Aula 06: Números complexos

Sumário

1 – Números complexos: forma algébrica **4**

1.1 – Aspectos gerais 4

1.2 – Operações com números complexos 9

1.3 – Plano de Argand-Gauss 17

2 – Números complexos: forma trigonométrica **27**

2.1 – Aspectos gerais 27

2.2 – 1ª lei de De Moivre 30

2.3 – 2ª lei de De Moivre 36

Que satisfação em tê-lo aqui comigo, jovem! E hoje vamos de números complexos, assunto extremamente recorrente no seu concurso! O assunto de números complexos é extenso, e será dividido em duas partes: a parte algébrica e a parte trigonométrica.

esse assunto exige alguns pré-requisitos: você tem de ter uma boa noção de trigonometria e função exponencial. Se ainda não estudou esses assunstos, vai lá dar uma olhada antes de prosseguir. Não precisa estudar a parte gráfica de funções exponenciais para o entendimento desse tema não, apenas as propriedades mais recorrentes de potências mesmo. Quanto à trigonometria, faremos aqui mesmo uma pequena revisão, mas seria interessante que você cobrisse as noções de seno e cosseno com alguma minuciosidade a mais. Dê também uma olhada na parte de trigonometria no ciclo, especificamente a parte em que estudamos a redução de quadrantes.

Vamos lá, então? Números complexos, aqui vamos nós!


ESA

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Razões e proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regra de três simples e composta.*
Aula 01	*Porcentagem; Juros Simples; Juros Compostos*
Aula 02	*Sequências numéricas: Lei de formação de uma sequência. Progressões aritméticas e geométricas: termo geral, soma dos termos e propriedades.*
Aula 03	*Matrizes: conceito, tipos especiais, operações e matriz inversa.*
Aula 04	*Determinantes: conceito, resolução e propriedades.*
Aula 05	*Sistemas lineares: resolução, classificação e discussão.*
Aula 06	*Números complexos: O número "i". Conjugado e módulo de um número complexo. Representação algébrica e trigonométrica de um número complexo. Operações nas formas algébrica e trigonométrica.*
Aula 07	*Polinômios (parte 1): Função polinomial; polinômio identicamente nulo; grau de um polinômio; identidade de um polinômio, raiz de um polinômio; operações com polinômios; valor numérico de um polinômio. Divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffini.*
Aula 08	*Polinômios (parte 2): Equações polinomiais: Definição, raízes e multiplicidade. Teorema Fundamental da Álgebra. Relações entre coeficientes e raízes. Raízes reais e complexas.*
Aula 09	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 10	*Geometria analítica: Ponto: o plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos. Estudo da reta: equação geral e reduzida; interseção, paralelismo e perpendicularidade entre retas; distância de um ponto a uma reta; área de um triângulo.*
Aula 11	*Estudo da circunferência: equação geral e reduzida; posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; tangência.*
Aula 12	*Análise combinatória: Fatorial: definição e operações. Princípio Fundamental da Contagem. Arranjos, permutações e combinações.*
Aula 13	*Probabilidade: Experimento aleatório, espaço amostral, evento. Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. Probabilidade da união e interseção de eventos. Probabilidade condicional. Eventos independentes.*
Aula 14	*Noções de estatística: População e amostra. Frequência absoluta e frequência relativa. Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda.*
Aula 15	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Números complexos: forma algébrica

1.1– Aspectos gerais

Unidade imaginária

Vamos começar indo direto ao ponto, sem enrolação. Identifica-se o que chamamos de *unidade imaginária* pela letra i, de forma que:

$$\boxed{i^2 \quad -1}$$

Alguns tratados sobre o assunto preferem escrever:

$$\boxed{i \quad \sqrt{-1}}$$

Essa última notação, porém, pode vir a causar alguns problemas. No decorrer do texto falaremos mais sobre isso. Por ora, usaremos as duas sem maiores problemas.

Essa definição que demos altera completamente o que conhecemos sobre números. Primeiro, o que podemos afirmar com certeza, é que i não pode ser um número real, pois *nenhum* número real elevado ao quadrado poderia resultar em um número negativo. Mas jovem, usando exatamente a notação que utilizamos acima não há mistério algum na utilização dos números complexos. Veja:

QUESTÃO 1

Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 5 \quad 0$ encontramos as seguintes raízes:

(a) $2 + i$ e $2 - i$.
(b) 2 e -2.
(c) $-2 + i$ e $-2 - i$.
(d) Não há raízes.

R: Aplicando a fórmula de Bháskara, calculemos o Δ dessa equação:

$$\begin{aligned} \Delta \quad & b^2 - 4ac \\ & (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ & 16 - 20 \\ & -4. \end{aligned}$$

Veja que, em geral, diríamos que essa equação não tem solução. Mas não é bem isso, é que ela não tem solução *real*! Mas ela tem sim solução *complexa*. Veja:

$$\begin{aligned} x \quad & \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ & \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} \\ & \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}. \end{aligned}$$

Agora veja que, pelas propriedades de radiciação:

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} \quad & \sqrt{4 \cdot (-1)} \\ & \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Mas veja que, como vimos há pouco, $i \quad \sqrt{-1}$, logo:

$$2i.$$

Então, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} x \quad & \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ & \frac{4 \pm 2i}{2} \\ & 2 \pm i. \end{aligned}$$

Logo, há duas raízes: $x \quad 2 + i$ e $x \quad 2 - i$.

Gabarito: A

Perceba que, então, é realmente um ato apenas de usarmos o fato de que $i \quad \sqrt{-1}$ e associarmos isso às propriedades de radiciação. Vejamos agora a forma geral de um número complexo.

Exatamente, corujinha! Praticamente nada, nada de novo por enquanto. Dizermos que i $\sqrt{-1}$ de fato não muda muita coisa. Quando aparecerem raízes negativas, você deverá sempre usar esse i para escrever os seus números. Por exemplo, apareceu $\sqrt{-9}$ em alguma conta sua, faça $\sqrt{-9}$ $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$ $3i$; dessa forma, a raiz quadrada de -9 seria $3i$. Dessa forma, nada de novo de fato apareceu para a gente. Estudaremos a seguir uma das formas de escrevermos um número complexo. Vamos lá?

Forma algébrica

Números complexos podem ser escritos de duas formas diferentes: a forma algébrica e forma trigonométrica. Estudaremos primeiro a sua forma algébrica, também chamada de forma cartesiana de um número complexo. Essa forma é dada pela seguinte configuração:

$$\boxed{z \quad a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}}$$

Veja abaixo alguns números complexos escritos na forma algébrica

$z \quad a+bi$	a	b
$2+3i$	2	3
$-5+4i$	-5	4
$4i-3$	-3	4
$2+i$	2	1
$2-i$	2	-1
$7i$	0	7
3	3	0
$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi-\sqrt{7}i$	π	$-\sqrt{7}$

Não importa o quão "esquisitos" eles fiquem; contanto que a e b sejam números reais, $a+bi$ será certamente um número complexo.

O número a é o que chamamos de *a parte real de* z. O número b é, como você já deve imaginar, a *parte imaginária de* z.

A parte real de um número complexo z pode ser representada pelas seguintes notações: $\Re(z)$ ou $\text{Re}(z)$. Já a parte imaginária pode ser representada por: $\Im(z)$ ou $\text{Im}(z)$.

Quando um número complexo z possui parte real nula e parte imaginária não-nula (isto é, $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$) ele é chamado de um número *imaginário puro*. São os casos de $z = 7i$ ou $z = -\frac{1}{2}i$, por exemplo. Em ambos temos $a = 0$ e $b \neq 0$. Caso ele possua parte imaginária nula, o número será chamado de um número *real puro*. É o caso de todos os elementos de $\mathbb{R}$: -2, π, etc.

Isso nos permite concluir o seguinte:

> Todo número real é complexo, mas nem todo complexo é real.

Vejamos um exemplo de aplicação direta desse conceito:

(EEAR-2001) QUESTÃO 2

Seja $m \in \mathbb{R}$. Para que o produto $(2 + mi) \cdot (3 + i)$ seja um número imaginário puro, o valor de m deve ser

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8

R: Efetuando a multiplicação:

$$\begin{aligned}(2+mi)\cdot(3+i) &= 6+2i+3mi+mi^2\\ &= 6+2i+3mi-m\\ &= (6-m)+(2+3m)i.\end{aligned}$$

Para que seja imaginário puro, bastará que $6 - m$ seja nulo, isto é, $m = 6$.

Gabarito: B

Módulo de um número complexo

Considere $z \quad a + bi$ um número complexo qualquer. Aprenderemos agora a calcular o módulo desse número complexo. Utiliza-se a letra grega ρ (lê-se "rhô") ou o símbolo $|z|$ para identificarmos esse módulo. Vamos então à definição.

Define-se o *módulo* de z como o número real não-negativo $|z|$ tal que:

$$\boxed{|z| \quad \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vejamos um exemplo direto dessa aplicação.

QUESTÃO 3

Considere os seguintes números complexos: $z_1 \quad 3 + 4i$, $z_2 \quad 5 - 12i$ e $z_3 \quad -8 + 15i$. Podemos afirmar que:

(a) $|z_1| < |z_2| < |z_3|$
(b) $|z_1| > |z_2| > |z_3|$
(c) $|z_1| < |z_2|$ e $|z_2| > |z_3|$
(d) $|z_1| > |z_2|$ e $|z_2| < |z_3|$

R: Basta aplicarmos diretamente a fórmula apresentada para o cálculo do módulo. Calculando $|z_1|$:

$$\begin{aligned} |z_1| \quad & \sqrt{3^2 + 4^2} \\ & \sqrt{9 + 16} \\ & \sqrt{25} \\ & 5. \end{aligned}$$

Calculando $|z_2|$

$$\begin{aligned} |z_2| \quad & \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ & \sqrt{25 + 144} \\ & \sqrt{169} \\ & 13. \end{aligned}$$

Por fim, calculando $|z_3|$:

$$\begin{aligned} |z_3| \quad & \sqrt{(-8)^2 + 15^2} \\ & \sqrt{64 + 225} \\ & \sqrt{289} \\ & 17. \end{aligned}$$

Visto que $5 < 13 < 17$, temos $|z_1| < |z_2| < |z_3|$.

Gabarito: A

Haha, calma, coruja! É claro que teve uma motivação inicial para que fizessem essa expressão da forma que foi feita. Mas por enquanto, nos importa apenas a expressão e saber utilizá-la algebricamente. Mas vale a gente saber de antemão que a motivação real da expressão $|z| \quad \sqrt{a^2 + b^2}$ é *geométrica*. Assim que terminarmos de mencionar as principais operações entre complexos, discutiremos sobre as propriedades algébricas do módulo de um número complexo. Vamos lá, então? Agora aprenderemos a operar entre complexos.

1.2– Operações com números complexos

Adição/subtração

Não há mistérios aqui. Adicionar ou subtrair números complexos é adicionar ou subtrair os termos semelhantes, simplesmente. Veja:

QUESTÃO 4

Considere os complexos $z_1 \quad 3+24i$, $z_2 \quad 7+26i$ e $z_3 \quad 1+10i$. Podemos afirmar que $|z_1+z_2-z_3|$ vale:

(a) 41
(b) 46

(c) 49
(d) 51

R: Façamos primeiro o cálculo do complexo proposto:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 - z_3 \quad & 3 + 24i + 7 + 26i - (1 + 10i) \\ & 10 + 50i - 1 - 10i \\ & 9 + 40i \end{aligned}$$

Calculando o módulo:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 - z_3| \quad & \sqrt{9^2 + 40^2} \\ & \sqrt{81 + 1600} \\ & \sqrt{1681} \\ & 41. \end{aligned}$$

Gabarito: A

Multiplicação

Basta sempre levarmos em conta que $i^2 \quad -1$ e nos lembrarmos das propriedades distributivas da multiplicação. Vamos lá, vejamos um exemplo.

QUESTÃO 5.

Acerca do número $(2 + 3i)(7 - 4i) - 26$, podemos afirmar que se trata de um

(a) número imaginário puro
(b) número real puro
(c) número complexo de módulo $\sqrt{13}$
(d) número complexo de módulo nulo

R: Efetuando a conta:

$$\begin{aligned} (2+3i)(7-4i)-26 \quad & 14-8i+21i-12\cdot i^2-26 \\ & 14+13i+12-26 \\ & 13i. \end{aligned}$$

Logo, como a parte real é nula, trata-se de um número imaginário puro.

Gabarito: A

Potenciação

Há dois tipos de potenciação que são cobradas com frequência nos mais diversos concursos e que serão estudadas agora. Um terceiro tipo que veremos em breve só poderá ser possível utilizar quando estudarmos a chamada forma trigonométrica de um número complexo. Mas por ora, vejamos essas duas primeiras formas de potenciação.

Primeiro, aprenderemos a calcular potências do tipo i^k, com $k \in \mathbb{Z}^+$.

> Para efetuarmos tal potência, basta dividirmos o expoente da potência por quatro e substituirmos o expoente pelo resto da divisão efetuada.

Isso acontece porque as potências de i se repetem em ciclos de quatro potências. Veja.

Sabemos que $i^0 \quad 1$, certo? E que $i^1 \quad i$. Também sabemos, pela definição de número complexo, que $i^2 \quad -1$. Então:

$$\begin{aligned} i^3 \quad & i^2 \cdot i \\ & (-1)\cdot i \\ & -i. \end{aligned}$$

Calculamos então que $i^3 \quad -i$. Agora, calculemos i^4:

$$\begin{aligned} i^4 \quad & i^2 \cdot i^2 \\ & (-1)\cdot(-1) \end{aligned}$$

1.

Veja então que i^4 retorna para o mesmo valor que i^0.

Então, temos o seguinte ciclo para as potências de i:

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$

Vejamos como podemos utilizar esse fato para resolvermos questões

(ESSA-2014) QUESTÃO 6

O número complexo i^{102}, onde i representa a unidade imaginária,

(a) é positivo.
(b) é imaginário puro.
(c) é real.
(d) está na forma trigonométrica.
(e) está na forma algébrica.

R: Basta dividirmos o expoente por 4 e substituirmos o expoente pelo resto da divisão, como acabamos de ver:

$$\begin{array}{r|l} 102 & 4 \\ \cline{2-2} 22 & 25 \\ 2 & \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned} i^{102} \quad & i^2 \\ & -1. \end{aligned}$$

Trata-se, portanto, de um número real.

Gabarito: C

Essa é, então, umas das formas que temos de calcularmos potências de complexos. A outra (excetuando-se aquela que veremos somente no próximo capítulo) é bastante específica: trata-se das potências do complexo $1+i$. Para isto, observe o que acontece quando calcularmos $(1+i)^2$:

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &\quad 1+2i+i^2\\ (1+i)^2 &\quad 1+2i-1\\ (1+i)^2 &\quad 2i.\end{aligned}$$

Agora veja como podemos utilizar esse resultado para resolvermos questões.

QUESTÃO 7

Calcule o valor do módulo do complexo $z \quad \dfrac{(4+4i)^{100}}{2^{250}}$.

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

R: Primeiro, observe o que podemos fazer com o numerador da expressão dada, inicialmente colocando o 4 em evidência:

$$\begin{aligned}(4+4i)^{100} &\quad [4\cdot(1+i)]^{100}\\ &\quad 4^{100}\cdot(1+i)^{100}\\ &\quad (2^2)^{100}\cdot(1+i)^{2\cdot 50}\\ &\quad 2^{200}\cdot(1+i)^{2\cdot 50}\\ &\quad 2^{200}\cdot[(1+i)^2]^{50}\\ &\quad 2^{200}\cdot(2i)^{50}\\ &\quad 2^{200}\cdot 2^{50}\cdot i^{50}\\ &\quad 2^{250}\cdot i^{50}\end{aligned}$$

Veja que 50 dividido por 4 deixa resto 2, logo:

$$\begin{aligned}(4+4i)^{100} &\quad 2^{250}\cdot i^2\\ &\quad 2^{250}\cdot(-1).\end{aligned}$$

Substituindo na expressão apresentada:

$$\begin{aligned} z \quad & \frac{(4+4i)^{100}}{2^{250}} \\ & \frac{2^{250}\cdot(-1)}{2^{250}} \\ & -1. \end{aligned}$$

Assim, temos: $|z| \quad |-1| \quad 1.$

Gabarito: B

Conjugado de um número complexo

O conjugado de um número complexo $z \quad a+bi$ é o complexo:

$$\boxed{\bar{z} \quad a-bi}$$

Veja que para identificarmos o conjugado de um número complexo qualquer, desenha-se uma linha horizontal sobre o número complexo. Muitas vezes também se utiliza a notação de linha, isto é, z'.

Vejamos alguns exemplo.s Utilizarei a tabela analisada anteriormente para nos ajudar no cálculo de alguns conjugados:

$z \quad a+bi$	a	b	$\bar{z} \quad a-bi$
$2+3i$	2	3	$2-3i$
$-5+4i$	-5	4	$-5-4i$
$4i-3$	-3	4	$-4i-3$
$2+i$	2	1	$2-i$
$2-i$	2	-1	$2+i$
$7i$	0	7	$-7i$
3	3	0	3
$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$\pi-\sqrt{7}i$	π	$-\sqrt{7}$	$\pi+\sqrt{7}i$

Acima vemos, na última coluna, o conjugado do complexo presente na primeira coluna. Veja que ao calcularmos o conjugado, o que realmente se altera é o sinal da parte imaginária.

Um fato importante sobre o conjugado de um número complexo é o que acontece quando multiplicamos um número complexo qualquer pelo seu próprio conjugado. Veja:

Considere um complexo $z \quad a+bi$. Então $\bar{z} \quad a-bi$, daí:

$$\begin{aligned} z\cdot\bar{z} &\quad (a+bi)\cdot(a-bi) \\ &\quad a^2-abi+abi-b^2i^2 \\ &\quad a^2-b^2\cdot(-1) \\ &\quad a^2+b^2. \end{aligned}$$

E veja que:

$$\begin{aligned} |z| &\quad \sqrt{a^2+b^2} \\ |z|^2 &\quad a^2+b^2. \end{aligned}$$

Logo, podemos afirmar que:

$$\boxed{z\cdot\bar{z} \quad |z|^2}$$

Isso quer dizer que um número complexo multiplicado pelo seu conjugado é sempre igual ao quadrado de seu módulo. Isso tem uma utilidade grande na hora de dividirmos números complexos, que é o que veremos a seguir.

Sim, mas não qualquer sinal! Temos de trocar o sinal da parte imaginária! Perceba que números reais puros, por não terem partes imaginárias, NÃO se alteram quando calculamos seus conjugados. Então, se eu te pedir para calcular o conjugado de $z \quad 7$, teremos $\bar{z} \quad 7$. Então, não pode ser qualquer sinal. Tem de ser o sinal da parte imaginária, quando houver. Tudo bem? Então vamos lá, para a divisão entre números complexos. Sigamos!

Divisão

Imagine que queiramos dividir o complexo z_1 pelo complexo z_2, com $z_2 \;/\; 0$. Então, na verdade, estamos querendo calcular o resultado da operação: $\frac{z_1}{z_2}$. Para fazermos isso, basta multiplicarmos o numerador e o denominador dessa fração por $\bar{z}_2$, isto é, pelo conjugado de z_2. Vejamos um exemplo:

QUESTÃO 8

A parte real do complexo $z \quad \frac{2+3i}{1-5i}$ é o número real:

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $-\frac{1}{2}$
(c) 2
(d) -2

R: Façamos o que foi sugerido, isto é, efetuemos o produto do numerador e pelo denominador pelo conjugado de $1-5i$:

$$\begin{aligned} z \quad & \frac{2+3i}{1-5i} \\ & \frac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} \\ & \frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2+5^2} \\ & \frac{2+10i+3i-15}{1+25} \\ & \frac{-13+13i}{26} \\ & \frac{-13}{26}+\frac{13}{26}i \\ & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

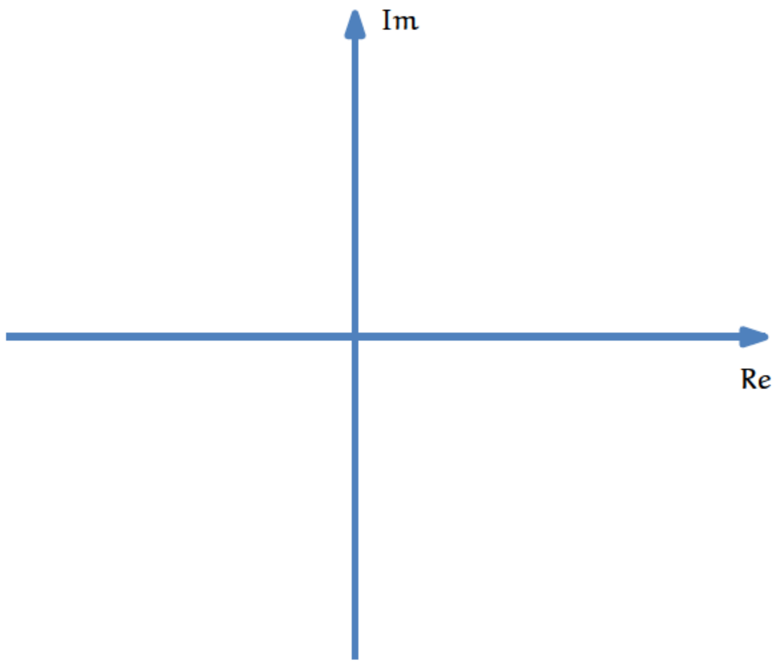
Logo, $\mathrm{Re}(z) \quad -\frac{1}{2}$.

Gabarito: B

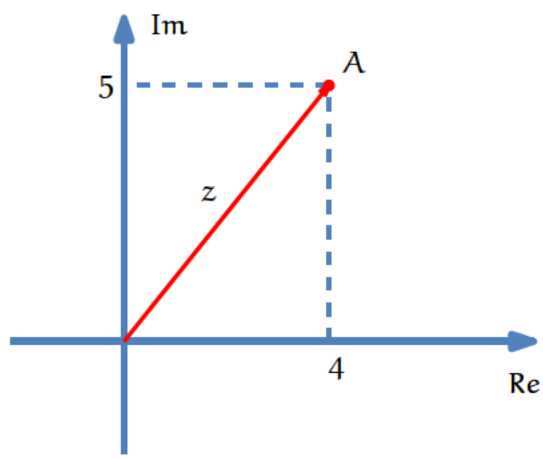
1.3– Plano de Argand-Gauss

Lembra que lá no início de nosso livro eletrônico cheguei a mencionar que a forma algébrica de um número complexo também pode ser chamada de a forma cartesiana? Agora você terá uma noção bem melhor do porquê. Vamos lá, então.

O plano de Argand-Gauss é um plano cartesiano como o abaixo:



Veja que não temos mais um eixo x, mas sim um eixo *real*; também não temos mais um eixo y, temos um eixo *imaginário*. É bastante fácil de utilizar, na verdade. Por exemplo. suponha que queiramos representar, no plano, o complexo z $4 + 5i$. Veja como podemos fazer isso:



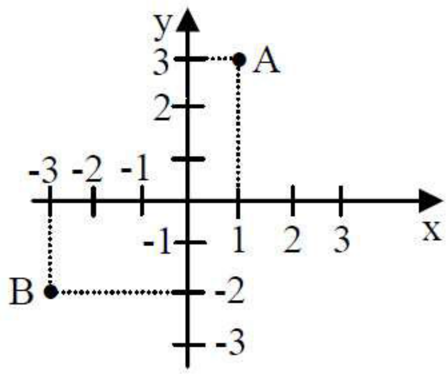
Vê o que fizemos? No eixo real marcamos a parte real de z (que é 4); no eixo imaginário marcamos a parte imaginária de z (que é 5).

O ponto A é um ponto chamado de *afixo* do número complexo z. Ele *representa* graficamente o complexo. Muitas vezes o complexo também será representado pela seta vermelha que indicamos acima, partindo sempre da origem do plano até o afixo.

Vejamos um exemplo de questão (lembrando que, por enquanto, resolveremos apenas questões de pura aplicação, sem muita complicação; as complicações serão feitas nas resoluções dos exercícios da seção de questões comentadas):

(EEAR-2003) QUESTÃO 9

Os números complexos que correspondem aos pontos A e B do gráfico são, respectivamente,



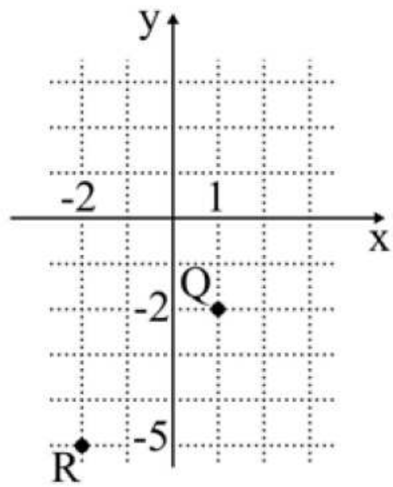
(a) $(1 + 3i); (-3 - 2i)$
(b) $(3 + i); (-2 - 3i)$
(c) $(-3 - 2i); (1 + 3i)$
(d) $(-2 - 3i); (3 + i)$

R: Veja que o complexo representado por A tem parte real 1 e parte imaginária 3; logo, trata-se do complexo $1 + 3i$ (perceba que isso já resolve a questão por eliminação).
O complexo B possui parte real -3 e parte imaginária -2; logo, trata-se do complexo $-3 - 2i$.

Gabarito: A

(EEAR-2019) QUESTÃO 10

Sejam $Z_1 \quad 3 + 3i$, Q e R as respectivas representações, no plano de Argand-Gauss, dos números complexos Z_2 e Z_3.



Assim, é correto afirmar que Z_1

(a) $Z_2 - Z_3$
(b) $Z_2 + Z_3$
(c) $-Z_2 + Z_3$
(d) $-Z_2 - Z_3$

R: Sem mistérios, vamos achar Z_2. O problema diz que Z_2 é representado por Q. O afixo Q tem parte real 1 e parte imaginária -2; logo $Z_2 \quad 1 - 2i$. O afixo R tem parte real -2 e parte imaginária -5; logo, $Z_3 \quad -2 - 5i$. Veja também que, lembrando que $Z_1 \quad 3 + 3i$:

$$\begin{aligned} Z_2 - Z_3 \quad & (1 - 2i) - (-2 - 5i) \\ & 1 - 2i + 2 + 5i \\ & 3 + 3i \\ & Z_1. \end{aligned}$$

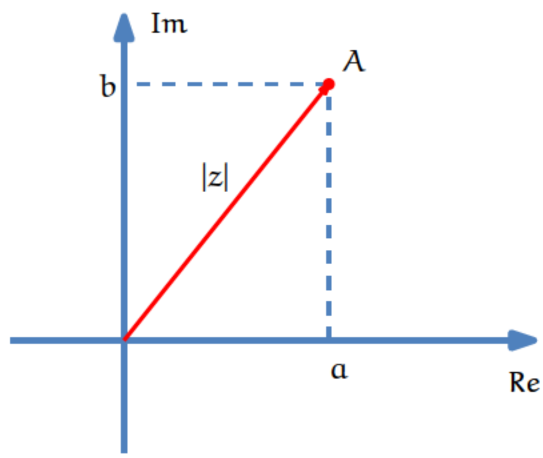
Logo, $Z_1 \quad Z_2 - Z_3$.

Gabarito: A

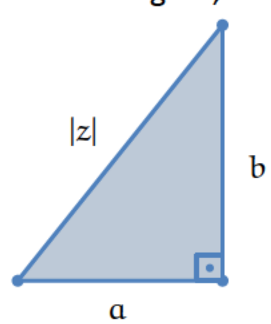
Interpretação geométrica do módulo

Coruja, incrivelmente, sim. Tudo o que estou falando é rigorosamente importante para a gente. Números complexos são simples em suas operações, mas não são tão simples quando começamos a tratá-los graficamente. Então, quanto mais soubermos sobre a geometria e a trigonometria dos números complexos, melhor. Principalmente porque quando começarmos a falar das leis de De Moivre, o assunto ficará metade algébrico e metade geométrico, então, já devemos começar de agora. Então entendamos a presença do módulo como elemento geométrico e mantenhamos a nossa atenção focada. Sigamos!

Observe o número complexo $z \quad a + bi$ abaixo:



Podemos extrair um triângulo retângulo dessa figura, da seguinte forma:



Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$|z|^2 \quad a^2 + b^2$$
$$|z| \quad \sqrt{a^2 + b^2}.$$

E daí, finalmente, entendemos qual é a motivação do módulo de um número complexo: trata-se do comprimento do segmento vermelho, isto é, o segmento que une a origem ao afixo do complexo em questão.

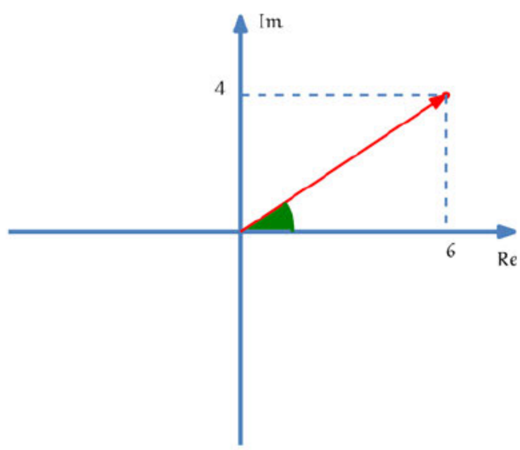
Entenderemos isso com mais calma na resolução dos exercícios.

Argumento

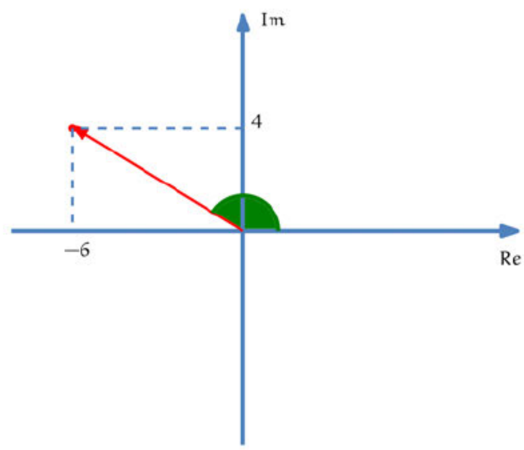
Comecemos com aqueças frases que a gente lê e quase nada é óbvio. Vamos lá:

Argumento é o ângulo (medido em radianos) anti-horário formado entre um complexo e o semi-eixo real positivo.

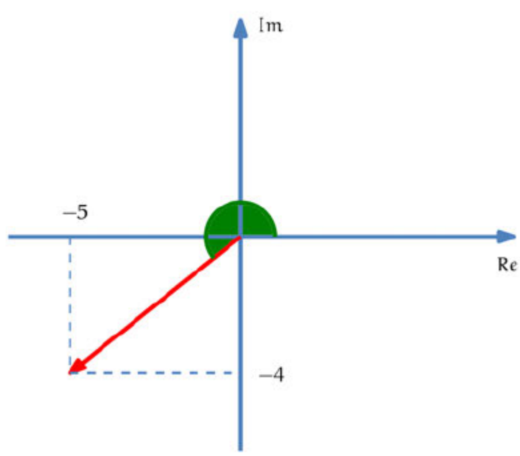
Veja alguns exemplos:



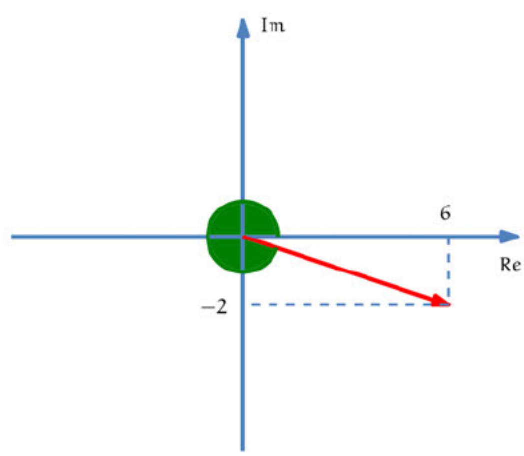
$z = 6 + 4i$



$z = -6 + 4i$



$z = -5 - 4i$



$z = 6 - 2i$

Observe os ângulos verdes nos exemplos acima. Cada um desses quatro ângulos são os argumentos dos respectivos números complexos que representam.

O mais importante é você perceber que quanto mais longe do primeiro quadrante, maior é o ângulo. Então, à medida que passamos de quadrante em quadrante, vamos ganhando mais e mais ângulo, como podemos ver no exemplo. Veja que a última figura, que representa o complexo $z \quad 6-2i$, tem o maior argumento (maior ângulo verde), pois está quase completando uma volta.

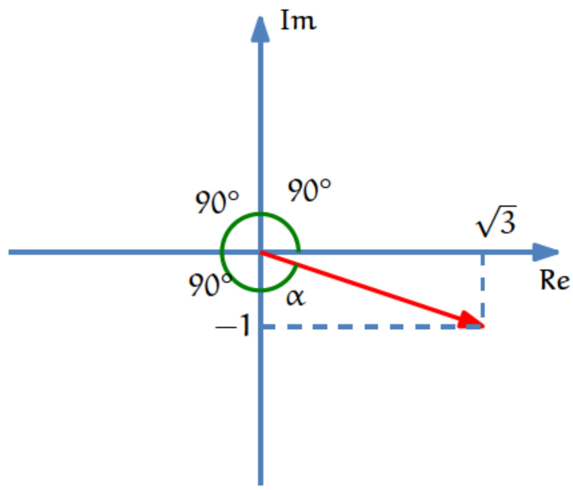
Em resumo: quanto mais perto de completar uma volta, maior será o argumento (lembrando em sempre pensar na volta *anti-horária*. Vejamos um exemplo.

QUESTÃO 11

Calcule o argumento do complexo $\sqrt{3}-i$.

(a) $\frac{5\pi}{6}$
(b) $\frac{7\pi}{6}$
(c) $\frac{9\pi}{6}$
(d) $\frac{11\pi}{6}$

R: Primeiro, marquemos esse complexo no plano de Argand-Gauss:



Veja que no triângulo retângulo formado embaixo, podemos usar de trigonometria para calcularmos o ângulo α:

$$\operatorname{tg}\alpha \quad \frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$\operatorname{tg}\alpha \quad \sqrt{3}$$
$$\alpha \quad 60°.$$

Daí, portanto, o argumento desse complexo é: $90° + 90° + 90° + 60° \quad 330°$. Porém, devemos passar esse argumento para radianos (lembrando que, para isso, basta multiplica por $\frac{\pi}{180°}$, basta efetuar essa multiplicação):

$$\begin{aligned} 330° \cdot \frac{\pi}{180°} \quad & \frac{330° \cdot \pi}{180°} \\ & \frac{33\pi}{18} \\ & \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Gabarito: D

Não se preocupe quanto ao entendimento que possa vir a estar defasado no momento. Reveremos todo esse conteúdo na forma de exercícios. Agora, estudaremos a famosa e um pouco mais complicada segunda forma dos números complexos: a forma trigonométrica. Vamos lá, então!

Propriedades algébricas do módulo

Seguem as principais propriedades algébricas:

- $|z_1 \cdot z_2| \quad |z_1| \cdot |z_2|$;
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \quad \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
- $|z| \quad |\bar{z}|$;
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$;
- $|z| \geq 0$.

Vejamos uma aplicação direta dessas propriedades:

(ESSA-2013) QUESTÃO 12

Com relação aos números complexos $z_1 \quad 2 + i$ e $z_2 \quad 1 - i$, onde i é a unidade imaginária, é correto afirmar

(a) $z_1 \cdot z_2 \quad -3 + i$

(b) $|z_1| \quad \sqrt{2}$

(c) $|z_2| \quad \sqrt{5}$
(d) $|z_1 \cdot z_2| \quad \sqrt{10}$
(e) $|z_1 + z_2| \quad \sqrt{3}$

R: Comentemos alternativa por alternativa:

(a) Façamos os cálculos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \quad & (2+i)\cdot(1-i) \\ & 2\cdot 1 - 2\cdot i + i \cdot 1 - i \cdot i \\ & 2 - 2i + i + 1 \\ & 3 - i. \end{aligned}$$

Vemos que não foi o que a alternativa disse que daria o cálculo, portanto, não se trata dessa alternativa.

(b) Lembrando da definição de módulo:

$$\begin{aligned} |z_1| \quad & \sqrt{2^2 + 1^2} \\ & \sqrt{4+1} \\ & \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Alternativa falsa.

(c) Novamente, utilizando a definição de módulo:

$$\begin{aligned} |z_1| \quad & \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ & \sqrt{1+1} \\ & \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Alternativa falsa.

(d) Utilizando-nos das duas alternativas anteriores das propriedades que estudamos sobre módulos:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &\quad |z_1| \cdot |z_2| \\ &\quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \\ &\quad \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Alternativa verdadeira.

(e) Façamos os cálculos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\quad |2 + i + 1 - i| \\ &\quad |3| \\ &\quad 3. \end{aligned}$$

Alternativa falsa.

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 13

O valor de m, para que o módulo do número complexo $Z \quad (m + 2i)(1 + i)$ seja igual a 4, é

(a) ± 1.
(b) ± 2.
(c) ± 3.
(d) zero.

R: Façamos os cálculos utilizando as propriedades de módulos:

$$|Z| \quad |(m + 2i)(1 + i)| \quad 4$$

$$
\begin{aligned}
|(m+2i)|\cdot|(1+i)| &\quad 4\\
\sqrt{m^2+4}\cdot\sqrt{1^2+1^2} &\quad 4\\
\sqrt{(m^2+4)\cdot 2} &\quad 4\\
(m^2+4)\cdot 2 &\quad 16\\
m^2+4 &\quad 8\\
m^2 &\quad 4\\
m &\quad \pm 2.
\end{aligned}
$$

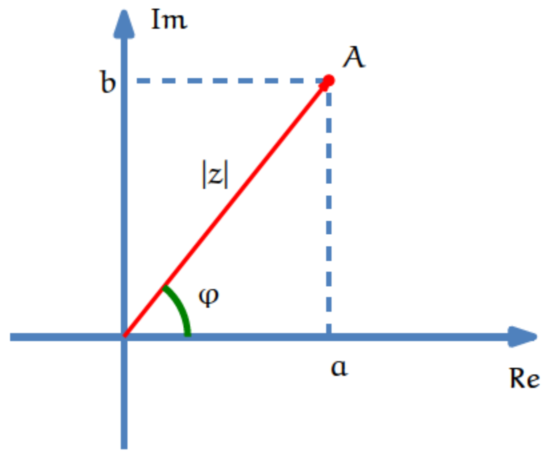
Gabarito: B

2.0– NÚMEROS COMPLEXOS: FORMA TRIGONOMÉTRICA

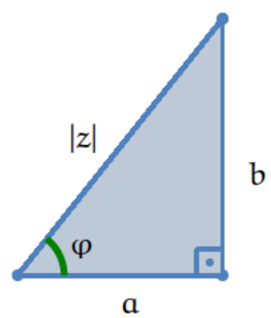
2.1– ASPECTOS GERAIS

Forma trigonométrica ou polar

Antes de qualquer coisa, observemos o complexo geral abaixo, $z \quad a + bi$:



Separemos o triângulo retângulo da figura acima:



Agora, utilizaremos alguma trigonometria. Lembremo-nos de que:

$$\text{sen}\,\varphi \quad \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} \text{ e } \cos\varphi \quad \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Dessa forma, temos:

$$\text{sen}\,\varphi \quad \frac{b}{|z|} \text{ e } \cos\varphi \quad \frac{a}{|z|}$$

Logicamente, então, podemos escrever que:

$$b \quad |z| \cdot \operatorname{sen}\varphi \text{ e } a \quad |z| \cdot \cos\varphi$$

Como $z \quad a + bi$, temos:

$$\begin{aligned} z \quad & a + bi \\ & |z| \cdot \cos\varphi + (|z| \cdot \operatorname{sen}\varphi) \cdot i \\ & |z| \cdot (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi). \end{aligned}$$

Essa é a chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar* de um número complexo.

$$\boxed{z \quad |z| \cdot (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}$$

Algumas vezes pode acontecer de a questão abreviar o termo $\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$ para a forma $\operatorname{cis}\varphi$:

$$z \quad |z| \cdot \underbrace{(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}_{\operatorname{cis}\varphi}$$

$$\boxed{z \quad |z| \cdot \operatorname{cis}\varphi}$$

Trata-se apenas de uma abreviação, uma forma mais contracta de escrever a forma polar.

Para conseguirmos, então, achar a forma trigonométrica de um número complexo, basta calcularmos o seu módulo e o seu argumento para substituir nessa expressão. Vejamos um exemplo:

(EEAR-2001) QUESTÃO 14

Seja o número complexo $z \quad \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 1 & i \\ i^3 & 1 & -i \end{vmatrix}$. A forma trigonométrica de z é:

(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

(b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

(d) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

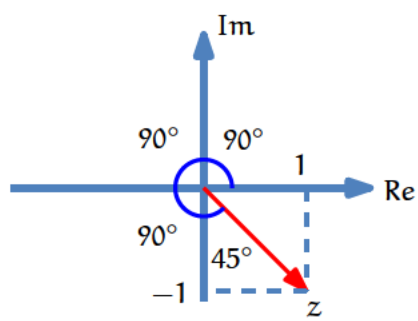
R: Calculemos o determinante usando a regra de Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & i & 0 & 1 & i \\ -1 & 1 & i & -1 & 1 \\ i^3 & 1 & -i & i^3 & 1 \end{array}\right| \qquad \begin{aligned} & -i + i^5 + 0 - 0 - i - i^2 \\ \\ & -i + i - i - (-1) \\ & -i - (-1) \\ & 1 - i. \end{aligned}$$

Calculando o módulo:

$$\begin{aligned} |z| & \quad \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ |z| & \quad \sqrt{1+1} \\ |z| & \quad \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Agora, achando o argumento. Desenhando esse complexo no plano de Argand-Gauss:



O argumento desse complexo é, portanto:

$$\begin{aligned} \varphi & \quad 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 45^\circ \\ & \quad 315^\circ. \end{aligned}$$

Passando esse ângulo para sua forma em radianos:

$$\begin{aligned} 315^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} & \quad \frac{315^\circ \pi}{180^\circ} \\ & \quad \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

Esse número complexo, na forma trigonométrica será, então:

$$z \quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right).$$

Gabarito: A

Bom, corujinha, em primeiro lugar para resolver questões que peçam diretamente para que você passe complexos para a forma trigonométrica. Mas na verdade, veremos em seguida que a forma trigonométrica é útil principalmente para efetuarmos operações entre raízes e potências com números complexos. Isso ficará mais claro quando viermos a discutir sobre as leis de De Moivre, o que vai acontecer agora mesmo.

2.2– 1ª LEI DE DE MOIVRE

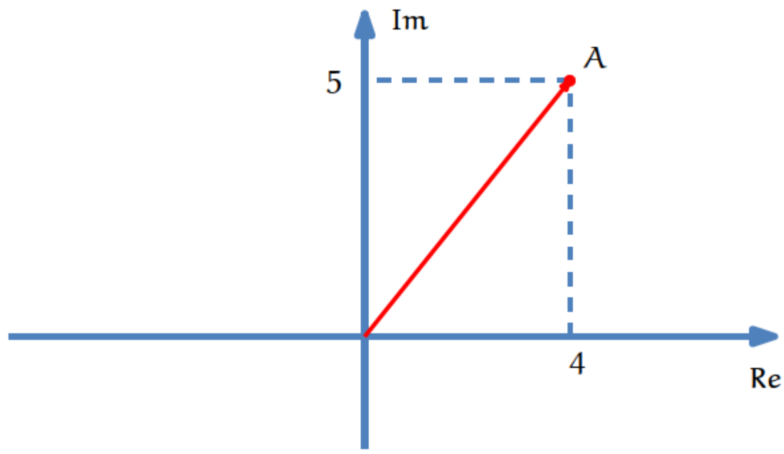
Rotação

Aprenderemos agora a rotacionar números complexos no plano de Argand-Gauss. Funciona da seguinte forma. Seja z um número complexo qualquer. Sempre que multiplicamos esse complexo pelo termo $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$:

O complexo z sofrerá uma rotação anti-horária de ângulo θ.

Vamos tentar entender melhor? Então vamos pensar em termos de exemplo. Criarei, em seguida, um número complexo qualquer. Daí, efetuarei uma rotação qualquer com ele e poderemos verificar que de fato ocorreu uma rotação daquele determinado ângulo. Bom, sem mais delongas, vamos ao exemplo.

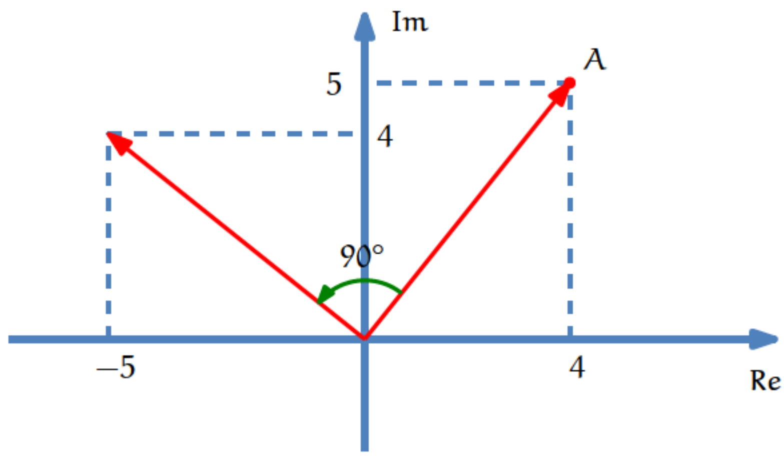
Considere o complexo $z \quad 4+5i$, representado abaixo:



Suponha que queiramos rotacionar esse complexo num ângulo de $90°$. Então, basta multiplicar esse complexo $z \quad 4+5i$ por $\underbrace{\cos 90°}_{0} + i\underbrace{\operatorname{sen} 90°}_{1} \quad i$. Isso significa que multiplicar por i é o mesmo que rotacionar um complexo em $90°$! Fazendo as contas:

$$\begin{aligned} (4+5i)\cdot i &\quad 4i+5i^2 \\ &\quad 4i-5 \\ &\quad -5+4i. \end{aligned}$$

Agora veja esse complexo representado no plano:



Vê que, de fato, o complexo $z \quad 4+5i$ sofreu uma rotação de $90°$?

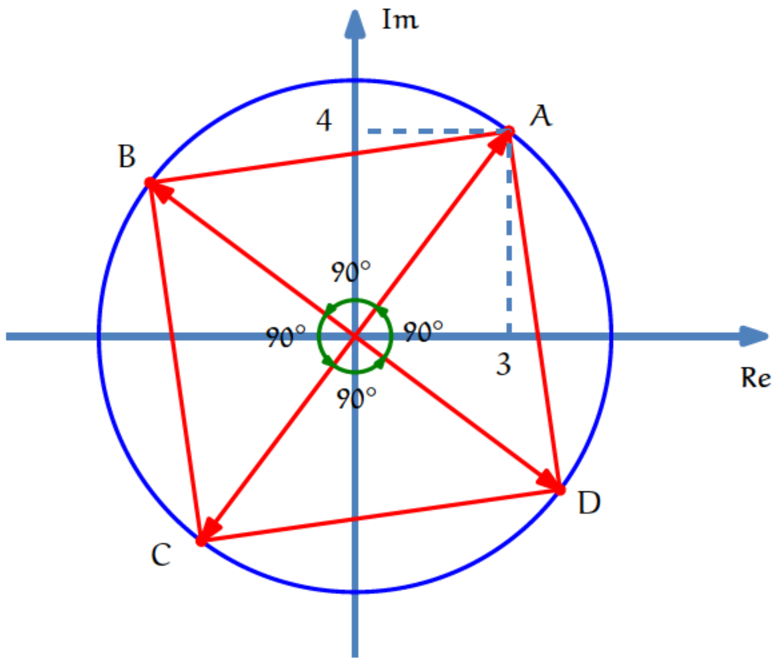
Então, sempre que quisermos rotacionar um complexo $z \quad a+bi$ num ângulo θ, bastará sempre multiplicar tal complexo por $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Vejamos uma questão sobre isso.

(EEAR-2002) QUESTÃO 15

Um quadrado $ABCD$ está inscrito num círculo com centro na origem do plano de Gauss. O vértice A é imagem do complexo $3+4i$. Os afixos dos outros três vértices são os complexos:

(a) $-3+4i; -3-4i; 3-4i.$
(b) $-4+3i; -3-4i; 4-3i.$
(c) $-4+3i; -3-4i; 3-4i.$
(d) $-3+4i; -3-4i; 4-3i.$

R: Observe a figura proposta:



Como já dito, quando multiplicamos um complexo qualquer pelo fator $\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$, nós rotacionamos esse complexo no plano num ângulo anti-horário α. Veja que cada vértice dista do anterior num ângulo de $90°$, então, cada vértice pode ser calcançado multiplicando seu vértice anterior por:

$$\begin{aligned} \cos 90^\circ + i \cdot \text{sen}\,90^\circ \quad & 0 + i \cdot 1 \\ & i. \end{aligned}$$

Isso significa que, rotacionar um complexo em $90°$ anti-horários no plano é o mesmo que multiplicar por i.
Então, para alcançarmos o vértice B, basta multiplicarmos o complexo do vértice A da seguinte forma:

$$\begin{aligned} B \quad & A \cdot i \\ & (3 + 4i) \cdot i \\ & 3i + 4i^2 \\ & 3i - 4 \\ & -4 + 3i. \end{aligned}$$

Chegando ao vértice C:

$$\begin{aligned} C \quad & B \cdot i \\ & (-4 + 3i) \cdot i \\ & -4i + 3i^2 \\ & -4i - 3 \\ & -3 - 4i. \end{aligned}$$

E finalmente, para chegarmos ao vértice D:

$$\begin{aligned} D \quad & C \cdot i \\ & (-3 - 4i) \cdot i \\ & -3i - 4i^2 \\ & -3i + 4 \\ & 4 - 3i. \end{aligned}$$

Gabarito: B

1ª lei de De Moivre

A primeira lei de De Moivre é super simples de se utilizar. Ela diz o seguinte. Considere um número complexo escrito em sua forma trigonométrica, $z \quad |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta))$. Então:

$$\boxed{z^n \quad |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]}$$

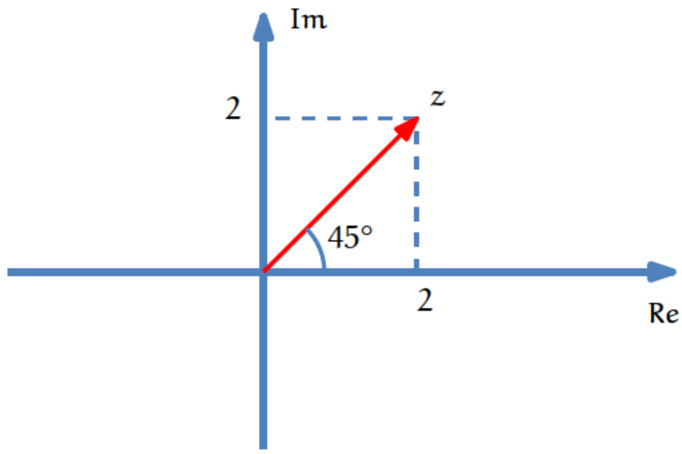
Ela pode até parecer meio complicada, mas não é. Vejamos um exemplo.

(ESSA-2018) QUESTÃO 16

Considere o número complexo $z \quad 2 + 2i$. Dessa forma, z^{100}:

(a) é um número real negativo.
(b) tem argumento $\frac{\pi}{4}$.
(c) é um número real positivo.
(d) tem módulo igual a 1.
(e) é um número imaginário puro.

R: Há duas formas de resolvermos esse exercício. Façamos das duas formas. A primeira é passarmos z para a forma trigonométrica e utilizarmos a primeira Lei de De Moivre. Como acabamos de vê-la, comecemos fazendo por ela. Vejamos:



O módulo desse complexo é: $|z| \quad \sqrt{2^2 + 2^2} \quad 2\sqrt{2}$. O argumento desse complexo é $\varphi \quad 45°$. Logo, na forma trigonométrica, esse complexo se torna:

$$z \quad 2\sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \cdot \operatorname{sen} 45°).$$

Daí, pela primeira lei de De Moivre:

$$\begin{aligned} z &\quad 2\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot \text{sen}\, 45^\circ) \\ z^{100} &\quad (2\sqrt{2})^{100}\cdot(\cos 4500^\circ + i\cdot \text{sen}\, 4500^\circ). \end{aligned}$$

Para calcularmos seno e cosseno de ângulos maiores que 360°, basta dividimo-los por 360° e considerarmos apenas o resto:

$$\begin{array}{r|l} 4\,5\,0\,0 & \underline{3\,6\,0} \\ 9\,0\,0 & 1\,2 \\ 1\,8\,0 & \end{array}$$

Daí então:

$$\begin{aligned} z^{100} &\quad (2\sqrt{2})^{100}\cdot(\cos 4500^\circ + i\cdot \text{sen}\, 4500^\circ) \\ &\quad (2\sqrt{2})^{100}\cdot(\cos 180^\circ + i\cdot \text{sen}\, 180^\circ) \\ &\quad (2\sqrt{2})^{100}\cdot(-1 + i\cdot 0) \\ &\quad (2\sqrt{2})^{100}\cdot(-1). \end{aligned}$$

Não precisamos nem continuar a conta, porque a parte imaginária i sumiu, o que faz desse número um número real. O -1 que multiplica a expressão faz desse número um número real negativo, que caracteriza o dito na alternativa A.

Um outro modo de fazermos esse exercício é utilizarmos o seguinte truque algébrico (que só funciona para potências pares de $1+i$):

$$\begin{aligned} z &\quad 2+2i \\ z &\quad 2(1+i) \\ z^{100} &\quad [2(1+i)]^{100} \\ &\quad 2^{100}\cdot(1+i)^{100} \\ &\quad 2^{100}\cdot(1+i)^{2\cdot 50} \\ &\quad 2^{100}\cdot[(1+i)^2]^{50} \\ &\quad 2^{100}\cdot(1+2i+i^2)^{50} \\ &\quad 2^{100}\cdot(1+2i-1)^{50} \\ &\quad 2^{100}\cdot(2i)^{50} \end{aligned}$$

$$2^{100} \cdot 2^{50} \cdot i^{50}.$$

Veja que:

$$\begin{array}{r|l} 50 & \underline{4\;\;} \\ 10 & 12 \\ 2 & \end{array}$$

Logo:

$$\begin{aligned} z^{100} \quad & 2^{100} \cdot 2^{50} \cdot i^{2} \\ & 2^{100} \cdot 2^{50} \cdot (-1). \end{aligned}$$

Trata-se de um número real negativo, como encontrado antes.

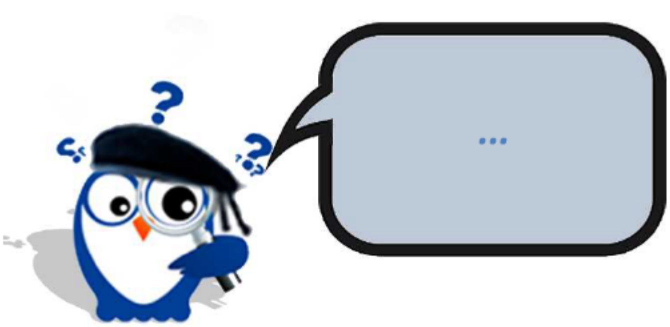
Gabarito: A

2.3– 2ª LEI DE DE MOIVRE

Vamos direto à lei.

Suponha que queiramos resolver a equação $w^n \quad z$, para w. Essa equação terá exatamente n raízes, cada uma podendo ser calculada da seguinte forma:

$$\boxed{w_k \quad \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \; k \quad 0, 1, 2, \ldots, k-1}$$



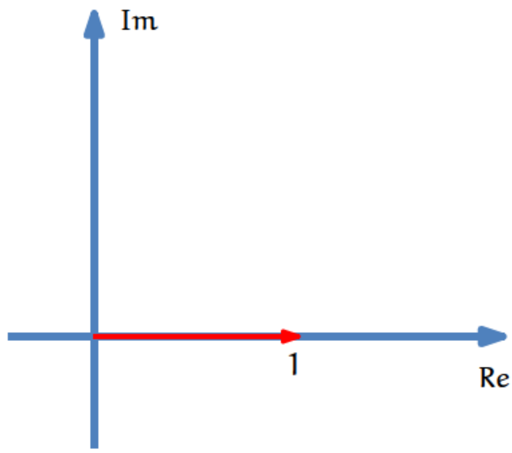
Hahahaha, assustou foi, coruja? essa fórmula assusta mesmo, é considerada uma das maiores fórmulas dos conteúdos de matemática de ensino médio. Mas e se eu te falar que a dificuldade dessa fórmula está em trigonometria, e não em números complexos? Vou te mostrar isso acontecendo. Vamos lá? Então façamos agora um exemplo de aplicação direta da 2ª lei de De Moivre. Sigamos!

Vamos, por exemplo, tentar resolver a seguinte equação:

$$z^6 \quad 1.$$

Inicialmente, ao estudante que já esteja estudando há algum tempo, deve parecer fácil dizer que ao menos duas soluções são triviais: $z \quad 1$ e $z \quad -1$. Mas há mais 4 soluções complexas, que podem ser obtidas a partir da 2ª lei de De Moivre.

A primeira coisa que precisamos fazer é passar o complexo 1 para a forma trigonométrica. Demos uma olhada no complexo 1 no plano de Argand-Gauss:



Vemos então que o argumento desse número complexo é $\varphi \quad 0$. O módulo desse complexo é $|z| \quad \sqrt{1^2+0^2} \quad 1$.

Agora, substitua tudo na 2ª lei de De Moivre, *mantendo o* k *sem substituir*:

$$\begin{aligned} w_k & \quad \sqrt[n]{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right] \\ & \quad \sqrt[6]{1}\cdot\left[\cos\left(\frac{0^\circ+2k\cdot180^\circ}{6}\right)+i\text{sen}\left(\frac{0^\circ+2k\cdot180^\circ}{6}\right)\right] \\ & \quad 1\cdot\left[\cos\left(\frac{k\cdot360^\circ}{6}\right)+i\text{sen}\left(\frac{k\cdot360^\circ}{6}\right)\right] \\ & \quad \cos\left(k\cdot60^\circ\right)+i\text{sen}\left(k\cdot60^\circ\right) \end{aligned}$$

Agora, basta substituir k por $0, 1, 2, 3, 4$ e 5:

$$\begin{aligned} w_0 & \quad \cos\left(0\cdot60^\circ\right)+i\text{sen}\left(0\cdot60^\circ\right) \quad \cos 0^\circ+i\text{sen}\, 0^\circ \quad 1 \\ w_1 & \quad \cos\left(1\cdot60^\circ\right)+i\text{sen}\left(1\cdot60^\circ\right) \quad \cos 60^\circ+i\text{sen}\, 60^\circ \quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$w_2 \quad \cos(2\cdot 60°)+i\text{sen}(2\cdot 60°) \quad \cos 120° + i\text{sen}\,120° \quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

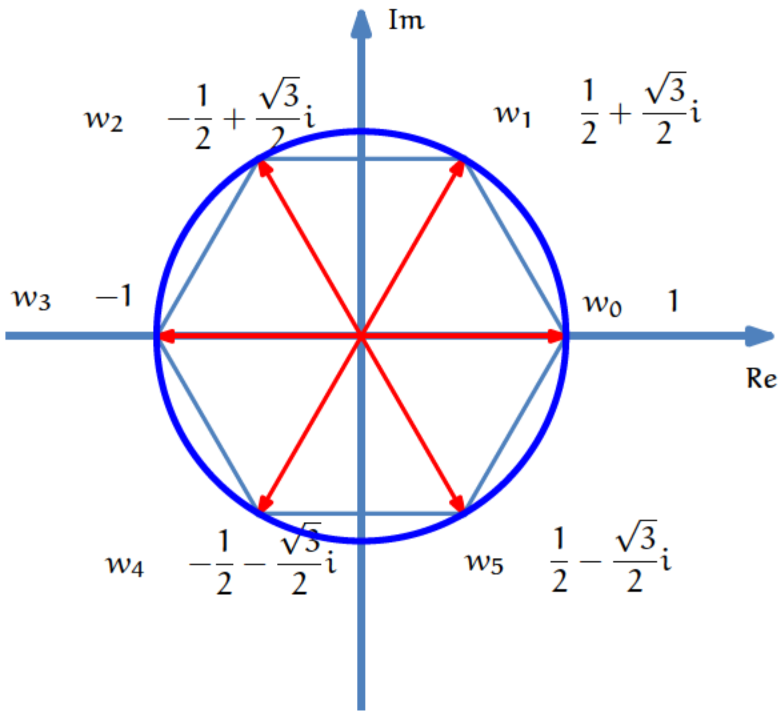
$$w_3 \quad \cos(3\cdot 60°)+i\text{sen}(3\cdot 60°) \quad \cos 180° + i\text{sen}\,180° \quad -1$$

$$w_4 \quad \cos(4\cdot 60°)+i\text{sen}(4\cdot 60°) \quad \cos 240° + i\text{sen}\,240° \quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_5 \quad \cos(5\cdot 60°)+i\text{sen}(5\cdot 60°) \quad \cos 300° + i\text{sen}\,300° \quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Existem, portanto, seis soluções: $S \quad \left\{1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Um detalhe importante acontece quando distribuímos essas soluções no plano de Argand-Gauss:



Os afixos de cada complexo tornam-se vértices de um hexágono regular!! E veja que esse hexágono está inscrito num círculo cujo raio é exatamente o módulo de $z \quad 1$.

Em geral, podemos sempre afirmar o seguinte:

> A equação $w^n \quad z$ possui n soluções complexas cujos afixos são vértices de um polígono regular de gênero n e cujo círculo circunscrito tem raio $\sqrt[n]{|z|}$

QUESTÕES COMENTADAS

(ESSA-2009) QUESTÃO 17

O valor da expressão $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ quando $x \quad i$ é:

(a) $\frac{i+1}{2}$

(b) $1-i$

(c) $-(1-i)$

(d) $\frac{-(1-i)}{2}$

(e) $\frac{1-i}{2}$

R: Basta fazermos as contas, jovem:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1} \quad \frac{i^2-1}{i^3-1}$$

Como $i^2 \quad -1$ e $i^3 \quad -i$, temos:

$$\frac{-1-1}{-i-1}$$
$$\frac{-2}{-i-1}$$
$$\frac{2}{1+i}$$

Multiplicando a expressão em cima e embaixo por $1-i$ conseguimos racionalizar a expressão:

$$\frac{2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}$$
$$\frac{2\cdot(1-i)}{1^2-i^2}$$
$$\frac{2\cdot(1-i)}{1-(-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\cdot(1-i)}{1+1}\\
&\frac{2\cdot(1-i)}{2}\\
&1-i.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

(ADAPTADA ESSA-2011) QUESTÃO 18

Seja uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definida por $f(x) \quad 2\,(\cos 2x + i\cdot \operatorname{sen} 2x)$. Calcule o valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

(a) $\sqrt{3}+i$
(b) $1+i\sqrt{3}$
(c) $\sqrt{3}-i$
(d) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$
(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

R: Substitua o valor de x pelo que a questão pede e faça as contas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\quad 2\,(\cos 2x + i\cdot \operatorname{sen} 2x)\\
f\left(\frac{\pi}{6}\right) &\quad 2\left[\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&\quad 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Aqui devemos nos lembrar de que π radianos equivale a um arco de $180°$, portanto $\frac{\pi}{3}$ equivale a um arco de $\frac{180°}{3} \quad 60°$; daí:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{6}\right) &\quad 2\,(\cos 60° + i\cdot\operatorname{sen} 60°)\\
&\quad 2\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&\quad 2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\quad 1+i\cdot\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: B

■■■(ESSA-2015) QUESTÃO 19

A parte real do número complexo $\frac{1}{(2i)^2}$ é

(a) $-\frac{1}{4}$
(b) -2
(c) 0
(d) $\frac{1}{4}$
(e) 2

R: Fazendo as contas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2i)^2} \quad & \frac{1}{4\cdot i^2} \\ & \frac{1}{4\cdot(-1)} \\ & -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Daí, a parte real de $-\frac{1}{4}$ é o próprio $-\frac{1}{4}$.

Gabarito: A

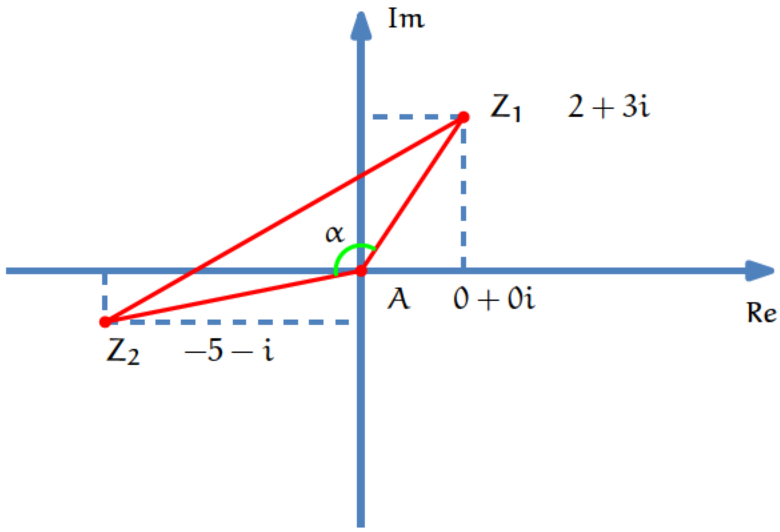
■■■(EEAR-2000) QUESTÃO 20

Sejam A, Z_1 e Z_2 as representações gráficas dos complexos $0+0i$, $2+3i$ e $-5-i$, respectivamente. A menor determinação positiva do ângulo $Z_1\hat{A}Z_2$ é

(a) $135°$
(b) $150°$
(c) $210°$

(d) $225°$

R: Há duas formas de fazermos esse exercício, e ambas utilizam conteúdos de geometria analítica. Para não haver desespero pela falta de entendimento, aconselhamos o estudante a pular esse específico exercício caso ainda não tenha estudado tal conteúdo.
Façamos primeiro utilizando a lei dos cossenos. Depois utilizaremos a teoria de vetores, ambos assuntos de geometria analítica. Marquemos os três complexos nos planos e evidenciemos os seus afixos:



Veja que formamos um triângulo. Um de seus lados mede exatamente o módulo de Z_1, que é:

$$\begin{aligned} |Z_1| \quad & \sqrt{2^2+3^2} \\ & \sqrt{4+9} \\ & \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Outro lado desse triângulo mede $|Z_2|$:

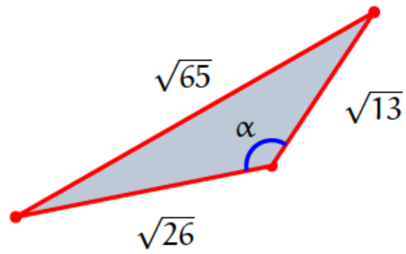
$$\begin{aligned} |Z_2| \quad & \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} \\ & \sqrt{25+1} \\ & \sqrt{26}. \end{aligned}$$

O terceiro e último lado medirá a distância entre os pontos $(2,3)$ e $(-5,-1)$, que pode ser calculada pela seguinte fórmula (da matéria de geometria analítica):

$$d \quad \sqrt{(-5-2)^2+(-1-3)^2}$$

$$\sqrt{(-7)^2+(-4)^2}$$
$$\sqrt{49+16}$$
$$\sqrt{65}.$$

Nosso triângulo fica assim:



Aplicando a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{65})^2 &\quad (\sqrt{26})^2+(\sqrt{13})^2-2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\alpha\\
65 &\quad 26+13-2\cdot\sqrt{13\cdot 26}\cdot\cos\alpha\\
65 &\quad 39-2\cdot\sqrt{13\cdot 13\cdot 2}\cdot\cos\alpha\\
65-39 &\quad -2\cdot 13\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\\
26 &\quad -26\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\\
1 &\quad -\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\\
\cos\alpha &\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
\cos\alpha &\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\alpha &\quad 135^\circ.
\end{aligned}$$

Uma outra forma de fazermos é utilizarmos a teoria de vetores. O ângulo α formado entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser calculado por:

$$\cos\alpha \quad \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u\cdot v}$$

Os vetores são $\vec{u}\quad(2,3)$ e $\vec{v}\quad(-5,-1)$, logo:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &\quad \frac{(2,3)\cdot(-5,-1)}{|(2,3)|\cdot|(-5,-1)|}\\
&\quad \frac{2\cdot(-5)+3\cdot(-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}
\end{aligned}$$

$$\frac{-10-3}{\sqrt{13\cdot 26}}$$
$$\frac{-13}{\sqrt{13\cdot 13\cdot 2}}$$
$$\frac{-13}{13\sqrt{2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

E daí $\alpha \quad 135°$, como concluído antes.

Gabarito: A

(EEAR-2002) QUESTÃO 21

Seja z um número complexo, cujo módulo é 2 e cujo argumento é $\frac{\pi}{3}$. A forma algébrica do conjugado de z é

(a) $1-\sqrt{3}i$
(b) $\sqrt{3}-i$
(c) $\sqrt{3}+i$
(d) $1+\sqrt{3}i$

R: É só montarmos e efetuarmos a conta:

$$\begin{aligned} z \quad & 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \\ & 2\cdot(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°) \\ & 2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ & 2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & 1+\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2002) QUESTÃO 22

Sejam x e y os números reais que satisfazem a igualdade $i(x-2i)+(1-yi) \quad (x+y)-i$, onde i é a unidade imaginária. O módulo do número complexo $z \quad (x+yi)^2$ é igual a

(a) $\sqrt{5}$
(b) 5
(c) $2\sqrt{5}$
(d) 2

R: Vamos desenvolver a equação dada:

$$\begin{aligned} i(x-2i)+(1-yi) &\quad (x+y)-i \\ xi-2i^2+1-yi &\quad x+y-i \\ xi+2+1-yi-x-y+i &\quad 0 \\ (3-x-y)+(x-y+1)i &\quad 0. \end{aligned}$$

Logo, temos que $3-x-y \quad 0$ e $x-y+1 \quad 0$, isto é:

$$\begin{cases} x+y \quad 3 \\ x-y \quad -1 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned} 2x &\quad 2 \\ x &\quad 1. \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\begin{aligned} x+y &\quad 3 \\ 1+y &\quad 3 \\ y &\quad 2. \end{aligned}$$

Desejamos calcular o módulo de $z \quad (x+yi)^2$, isto é, o módulo de $z \quad (1+2i)^2$. Veja que $|1+2i| \quad \sqrt{1^2+2^2} \quad \sqrt{5}$. Logo:

$$\begin{aligned}|z| &\quad |(1+2i)^2|\\ |z| &\quad |1+2i|^2\\ |z| &\quad (\sqrt{5})^2\\ |z| &\quad 5.\end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2003) QUESTÃO 23

Sendo i a unidade imaginária, a potência de $\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3$ é igual a

(a) 64
(b) -64
(c) $64i$
(d) $-64i$

R: Basta efetuarmos as contas:

$$\begin{aligned}\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3 &\quad \left[1-2i+i^2-(1+2i+i^2)\right]^3\\ &\quad \left(1-2i+i^2-1-2i-i^2\right)^3\\ &\quad (-4i)^3\\ &\quad (-4)^3\cdot i^3\\ &\quad -64\cdot(-i)\\ &\quad 64i.\end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 24

Sendo i a unidade imaginária, o resultado de $\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}$ é

(a) $-1-3i$

(b) $-13-39i$

(c) $-\frac{13}{5}-\frac{39i}{5}$

(d) $\frac{13}{5}+\frac{39i}{5}$

R: Comecemos a fazer os cálculos:

$$
\begin{aligned}
\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i} & \frac{18-12i+12i-8i^2}{-1+3i} \\
& \frac{18+8}{-1+3i} \\
& \frac{26}{-1+3i} \\
& \frac{26\cdot(-1-3i)}{(-1+3i)\cdot(-1-3i)} \\
& \frac{-26-78i}{(-1)^2+(-3)^2} \\
& \frac{-26-78i}{1+9} \\
& \frac{-26-78i}{10} \\
& \frac{-13-39i}{5} \\
& -\frac{13}{5}-\frac{39i}{5}.
\end{aligned}
$$

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 25

Sendo $\frac{1+i}{i}$ um número complexo, seu conjugado vale

(a) $\frac{1-i}{i}$

(b) $-\dfrac{-1+i}{i}$
(c) $1+i$
(d) $\dfrac{i}{1+i}$

R: Façamos os cálculos, racionalizando a expressão dada:

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{i} \quad & \frac{(1+i)\cdot i}{i\cdot i}\\ & \frac{i+i^2}{i^2}\\ & \frac{i-1}{-1}\\ & 1-i.\end{aligned}$$

O conjugado de $1-i$ é $1+i$.

Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 26

A equação $x^2-4x+5 \quad 0$, no campo complexo, tem como conjunto verdade

(a) $\{2-i, 2+i\}$.
(b) $\{2-2i, 2+2i\}$.
(c) $\{1-i, 1+i\}$.
(d) $\{4-i, 4+i\}$.

(EEAR-2004) QUESTÃO 27

A soma dos possíveis números complexos z_1 e z_2, tais que $z^2 \quad 5+12i$, é

(a) 6.
(b) 0.
(c) $4i$.
(d) $3+2i$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 28

Sendo i a unidade imaginária, a potência $\left[(1-i)^2-(1+i)^2\right]^3$ é igual a

(a) 64.
(b) -64.
(c) $64i$.
(d) $-64i$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 29

Sendo i a unidade imaginária, simplificando-se a expressão $\dfrac{\cos x + i\operatorname{sen} x}{\cos x - i\operatorname{sen} x}$ obtém-se

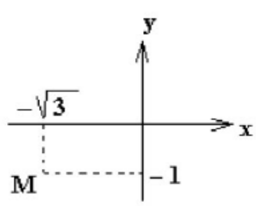
(a) $i(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$.
(b) $i(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$.
(c) $\cos 2x - i\operatorname{sen} 2x$.
(d) $\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 30

Se $z \quad \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$, então z^7 é igual ao produto de $8\sqrt{2}$ por

(a) $\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$
(b) $\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}$
(c) $\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}$
(d) $\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 31



Seja M o afixo de um número complexo z. A forma polar de z é

(a) $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(b) $\cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$

(c) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$

(d) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 32

Sendo i a unidade imaginária, simplificando-se a expressão $\frac{(3+i)^{71} \cdot (3-i)^{30}}{(i-3)^{29} \cdot (-3-i)^{70}}$, obtém-se:

(a) -10.

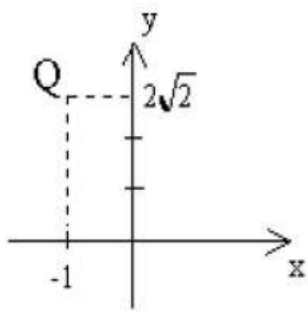
(b) -8.

(c) 8.

(d) 10.

(EEAR-2006) QUESTÃO 33

Seja Q a imagem geométrica de um número complexo. O argumento desse número é



(a) $\text{arcsen}\,\frac{1}{3}$

(b) $\text{arcsen}\,\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(c) $\arccos\frac{1}{3}$

(d) $\arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(EEAR-2006) QUESTÃO 34

Sendo $m - ni$ i e $mi - n$ $1 + 3i$, os números complexos m e n são tais, que sua soma é igual a

(a) $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
(b) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
(c) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
(d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

(EEAR-2006) QUESTÃO 35

O produto $z \cdot z'$, sendo $z \quad 2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ e $z' \quad a\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, pode ser expresso por:

(a) $2a(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)$
(b) $2a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
(c) $a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
(d) $a(\cos 2\pi+i\operatorname{sen} 2\pi)$

(EEAR-2007) QUESTÃO 36

O quadrante em que se representa, no plano de Argand-Gauss, o número complexo $z \quad 1+i^3$ é o

(a) 1º.
(b) 2º.
(c) 3º.
(d) 4º.

(EEAR-2007) QUESTÃO 37

A forma algébrica do número complexo $z \quad \frac{3}{3-i}+\frac{3+2i}{i-2}$ é

(a) $0,1-3i$.
(b) $0,1-1,1i$.
(c) $1,7+11i$.
(d) $1-1,7i$.

(EEAR-2008) QUESTÃO 38

Dado $x \in \mathbb{R}$, para que o número $z \quad (2-xi)(x+2i)$ seja real, o valor de x pode ser

(a) 4.
(b) 0.
(c) -1.
(d) -2.

(EEAR-2008) QUESTÃO 39

O módulo do complexo $z \quad -3+4i$ é

(a) 3.
(b) 4.
(c) 5.
(d) 6.

(EEAR-2008) QUESTÃO 40

Calculando i^{2053} obtém-se

(a) 1.
(b) i.
(c) $-i$.
(d) -1.

(EEAR-2009) QUESTÃO 41

Sejam dois números complexos z_1 e z_2. Se z_1 tem imagem $P(4,-1)$ e $z_2 \quad -1+3i$, então $z_1 - z_2$ é igual a

(a) $3+4i$.
(b) $1-5i$.
(c) $5-4i$.
(d) $2+2i$.

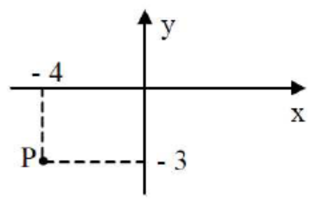
(EEAR-2009) QUESTÃO 42

Se a forma algébrica de um número complexo é $-1+i$, então sua forma trigonométrica tem argumento igual a

(a) $\frac{5\pi}{6}$
(b) $\frac{3\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}$
(d) $\frac{\pi}{4}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 43

Na figura, o ponto P representa um número complexo, cujo conjugado é



(a) $-3+4i$.
(b) $-4+3i$.
(c) $4-3i$.
(d) $3-4i$.

(EEAR-2010) QUESTÃO 44

O inverso do número complexo z $-2i$ é z'

(a) $\frac{i}{2}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) -2
(d) $2i$

(EEAR-2010) QUESTÃO 45

Seja o número complexo z $1+i$. Se z' é o conjugado de z, então o produto $|z|\cdot|z'|$ é igual a

(a) 1.
(b) 2.
(c) $\sqrt{3}$.
(d) $2\sqrt{3}$.

(EEAR-2010) QUESTÃO 46

O valor de $i^{11} - i^{21} - i^{38}$ é

(a) $1 - 2i$.
(b) $2 - i$.
(c) -2.
(d) 1.

(EEAR-2010) QUESTÃO 47

Multiplicando-se o número complexo $2 - 3i$ pelo seu conjugado, obtém-se

(a) 0.
(b) -1.
(c) 11.
(d) 13.

(EEAR-2011) QUESTÃO 48

Seja z' o conjugado do número complexo $z \quad 1 - 3i$. O valor de $2z + z'$ é

(a) $3 - 3i$.
(b) $1 - 3i$.
(c) $3 + i$.
(d) $1 + i$.

(EEAR-2011) QUESTÃO 49

O número complexo $z \quad (a - 4) + (b - 5)i$ será um número imaginário puro se

(a) $a \quad 4$ e $b \quad 5$.
(b) $a \quad 4$ e $b\ /\ 5$.
(c) $a\ /\ 4$ e $b \quad 5$.
(d) $a\ /\ 4$ e $b\ /\ 5$.

(EEAR-2012) QUESTÃO 50

O módulo do número complexo $z \quad -1 + 3i$ é

(a) 1
(b) 2
(c) $\sqrt{5}$
(d) $\sqrt{10}$

(EEAR-2013) QUESTÃO 51

Sejam ρ_1 e ρ_2, respectivamente, os módulos dos números complexos $z_1 \quad 1+2i$ e $z_2 \quad 4-2i$. Assim, $\rho_1+\rho_2$ é igual a

(a) 5
(b) $\sqrt{5}$
(c) $2\sqrt{5}$
(d) $3\sqrt{5}$

(EEAR-2013) QUESTÃO 52

Se $z \quad 3+2i$ é um número complexo, então z^2 é igual a

(a) $5+12i.$
(b) $9+12i.$
(c) $13+4i.$
(d) $9+4i.$

(EEAR-2013) QUESTÃO 53

Seja z' o conjugado de um número complexo z. Sabendo que $z \quad a+bi$ e que $2z+z' \quad 9+2i$, o valor de $a+b$ é

(a) 5
(b) 4
(c) 3
(d) 2

(EEAR-2014) QUESTÃO 54

Se i é a unidade imaginária, pode-se afirmar que i^7 é igual a

(a) i.
(b) i^2.
(c) i^3.
(d) i^4.

(EEAR-2015) QUESTÃO 55

Sejam z um número complexo e z' o conjugado de z. Se $z_1 \quad z + z'$ e $z_2 \quad z - z'$, pode-se garantir que

(a) z_1 é um número real e z_2 é um imaginário puro.
(b) z_1 é um imaginário puro e z_2 é um número real.
(c) z_1 e z_2 são imaginários puros.
(d) z_1 e z_2 são números reais.

(EEAR-2015) QUESTÃO 56

Seja $z \quad \sqrt{3} \cdot (\cos 20° + \mathrm{i} \cdot \operatorname{sen} 20°)$ um número complexo na forma trigonométrica. Assim, z^2 é igual a:

(a) $3 \cdot (\cos 20° + \mathrm{i} \cdot \operatorname{sen} 20°)$
(b) $3 \cdot (\cos 40° + \mathrm{i} \cdot \operatorname{sen} 40°)$
(c) $2\sqrt{3} \cdot (\cos 20° + \mathrm{i} \cdot \operatorname{sen} 20°)$
(d) $2\sqrt{3} \cdot (\cos 40° + \mathrm{i} \cdot \operatorname{sen} 40°)$

(EEAR-2016) QUESTÃO 57

Sejam Z_1 e Z_2 dois números complexos. Sabe-se que o produto de Z_1 e Z_2 é $-10 + 10\mathrm{i}$. Se $Z_1 \quad 1 + 2\mathrm{i}$, então o valor de Z_2 é igual a

(a) $5 + 6\mathrm{i}$
(b) $2 + 6\mathrm{i}$
(c) $2 + 15\mathrm{i}$
(d) $-6 + 6\mathrm{i}$

(EEAR-2016) QUESTÃO 58

Sabe-se que os números complexos $Z_1 \quad [2m(3+m)]+(3n+5)i$ e $Z_2 \quad (2m^2+12)+[4(n+1)]i$ são iguais. Então, os valores de m e n são, respectivamente

(a) 3 e 1
(b) 2 e 1
(c) 2 e -1
(d) 3 e -1

(EEAR-2017) QUESTÃO 59

Considere $z_1 \quad (2+x)+(x^2-1)i$ e $z_2 \quad (m-1)+(m^2-9)i$. Se z_1 é um número imaginário puro e z_2 é um número real, é correto afirmar que $x+m$ pode ser igual a

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

(EEAR-2017) QUESTÃO 60

Se i é a unidade imaginária, então $2i^3+3i^2+3i+2$ é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand- Gauss no ____ quadrante.

(a) primeiro
(b) segundo
(c) terceiro
(d) quarto

(EEAR-2018) QUESTÃO 61

Sejam os números complexos $z_1 \quad 1-i$, $z_2 \quad 3+5i$ e $z_3 \quad z_1+z_2$. O módulo de z_3 é igual a

(a) $2\sqrt{2}$
(b) $4\sqrt{2}$
(c) $2\sqrt{3}$
(d) $4\sqrt{3}$

(EEAR-2018) QUESTÃO 62

Dado o número complexo $z \quad a + bi$, se $z + \bar{z} \quad 10$ e $z - \bar{z} \quad -16i$, então $a + b$ é

(a) -6
(b) -3
(c) 2
(d) 8

(EEAR-2019) QUESTÃO 63

A parte real das raízes complexas da equação $x^2 - 4x + 13 \quad 0$, é igual a

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

(EEAR-2019) QUESTÃO 64

Se i é a unidade imaginária dos números complexos, o valor de $i^{15} + i^{17}$ é

(a) $-i$
(b) -1
(c) 0
(d) 1

(ESPCEX-2011) QUESTÃO 65

Seja o número complexo $z \quad \dfrac{x + yi}{3 + 4i}$, com x e y reais e $i^2 \quad -1$. Se $x^2 + y^2 \quad 20$, então o módulo de z é igual a:

(a) 0
(b) $\sqrt{5}$
(c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
(d) 4
(e) 10

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 66

A figura geométrica formada pelos afixos das raízes complexas da equação $x^3 - 8 \quad 0$ tem área igual a

(a) $7\sqrt{3}$
(b) $6\sqrt{3}$
(c) $5\sqrt{3}$
(d) $4\sqrt{3}$
(e) $3\sqrt{3}$

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 67

Sendo $\overline{Z}$ o conjugado do número complexo Z e i a unidade imaginária, o número complexo Z que satisfaz à condição $Z + 2\overline{Z} \quad 2 - Zi$ é

(a) $Z \quad 0 + 1i$
(b) $Z \quad 0 + 0i$
(c) $Z \quad 1 + 0i$
(d) $Z \quad 1 + i$
(e) $Z \quad 1 - i$

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 68

Seja a função $f(x) \quad \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \text{ for racional} \\ 2x^4, \text{ se } x \text{ for irracional} \\ x^2 + 8, \text{ se } x \text{ for não real} \end{cases}$. Assim, o valor de $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(i^{64} + 5i^{110}) + f\left(f\left(\sqrt{-2}\right)\right)$, em que $i^2 \quad -1$ é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

(ESPCEX-2013) QUESTÃO 69

Sendo z o número complexo obtido na rotação de $90°$, em relação à origem, do número complexo $1 + i$, determine z^3:

(a) $1 - i$

(b) $-i + i$

(c) $-2i$

(d) $-1 - 2i$

(e) $2 + 2i$

(ESPCEX-2013) QUESTÃO 70

De todos os números complexos z que satisfazem a condição $|z - (2 - 2i)| \quad 1$, existe um número complexo z_1 que fica mais próximo da origem. A parte real desse número complexo z_1 é igual a:

(a) $\dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$

(b) $\dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$

(c) $\dfrac{4 - \sqrt{2}}{4}$

(d) $\dfrac{4 + \sqrt{2}}{4}$

(e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ESPCEX-2014) QUESTÃO 71

A representação geométrica, no Plano de Argand-Gauss, do conjunto de pontos que satisfazem a condição $|z + 2 - 3i| \quad |z - 1 + 4i|$, com $z \quad x + yi$, sendo x e y números reais, é reta de equação

(a) $2x - 3y + 7 \quad 0$.

(b) $3x - 7y - 2 \quad 0$.

(c) $2x - 3y + 3 \quad 0$.

(d) $4x - 3y + 3 \quad 0$.

(e) $2x - y \quad 0$.

(ESPCEX-2015) QUESTÃO 72

Se $(1 + i)\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\right) \quad x + iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, o valor de $\sqrt{3} \cdot x + y$ é:

(a) $\sqrt{6}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(d) $3\sqrt{6}$
(e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

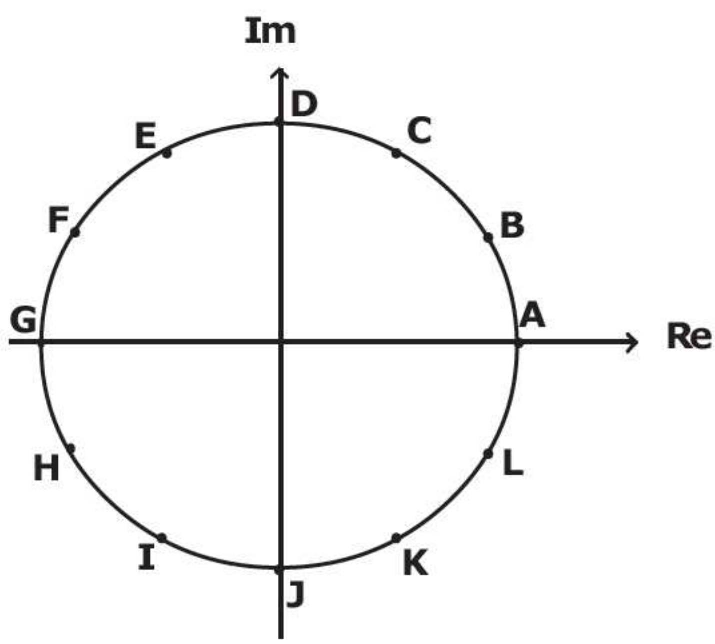
(ESPCEX-2016) QUESTÃO 73

Sejam z e v números complexos onde $|z|$ $\quad 1$ e v tem coordenadas no plano de Argand-Gauss $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Sobre o número complexo $z \cdot v$ (resultante da multiplicação dos complexos z e v), podemos afirmar que

(a) sempre é um número real.
(b) sempre tem módulo igual a 2.
(c) sempre é um número imaginário puro.
(d) pertence à circunferência $x^2 + y^2 \quad 1$.
(e) sempre tem argumento igual a $\dfrac{\pi}{4}$.

(ESPCEX-2017) QUESTÃO 74

Na figura abaixo, está representado o plano de Argand-Gauss com os afixos de 12 números complexos, identificados de A a L. Sabe-se que esses afixos dividem a circunferência em 12 partes iguais e que $A \quad (1, 0)$.



O polígono regular cujos vértices são os afixos de $\sqrt[4]{E}$ é

(a) BEHK.
(b) CFIL.
(c) ADGJ.
(d) BDHJ.
(e) CEIK.

(ESPCEX-2017) QUESTÃO 75

Seja a igualdade $\frac{a}{3} - \frac{b}{5}i \quad \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)^4$, onde i é a unidade imaginária. Se a e b são números reais, então o quociente $\frac{a}{b}$ é igual a:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
(b) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
(c) $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$
(d) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$
(e) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

GABARITO

Questão 1: A	**Questão 15**: B	**Questão 29**: D	**Questão 43**: B
Questão 2: B	**Questão 16**: A	**Questão 30**: D	**Questão 44**: A
Questão 3: A	**Questão 17**: C	**Questão 31**: C	**Questão 45**: B
Questão 4: A	**Questão 18**: B	**Questão 32**: A	**Questão 46**: A
Questão 5: A	**Questão 19**: A	**Questão 33**: B	**Questão 47**: D
Questão 6: C	**Questão 20**: A	**Questão 34**: C	**Questão 48**: A
Questão 7: B	**Questão 21**: A	**Questão 35**: A	**Questão 49**: B
Questão 8: B	**Questão 22**: B	**Questão 36**: D	**Questão 50**: D
Questão 9: A	**Questão 23**: C	**Questão 37**: B	**Questão 51**: D
Questão 10: A	**Questão 24**: C	**Questão 38**: D	**Questão 52**: A
Questão 11: D	**Questão 25**: C	**Questão 39**: C	**Questão 53**: A
Questão 12: D	**Questão 26**: A	**Questão 40**: B	**Questão 54**: C
Questão 13: B	**Questão 27**: B	**Questão 41**: C	**Questão 55**: A
Questão 14: A	**Questão 28**: C	**Questão 42**: B	**Questão 56**: B

Questão 57: B
Questão 58: B
Questão 59: A
Questão 60: B
Questão 61: B
Questão 62: B
Questão 63: B
Questão 64: C
Questão 65: C
Questão 66: E
Questão 67: D
Questão 68: C
Questão 69: E
Questão 70: B
Questão 71: B
Questão 72: A
Questão 73: D
Questão 74: A
Questão 75: A

2.3– Índice Remissivo

Afixo, 17
Argumento de um complexo, 21

Conjugado de um número complexo, 14

Forma algébrica, 6

Imaginário puro, 7

Módulo de um número complexo, 8

Parte imaginária, 6
Parte real, 6
Plano de Argand-Gauss, 17
Primeira lei de De Moivre, 34

Real puro, 7

Segunda Lei de De Moivre, 36

Unidade imaginária, 4