



# EXTENSIVO 2023

## FÍSICA PARA ITA

ÓTICA III



Prof. João Maldonado

AULA 09

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>1. Refração</b>	<b>5</b>
Índice de refração absoluto	6
Leis da refração	7
Primeira lei da refração	7
Segunda lei da refração	8
<b>DIOPTRO PLANO E POSIÇÃO APARENTE</b>	<b>14</b>
Lâmina de faces paralelas	17
Reflexão total e ângulo limite	19
Arco-íris e miragem	23
Posição aparente dos astros	23
6.6.2 Miragens e o efeito Fata Morgana	24
Arco-íris	25
Prismas	26
6.7.1 Equações do prisma	27
<b>PRISMAS DE REFLEXÃO TOTAL</b>	<b>29</b>
<b>DESVIO MÍNIMO</b>	<b>30</b>
<b>CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA REFRAÇÃO</b>	<b>32</b>
<b>DIOPTRO ESFÉRICO</b>	<b>34</b>
POSIÇÃO DA IMAGEM	34
AMPLIAÇÃO DA IMAGEM	35
<b>LENTE DELGADAS</b>	<b>37</b>
<b>NOMENCLATURA E PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DAS LENTES DELGADAS</b>	<b>37</b>
<b>COMPORTAMENTO ÓPTICO DAS LENTES DELGADAS</b>	<b>38</b>



<b>CENTRO ÓPTICO</b>	<b>40</b>
<b>DISTÂNCIA FOCAL E PLANO FOCAL DAS LENTES DELGADAS</b>	<b>40</b>
<b>FORMAÇÃO DE IMAGENS EM LENTES DELGADAS</b>	<b>43</b>
<b>EQUAÇÃO DALENTE DELGADA</b>	<b>45</b>
2.6.1. CONDIÇÃO DE DISTÂNCIA MÍNIMA ENTRE IMAGEM E OBJETO	47
<b>AUMENTO TRANSVERSAL</b>	<b>49</b>
<b>VERGÊNCIA</b>	<b>52</b>
<b>EQUAÇÃO DOS FABRICANTES DE LENTES</b>	<b>53</b>
<b>MÉTODO DE PIERRE LUCIE</b>	<b>56</b>
<b>ASSOCIAÇÃO DE LENTES DELGADAS</b>	<b>58</b>
2.11.1. ASSOCIAÇÃO NÃO JUSTAPOSTA	58
2.11.2. ASSOCIAÇÃO JUSTAPOSTA	58
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>61</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>62</b>



## INTRODUÇÃO

Nesta aula continuaremos o estudo de Óptica geométrica. Estudaremos dioptrios esféricos e lentes delgadas.

Dioptrios esféricos são extremamente raros de aparecer em uma questão, mas lentes são extremamente importantes, incluindo a equação de Gauss e dos fabricantes.

Anote as equações deduzidas e como usá-las, pois, você não terá tempo para deduzir na sua prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



## Refração

Seja a velocidade da luz no vácuo  $c$ , quando está se propagar em outro meio que não o vácuo, terá velocidade menor  $v$ . O fenômeno que causa esta mudança na velocidade da onda se chama refração. É usual pensar na refração como sendo a variação do ângulo da trajetória da luz, mas isto não abrangeria, por exemplo, o caso em que a incidência é perpendicular como veremos adiante. Portanto, de forma visual, o fenômeno da refração está representado abaixo,

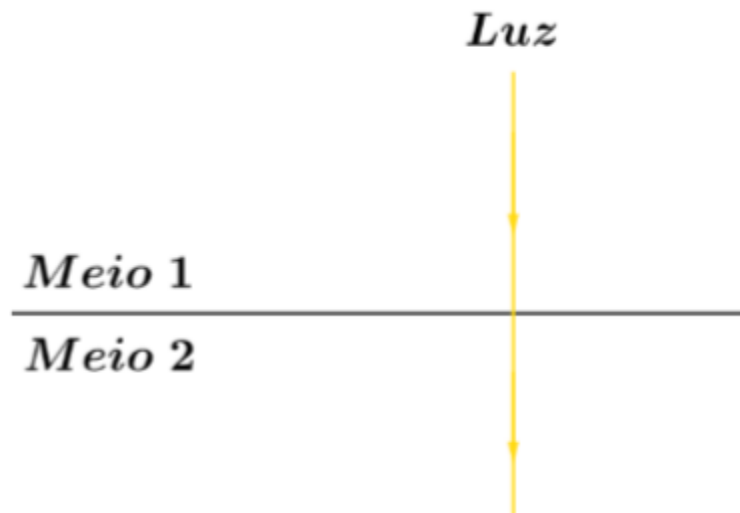
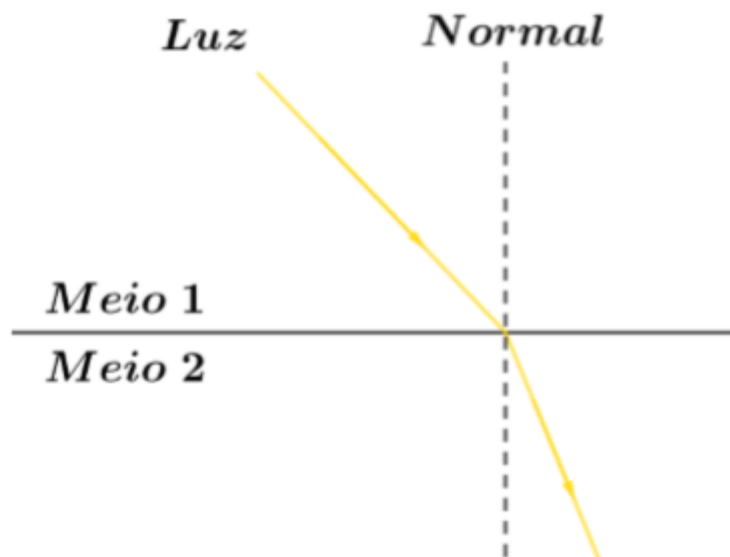


Figura 1: Incidência perpendicular da luz.



Incidência oblíqua da luz.



## Índice de refração absoluto

O índice de refração absoluto é definido como a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo ( $c$ ) e a velocidade de propagação da luz no meio ( $v$ ). Assim

$$n = \frac{c}{v}$$

- O índice de refração é uma grandeza adimensional.
- Como a velocidade  $v$  é sempre menor que a velocidade da luz no vácuo  $c$ , o índice de refração sempre é um número maior que 1.

### Exemplo:

Sabendo-se que a velocidade de propagação da luz no vácuo é  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , calcule a velocidade de propagação da luz na água, sabendo-se que  $n_{\text{água}} = 1,33$ .

Comentários:

$$v_{\text{água}} = \frac{c}{n_{\text{água}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} \Rightarrow v_{\text{água}} = 2,26 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Exemplo:

Dado que o índice de refração do vidro é de 1,5 e o índice de refração da água é de 1,33, calcule os índices de refração relativos entre os dois meios.

Comentários:

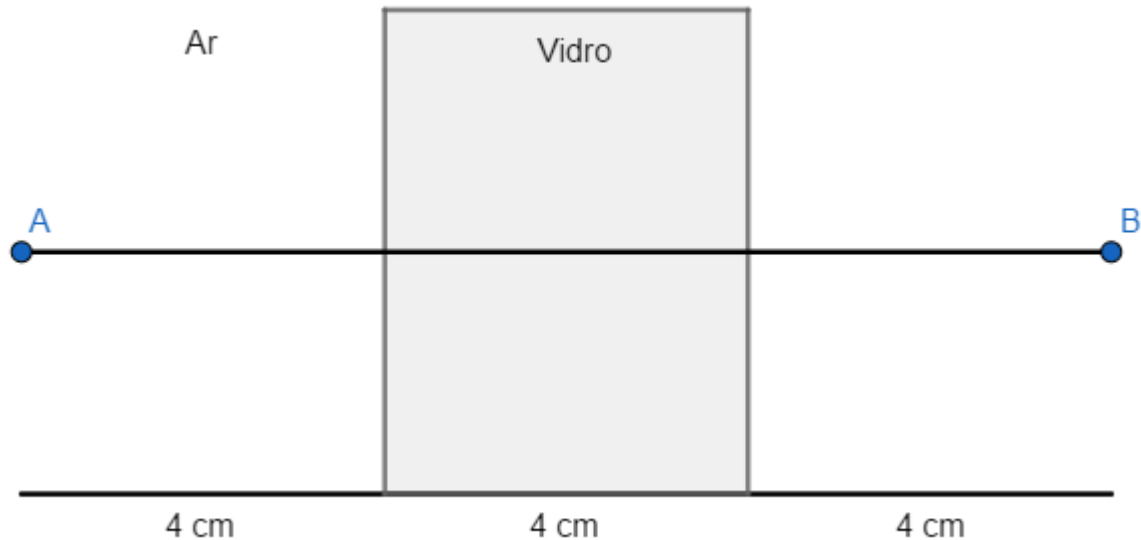
$$n_{\text{água,vidro}} = \frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{vidro}}} = \frac{1,33}{1,5} \cong \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{9}$$

$$n_{\text{vidro,água}} = \frac{1}{n_{\text{água,vidro}}} = \frac{9}{8}$$

Exemplo:

Sabendo-se que o comprimento de onda da luz violeta é de  $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ , quantos comprimentos de onda completo a onda realizou ao partir de A, no vácuo, atravessar a placa de vidro ( $n = 1,5$ ) e atingir o ponto B?





Comentários:

Tem-se 8 cm sendo percorrido pela luz no ar ( $n \cong 1$ ) e 4 cm sendo percorridos no vidro. Calculando-se o comprimento da onda da luz violeta no vidro:

$$n_{\text{vidro}} = \frac{\lambda_{\text{violeta,v\u00e1cuo}}}{\lambda_{\text{violeta,vidro}}} \Rightarrow 1,5 = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{\lambda_{\text{violeta,vidro}}} \Rightarrow \lambda_{\text{violeta,vidro}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-7}$$

Portanto, o n\u00famero de comprimentos de onda \u00e9:

$$\frac{l_{\text{v\u00e1cuo}}}{\lambda_{\text{v\u00e1cuo}}} + \frac{l_{\text{vidro}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-7}} + \frac{4 \cdot 10^{-2}}{\frac{8}{3} \cdot 10^{-7}} = (2 + 1,5) \cdot 10^5 = \boxed{3,5 \cdot 10^5 \text{ comprimentos de onda}}$$

## Leis da refra\u00e7\u00e3o

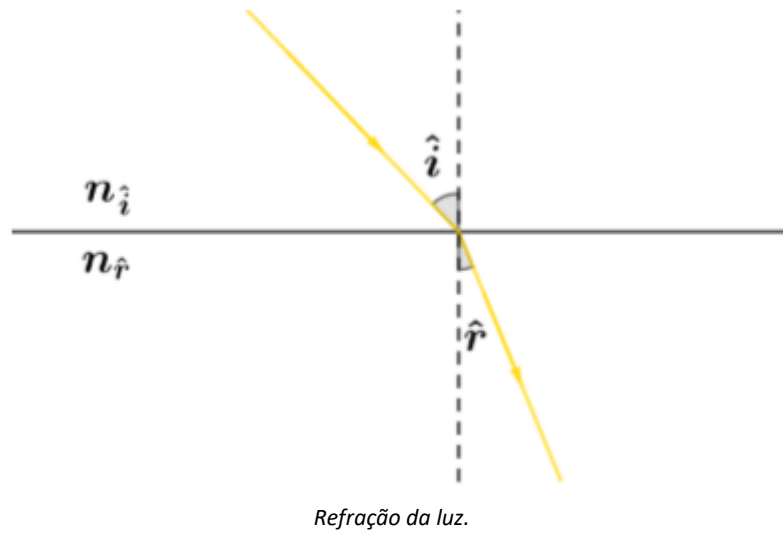
### Primeira lei da refra\u00e7\u00e3o

***O raio incidente, o raio refratado e a reta normal tra\u00e7adas pelo ponto de incid\u00eancia est\u00e3o todos contidos no mesmo plano, conforme figura abaixo.***



## Segunda lei da refração

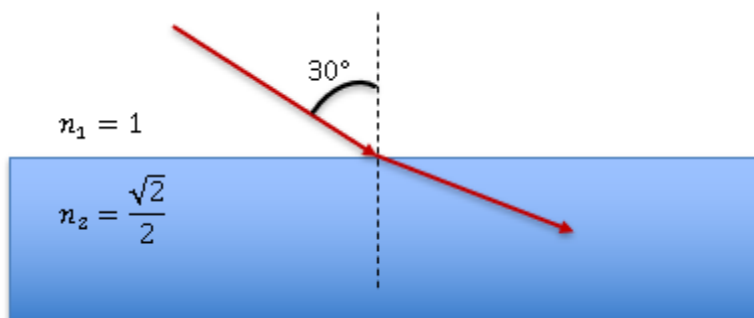
Também conhecido como “Lei de Snell”, define a relação entre o seno do ângulo incidente e do ângulo refratado para um dióptro. A Lei de Snell é expressa por:



$$n_i \cdot \text{sen } i = n_r \cdot \text{sen } r$$

Exemplo:

Um raio de luz incide na separação entre dois meios, como mostra a figura abaixo.



Qual é o ângulo de refração?

Comentários:

Podemos utilizar a lei de Snell:

$$n_i \cdot \text{sen } i = n_r \cdot \text{sen } r$$





$$1 \cdot \text{sen } 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sen } r$$

$$\text{sen } r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = 45^\circ$$

Exemplo:

Analise as afirmações como verdadeiras ou falsas a respeito da passagem da luz de um meio (1) para outro meio (2).

a) Se a velocidade da luz aumenta, então a índice de refração do meio 2 é maior.

b) Se a velocidade da luz no meio 1 for menor que no meio 2, então, no meio 2, o raio aproxima-se da normal.

c) Se a velocidade da luz no meio 1 for maior que no meio 2, então, no meio 2, o raio afasta-se da normal.

Comentários:

a) Falso.

$$v_2 > v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} < 1$$

Mas:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Logo:

$$\frac{n_2}{n_1} < 1 \Rightarrow n_2 < n_1$$

b) Se  $v_1 < v_2$ , utiliza-se da conclusão da afirmativa a).

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Mas, como  $n_2 < n_1$ , tem-se que:

$$\text{sen } \hat{i} < \text{sen } \hat{r}$$

E, como:

$$0 \leq \hat{i}, \hat{r} \leq \frac{\pi}{2}$$

Conclui-se que:

$$\hat{i} < \hat{r}$$

c) Verdadeiro.

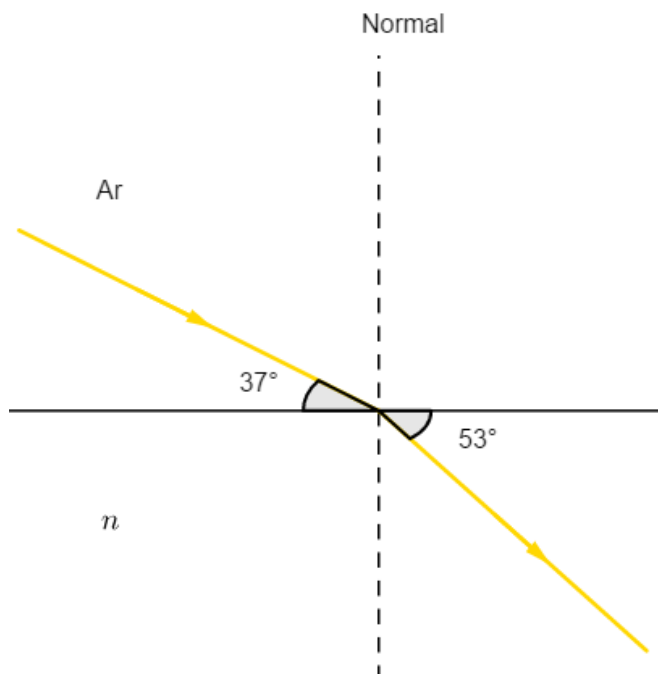
Se  $v_1 > v_2$ , então a conclusão é oposta ao do item a), isto é,  $n_1 < n_2$ .

Com isso, chega-se a uma conclusão oposta ao item b), ou seja,  $\hat{i} > \hat{r}$ .

Exemplo:



Sabendo que a luz se comporta como descrito na figura a seguir, calcule a velocidade de propagação da luz no segundo meio.



Comentários:

Deve-se notar que os ângulos fornecidos não são os ângulos adjacentes à normal. Portanto, ao utilizar-se a Lei de Snell, devem ser utilizados os ângulos complementares aos mostrados.

$$n_{ar} \cdot \text{sen } 53^\circ = n \cdot \text{sen } 37^\circ$$

Com  $n_{ar} \cong 1$ :

$$n = \frac{\text{sen } 53^\circ}{\text{sen } 37^\circ} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

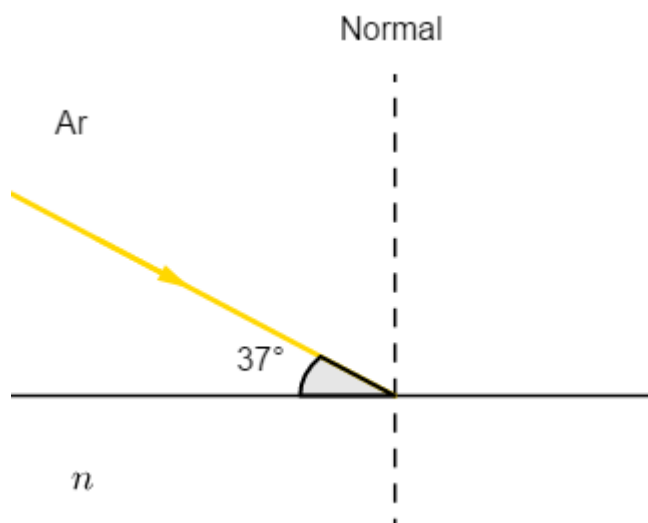
E, a velocidade no meio é dada por:

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow \boxed{v = \frac{3}{4} \cdot c}$$

Exemplo:

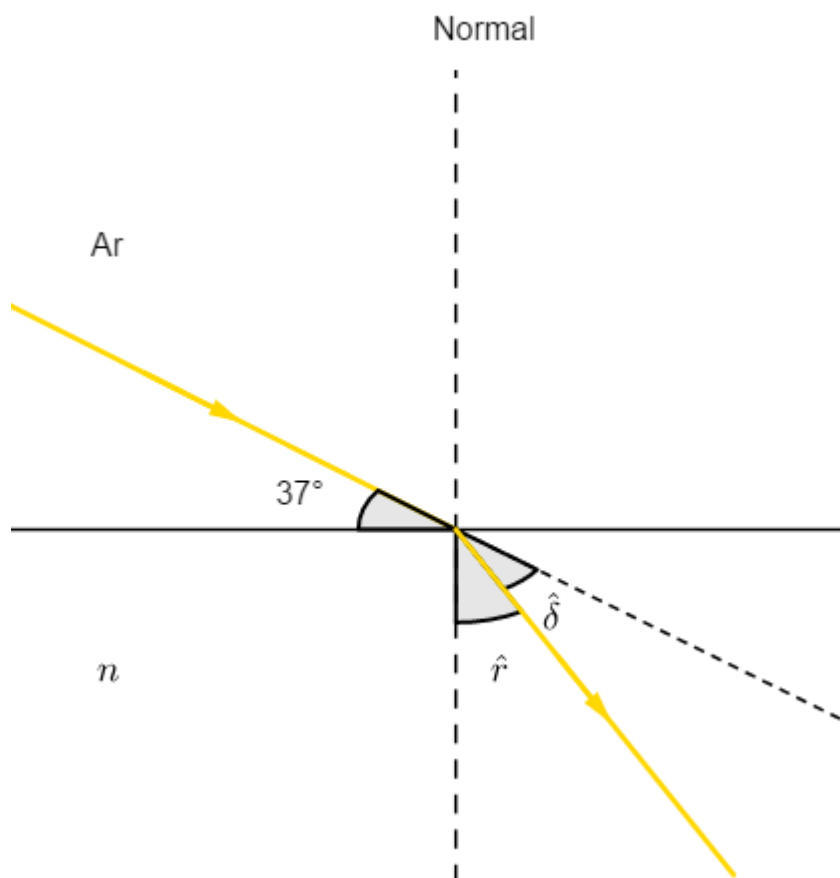
Sabendo-se que a luz é refratada ao passar para outro meio conforme a figura abaixo, qual o desvio sofrido pelo raio de luz? Adote  $n = \frac{8}{5}$ .





Comentários:

A situação está representada na figura a seguir, onde  $\hat{r}$  é o ângulo do raio refratado e  $\hat{\delta}$  é o desvio da trajetória.



Portanto, por Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \text{sen } 53^\circ = n \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{r} = 30^\circ$$



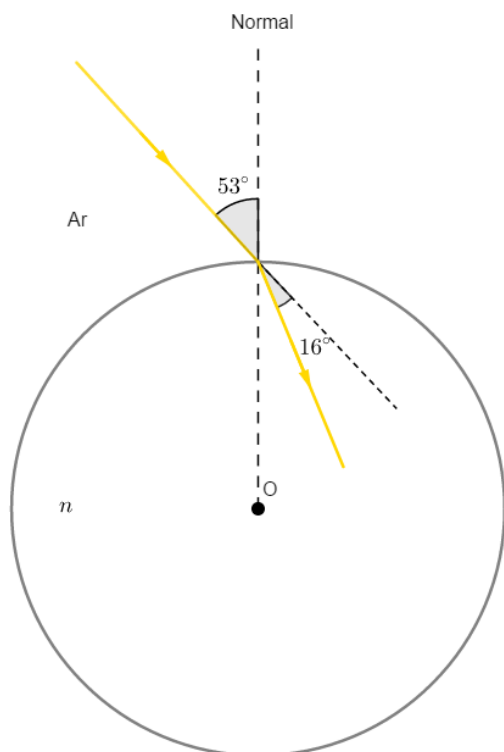
E, sabe-se que, como  $53^\circ$  e  $(\hat{r} + \hat{\delta})$  são opostos pelo vértice, devem ter igual medida. Portanto:

$$53^\circ = \hat{r} + \hat{\delta} = 30^\circ + \hat{\delta}$$

$$\hat{\delta} = 23^\circ$$

Exemplo:

Um raio de luz incide sobre a superfície de uma esfera transparente como retratado na figura a seguir. Determine o índice de refração da esfera.



Comentários:

Foi fornecido o ângulo de incidência e o desvio sofrido pelo raio de luz. A relação que se estabelece entre estes e o ângulo de refração é:

$$53^\circ = 16^\circ + \hat{r}$$

$$\hat{r} = 37^\circ$$

Pela Lei de Snell:

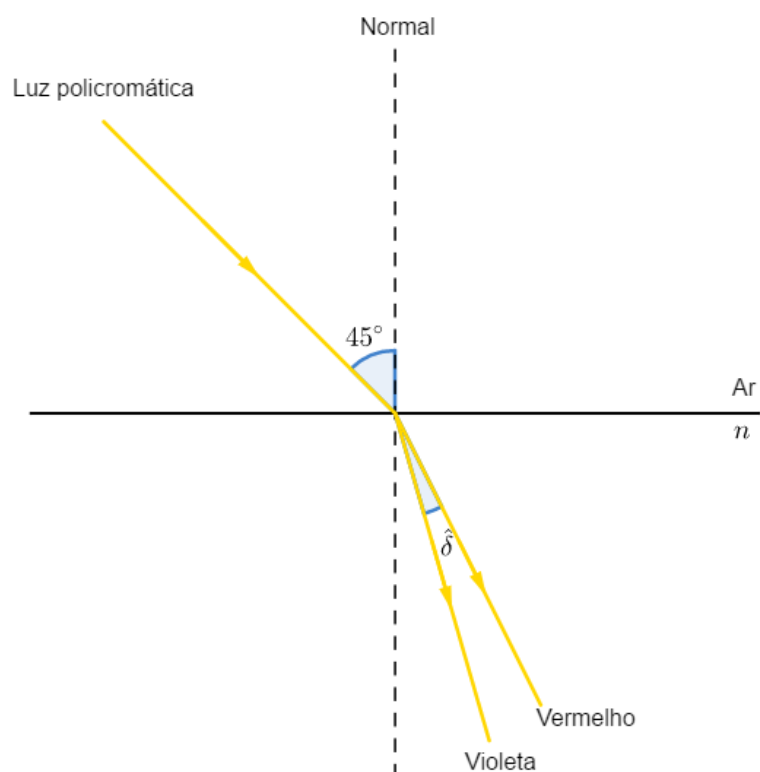
$$n_{ar} \cdot \text{sen } 53^\circ = n \cdot \text{sen } 37^\circ$$

$$n = \frac{\text{sen } 53^\circ}{\text{sen } 37^\circ} = \frac{4}{3}$$

Exemplo:

Considere que um raio de luz que se propaga no ar passa a se propagar em  $CS_{2(l)}$ , conforme a figura a seguir. Calcule a diferença de desvio entre a luz vermelha e a luz violeta. Adote:  $n_{verm} = 1,618$  e  $n_{violeta} = 1,675$ .





Comentários:

Primeiro, calcula-se os ângulos de refração para cada frequência de luz.

$$\begin{cases} n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{verm} \cdot \text{sen } \hat{r}_{verm} \\ n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{violeta} \cdot \text{sen } \hat{r}_{violeta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_{verm} = \arcsen\left(\frac{n_{ar}}{n_{verm}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \hat{r}_{violeta} = \arcsen\left(\frac{n_{ar}}{n_{violeta}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_{verm} \cong 25,914^\circ \\ \hat{r}_{violeta} \cong 24,971^\circ \end{cases}$$

Tendo em mãos os ângulos de refração da luz vermelha e da luz violeta, respectivamente,  $\hat{r}_{verm}$  e  $\hat{r}_{viol}$ , tem-se que:

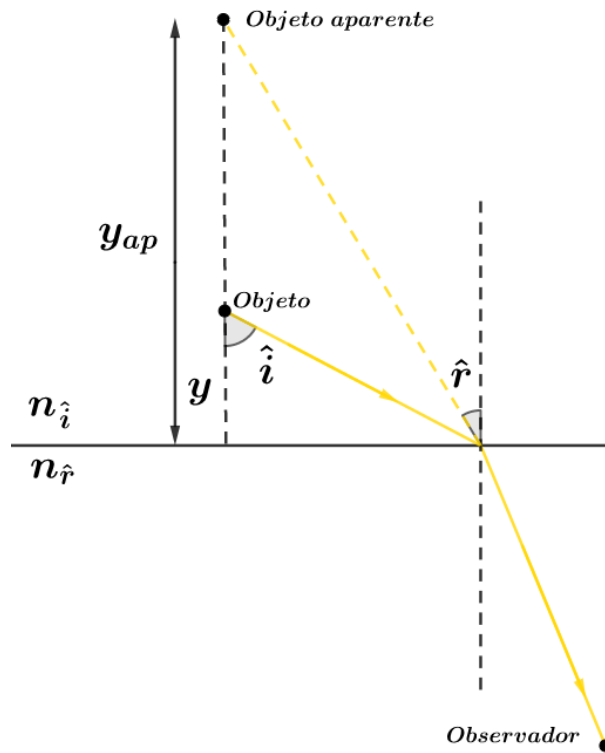
$$\hat{\delta} = \hat{r}_{verm} - \hat{r}_{violeta}$$

$$\hat{\delta} \cong 0,94^\circ$$



## DIOPTRO PLANO E POSIÇÃO APARENTE

Um dióptro plano é um sistema formado por dois meios homogêneos e transparentes separados por uma superfície plana. O efeito de mudança de trajetória da luz ao atravessar um dióptro plano causa uma aparente mudança de posição para um observador que se encontra em um meio diferente do objeto. Observe a figura abaixo:



*Representação de posição aparente por transmissão da luz em um dióptro plano.*

Nota-se que o raio de luz produzido pelo objeto e que chega ao observador indica uma posição diferente da verdadeira do objeto. Pela Lei de Snell, podemos escrever que:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Para a completa resolução do problema, é necessário que sejam fornecidos dados suficientes que possibilitem calcular o ângulo de refração. Com este valor em mãos e tendo como informação a distância horizontal do objeto até a normal, é possível calcular a posição aparente vertical do objeto. Dessa forma:

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \text{sen } \hat{i} \quad (\text{eq. 1.3.1})$$

E como  $\hat{r}$  pertence ao primeiro quadrante:

$$\text{cos } \hat{r} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{r}}$$

Chamando de  $x$  a distância do objeto à normal, encontra-se a distância vertical do objeto aparente ( $y_{ap}$ ):

$$\frac{x}{y_{ap}} = \frac{\text{sen } \hat{r}}{\text{cos } \hat{r}} \quad (\text{eq. 1.3.2})$$



$$y_{ap} = x \cdot \frac{\cos \hat{r}}{\sin \hat{r}} \Rightarrow y_{ap} = x \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \hat{r}}}{\sin \hat{r}}$$

Entretanto, nem sempre se têm todos estes dados, portanto é usual, para pequenos ângulos, a utilização da seguinte aproximação:

$$\sin \theta \cong \operatorname{tg} \theta \Leftrightarrow \theta \text{ pequeno}$$

Dessa forma, a equação 1.3.1 ficaria:

$$\operatorname{tg} \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{tg} \hat{i} \text{ (eq. 1.3.3)}$$

E a equação 1.3.2 ficaria:

$$\frac{x}{y_{ap}} = \operatorname{tg} \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{tg} \hat{i}$$

$$\frac{x}{\operatorname{tg} \hat{i}} \cdot \frac{n_2}{n_1} = y_{ap}$$

Mas:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} \hat{i}} = y$$

Portanto:

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_2}{n_1} \text{ (eq. 1.3.4)}$$

Onde:

- $n_1$  é o índice de refração do meio no qual se encontra o objeto.
- $n_2$  é o índice de refração do meio no qual se encontra o observador.

Assim, reescrevendo:

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_{\text{observador}}}{n_{\text{objeto}}} \text{ (eq. 1.3.5)}$$

Observações:

- A equação 1.3.4 pode ser usada independente de qual o sentido de propagação da luz, seja do mais refringente para o menos ou o contrário.
- É usual que as questões adotem uma resolução pela equação 1.3.4 mesmo que os ângulos não sejam pequenos.



Exemplo:

Uma moeda se encontra no fundo de um recipiente 4 m abaixo da superfície da água. Se um observador diretamente sobre a moeda observá-la, determine a que profundidade este observador percebe a moeda. Adotar  $n_{\text{água}} = \frac{4}{3}$ .

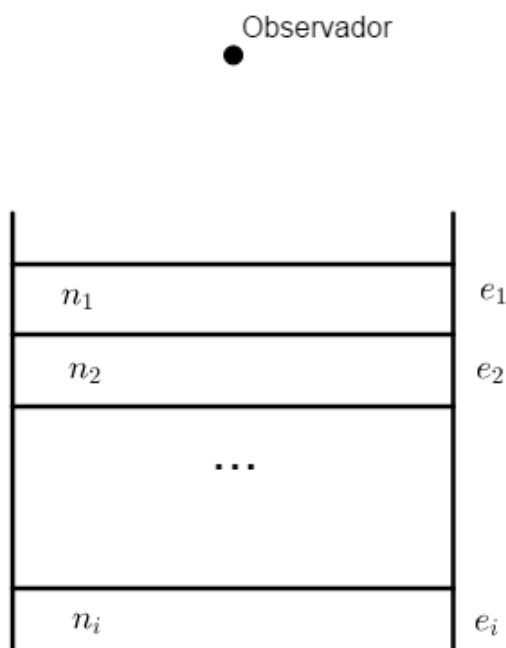
Comentários:

Como o observador está diretamente sobre a moeda, está se tratando de ângulos muito pequenos, portanto utiliza-se a equação 1.3.5.

$$y_{ap} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 3 \text{ m}$$

Exemplo:

Considere um recipiente, conforme a figura a seguir, no qual se tem várias camadas de diferentes índices de refração ( $n_1, n_2, \dots, n_i$ ) e espessuras ( $e_1, e_2, \dots, e_i$ ).



Prove que a profundidade aparente do recipiente para um observador olhando verticalmente para baixo, de um meio de índice de refração  $n_0$  é dado por:

$$d_{ap} = e_1 \cdot \frac{n_0}{n_1} + e_2 \cdot \frac{n_0}{n_2} + \dots + e_i \cdot \frac{n_0}{n_i}$$

Comentários:

Aqui ocorre a associação de vários dioptros planos. No primeiro dioptro, ao invés de uma profundidade  $e_1$  até a superfície entre 1 e 2, ocorre uma profundidade aparente dada por:

$$e_{1ap} = e_1 \cdot \frac{n_0}{n_1}$$

O mesmo ocorre para cada camada seguinte. Dessa forma, a profundidade final do recipiente é dada por:

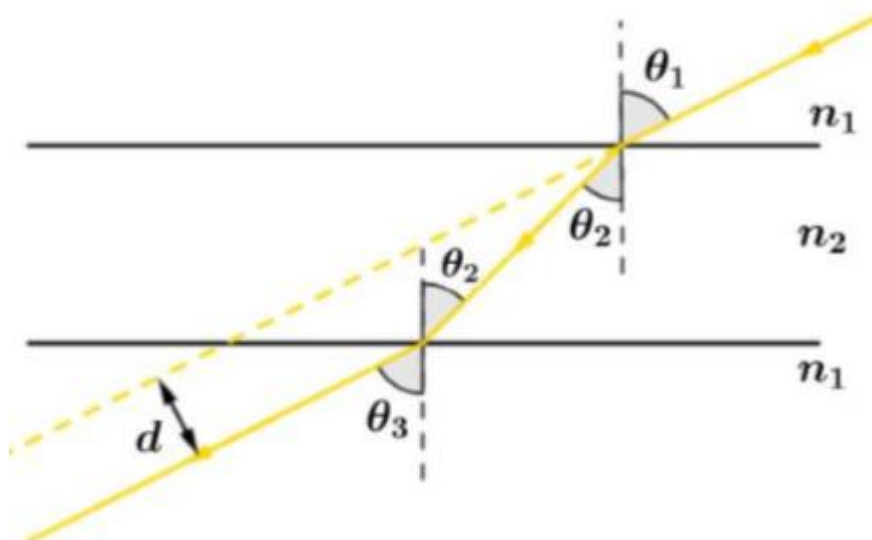
$$d_{ap} = \sum_{i=1} e_i \cdot \frac{n_0}{n_i}$$





## Lâmina de faces paralelas

Uma lâmina de faces paralelas é a associação de dois dioptros planos com superfícies paralelas. A luz ao passar por uma lâmina de face paralelas sofre dois desvios, como mostra a figura abaixo.



*Desvio em uma lâmina de faces paralelas.*

Usando os princípios da refração estudados anteriormente, chegamos na seguinte relação (A demonstração será omitida neste tópico).

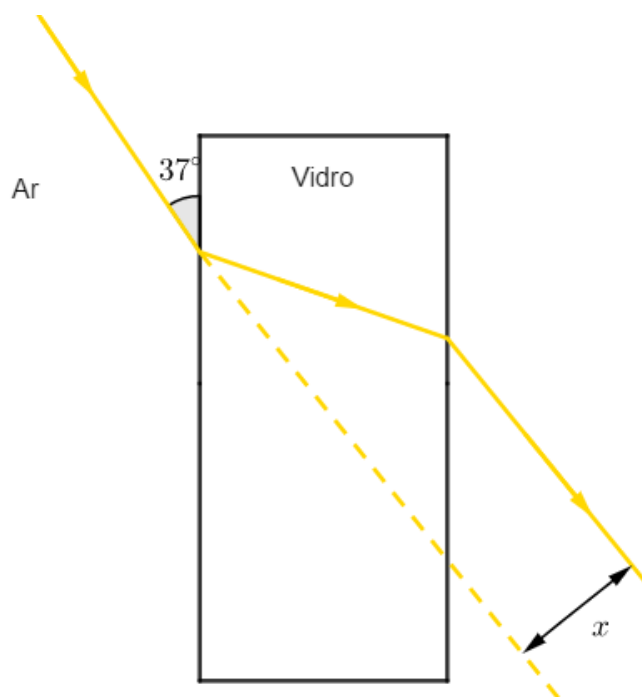
$$d = \frac{e \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{cos}\theta_2}$$

A fórmula acima fornece o desvio do raio luz ao refratar por uma lâmina de faces paralelas.

Exemplo:

Determine o desvio  $x$  se o raio de luz monocromático atravessa uma lâmina de faces paralelas de 20 cm de espessura. Adote  $n_{\text{vidro}} = 1,6$ .





Comentários:

Para a resolução da questão é necessário encontrar  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Da figura, tem-se que  $\theta_1 = 53^\circ$ .  
Aplicando a Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \text{sen } \theta_1 = n_{vidro} \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

Agora, calculando  $\text{sen } (\theta_1 - \theta_2)$ :

$$\text{sen } (53^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 53^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 53^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cong 0,393$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$$

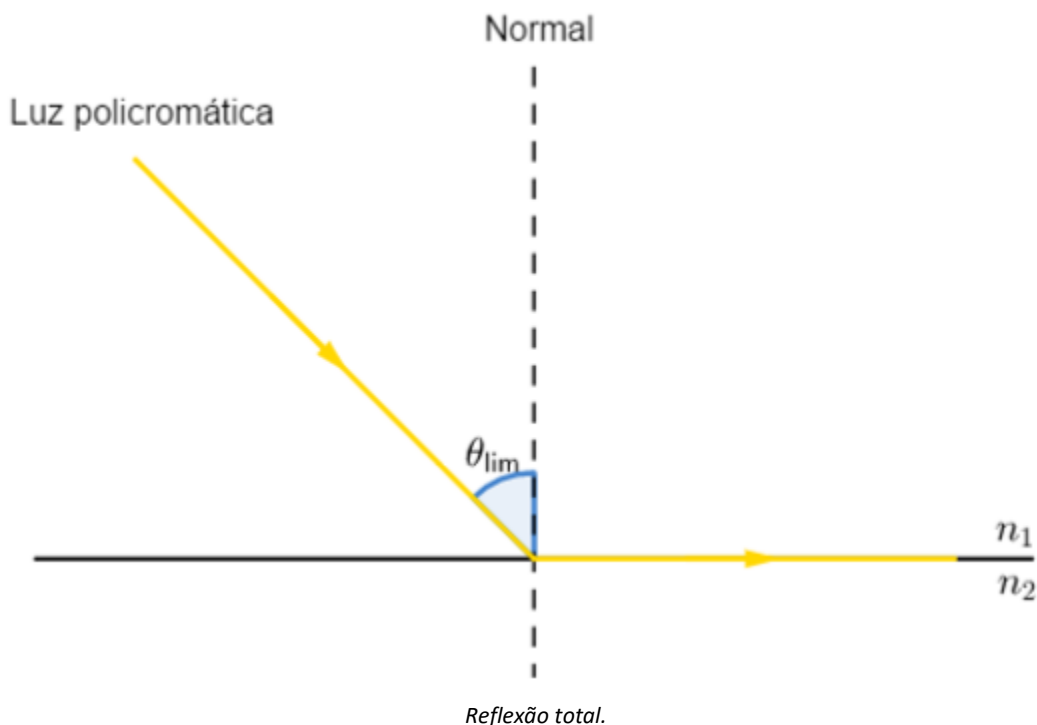
Assim:

$$x = 0,2 \cdot \frac{0,393}{0,866} = 0,091 \Rightarrow \boxed{x \cong 9,1 \text{ cm}}$$



## Reflexão total e ângulo limite

Como visto, a luz ao passar de um meio mais refringente para um meio menos refringente afasta-se da normal. Existe um ângulo limite de incidência para o qual a luz refratada irá se afastar suficientemente da normal de modo que não possa mais ser detectada. Isto ocorre quando o ângulo refratado tiver um ângulo em relação à normal que se aproxima de 90°. Veja a figura 41:



$$\text{sen}\theta_{\text{lim}} = \frac{n_1}{n_2}$$

O fenômeno caracterizado por um ângulo de incidência maior ou igual ao ângulo limite direcionado da superfície mais refringente para a menos refringente é conhecido como reflexão total.

### Observações:

- A reflexão total ocorre somente na passagem de luz do meio mais refringente para o menos refringente.

$$n_2 > n_1$$

- Diz-se que o ângulo limite é o ângulo para o qual o raio refratado tende a se propagar rente à superfície, pois é impossível que ele realmente o faça. O feixe de luz apresenta uma espessura que, mesmo que muito pequena, é diferente de zero. Caso a mudança do meio de propagação forçasse a luz a se propagar rente à superfície, sua espessura iria reduzir-se a zero e haveria uma degeneração do feixe.

Exemplo:



Considere dois meios homogêneos (1) e (2), homogêneos, separados por uma superfície plana. A velocidade de propagação da luz monocromática amarela nos meios é  $v_1 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  e  $v_2 = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Determine o ângulo limite desse par de meios para a luz dada.

Comentários:

Como  $v_1 < v_2$ , sabe-se que o meio 1 é mais refringente. Portanto, o ângulo limite ocorre do meio 1 para o meio 2 e é dado por:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta_{\text{lim}} &= \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \\ \theta_{\text{lim}} &= 37^\circ \end{aligned}$$

Exemplo:

(Mackenzie-SP) Um raio de luz que se propaga num meio A atinge a superfície que separa esse meio de um meio B e sofre reflexão total. Podemos afirmar que:

- A é mais refringente do que B e o ângulo de incidência é menor que o ângulo limite.
- A é mais refringente do que B e o ângulo de incidência é maior que o ângulo limite.
- A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é maior que o ângulo limite.
- A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é menor que o ângulo limite.
- A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é igual ao ângulo limite.

Comentários:

Havendo reflexão total, sabe-se que o raio se propagava do meio mais refringente para o menos refringente. Dessa forma, A é mais refringente que B. Se houve reflexão total, conclui-se também que o ângulo de incidência necessariamente era maior ou igual ao ângulo limite. Portanto, a alternativa correta é letra B.

Exemplo:

(ITA-1995)

Uma gaivota pousada na superfície da água, cujo índice de refração em relação ao ar é  $n = 1,3$ , observa um peixe que está exatamente abaixo dela, a uma profundidade de  $1 \text{ m}$ . Que distância, em linha reta, deverá nadar o peixinho para sair do campo visual da gaivota?

- $0,84 \text{ m}$
- $1,2 \text{ m}$
- $1,6 \text{ m}$
- $1,4 \text{ m}$
- o peixinho não conseguirá fugir do campo visual da gaivota.

Comentários:

Primeiramente deve-se analisar se será possível que o peixe fuja do campo visual. Para que isso ocorra, não deve chegar luz do objeto (o peixinho) até o observador (gaivota), ou seja, é necessário que



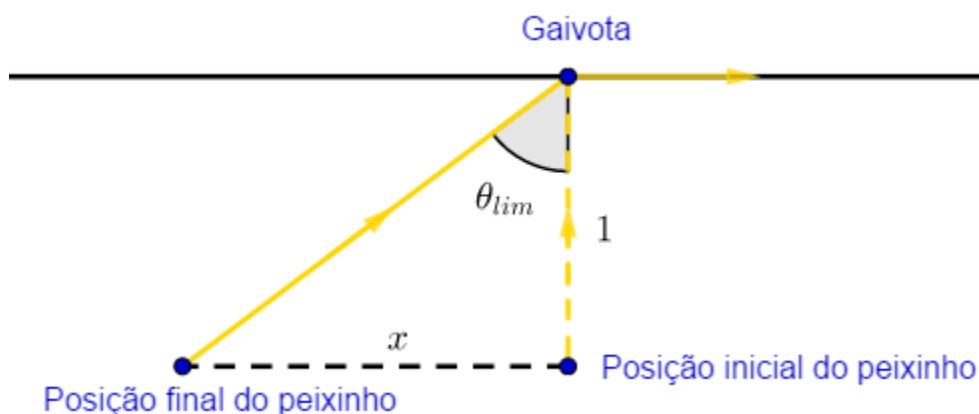
ocorra reflexão total da luz que sai da água e passa para o ar. Isso é possível pois se propagará do meio mais refringente para o meio menos refringente.

O ângulo limite nessa propagação é dado por:

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{1}{1,3}$$

$$\text{cos } \theta_{lim} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1,3}\right)^2} = \sqrt{\frac{0,69}{1,69}}$$

Portanto,  $\text{tg } \theta_{lim} = \frac{1}{\sqrt{0,69}}$ . A situação está representada na figura a seguir.



Portanto:

$$\frac{x}{1} = \text{tg } \theta_{lim} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{0,69}} \cong 1,2 \text{ m}$$

Exemplo:

(ITA-1980) Um raio luminoso incide sobre um cubo de vidro, como indica a figura. Qual deve ser o valor do índice de refração do vidro, para que ocorra a reflexão total na face vertical?

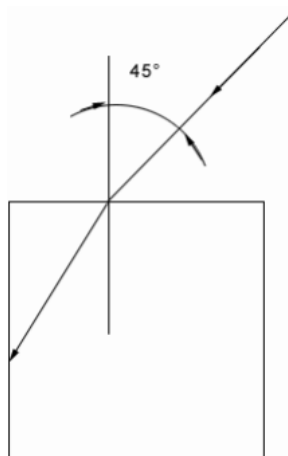
a)  $n > \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $n < \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $n > \frac{\sqrt{3}}{2}$

d)  $n < \frac{\sqrt{2}}{2}$

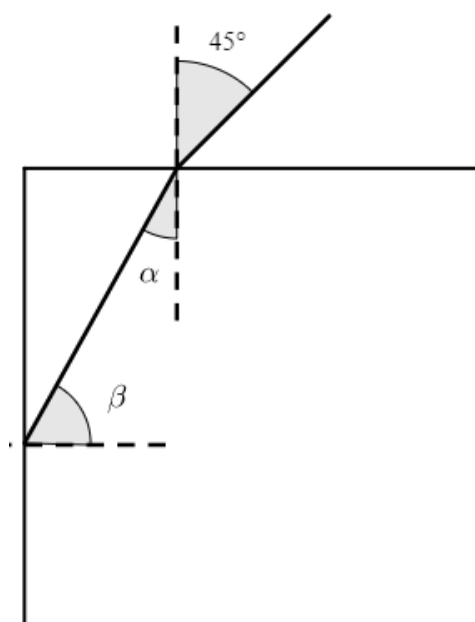
e)  $n > \frac{\sqrt{2}}{2}$



Comentários:



Para que ocorra reflexão total, o ângulo incidente sobre a face esquerda deve ser maior ou igual ao ângulo limite. Este ângulo é complementar do ângulo do raio refratado com a normal na face superior.



Portanto:

$$\text{sen } \beta > \text{sen } \theta_{lim} = \frac{1}{n}$$

Mas:

$$\text{sen } \beta = \cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$$

E:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{n} \cdot \text{sen } 45^\circ$$

Unindo tudo:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot n^2}} > \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2 \cdot n^2} > \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 > \frac{3}{2 \cdot n^2} \Rightarrow n^2 > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{n > \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Portanto, letra A.



## Arco-íris e miragem

Existem fenômenos na natureza que são explicados com base no que foi visto até agora nesta aula. São exemplos disso as miragens, efeito de Fata Morgana, arco-íris e a posição aparente de astros.

### Posição aparente dos astros

A atmosfera terrestre apresenta um gradiente de temperatura e pressão que gera uma variação de densidade do ar ao longo de sua extensão. Essa variação de densidade impede que a atmosfera seja considerada um meio homogêneo, pois, haverá uma variação do índice de refração entre posições de diferentes altitudes na atmosfera. Como regra geral, a densidade aumenta quanto mais próximo da superfície, assim, a refringência também. Como ocorre um aumento de refringência, por Lei de Snell, verifica-se que o raio irá se aproximar gradualmente da normal. Visualmente, a situação está representada a seguir.

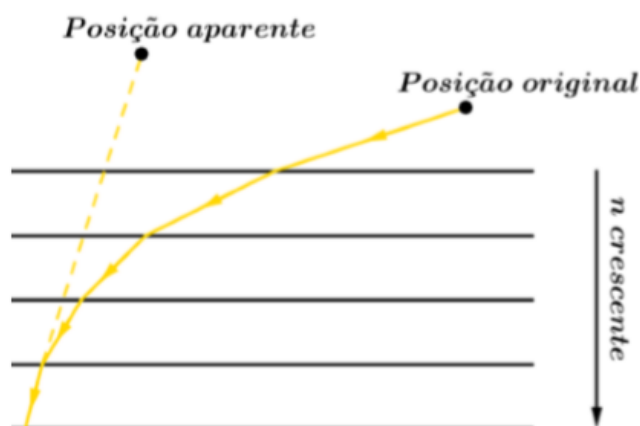
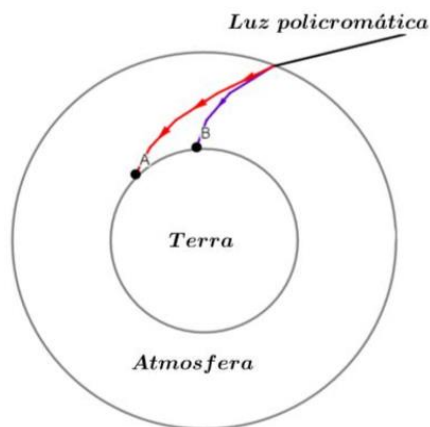


Figura 2: Refração da luz na atmosfera e a posição aparente dos astros.

Como pode-se observar pela imagem, no sentido crescente de refringência, ocorre uma aproximação do raio de luz à reta normal. Esta variação é gradual e bem lenta ao longo da extensão da atmosfera, mas faz com que não se observe a posição real dos astros.

Esta estratificação em conjunto com a diferença de índices de refração para cada comprimento de onda é utilizada para a explicação do nascer e do pôr-do-Sol serem avermelhados. O índice de refração para o vermelho é menor, seu ângulo refratado é maior. Portanto, o vermelho chega a distâncias que o azul e o violeta não são capazes, no momento do nascer e do pôr do Sol, de chegar até o observador. Visualmente:



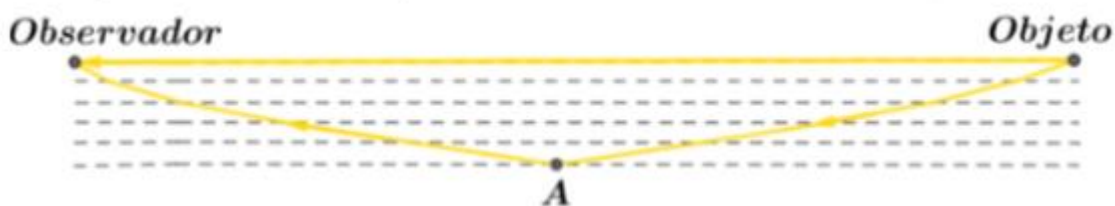


Refração na atmosfera.

No ponto A, estaria ocorrendo o pôr do Sol, enquanto em B ainda seria de dia.

### 6.6.2 Miragens e o efeito Fata Morgana

As miragens e o efeito de Fata Morgana são fenômenos causados também pela não homogeneidade da atmosfera terrestre. Entretanto, ao invés do objeto se encontrar fora da atmosfera e o observador dentro, como é o caso do subtópico anterior, neste caso o objeto e observador encontram-se dentro da atmosfera. A miragem ocorre sobretudo em locais em que, próximo do solo, a temperatura eleva-se drasticamente. Esse aumento da temperatura faz com que as camadas de ar mais próximas do solo tenham menor densidade, e, por conseguinte, menor índice de refração. A luz ao propagar-se do meio mais refringente para o menos refringente afasta-se da linha normal até o caso limite em que ocorre reflexão total. Este é o fenômeno da miragem, a luz emitida para baixo pelo objeto é sucessivamente refratada, sofre uma eventual reflexão total e após mais refrações chega ao observador, de modo que o observador pode ver até mesmo duas imagens.



Representação gráfica da miragem. A reflexão total em A.

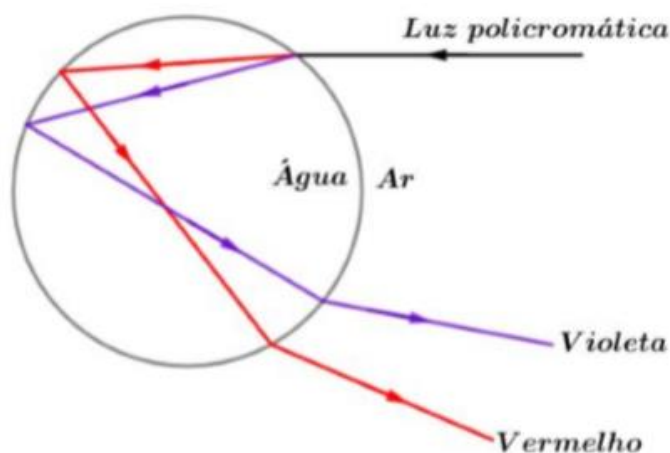
O efeito de Fata Morgana é semelhante, mas ocorre em regiões com temperaturas muito frias próximo à superfície da Terra, onde a refração aumenta conforme aproxima-se do solo. As duas imagens formadas são a obtida por um raio de luz que vai diretamente ao observador e outro que irá por cima, sofrendo refrações e uma reflexão total, chegando até o observador. Portanto, o raio de luz representado na figura 43 estaria percorrendo um caminho por cima no caso do Fata Morgana.





## Arco-íris

O fenômeno do arco-íris acontece em ambientes de alta umidade, pois, é produzido a partir da refração e posterior reflexão total do dióptro esférico formado por uma gotícula de água no ar, como representado na figura abaixo.



*Formação do arco-íris.*

Na figura acima, representou-se somente os raios de luz vermelha e violeta, mas entre esses há a ocorrência de todas as cores do espectro do visível, produzindo o arco-íris na ordem conhecida.

Exemplo:

Com respeito ao fenômeno do arco íris, pode-se afirmar que:

- I. Se uma pessoa observa um arco íris a sua frente, então o Sol está necessariamente à oeste.
- II. O Sol sempre está à direita ou à esquerda do observador.
- III. O arco-íris se forma devido ao fenômeno de dispersão da luz nas gotas de água.

- a) Todas são corretas.
- b) Somente I é falsa.
- c) Somente III é falsa.
- d) Somente II e III são falsas.
- e) Somente I e II são falsas.

Comentários:

O arco-íris ocorre devido à dispersão da luz e reflexão total no interior das gotas de água. Portanto, é necessário que o indivíduo esteja entre o sol e as gotas para que após os raios sofrerem reflexão total cheguem até ele.

- I. Falsa.



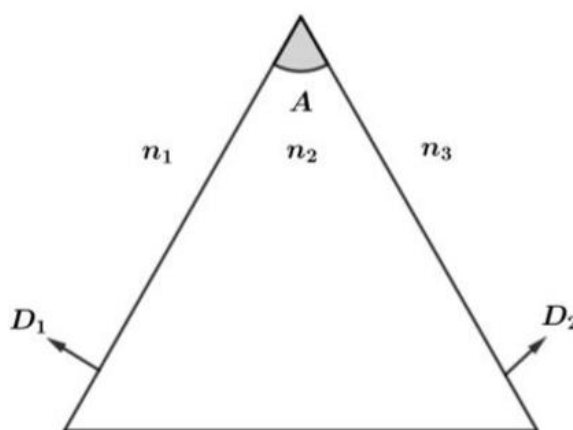
II. Falsa.

III. Verdadeiro.

Alternativa E.

## Prismas

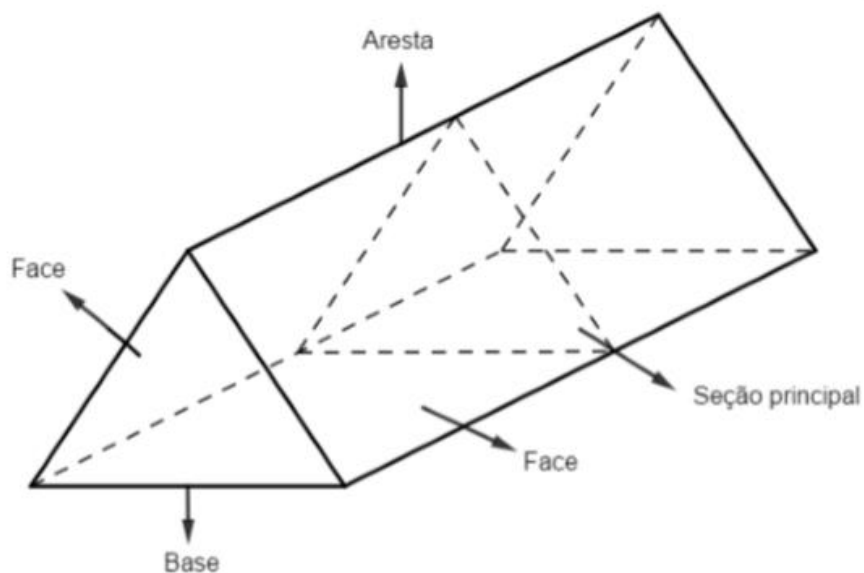
Um prisma óptico é composto por dois dioptros planos não paralelos, como mostrado na figura abaixo.



*Corte transversal de um prisma.*

A visão bidimensional de um prisma é chamada de seção principal. O ângulo  $A$  é chamado de ângulo de abertura. Os dioptros 1 e 2 são chamados de faces do prisma e o cruzamento entre eles é chamado de aresta do prisma. Na figura 50, uma representação tridimensional de um prisma óptico.

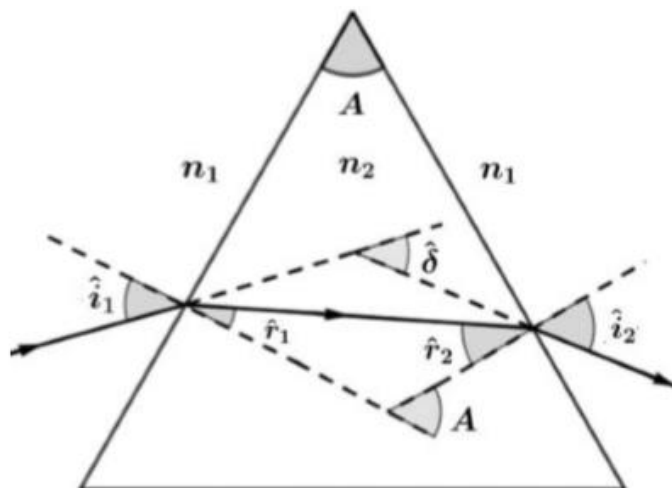




Vista em perspectiva de um prisma.

### 6.7.1 Equações do prisma

Para analisar o efeito do prisma sobre a luz, vamos utilizar como base a figura 51 abaixo.



Ângulos no prisma.

Primeiramente deve-se notar que, por construção, surge o ângulo  $A$  no cruzamento entre as retas normais. A continuação da trajetória do raio incidente e do raio emergente é chamado de desvio ( $\delta$ ). Da figura, juntamente a Lei de Snell, tiram-se as duas relações principais dos ângulos:

$$A = r_1 + r_2$$

$$\delta = r_1 + r_2 - A$$



Não se esqueça das relações de Snell. Elas ainda são válidas para as fronteiras.

Face esquerda do prisma:

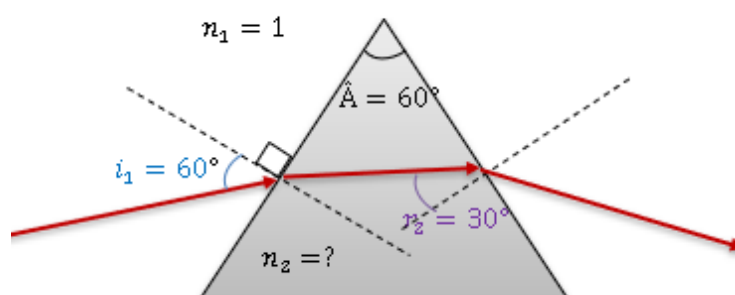
$$n_1 \cdot \text{sen}i_1 = n_2 \cdot \text{sen}r_1$$

Face direita do prisma:

$$n_2 \cdot \text{sen}r_2 = n_1 \cdot \text{sen}i_2$$

Exemplo:

Um prisma tem ângulo de abertura de  $60^\circ$ . Uma luz incide sobre o prisma como mostrado na figura abaixo.



Determine o índice de refração do prisma.

Comentário:

Primeiramente, iremos determinar o valor de  $r_1$ :

$$A = r_1 + r_2$$

$$60 = r_1 + 30$$

$$r_1 = 30^\circ$$

Faremos a lei de Snell para a face esquerda do prisma:

$$n_1 \cdot \text{sen}i_1 = n_2 \cdot \text{sen}r_1$$

$$1 \cdot \text{sen}60^\circ = n_2 \cdot \text{sen}30^\circ$$

$$n_2 = \sqrt{3}$$



## PRISMAS DE REFLEXÃO TOTAL

Como o próprio nome diz, trata-se de prismas onde ocorre reflexão total. A principal utilização deste tipo de prisma é a substituição de espelhos planos, quando possível, pois, diferentemente do espelho plano, não possui um *espelho de prata* que se danifica facilmente. Abaixo, mostram-se os dois principais tipos de prismas de reflexão total.

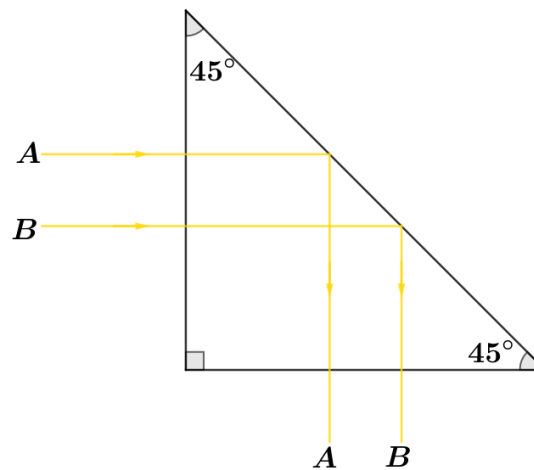


Figura 3:

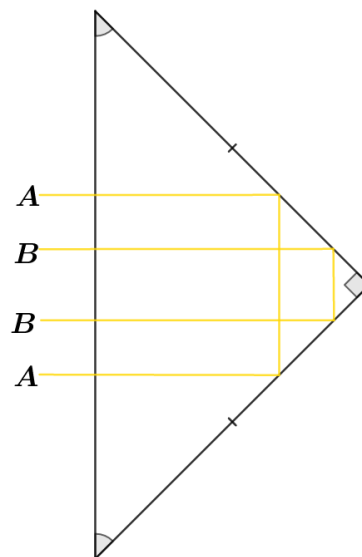


Figura 4

Deve-se notar a ordem entre os raios que entram e os raios que saem do prisma. Se realizar-se uma combinação de dois prismas da figura 52, ou somente um prisma da figura 53, ocorre uma inversão da imagem. Quanto ao índice de refração mínimo para que tais prismas, inseridos no ar, funcionem de acordo com as imagens, calcula-se através da aplicação da Lei de Snell considerando a incidência de  $45^\circ$ , obtido por construção, como sendo o ângulo limite. Dessa forma:

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{n_{ar}}{n_{prisma}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n_{prisma} \geq \sqrt{2}$$



Este resultado é válido para ambos os prismas, mas está restrito ao caso em que estes se encontram imersos no ar.

## DESVIO MÍNIMO

Como visto no final do item *Equações do prisma*, o desvio depende dos ângulos incidente, emergente e de abertura. Entretanto, o ângulo emergente é função do ângulo incidente e do índice de refração relativo. Portanto, os três fatores que influenciam o desvio são: o ângulo incidente, o ângulo de abertura e o índice de refração.

Portanto, trabalhando-se a equação, tem-se:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A}$$

O desvio mínimo ocorre quando  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2$ . Isto é demonstrado a partir da equação.

$$\hat{\delta} = \left( \sqrt{\hat{i}_1^2} - \sqrt{\hat{i}_2^2} \right) + 2\sqrt{\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2} - \hat{A}$$

Este valor é mínimo quando  $\left( \sqrt{\hat{i}_1^2} - \sqrt{\hat{i}_2^2} \right) = 0$ , ou seja,  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2$ . Substituindo na equação:

$$\hat{i} = \frac{\hat{\delta}_{\min} + \hat{A}}{2}$$

Com isto, tem-se também que  $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$ . Mas,  $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ , logo:

$$\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$$

Portanto, substituindo-se isto na Lei de Snell (sem aproximações para-axiais) e adotando  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = \hat{i}$ :

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\text{sen} \left( \frac{\hat{\delta}_{\min} + \hat{A}}{2} \right)}{\text{sen} \frac{\hat{A}}{2}}$$

A equação acima é conhecida como fórmula de Newton e permite obter experimentalmente o índice de refração do prisma. Entretanto, para o escopo do vestibular, considerando a aproximação para-axial, utilizamos a expressão simplificada:

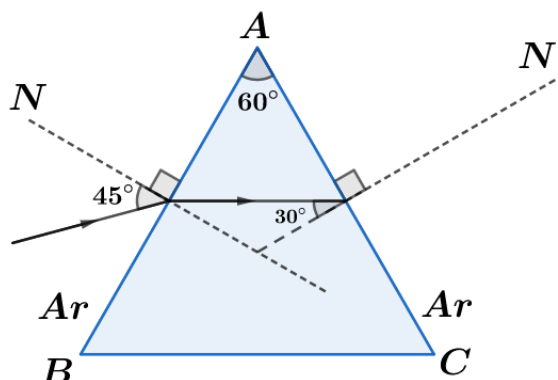
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\hat{\delta}_{\min}}{\hat{A}} + 1 \Rightarrow \hat{\delta}_{\min} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \hat{A}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



Exemplo:

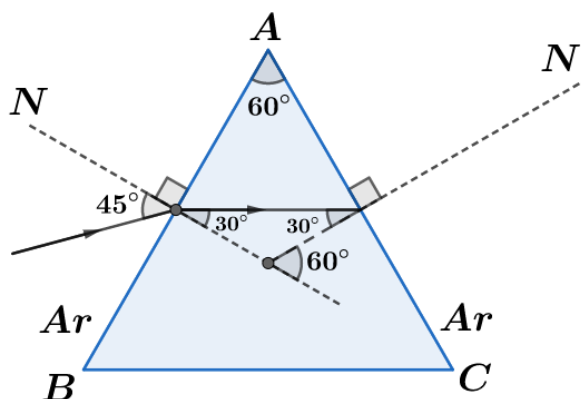
Um prisma de vidro, cujo ângulo de refração é  $60^\circ$ , está imerso no ar. Um raio de luz monocromática incide em uma das faces do prisma sob ângulo de  $45^\circ$  e, em seguida, na segunda face sob ângulo de  $30^\circ$ , como está representado no esquema.



Calcule o índice de refração do vidro em relação ao ar, para essa luz monocromática.

Comentários:

Sabendo-se que o ângulo de refração é de  $60^\circ$ , pode-se acrescentar alguns dados à figura.



Assim, aplicando a Lei de Snell para a primeira refração:

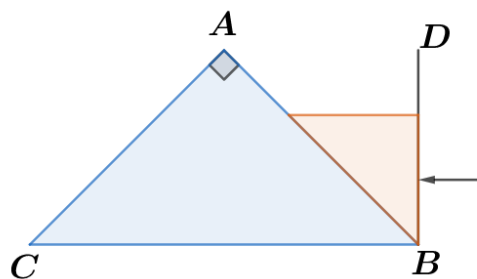
$$n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{vidro} \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$\boxed{\frac{n_{vidro}}{n_{ar}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}}$$

Exemplo:

(ITA-SP) Um prisma de vidro, de índice de refração  $n = \sqrt{2}$ , tem por secção normal um triângulo isóscele ABC no plano vertical. O volume de secção transversal ABD é mantido cheio de um líquido de índice de refração  $n' = \sqrt{3}$ . Um raio incide normalmente à face transparente da parede vertical BD e atravessa o líquido. Determine o ângulo de refração do raio que emerge pela face AC.





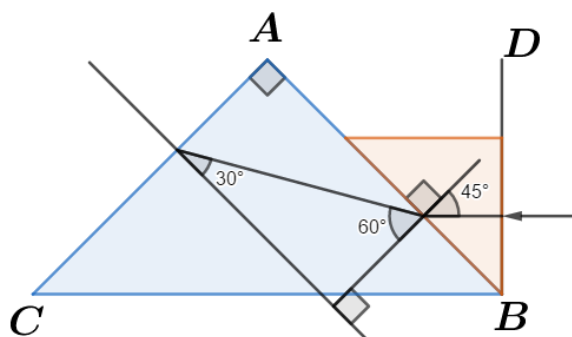
Comentários:

Primeiramente, o ângulo de incidência sobre a face AB é de  $45^\circ$ . Aplicando a Lei de Snell:

$$n_{liq} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{vidro} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{r} = 60^\circ$$

Assim, tem-se:



Assim, para encontrar o ângulo do raio emergente:

$$n_{vidro} \cdot \text{sen } 30^\circ = n_{ar} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \text{sen } \hat{r} \Rightarrow \boxed{\hat{r} = 45^\circ}$$

Ou seja, o raio sai paralelo à BC.

## CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA REFRAÇÃO

É condição necessária, mas não suficiente, que  $\hat{A} \geq 2 \cdot \hat{L}$ , onde  $\hat{L}$  é o ângulo limite. A demonstração está abaixo:

$$\hat{r}_2 \leq \hat{L}$$

Mas, como  $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ :

$$\hat{A} - \hat{r}_1 \leq \hat{L}$$

$$\hat{r}_1 \geq \hat{A} - \hat{L} \Rightarrow \text{sen } \hat{r}_1 \geq \text{sen } (\hat{A} - \hat{L})$$

E, como  $\text{sen } \hat{r}_1 \leq 1$ :





$$\frac{n_1}{n_2} \geq \frac{n_1}{n_2} \cdot \text{sen } \hat{r}_1 \geq \text{sen} (\hat{A} - \hat{L})$$

Só que  $\frac{n_1}{n_2} = \text{sen } \hat{L}$ , portanto:

$$\text{sen } \hat{L} \geq \text{sen} (\hat{A} - \hat{L})$$

$$\hat{L} \geq \hat{A} - \hat{L}$$

$$\hat{A} \leq 2 \cdot \hat{L}$$



## DIOPTRO ESFÉRICO

Um dioptró esférico é um sistema formado por dois meios homogêneos e transparentes separados por uma superfície esférica.

### POSIÇÃO DA IMAGEM

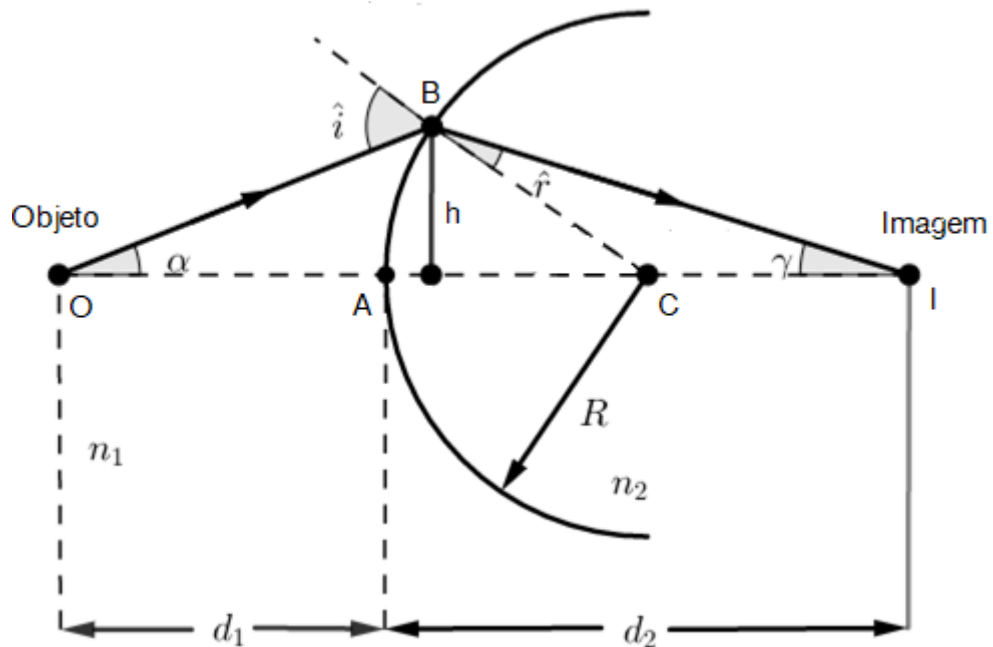


Figura 5: Trajetória da luz em um dioptró esférico.

Para encontrar a relação entre  $d_1$  e  $d_2$ , primeiro utiliza-se a Lei de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Aplicando-se Lei dos Senos nos triângulos OBC e BCI:

$$\frac{R}{\text{sen } \alpha} = \frac{d_1 + R}{\text{sen } \hat{i}}$$

$$\frac{R}{\text{sen } \gamma} = \frac{d_2 - R}{\text{sen } \hat{r}}$$

Substituindo na Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \frac{d_1 + R}{R} \cdot \text{sen } \alpha = n_2 \cdot \frac{d_2 - R}{R} \cdot \text{sen } \gamma$$

Reorganizando:

$$\frac{n_1 \cdot \text{sen } \alpha}{n_2 \cdot \text{sen } \gamma} = \frac{d_2 - R}{d_1 + R} \quad (\text{eq. 1.4.1})$$

Utilizando-se a aproximação para-axial (ângulos suficientemente pequenos tal que  $\text{sen } \theta \cong \text{tg } \theta$ ):

$\theta \cong$



$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} \cong \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \gamma} = \frac{\frac{h}{d_1}}{\frac{h}{d_2}} = \frac{d_2}{d_1}$$

Substituindo na equação 1.4.1:

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2 - R}{d_1 + R}$$

Rearranjando:

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

É comum que esta fórmula apareça como:

$$\frac{n_{vem}}{p} + \frac{n_{vai}}{p'} = \frac{n_{vem} - n_{vai}}{R}$$

Em que “vem” e “vai” se referem à trajetória da luz. “Vem” estará sempre do lado da luz incidente e “vai” sempre do lado da luz refratada.

**Observações:**

- $p > 0$  sempre. O objeto define qual o lado que se adota a “luz incidente”;
- $p' > 0$  se a imagem se encontra do lado oposto do objeto, ou seja, do lado da “luz refratada”, caso contrário será negativa (imagem virtual);
- $R > 0$  para uma superfície côncava e  $R < 0$  para superfície convexa. A definição de superfície côncava ou convexa é feita a partir do referencial a trajetória percorrida pela luz.

## AMPLIAÇÃO DA IMAGEM

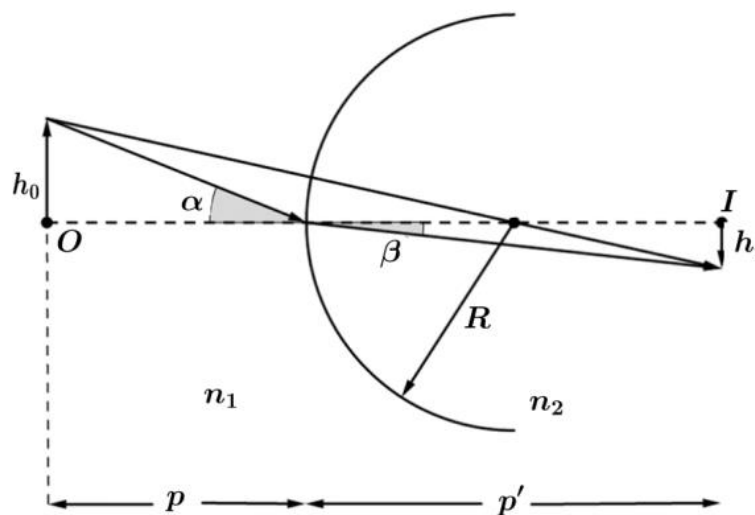


Figura 6: Formação da imagem para um corpo extenso em dióptro esférico.

Com a aproximação para-axial:

$$\text{sen } \alpha \cong \frac{h_o}{p} \text{ e } \text{sen } \beta \cong \frac{h_i}{p'}$$

Utilizando Lei de Snell:



$$n_1 \cdot \frac{h_o}{p} = n_2 \cdot \frac{h_i}{p'} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p'}{p}$$

Como:

$$A = -\frac{h_i}{h}$$

Tem-se:

$$A = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p'}{p}$$

Usualmente, encontra-se esta fórmula como:

$$A = -\frac{n_{vem}}{n_{vai}} \cdot \frac{p'}{p}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



### 11)

Um peixe, no centro de um aquário esférico de raio  $30\text{ cm}$  e a  $20\text{ cm}$  da parede do aquário, é observado por um gato que se encontra à  $40\text{ cm}$  da parede do aquário. A que distância o gato, visualiza o peixe? Qual a ampliação da imagem do peixe? Adote  $n_{ar} = 1$  e  $n_{\text{água}} = \frac{4}{3}$ .

#### Comentários:

Para o gato visualizando o peixe:

$$p = 20\text{ cm}$$

$$n_{vem} = \frac{4}{3}$$

$$n_{vai} = 1$$

$$R = 30\text{ cm}$$

Repare que  $n_{vem}$  foi adotado baseado no objeto, neste caso o peixe e  $R$  é positivo, pois, para o peixe como objeto, a superfície é côncava.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{90}$$

$$p' = -\frac{90}{5} \cong -18\text{ cm}$$

Como o gato está à  $40\text{ cm}$  do aquário, ele enxerga o peixe à  $58\text{ cm}$ .



$$A = -\frac{n_{vem}}{n_{vai}} \cdot \frac{p'}{p} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{-18}{20} = 1,2$$

## LENTE DELGADAS

Uma lente é um dos instrumentos ópticos mais comuns no dia-a-dia. As lentes estão presentes desde óculos até instrumentos de observação sofisticados. A última etapa do curso de lentes delgadas consiste no estudo de instrumentos ópticos formados pela associação de lentes.

Uma lente consiste na associação de dois dioptrios, sendo pelo menos um deles esférico. O tipo de lente mais comum são as chamadas **lentes delgadas**, que consistem na associação de dois dioptrios com distância muito pequena entre eles, de modo que a espessura da lente pode ser desprezada.

## NOMENCLATURA E PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DAS LENTES DELGADAS

As lentes são divididas em dois tipos de acordo com os tipos de dioptrios presentes. São elas:

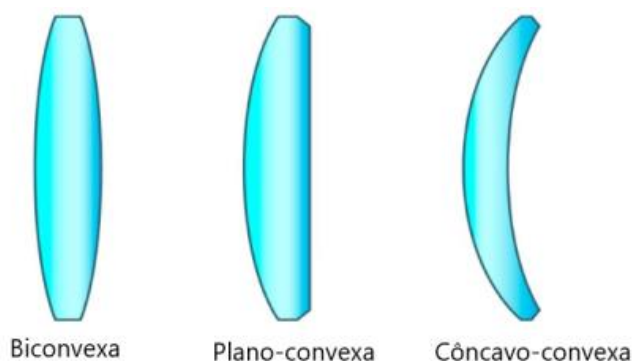


Figura 7: Lentes de bordas finas

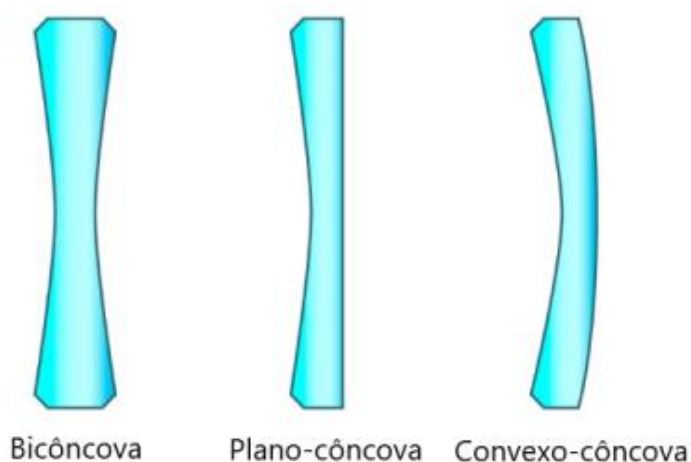


Figura 8: Lentes de bordas grossas

A separação em lentes de bordas finas e grossas é intuitiva. Quanto à nomenclatura, é uma combinação do tipo de cada dioptrio, sendo o primeiro nome aquele do dioptrio cujo raio é maior, considera-



se que o dioptra plano tem raio tendendo à infinito. O tipo do dioptra é sempre definido com base em um observador externo ao sistema. Na figura abaixo, estão representados os principais elementos geométricos de uma lente delgada:

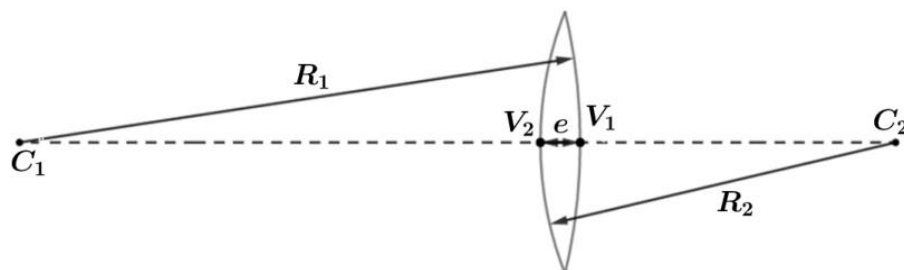


Figura 9: Principais elementos geométricos de uma lente delgada

$V_1$  e  $V_2$  são os vértices de cada lente,  $R_1$  e  $R_2$  os raios,  $C_1$  e  $C_2$  os centros ópticos e  $e$  a espessura da lente.

## COMPORTAMENTO ÓPTICO DAS LENTES DELGADAS

As lentes delgadas são classificadas também com base no seu comportamento óptico, podendo ser: *lentes convergentes* ou *lentes divergentes*. Para diferenciá-las basta observar o efeito delas sobre um feixe de raios paralelos. As lentes convergentes fazem os raios refratados convergirem em um só ponto. As lentes divergentes fazem os raios refratados divergirem, como se partissem de um só ponto. Esses dois pontos são conhecidos como **focos principais** das lentes. Ambos os comportamentos e seus focos principais são expostos na figura 23, abaixo.

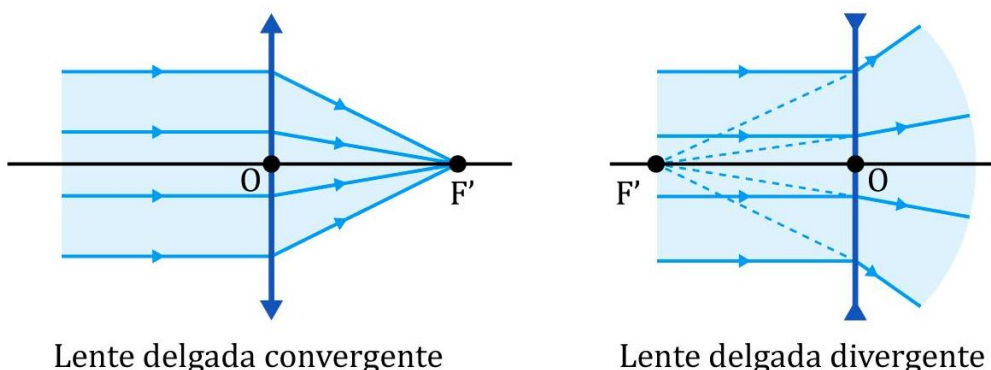


Figura 10: Trajetória do feixe de luz passando por uma lente.

É usual a representação de lentes como um segmento de reta com duas setas baseadas no comportamento da lente. O efeito óptico que a lente produz depende não só de características da lente, mas também do meio no qual essa está inserida.

	$n_{lente} > n_{meio}$	$n_{lente} < n_{meio}$
Bordas finas	Convergente	Divergente
Bordas grossas	Divergente	Convergente



Mais adiante, ao estudar a **equação dos fabricantes de lentes** esta tabela será retomada com mais detalhes.



**20) (FCC-SP)**

Uma lente, feita de material cujo índice de refração absoluto é 1,5, é convergente no ar. Quando mergulhada num líquido transparente, cujo índice de refração absoluto é 1,7, ela:

- a) será convergente
- b) será divergente
- c) será convergente somente para a luz monocromática
- d) se comportará como uma lâmina de faces paralelas
- e) não produzirá nenhum efeito sobre os raios luminosos

**Comentários:**

Como a lente é convergente em um meio com índice de refração menor que o seu, ela deve ser uma lente de bordas finas. Portanto, ao ser inserida em um meio com índice de refração maior que o seu, ela se comportará como uma lente divergente.

**21) (UFJF)**

Com relação a lentes, têm-se as seguintes afirmativas:

- I - Uma lente biconvexa é sempre convergente.
- II - Uma lente bicôncava é sempre divergente.

III - Uma lente bicôncava é naturalmente divergente, mas, se colocada num meio cujo índice de refração é maior que o do material de que é feita a lente, ela se torna convergente

IV - Uma lente biconvexa é naturalmente convergente, mas, se colocada num meio cujo índice de refração é maior que o do material de que é feita, torna-se divergente.

As afirmativas corretas são:

- a) Apenas a afirmativa III.
- b) Apenas a afirmativa IV.
- c) Apenas a afirmativa I.
- d) As afirmativas I, II e IV.
- e) As afirmativas III e IV.

**Comentários:**



As afirmativas I e II estão erradas pois o efeito óptico da lente depende do meio no qual está inserida. Quanto às afirmativas, ao utilizar “naturalmente”, refere-se ao caso em que  $n_{lente} > n_{meio}$ . Portanto ambas estão corretas.

**Letra E.**

## CENTRO ÓPTICO

O centro óptico é o ponto pertencente ao eixo principal pelo qual um raio de luz passa sem sofrer desvio angular. O método para encontrar este ponto foge ao escopo do curso, pois aqui trabalha-se somente com lentes delgadas.

Para as lentes delgadas, adotou-se espessura desprezível, ou seja, os vértices das lentes são tomados como coincidentes, logo, a interseção da lente com o eixo principal será um único ponto. Neste ponto coincidem os dois vértices e o centro óptico, visto que o centro óptico deve pertencer ao “interior” da lente e do eixo principal.

Na figura abaixo, mostra-se o que ocorre com um raio de luz que atravessa o centro óptico.

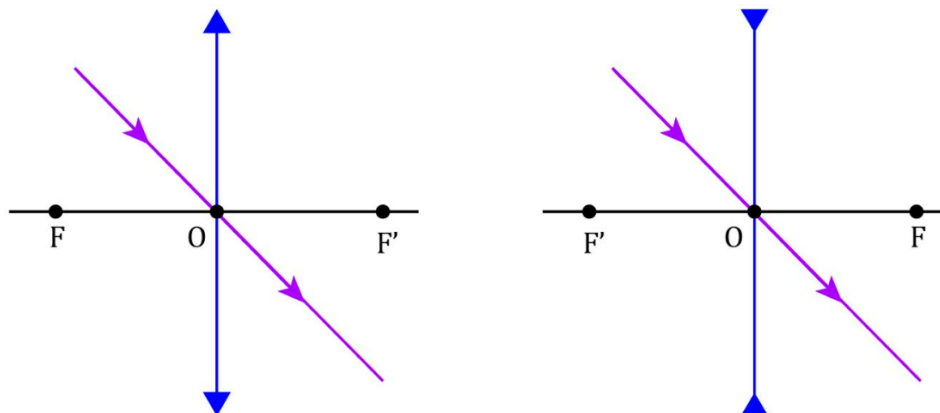


Figura 11: Trajetória de raio de luz passando pelo centro óptico.

É importante perceber que independe da lente ser divergente ou convergente.

## DISTÂNCIA FOCAL E PLANO FOCAL DAS LENTES DELGADAS

O conceito de ponto focal já foi introduzido, resta apenas definir a *distância focal*, esta é a distância dos focos até o centro óptico da lente. Mas, nem sempre os raios serão paralelos ao eixo óptico da lente.

Considerando um feixe de raios paralelos entre si, mas oblíquos ao eixo principal. Estes raios ao passarem por uma lente ainda convergem para um ponto, se ela for convergente, ou divergem de um ponto, se ela for divergente. Este novo ponto é chamado de **foco secundário**. Todos os focos secundários pertencem a um plano que contém o foco principal e é perpendicular ao eixo principal. Visualmente:





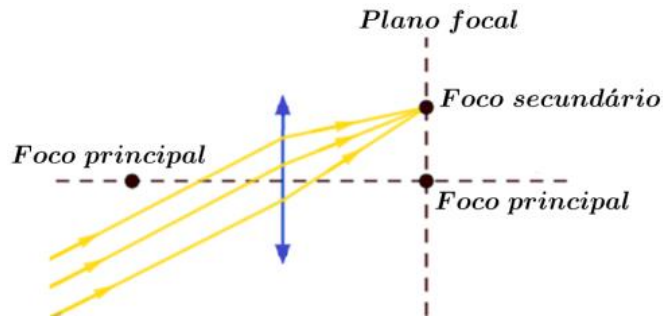


Figura 12: Plano focal e um foco secundário de lente convergente

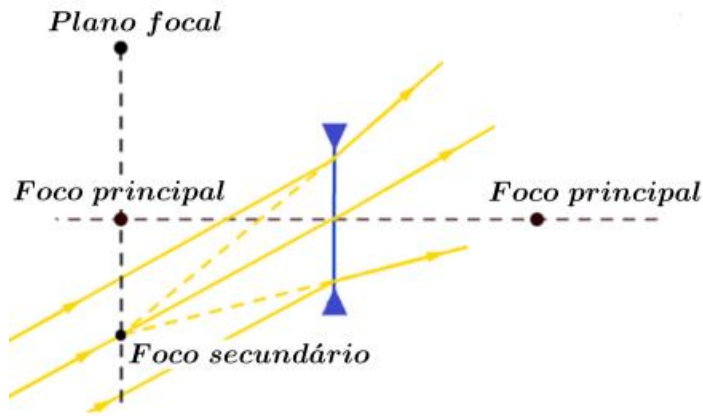
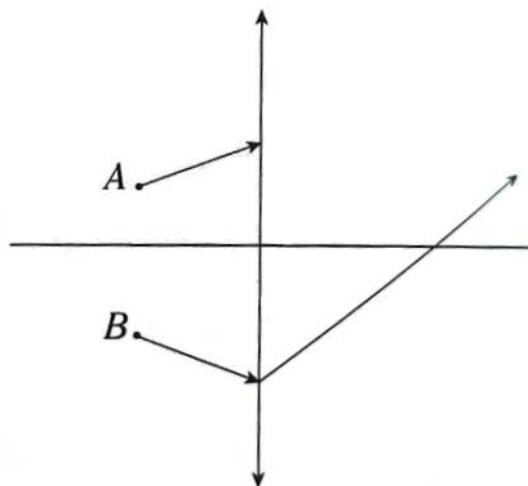


Figura 13: Plano focal e um foco secundário para uma lente divergente.



22)

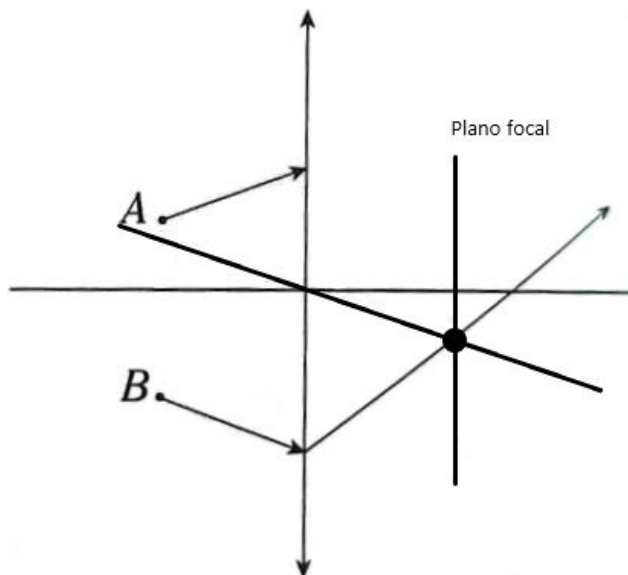
Na figura abaixo, está representado um esquema simplificado de uma lente convergente. Além disso, está indicada a trajetória seguida por dois raios de luz incidentes sobre a lente. Esboce a trajetória que segue o raio A, ao ser refratado pela lente, se é conhecida a trajetória do raio refratado B.



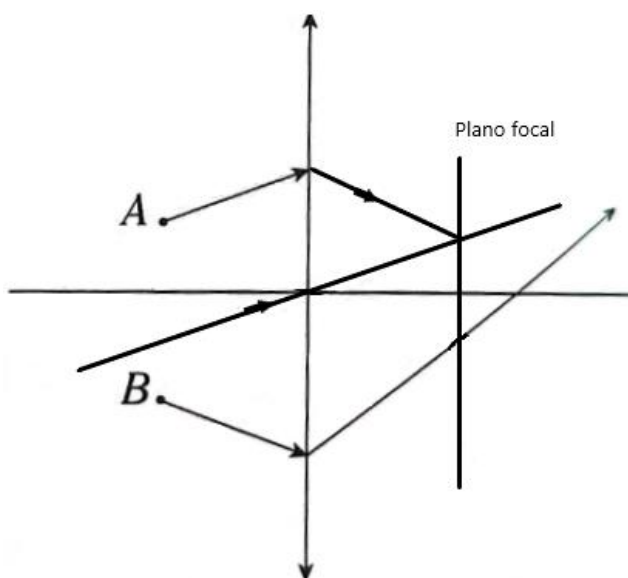
Comentários:



A trajetória do raio de luz A só pode ser determinado se for conhecido o plano focal. Para encontrar o plano focal é necessário começar pela análise do raio B. Sabe-se que ele convergirá com algum raio paralelo a ele exatamente sobre um foco secundário, ou seja, sobre o plano focal. Assim, traça-se um raio paralelo a ele e que cruza o centro óptico, pois, dessa forma, sabe-se a trajetória do raio refratado, visto que o centro óptico não causa desvio angular. Assim:



Agora, tem-se o plano focal. Sabe-se que um raio paralelo a A e A irão convergir sobre o plano focal. Portanto, traça-se novamente um raio que passa pelo centro óptico e, dessa vez, paralelo a A. Assim, o esboço final fica:



PRESTE MAIS  
ATENÇÃO!



## FORMAÇÃO DE IMAGENS EM LENTES DELGADAS

A formação de imagens para uma lente delgada será demonstrada a seguir. A base de tudo são os raios que passam pelos pontos mais importantes da lente, e as posições em que o objeto pode se localizar.

Os raios que serão utilizados são aqueles paralelos ao eixo principal, ou seja, que passam pelo foco e os que passam pelo centro óptico, ou seja, não sofre desvio angular. Quanto às posições, ele pode localizar-se atrás do *ponto antiprincipal* (2 distâncias focais da lente), entre o ponto antiprincipal e o foco, entre o foco e o centro ótico.

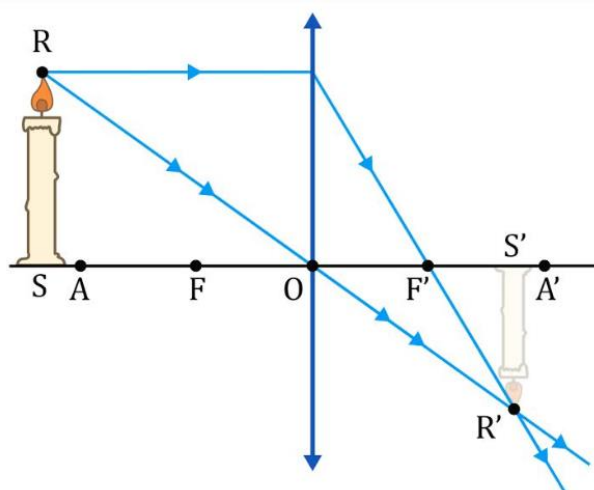


Figura 14: Formação de imagem para lente convergente.

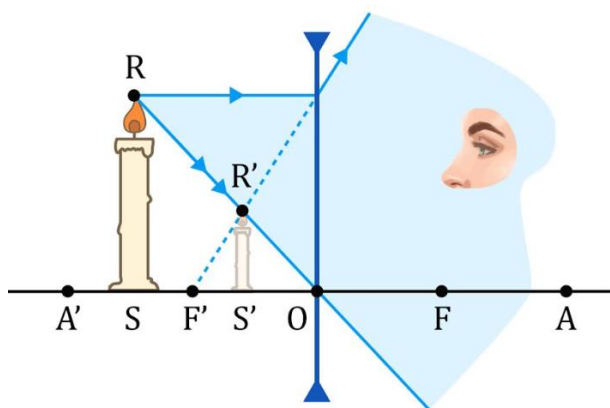


Figura 15: Formação de imagem para uma lente divergente.

A partir de agora, A e A' referem-se respectivamente ao ponto antiprincipal objeto e imagem, F e F' ao foco objeto e foco imagem O ao centro ótico. Pode-se resumir os resultados na seguinte tabela:

Característica óptica da lente	Posição do objeto	Imagem real ou virtual	Imagem direita ou invertida	Imagem maior, menor ou igual ao objeto?
Convergente	Além de A	Real	Invertida	Menor
Convergente	Sobre A	Real	Invertida	Igual



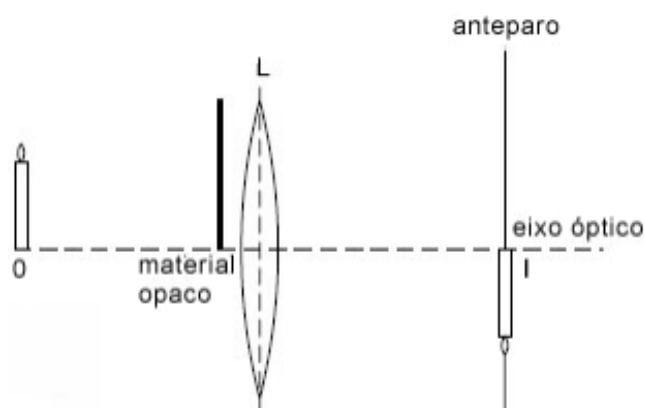
Convergente	Entre A e F	Real	Invertida	Maior
Convergente	Sobre F	-	-	-
Convergente	Entre F e O	Virtual	Direita	Maior
Divergente	Qualquer uma	Virtual	Direita	Menor

É importante observar que, desta tabela, conclui-se que sempre que uma imagem for maior, necessariamente a lente é convergente.



### 23) (ITA-1985)

A figura abaixo representa uma lente delgada  $L$  a qual forma sobre um anteparo, uma imagem real  $I$  de um objeto real  $O$ . A lente é circular esférica e o eixo óptico tem a posição indicada. Suponhamos agora que com um material opaco disposto entre o objeto e a lente bloqueamos toda a parte que corresponde ao semicírculo superior da lente. Nessas condições:

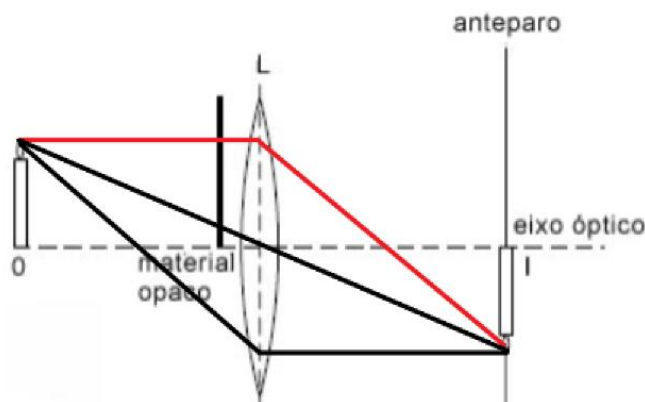


- a imagem desaparece do anteparo
- a imagem fica fora de foco
- a imagem não desaparece, mas fica mais tênue
- a imagem se torna virtual
- nada se pode afirmar se não conhecermos a posição, exata do material opaco.

#### Comentários:

Esboçando a situação, com os raios de luz que chegavam ao anteparo e não chegam mais em vermelho e com os que ainda chegam ao anteparo em preto, tem-se:





Ainda se tem raios de luz chegando à mesma posição, portanto, não se perdeu nitidez, entretanto, a quantidade de luz que chega diminuiu, portanto, perdeu-se intensidade luminosa da imagem. Portanto, a alternativa correta é **letra C**.

#### 24) (UFRGS)

Uma câmera fotográfica, para fotografar objetos distantes, possui uma lente teleobjetiva convergente, com distância focal de 200 mm. Um objeto real está a 300 m da objetiva; a imagem que se forma, então, sobre o filme fotográfico no fundo da câmera é:

- a) real, não-invertida e menor do que o objeto.
- b) virtual, invertida e menor do que o objeto.
- c) real, invertida e maior do que o objeto.
- d) virtual, não-invertida e maior do que o objeto.
- e) real, invertida e menor do que o objeto.

#### Comentários:

O objeto está à uma distância maior que  $2f$  (posição além de A) e a lente é convergente. Portanto: **letra E**.



## EQUAÇÃO DALENTE DELGADA

Três das principais grandezas associadas a uma lente delgada, são: a distância do objeto à lente ( $p$ ), a distância da imagem à lente ( $p'$ ) e a distância focal da lente ( $f$ ). Para relacionar estas medidas, adotar-se-á o chamado **Referencial Gaussiano**. Neste referencial, divide-se o espaço com o plano da lente, o lado da luz incidente e o lado da luz refratada. Com base no lado que se encontram o objeto e a imagem,  $p$  e  $p'$  assumem sinais diferentes.



	Lado da luz incidente	Lado da luz refratada
$p$	Positivo (objeto real)	Negativo (objeto virtual)
$p'$	Negativo (imagem virtual)	Positivo (imagem real)

No referencial de Gauss, também se adotam convenções de sinais para  $h$  e  $h'$ , as alturas das imagens. Para uma imagem direita, o objeto e a imagem têm ordenada de mesmo sinal, enquanto para uma imagem invertida, o objeto e a imagem têm ordenadas de sinais opostos.

E, por último, o referencial gaussiano define que:

Lente divergente	Lente convergente
Distância focal negativa	Distância focal positiva

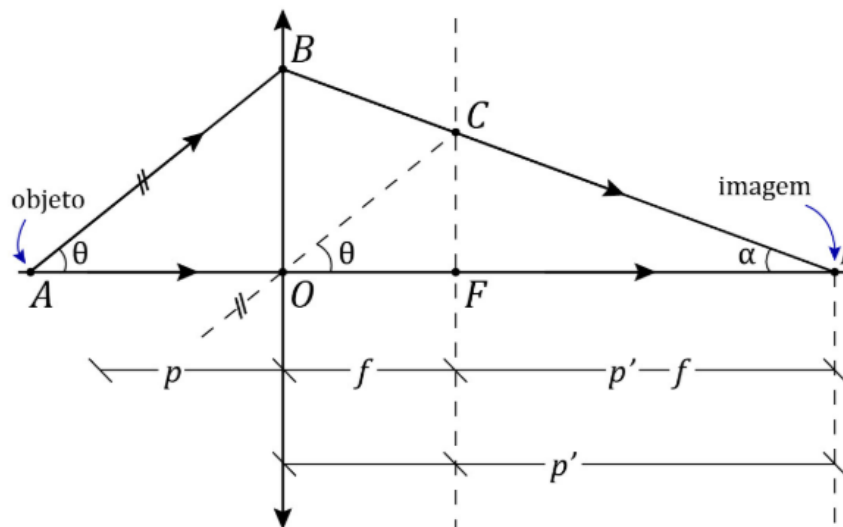


Figura 16: Formação de imagem em lente delgada.

Da figura, tem-se que  $\Delta ABO \sim \Delta OCF$ :

$$\frac{BO}{p} = \frac{CF}{f} \Rightarrow \frac{BO}{CF} = \frac{p}{f}$$

E,  $\Delta EIO \sim \Delta PFI$ :

$$\frac{BO}{CF} = \frac{p'}{p' - f}$$

Destas expressões, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{p}{f} &= \frac{p'}{p' - f} \\ p \cdot p' - p \cdot f &= p' \cdot f \\ f \cdot (p + p') &= p \cdot p' \end{aligned}$$

Dividindo toda a expressão por  $f \cdot p \cdot p'$ :



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

### 2.6.1. CONDIÇÃO DE DISTÂNCIA MÍNIMA ENTRE IMAGEM E OBJETO

Considere que se tem um objeto à uma distância  $d$  de um anteparo. Ao colocar-se uma lente entre o objeto e o anteparo projeta-se uma imagem real sobre o anteparo. Portanto:

$$p + p' = d$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d-p}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{d}{p \cdot (d-p)}$$

$$d \cdot f = d \cdot p - p^2$$

Para que exista um  $p$  que gere projeção:

$$\Delta = d^2 - 4 \cdot d \cdot f \geq 0$$

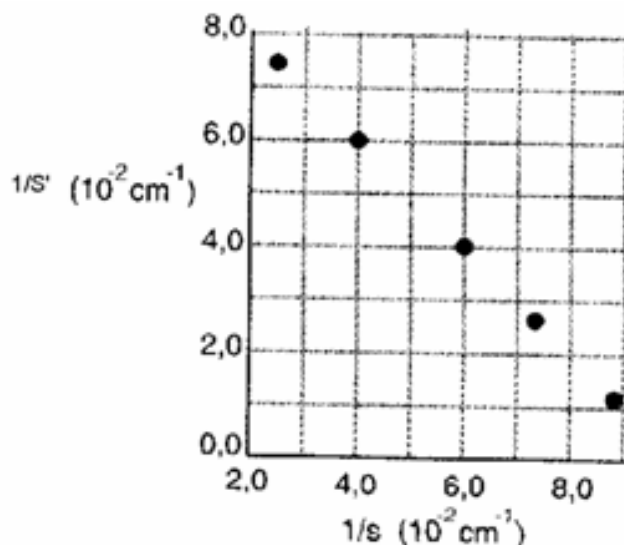
$$d \geq 4 \cdot f$$



#### 25) (ITA - 1990)

Numa certa experiência mediu-se a distância entre um objeto e uma lente e a distância entre a lente e a sua imagem real, em vários pontos. O resultado dessas medições é apresentado na figura abaixo. Examinando-se cuidadosamente o gráfico conclui-se que:





- a) A distância focal da lente é de 10 cm.  
 b) A distância focal da lente é de 100 cm.  
 c) A distância focal da lente é de 8 cm.  
 d) A distância focal da lente é de 2 cm.  
 e) A distância focal da lente é de 0,01 cm.

**Comentários:**

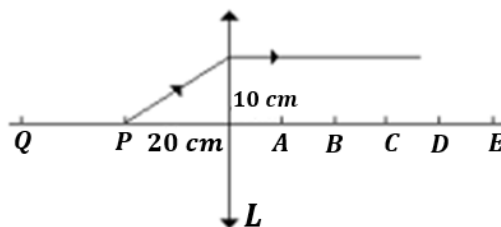
O enunciado afirma tratar-se de uma imagem real, portanto  $p' > 0$ . Escolhendo-se qualquer ponto do gráfico:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{f} = 10^{-1} \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \boxed{f = 10 \text{ cm}}$$

Letra A.

**26) (CESGRANRIO)**



A partir de uma lente biconvexa L e sobre seu eixo principal, marcam-se cinco pontos A, B, C, D e E a cada 10cm, conforme ilustra a figura. Observa-se que um raio luminoso, emitido de um ponto P, distante





20cm dessa lente, após atravessá-la, emerge paralelamente ao seu eixo principal. Portanto, se esse raio for emitido de um ponto Q, situado a 40cm dessa lente, após atravessá-la, ele irá convergir para o ponto:

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

**Comentários:**

Pela figura fornecida, como os raios emergem paralelos para uma fonte em P, isso indica que P está sobre o foco da lente. Dessa forma, a distância focal  $f$  é de 20 cm. Como trata-se de uma lente biconvexa, a lente é convergente ( $f > 0$ ). Assim, para a fonte em Q:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{40} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 40 \text{ cm}$$

Portanto, o raio converge na posição D.

**Letra D.**



## AUMENTO TRANSVERSAL

Analisando a figura abaixo da formação de uma imagem por uma lente:



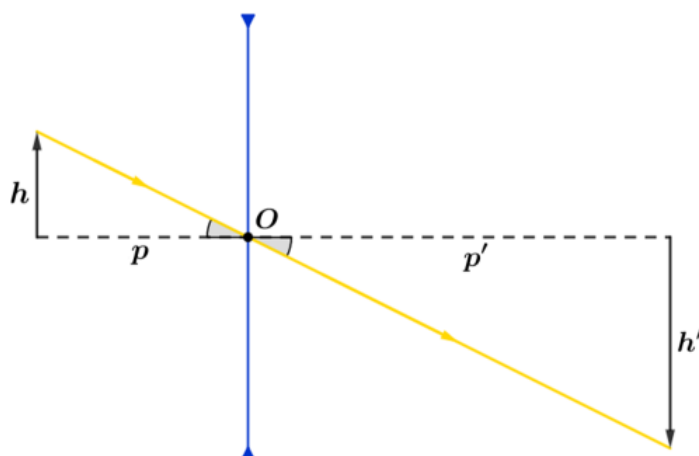


Figura 17: Lente qualquer para obtenção do aumento linear.

Por semelhança de triângulos:

$$\left| \frac{h'}{h} \right| = \left| \frac{p'}{p} \right|$$

Mas, pelo referencial gaussiano  $h' < 0$ ,  $h > 0$ ,  $p > 0$  e  $p' > 0$ . Portanto:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

Logo:

$$A = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

#### Observações:

Com respeito ao significado físico de  $A$ :

- Se  $A$  é positivo, a imagem é direita, se for negativo, a imagem é invertida.
- Se  $|A| > 1$ , a imagem é maior, caso contrário, ela será menor.



#### 27) (Fatec-SP)

Uma lente é utilizada para projetar em uma parede a imagem de um slide, ampliada 4 vezes em relação ao tamanho original do slide. A distância entre a lente e a parede é de 2,0 m. O tipo de lente utilizado e sua distância focal são, respectivamente:

- a) divergente; 2 m
- b) convergente; 40 cm
- c) divergente; 40 cm



d) divergente; 25 cm

e) convergente; 25 cm

**Comentários:**

A ampliação é de 4x. É importante lembrar que se a imagem é maior que o objeto, a lente é convergente. Não foi fornecido no enunciado, pois é esperado que o aluno note que neste caso a imagem é invertida, portanto:

$$A = -4$$

Outra maneira de perceber que a ampliação deve ser negativa é o fato de que  $p$  e  $p'$  não podem ter mesmo sinal já que a imagem está sendo projetada. Assim, feita esta primeira análise:

$$A = -\frac{p'}{p}$$

$$4 = \frac{p'}{p} \Rightarrow p' = 4 \cdot p$$

E, do enunciado:

$$p' = 2 \text{ m}$$

Logo:

$$p = 50 \text{ cm}$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{50} + \frac{1}{200} = \frac{1}{40} \Rightarrow \boxed{f = 40 \text{ cm}}$$

**Letra B.**

**28)**

Um objeto tem altura  $h_o = 20 \text{ cm}$  e está localizado a uma distância  $d_o = 30 \text{ cm}$  de uma lente. Esse objeto produz uma imagem virtual de altura  $h_i = 4,0 \text{ cm}$ . A distância da imagem à lente, a distância focal e o tipo da lente são, respectivamente:

a) 6,0 cm; 7,5 cm; convergente;

b) 1,7 cm; 30 cm; divergente;

c) 6,0 cm; -7,5 cm; divergente;

d) 6,0 cm; 5,0 cm; divergente;

e) 1,7 cm; -5,0 cm; convergente.

**Comentários:**

Sendo a imagem virtual, a lente deve ser divergente e ela produzirá uma imagem menor ou a lente deve ser convergente, com o objeto entre o F e O, e a lente produzirá uma imagem maior. Como foi afirmado



que a lente produz uma imagem menor, conclui-se que a lente é divergente. Neste caso, a imagem é direita e:

$$A = \frac{h'}{h} = 0,2$$

$$-\frac{p'}{p} = 0,2 \Rightarrow -p' = 30 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{p' = -6 \text{ cm}}$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{30} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{30}$$

$$\boxed{f = -7,5 \text{ cm}}$$

Portanto, a alternativa correta é **letra C**.

## VERGÊNCIA

Para comparar diferentes lentes em termos de “mais forte” e “mais fraca”, em relação à sua capacidade de alterar a trajetória da luz, utiliza-se a grandeza física **Vergência (V)**. A vergência é definida como:

$$V = \frac{1}{f}$$

A unidade utilizada para a vergência no SI é:

$$\text{Unidade (V)} = m^{-1} = \text{dioptria (di)}$$

Baseado nos sinais adotados anteriormente para  $f$ , tem-se que:

$$\begin{cases} V > 0 \Leftrightarrow f > 0 \Leftrightarrow \text{lente convergente} \\ V < 0 \Leftrightarrow f < 0 \Leftrightarrow \text{lente divergente} \end{cases}$$

Quanto maior a vergência, menor a distância focal e maior sua capacidade de alterar a trajetória da luz. Observe a figura abaixo:

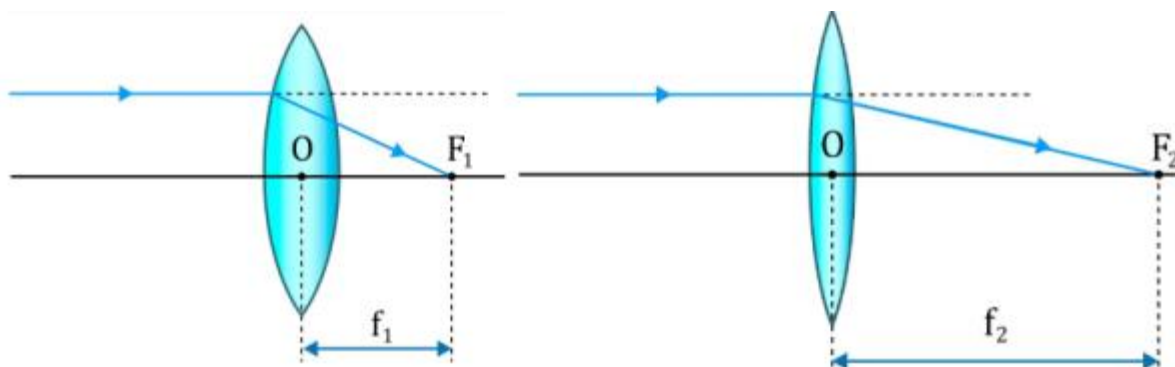


Figura 18: Comparação da trajetória da luz entre lentes de diferentes vergências.

Como pode-se notar, a trajetória na lente de distância focal  $f_1$  foi mais alterada. Portanto, quanto menor o foco, maior a vergência e maior a capacidade de alterar a trajetória da luz incidente.





29)

Uma lente convergente de 4 dioptrias fornece uma imagem virtual, direita e 5 vezes maior de um objeto real. Nessas condições, o objeto encontra-se entre:

- a) o foco-objeto e a lente a 20 cm desta.
- b) o foco-objeto e a lente a 60 cm desta.
- c) o foco-imagem e a lente a 60 cm desta.
- d) o foco-imagem e a lente a 20 cm desta.
- e) a uma distância maior do que 60 cm da lente.

**Comentários:**

Pelo enunciado:

$$A = -\frac{p'}{p} = 5 \Rightarrow p' = -5 \cdot p \Rightarrow \frac{1}{f} = 4$$

Logo, pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow 4 = \frac{1}{p} - \frac{1}{5 \cdot p} \Rightarrow 4 = \frac{4}{5 \cdot p}$$

$$p = 20 \text{ cm}$$

Como  $p > 0$ , o objeto é real e encontra-se entre o foco objeto  $f = 25 \text{ cm}$  e a lente.

**Letra a.**



## EQUAÇÃO DOS FABRICANTES DE LENTES

A equação dos fabricantes de lente como é conhecida relaciona as propriedades geométricas da lente ( $R_1$  e  $R_2$ ), as propriedades do material da lente e do meio ( $n_{\text{lente}}$  e  $n_{\text{meio}}$ ) e as propriedades ópticas da lente ( $f$ ). A dedução da equação foge do escopo do curso, sendo prioridade a compreensão da contribuição de cada parcela na equação.



$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \quad (\text{eq. 2.8.1})$$

Onde:

$$R \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{face convexa} \\ < 0 \rightarrow \text{face côncava} \\ \infty \rightarrow \text{face plana} \end{cases}$$

Agora, vamos analisar o comportamento óptico das lentes em meios com índice de refração menor que a lente. Assim:

$$\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 > 0$$

Portanto, se:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} > 0 \rightarrow \text{convergente} \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} < 0 \rightarrow \text{divergente} \end{cases}$$

É importante lembrar que o nome que vem primeiro (por exemplo côncava na lente côncavo-convexa) significa que o raio da face côncava é maior em módulo que o seguinte.

Lente	$R_1$	$R_2$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	Comportamento óptico
Biconvexa	+	+	+	Convergente
Plano-convexa	$\infty$	+	+	Convergente
Côncavo-convexa	-	+	+	Convergente
Bicôncava	-	-	-	Divergente
Plano-côncava	$\infty$	-	-	Divergente
Convexo-côncava	+	-	-	Divergente

30) (ITA-2004)

Uma lente convergente tem distância focal de 20 cm quando está mergulhada em ar. A lente é feita de vidro, cujo índice de refração é  $n_v = 1,6$ . Se a lente é mergulhada em um meio, menos refringente do que o material da lente, cujo índice de refração é  $n$ , considere as seguintes afirmações:

- I. A distância focal não varia se o índice de refração do meio for igual ao do material da lente.
- II. A distância focal torna-se maior se o índice de refração  $n$  for maior que o do ar.



III. Neste exemplo, uma maior diferença entre os índices de refração do material da lente e do meio implica numa menor distância focal.

Então, pode-se afirmar que:

- a) Apenas a II é correta.
- b) Apenas a III é correta.
- c) Apenas II e III são corretas.
- d) Todas são corretas.
- e) Todas são incorretas.

Comentários:

Analisemos a equação dos fabricantes de lente:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

I. Falso. Quando  $n_{lente} = n_{meio}$ , a lente não causa nenhum distúrbio na trajetória da luz, portanto seria como se ela existisse.

II. Verdadeiro. Ao aumentar-se o  $n_{meio}$  diminui-se o termo  $\left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right)$ , portanto diminui-se  $\frac{1}{f}$ . Mas se  $\frac{1}{f}$  diminui, isso implica que  $f$  aumenta.

III. Verdadeiro. Análogo ao II.

Letra C.

31) (ITA)

As duas faces de uma lente delgada biconvexa têm um raio de curvatura igual a  $1,00 \text{ m}$ . O índice de refração da lente para a luz vermelha é de  $1,60$  e, para a luz violeta,  $1,64$ . Sabendo-se que a lente está imersa no ar, cujo índice de refração é  $1,00$ , calcule a distância entre os focos de luz vermelha e de luz violeta, em centímetros.

Comentários:

Aplicando-se a equação dos fabricantes de lentes para a luz vermelha:

$$\frac{1}{f_{verm}} = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \cdot (1,6 - 1) = 1,2 \Rightarrow f_{verm} = \frac{5}{6} \text{ m}$$

Para a luz violeta:

$$\frac{1}{f_{viol}} = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \cdot (1,64 - 1) = 1,28 \Rightarrow f_{viol} = \frac{100}{128} = \frac{25}{32} \text{ m}$$

Portanto:

$$f_{verm} - f_{viol} = \frac{5}{6} - \frac{25}{32} \cong 5,2 \text{ cm}$$



NOVIDADE!



## MÉTODO DE PIERRE LUCIE

Também conhecido como método gráfico das coordenadas. É um método alternativo à equação das lentes delgadas para resolução de problemas. O método consiste em 3 passos. São eles:

- 1) Montar o plano  $p'p$  (abscissa  $p'$  e ordenada  $p$ ).
- 2) Localizar o ponto  $F = (f, f)$ . É importante ressaltar que o sinal de  $f$  será positivo para lentes convergentes e negativo para lentes divergentes.
- 3) Apoia-se uma reta suporte sobre o ponto  $F$ . A intersecção desta reta com o eixo das abscissas é numericamente igual a  $p'$ , enquanto a intersecção da reta com o eixo das ordenadas é numericamente igual a  $p$ .

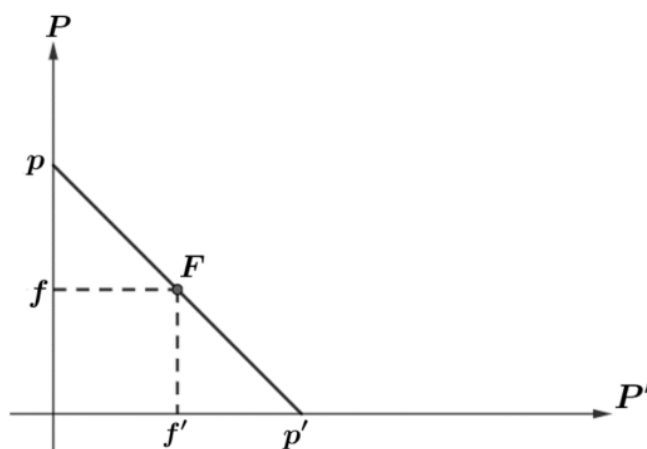


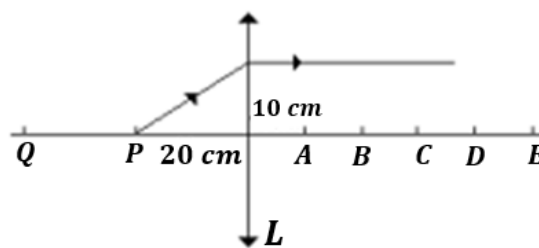
Figura 19: Método de Pierre Lucie para lente convergente.

ATENÇÃO  
DECORE!

32) (CESGRANRIO)





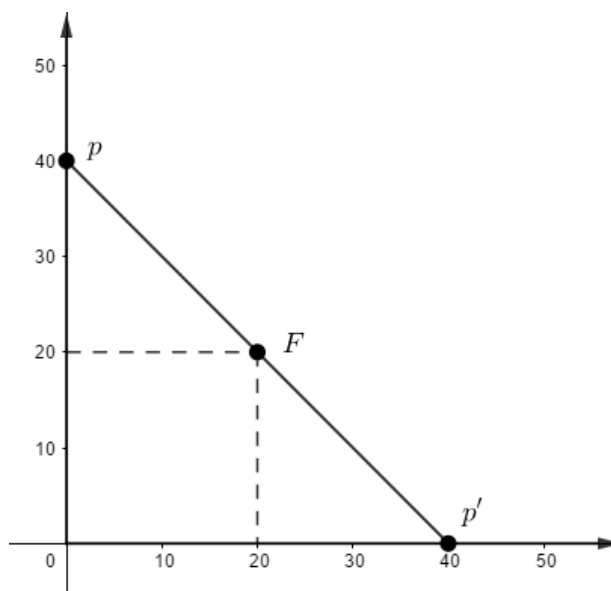


A partir de uma lente biconvexa  $L$  e sobre seu eixo principal, marcam-se cinco pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  a cada  $10\text{ cm}$ , conforme ilustra a figura. Observa-se que um raio luminoso, emitido de um ponto  $P$ , distante  $20\text{ cm}$  dessa lente, após atravessá-la, emerge paralelamente ao seu eixo principal. Portanto, se esse raio for emitido de um ponto  $Q$ , situado a  $40\text{ cm}$  dessa lente, após atravessá-la, ele irá convergir para o ponto:

- a)  $A$
- b)  $B$
- c)  $C$
- d)  $D$
- e)  $E$

**Comentários:**

Sabe-se que o  $f = +20$  e  $p = 40$ . Logo:



Pela figura,  $p' = 40\text{ cm}$ . Portanto, a alternativa correta é a **letra D**.

TOME  
NOTA!



## ASSOCIAÇÃO DE LENTES DELGADAS

Serão estudados aqui somente as associações de lentes coaxiais, isto é, com eixos ópticos principais coincidentes. Divide-se a associação de lentes em dois tipos: a associação justaposta e a não justaposta. A associação justaposta é quando as lentes estão suficientemente próximas de tal forma que se desconsidera a distância entre os centros ópticos, enquanto a não justaposta irá ter que considerar esta distância.

### 2.11.1. ASSOCIAÇÃO NÃO JUSTAPOSTA

Na associação não justaposta, o que ocorre são dois ou mais desvios da trajetória da luz em que a luz vinda do objeto passará pela primeira lente e formará a primeira imagem. A seguir, essa imagem servirá de objeto para a segunda lente, e, quando a luz passar por esta, formará uma segunda imagem. Portanto, a associação de lentes forma uma única imagem através de dois ou mais desvios da luz, a depender da quantidade de lentes associadas.

Visualmente:

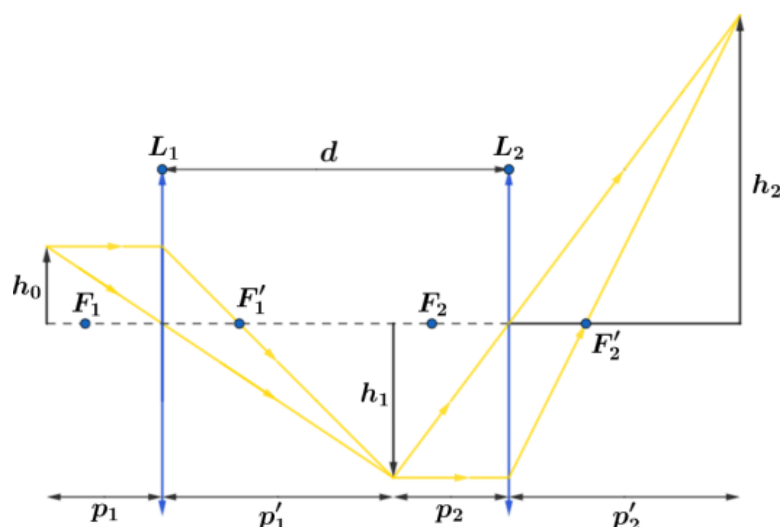


Figura 20: Exemplo de possível associação de lentes.

A resolução deste tipo de problema é um processo de duas etapas em que cada etapa consiste no que foi feito até agora. Deve-se atentar somente a:

$$p_2 = d - p'_1$$

$$A = A_1 \cdot A_2 = \frac{h_1}{h_0} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_0}$$

### 2.11.2. ASSOCIAÇÃO JUSTAPOSTA

Para a associação justaposta,  $d = 0$ . Ou seja:

$$p_2 = -p'_1$$

Baseando-se na figura 33, adotando a condição exposta acima, tem-se:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}$$

Mas:



$$\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p'_1}$$

Logo, para a lente 2:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = -\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}$$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}$$

Repare que  $p_1$  é a posição do objeto até as lentes (considera-se que as lentes estão na mesma posição) e  $p'_2$  é a posição da imagem final até as lentes. Portanto, esta expressão prova que duas lentes delgadas justapostas equivalem à uma lente única de vergência:

$$V = V_1 + V_2$$

A posição é onde estão as duas lentes originais.



### 33) (UFU-MG)

Duas lentes delgadas e convergentes, de distâncias focais  $f_1 = 10 \text{ cm}$  e  $f_2 = 40 \text{ cm}$ , foram justapostas para se obter uma maior vergência. A convergência obtida com essa associação é, em dioptrias:

- a) 2
- b) 0,125
- c) 8
- d) 12,5
- e) 50

#### Comentários:

Aqui houve uma associação justaposta. Portanto:

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$

$$V_1 = 10$$

$$V_2 = 2,5$$

$$V_{eq} = 12,5$$

Assim, a alternativa correta é **letra D**.

### 34) (ITA-1983)



Uma lente A, convergente ( $f_A = 10\text{cm}$ ), é justaposta a outra lente convergente B ( $f_B = 5\text{cm}$ ). A lente equivalente é:

- a) divergente e  $f = 3,33\text{ cm}$
- b) divergente e  $f = 5,2\text{ cm}$
- c) convergente e  $f = 5,2\text{ cm}$
- d) convergente e  $f = 15\text{ cm}$
- e) convergente e  $f = 3,33\text{ cm}$

**Comentários:**

Sendo uma justaposição de lentes:

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$
$$V_{eq} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,05} = 30 \Rightarrow \frac{1}{f} = 30$$
$$f = \frac{1}{30}\text{ m} \cong 3,33\text{ cm}$$

Assim, a alternativa correta é **letra E**.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 4. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 523p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.
- [6] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p

