Capítulo 14
Funções trigonométricas

Para pensar

1. Resposta pessoal.

2. Se a música tem 15 batidas a cada 10 segundos, temos:

15 batidas ——— 10 segundos
x batidas ——— 60 segundos

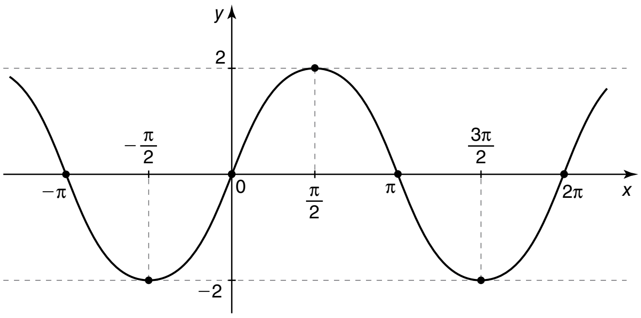
$$x = \frac{15 \cdot 60}{10} = 90$$

Portanto, essa música tem 90 bpm.

Exercícios propostos

1. a) $y = 2 \text{ sen } x$

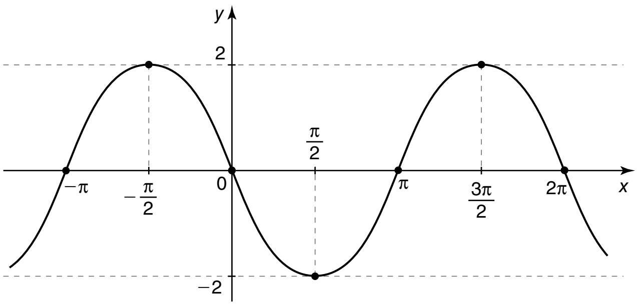
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

b) $y = -2 \text{ sen } x$

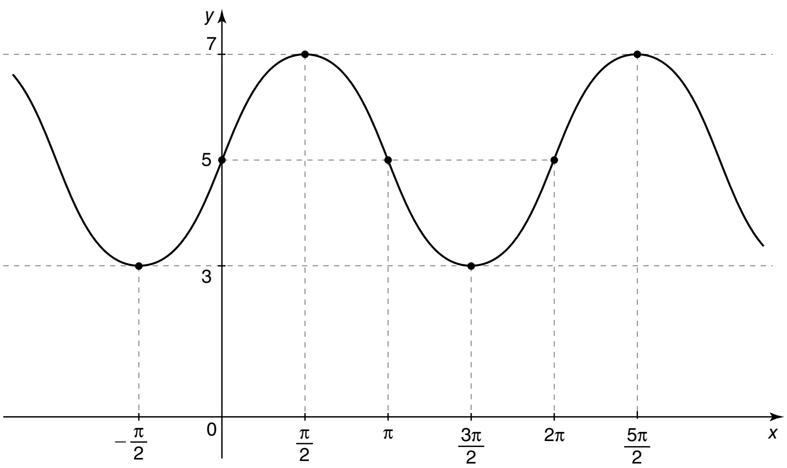
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

c) $y = 5 + 2 \text{ sen } x$

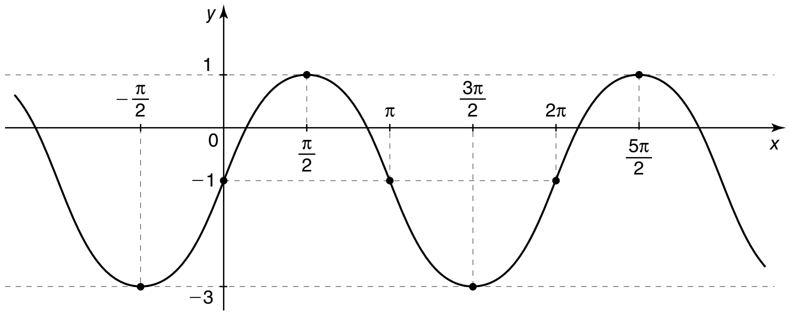
x	y
0	5
$\frac{\pi}{2}$	7
π	5
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	5



$D = \mathbb{R}$
$Im = [3, 7]$
$p = 2\pi$

d) $y = -1 + 2 \text{ sen } x$

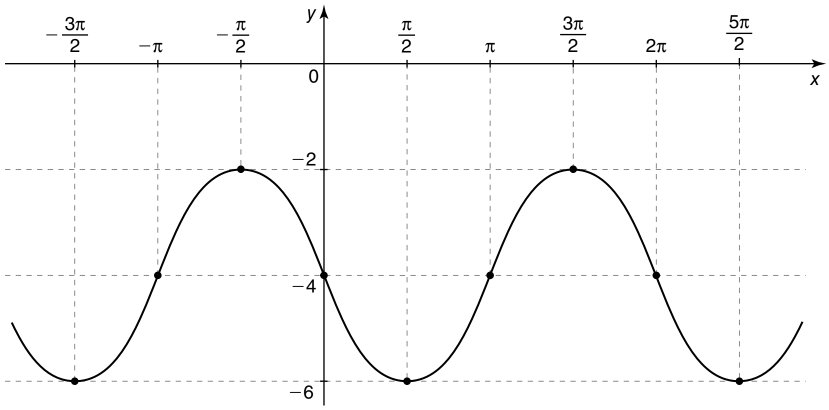
x	y
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	1
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 2\pi$

e) $y = -4 - 2 \text{ sen } x$

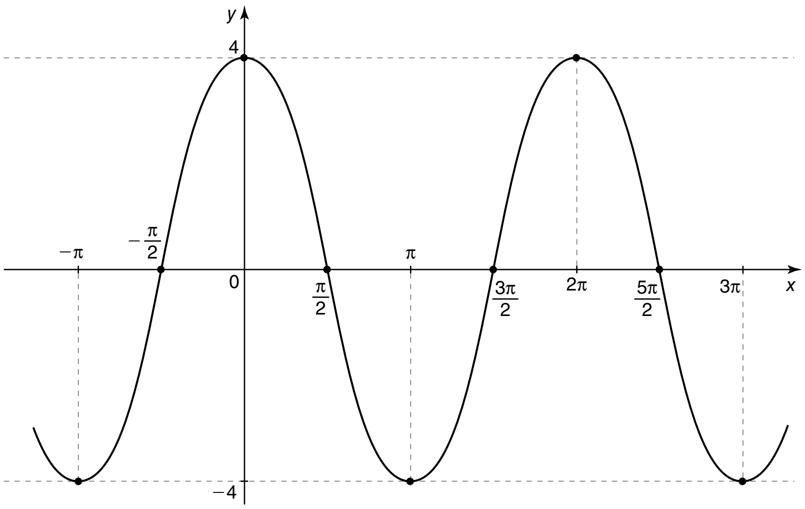
x	y
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	-6
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	-4



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-6, -2]$
$p = 2\pi$

f) $y = 4 \cos x$

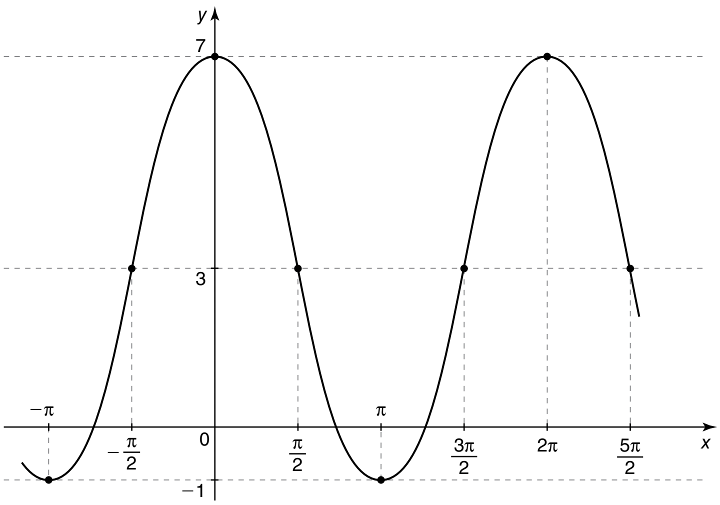
x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	4



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-4, 4]$
$p = 2\pi$

g) $y = 3 + 4 \cos x$

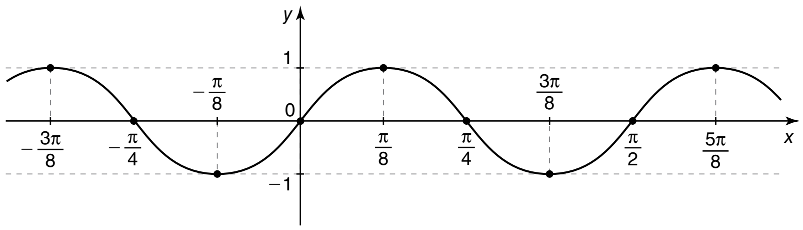
x	y
0	7
$\frac{\pi}{2}$	3
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	7



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 7]$
$p = 2\pi$

2. a) $y = \text{sen } 4x$

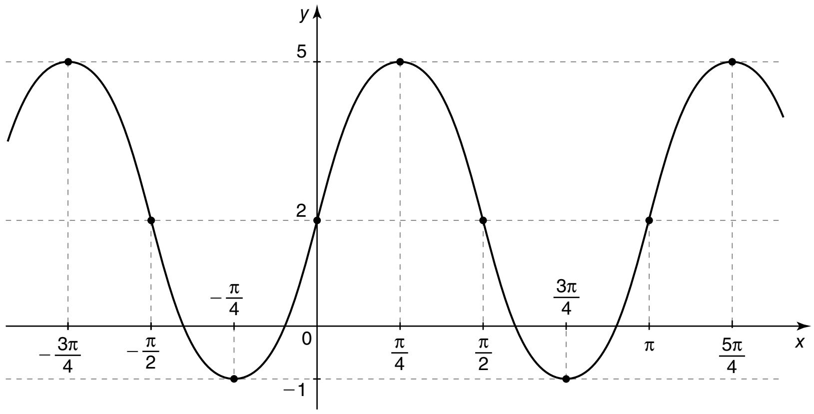
$4x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1
π	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = \frac{\pi}{2}$

b) $y = 2 + 3 \text{ sen } 2x$

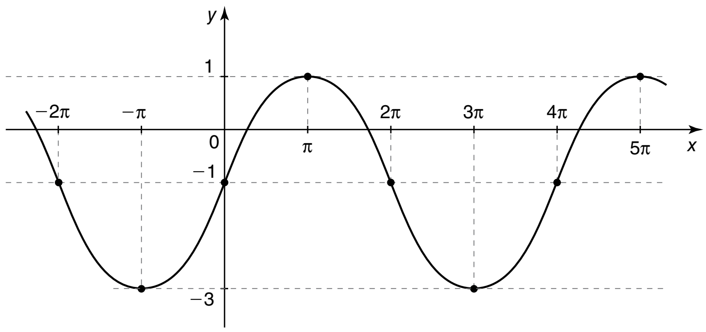
$2x$	x	y
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	5
π	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 5]$
$p = \pi$

c) $y = -1 + 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

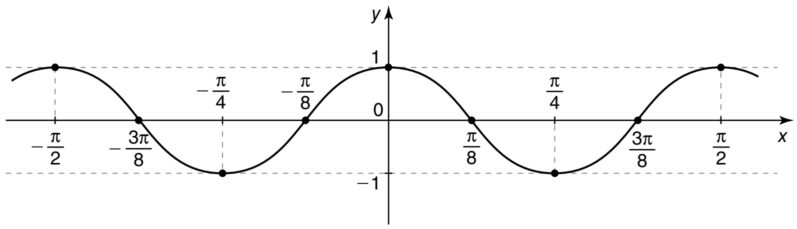
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-3
2π	4π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 4\pi$

d) $y = \cos 4x$

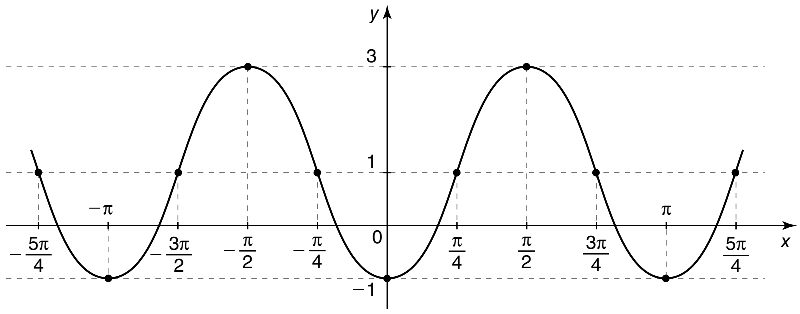
$4x$	x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	0
π	$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	0
2π	$\frac{\pi}{2}$	1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = \frac{\pi}{2}$

e) $y = 1 - 2\cos 2x$

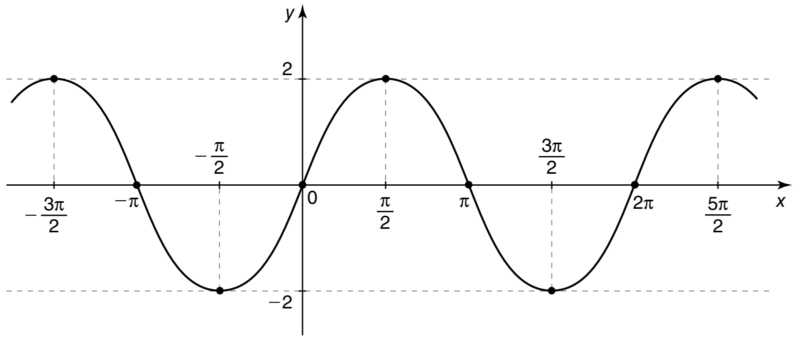
$2x$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 3]$
$p = \pi$

f) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

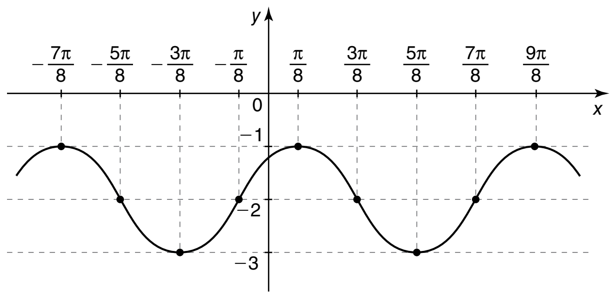
$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	-2
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
2π	$\frac{5\pi}{2}$	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

g) $y = -2 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{8}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-2
π	$\frac{5\pi}{8}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{8}$	-2
2π	$\frac{9\pi}{8}$	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, -1]$
$p = \pi$

3. a) $y = 8 \text{ sen } x$

$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

b) $y = \text{sen } 8x$

$p = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

c) $y = \text{sen } \frac{x}{8}$

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{8}\right|} = 16\pi$

d) $y = \cos(-3x)$

$p = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

e) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

f) $y = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

$p = \frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

4. a) $y = 10 \text{ sen } x$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -10 \leqslant 10 \text{ sen } x \leqslant 10$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$.

b) $y = -10 \text{ sen } x$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -10 \leqslant -10 \text{ sen } x \leqslant 10$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$.

c) $y = 3 + 2 \cos x$

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2 \cos x \leqslant 2$

$\therefore\ 1 \leqslant 3 + 2 \cos x \leqslant 5$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$.

d) $y = -4 + 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$-1 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 5$

$\therefore\ -9 \leqslant -4 + 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -9 \leqslant y \leqslant 1\}$.

5. O gráfico representa uma função do tipo $f(x) = a \text{ sen } (bx)$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^*$. Como o período é 4π e o ponto $(\pi, 2)$ pertence ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{|b|} = 4\pi & \text{(I)} \\ 2 = a \text{ sen } (b\pi) & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), obtemos $b = \frac{1}{2}$ ou $b = -\frac{1}{2}$

- Substituindo $b = \frac{1}{2}$ na equação (II):

  $2 = a \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a = 2$

- Substituindo $b = -\frac{1}{2}$ na equação (II):

  $2 = a \text{ sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a = -2$

Assim, concluímos que $f(x) = 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$ ou $f(x) = -2 \text{ sen}\left(-\frac{x}{2}\right)$

Alternativa **b**.

6. O período da função é π e, portanto:

$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$

$\therefore\ b = \pm 2$

Assim, temos que $y = a + \cos 2x$ ou, o que é equivalente, $y = a + \cos(-2x)$. Como o gráfico da função passa pelo ponto $(\pi, 4)$, concluímos:

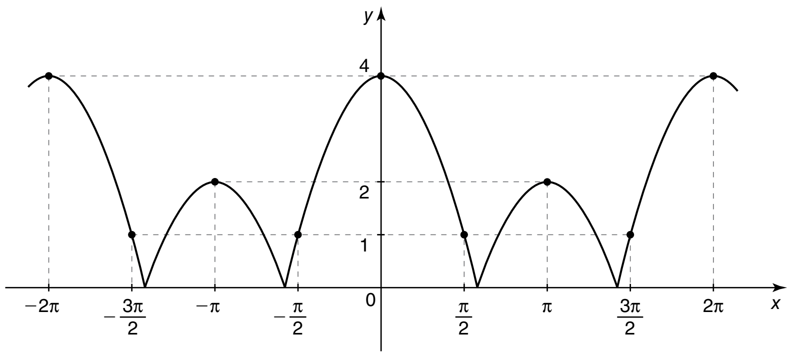
$4 = a + \cos(2\pi) \Rightarrow 4 = a + 1$

$\therefore\ a = 3$

Logo: $a = 3$ e $b = \pm 2$

7. a) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 1 + 3 \cos x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |1 + 3 \cos x|$.

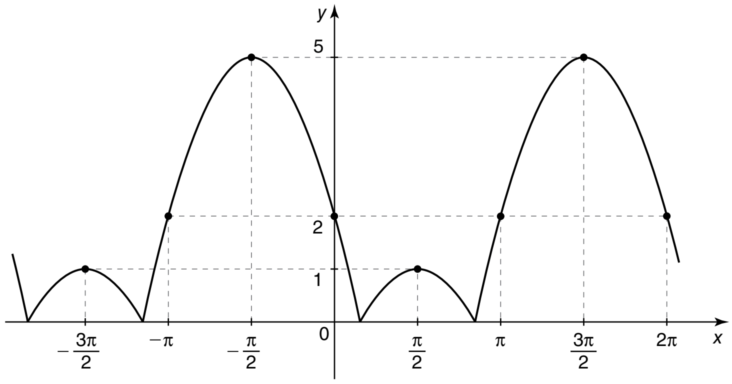


$D = \mathbb{R}$

$Im = [0, 4]$

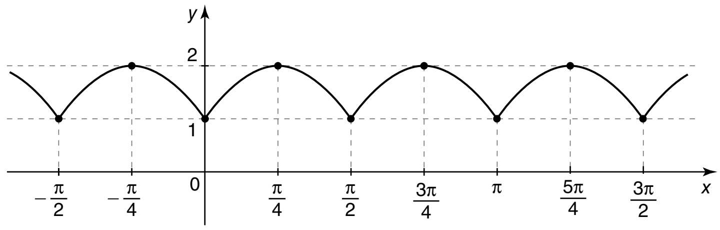
$p = 2\pi$

b) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = -2 + 3\ \text{sen}\ x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |-2 + 3\ \text{sen}\ x|$.



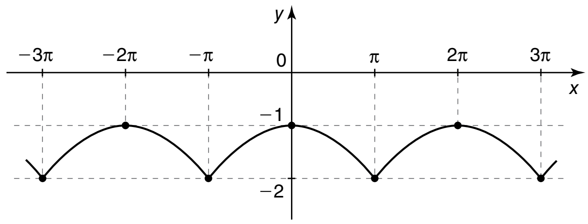
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 5]$
$p = 2\pi$

c) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{sen}\ 2x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = |\text{sen}\ 2x|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 uma unidade para cima, obtendo então o gráfico de $y = 1 + |\text{sen}\ 2x|$.



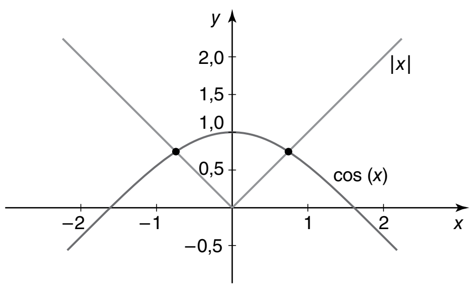
$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 2]$
$p = \frac{\pi}{2}$

d) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos \frac{x}{2}$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para baixo, obtendo então o gráfico de $y = -2 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.



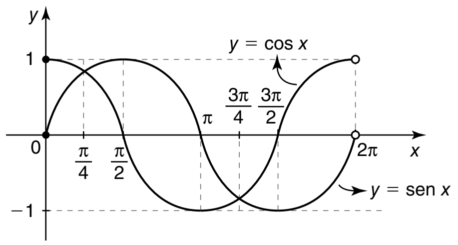
$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, -1]$
$p = 2\pi$

8. Construindo no plano cartesiano o gráfico das funções $y = \cos x$ e $y = |x|$, temos:



Os gráficos se interceptam em dois pontos distintos; portanto, existem apenas duas soluções reais para a equação dada.
Alternativa **c**.

9. a)



b) De acordo com o gráfico, sen x > cos x para $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$.

10. Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Então:

$-1 \leqslant 4m - 5 \leqslant 1 \Rightarrow 4 \leqslant 4m \leqslant 6$

$\therefore\ 1 \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}$

Assim, somente para $1 \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}$ existe a igualdade $\text{sen } x = 4m - 5$.

11. A distância d é o período p da função $f(x) = 5 \cos \frac{x}{2}$, ou seja: $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$ cm $= 4\pi$ cm

A altura h é o comprimento do intervalo $[-5, 5]$, imagem da função f, ou seja: $h = 10$ cm

12. A medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$ em função do tempo t é dada por:

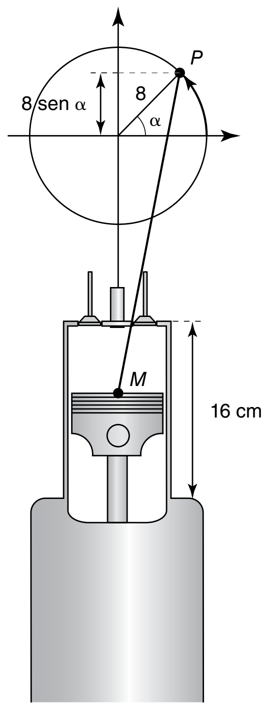
Medida do arco (radiano)		Tempo (minuto)
2π	———	$\frac{1}{30}$
α	———	t

$\therefore\ \alpha = 60\pi t$ rad

Logo, as coordenadas de p são dadas por $f(t) = 7 \cos (60\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (60\pi t)$.

Alternativa **d**.

13. Vamos imaginar uma circunferência de diâmetro 16 cm com o centro na origem de um sistema cartesiano, tal que, quando um ponto P gira no sentido anti-horário na circunferência, uma haste rígida MP acompanha o movimento do pistão, conforme figura.



A medida α, em radiano, é dada em função do tempo t, em minuto, pela regra de três:

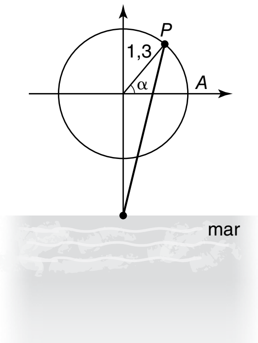
Medida do arco (radiano)		Tempo (minuto)
2π	———	$\frac{1}{60}$
α	———	t

$\therefore\ \alpha = 120\pi t$

Como a altura da tampa do pistão, em relação à base, é dada pela ordenada do ponto P, a função procurada é: $f(t) = 8 + 8 \text{ sen } 120\pi t$

Alternativa **d**.

14. Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência de raio 1,3 m, acima do nível do mar, e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura.



O subir e descer da maré, como um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Supondo esse movimento circular com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\widehat{AP}$, em função do horário t, em hora, com $0 \leqslant t \leqslant 24$, em que $t = 2$ corresponda a um horário em que P passou pelo ponto $A(1{,}3; 0)$:

Medida do arco (radiano)		Tempo (hora)
2π	———	12
α	———	$t - 2$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi(t-2)}{6}$

Assim, a ordenada do ponto P no horário t, em hora, é dada pela função:

$f(t) = 1{,}3 \text{ sen } \dfrac{\pi(t-2)}{6}$

15. **a)** Para $t = 6$, temos:

$S(6) = 100 + 50 \text{ sen}\left(\dfrac{\pi \cdot 6}{6}\right) \Rightarrow S(6) = 100$

Logo, ao final do mês de junho, a área ocupada pela vegetação é 100 km^2.

b) O valor máximo, S_M, da função S é atingido quando $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 1$.

$S_M = 100 + 50 \cdot 1 \Rightarrow S_M = 150$

Logo, a maior área ocupada pela vegetação ao longo do ano é 150 km^2.

c) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = 3 + 12k$

Para $k = 0$, temos $t = 3$. Logo, a vegetação atinge a maior área no mês de março.

d) O valor mínimo, S_m, da função S é atingido quando $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = -1$.

$S_m = 100 + 50 \cdot (-1) \Rightarrow S_m = 50$

Logo, a menor área ocupada pela vegetação ao longo do ano é 50 km^2.

e) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) = -1 \Rightarrow \dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = 9 + 12k$

Para $k = 0$, temos $t = 9$. Logo, a vegetação atinge a menor área no mês de setembro.

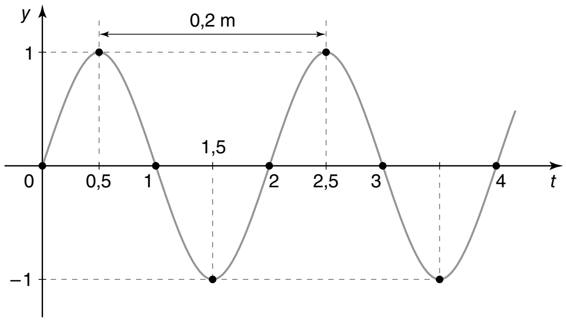
f) $125 = 100 + 50 \text{ sen } \dfrac{\pi t}{6} \Rightarrow \text{sen } \dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = 1 + 12k$ ou $t = 5 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $t = 1$ ou $t = 5$. Assim, concluímos que a vegetação atinge 125 km^2 nos meses de janeiro e maio.

16. a) Pelo enunciado temos a seguinte figura:

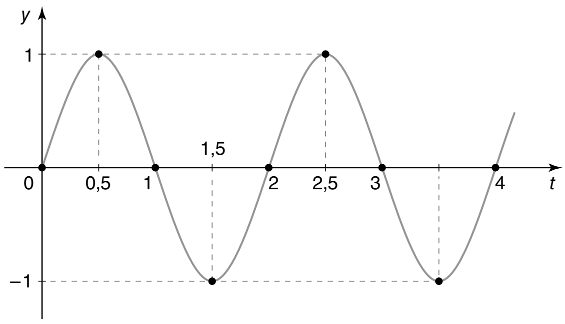


A velocidade de propagação é equivalente ao espaço de um ciclo dividido por seu tempo, logo:

$v = \dfrac{0,2}{2,5 - 0,5} = \dfrac{0,2}{2} = 0,1$

Portanto, a velocidade é 0,1 m/s.

b) A velocidade da rolha é nula quando ela alcança a crista (ponto mais alto) ou o vale (ponto mais baixo) da onda, conforme desenho:



Assim, os instantes em que a velocidade da rolha é nula são: $t = 0,5$, $t = 1,5$, $t = 2,5$ e $t = 3,5$.

c) A equação que expressa y em função de *t* é: $y = \text{sen}\,(t \cdot \pi)$

17. a) $y = \text{tg}\,4x$

Sabemos que $\text{tg}\,4x = \dfrac{\text{sen}\,4x}{\cos 4x}$; portanto, a condição de existência é $\cos 4x \neq 0$,

ou seja, $4x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como tg 4*x* assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = 5\,\text{tg}\,\dfrac{3x}{2}$

A condição de existência é $\cos \dfrac{3x}{2} \neq 0$, ou seja, $\dfrac{3x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $5\,\text{tg}\,\dfrac{3x}{2}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é: $Im = \mathbb{R}$.

c) $y = 4 + \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right)$

A condição de existência é $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right) \neq 0$, ou seja, $x - \dfrac{\pi}{5} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq \dfrac{7\pi}{10} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{7\pi}{10} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $4 + \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

d) $y = \text{cotg } 4x$

Sabemos que $\text{cotg } 4x = \dfrac{\cos 4x}{\text{sen } 4x}$; portanto, a condição de existência é $\text{sen } 4x \neq 0$, ou seja,

$4x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como cotg 4x assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é: $Im = \mathbb{R}$.

e) $y = \text{cotg } \dfrac{x}{3}$

Sabemos que $\text{cotg } \dfrac{x}{3} = \dfrac{\cos \frac{x}{3}}{\text{sen } \frac{x}{3}}$; portanto, a condição de existência é $\text{sen } \dfrac{x}{3} \neq 0$, ou seja,

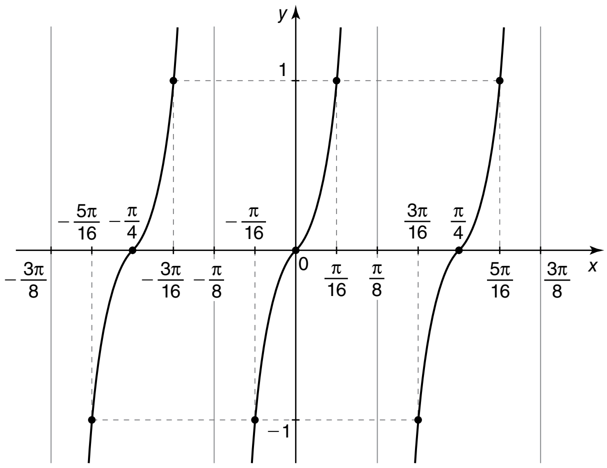
$\dfrac{x}{3} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 3k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

Como $\text{cotg } \dfrac{x}{3}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é: $Im = \mathbb{R}$.

18. a) $y = \text{tg } 4x$

$4x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{16}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\nexists$



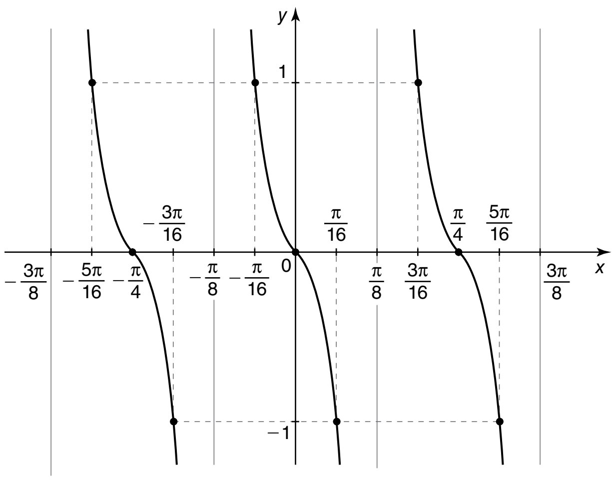
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \dfrac{\pi}{4}$

b) $y = -\text{tg } 4x$

$4x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{16}$	1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\nexists$



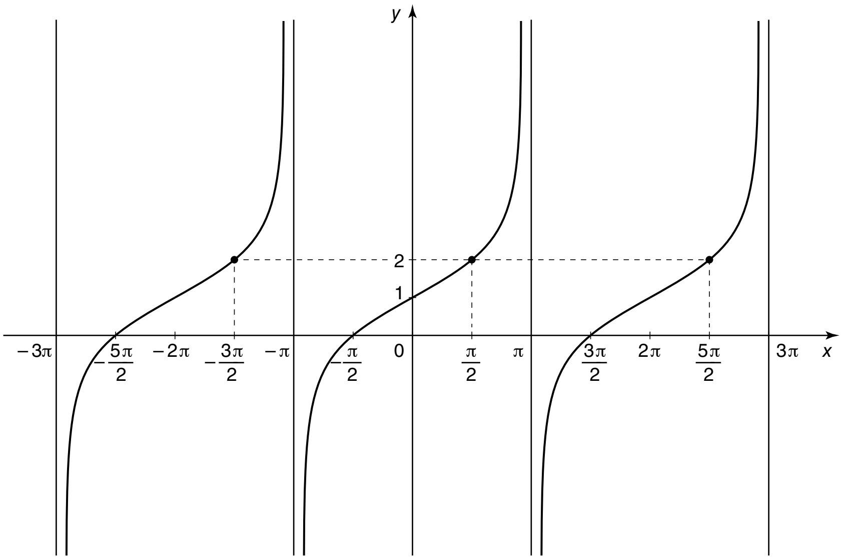
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \dfrac{\pi}{4}$

c) $y = 1 + \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$

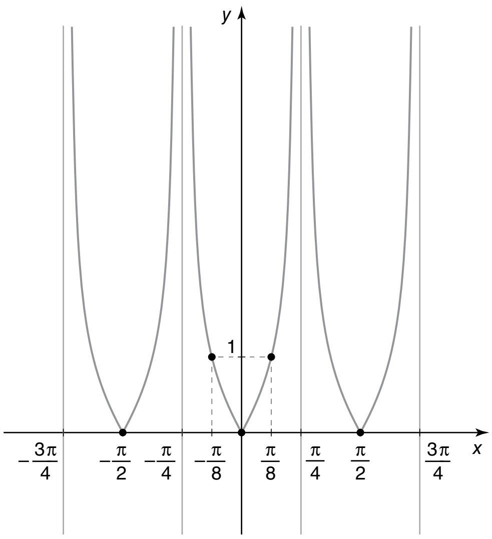
$\frac{x}{2}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0
0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$

d) $y = |\text{tg}\,2x|$

$2x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$



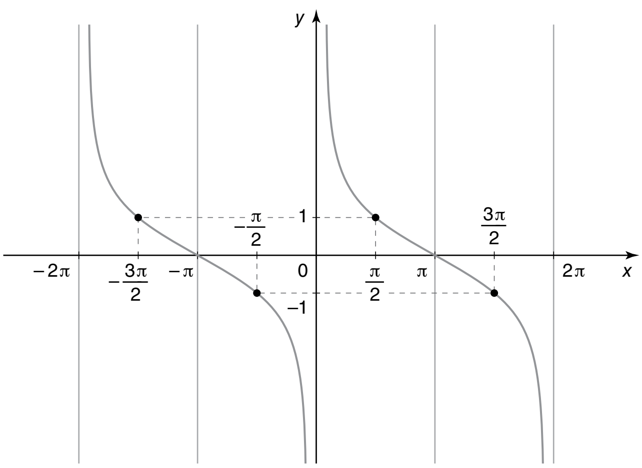
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = \dfrac{\pi}{2}$

e) $y = \text{cotg}\,\dfrac{x}{2}$

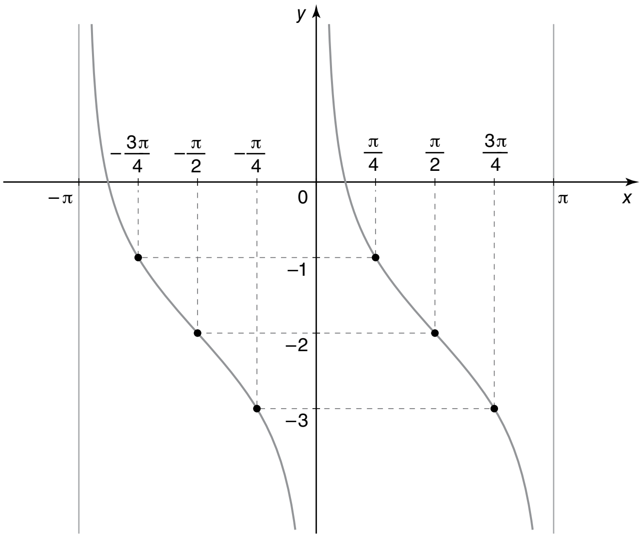
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$

f) $y = -2 + \text{cotg } x$

x	y
0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{3\pi}{4}$	-3
π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = \pi$

19. a) Nossa função é $y = \text{tg } 6x$; logo $m = 6$.
Assim:
$$p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{|6|} = \frac{\pi}{6}$$
Portanto, o período é $\frac{\pi}{6}$.

b) Nossa função é $y = 4 + \text{tg } \frac{x}{6}$; logo $m = \frac{1}{6}$.
Assim:
$$p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{6}\right|} = 6\pi$$
Portanto, o período é 6π.

c) Nossa função é $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$; logo $m = -2$.
Assim:
$$p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$$
Portanto, o período é $\frac{\pi}{2}$.

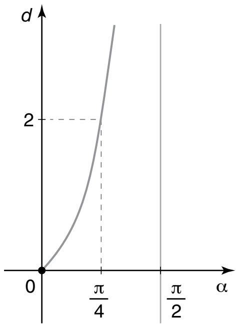
d) Nossa função é $y = \text{cotg } 4x$; logo $m = 4$.
Assim:
$$p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$$
Portanto, o período é $\frac{\pi}{4}$.

e) Nossa função é $y = \text{cotg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$; logo $m = 3$.
Assim:
$$p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$$
Portanto, o período é $\frac{\pi}{3}$.

f) Nossa função é $y = -\text{cotg } (-2x)$; logo $m = -2$.
Assim:
$$p = \frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$$
Portanto, o período é $\frac{\pi}{2}$.

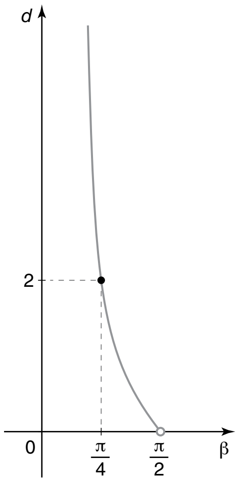
20. a) Pela função tangente, temos: $\text{tg}\,\alpha = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2\,\text{tg}\,\alpha$

b)



c) Pela função tangente, temos: $\text{tg}\,\beta = \frac{2}{d} \Rightarrow d = \frac{2}{\text{tg}\,\beta} = 2\,\text{cotg}\,\beta$

d)



21. a) $y = \text{cossec}\,2x$

- A condição de existência é $\text{sen}\,2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\text{cossec}\,2x$ assume qualquer valor real menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

b) $y = 2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2}$

- A condição de existência é $\text{sen}\,\frac{x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\text{cossec}\,\frac{x}{2} \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\,\frac{x}{2} \geqslant 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2} \leqslant 1$ ou $2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2} \geqslant 3$, o conjunto imagem da função é
  $Im =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

c) $y = \sec 4x$

- A condição de existência é $\cos 4x \neq 0$, ou seja, $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec 4x$ assume qualquer valor real menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

d) $y = 2\sec\frac{x}{2}$

- A condição de existência é $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\sec\frac{x}{2}$ assume qualquer valor real, menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

22. a) $m - 3 \text{ cossec } x = 6 \Rightarrow \text{cossec } x = \dfrac{m - 6}{3}$

Como cossec $x \leqslant -1$ ou cossec $x \geqslant 1$, temos que existe a igualdade se:

$\dfrac{m - 6}{3} \leqslant -1$ ou $\dfrac{m - 6}{3} \geqslant 1$

Logo, existe a igualdade se $m \leqslant 3$ ou $m \geqslant 9$

b) $k + 2 \sec x = 4 \Rightarrow \sec x = \dfrac{4 - k}{2}$

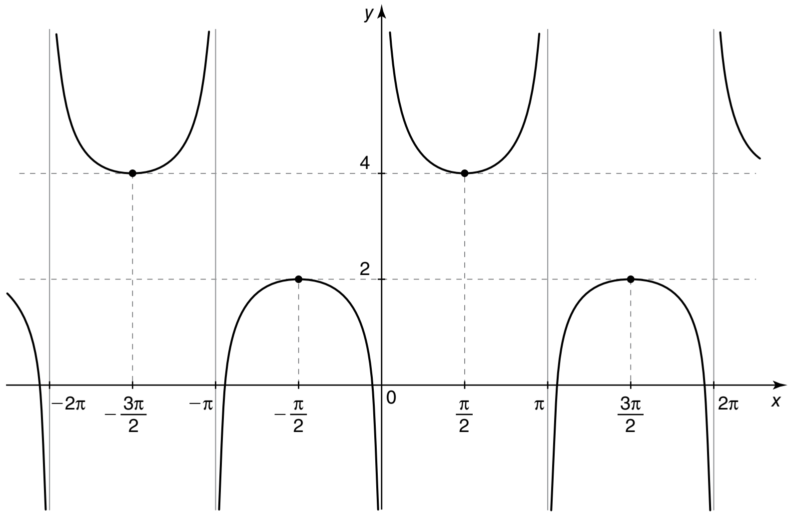
Como sec $x \leqslant -1$ ou sec $x \geqslant 1$, temos que a igualdade é impossível se:

$-1 < \dfrac{4 - k}{2} < 1$

Logo, a igualdade é impossível se $2 < k < 6$

23. a) $y = 3 + \text{cossec } x$

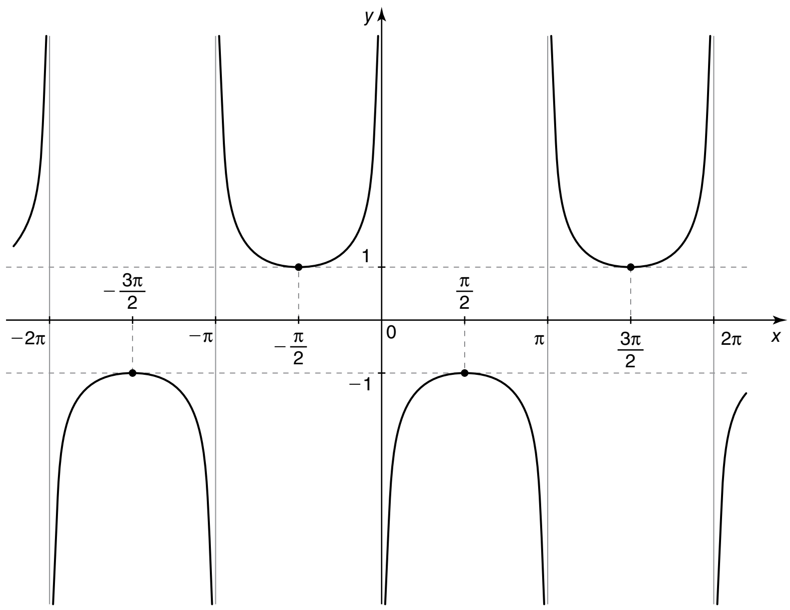
Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = \text{cossec } x$, de 3 unidades para cima, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$
$p = 2\pi$

b) $y = -\text{cossec } x$

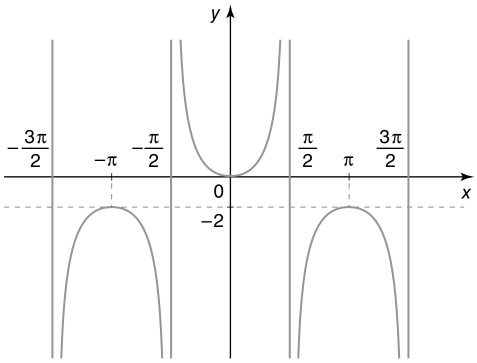
O gráfico dessa função é simétrico ao gráfico da função $y = \text{cossec } x$ em relação ao eixo das abscissas, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
$p = 2\pi$

c) $y = -1 + \sec x$

Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = -1 + \sec x$, de 1 unidade para baixo, ou seja:



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

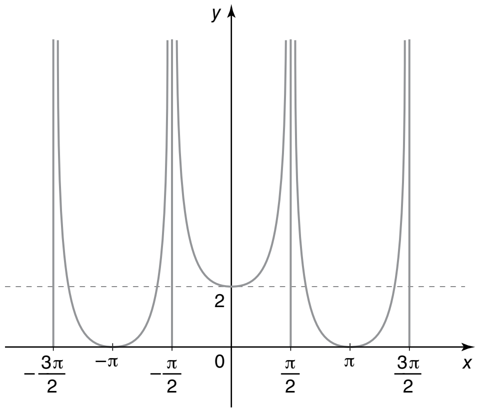
$p = 2\pi$

d) $y = |1 + \sec x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \sec x$.

Fase 2: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_1 uma unidade para cima, obtendo o gráfico de $y_2 = 1 + \sec x$.

Fase 3: No gráfico da função y_2 conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |1 + \sec x|$.



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = [0, +\infty[$

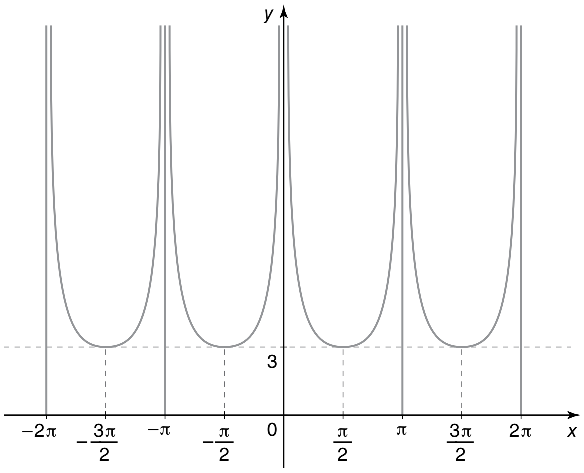
$p = 2\pi$

e) $y + 2 + |\text{cossec } x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cossec } x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y_2 = |\text{cossec } x|$.

Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para cima, obtendo o gráfico de $y = 2 + |\text{cossec } x|$.



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

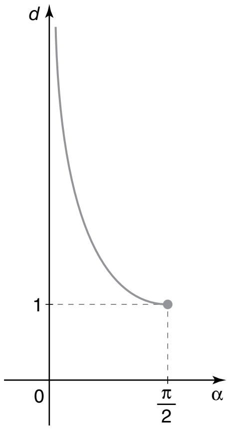
$Im = [3, +\infty[$

$p = 2\pi$

24. a) Analisando o gráfico do enunciado, temos:

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{d} \Rightarrow d = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \text{cossec } \alpha$

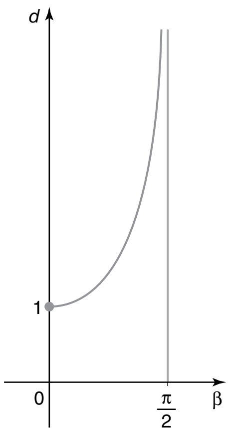
b)



c) Analisando o gráfico do enunciado, temos:

$\cos \beta = \frac{1}{d} \Rightarrow d = \frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta$

d)



25. a) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Logo, $\text{arcsen } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

b) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

c) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$.

Logo, $\text{arcsen } 1 = \frac{\pi}{2}$.

d) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Logo, $\text{arcsen } (-1) = -\frac{\pi}{2}$.

e) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\text{arcsen } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

f) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

g) $\alpha = \text{arcsen } 2 \Rightarrow \text{sen } \alpha = 2$

Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe arcsen 2.

h) $\alpha = \text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right) \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt[3]{5}$

Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe $\text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right)$.

26. a) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\sec\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

b) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Logo, $\text{arcsen } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ e, portanto,

$\text{tg}\left(2 \text{ arcsen } \frac{1}{2}\right) = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

27. Seja $\text{arcsen } \frac{12}{13} = \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim, $\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}$.

Temos, então, pela relação fundamental:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{169 - 144}{169}$

$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{5}{13}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

Logo, $\cos\left(\text{arcsen } \frac{12}{13}\right) = \cos \alpha = \frac{5}{13}$.

28. Sendo $\text{arcsen } \frac{2}{3} = \alpha$, temos $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, $\cos\left(2 \text{ arcsen } \frac{2}{3}\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2 \text{ sen}^2 \alpha =$

$= 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$

29. Como $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arcsen } 2x$ é tal que $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$, ou seja, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

30. No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$. Além disso, sendo $\text{arcsen } \frac{3}{5} = \alpha$, temos $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, $\cos\left(\text{arcsen } \frac{3}{5} + \text{arcsen } 1\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} =$

$= \cos \alpha \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 = -\frac{3}{5}.$

31. a) Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$x = \text{arcsen } \frac{2}{5}$ ou $x = \pi - \text{arcsen } \frac{2}{5}$

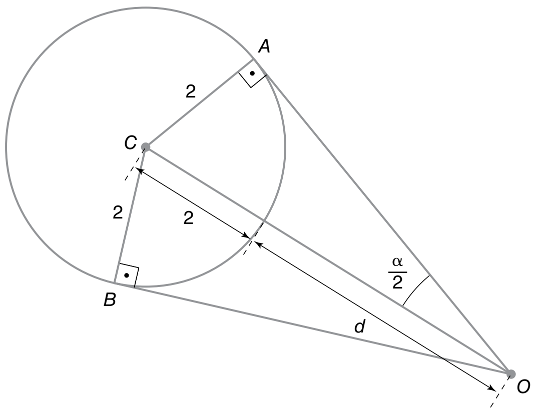
Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:
$x = \text{arcsen } \frac{2}{5} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \text{arcsen } \frac{2}{5} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen } \frac{2}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen } \frac{2}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\frac{\pi}{6} = \text{arcsen } x \Rightarrow x = \text{sen } \frac{\pi}{6} \quad \therefore x = \frac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

32. No esquema abaixo, os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são tangentes à circunferência, logo são perpendiculares ao raio em A e B. A congruência entre os triângulos OAC e OBC garante que os ângulos $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}C$ têm medidas iguais.



Assim, do triângulo OCA, obtemos

$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{d + 2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \text{arcsen}\left(\frac{2}{d + 2}\right)$

$\therefore \alpha = 2 \text{ arcsen}\left(\frac{2}{d + 2}\right)$

33. a) Analisando o gráfico do enunciado, temos:

$\text{sen } \alpha = \frac{3}{d} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen } \frac{3}{d}$

b) Temos a seguinte relação:

180.000 ——— 3.600
d ——— t

Assim:

$d = 50t$

Portanto, $\alpha = \text{arcsen } \frac{3}{50t}$.

c) Para t = 0,36 s, temos:
$d = 50t$
$d = 50 \cdot 0,36$
$d = 18$
Portanto, a distância é 18 metros.

34. a) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $\text{arccos } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

b) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

c) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos 0 = 1$.
Logo, $\text{arccos } 1 = 0$.

d) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \pi = -1$.
Logo, $\text{arccos } (-1) = \pi$.

e) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Logo, $\text{arccos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

f) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Logo, $\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

g) $\alpha = \text{arccos } \frac{3}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2}$

Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe $\text{arccos } \frac{3}{2}$.

35. a) $\text{tg}\left(\text{arccos } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Sendo $\alpha = \text{arccos } \frac{\sqrt{3}}{2}$, deduzimos que:

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$; logo $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Concluímos, então, que:

$\text{tg}\left(\text{arccos } \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{cossec}\left[2 \text{ arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

Sendo $\beta = \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$, deduzimos que:

$\cos \beta = -\frac{1}{2}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$; logo, $\beta = \frac{2\pi}{3}$

Concluímos, então, que $\text{cossec}\left[2 \text{ arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$

$= \text{cossec}\left[2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right] = \text{cossec } \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

36. a) Sendo $\alpha = \text{arccos } \frac{15}{17}$, deduzimos que:

$\cos \alpha = \frac{15}{17}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

Substituindo $\cos \alpha$ por $\frac{15}{17}$ na relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2 \alpha = \frac{289}{289} - \frac{225}{289}$

$\text{sen } \alpha = \pm\frac{8}{17}$

Como $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, concluímos que $\text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$, ou seja:

$\text{sen}\left(\text{arccos } \frac{15}{17}\right) = \text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$

b) Sendo $\beta = \text{arccos}\ \frac{1}{3}$, deduzimos que:

$\cos \beta = \frac{1}{3}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$

Substituindo $\cos \beta$ por $\frac{1}{3}$ na relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\ \beta + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\ \beta = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\text{sen}\ \beta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, concluímos que $\text{sen}\ \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, ou seja:

$$\cos\left(2\ \text{arccos}\ \frac{1}{3}\right) = \cos 2\beta = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\ \beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{9}{9} - 2 \cdot \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$$

c) Sendo $\gamma = \text{arccos}\ \frac{\sqrt{10}}{10}$, deduzimos que:

$\cos \gamma = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$

Substituindo $\cos \gamma$ por $\frac{\sqrt{10}}{10}$ na relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\ \gamma + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\ \gamma = \frac{100}{100} - \frac{10}{100}$$

$$\text{sen}\ \gamma = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Como $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$, concluímos que $\text{sen}\ \gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, ou seja:

$$\frac{\text{sen}\ \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 3$$

Assim:

$$\text{tg}\left(2\ \text{arccos}\ \frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \text{tg}\ 2\gamma = \frac{2\ \text{tg}\ \gamma}{1 - \text{tg}^2\ \gamma} = \frac{2 \cdot 3}{1 - (3)^2} = -\frac{3}{4}$$

37. Como $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arccos}\ 4x$ é tal que:

$$-1 \leqslant 4x \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$.

38. a) No intervalo $[0, \pi]$, temos $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos \pi = -1$.

Logo, $\text{sen}\left(\text{arccos}\ (-1) + \text{arccos}\ \frac{1}{2}\right) =$

$= \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

b) No intervalo $[0, \pi]$, temos $\cos \pi = -1$. Além disso, sendo $\alpha = \text{arccos}\ \frac{4}{5}$, temos $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Substituindo $\cos \alpha$ por $\frac{4}{5}$ na relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\ \alpha = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$$

$$\text{sen}\ \alpha = \pm\frac{3}{5}$$

Como $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, concluímos que $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$, ou seja:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim:

$$\text{tg}\left(\arccos \frac{4}{5} + \arccos(-1)\right) = \text{tg}\ (\alpha + \pi) = \frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \pi}{1 - \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \pi} = \frac{\frac{3}{4} + 0}{1 - \frac{3}{4} \cdot 0} = \frac{3}{4}$$

c) Sendo $\alpha = \arccos \frac{12}{13}$, deduzimos que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ e $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. Pela relação fundamental da trigonometria, obtemos $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{13}$.

Sendo $\beta = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$, deduzimos que $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ e $\cos \beta = \left(-\frac{3}{5}\right)$. Pela relação fundamental da trigonometria, obtemos $\text{sen}\ \beta = \frac{4}{5}$.

Assim, concluímos:

$$\cos\left[\arccos \frac{12}{13} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta =$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{56}{65}$$

39. Há apenas dois pontos da circunferência trigonométrica que têm como abscissa o número $\frac{2}{3}$.

A esses pontos estão associados:

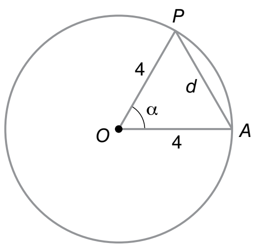
$x = \arccos \frac{2}{3}$ ou $x = -\arccos \frac{2}{3}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \arccos \frac{2}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\arccos \frac{2}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos \frac{2}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos \frac{2}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

40. Pelo enunciado, temos o seguinte esquema:



Pela lei dos cossenos, temos:

$d^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$

$d^2 = 32 - 32 \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{d^2 - 32}{(-32)}$

$\cos \alpha = 1 - \frac{d^2}{32}$

$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{d^2}{32}\right)$

Alternativa **d**.

41. a) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$.

Logo, $\text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$.

b) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Logo, $\text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

c) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

d) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

42. a) Como $\text{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, concluímos que:

$\text{sen}\left(\text{arctg}\,\sqrt{3}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Como $\text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$, concluímos que:

$\cos\,[3\,\text{arctg}\,(-1)] = \cos\left[3 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$= \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Sendo $\alpha = \text{arctg}\,2$, deduzimos que:

$\text{tg}\,\alpha = 2$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Pela identidade $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$, temos:

$\sec^2\alpha = 1 + 2^2 \Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{5}$

Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que $\sec\alpha = \sqrt{5}$, ou seja, $\sec\,(\text{arctg}\,2) = \sqrt{5}$

d) Sendo $\alpha = \text{arctg}\,3$, deduzimos que:

$\text{tg}\,\alpha = 3$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Pela identidade $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$, temos:

$\sec^2\alpha = 1 + 3^2 \Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{10}$

Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que $\sec\alpha = \sqrt{10}$; logo, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Pela relação fundamental da trigonometria, obtemos: $\text{sen}\,\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Assim, concluímos:

$\text{sen}\,2\,\text{arctg}\,3 = \text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{5}$

e) Sendo $\text{arctg}\,4 = \alpha$ e $\text{arctg}\,3 = \beta$, temos:

$\text{tg}\,\alpha = 4$, $\text{tg}\,\beta = 3$ e $\{\alpha, \beta\} \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Logo, $\text{tg}\,[\text{arctg}\,4 - \text{arctg}\,3] = \text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{4 - 3}{1 + 4 \cdot 3} = \frac{1}{13}$.

43. Lembrando que a imagem de $y = \text{arctg } x$ é

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$, temos:

$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < 2\,\text{arctg } x < \pi$

Logo, a imagem de $y = 2\,\text{arctg } x$ é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -\pi < y < \pi\}$.

44. Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$\text{tg } x = 5 \Rightarrow x = \text{arctg } 5$ ou $x = \pi + \text{arctg } 5$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \text{arctg } 5 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg } 5 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

45. Partindo do enunciado, temos:

$$\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{arctg } x = \frac{\pi}{4} - \text{arctg } \frac{1}{3}$$

$$x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \text{arctg } \frac{1}{3}\right)$$

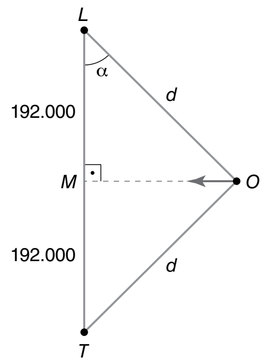
$$x = \frac{\text{tg } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}}{1 + \text{tg } \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Portanto, o valor de x é $\frac{1}{2}$.

46. a) Pelo enunciado, temos o seguinte desenho:



Assim:

$$\cos \alpha = \frac{192.000}{d} \Rightarrow \alpha = \text{arccos } \frac{192.000}{d}$$

Portanto, $\alpha = \text{arccos } \frac{192.000}{d}$, com d em quilômetro.

b) Sendo $OM = 30.000 \cdot t$, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{30.000 \cdot t}{192.000 \cdot 60} = \frac{t}{384}$$

Assim:

$$\alpha = \text{arctg } \frac{t}{384}$$

Portanto, $\alpha = \text{arctg } \frac{t}{384}$, com t expresso em minuto.

c) Para $t = 384$, temos:

$$\alpha = \text{arctg } \frac{384}{384} = \text{arctg } 1$$

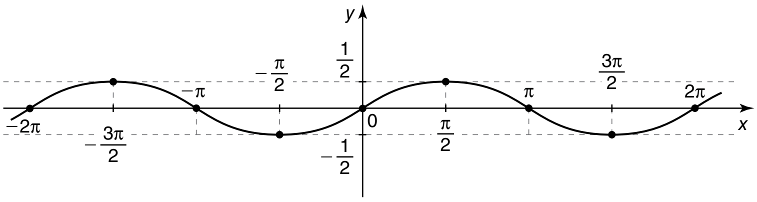
Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) $y = \dfrac{\text{sen } x}{2}$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0



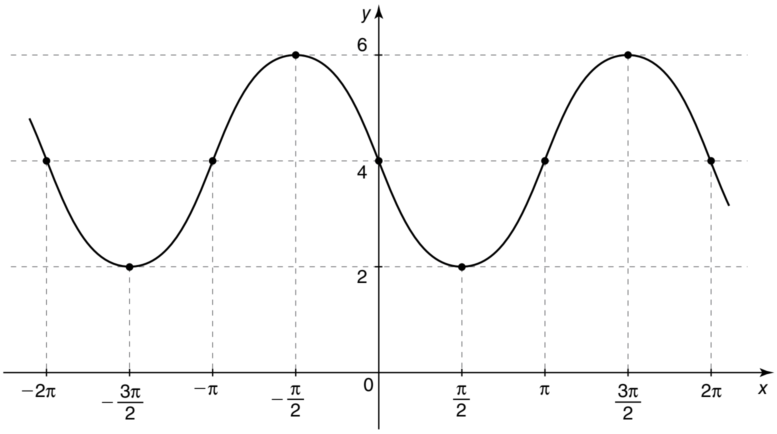
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$p = 2\pi$

b) $y = 4 - 2 \text{ sen } x$

x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	2
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	6
2π	4



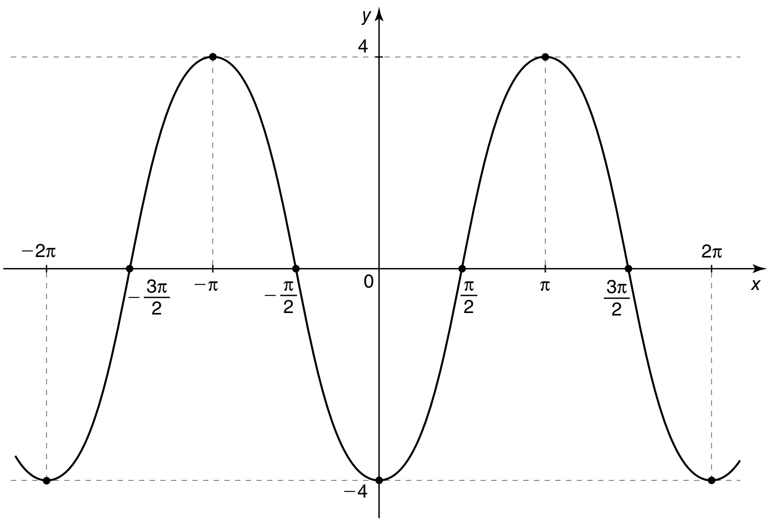
$D = \mathbb{R}$

$Im = [2, 6]$

$p = 2\pi$

c) $y = -4 \cos x$

x	y
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	0
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	-4



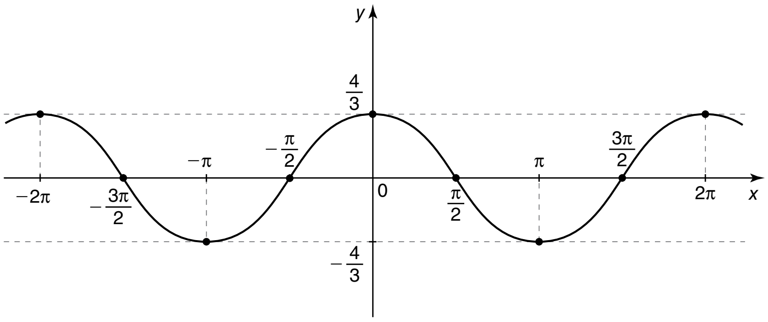
$D = \mathbb{R}$

$Im = [-4, 4]$

$p = 2\pi$

d) $y = \dfrac{4 \cos x}{3}$

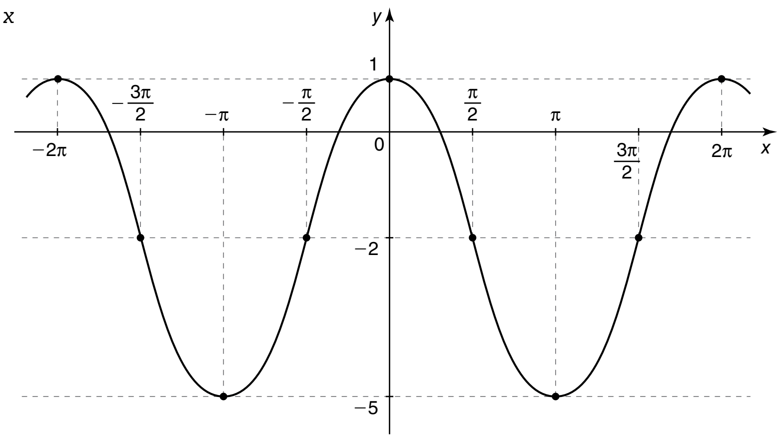
x	y
0	$\frac{4}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	$-\frac{4}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$\frac{4}{3}$



$D = \mathbb{R}$
$Im = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$
$p = 2\pi$

e) $y = -2 + 3 \cos x$

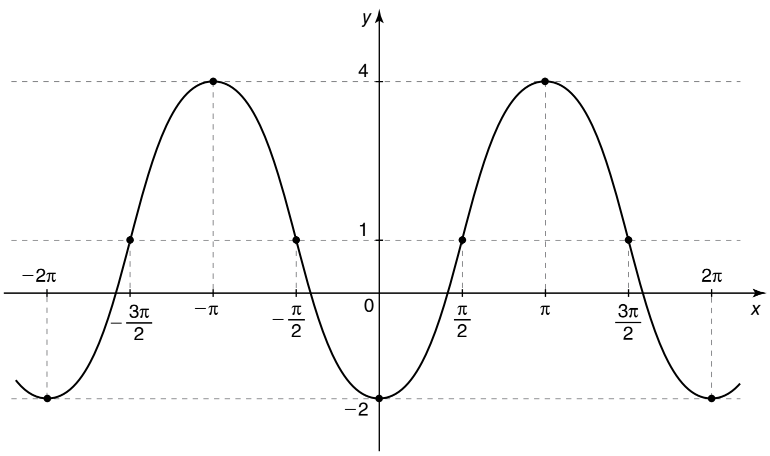
x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	-5
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-5, 1]$
$p = 2\pi$

f) $y = 1 - 3 \cos x$

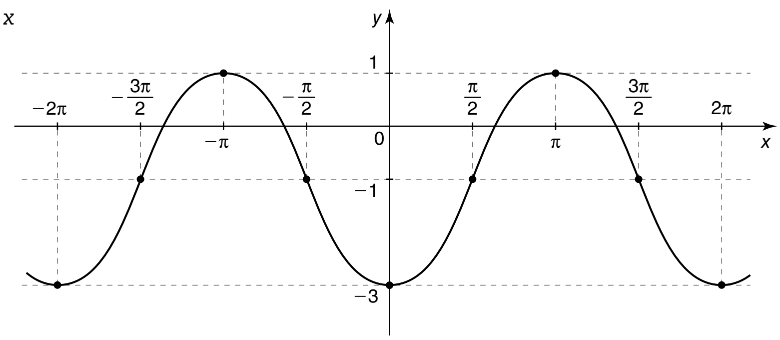
x	y
0	-2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	-2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 4]$
$p = 2\pi$

g) $y = -1 - 2 \cos x$

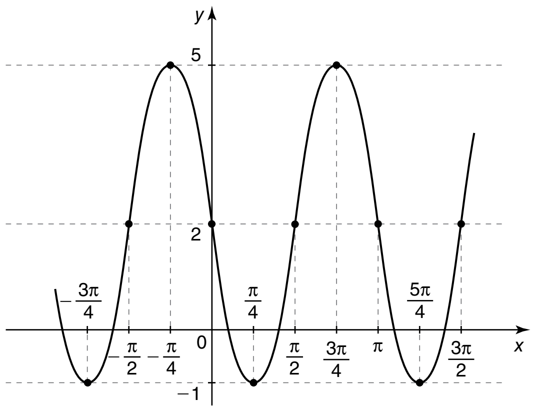
x	y
0	-3
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	-3



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 2\pi$

2. a) $y = 2 - 3 \text{ sen } 2x$

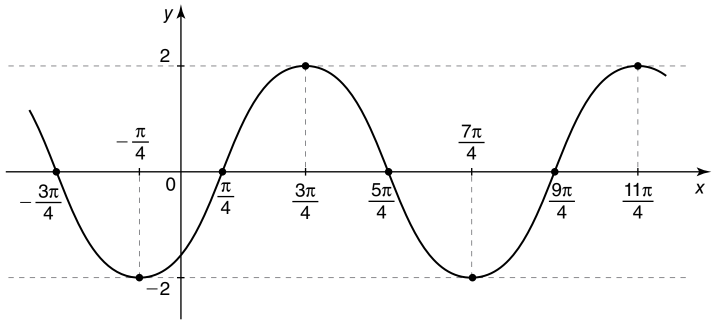
$2x$	x	y
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	5
2π	π	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 5]$
$p = \pi$

b) $y = 2 \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

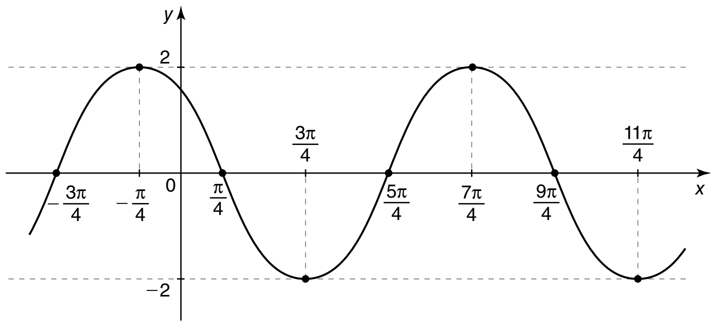
$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	-2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

c) $y = -2 \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

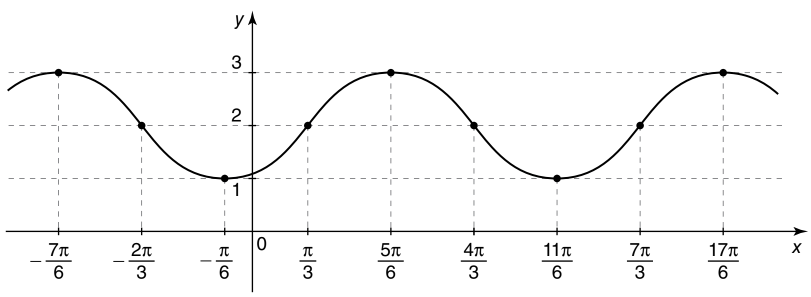
$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-2
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

d) $y = 2 + \text{sen } \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

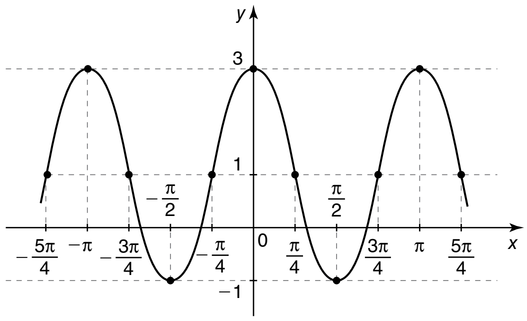
$x - \frac{\pi}{3}$	x	y
0	$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	3
π	$\frac{4\pi}{3}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	1
2π	$\frac{7\pi}{3}$	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 3]$
$p = 2\pi$

e) $y = 1 + 2\cos 2x$

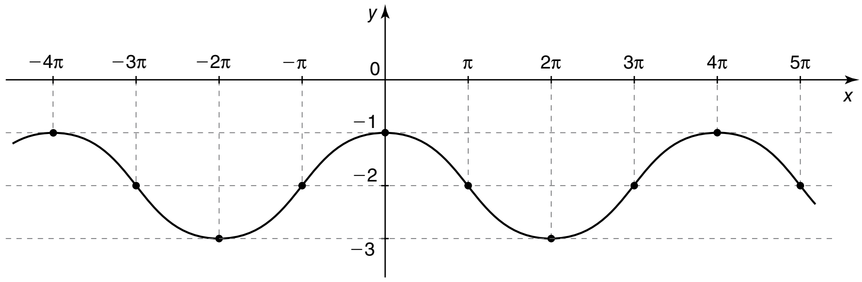
$2x$	x	y
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	π	3



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 3]$
$p = \pi$

f) $y = -2 + \cos \frac{x}{2}$

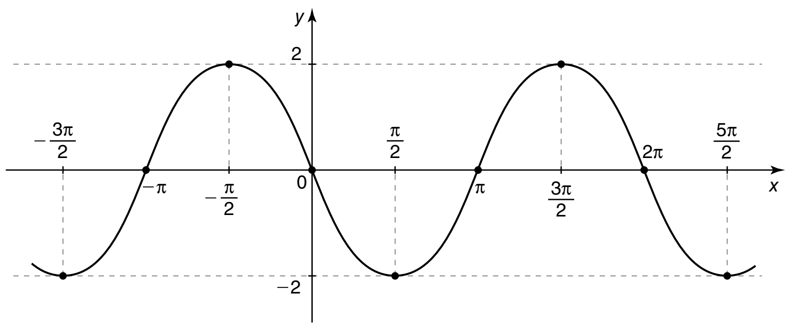
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	π	-2
π	2π	-3
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-2
2π	4π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, -1]$
$p = 4\pi$

g) $y = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
2π	$\frac{5\pi}{2}$	-2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

3. a) $y = \frac{\text{sen } x}{|8|}$

$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

b) $y = -3\cos x$

$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

c) $y = \frac{\cos x}{|3|}$

$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

d) $y = \cos \frac{x}{3}$

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

e) $y = -3 + 5\cos 6x$

$p = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$

f) $y = -1 - 5\,\text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

$p = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$

4. a) $y = -2 + 3\,\text{sen}\,x$

$-1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3\,\text{sen}\,x \leqslant 3$

$\therefore -5 \leqslant -2 + 3\,\text{sen}\,x \leqslant 1$

Logo, $Im = [-5, 1]$.

b) $y = -1 + 3\,\text{sen}\,2x$

$-1 \leqslant \text{sen}\,2x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3\,\text{sen}\,2x \leqslant 3$

$\therefore -4 \leqslant -1 + 3\,\text{sen}\,2x \leqslant 2$

Logo, $Im = [-4, 2]$.

c) $y = 6 - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$

$-1 \leqslant \cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leqslant 1 \Rightarrow 4 \geqslant -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \geqslant -4$

$\therefore 10 \geqslant 6 - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \geqslant 2$

Logo, $Im = [2, 10]$.

d) $y = \pi + 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -2\pi \leqslant 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 2\pi$

$\therefore -\pi \leqslant \pi + 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 3\pi$

Logo, $Im = [-\pi, 3\pi]$.

5. $f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x + 3 \Rightarrow f(x) = \cos 2x + 3$

Como $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, temos:

$-1 + 3 \leqslant \cos 2x + 3 \leqslant 1 + 3 \Rightarrow 2 \leqslant f(x) \leqslant 4$

Logo, o conjunto imagem de f é dado por: $Im = [2, 4]$.

Alternativa **d**.

6. Para $x = 0$, temos:

$1 = a + b \cdot \text{sen}\,0 \Rightarrow a = 1$

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, temos:

$-1 = 1 + b \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = -2$

Alternativa **d**.

7. Como o período da função é π, temos:

$\frac{2\pi}{|m|} = \pi \Rightarrow m = \pm 2$

Observando que os pontos $\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$ e $(\pi, 1)$ pertencem ao gráfico e que $\cos(2x) = \cos(-2x)$, temos:

$$\begin{cases} 5 = a + b\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 = a + b\cos(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a - b \\ 1 = a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 3$ e $b = 2$.

Concluímos, então, que $a = 3$, $b = 2$ e $m = \pm 2$.

8. Quando $bx + c = 0$, teremos o maior valor possível para cosseno, assim:

$6 = a \cdot \cos 0 \Rightarrow 6 = a$

Como o período é igual a π, temos:

$\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$

$\therefore b = 2$ ou $b = -2$ (não convém)

Quando $x = 0$, temos:

$-6 = 6 \cdot \cos(b \cdot 0 + c)$

$-1 = \cos c$

Logo: $c = \pi$

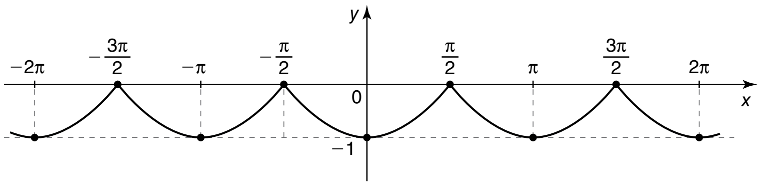
Como $f(x) = 6 \cdot \cos(2x + \pi)$, observamos que o valor mínimo de f é -6, o que ocorre quando $\cos(2x + \pi) = -1$.
Como o período de f é π, concluímos $f(x) = f(x + \pi)$ para todo x real.
Somando os valores das alternativas corretas, temos:
$01 + 08 + 16 = 25$
Portanto, o valor da soma das alternativas corretas é 25.

9. a) $y = -|\cos x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos x$.

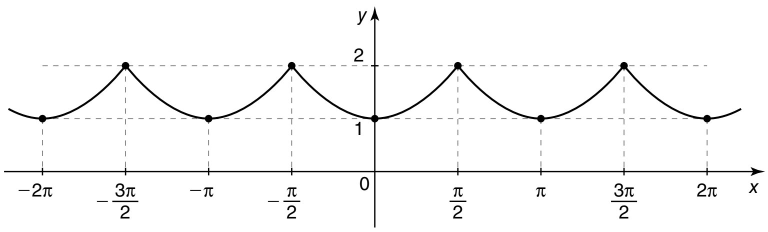
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = |\cos x|$.

Fase 3: No gráfico da função y_2, transformamos cada ponto em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = -|\cos x|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 0]$
$p = \pi$

b) $y = 2 - |\cos x|$
Transladando, verticalmente, o gráfico do item **a** duas unidades para cima, obtemos o gráfico de $y = 2 - |\cos x|$.

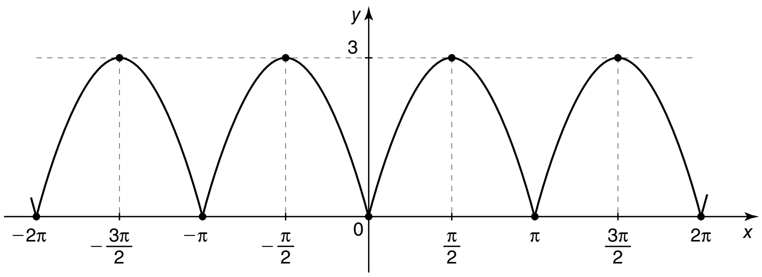


$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 2]$
$p = \pi$

c) Como $3|\text{sen } x| = |3| \cdot |\text{sen } x| = |3 \cdot \text{sen } x|$, a função $y = 3|\text{sen } x|$ pode ser representada por $y = |3 \text{ sen } x|$.

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 3 \text{ sen } x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y = |3 \text{ sen } x|$.



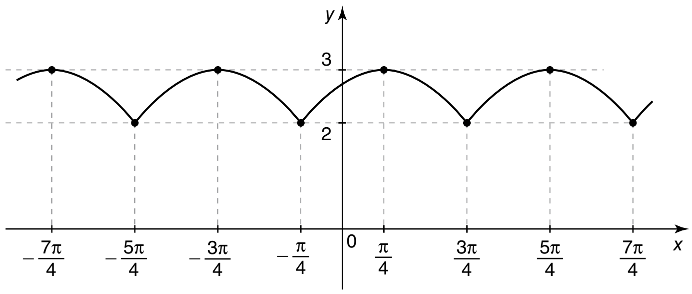
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 3]$
$p = \pi$

d) $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

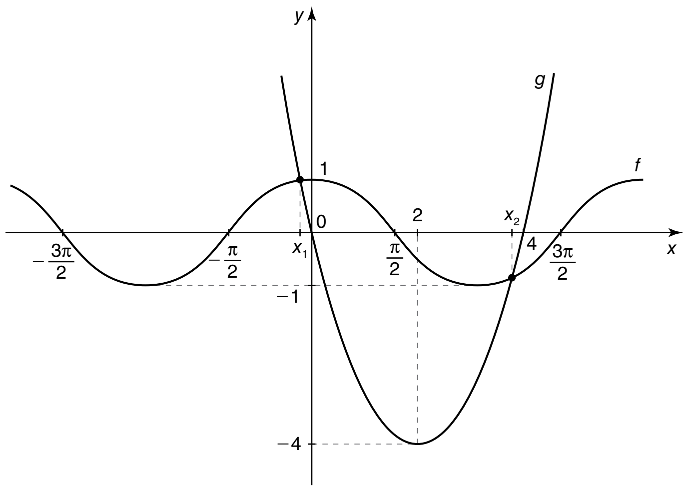
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para cima, obtendo então o gráfico da função $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.



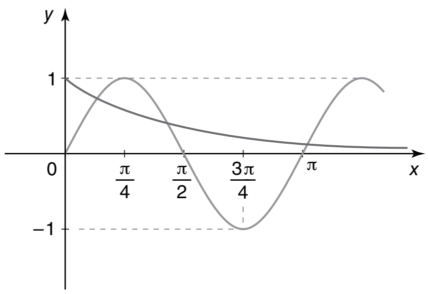
$D = \mathbb{R}$
$Im = [2, 3]$
$p = \pi$

10. Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2 - 4x$, temos:



Observamos que $f(x) = g(x)$ para apenas dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação $\cos x = x^2 - 4x$ possui exatamente duas raízes.

11. Montando o gráfico das duas funções, temos:



A função exponencial sempre será positiva e a cada período, de tamanho π, as funções se interceptam 2 vezes. Como teremos 12 períodos no intervalo $[0, 12\pi]$, então serão 24 raízes.

Alternativa **e**.

12. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2k-1}{3} \leqslant 1$

$\therefore\ -3 \leqslant 2k - 1 \leqslant 3 \Rightarrow -2 \leqslant 2k \leqslant 4$

$\therefore\ -1 \leqslant k \leqslant 2$

Logo, a igualdade $\cos x = \frac{2k-1}{3}$ só é possível para valores reais de k tais que $-1 \leqslant k \leqslant 2$.

13. Para qualquer valor de x pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que $0 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.

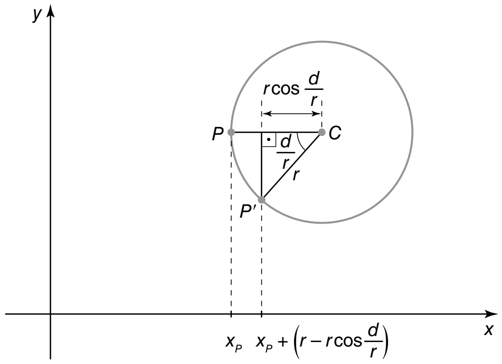
Logo, a equação $\text{sen } x = 2m + 5$ tem solução nesse intervalo se, e somente se, $0 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1$. Assim, obtemos:

$0 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 2m \leqslant -4$

$\therefore\ -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$

Logo, a equação $\text{sen } x = 2m + 5$ tem solução no intervalo considerado apenas para os valores reais de m tais que $-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$.

14. Sendo C o centro da circunferência e P' a posição final do ponto P, temos que o ângulo central $P\widehat{C}P'$ mede $\frac{d}{r}$ rad. Sendo x_P a abscissa do ponto P em sua posição inicial, temos que a abscissa de P' é $x_P + \left(r - r\cos\frac{d}{r}\right)$, conforme mostra o esquema:



Logo, a distância percorrida pelo ponto Q é dada por:

$x_P + \left(r - r\cos\frac{d}{r}\right) - x_P = r - r\cos\frac{d}{r} = r\left(1 - \cos\frac{d}{r}\right)$

Alternativa **b**.

15. **a)** $y = 4\,\text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$

A condição de existência é $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 3k\pi + \frac{3\pi}{2}$.

Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3k\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $4\,\text{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = 6 + \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

A condição de existência é $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, ou seja, $2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $6 + \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

c) $y = 5 \text{ cotg } \frac{3x}{2}$

A condição de existência é $\text{sen } \frac{3x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{3x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\text{cotg } \frac{3x}{2}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

d) $y = 3 - \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

A condição de existência é $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, ou seja, $2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

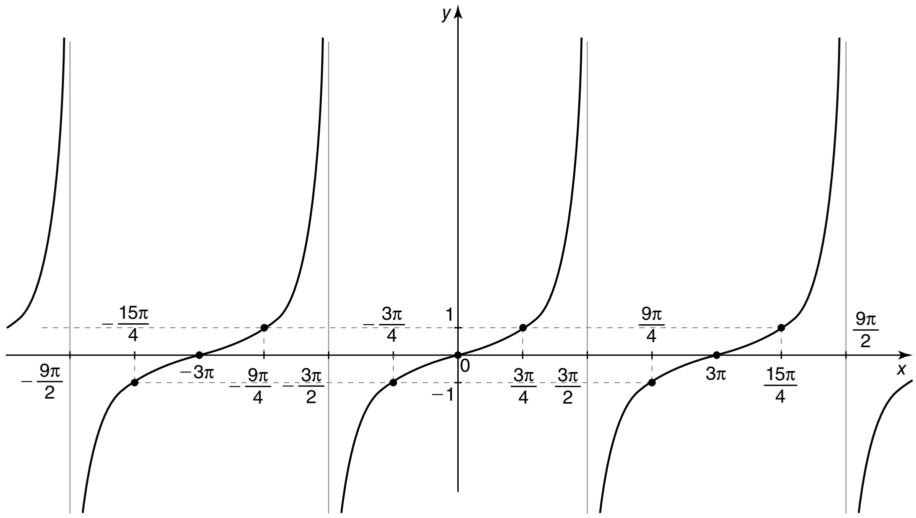
Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $3 - \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

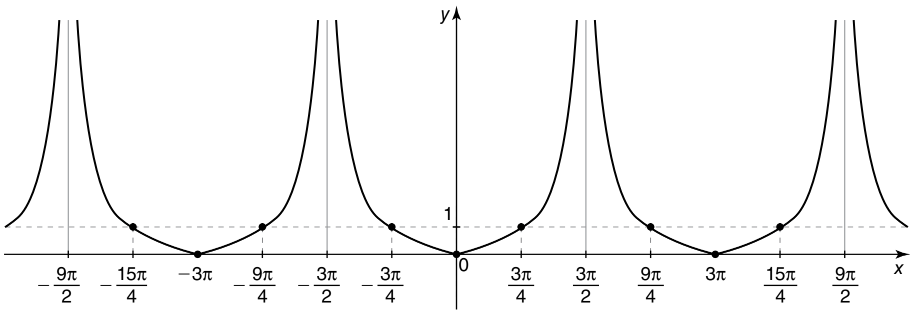
16. a) $y = \left|\text{tg } \frac{x}{3}\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{tg } \frac{x}{3}$.

$\frac{x}{3}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo, então, o gráfico da função $y = \left|\text{tg } \frac{x}{3}\right|$.



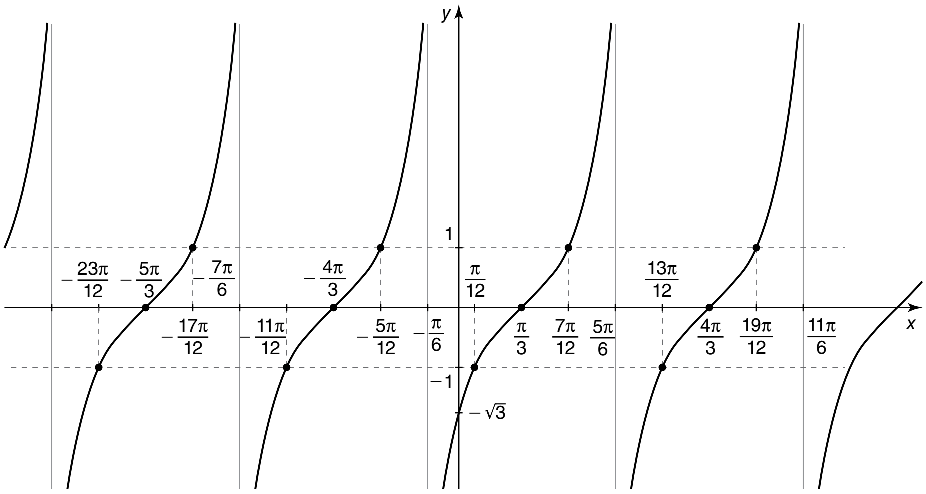
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, \text{ com } \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = 3\pi$

b) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$x - \frac{\pi}{3}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	-1
0	$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\nexists$



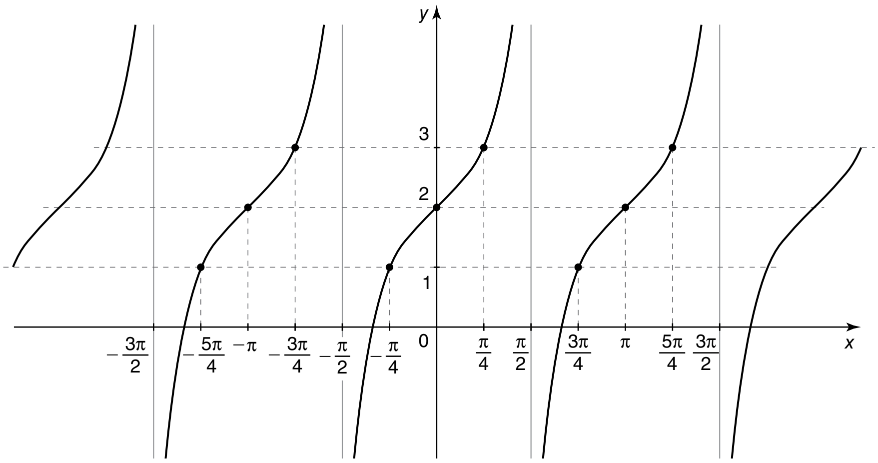
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

c) $y = 2 + \text{tg}\, x$

x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	1
0	2
$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

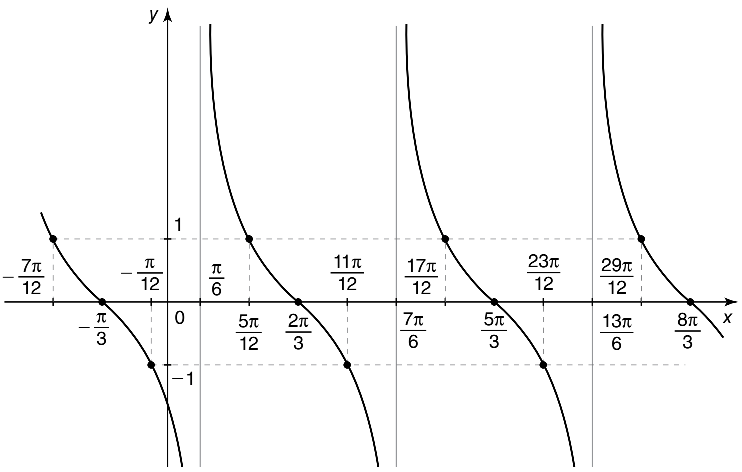
$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

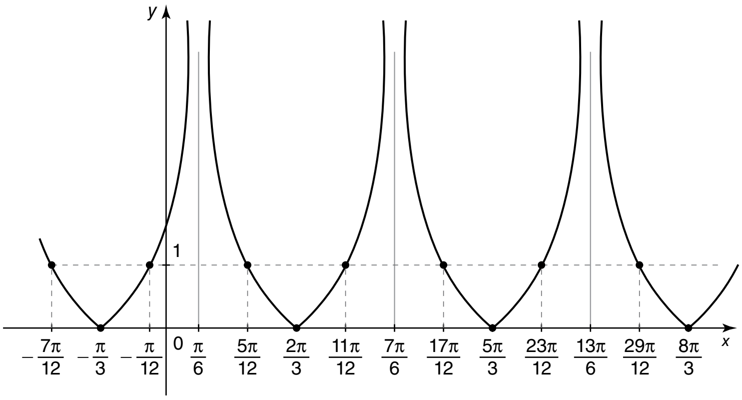
d) $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

$x - \frac{\pi}{6}$	x	y
0	$\frac{\pi}{6}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	-1
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\nexists$



Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$.



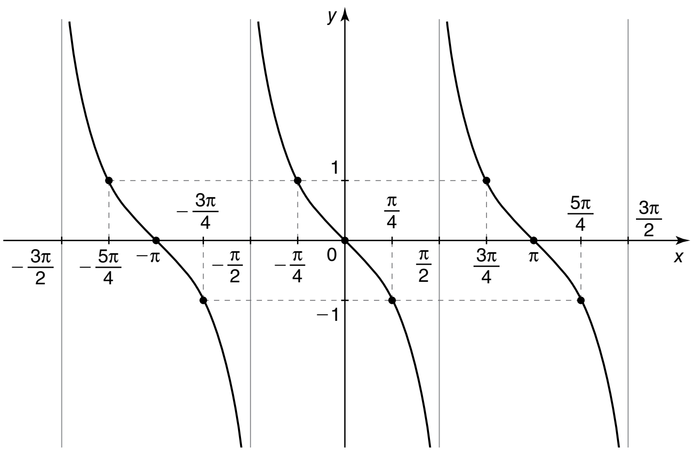
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = \pi$

e) $y = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{x}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	−1
π	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



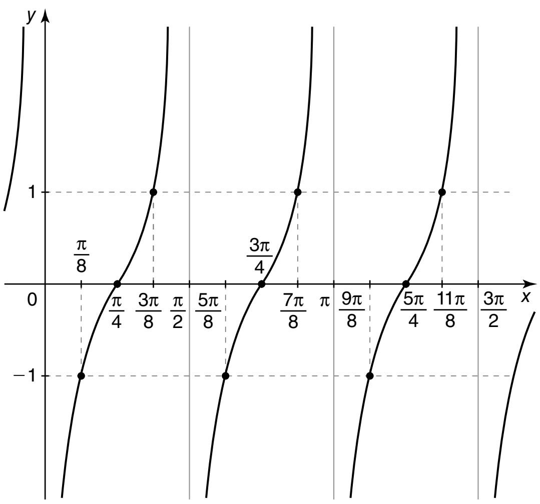
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

f) $y = -\text{cotg } 2x$

$2x$	x	y
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	−1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{2}$

17. a) $y = 5 + 3\,\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$p = \frac{\pi}{|1|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

b) $y = 4\,\text{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$

$p = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

c) $y = \frac{\text{sen}^3\,6x}{\cos 6x} + \text{sen}\,6x \cdot \cos 6x$

Temos:

$\frac{\text{sen}^3\,6x}{\cos 6x} + \text{sen}\,6x \cdot \cos 6x =$

$\frac{\text{sen}^3\,6x + \text{sen}\,6x \cdot \cos^2 6x}{\cos 6x} =$

$\frac{\text{sen}\,6x(\text{sen}^2\,6x + \cos^2 6x)}{\cos 6x} = \frac{\text{sen}\,6x}{\cos 6x} = \text{tg}\,6x$

Logo, $y = \text{tg}\,6x$ e, portanto: $p = \frac{\pi}{|6|} = \frac{\pi}{6}$

d) $y = 3\,\text{cotg}\,\frac{x}{4}$

$p = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

e) $y = \text{cotg}\left(\pi x - \frac{\pi}{5}\right)$

$p = \frac{\pi}{|\pi|} = \frac{\pi}{\pi} = 1$

f) $y = \frac{2\cos 2x + 2\,\text{sen}^2\,x - 1}{2\,\text{sen}\,x\cos x}$

Temos:

$y = \frac{2\cos 2x + 2\,\text{sen}^2\,x - 1}{2\,\text{sen}\,x\cos x} =$

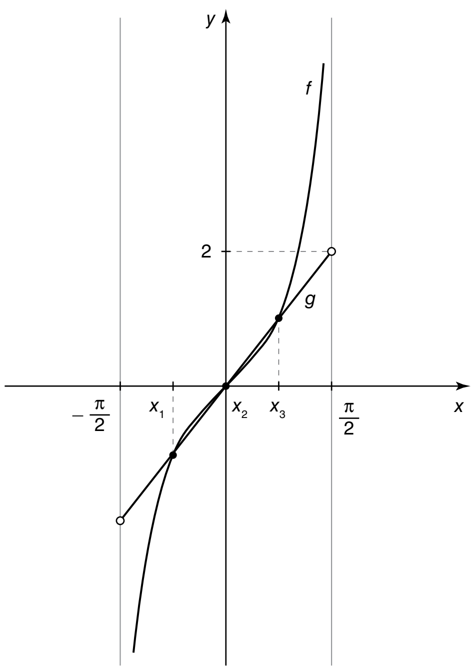
$\frac{2\cos 2x - (1 - 2\,\text{sen}^2\,x)}{2\,\text{sen}\,x\cos x} =$

$\frac{2\cos 2x - \cos 2x}{2\,\text{sen}\,x\cos x} = \frac{\cos 2x}{\text{sen}\,2x}$

$\therefore\ y = \text{cotg}\,2x$

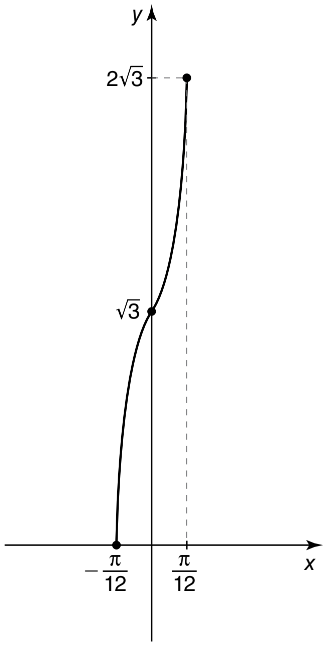
Logo, $p = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

18. Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{tg}\,x$ e $g(x) = \frac{4x}{\pi}$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, temos:



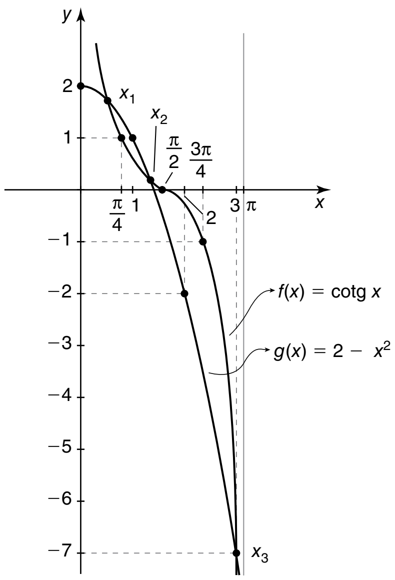
Observamos que, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{tg}\,x = \frac{4x}{\pi}$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

19. Construindo o gráfico de f, temos:



Logo, o conjunto imagem dessa função é $Im = \left[0, 2\sqrt{3}\right]$.

20. Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{cotg } x$ e $g(x) = 2 - x^2$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, \pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{cotg } x = 2 - x^2$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

21. a) $y = 5 \text{ cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

- A condição de existência é $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, ou seja, $3x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como $\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -1$ ou

  $\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 1$, temos:

  $5\ \text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -5$ ou

  $5\ \text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 5$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5 \text{ ou } y \geqslant 5\}$.

b) $y = -2 + \text{cossec}\ 2x$

- A condição de existência é: sen $2x \neq 0$, ou seja,

  $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como cossec $2x \leqslant -1$ ou cossec $2x \geqslant 1$, temos:

  $-2 + \text{cossec}\ 2x \leqslant -3$ ou $-2 + \text{cossec}\ 2x \geqslant -1$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -3 \text{ ou } y \geqslant -1\}$.

c) $y = 1 + \sec x$

- A condição de existência é $\cos x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como $\sec x \leqslant -1$ ou $\sec x \geqslant 1$, temos:

  $1 + \sec x \leqslant 0$ ou $1 + \sec x \geqslant 2$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0 \text{ ou } y \geqslant 2\}$.

d) $y = 4 \sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

- A condição de existência é $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$, ou seja, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Observando que essa última desigualdade também pode ser representada por

  $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos como domínio da função

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como $\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqslant -1$ ou $\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqslant 1$, temos: $4 \sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leqslant -4$ ou $4 \sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geqslant 4$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -4 \text{ ou } y \geqslant 4\}$.

e) $y = 3 + 2 \sec 3x$

- A condição de existência é $\cos 3x \neq 0$, ou seja, $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

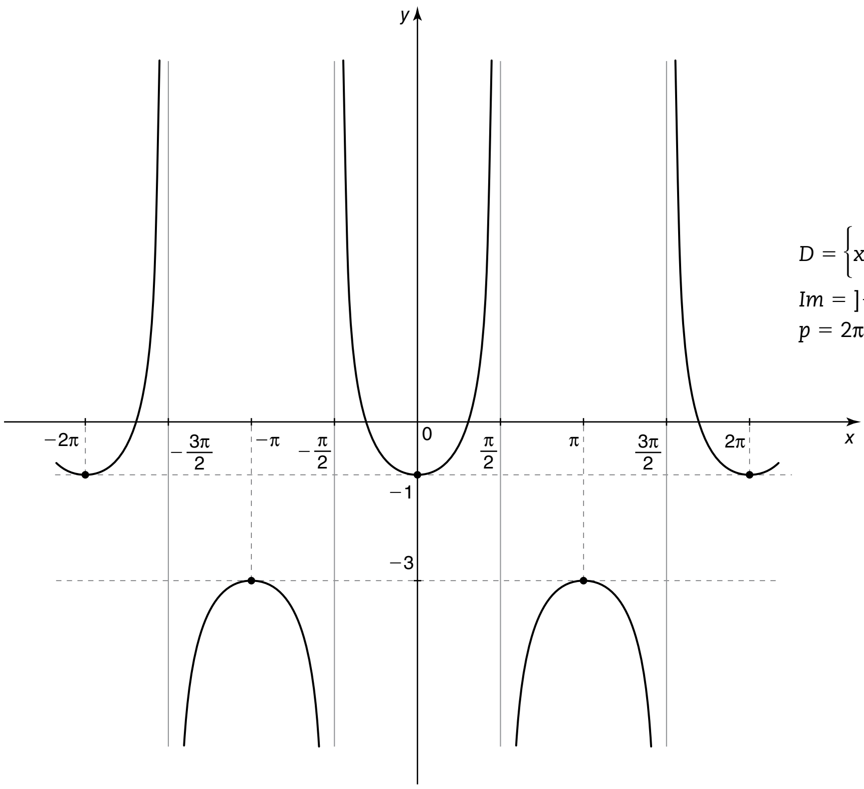
- Como $\sec 3x \leqslant -1$ ou $\sec 3x \geqslant 1$, temos:

  $2 \sec 3x \leqslant -2$ ou $2 \sec 3x \geqslant 2$ e, portanto, $3 + 2 \sec 3x \leqslant 1$ ou $3 + 2 \sec 3x \geqslant 5$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1 \text{ ou } y \geqslant 5\}$.

22. a) $y = -2 + \sec x$

Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = \sec x$, de duas unidades para baixo, ou seja:



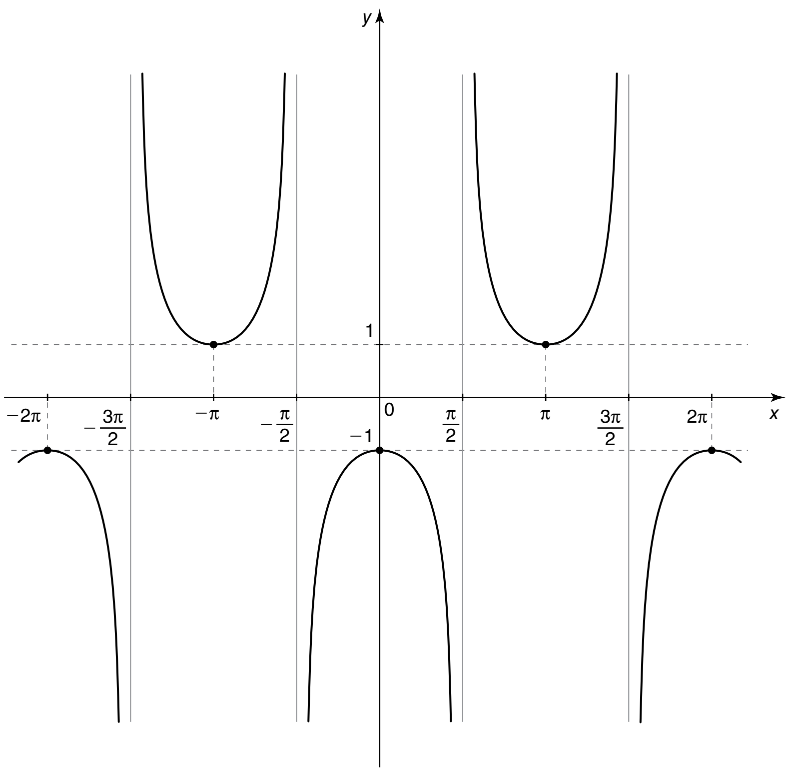
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$

$p = 2\pi$

b) $y = -\sec x$

Esse gráfico é simétrico ao gráfico da função $y = \sec x$ em relação ao eixo das abscissas, ou seja:



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

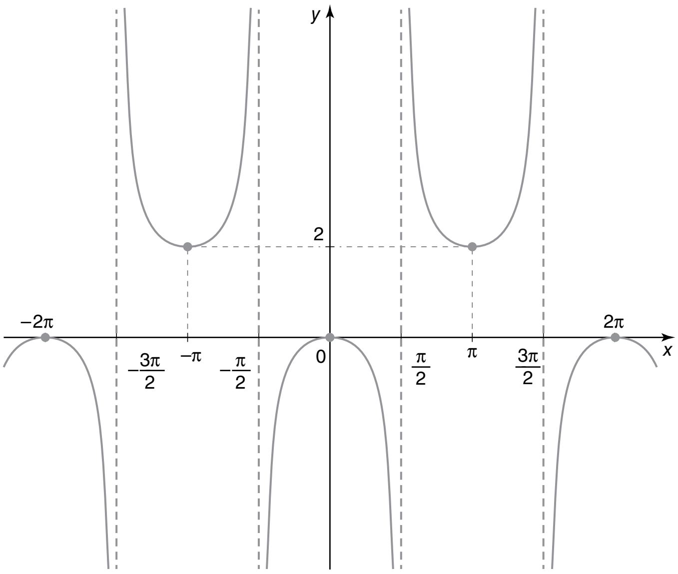
$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$p = 2\pi$

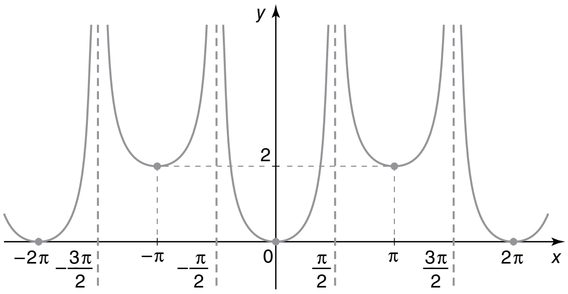
c) $y = |1 - \sec x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 1 - \sec x$.

x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
0	0
$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$



Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |1 - \sec x|$.



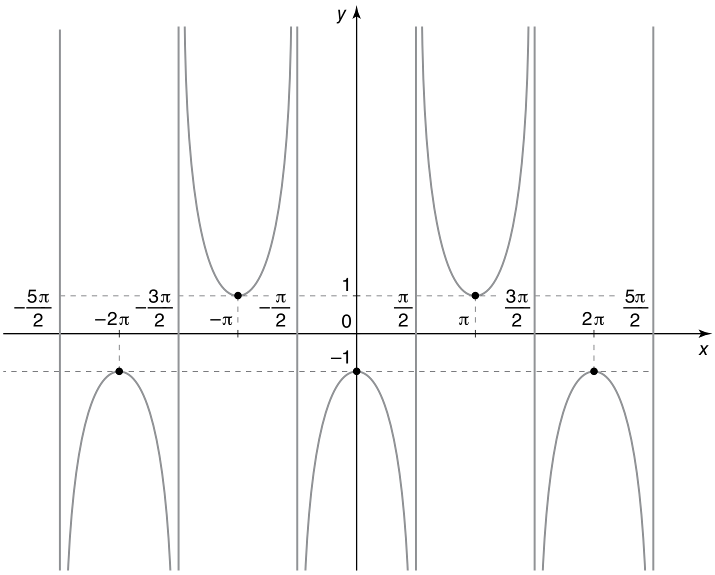
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = 2\pi$

d) $y = \text{cossec}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
π	$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{2}$	0	-1
0	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



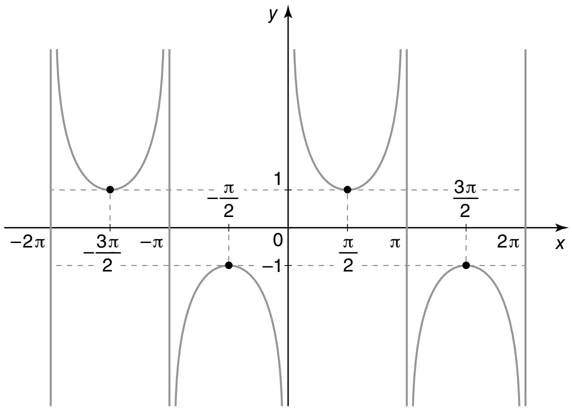
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

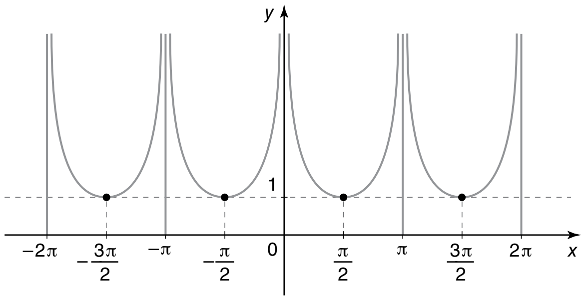
$p = 2\pi$

e) $y = 2 - |\text{cossec } x|$

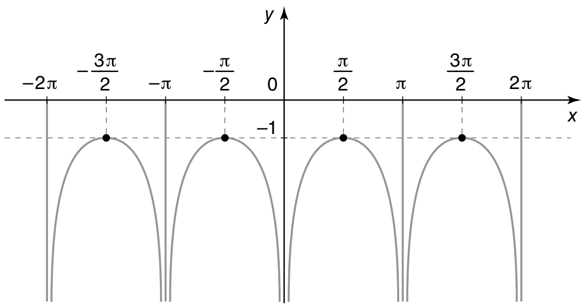
Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cossec } x$.



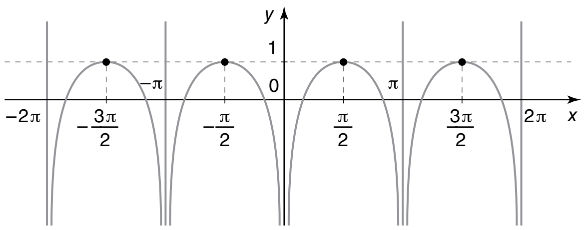
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y_2 = |\text{cossec } x|$.



Fase 3: No gráfico da função y_2 transformamos cada ponto de ordenada positiva em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y_3 = -|\text{cossec } x|$.



Fase 4: No gráfico da função y_3 transladamos, na vertical, duas unidades para cima, obtendo então o gráfico da função $y = 2 - |\text{cossec } x|$.



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

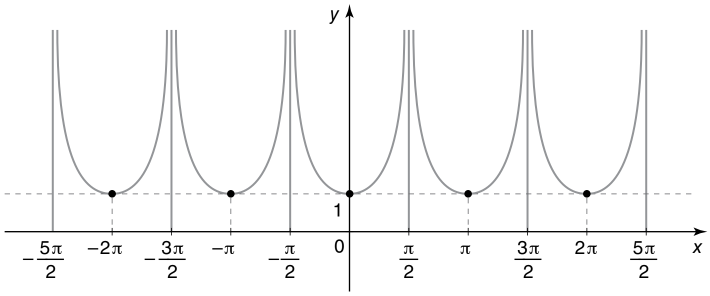
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

$p = 2\pi$

23. Temos a seguinte função:

$f(x) = \sqrt{1 + \text{tg}^2\, x} = \sqrt{\sec^2 x} = |\sec x|$

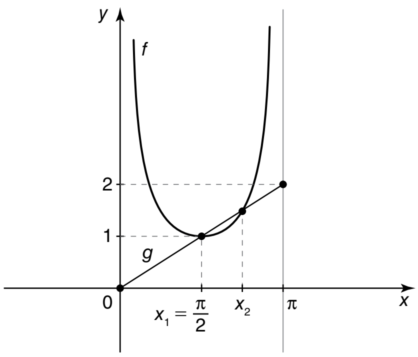
Assim, temos o seguinte gráfico:



24. cossec $x \leqslant -1$ ou cossec $x \geqslant 1 \Rightarrow m^2 - 1 \leqslant -1$ ou $m^2 - 1 \geqslant 1$

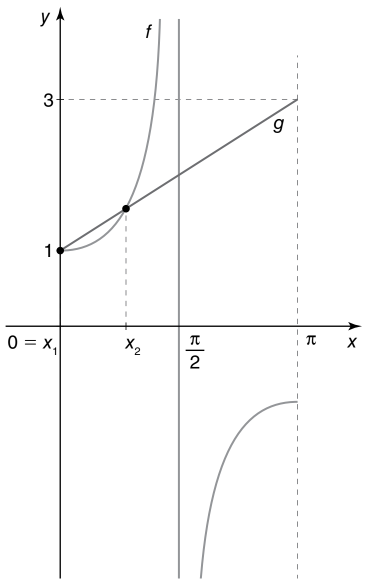
Assim, obtemos: $m = 0$ ou $m \leqslant -\sqrt{2}$ ou $m \geqslant \sqrt{2}$

25. **a)** Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{cossec}\, x$ e $g(x) = \frac{2x}{\pi}$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, \pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação cossec $x = \frac{2x}{\pi}$ possui exatamente duas raízes nesse intervalo.

b) Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \frac{2x}{\pi} + 1$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, 2\pi]$, a igualdade de $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação $\sec x = \frac{2x}{\pi} + 1$ possui exatamente duas raízes nesse intervalo.

26. a) Tomando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

- $\text{arcsen } \frac{1}{3} = \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$
- $\text{arcsen } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \beta \Rightarrow \text{sen } \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\therefore \beta = -\frac{\pi}{4}$
- $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2} = \gamma \Rightarrow \text{sen } \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\therefore \gamma = \frac{\pi}{3}$

Logo:

$\cos\left(\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$

$+ \text{tg}\left[\text{arcsen } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] - \text{sen}\left(\text{arcsen } \frac{1}{3}\right) =$

$= \cos \frac{\pi}{3} + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen } \alpha =$

$= \frac{1}{2} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{6}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{5}{6}$

b) Tomando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

$\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

Substituindo sen α por $\frac{\sqrt{3}}{2}$ na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\frac{1}{2}$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, então $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Aplicando a identidade $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, concluímos:

$\cos\left(2 \text{ arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$

$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$

c) Tomando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

$\text{arcsen } \frac{1}{3} = \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$

Substituindo sen α por $\frac{1}{3}$ na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, então $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Aplicando a identidade $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, concluímos:

$\cos\left(2 \text{ arcsen } \frac{1}{3}\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$

$= 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$

d) Tomando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Assim:

$\text{sen}\left[\text{arcsen } \frac{1}{2} - \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$

$= \text{sen}\left[\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) Sendo $\text{arcsen } \frac{3}{4} = \alpha$ e $\text{arcsen } \frac{3}{5} = \beta$, temos:

$\text{sen } \alpha = \frac{3}{4}$, $\text{sen } \beta = \frac{3}{5}$ e $\{\alpha, \beta\} \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

(i) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = \frac{16}{16} - \frac{9}{16}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ (não convém)

(ii) $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1$

$\cos^2 \beta = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$

$\cos \beta = \pm\frac{4}{5}$

$\cos \beta = \frac{4}{5}$ ou $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ (não convém)

Assim:

$\text{sen}\left(\text{arcsen } \frac{3}{4} + \text{arcsen } \frac{3}{5}\right) = \text{sen } (\alpha + \beta) =$

$= \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} =$

$= \frac{12 + 3\sqrt{7}}{20}$

27. Como $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arcsen}\left(\frac{3x}{2} + 5\right)$ é tal que:

$-1 \leqslant \frac{3x}{2} + 5 \leqslant 1$, ou seja, $-1 - 5 \leqslant \frac{3x}{2} \leqslant 1 - 5$

e, portanto, $-4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}\right\}$.

28. $\frac{\pi}{2} = \text{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \text{sen } \frac{\pi}{2}$

$\therefore x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

29. Como $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{3}{4}$, então $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Por se tratrar da função arco seno, já temos o intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Como $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} < 0{,}75 < \text{sen}\,\frac{\pi}{3}$ e a função seno é crescente no primeiro quadrante, concluímos que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ e, portanto, também é verdade que $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Alternativa **c**.

30. Pelo enunciado, temos:

$3^{1 + 2\,\text{sen}\,x} - 10 \cdot 3^{\text{sen}\,x} + 3 = 0$

$3^{1 + 2\,\text{sen}\,x} - 3 \cdot 3 \cdot 3^{\text{sen}\,x} - 3^{\text{sen}\,x} + 3 = 0$

$3^{1 + 2\,\text{sen}\,x} - 3^{\text{sen}\,x + 2} - 3^{\text{sen}\,x} + 3 = 0$

$(3^{\text{sen}\,x + 1} - 1) \cdot (3^{\text{sen}\,x} - 3) = 0$

Assim: $\text{sen}\,x = 1$ ou $\text{sen}\,x + 1 = 0$

Quando $\text{sen}\,x = 1$, temos $x = \frac{\pi}{2}$ e quando $\text{sen}\,x + 1 = 0$, temos $x = \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, o maior valor possível de x no intervalo considerado é $\frac{3\pi}{2}$.

Alternativa **e**.

31. **a)** Sendo $\alpha = \text{arcsen}\,x$, temos:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

$\cos^2(\text{arcsen}\,x) = 1 - [\text{sen}\,(\text{arcsen}\,x)] \cdot [\text{sen}\,(\text{arcsen}\,x)]$

$\cos^2(\text{arcsen}\,x) = 1 - x^2$

$\cos\,(\text{arcsen}\,x) = \sqrt{1 - x^2}$ ou

$\cos\,(\text{arcsen}\,x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (não convém)

b) Sendo $\alpha = \text{arcsen}\,x$, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\,(\text{arcsen}\,x)}{\cos\,(\text{arcsen}\,x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

32. **a)** $\alpha \approx 57{,}14°$

b) $\beta \approx 13{,}63°$

33. **a)** Pelo enunciado, temos:

$$\text{arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

Assim:

$$\text{tg}\left(4\,\text{arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{tg}\,4\alpha = \text{tg}\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\text{sen}\,\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{(-1)} = 0$$

b) Sendo $\text{arccos}\left(-\frac{1}{4}\right) = \beta$, temos $\cos\beta = -\frac{1}{4}$ e $\beta \in [0, \pi]$.

Assim:

$$\cos\left[2\,\text{arccos}\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \cos 2\beta = 2 \cdot \cos^2\beta - 1 =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{7}{8}$$

c) No intervalo $[0, \pi]$, temos:

- $\text{arccos}\,0 = \gamma \Rightarrow \cos\gamma = 0$

  $\therefore \gamma = \frac{\pi}{2}$

- $\text{arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \delta \Rightarrow \cos\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\therefore \delta = \frac{\pi}{4}$

- $\cos\left(\text{arccos}\,\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{9}$

Assim:

$$\text{sen}\,(\text{arccos}\,0) + \text{cotg}\left(\text{arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$+ \cos\left(\text{arccos}\,\frac{5}{9}\right) = \text{sen}\,\gamma + \text{cotg}\,\delta + \frac{5}{9} =$$

$$= \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{cotg}\,\frac{\pi}{4} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} + \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}} + \frac{5}{9} =$$

$$= \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$$

34. Como $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arccos}\left(\frac{x}{4} + 2\right)$ é tal que:

$-1 \leqslant \frac{x}{4} + 2 \leqslant 1$, ou seja, $-3 \leqslant \frac{x}{4} \leqslant -1$ e, portanto, $-12 \leqslant x \leqslant -4$

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leqslant x \leqslant -4\}$.

35. Pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,x = 1 - \cos^2 x$

Assim, $5\,\text{sen}^2\,x - 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 3 = 0$

$\therefore 5\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

Fazendo a substituição $\cos x = t$, temos a equação:

$5t^2 + 3t - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49$

$\therefore t = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 5} \Rightarrow t = -1$ ou $t = \frac{2}{5}$

Voltando à variável original, temos:

(i) $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi$ ou

$x = -\text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = -\text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

36. **a)** $\frac{\pi}{4} = \text{arccos}\,x \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = x$

$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

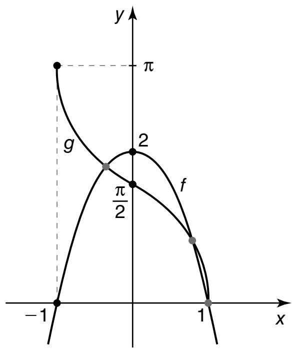
b) $\frac{\pi}{3} = \text{arccos}\,(2x - 1) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = 2x - 1$

$\therefore \frac{1}{2} = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

37. O número de raízes dessa equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = -2x^2 + 2$ e $g(x) = \text{arccos } x$.

Construindo esses gráficos no mesmo plano cartesiano, temos:



Como os gráficos têm exatamente três pontos comuns, concluímos que a equação $f(x) = g(x)$ possui três raízes.

38. a) $\alpha \approx 72{,}54°$

b) $\beta \approx 114{,}09°$

39. a) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

- $\text{arctg } \sqrt{3} = \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{3}$

  $\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

- $\text{arctg } 1 = \beta \Rightarrow \text{tg } \beta = 1$

  $\therefore \beta = \frac{\pi}{4}$

- $\text{arctg } (-1) = \gamma \Rightarrow \text{tg } \gamma = -1$

  $\gamma = -\frac{\pi}{4}$

Assim:

$$\sec\left(\text{arctg } \sqrt{3}\right) + \text{cossec } (2 \cdot \text{arctg } 1) - \text{tg } [3 \cdot \text{arctg } (-1)] = \sec \alpha + \text{cossec } (2\beta) - \text{tg } (3\gamma) =$$

$$= \sec \frac{\pi}{3} + \text{cossec } \frac{\pi}{2} - \text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} - \frac{\text{sen } -\frac{3\pi}{4}}{\cos -\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1} - \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2 + 1 - 1 = 2$$

b) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

- $\text{tg } (\text{arctg } 3) = 3$

- $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \beta \Rightarrow \text{tg } \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

  $\therefore \beta = -\frac{\pi}{6}$

- $\text{arctg } \frac{4}{3} = \gamma \Rightarrow \text{tg } \gamma = \frac{4}{3}$

  Como $\text{tg}^2 \gamma + 1 = \frac{1}{\cos^2 \gamma}$, temos:

  $\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \gamma} \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{9}{25}$

  $\therefore \cos \gamma = \frac{3}{5}$

Assim:

$$\text{tg } (\text{arctg } 3) + \text{sen}\left[\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] - \cos\left(\text{arctg } \frac{4}{3}\right) = 3 + \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos \gamma =$$

$$= 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{5} = \frac{30}{10} - \frac{5}{10} - \frac{6}{10} = \frac{19}{10}$$

c) Pela tangente da soma, temos:

$$\text{tg } (\text{arctg } 3 + \text{arctg } 2) = \frac{\text{tg } (\text{arctg } 3) + \text{tg } (\text{arctg } 2)}{1 - \text{tg } (\text{arctg } 3) \cdot \text{tg } (\text{arctg } 2)} =$$

$$= \frac{3 + 2}{1 - 3 \cdot 2} = -1$$

d) Sendo $\text{arctg } 4 = \alpha$, temos $\text{tg } \alpha = 4$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim:

$$\text{tg } (2 \cdot \text{arctg } 4) = \text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \text{ tg } (\text{arctg } 4)}{1 - \text{tg}^2 (\text{arctg } 4)} = \frac{2 \cdot 4}{1 - 4 \cdot 4} = -\frac{8}{15}$$

e) Sendo $\text{arctg } \sqrt{2} = \alpha$, temos $\text{tg } \alpha = \sqrt{2}$ $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \cos \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, deduzimos que $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{sen } \alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Como a tangente é positiva e o valor de cosseno é positivo, o valor de seno também deve ser positivo, portanto, $\text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Além disso, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$ e, portanto, $\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$.

Logo, $\cos\left(\text{arctg } \sqrt{2} + \text{arctg } 1\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{6}.$$

40. Temos:

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } 3x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -2\pi < 4 \text{ arctg } 3x < 2\pi$$

Logo, a imagem de $y = 4 \text{ arctg } 3x$ é

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2\pi < y < 2\pi\}$.

41. Fazendo a substituição tg $x = t$, temos a equação:
$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 2$

Voltando à variável original, temos:

(i) tg $x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

(ii) tg $x = 2 \Rightarrow x = \text{arctg } 2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \text{arctg } 2 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

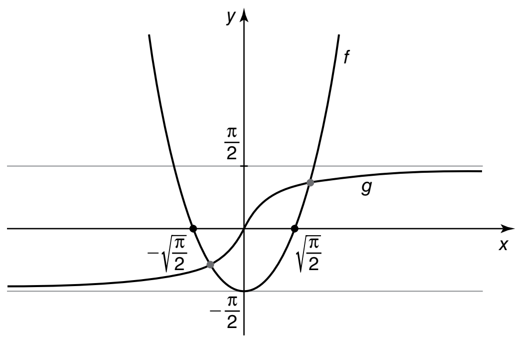
42. **a)** $\frac{\pi}{4} = \text{arctg } x \Rightarrow \text{tg } \frac{\pi}{4} = x$

$\therefore x = 1$

Logo, $S = \{1\}$.

b) Como $\frac{2\pi}{3} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que a equação é impossível; logo, $S = \varnothing$.

43. O número de raízes dessa equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = x^2 - \frac{\pi}{2}$ e $g(x) = \text{arctg } x$. Construindo esses gráficos no mesmo plano cartesiano, temos:



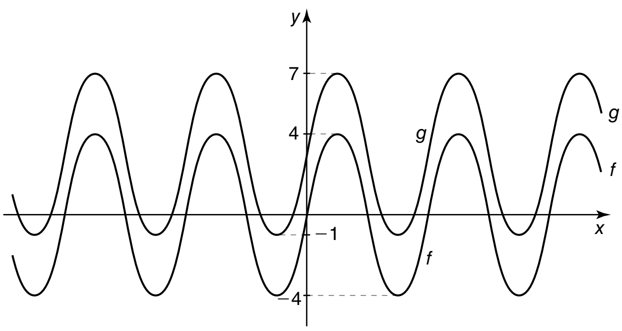
Como os gráficos têm exatamente dois pontos comuns, concluímos que a equação $f(x) = g(x)$ possui duas raízes.

44. **a)** $\alpha \approx 88{,}87°$

b) $\beta \approx -72{,}45°$

Exercícios contextualizados

45. Construindo os gráficos de f e g, temos:

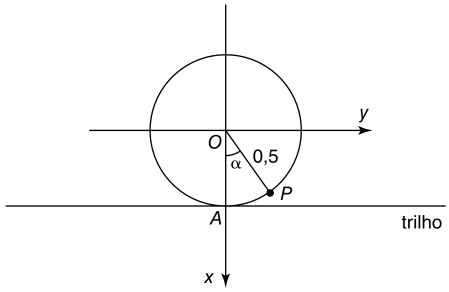


Logo, a largura h, em metro, da calçada é dada por:
$h = 7 - (-4) = 11$

46. Sejam:

- uma circunferência tangente ao trilho e concêntrica com a roda do trem;
- um sistema cartesiano ortogonal cuja origem O coincide com o centro da circunferência, o eixo Ox orientado para baixo e passando pelo ponto de tangência, e o eixo Oy interceptando a circunferência e orientado no sentido oposto ao do movimento do trem;
- $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e α a medida do ângulo $A\widehat{O}P$, sendo que P gira no sentido anti-horário.

Assim, temos o esquema:



Observamos que:

(I) Para $\cos \alpha \geqslant 0$, a altura h, do ponto P em relação ao trilho, é dada por:

$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$

(II) Para $\cos \alpha < 0$, a altura $h(t)$, do ponto P em relação ao trilho, é dada por:

$h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot |\cos \alpha|$

Mas, como $\cos \alpha < 0 \Rightarrow |\cos \alpha| = -\cos \alpha$, temos:

$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$

Por (I) e (II), deduzimos que, para qualquer valor de α, temos $h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$.

Para concluir, devemos obter o valor de α em função de t. Basta resolver a regra de três:

Medida do ângulo (radiano)	Tempo (segundo)
2π	0,36
α	t

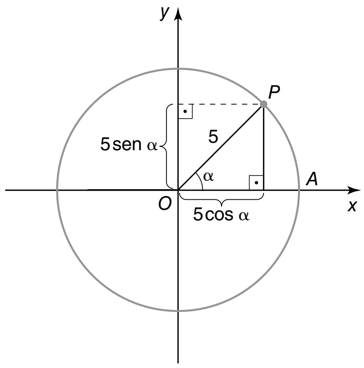
$\therefore \alpha = \frac{50\pi t}{9}$

Concluímos, então, que:

$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{50\pi t}{9}$

Alternativa **a**.

47. Sendo α a medida, em radiano, de um arco descrito pelo ponto P, temos:



Logo, $P_x = 5 \cos \alpha$ e $P_y = 5 \text{ sen } \alpha$.

Para obter α em função de t, resolvemos a regra de três:

radiano	segundo
2π	3
α	t

De onde obtemos: $\alpha = \dfrac{2\pi t}{3}$

Assim, concluímos:

$f(t) = 5 \cos \dfrac{2\pi t}{3}$ e $g(t) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$

48. Considerando que, quando a mão da pessoa estiver à máxima distância à frente, o ponto P estará na posição (40, 0), temos que a abscissa de P sobre qualquer ponto da circunferência é dada por $x = 40 \cos \alpha$, em que α é a medida, em radiano, do arco descrito por P no sentido anti-horário.
Para calcular a medida α, em função de t, resolvemos a regra de três:

radiano	segundo
2π	2
α	t

De onde obtemos: $\alpha = \pi t$.
Logo, o deslocamento horizontal de cada mão da pessoa pode ser descrito pela função $f(t) = 40 \cos (\pi t)$, com $f(t)$ e t em centímetro e segundo, respectivamente.

49. a) Temos que: $-1 \leqslant \text{sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} \leqslant 1$

Multiplicando por 2 os membros dessa desigualdade, obtemos:

$-2 \leqslant 2 \text{ sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} \leqslant 2$

Adicionando 3 a cada membro dessa desigualdade, chegamos a:

$1 \leqslant \underbrace{3 + 2 \text{ sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2}}_{Q(t)} \leqslant 5$

Concluímos, então, que a temperatura máxima no interior da câmara é 5 °C.

b) Igualando Q(t) ao seu valor máximo, temos:

$3 + 2 \text{ sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} = 5 \Rightarrow \text{sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} = 1$

$\therefore \dfrac{(2t-1)\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 1 + 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $t = 1$, que é o primeiro horário, a partir da zero hora, em que a temperatura no interior da caldeira atingiu o valor máximo.

c) Na resolução do item **a**, concluímos que:

$1 \leqslant 3 + 2 \text{ sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} \leqslant 5$; logo, a temperatura mínima no interior da câmara é de 1 °C.

d) Igualando Q(t) ao seu valor mínimo, temos:

$3 + 2 \text{ sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} = 1 \Rightarrow \text{sen} \dfrac{(2t-1)\pi}{2} = -1$

$\therefore \dfrac{(2t-1)\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2 + 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 7$, obtemos $t = 16$, que é o primeiro horário, após as 14 horas, em que a temperatura no interior da caldeira atingiu o valor mínimo.

50. I. Em janeiro de 2011 teremos $t = 0$, logo:
$n(t) = 5.900 \cdot \cos 13t + 6.380 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(0) = 5.900 \cdot \cos 0 + 6.380$
$\therefore n(0) = 12.280$

II. Após 6 meses podemos considerar $t = 0{,}5$, assim:
$n(t) = 5.900 \cdot \cos 13t + 6.380 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(0{,}5) = 5.900 \cdot \cos 6{,}5 + 6.380$
$\therefore n(0{,}5) \approx 5.900 \cdot 1 + 6.380 = 12.280$
Portanto, podemos afirmar que $n(0{,}5) \approx 12.280$.

III. É falsa, pois vai contra o item I.

Alternativa **c**.

51. (1) A maior temperatura será expressa quando o valor de seno for 1, logo:
$T(t) = 10 + 12 \cdot 1 = 22$
Portanto, a maior temperatura média semanal será 22 °C. Assim, (1) é verdadeiro.

(2) Na 50ª semana teremos:

$Q(50) = 400 + 200 \cdot \text{sen} \left[2\pi\left(\dfrac{50-11}{52}\right)\right] =$

$= 400 + 200 \cdot \text{sen} \left(\dfrac{39\pi}{26}\right) =$

$= 400 + 200 \cdot \text{sen} \left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 400 + 200 \cdot (-1) = 200$

Como seno tem o valor -1, então a quantidade de energia solar média semanal é mínima. Assim, (2) é verdadeiro.

(3) Para isso, é necessário que $\text{sen} \left[2\pi\left(\dfrac{t-15}{52}\right)\right] = 1$ e $\text{sen} \left[2\pi\left(\dfrac{t-11}{52}\right)\right] = 1$, ambos para o mesmo t.

Como a diferença entre os arcos dos dois senos não é côngruo a 2π, então as medidas não serão máximas durante o mesmo t. Assim, (3) é falso.

52. a) Verdadeiro, pois o valor máximo assumido pela função d é 5, o que ocorre quando $\left|\text{sen} \left(\dfrac{\pi t}{3}\right)\right| = 1$.

b) Falso, pois o valor mínimo assumido pela função d é 3, o que ocorre quando $\left|\text{sen} \left(\dfrac{\pi t}{3}\right)\right| = 0$.

c) Verdadeiro, pois, como o período da função $y = \text{sen}\,\dfrac{\pi t}{3}$ é dado por $p = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$, temos que o período da função $d(t) = 2\left|\text{sen}\,\dfrac{\pi t}{3}\right| + 3$ é dado por $\dfrac{p}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$. Logo, a passagem do bolo alimentar por essa seção do duodeno leva 3 segundos.

53. a) F, pois os gráficos não se interceptam para $t = 48$.

b) V, pois o período p de cada função é calculado por $p = \dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{24}}$ e, portanto, $p = 24$ meses.

c) V, pois a maior população P_M de predadores é obtida quando $\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{24} = 1$ e, portanto:
$P_M = 10.000 + 3.000 \cdot 1 = 13.000$

d) V, pois as menores populações de predadores e presas são 7.000 e 10.000 indivíduos, respectivamente, e, portanto, a média aritmética é obtida por: $\dfrac{7.000 + 10.000}{2} = 8.500$

e) V, pois $P(0) = 10.000 + 3.000 \cdot \text{sen}\,0 = 10.000$ e $P(0) = 15.000 + 5.000 \cdot \cos 0 = 20.000$.

Alternativa **a**.

54. a) $1{,}3 = 2{,}1 + 1{,}6\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

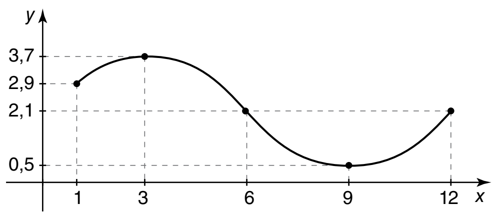
$\therefore\ \dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

ou

$\dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo:
$x = 7 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = 11 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$
Para $k = 0$, obtemos $x = 7$ ou $x = 11$.
Logo, a cidade recebe 1.300 turistas em julho e novembro.

b)



A diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade nesse período é:
$3.700 - 500 = 3.200$

55. (01) A função atingirá seu menor valor quando $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = -1$; logo:
$h(t) = 8 + 4 \cdot (-1) = 4$
Portanto, este item é falso.

(02) O momento do dia em que ocorre a maré baixa é quando $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = -1$, ou seja, $\dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{3\pi}{2}$; logo:
$\dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{3\pi}{2} = 18\pi$
$\therefore\ t = 18$
Portanto, este item é falso.

(04) Sendo m a constante que multiplica a variável t, o período da função seno é dado do seguinte modo:
$p = \dfrac{2\pi}{|m|} = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{12}\right|} = 24$
Portanto, este item é verdadeiro.

(08) Esse período será dado pelos dois pontos em que $h(t) = 10$, ou seja, os dois valores que $8 + 4\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = 10$; logo:

$8 + 4\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = 10 \Rightarrow \text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12}\right) = \dfrac{1}{2}$

Com isso temos que verificar o valor de t para o termo do seno sendo $\dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{5\pi}{6}$.

- Para o termo sendo $\dfrac{\pi}{6}$, temos:
$\dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = 2$
- Para o termo sendo $\dfrac{5\pi}{6}$, temos:
$\dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow t = 10$

Portanto, este item é verdadeiro.

Com isso, temos que a soma dos itens verdadeiros é $04 + 08 = 12$.

56. a) Pelo enunciado temos a seguinte equação:

$\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12} + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{\pi t}{12} + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = -12 + 24k$

Como $0 \leqslant t \leqslant 24$, temos que o único valor possível é $t = 12$, que ocorre quando $k = 1$.
Logo, $S = \{12\}$.

b) A temperatura máxima ocorre quando $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12} + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$, ou seja, quando $t = 12$. Assim:

$H(12) = 15 + 5\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi \cdot 12}{12} + \dfrac{3\pi}{2}\right) =$

$= 15 + 5 \cdot 1 = 20$

Portanto, a temperatura máxima atingida é 20 °C e acontece após 12 horas do início da medição, ou seja, às 15 horas.

57. 1) V, pois o valor máximo $N_{\text{máx}}$ ocorre quando $\cos\dfrac{t\pi}{6} = 1$ e, portanto:
$N_{\text{máx}} = 120 + 80 \cdot 1 = 200$

2) F, pois $N(9) = 120$ e o valor mínimo $N_{\text{mín}}$ ocorre quando $\cos\dfrac{t\pi}{6} = -1$; portanto:
$N_{\text{mín}} = 120 + 80 \cdot (-1) = 40$

3) V, pois $N(8) = 120 + 80\cos\dfrac{8\pi}{6} = 80$.

Alternativa **c**.

58. **I.** Como ocorrem 10 batidas a cada 5 segundos, então ocorrem 120 batidas a cada 60 segundos, ou seja, 120 bpm.

II. O gráfico se repete a cada $\frac{1}{2}$ segundo; logo, o período da função é $\frac{1}{2}$.

III. O gráfico pode ser aproximado por uma função do tipo $f(t) = |\text{sen}\,(mt)|$. Pelo item II, temos que o período da função é $\frac{1}{2}$; logo:

$$\frac{\pi}{|m|} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm 2\pi$$

Concluímos, então, que uma aproximação possível é $f(t) = |\text{sen}\,(2\pi t)|$.

Alternativa **d**.

59. **a)** A distância do periélio ao Sol é, aproximadamente, o mínimo valor da função $d = 149{,}6 - 2{,}5\cos x$, em que d é expresso em milhões de quilômetros.

Esse mínimo d_m é obtido para $\cos x = 1$ e, portanto:

$d_m = 149{,}6 - 2{,}5 \cdot 1 = 147{,}1$

Logo, a menor distância entre a Terra e o Sol é 147,1 milhões de quilômetros.

b) Para $t = T \cdot \left(\frac{1}{366} + \frac{x}{2\pi}\right)$, temos:

$$\frac{2\pi \cdot T \cdot \left(\frac{1}{366} + \frac{x}{2\pi}\right)}{T} = x - \frac{\pi}{183}\,\text{sen}\,x \Rightarrow \frac{\pi}{183} + x = x - \frac{\pi}{183}\,\text{sen}\,x$$

$\therefore\ \text{sen}\,x = -1$

Para $\text{sen}\,x = -1$, temos $\cos x = 0$ e, portanto, a distância d pedida é dada por:

$d = 149{,}6 - 2{,}5 \cdot 0 = 149{,}6$

Logo, a distância entre a Terra e o Sol, sob a condição enunciada, é 149,6 milhões de quilômetros.

60. Ao multiplicar as duas funções, temos:

$P(t) = U(t) \cdot I(t) = 20\,\text{sen}\,(50t + 30°) \cdot 4\,\text{sen}\,(60° - 50t) = 80 \cdot \text{sen}\,(50t + 30°) \cdot \text{sen}\,(60° - 50t) =$

$= 80 \cdot (\text{sen}\,50t \cdot \cos 30° + \text{sen}\,30° \cdot \cos 50t) \cdot (\text{sen}\,60° \cdot \cos 50t - \text{sen}\,50t \cdot \cos 60°) =$

$= 80 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,50t + \frac{1}{2}\cos 50t\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 50t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,50t\right) =$

$= 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\,\text{sen}\,50t \cdot \cos 50t - \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{sen}^2\,50t + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 50t - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,50t \cdot \cos 50t\right) =$

$= 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,50t \cdot \cos 50t - \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{sen}^2\,50t + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 50t\right) =$

$= 80 \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot 2\,\text{sen}\,50t \cdot \cos 50t + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\cos^2 50t - \text{sen}^2\,50t)\right] =$

$= 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,100t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 100t\right) = 40\cos 60°\,\text{sen}\,100t + \text{sen}\,60°\cos 100t = 40\,\text{sen}\,(100t + 60°)$

Alternativa **e**.

61. **a)** Temos a seguinte relação:

90 batimentos ——— 60 s
x batimentos ——— 1 s

$x = 1{,}5$ Hz

b) 540π rad/min equivalem a 270 voltas por minuto.

Assim, temos a seguinte relação:

270 voltas ——— 60 s
y ——— 1 s

$y = 4{,}5$

Ou seja, a partícula gira 4,5 voltas por segundo; logo, a frequência desse movimento é 4,5 Hz.

c) O período p, em segundo, é dado pela regra de três:

9π rad ——— 1 s
2π rad ——— p

$p = \frac{2}{9}$

Logo, o período é 2,9 segundos.

d) Como $p = \frac{2}{9}$, o valor de b é dado por:

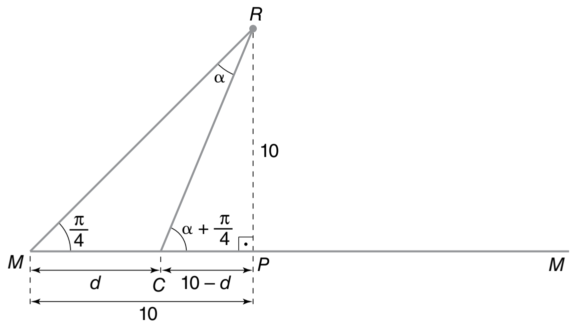
$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{9} \Rightarrow b = \pm 9\pi$

Por hipótese, a constante b é positiva; logo: $b = 9\pi$

Assim, a medida r do raio da trajetória circular da partícula, que é o coeficiente $\frac{2b}{\pi}$, é dada por:

$r = \frac{2 \cdot 9\pi}{\pi}$ cm $= 18$ cm

62. a) O triângulo MRP é isósceles de base $\overline{MR}$, pois os ângulos RMP e $M\widehat{R}P$ são congruentes. O ângulo $R\widehat{C}N$ é externo do triângulo MRC; logo, sua medida é $\alpha + \frac{\pi}{4}$. Assim, esquematizamos:



$$\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{10}{10 - d} \Rightarrow d = 10 - \frac{10}{\text{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ para } \alpha \neq \frac{\pi}{4}$$

Para incluirmos a medida $\frac{\pi}{4}$ como valor de α, podemos escrever:

$$d = 10 - 10 \text{ cotg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) Substituindo α por $\frac{7\pi}{12}$ na equação obtida no item **a**, temos:

$$d = 10 - 10 \text{ cotg}\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow d = 10 - 10 \text{ cotg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$\therefore\ d = 10 - 10 \cdot -\sqrt{3} = 10 + 10\sqrt{3}$

Logo, o comprimento do túnel é $10 + 10\sqrt{3}$ m.

63. a) Para qualquer posição da esfera E, acima ou abaixo do nível do mar, temos do triângulo BDE:

$\text{tg } |\alpha| = \frac{|y|}{50}$

Como $\frac{|y|}{50} = \left|\frac{y}{50}\right|$ e, no intervalo considerado, $\text{tg } |\alpha| = |\text{tg } \alpha|$ e os números tg α e y têm o mesmo sinal, deduzimos que:

$|\text{tg } \alpha| = \left|\frac{y}{50}\right| \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{y}{50}$

Observamos que essa equação também é válida quando a esfera E está na superfície do mar, pois:

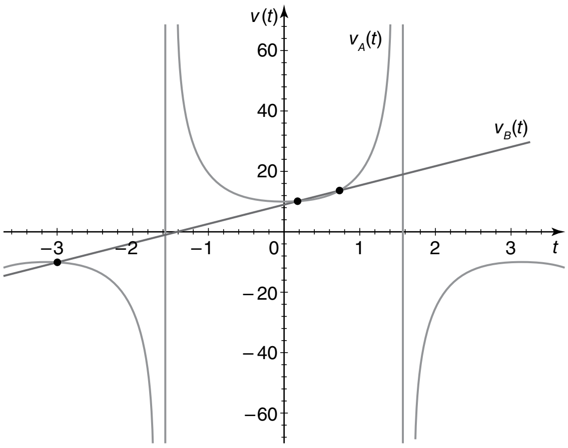
$\text{tg } 0° = 0 \Rightarrow y = 0$

Concluímos, então, que $y = 50 \text{ tg } \alpha$.

b) Observando que os valores α do item **a**, com $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, podem ser expressos por $\alpha = \frac{\pi}{3} - \beta$, com $\beta \in \left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$, concluímos que:

$$y = 50 \text{ tg}\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$$

64. Igualando as funções, temos os momentos em que os atletas se encontram; assim, ao montar os gráficos no programa de construção de gráficos, temos:



Assim, de 0 a 1, o atleta B ultrapassou A e depois foi ultrapassado.
Alternativa **c**.

65. **a)** Como o diâmetro é 10, então o raio é 5. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{d}{\text{sen } \alpha} = 2 \cdot 5 \Rightarrow d = 10 \text{ sen } \alpha$$

$$\therefore \alpha = \text{arcsen } \frac{d}{10}$$

b) O valor de d varia de 0 a 10 em 1 segundo, ou seja, o valor de α varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$:

$$d = 10 \text{ sen } \frac{t\pi}{2} \Rightarrow \text{arcsen } \frac{d}{10} = \frac{t\pi}{2}$$

$$\therefore t = \frac{2 \text{ arcsen } \frac{d}{10}}{\pi}$$

c) Para $t = \frac{1}{3}$, temos:

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \text{ arcsen } \frac{d}{10}}{\pi} \Rightarrow \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{d}{10}$$

$\therefore d = 5$

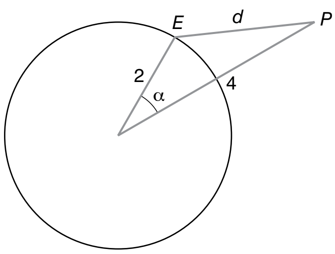
Para $d = 5$, temos:

$$5 = 10 \text{ sen } \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{sen } \alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, para $t = \frac{1}{3}$, o valor de α é $\frac{\pi}{6}$ rad e o valor de d é 5 m.

66. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:

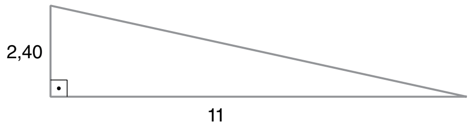


Pela lei dos cossenos, temos:

$$d^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{20 - d^2}{16} = \cos \alpha$$

$$\therefore \alpha = \arccos \left(\frac{20 - d^2}{16} \right)$$

67. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



Como o diâmetro da bola é 0,22 metro, temos:

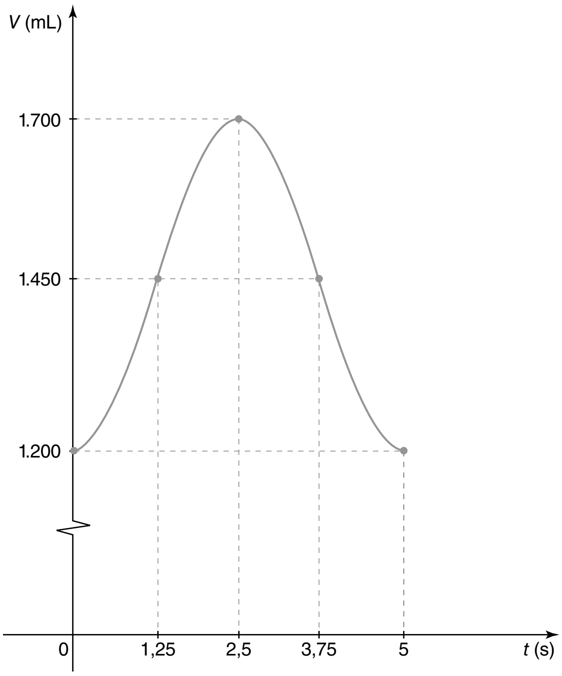
$$\frac{2,4 - 0,22}{11} = \text{tg}\,\alpha \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\frac{2,18}{11}\right)$$

Alternativa **a**.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Esquematizando um período da função $V(t) = a + b\cos(mt + q)$, temos:



Como o período é 5 s, calculamos os possíveis valores de m por:

$$\frac{2\pi}{|m|} = 5 \Rightarrow m = \pm\frac{2\pi}{5}$$

Portanto, uma possível função é da forma:

$$V(t) = a + b\cos\left(\frac{2\pi t}{5} + q\right)$$

Atribuindo valores a t, conforme os dados, obtemos:

$t = 0 \Rightarrow 1.200 = a + b\cos q$

$t = 2,5 \Rightarrow 1.700 = a + b\cos(\pi + q) = a - b\cos q$

$$\therefore \begin{cases} 1.200 = a + b\cos q \\ 1.700 = a - b\cos q \end{cases}$$

Adicionamos membro a membro:

$2.900 = 2a \Rightarrow a = 1.450$

Portanto, uma possível função é da forma:

$$V(t) = 1.450 + b\cos\left(\frac{2\pi t}{5} + q\right)$$

Atribuindo o valor 1,25 a t, chegamos a:

$$1.450 = 1.450 + b\cos\left(\frac{\pi}{2} + q\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + q\right) = 0$$

Assim, um possível valor de q é zero, portanto, uma possível função é da forma:

$$V(t) = 1.450 + b\cos\frac{2\pi t}{5}$$

Atribuindo o valor 2,5 a t, obtemos:

$1.700 = 1.450 + b\cos\pi \Rightarrow 1.700 = 1.450 - b$

$\therefore b = -250$

Concluímos, então, que uma função possível é:

$$V(t) = 1.450 - 250\cos\frac{2\pi t}{5}$$

2. Para $t = \frac{5}{6}$, temos:

$$V\left(\frac{5}{6}\right) = 1.450 - 250\cos\left(\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{5}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{5}{6}\right) = 1.450 - 250\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore V\left(\frac{5}{6}\right) = 1.325$$

Ou seja, o volume de ar nos pulmões no instante $\frac{5}{6}$ será de 1.325 mL.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: Embora o gráfico apresentado passe pelos pontos obtidos na tabela, seu traçado está incorreto.

Resolução correta:

Pela fórmula de arco duplo ($\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$) e pela relação fundamental ($\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$), temos:

$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2\, x - \text{sen}^2\, x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$

$$\therefore \text{sen}^2\, x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$$

Assim, o gráfico da função $y = \text{sen}^2\, x$ é o mesmo da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$.

Atribuindo os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π ao arco 2x da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$, obtemos a tabela:

$2x$	x	$f(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
π	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
2π	π	0

Assim, um esboço do gráfico para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é: