dias – ou seja, temos que $v_a + v_b = \frac{T}{10}$ (I)

- André e Carlos:

Analogamente, teremos que $v = v_a + v_c = \frac{T}{8} \Rightarrow v_a + v_c = \frac{T}{8}$ (II)

- Bruno e Carlos:

A "velocidade de trabalho" resultante será $v = v_b + v_c = \frac{T}{12} \Rightarrow v_b + v_c = \frac{T}{12}$ (III)

Somando membro a membro as equações (I), (II) e (III) temos que:

$$v_a + v_b + v_a + v_c + v_b + v_c = \frac{T}{10} + \frac{T}{8} + \frac{T}{12} \therefore 2v_a + 2v_b + 2v_c = \frac{24T + 30T + 20T}{240}$$

Ou seja, temos que $2(v_a + v_b + v_c) = \frac{74T}{240} \therefore v_a + v_b + v_c = \frac{37T}{240}$ (IV)

Assim, voltando em *eq A* e substituindo o que temos na equação (IV) temos que $v_a + v_b + v_c = \frac{T}{x} \therefore \frac{37T}{240} = \frac{T}{x} \therefore x = \frac{240}{37} \cong 6{,}5.$ Ou seja, o tempo necessário para que os três amigos concluam o serviço trabalhando simultaneamente é de 6,5 dias, ou seja, 6 dias e meio.

2) Este problema se trata de uma versão um pouco mais sofisticada do problema número 2 que resolvemos anteriormente.

Seja *V* o volume do tanque e *a* o tempo que leva para torneira A, sozinha, encher o tanque. Assim, temos que a vazão das torneiras A e B são:

$$\phi_A = \frac{v}{a} \text{ e } \phi_B = \frac{v}{b}.$$

Com as torneiras A e B trabalhando simultaneamente, o tempo que levará para encher o tanque, conforme calculado no item a do problema 1 do tópico 3 "Mais Problemas de Torneiras" é $\frac{ab}{a+b}$, e o problema nos diz que tal tempo é igual a *x*. Logo, segue que $\frac{ab}{a+b} = x \therefore ab = x(a+b) \therefore ab = ax + bx \therefore a(b-x) = bx \therefore a = \frac{bx}{b-x}$, de forma semelhante ao que fizemos no problema 2 do tópico 3 "Mais Problemas de Torneiras". Assim, já temos o tempo que leva para a torneira A encher o tanque em função dos parâmetros dados.

Além do mais, sendo V o volume do tanque, a vazão das duas torneiras trabalhando simultaneamente é $\phi = \frac{V}{x}$. Logo, num tempo *t*, ela terá enchido um volume V_0 tal que $\phi = \frac{V_0}{t}$. Logo, segue que $\frac{V}{x} = \frac{V_0}{t} \therefore V_0 = \frac{Vt}{x}$.

Assim, o volume restante a ser cheio é $V' = V - V_0 = V - \frac{Vt}{x} = V\left(1 - \frac{t}{x}\right) = V\left(\frac{x-t}{x}\right)$.

Como a torneira B foi desligada, a vazão agora considerada será apenas da torneira A, que é $\phi_A = \frac{V}{a}$. Logo, para encher um volume $V' = V\left(\frac{x-t}{x}\right)$ será necessário um tempo *t′* tal que $\phi_A = \frac{V'}{t'}$. Assim, segue que

$$\frac{V}{a} = \frac{V'}{t'} \therefore \frac{V}{a} = \frac{V\left(\frac{x-t}{x}\right)}{t'} \therefore \frac{1}{a} = \frac{\frac{x-t}{x}}{t'} \therefore t' = \frac{a(x-t)}{x}.$$

Logo, como temos que $a = \frac{bx}{b-x}$, segue que o tempo que faltará para encher o tanque será $t' = \frac{a(x-t)}{x} = \frac{bx}{b-x}\frac{(x-t)}{x} \therefore t' = \frac{b(x-t)}{(b-x)}$ que a nossa resposta final.

5 Conclusão

Finalmente chegamos ao fim do texto. Espero ter conseguido não apenas esclarecer para o leitor como resolver certos tipos de problemas de matemática, mas também ter proporcionado um novo olhar, mais crítico e maduro, diante de certos problemas.

Assim como na física, em que o valor de várias grandezas depende do referencial, na matemática, e também nos problemas da nossa vida, a perspectiva sob a qual os olhamos fazem toda a diferença. Para a física, um mesmo corpo pode estar em movimento para um referencial e parado para outro. Na nossa vida é semelhante, o fácil e o difícil, o possível e o impossível, muitas vezes são determinados por pontos de vista. Espero ter mostrado ao leitor que existe uma perspectiva bastante suave e intuitiva sob a qual podemos olhar para a matemática, uma que, por exemplo, a torna mais lógica e compreensível. Que o leitor possa usar tal olhar sob os mais diversos tipos de problemas, não apenas da matemática ou da física, mas também de seu cotidiano.

O autor.