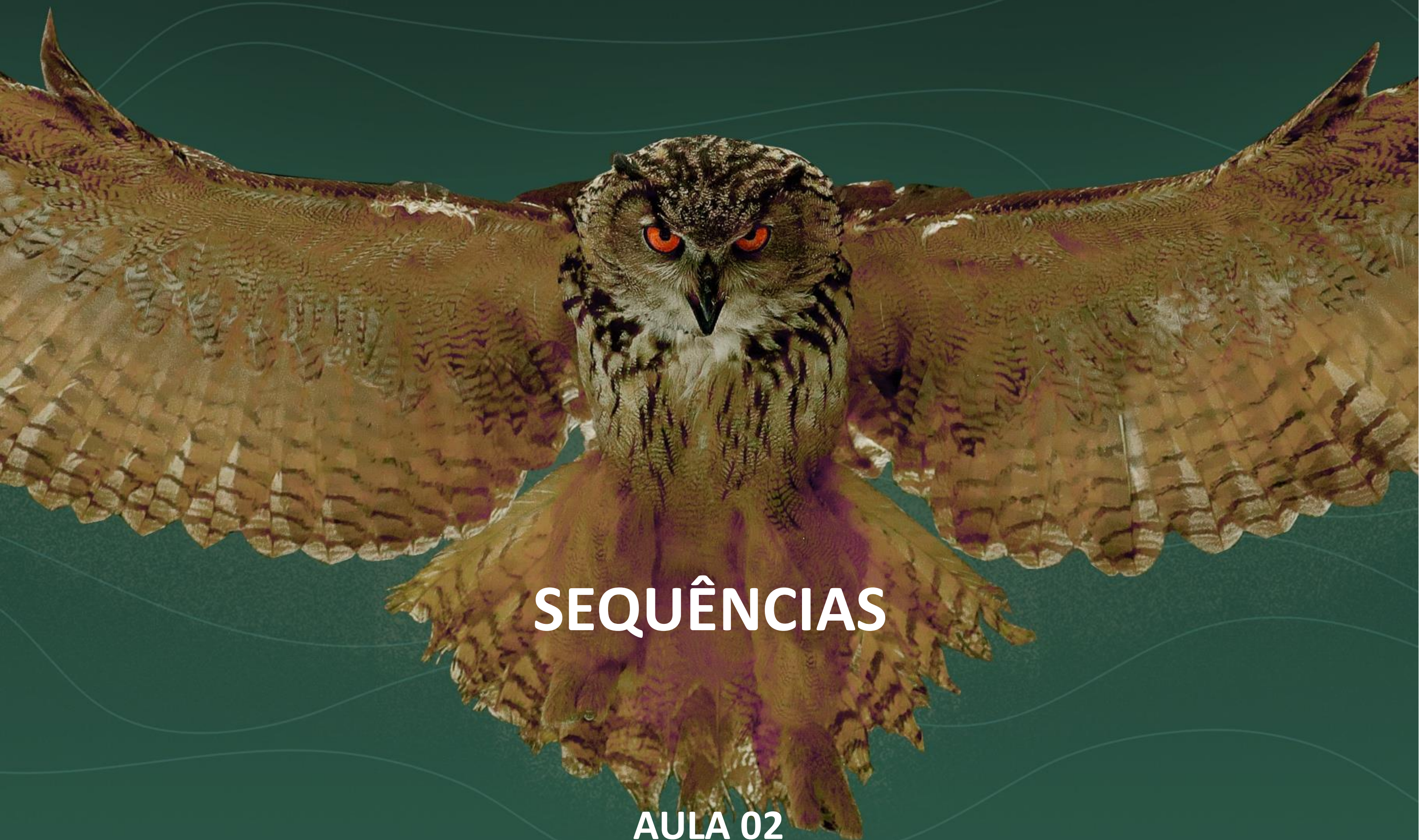
Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023



SEQUÊNCIAS

AULA 02
Sequências

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

INTRODUÇÃO

Nessa aula estudaremos sequências, esse é um tema que costuma ser cobrado nos concursos militares. Veremos o que é uma sequência e os tipos que podemos encontrar. Os mais conhecidos são a progressão aritmética e a progressão geométrica.

O importante nessa aula é que você entenda o raciocínio utilizado na resolução das questões. Se você for um aluno que possui uma base bem consolidada no assunto, você pode pular diretamente para a lista de questões e tentar resolver o máximo número de questões possível.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/profvictorso

1. SEQUÊNCIAS

1.1. DEFINIÇÃO

Chama-se sequência uma série de números onde para cada número natural corresponde um número real.

A notação usual para uma sequência é dada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são chamados de termos da sequência.

Os números que acompanham os termos são chamados de índices.

A sequência também pode ser representada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo:

O índice do primeiro termo a_1 da sequência é 1.

O índice do segundo termo a_2 da sequência é 2.

O índice do n-ésimo termo a_n da sequência é n.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma sequência finita.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma sequência infinita. Os "..." indicam que a sequência segue indefinidamente.

1.2. LEI DE FORMAÇÃO

A lei de formação de uma sequência permite calcular qualquer termo de uma sequência.

Exemplos:

1) $(1, 4, 9, 16, \dots)$

Sua lei de formação é dada por:

$$a_n = n^2$$

Essa lei é chamada de termo geral da sequência, pois conseguimos obter o valor de qualquer termo através dessa lei.

$$a_1 = 1^2 = 1 \ (primeiro\ termo)$$

$$a_2 = 2^2 = 4 \ (segundo\ termo)$$

$$a_3 = 3^2 = 9 \ (terceiro\ termo)$$

$$\vdots$$

Formalmente, dizemos que essa lei de formação é uma função de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo termo geral a_n possibilita obter o valor de qualquer termo da sequência.

2) $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$

Famosa sequência de Fibonacci. Ela pode ser escrita através da seguinte lei de formação:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$$
$$F_2 = F_1 = 1$$

Essa lei é chamada de fórmula de recorrência, pois seus termos são obtidos através de termos anteriores. Importante salientar que os termos iniciais devem ser definidos para a fórmula de recorrência. Para o caso da sequência de Fibonacci, temos os termos iniciais $F_2 = F_1 = 1$.

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$
$$\vdots$$

(Exercícios de Fixação)

1. Dada as seguintes leis de formação, escreva os seus primeiros cinco termos:

a) $a_n = n + n^2, \forall n \geq 1$

b) $b_n = n + 2, \forall n \geq 1$

c) $c_n = (-n), \forall n \geq 1$

d) $d_1 = 1$ e $d_n = 4d_{n-1}, \forall n \geq 2$

e) $e_1 = 2$ e $e_n = e_{n-1}^2, \forall n \geq 2$

f) $f_1 = 2$ e $f_n = (-1)f_{n-1}, \forall n \geq 2$

Resolução:

a) $a_n = n + n^2, \forall n \geq 1$

$$a_1 = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$
$$a_3 = 3 + 3^2 = 3 + 9 = 12$$
$$a_4 = 4 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$
$$a_5 = 5 + 5^2 = 5 + 25 = 30$$
$$\Rightarrow (2, 6, 12, 20, 30)$$

b) $b_n = n + 2, \forall n \geq 1$

$$b_1 = 1 + 2 = 3$$
$$b_2 = 2 + 2 = 4$$
$$b_3 = 3 + 2 = 5$$
$$b_4 = 4 + 2 = 6$$
$$b_5 = 5 + 2 = 7$$

$$\Rightarrow (3,4,5,6,7)$$

c) $c_n = (-n), \forall n \geq 1$

$$c_1 = (-1) = -1$$
$$c_2 = (-2) = -2$$
$$c_3 = (-3) = -3$$
$$c_4 = (-4) = -4$$
$$c_5 = (-5) = -5$$
$$\Rightarrow (-1,-2,-3,-4,-5)$$

d) $d_1 = 1$ e $d_n = 4d_{n-1}, \forall n \geq 2$

$$d_2 = 4d_1 = 4 \cdot 1 = 4$$
$$d_3 = 4d_2 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$d_4 = 4d_3 = 4 \cdot 16 = 64$$
$$d_5 = 4d_4 = 4 \cdot 64 = 256$$
$$\Rightarrow (1,4,16,64,256)$$

e) $e_1 = 2$ e $e_n = e_{n-1}^2, \forall n \geq 2$

$$e_2 = e_1^2 = 2^2 = 4$$
$$e_3 = e_2^2 = 4^2 = 16$$
$$e_4 = e_3^2 = 16^2 = 256$$
$$e_5 = e_4^2 = 256^2 = 65536$$
$$\Rightarrow (2,4,16,256,65536)$$

f) $f_1 = 2$ e $f_n = (-1)f_{n-1}, \forall n \geq 2$

$$f_2 = (-1)f_1 = (-1)2 = -2$$
$$f_3 = (-1)f_2 = (-1)(-2) = 2$$
$$f_4 = (-1)f_3 = (-1)2 = -2$$
$$f_5 = (-1)f_4 = (-1)(-2) = 2$$
$$\Rightarrow (2,-2,2,-2,2)$$

Gabarito: a) $\mathbf{(2,6,12,20,30)}$ **b)** $\mathbf{(3,4,5,6,7)}$ **c)** $\mathbf{(-1,-2,-3,-4,-5)}$ **d)** $\mathbf{(1,4,16,64,256)}$ **e)** $\mathbf{(2,4,16,256,65536)}$ **f)** $\mathbf{(2,-2,2,-2,2)}$

2. A soma dos termos iniciais de uma sequência é dada por:

$$S_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Calcule:

a) a_2

b) a_{210}

Resolução:

a) a_2

$$S_1 = a_1 = 1^2 = 1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 = 4$$

Temos o valor de a_1 através de S_1, vamos substituir esse valor em S_2 para encontrar a_2:

$$1 + a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = 3$$

b) a_{210}

Para calcular a_{210}, devemos calcular a soma S_{210} e subtrair S_{209}. Veja:

$$S_{210} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{209} + a_{210}$$
$$S_{209} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{209}$$

Perceba que S_{209} está escrito na soma S_{210}. Vamos inserir S_{209} na equação de S_{210}:

$$S_{210} = S_{209} + a_{210}$$
$$a_{210} = S_{210} - S_{209}$$

Usando a fórmula dada para $n = 210$ e $n = 209$, temos:

$$a_{210} = 210^2 - 209^2$$

Podemos fatorar esse número:

$$a_{210} = (210 - 209)(210 + 209)$$
$$a_{210} = 1(419) = 419$$

Gabarito: a) $a_2 = 3$ b) $a_{210} = 419$

2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

2.1. DEFINIÇÃO

Uma sequência é uma progressão aritmética quando sua lei de formação é dada por:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{matrix}}$$

a_1 é o primeiro termo da PA e r é sua razão.

$a_n = a_{n-1} + r$ é a fórmula de recorrência da PA.

Para verificarmos se uma sequência é uma PA, basta verificar se a diferença entre seus termos consecutivos resulta em uma constante.

Exemplos:

1) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Essa sequência é uma PA de razão $r = 1$, pois:

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$$
$$a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1$$
$$a_5 - a_4 = 5 - 4 = 1$$
$$a_6 - a_5 = 6 - 5 = 1$$
$$a_7 - a_6 = 7 - 6 = 1$$

Perceba que essa sequência segue a lei de formação:

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

2) $(-4, 0, 4)$

PA de razão $r = 4$.

$$a_2 - a_1 = 0 - (-4) = 4$$
$$a_3 - a_2 = 4 - 0 = 4$$

2.2. CLASSIFICAÇÃO

Uma progressão aritmética pode ser classificada de acordo com sua razão.

2.2.1. PA CRESCENTE

$$r > 0 \Rightarrow PA\ crescente$$

$(2, 6, 10, 14, 18)$ é uma PA crescente de razão $r = 4 > 0$

2.2.2. PA CONSTANTE

$$r = 0 \Rightarrow PA\ constante$$

$(3, 3, 3, 3, 3)$ é uma PA constante de razão $r = 0$

2.2.3. PA DECRESCENTE

$$r < 0 \Rightarrow PA\ decrescente$$

$(10, 5, 0, -5, -10)$ é uma PA decrescente de razão $r = -5 < 0$

2.3. TERMO GERAL

Podemos encontrar o termo geral da PA através da fórmula de recorrência. Vamos escrever cada termo da PA através dessa fórmula:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando todos os termos, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)r$$

Os termos em vermelho se cancelam, então podemos escrever:

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}}$$

Esse é o termo geral da PA.

a_n é chamado de n-ésimo termo da PA.

Também podemos escrever o termo geral em função de outro termo que não seja o primeiro. Vamos escrever os termos a partir do índice $p > 1\ e\ p \in \mathbb{N}$. Usando o termo geral encontrado para p e n:

$$a_p = a_1 + (p-1)r$$
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Fazendo $a_n - a_p$, obtemos:

$$a_n - a_p = a_1 + (n-1)r - [a_1 + (p-1)r]$$
$$a_n - a_p = a_1 + (n-1)r - a_1 - (p-1)r$$
$$a_n - a_p = [(n-1) - (p-1)]r$$
$$a_n - a_p = (n-p)r$$
$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_p + (n-p)r}}$$

Esse é o termo geral em função de qualquer índice.

2.4. PROPRIEDADES

2.4.1. TERMOS EQUIDISTANTES

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão r.

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{j+1} + a_{n-j} = cte}}$$

Essa propriedade diz que a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual à soma dos extremos $(a_1 + a_n)$.

Termos equidistantes são os termos que possuem a soma dos índices iguais a $1 + n$. Veja:

$$a_1 + a_n \Rightarrow soma\ dos\ índices = 1 + n$$
$$a_2 + a_{n-1} \Rightarrow soma\ dos\ índices = 2 + (n-1) = 1 + n$$
$$a_{j+1} + a_{n-j} \Rightarrow soma\ dos\ índices = (j+1) + (n-j) = 1 + n$$

Vamos demonstrar essa propriedade:

Suponha $j \in \mathbb{N}$ e $j > 1$, vamos escrever $a_{j+1} + a_{n-j}$ usando o termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{j+1} = a_1 + ((j+1) - 1)r = a_1 + jr$$
$$a_{n-j} = a_1 + [(n-j) - 1]r$$
$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + jr + \{a_1 + [(n-j) - 1]r\}$$
$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + jr + a_1 + nr - jr - r$$
$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + a_1 + nr - r$$
$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + a_1 + (n-1)r$$

Perceba que $a_n = a_1 + (n-1)r$. Substituindo na equação, obtemos:

$$a_{j+1} + a_{n-j} = a_1 + a_n$$

Portanto provamos que para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e $j > 1$, a soma dos termos equidistantes resulta em um número constante $(a_1 + a_n)$.

2.4.2. SOMA DOS TERMOS DA PA

A soma dos termos de uma PA é dada pela fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Demonstração:

Vamos escrever S_n como a soma de todos os n termos de uma PA:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Também podemos escrever a soma S_n, invertendo a ordem dos termos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Somando essas duas equações e juntando os termos equidistantes:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pela propriedade dos termos equidistantes da PA, vamos escrever as somas em função de $(a_1 + a_n)$:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n\ termos}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

A soma dos n termos de uma sequência também pode ser representada dessa forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$\sum$ é o símbolo usado para representar um somatório.

O índice j abaixo desse símbolo indica o primeiro termo do somatório e o índice n indica até qual índice vai o somatório.

Exemplo:

$$\sum_{j=2}^{5} a_j = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Para o caso de uma PA com n termos e n ímpar, podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot n}$$

Onde $a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ é o termo médio da PA.

Demonstração:

Podemos usar a fórmula da soma dos termos da PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Temos que provar que:

$$a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Usando o termo geral da PA, temos:

$$a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = a_1 + \left(\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1\right)r = a_1 + \frac{(n-1)}{2}r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Calculando $a_1 + a_n$:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r$$

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$$

Dividindo por 2:

$$\frac{(a_1 + a_n)}{2} = a_1 + \frac{(n-1)r}{2} = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Logo, para n ímpar:

$$S_n = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot n$$

2.4.3. MÉDIA ARITMÉTICA

$$\boxed{a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}}$$

Essa propriedade é muito útil para resolução de diversas questões envolvendo PA, pois conseguimos expressar os termos sem usar a razão. Isso facilita os cálculos.

Demonstração:

Vamos escrever a_{j-1} e a_{j+1}, usando o termo geral:

$$a_{j-1} = a_1 + \big((j-1) - 1\big)r = a_1 + (j-2)r$$

$$a_{j+1} = a_1 + \big((j+1) - 1\big)r = a_1 + jr$$

Somando os dois termos, obtemos:

$$a_{j-1} + a_{j+1} = [a_1 + (j-2)r] + (a_1 + jr)$$

$$a_{j-1} + a_{j+1} = a_1 + jr - 2r + a_1 + jr$$

$$a_{j-1} + a_{j+1} = 2a_1 + 2jr - 2r$$

$$a_{j-1} + a_{j+1} = 2[a_1 + (j-1)r]$$

$$a_j = a_1 + (j-1)r \Rightarrow a_{j-1} + a_{j+1} = 2a_j$$

$$a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}$$

Um termo de uma PA pode ser escrito como a média dos seus termos vizinhos.

Para a prova, grave:

Se tivermos uma PA (a_1, a_2, a_3), podemos escrever a_2 como a média aritmética de a_1 e a_3:

$$\boxed{\boldsymbol{a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}}}$$

2.4.4. NOTAÇÃO ESPECIAL

$$\boldsymbol{PA\ com\ 3\ termos}:$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x - r, x, x + r)}}$$

$$\boldsymbol{PA\ com\ 4\ termos}:$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x - 3r', x - r', x + r', x + 3r')}}$$

$$\boldsymbol{PA\ com\ 5\ termos}:$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)}}$$

Essa propriedade é útil para facilitar os cálculos de problemas envolvendo PA. Representamos seus termos em função de um x e r. Note que a razão da PA com 4 termos é $r = 2r'$.

(Exercícios de Fixação)

3. Dado $a_1 = 3$ e $r = 5$, o primeiro termo e a razão de uma PA, respectivamente. Calcule:

a) a_{10}

b) a_{20}

Resolução:

a) a_{10}

Temos os dados do primeiro termo e a razão da PA. Vamos usar o termo geral da PA para calcular a_{10}:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$
$$a_{10} = 3 + (10 - 1)5$$
$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 5$$
$$a_{10} = 48$$

b) a_{20}

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{20} = 3 + (20-1)5$$
$$a_{20} = 3 + 19 \cdot 5$$
$$a_{20} = 98$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{a_{10} = 48}$ b) $\boldsymbol{a_{20} = 98}$

4. Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50})$ uma PA de razão r. Dado $a_{10} = 24$ e $a_{20} = 44$, calcule a_1 e r.

Resolução:

Vamos escrever a_{10} e a_{20} usando o termo geral da PA.

$$a_{10} = a_1 + (10-1)r = 24 \Rightarrow a_1 + 9r = 24\ (I)$$
$$a_{20} = a_1 + (20-1)r = 44 \Rightarrow a_1 + 19r = 44\ (II)$$

Fazendo $(II) - (I)$, obtemos:

$$(a_1 + 19r) - (a_1 + 9r) = 44 - 24$$
$$a_1 + 19r - a_1 - 9r = 20$$
$$10r = 20$$
$$r = 2$$

Substituindo $r = 2$ em (I) para encontrar a_1:

$$a_1 + 9(2) = 24$$
$$a_1 + 18 = 24$$
$$a_1 = 6$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_1 = 6}$ e $\boldsymbol{r = 2}$

5. Obter a soma dos 30 primeiros termos da PA $(10, 5, 0, -5, \dots)$.

Resolução:

Vamos aplicar a fórmula da soma:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})30}{2} = (a_1 + a_{30})15$$

Sabemos a_1, precisamos calcular a_{30} e a razão r. Calculando r:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$5 = 10 + r$$
$$r = -5$$

Usando o termo geral para calcular a_{30}:

$$a_{30} = a_1 + (30-1)r$$
$$a_{30} = 10 + 29 \cdot (-5)$$
$$a_{30} = 10 - 145 = -135$$

Substituindo os valores em S_{30}:

$$S_{30} = \big(10 + (-135)\big)15$$
$$S_{30} = (-125)15 = -1875$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_{30} = -1875}$

6. Dado $S_n = n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos n termos de uma PA. Calcular o primeiro termo e a razão da PA.

Resolução:

Para calcular a_1, podemos substituir $n = 1$ em S_n:

$$S_n = n^2 + n$$
$$S_1 = a_1$$
$$S_1 = 1^2 + 1 = 2$$

Para descobrir a razão r, vamos calcular o segundo termo através de S_2:

$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$a_1 + a_2 = 6$$
$$2 + a_2 = 6$$
$$a_2 = 4$$

A razão será dada por:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$r = a_2 - a_1$$
$$r = 4 - 2 = 2$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_1 = 2}$ **e** $\boldsymbol{r = 2}$

7. Obter 3 números em PA de modo que sua soma seja 21 e a soma de seus quadrados seja 165.

Resolução:

Temos que encontrar uma PA com 3 termos que satisfaça às condições da questão.

Vamos representar a PA da seguinte forma:

$$(x - r, x, x + r)$$

Assim, a soma dos seus termos é dado por:

$$(x - r) + x + (x + r) = 21$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

A soma de seus quadrados é:

$$(x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 = 165$$

Substituindo $x = 7$ na equação e desenvolvendo seus termos:

$$(7 - r)^2 + 7^2 + (7 + r)^2 = 165$$
$$49 - 14r + r^2 + 49 + 49 + 14r + r^2 = 165$$
$$2r^2 + 3 \cdot 49 = 165$$
$$2r^2 + 147 = 165$$
$$2r^2 = 18$$
$$r^2 = 9$$
$$r = \pm 3$$

Encontramos $x = 7$ e $r = \pm 3$. Temos duas PA's:

$$r = 3 \Rightarrow (7 - 3, 7, 7 + 3) = (4, 7, 10)\ PA\ crescente$$
$$r = -3 \Rightarrow \big(7 - (-3), 7, 7 + (-3)\big) = (10, 7, 4)\ PA\ decrescente$$

Gabarito: $\boldsymbol{(4, 7, 10)}$ **e** $\boldsymbol{(10, 7, 4)}$

8. Interpolando-se 5 termos entre os números 2 e 20, obtemos uma PA. Ache a razão de interpolação e escreva a PA formada.

Resolução:

Os números 2 e 20 são os extremos da PA. Quando interpolamos, inserimos termos entre esses extremos. Com isso, a interpolação de 5 termos entre 2 e 20 gera uma PA com 7 termos $(5\ termos + 2\ extremos)$.

Vamos formar a PA e calcular a razão.

$$a_1 = 2 \text{ e } a_7 = 20$$
$$a_7 = a_1 + (7-1)r$$
$$20 = 2 + 6r$$
$$18 = 6r$$
$$r = 3$$

Temos os valores de a_1 e r, a PA formada é:

$$(2, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 20)$$
$$(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)$$

Gabarito: $(\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{11}, \mathbf{14}, \mathbf{17}, \mathbf{20})$

9. Interpolando-se n vezes, $n \in \mathbb{N}$, entre os números n e $n^2 + 3n + 1$ obtemos uma PA. Achar a razão de interpolação.

Resolução:

Interpolar n vezes significa inserir n termos entre os extremos. A PA que procuramos possui a forma:

$$(n, \underbrace{a_2, a_3, \dots, a_{n+1}}_{n\ termos}, n^2 + 3n + 1)$$

Perceba que essa PA possui $n + 2$ termos.

Os extremos são:

$$a_1 = n$$
$$a_{n+2} = n^2 + 3n + 1$$

Escrevendo os extremos usando o termo geral da PA, obtemos:

$$a_{n+2} = a_1 + [(n+2) - 1]r$$
$$n^2 + 3n + 1 = n + (n+1)r$$
$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)r$$

Fatorando e simplificando:

$$(n+1)^2 = (n+1)r$$
$$r = n + 1$$

∴A razão de interpolação da PA obtida é $r = n + 1$

Gabarito: $\boldsymbol{r = n + 1}$

2.5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR

Esse assunto é um aprofundamento da Progressão Aritmética e dificilmente é cobrado nos vestibulares, mas nada impede que isso aconteça no seu ano! Veremos apenas como proceder com a questão, caso caia algo parecido na prova, você saberá resolvê-la. Alguns assuntos que serão usados nesse tópico ainda serão aprendidos em aulas futuras. Caso você não entenda, tente memorizar o bizu de como proceder.

2.5.1. DEFINIÇÃO

A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma PA de ordem k, se após "k diferenças" entre os termos consecutivos obtivermos uma PA estacionária, ou seja, uma PA com razão nula.

Exemplo:

1) $(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)$

Se subtrairmos cada termo dessa sequência para encontrar a razão, vemos que a razão não é constante:

$$r = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$r' = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$

Vamos obter outra sequência através da subtração de seus termos consecutivos. Seu termo é da forma $b_i = a_{i+1} - a_i$.

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 8 - 4 = 4$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 15 - 8 = 7$$
$$b_5 = a_6 - a_5 = 26 - 15 = 11$$

Após a **primeira diferença**, obtemos a sequência:

$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)$$

Novamente, a sequência obtida ainda não é uma PA estacionária. Vamos obter outra sequência aplicando a mesma ideia:

$$c_1 = b_2 - b_1 = 2 - 1 = 1$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = 4 - 2 = 2$$
$$c_3 = b_4 - b_3 = 7 - 4 = 3$$
$$c_4 = b_5 - b_4 = 11 - 7 = 4$$

Após a **segunda diferença**, obtemos a sequência:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)$$

Perceba que esses termos possuem uma razão constante $r = 1$.

A sequência obtida é uma PA de primeira ordem.

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ primeira\ ordem$$

Subtraindo os termos consecutivos dessa PA, obtemos uma PA estacionária após a **terceira diferença**:

$$(1, 1, 1, 1, \dots)\ PA\ estacionária$$

Assim, a sequência $(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)$ é uma PA de ordem 3, pois foram necessárias 3 diferenças entre os termos consecutivos para se obter uma PA estacionária.

As progressões aritméticas de ordem superior são classificadas da seguinte forma:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 1$$
$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 2$$
$$(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 3$$

Assim, a PA do exemplo é de terceira ordem.

2.5.2. TEOREMA DO TERMO GERAL

$$\boxed{\boldsymbol{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)\ PA\ de\ ordem\ k \Leftrightarrow a_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \dots + A_1 n^1 + A_0}}$$

Se encontrarmos uma PA de ordem k, podemos escrever o seu termo geral em função de um polinômio de grau k em n.

$A_i, 0 \leq i \leq k$, é o coeficiente do polinômio.

$$a_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \dots + A_1 n^1 + A_0$$

*Ainda estudaremos polinômios. No termo acima, $A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \dots + A_1 n^1 + A_0$ é um polinômio de ordem k (maior expoente de n). $(k, k-1, k-2, \dots)$ são os expoentes de n e n é a variável do polinômio.

Vamos encontrar o termo geral da seguinte PA de ordem superior:

$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)$$

Vimos que essa sequência é uma PA de ordem 2 (exemplo do tópico anterior). Então de acordo com o teorema, podemos escrever seu termo geral como um polinômio de grau 2:

$$a_n = An^2 + Bn + C$$

Precisamos encontrar os valores de A, B, C. Para isso, podemos obter esses valores através dos dados da PA de ordem 2. Como temos três variáveis, devemos ter três equações para encontrar seus valores (para encontrar os coeficientes do polinômio com n variáveis, devemos ter n equações).

$$a_1 = 1 \Rightarrow A(1)^2 + B(1) + C = 1 \Rightarrow A + B + C = 1$$

$$a_2 = 2 \Rightarrow A(2)^2 + B(2) + C = 2 \Rightarrow 4A + 2B + C = 2$$

$$a_3 = 4 \Rightarrow A(3)^2 + B(3) + C = 4 \Rightarrow 9A + 3B + C = 4$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 & (I) \\ 4A + 2B + C = 2 & (II) \\ 9A + 3B + C = 4 & (III) \end{cases}$$

Fazendo $(III) - (II)$ e $(II) - (I)$:

$$(III) - (II): 5A + B = 2 \quad (IV)$$

$$(II) - (I): 3A + B = 1 \quad (V)$$

$$(IV) - (V): 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/2$ em (V):

$$3A + B = 1 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) + B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Substituindo A e B em (I):

$$A + B + C = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+C=1\Rightarrow C=1$$

Logo, o termo geral é dado por:

$$a_n=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1$$

2.5.3. TEOREMA DA SOMA DOS TERMOS

$$\boxed{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ PA\ de\ ordem\ K\rightarrow S_n=A_{k+1}n^{k+1}+A_kn^k+\cdots+A_1n+A_0}$$

A soma dos termos de uma PA de k-ésima ordem é dada por um polinômio de grau $k+1$ na variável n, sendo n o número de termos da sequência.

10. (IME/2000) Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Resolução:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Queremos um polinômio de grau n que representa a soma acima. Analisemos os termos dessa soma. Sabemos que cada termo é da forma $a_k=k^2$, logo:

$$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)\rightarrow(1,4,9,16,25,\dots,n^2)$$

Perceba que subtraindo os termos consecutivos dessa sequência, obtemos uma PA estacionária:

$$\underbrace{(3,5,7,9,11,\dots)}_{PA\ de\ razão\ 2}$$

Logo, a sequência formada pelos termos da soma do problema é uma PA de ordem 2. De acordo com o teorema da soma, podemos escrever S_n como um polinômio de grau 3:

$$S_n=An^3+Bn^2+Cn+D$$

Temos 4 incógnitas (A,B,C,D), então precisamos de 4 equações:

$$S_1=A(1)^3+B(1)^2+C(1)+D=A+B+C+D=1\quad(I)$$

$$S_2=A(2)^3+B(2)^2+C(2)+D=8A+4B+2C+D=5\quad(II)$$

$$S_3 = A(3)^3 + B(3)^2 + C(3) + D = 27A + 9B + 3C + D = 14 \quad (III)$$
$$S_4 = A(4)^3 + B(4)^2 + C(4) + D = 64A + 16B + 4C + D = 30 \quad (IV)$$

$(IV) - (III)$:

$$37A + 7B + C = 16 \quad (V)$$

$(III) - (II)$:

$$19A + 5B + C = 9 \quad (VI)$$

$(II) - (I)$:

$$7A + 3B + C = 4 \quad (VII)$$

$(V) - (VI)$:

$$18A + 2B = 7 \quad (VIII)$$

$(VI) - (VII)$:

$$12A + 2B = 5 \quad (IX)$$

$(VIII) - (IX)$:

$$6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Substituindo $A = 1/3$ em (IX):

$$12\left(\frac{1}{3}\right) + 2B = 5$$
$$4 + 2B = 5$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/3$ e $B = 1/2$ em (VII):

$$7\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + C = 4$$
$$\frac{7}{3} + \frac{3}{2} + C = 4$$
$$\frac{(14 + 9)}{6} + C = 4$$
$$\frac{23}{6} + C = 4$$
$$C = \frac{24}{6} - \frac{23}{6} = \frac{1}{6}$$

Substituindo A, B, C em (I):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + D = 1$$
$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$$

$$\frac{6}{6} + D = 1$$

$$D = 0$$

Assim, obtemos o polinômio:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$

3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

3.1. DEFINIÇÃO

Uma sequência é uma progressão geométrica quando sua lei de formação é dada por:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1}q \end{matrix}}$$

a_1 é o primeiro termo da PG e q é sua razão.

$a_n = a_{n-1}q$ é a fórmula de recorrência da PG.

Exemplos:

1) $(1, 3, 9, 27, \dots)$

PG cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e sua razão é:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

2) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$

PG com $a_1 = 1$ e razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

3) $(3, -9, 27, -81, \dots)$

PG com $a_1 = 3$ e razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-9}{3} = -3$$

3.2. TERMO GERAL

Vamos encontrar o termo geral da PG através da fórmula de recorrência. Escrevendo os termos:

$$a_n = a_{n-1}q$$
$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q$$
$$a_4 = a_3 q$$
$$a_5 = a_4 q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1}q$$

Perceba que temos $n-1$ termos.

Vamos multiplicá-los:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1\ termos}$$

Os termos em vermelho se cancelam e assim obtemos:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Essa é o termo geral da PG.

Também podemos escrever o termo geral em função de um termo qualquer da PG.

Usando o termo geral, podemos escrever:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_p = a_1 q^{p-1}$$

Dividindo as duas equações:

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_1}{a_1}\frac{q^{n-1}}{q^{p-1}}$$
$$a_n = a_p q^{(n-1)-(p-1)}$$
$$\boxed{a_n = a_p q^{(n-p)}}$$

3.3. PROPRIEDADES

3.3.1. TERMOS EQUIDISTANTES

$$\boxed{a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \cdots = a_{j+1} a_{n-j} = cte}$$

O produto dos termos equidistantes é um valor constante e a soma dos índices é igual à $n+1$.

Para provar essa propriedade, vamos escrever os termos equidistantes generalizados a_{j+1} e $a_{n-j}, j \in \mathbb{N}$, usando o termo geral da PG.

$$a_{j+1} = a_1 q^{[(j+1)-1]} = a_1 q^j$$

$$a_{n-j} = a_1 q^{[(n-j)-1]}$$

Multiplicando os dois termos, temos:

$$a_{j+1} a_{n-j} = (a_1 q^j)(a_1 q^{[(n-j)-1]})$$

$$a_{j+1} a_{n-j} = a_1 a_1 q^j q^{[(n-j)-1]}$$

$$a_{j+1} a_{n-j} = a_1 a_1 q^{n-1}$$

Sabemos que $a_n = a_1 q^{n-1}$, substituindo na equação acima:

$$a_{j+1} a_{n-j} = a_1 a_n$$

Logo, o produto dos termos equidistantes é igual ao valor do produto dos extremos.

3.3.2. SOMA DOS TERMOS DA PG FINITA

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Demonstração:

Vamos calcular a soma da PG finita:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Escrevendo os termos usando o termo geral:

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Substituindo em S_n:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando S_n por q, obtemos:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \cdots + a_1 q^n$$

Subtraindo as duas equações:

$$S_n - qS_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} - (a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \cdots + a_1 q^n)$$

Repare que os termos em vermelho se cancelam.

Dessa forma:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Também podemos escrever:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)(-1)}{(1-q)(-1)} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

3.3.3. SOMA DOS TERMOS DA PG INFINITA

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}, -1 < q < 1}$$

Quando temos uma PG infinita de razão absoluta menor que 1, a soma dos seus termos converge para $a_1/(1-q)$.

Demonstração:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)\ PG\ infinita$$

Vamos escrever a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$$

Se $-1 < q < 1$ e a PG é infinita podemos escrever:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}\right)$$
$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 - a_1 \cancel{q^n}}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}$$

ESCLARECENDO!

Veja a sequência:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$
$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$\vdots$$

Perceba que os valores vão diminuindo à medida que o índice aumenta. Vamos calcular a_{10}:

$$a_{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \cong 0{,}001$$

Agora, veja a_{20}:

$$a_{20} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1048576} \cong 0{,}000001$$

Se tentarmos calcular a_n tal que n seja tão grande, vamos obter um valor muito próximo de zero.

Assim, quando n tende ao infinito, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Essa propriedade é válida para números pertencentes ao intervalo $]-1,1[$.

3.3.4. PRODUTO DOS TERMOS DA PG

O produto dos termos de uma PG é dado por:

$$\boxed{P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Demonstração:

Vamos representar os termos da PG usando o termo geral:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Multiplicando os termos da PG, obtemos:

$$\underbrace{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_n}_{P_n} = \underbrace{a_1 a_1 a_1 a_1 \cdot \ldots \cdot a_1}_{n\ fatores} \left(\underbrace{q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}}_{n-1\ fatores} \right)$$

$$P_n = a_1^n q^{1+2+3+..+(n-1)}$$

$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ é uma soma de PA de razão 1.

Aplicando a fórmula da soma da PA:

$$S_{n-1} = \frac{\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo em P_n:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

O produto dos termos de uma sequência também pode ser representado dessa forma:

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$\prod$ é o símbolo usado para representar o produtório de uma sequência. Ela parte do termo de índice $j = 1$ e vai até o termo de índice n.

Para n ímpar, podemos escrever:

$$\boxed{P_n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^n}$$

Onde $a_{\frac{n+1}{2}}$ é o termo médio da PG.

Demonstração:

Usando o termo geral da PG, temos:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 q^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = a_1 q^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Pela fórmula dos produtos dos termos da PG, temos:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^n$$

3.3.5. MÉDIA GEOMÉTRICA

$$\boxed{a_j^2 = a_{j-1} a_{j+1}}$$

Essa propriedade facilita as resoluções das questões de PG, pois conseguimos expressar os termos sem usar a razão.

Demonstração:

Representando a_{j-1} e a_{j+1} usando o termo geral da PG:

$$a_{j-1} = a_1 q^{(j-1)-1} = a_1 q^{j-2}$$

$$a_{j+1} = a_1 q^{(j+1)-1} = a_1 q^{j}$$

Multiplicando os termos, obtemos:

$$a_{j-1} a_{j+1} = a_1 q^{j-2} a_1 q^{j} = a_1^2 q^{2j-2} = a_1^2 q^{2(j-1)} = \left[a_1 q^{j-1}\right]^2 = a_j^2$$

$$\Rightarrow a_{j-1} a_{j+1} = a_j^2$$

Assim, para uma PG (a_1, a_2, a_3), podemos escrever a_2 como a média geométrica de a_1 e a_3:

$$\boxed{a_2^2 = a_1 a_3}$$

3.3.6. NOTAÇÃO ESPECIAL

$$\boldsymbol{PG\ com\ 3\ termos:}$$

$$\boxed{(x, xq, xq^2)\ ou\ \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)}$$

$$\boldsymbol{PG\ com\ 4\ termos:}$$

$$\boxed{(x, xq, xq^2, xq^3)\ ou\ \left(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3\right)}$$

$$\boldsymbol{PG\ com\ 5\ termos:}$$

$$\boxed{(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)\ ou\ (\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2)}$$

Note que a razão da PG com 4 termos é $q = y^2$.

(Exercícios de Fixação)

11. Dado a PG $(2, -4, 8, -16, 32, \dots)$, calcule:

a) a_{20}

b) a_{30}

Resolução:

a) Para calcular os termos da PG, precisamos encontrar sua razão. Podemos aplicar a fórmula de recorrência:

$$a_2 = a_1 q$$
$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Observando a sequência, $a_2 = -4$ e $a_1 = 2$. Substituindo na fórmula acima:

$$q = \frac{-4}{2} = -2$$

Usando o termo geral para calcular a_{20}:

$$a_{20} = a_1 q^{20-1} = a_1 q^{19}$$
$$a_{20} = 2(-2)^{19} = -2^{20}$$

b) Conhecemos a razão e o termo inicial, vamos aplicar o termo geral:

$$a_{30} = a_1 q^{30-1} = a_1 q^{29}$$
$$a_{30} = 2(-2)^{29} = -2^{30}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{a_{20} = -2^{20}}$ **b)** $\boldsymbol{a_{30} = -2^{30}}$

12. Dado $a_3 = 9$ e $a_6 = 243$, termos de uma PG. Calcule a_{100}.

Resolução:

Vamos usar o termo geral para encontrar a razão:

$$a_n = a_p q^{n-p}$$
$$a_6 = a_3 q^{6-3}$$
$$a_6 = a_3 q^3$$
$$243 = 9q^3$$
$$q^3 = \frac{243}{9} = 27 = 3^3$$
$$q^3 = 3^3$$
$$q = 3$$

Agora, aplicando o termo geral para a_{100}:

$$a_{100} = a_3 q^{100-3} = a_3 q^{97}$$

Sabemos que $a_3 = 9$ e $q = 3$, dessa forma:

$$a_{100} = 9(3)^{97} = 3^2 3^{97} = 3^{99}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_{100} = 3^{99}}$

13. Que número deve ser somado aos termos da sequência $(-2, 8, 68)$ para que se tenha uma PG?

Resolução:

Temos que descobrir o valor de x para que a sequência $(-2 + x, 8 + x, 68 + x)$ seja uma PG.

Vamos escrever a razão em função dos termos. Veja:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8 + x}{-2 + x}$$
$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{68 + x}{8 + x}$$

Igualando as duas equações, obtemos:

$$\frac{8 + x}{-2 + x} = \frac{68 + x}{8 + x}$$

Resolvendo a equação:

$$(8 + x)^2 = (68 + x)(-2 + x)$$
$$64 + 16x + x^2 = -136 + 66x + x^2$$
$$200 = 50x$$
$$x = 4$$

Substituindo $x = 4$ em uma das equações para encontrar o valor da razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8 + x}{-2 + x} = \frac{8 + 4}{-2 + 4} = \frac{12}{2} = 6$$

Portanto, se adicionarmos 4 a cada termo da sequência, obteremos uma PG de razão $q = 6$.

Gabarito: $\boldsymbol{x = 4}$

14. Quantos termos tem a PG $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2048}\right)$?

Resolução:
Vamos encontrar a razão da PG:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

Agora, podemos escrever o último termo em função de n:

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{1}{2048}=1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Pela fatoração $2048=2^{11}$
Desse modo:

$$\frac{1}{2^{11}}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

Igualando os expoentes:

$$11=n-1$$
$$n=12$$

Gabarito: $n=12$

15. Em uma PG com 3 termos, a soma dos seus termos é 31 e o produto deles é 125. Obtenha a PG.
Resolução:
Vamos escrever a PG usando a notação especial para 3 termos:

$$\left(\frac{x}{q},x,xq\right)$$

Segundo o enunciado, temos:

$$P_3=a_1a_2a_3=125$$
$$P_3=\left(\frac{x}{q}\right)x(xq)=125$$
$$x^3=5^3$$
$$x=5$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3=31$$
$$S_3=\frac{x}{q}+x+xq=31$$
$$x\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=31$$

Substituindo $x=5$ na equação:

$$5\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=31$$

Resolvendo a equação:

$$\frac{5(1+q+q^2)}{q}=31$$
$$5+5q+5q^2=31q$$
$$5q^2-26q+5=0$$

Temos que encontrar as raízes dessa equação quadrática:

$$q=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$q=\frac{-(-26)\pm\sqrt{(-26)^2-4\cdot 5\cdot 5}}{2\cdot 5}$$
$$q=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{10}=\frac{26\pm\sqrt{576}}{10}=\frac{26\pm 24}{10}=5\ ou\ \frac{1}{5}$$

Assim, encontramos duas razões e consequentemente temos duas PGs.

$$q=5\Rightarrow\left(5\cdot\left(\frac{1}{5}\right),5,5\cdot 5\right)=(1,5,25)$$

A outra razão é o inverso dessa que acabamos de encontrar.

$$q'=\frac{1}{5}=\frac{1}{q}$$
$$\left(\frac{x}{q'},x,xq'\right)\Rightarrow\left(\frac{x}{\frac{1}{q}},x,x\left(\frac{1}{q}\right)\right)\Rightarrow\left(xq,x,\frac{x}{q}\right)$$

A segunda PG possui os mesmos termos que a primeira com a ordem invertida:

$$(25,5,1)$$

Gabarito: $(\mathbf{1},\mathbf{5},\mathbf{25})$ **ou** $(\mathbf{25},\mathbf{5},\mathbf{1})$

16. Determine a soma de todos os divisores positivos de 8192.

Resolução:

Vamos fatorar o número 8192:

8192	2
4096	2
2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Assim, podemos escrever:

$$8192=2^{13}$$

Os divisores do número 8192 serão todos os números que podem ser formados pelos fatores de 8192. Os números pertencem à sequência:

$$(2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,\dots,2^{13})$$

Note que a sequência é uma PG de razão $q=2$.

Vamos usar a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

2^0 até 2^{13} são 14 números, logo $n = 14$.

$q = 2$ e $a_1 = 2^0 = 1$.

Substituindo os valores:

$$S_{14} = \frac{1(2^{14} - 1)}{2 - 1} = 2^{14} - 1$$

Gabarito: $S = 2^{14} - 1$

17. Simplifique:

$$\frac{(x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n})}{(x + x^2 + \cdots + x^n)}$$

Resolução:

Temos uma soma de PG finita no numerador e no denominador da fração.

Vamos primeiro simplificar o numerado usando a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Para a sequência $x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$, a razão é $q = \frac{x^4}{x^2} = x^2$ e $a_1 = x^2$.

Vamos encontrar o número de termos dessa PG:

$$a_m = a_1 q^{m-1}$$
$$a_m = x^{2n}$$
$$x^{2n} = x^2 (x^2)^{m-1}$$
$$x^{2n-2} = (x^2)^{m-1}$$
$$(x^2)^{n-1} = (x^2)^{m-1}$$
$$m = n$$

Logo, a quantidade de termos dessa PG é n.

Podemos escrever:

$$S_n = \frac{x^2((x^2)^n - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^n - 1)(x^n + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Usando o mesmo raciocínio para o denominador:

$x + x^2 + \cdots + x^n$ possui n termos e sua razão é $q = x$.

$$s_n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

A fração que temos que simplificar é dado por:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{\frac{x^2(x^n - 1)(x^n + 1)}{(x - 1)(x + 1)}}{\frac{x(x^n - 1)}{x - 1}} = \frac{x(x^n + 1)}{x + 1}$$

Gabarito: $\frac{x(x^n+1)}{x+1}$

18. Calcule a soma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$$

Resolução:

Veja:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Essa é uma soma de duas progressões geométricas infinitas:

$$S'=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\Rightarrow Soma\ de\ PG\ de\ razão\ ½$$

$$S''=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\Rightarrow Soma\ de\ PG\ de\ razão\ 1/3$$

Usando a fórmula da soma da PG infinita para cada sequência, temos:

$$S'=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

$$S''=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

Dessa forma, a soma da questão é dada por:

$$S=S'+S''=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=3/2}$

4. PROGRESSÃO ARITMÉTICA GEOMÉTRICA (PAG)

Entre as sequências, podemos ter uma que é a união de uma PA com uma PG. Essa sequência chama-se progressão aritmética geométrica.

Definição:

O termo geral de uma PAG é dado por:

$$\boxed{a_n=[a_1+(n-1)r]q^{n-1}}$$

Exemplos:

1) $\left(\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{4},\frac{4}{8},\frac{5}{16},\dots\right)$

Perceba que o numerador é uma PA de razão 1 $(1,2,3,4,5,\dots)$ e o denominador é uma PG de razão 2 $(1,2,4,8,16,\dots)$. Essa sequência é uma PAG.

Para a PAG, a razão r é igual a 1 e a razão q é igual a $1/2$.

O termo geral é:

$$a_n=[a_1+(n-1)r]q^{n-1}$$

$$a_n=[1+(n-1)1]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^{n-1}}=n2^{1-n}$$

As questões que podem cair na prova sobre PAG normalmente cobrarão a soma dos termos da PAG. Vamos aprender a resolver esse tipo de questão.

Considere o termo inicial da PAG $a_1 = a$ e razões r e q.

Vamos calcular:

$$S = a + [(a+r)q] + [(a+2r)q^2] + [(a+3r)q^3] + \cdots$$

O bizu dessa questão é multiplicar S por q e fazer $S - Sq$. Veja:

$$Sq = aq + [(a+r)q^2] + [(a+2r)q^3] + [(a+3r)q^4] + \cdots$$

Fazendo $S - Sq$:

$$S - Sq = a + [(a+r)q] + [(a+2r)q^2] + [(a+3r)q^3] + \cdots$$
$$-\{aq + [(a+r)q^2] + [(a+2r)q^3] + [(a+3r)q^4] + \cdots\}$$

Repare que os termos com as cores correspondentes podem ser subtraídos. Dessa forma, obtemos:

$$S(1-q) = a + rq + rq^2 + rq^3 + rq^4 + \cdots$$
$$S = \frac{a + rq(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)}{1-q}$$

Se $-1 < q < 1$, podemos aplicar a fórmula da PG infinita em $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$:

$$S = \frac{a + rq\left(\frac{1}{1-q}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$$

Encontramos uma fórmula para a soma de uma PAG de razão $-1 < q < 1$.

19. (ITA/1975/Modificada) Calcule $S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$

Resolução:

Perceba que a soma S é de uma PAG com razão $r = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

Vamos usar o bizu para a resolução da soma da PAG.

Multiplicando S por $q = \frac{1}{2}$:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots$$

Comparando com S:

$$S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$$

Fazendo $S - S/2$:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots\right)$$

Note que os termos coloridos podem ser subtraídos. Assim, encontramos uma sequência conhecida:

$$\frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Obtemos a soma de uma PG de razão $1/2$.

Como a razão é maior que -1 e menor que 1, podemos usar a fórmula da PG infinita:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{S}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S = 4$$

Gabarito: $S = 4$

20. (ITA/1977/Modificada) Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (k+1)x^k$, onde $x > 1$ e k é um inteiro maior que 2, então, se n é um inteiro maior que 2. Obtenha $S_n, n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Resolução:

Vamos usar o bizu e calcular S_n.

Temos as razões $r = 1$ e $q = x$.

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n$$

Multiplicando S_n por $q = x$:

$$S_n x = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (n+1)x^{n+1}$$

Subtraindo as duas equações:

$$S_n - S_n x = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - (n+1)x^{n+1}$$

Aplicando a soma da PG finita para a soma $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ (perceba que temos $n + 1$ termos nessa sequência):

$$S_n(1 - x) = \frac{1(x^{n+1} - 1)}{x - 1} - (n+1)x^{n+1}$$

Multiplicando por -1:

$$S_n(x - 1) = (n+1)x^{n+1} - \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Isolando o termo S_n:

$$S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x - 1} - \frac{(x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

Gabarito: $S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$

5. SÉRIE TELESCÓPICA

Série telescópica é qualquer somatório da forma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(1)$$

Das várias séries telescópicas, estudaremos a série telescópica-aritmética.

Vamos aprender a resolvê-la.

Considere uma sequência da forma:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}, \frac{1}{a_2a_3}, \frac{1}{a_3a_4}, \frac{1}{a_4a_5}, \dots\right)$$

$a_i, i \in \mathbb{N}$, é o termo de uma PA de primeira ordem de razão r.

A sua soma é dada por:

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

O bizu para resolver essa soma é escrever os termos da sequência dessa forma:

$$\boxed{\frac{1}{a_na_{n+1}} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)}$$

Veja:

Para $r \neq 0$, vamos escrever os termos da sequência como a diferença dos termos consecutivos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} = \frac{r}{a_1a_2}$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{r}{a_1a_2}$$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{r}{a_2a_3}$$

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} = \frac{r}{a_3a_4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{r}{a_{n-1}a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{r}{a_na_{n+1}}$$

Note que somando os termos, os termos coloridos se cancelarão. Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = r\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Perceba que a expressão do lado esquerdo é a soma telescópica. Logo, podemos escrever:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Também podemos escrever:

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a_n a_{n+1}}} \equiv \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a_n}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{a_{n+1}}}}$$

Demonstração:

$$\frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$\frac{Aa_{n+1} + Ba_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

Da igualdade das frações:

$$Aa_{n+1} + Ba_n = 1$$

Como a_{n+1} é um termo de uma PA de razão r:

$$A(a_n + r) + Ba_n = 1$$

$$(A + B)a_n + Ar = 1$$

Ar é uma constante e a_n é um termo que possui valor dependente de n.

Para encontrar a solução dessa equação, devemos ter:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$Ar = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{r} \Rightarrow B = -\frac{1}{r}$$

Assim, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

21. **(IME/1996)** Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998 \cdot 3001}$$

Resolução:

Essa expressão é uma soma telescópica.

Lembra do bizu da aula?

Para resolver essa questão, precisamos escrevê-la na forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

Vamos substituir os valores e encontrar A e B:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{A}{1}+\frac{B}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}=A+\frac{B}{4}\Rightarrow A=\frac{1-B}{4}\quad(I)$$
$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\Rightarrow\frac{1}{28}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\quad(II)$$

Substituindo (I) em (II) para encontrar B:

$$\frac{1}{28}=\frac{\frac{1-B}{4}}{4}+\frac{B}{7}$$
$$\frac{1}{28}=\frac{1-B}{16}+\frac{B}{7}$$
$$\frac{1}{28}=\frac{(1-B)7+B\cdot 16}{16\cdot 7}$$
$$16\cdot\frac{7}{28}=(1-B)7+B\cdot 16$$
$$4=7-7B+16B$$
$$-3=9B$$
$$B=-\frac{1}{3}$$

Substituindo B em (I):

$$A=\frac{1-B}{4}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{4}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$$

Encontramos $A=1/3$ e $B=-1/3$.

Podemos escrever:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{A}{a_n}+\frac{B}{a_{n+1}}$$
$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3a_n}-\frac{1}{3a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Agora podemos resolver a questão. Vamos chamar a soma de S:

$$S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Podemos reescrever a soma usando o termo geral da série telescópica aritmética:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$S=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2995}-\frac{1}{2998}\right)+\left(\frac{1}{2998}-\frac{1}{3001}\right)\right)$$
$$S=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{2995}}-\cancel{\frac{1}{2998}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2998}}-\frac{1}{3001}\right)\right)$$
$$S=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3001}\right)$$
$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right)=\frac{1000}{3001}$$

Poderíamos aplicar diretamente a fórmula para a soma:

$$S_n=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Observando a soma telescópica, vemos que $r=3$, $a_1=1$ e $a_{n+1}=3001$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3001}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right)=\frac{1000}{3001}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\frac{1000}{3001}}$

22. **(IME/1966)** Calcule:

$$S=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

Resolução:

Perceba que os termos possuem a forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

a_n é o termo de uma PA de primeira ordem de razão $r=2$.

Vamos reescrever os termos usando o bizu:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}=\frac{A}{a_n a_{n+1}}+\frac{B}{a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}=\frac{A(a_{n+2})+B(a_n)}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$A(a_{n+2})+B(a_n)=1$$

Escrevendo $a_{n+2}=a_n+2r$:

$$A(a_n+2r)+B(a_n)=1$$

$$(A+B)a_n+2Ar=1$$

$$A+B=0\Rightarrow B=-A$$

$$2Ar=1\Rightarrow A=\frac{1}{2r}\Rightarrow B=-\frac{1}{2r}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$$

Reescrevendo a soma usando essa forma e substituindo $r=2$:

$$S=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$S=\frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}\right)+\frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}\right)+\cdots+\frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)\cdot(2n+5)}\right)$$

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)}$

6. QUESTÕES NÍVEL 1

1. **(EEAR/2000)**

As sequências $(x, 3, y)$ e $(y, \sqrt{5}, x)$ são, respectivamente progressões aritmética e geométrica. Se a progressão aritmética é crescente, a razão da progressão geométrica é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
c) $\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{5}$

2. **(EEAR/2000)**

Sejam a, b e c termos consecutivos de uma PG, todos consecutivos. Se $a < b < c$ e $a = m - 1, b = m + 5$ e $c = 11m - 1$, então $a + b + c$:

a) 40
b) 42
c) 44
d) 46

3. **(EEAR/2001)**

O valor de mercado de um automóvel é alterado a cada mês com um acréscimo de 1% em relação ao mês anterior. A sequência de valores do automóvel, a cada mês, forma uma progressão:

a) Aritmética de razão 0,1
b) Aritmética de razão 0,01
c) Geométrica de razão 1,1.
d) Geométrica de razão 1,01.

4. **(EEAR/2001)**

Na sequência $(1, 1, 2, 3, \ldots)$, onde $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o nono termo é:

a) 34
b) 21
c) 43
d) 28

5. **(EEAR/2001)**

Numa progressão geométrica de 6 termos positivos, a soma de a_2 e a_4 é 6, e a soma de a_4 e a_6 é 12. A razão dessa PG é:

a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) $-\sqrt{2}$
d) 2

6. **(EEAR/2001)**

Numa progressão aritmética, o primeiro termo é $10x - 9y$, o último termo é y, e a razão é $y - x$. Sendo $x \neq y$, o número de termos dessa P.A. é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11

7. (EEAR/2001)

Tanto numa PA quanto numa PG, os números 3 e 243 são, respectivamente, a razão e o 6º termo. O produto do primeiro termo da PG pelo 3º termo da PA é:

a) 702
b) 693
c) 234
d) 231

8. (EEAR/2002)

Sabe-se que a sequência $(x, y, 10)$ é uma PA e a sequência $\left(\frac{1}{y}, 2, 3x+4\right)$ é uma PG. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) A razão da PA é 2.
b) A razão da PG é 26
c) $x+y=0$
d) $x \cdot y=-16$

9. (EEAR/2002)

Se em uma PG de três termos reais o produto e a soma dos termos são, respectivamente, 216 e 26, então a soma dos dois primeiros termos dessa PG, quando decrescente, é

a) 24
b) 20
c) 18
d) 8

10. (EEAR/2002)

Se $(x+3, 2x-1, x+5)$ é uma PA, então a soma dos três termos dessa PA é

a) -13
b) 15
c) 19
d) 27

11. (EEAR/2002)

A soma dos 20 primeiros termos da PA cujo termo geral tem para expressão $a_n=3n+5$ é

a) 657
b) 730
c) 803
d) 1460

12. (EEAR/2002)

A soma dos termos de uma PG crescente de três termos é 21, e a diferença entre os extremos, 15. A razão dessa PG é

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

13. (EEAR/2002)

Ao se efetuar a soma das 50 primeiras parcelas da PA: $202 + 206 + 210 + \cdots$, por distração, não foi somada a 35ª parcela. A soma encontrada foi

a) 10200
b) 12585
c) 14662
d) 16419

14. (EEAR/2002)

Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x-1) = f(x) - 2$. Se $f(1) = -4$, então a soma dos valores dos 50 menores elementos do conjunto $Im(f)$ é

a) 1150
b) 1450
c) 2250
d) 2450

15. (EEAR/2003)

A soma dos 9 primeiros termos de uma P.A. de razão 2 é nula. Assim, pode-se afirmar que seu sexto termo é igual a:

a) 0
b) 2
c) 6
d) 7

16. (EEAR/2003)

A solução da equação $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 2$ é:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) -1
d) Indeterminada

17. (EEAR/2003)

O termo geral de uma PA é $a_n = 3n - 16$. A soma de seus 10 primeiros termos é

a) 18
b) 14
c) 5
d) -6

18. (EEAR/2003)

Na progressão geométrica onde o primeiro termo é m^3, o último é $-m^{21}$ e a razão é $-m^2$, o número de termos é

a) 8
b) 9
c) 11
d) 10

19. (EEAR/2003)

A soma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{999} + 2^{1000}$ é igual a

a) $2^{1000} - 1$
b) $2^{1001} - 1$
c) $2^{1000} + 1$
d) $2^{1001} + 1$

20. (EEAR/2004)

O quinto termo de uma PA é 23, e o décimo segundo termo é -40. O primeiro termo negativo dessa PA é:

a) Sétimo.
b) Oitavo.
c) Nono
d) Décimo.

21. (EEAR/2004)

Uma PG de razão $\sqrt{3}$ tem cinco termos. Se o último termo é $9\sqrt{3}$, então o primeiro é:

a) $\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) 3
d) $\frac{1}{3}$

22. (EEAR/2004)

Na PG $(y, 2y + 2, 3y + 3, \dots)$, o 4º termo, que é diferente de zero, vale

a) 2
b) $\frac{3}{2}$
c) -4
d) $-\frac{27}{2}$

23. (EEAR/2004)

Numa P.A., o 10º termo e a soma dos 30 primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1440. A razão dessa progressão é

a) 2
b) 3
c) 4

d) 6

24. (EEAR/2005)

A soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \dots\right)$ é

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

25. (EEAR/2005)

Numa PG, onde o 1º termo é 3, a soma dos três primeiros termos é 21. Se a soma dos quatro primeiros termos é 45, o quinto termo é

a) 51
b) 50
c) 49
d) 48

26. (EEAR/2006)

Os números que expressam as medidas das arestas que concorrem em um mesmo vértice de um paralelepípedo retângulo estão em progressão geométrica. Se a maior dessas arestas mede 6m, e o volume desse sólido é 27m³, então a sua área total, em m², é

a) 63
b) 57
c) 53
d) 47

27. (EEAR/2007)

Se:

$$\sum_{i=3}^{x} 2^i = 4088$$

O valor de x é divisor de

a) 24
b) 22
c) 21
d) 18

28. (EEAR/2009)

Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é

23. 7
24. 5
25. 4

26. 2

29. (EEAR/2018)

O 6° termo da sequência 2, 8, 32, 128, ... é um número cuja soma dos algarismos é

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

30. (EEAR/2018)

Os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = (-1)^n \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}^*$, são tais que

a) formam uma PA de razão 4

b) formam uma PG de razão 2

c) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

d) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$

31. (EEAR/2018)

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ de razão $q = 2$. Se $a_1 + a_5 = 272$, o valor de a_1 é

a) 8

b) 6

c) 18

d) 16

32. (EEAR/2017)

Considere esses quatro valores $x, y, 3x, 2y$ em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

33. (EEAR/2017)

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ uma PG de termos não nulos. Se $2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5$, pode-se afirmar corretamente que a razão dessa PG é

a) 4

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{2}$

34. (EEAR/2016)

A progressão aritmética, cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n = 5n - 18$, tem razão igual a

a) -5

b) -8

c) 5

d) 8

35. (EEAR/2016)

Quatro números estão dispostos de forma tal que constituem uma PG finita. O terceiro termo é igual a 50 e a razão é igual a 5. Desta maneira, o produto de $a_1 \cdot a_4$ vale

a) 10

b) 250

c) 500

d) 1250

36. (EEAR/2015)

Quatro números estão em PA de razão 3. Se o primeiro termo somado ao último é igual a 19, então o primeiro termo é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

37. (EEAR/2015)

Em uma PA cuja razão é igual ao seu primeiro termo, tem-se $a_3 + a_7 = 5$. Assim, a razão dessa PA é

a) $0,5$.

b) $2,5$.

c) 2.

d) 1.

38. (EEAR/2015)

Em uma Progressão Geométrica, o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{1}{2}$. A soma dos 7 primeiros termos dessa PG é

a) $\frac{127}{64}$

b) $\frac{97}{64}$

c) $\frac{63}{32}$

d) $\frac{57}{32}$

39. (EEAR/2014)

Em uma PG de razão 6, o quarto termo é 48. Assim, o primeiro termo é

a) 2

b) 3

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2}{9}$

40. (EEAR/2013)

Na PA decrescente $(18, 15, 12, 9, \dots)$, o termo igual a -51 ocupa a posição

a) 30

b) 26

c) 24

d) 18

41. (EEAR/2012)

Se a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG de termos não nulos, então x^2 é

a) 1.

b) 4.

c) 9.

d) 16.

42. (EEAR/2011)

Sejam as sequências $S_1 = (1, 5, 25, 125, \dots)$ e $S_2 = (4, 7, 10, 13, \dots)$. A razão entre o $6°$ termo de S_1 e o $8°$ de S_2 é

a) 150.

b) 125.

c) 100.

d) 75.

43. (EEAR/2010)

Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é

a) 25.

b) 30.

c) 33.

d) 42.

44. (EEAR/2009)

Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é

a) 7.

b) 5.

c) 4.

d) 2.

45. (EEAR/2009)

Se a soma dos n primeiros termos de uma P.A. é $3n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então a razão dessa P.A. é

a) 6.

b) 4.

c) 3.

d) 2.

46. (EEAR/2009)

O $4°$ termo de uma P.G. é -80, e o $6°$ termo é -320. Se essa P.G. é alternante, então sua razão é

a) 4.

b) 3.

c) -1.

d) -2.

47. (EEAR/2008)

A soma dos n primeiros termos da PG $(1, -2, 4, -8, \dots)$ é -85. Logo, n é

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

6.1. GABARITO

1. a
2. b
3. d
4. a
5. b
6. d
7. c
8. b
9. a
10. d
11. b
12. a
13. c
14. c
15. b
16. b

17. c
18. a
19. b
20. b
21. a
22. d
23. c
24. d
25. d
26. a
27. b
28. b
29. c
30. d
31. d
32. b
33. b
34. c
35. c
36. c
37. a
38. a
39. d
40. c
41. b
42. b
43. b
44. b
45. a
46. d
47. a

6.2. RESOLUÇÃO

1. (EEAR/2000)

As sequências $(x, 3, y)$ e $(y, \sqrt{5}, x)$ são, respectivamente progressões aritmética e geométrica. Se a progressão aritmética é crescente, a razão da progressão geométrica é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{5}$

Comentários

$$(x, 3, y) \text{ é } PA\ de\ razão\ r > 0 \Rightarrow x = 3 - r; y = 3 + r$$

$$\left(y, \sqrt{5}, x\right) \text{ é } PG\ de\ razão\ q \Rightarrow x \cdot y = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$\Rightarrow (3 + r)(3 - r) = 5 \Rightarrow 3^2 - r^2 = 5 \Rightarrow 9 - r^2 = 5$$

$$\Rightarrow r^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

Como $r > 0 \Rightarrow r = 2$. Assim, se a razão da PA é 2:

$$(x, 3, y) = (3 - 2, 3, 3 + 2) = (1, 3, 5) \Rightarrow x = 1, y = 5$$

Como $\left(y, \sqrt{5}, x\right)$ é PG de razão q:

$$x = yq^2 \Rightarrow 1 = 5q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Gabarito: "a".

---

2. **(EEAR/2000)**

Sejam $a, b\ e\ c$ termos consecutivos de uma PG, todos consecutivos. Se $a < b < c$ e $a = m - 1, b = m + 5$ e $c = 11m - 1$, então $a + b + c$:

a) 40
b) 42
c) 44
d) 46

Comentários

Sabemos que termos consecutivos (a, b, c) de uma PG de razão q são do tipo $\left(a, aq, aq^2\right)$. Veja que o produto do último com o primeiro resulta no quadrado do primeiro:

$$a \cdot aq^2 = (aq)^2 \Rightarrow c \cdot a = b^2$$

Assim, substituindo $a, b\ e\ c$ em função de m:

$$(11m - 1)(m - 1) = (m + 5)^2$$

$$\Rightarrow 11m^2 - 11m - m + 1 = m^2 + 10m + 25$$

$$\Rightarrow 10m^2 - 22m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 - 11m - 12 = 0$$

$$\Delta = 121 - 4 \cdot 5 \cdot (-12) = 121 + 240 = 361 = 19^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{11 \pm 19}{10} = 3\ ou\ -\frac{4}{5}$$

Como $a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \Rightarrow 3$.

Assim:

$$a + b + c = 13m + 3 = 42$$

Gabarito: "b".

---

3. **(EEAR/2001)**

O valor de mercado de um automóvel é alterado a cada mês com um acréscimo de 1% em relação ao mês anterior. A sequência de valores do automóvel, a cada mês, forma uma progressão:

a) Aritmética de razão 0,1

b) Aritmética de razão 0,01
c) Geométrica de razão 1,1.
d) Geométrica de razão 1,01.

Comentários

Seguindo o que é dito no enunciado, no n-ésimo mês, o valor de mercado do automóvel é acrescido de 1% $(0{,}01\ do\ valor)$ em relação ao $(n-1)$-ésimo mês:

$$a_n = a_{n-1} + 0{,}01 \cdot a_{n-1} = a_{n-1}(1+0{,}01) = 1{,}01a_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot 1{,}01$$

Portanto, veja que, o aluguel do mês seguinte depende do aluguel do mês anterior multiplicado por uma razão $q = 1{,}01$. Essa é a definição da sequência geométrica de razão $1{,}01$.

Gabarito: "d".

---

4. **(EEAR/2001)**

Na sequência $(1, 1, 2, 3, \ldots)$, onde $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o nono termo é:

a) 34
b) 21
c) 43
d) 28

Comentários

Vamos calcular o quinto termo, pela definição:

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$
$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$
$$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$$
$$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$$
$$\boxed{a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34}$$

Gabarito: "a".

---

5. **(EEAR/2001)**

Numa progressão geométrica de 6 termos positivos, a soma de a_2 e a_4 é 6, e a soma de a_4 e a_6 é 12. A razão dessa PG é:

a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) $-\sqrt{2}$
d) 2

Comentários

Se $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ é uma progressão geométrica de razão q, então:

$$a_4 = a_2q^2$$
$$a_6 = a_4q^2 = a_2q^4$$
$$\Rightarrow a_2 + a_4 = 6 \Rightarrow a_2 + a_2q^2 = 6 \Rightarrow \boxed{a_2(1+q^2) = 6}$$
$$a_4 + a_6 = 12 \Rightarrow a_2q^2 + a_2q^4 = 12 \Rightarrow a_2q^2(1+q^2) = 12$$

Assim, pela equação emoldurada acima:

$$q^2 \cdot a_2(1+q^2) = 12 \Rightarrow 6q^2 = 12 \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

Entretanto, como a PG só tem termos positivos, a razão deve ser positiva:

$$q = \sqrt{2}$$

Gabarito: "b".

---

6. (EEAR/2001)

Numa progressão aritmética, o primeiro termo é $10x - 9y$, o último termo é y, e a razão é $y - x$. Sendo $x \neq y$, o número de termos dessa P.A. é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11

Comentários

O n-ésimo termo de uma PA de razão r é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)r$$

Se fizermos o último termo $(a_n = y)$ da PA menos o primeiro $(a_1 = 10x - 9y)$:

$$a_n - a_1 = y - (10x - 9y) = 10y - 10x = 10(y - x)$$

Como a razão mede $r = y - x$:

$$a_n - a_1 = 10r$$

Comparando com a equação emoldurada:

$$\Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

Portanto, o último termo é o a_{11}. Assim, teremos 11 termos.

Gabarito: "d".

---

7. (EEAR/2001)

Tanto numa PA quanto numa PG, os números 3 e 243 são, respectivamente, a razão e o 6º termo. O produto do primeiro termo da PG pelo 3º termo da PA é:

a) 702
b) 693
c) 234
d) 231

Comentários

Se 243 é o 6º termo de uma PA $\{a_n\}$ de razão 3, então:

$$a_6 = a_1 + (6-1)r \Rightarrow 243 = a_1 + 15 \Rightarrow a_1 = 228$$

Se 243 é o 6º termo de uma PG $\{b_n\}$ de razão 3, então:

$$b_6 = b_1 q^5 \Rightarrow 243 = b_1 \cdot 3^5 \Rightarrow b_1 = \frac{243}{3^5} = 1$$

Portanto, a multiplicação do primeiro termo da PG pelo 3º termo da PA é:

$$b_1 \cdot a_3 = 1 \cdot (228 + 6) = 234$$

Gabarito: "c".

---

8. **(EEAR/2002)**

Sabe-se que a sequência $(x, y, 10)$ é uma PA e a sequência $\left(\frac{1}{y}, 2, 3x + 4\right)$ é uma PG. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) **A razão da PA é 2.**
b) **A razão da PG é 26**
c) $x + y = 0$
d) $x \cdot y = -16$

Comentários

Se $(x, y, 10)$ é uma PA de razão r, então:

$$\begin{cases} x = y - r \\ 10 = y + r \end{cases} \Rightarrow x + 10 = 2y \Rightarrow \boxed{2x + 20 = 4y}$$

Se $\left(\frac{1}{y}, 2, 3x + 4\right)$ é uma PG de razão q, então:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{q} \\ 3x + 4 = 2q \end{cases} \Rightarrow \frac{3x + 4}{y} = 2^2 \Rightarrow 3x + 4 = 4y$$

Usando a equação emoldurada:

$$3x + 4 = 2x + 20 \Rightarrow x = 16$$

$$\Rightarrow 2y = 16 + 10 = 26 \Rightarrow y = 13$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{q} \Rightarrow q = 2y = 26$$

Portanto, a razão da PG é 26.

Gabarito: "b".

---

9. **(EEAR/2002)**

Se em uma PG de três termos reais o produto e a soma dos termos são, respectivamente, 216 e 26, então a soma dos dois primeiros termos dessa PG, quando decrescente, é

a) **24**
b) **20**
c) **18**
d) **8**

Comentários

Seja a PG decrescente (a, aq, aq^2). O produto e soma desses termos são:

$$216 = a^3q^3 = (aq)^3 \Rightarrow aq = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$26 = a + aq + aq^2 = a + 6 + 6q$$

$$\Rightarrow a + 6q = 20$$

Multiplicando por q a equação acima:

$$\Rightarrow aq + 6q^2 = 20q \Rightarrow 6 + 6q^2 = 20q \Rightarrow 3q^3 - 10q + 3 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 \Rightarrow q = \frac{10 \pm 8}{6} = 3\ ou\ \frac{1}{3}$$

Para que ela seja decrescente, $q < 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow aq = 6 \Rightarrow \frac{a}{3} = 6 \Rightarrow a = 18$$

Portanto, a soma dos dois primeiros termos:

$$a + aq = 18 + \frac{18}{3} = 24$$

Gabarito: "a".

---

10. (EEAR/2002)

Se $(x+3, 2x-1, x+5)$ é uma PA, então a soma dos três termos dessa PA é

a) -13
b) 15
c) 19
d) 27

Comentários

Se $(x+3, 2x-1, x+5)$ é uma PA de razão r, então:

$$x + 5 - (x+3) = 2 \cdot r \Rightarrow 2r = 2 \Rightarrow r = 1$$

Dessa maneira:

$$2x - 1 = (x+3) + r \Rightarrow 2x - 1 = x + 4 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, a soma dos termos é:

$$x + 3 + 2x - 1 + x + 5 = 8 + 9 + 10 = 27$$

Gabarito: "d".

---

11. (EEAR/2002)

A soma dos 20 primeiros termos da PA cujo termo geral tem para expressão $a_n = 3n + 5$ é

a) 657
b) 730
c) 803
d) 1460

Comentários

A expressão de um termo geral de uma PA de termo primeiro a_1 e razão r é descrito unicamente por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

É dado que:

$$a_n = 3n + 5 = 3n - 3 + 8 = 8 + (n-1)3$$

Portanto, pela unicidade da expressão do termo geral, podemos afirmar que $a_1 = 8$ e $r = 3$. Queremos agora a soma dos 20 primeiros termos dessa PA. O 20º termo é:

$$a_{20} = 8 + 19 \cdot 3 = 65$$

$$Soma = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{8 + 65}{2} \cdot 20 = 730$$

Gabarito: "b".

---

12. (EEAR/2002)

A soma dos termos de uma PG crescente de três termos é 21, e a diferença entre os extremos, 15. A razão dessa PG é

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

Comentários

Seja a PG crescente (a, aq, aq^2), com $q > 1$. É dado que:

$$a + aq + aq^2 = 21 \Rightarrow a(1 + q + q^2) = 21$$

$$aq^2 - a = 15 \Rightarrow a(q^2 - 1) = 15$$

Dividindo as duas últimas equações:

$$\frac{a(1 + q + q^2)}{a(q^2 - 1)} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + q + q^2}{q^2 - 1} = \frac{7}{5} \Rightarrow 5(1 + q + q^2) = 7(q^2 - 1)$$

$$\Rightarrow 5 + 5q + 5q^2 = 7q^2 - 7 \Rightarrow 2q^2 - 5q - 12 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot -12 = 121 \Rightarrow q = \frac{5 \pm 11}{4} = 4 \; ou - \frac{3}{2}$$

Como $q > 1$, então $q = 4$.

Gabarito: "a".

---

13. (EEAR/2002)

Ao se efetuar a soma das 50 primeiras parcelas da PA: $202 + 206 + 210 + \cdots$, por distração, não foi somada a 35ª parcela. A soma encontrada foi

a) 10200
b) 12585
c) 14662
d) 16419

Comentários

Analisando os termos da PA, vemos que o termo inicial é $a_1 = 202$ e sua razão é $r = 206 - 202 = 4$. Assim, calculando o 50º termo, bem como o 35º:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$\Rightarrow a_{35} = 202 + 34 \cdot 4 = 338$$

$$a_{50} = 202 + 49 \cdot 4 = 398$$

A soma dos primeiros 50 termos é:

$$Soma = \frac{50(a_{50} + a_1)}{2} = 25 \cdot (398 + 202) = 15000$$

Portanto, como ele esqueceu de somar o a_{35}, então a soma encontrada foi:

$$15000 - a_{35} = 15000 - 338 = 14662$$

Gabarito: "c".

---

14. (EEAR/2002)

Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x-1) = f(x) - 2$. Se $f(1) = -4$, então a soma dos valores dos 50 menores elementos do conjunto $Im(f)$ é

a) **1150**
b) **1450**
c) **2250**
d) **2450**

Comentários

Analisando a função f de domínio natural $Dom(f) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$:

$$f(x) = f(x-1) + 2$$

Aplicando $x = 2$:

$$f(2) = f(1) + 2 \Rightarrow f(2) = -4 + 2 \Rightarrow f(2) = -2$$

Veja que as imagens da função aplicada ao domínio, isto é, aos números naturais não nulos, seguem uma PA:

$$f(n) \to a_n$$

$$f(n) = f(n-1) + 2$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2$$

Isso é uma definição de PA de razão 2, crescente. Como o primeiro termo é $f(1) = a_1 = -4$, então o 50º termo será o a_{50}:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{20} = -4 + 49 \cdot 2 = 94$$

Calculando a soma:

$$Soma = \frac{50(a_1 + a_{50})}{2} = 25 \cdot (94 - 4) = 2250$$

Gabarito: "c".

---

15. (EEAR/2003)

A soma dos 9 primeiros termos de uma P.A. de razão 2 é nula. Assim, pode-se afirmar que seu sexto termo é igual a:

a) **0**
b) **2**
c) **6**
d) **7**

Comentários

Se temos um número ímpar de termos, podemos escrever a PA da seguinte maneira:

$$(a-4r, a-3r, a-2r, a-r, a, a+r, a+2r, a+3r, a+4r)$$

Justamente pois a soma desses termos acima nos dá $9a$, que é em função do termo central. Como a soma é nula:

$$9a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Mas a é o 5º termo. Se a razão é 2, então o sexto termo será:

$$a_6 = a + r = 0 + 2 = 2$$

Gabarito: "b".

---

16. **(EEAR/2003)**

A solução da equação $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 2$ é:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) -1
d) indeterminada

Comentários

Se considerarmos que $x < 1$, podemos ver que a equação não passa de uma soma de PG infinita, de primeiro termo 1 e razão x, que é dada por:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} = 2$$

$$\Rightarrow 1 - x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: "b".

---

17. **(EEAR/2003)**

O termo geral de uma PA é $a_n = 3n - 16$. A soma de seus 10 primeiros termos é

a) 18
b) 14
c) 5
d) -6

Comentários

O termo geral de uma PA de primeiro termo a_1 e razão r é dado unicamente por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

O termo geral dado no enunciado foi:

$$a_n = 3n - 16$$

Manipulando para achar uma expressão semelhante à geral:

$$a_n = 3n - 3 - 13 = -13 + (n-1)3$$

$$a_n = -13 + (n-1) \cdot 3$$

Portanto, vemos que $a_1 = -13$ e $r = 3$. Achando o 10º termo:

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = -13 + 3 \cdot 9 = 14$$

Portanto, a soma desses 10 primeiros termos é:

$$S=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(-13+14)=5$$

Gabarito: "c".

18. (EEAR/2003)

Na progressão geométrica onde o primeiro termo é m^3, o último é $-m^{21}$ e a razão é $-m^2$, o número de termos é

a) 8
b) 9
c) 11
d) 10

Comentários

O termo geral da PG é:

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

Assim, aplicando os dados: $a_n=-m^{21}, a_1=m^3$, vamos achar n:

$$-m^{21}=m^3\cdot(-m^2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow -m^{18}=(-1)^{n-1}\cdot m^{2n-2}$$

$$\Rightarrow 2n-2=18\Rightarrow 2n=20\Rightarrow n=10$$

Gabarito: "a".

19. (EEAR/2003)

A soma $1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{999}+2^{1000}$ é igual a

a) $2^{1000}-1$
b) $2^{1001}-1$
c) $2^{1000}+1$
d) $2^{1001}+1$

Comentários

A soma é de uma PG de 1001 termos, termo inicial 1 e razão 2. A sua soma é dada por:

$$Soma\ PG=\frac{1\cdot(2^{1001}-1)}{2-1}=2^{1001}-1$$

Gabarito: "b".

20. (EEAR/2004)

O quinto termo de uma PA é 23, e o décimo segundo termo é -40. O primeiro termo negativo dessa PA é:

a) Sétimo.
b) Oitavo.
c) Nono
d) Décimo.

Comentários

O quinto termo da PA pode ser escrito como $a_5=a_1+4r$. O décimo segundo termo é $a_{12}=a_1+11r$. Se subtrairmos:

$$a_5 - a_{12} = -7r \Rightarrow 23 - (-40) = 63 \Rightarrow r = -9$$

Dessa maneira, pelo quinto termo, temos:

$$a_5 = 23 = a_1 - 4 \cdot 9 \Rightarrow a_1 = 59$$

Assim, o primeiro termo a ser negativo é o enésimo termo a_n:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot (-9) < 0$$

$$\Rightarrow 59 - 9(n-1) < 0 \Rightarrow n - 1 > \frac{59}{9} \Rightarrow n > 1 + 6{,}55$$

$$\Rightarrow n > 7{,}55$$

Portanto, a partir de $n = 8$, o termo será negativo. Logo, o primeiro termo negativo é o oitavo.

Gabarito: "b".

---

21. (EEAR/2004)

Uma PG de razão $\sqrt{3}$ tem cinco termos. Se o último termo é $9\sqrt{3}$, então o primeiro é:

a) $\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) 3
d) $\frac{1}{3}$

Comentários

O termo geral de uma PG de termo inicial a_1 e razão q é dado por:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^4$$

É dado que $a_5 = 9\sqrt{3}$. Daí:

$$9\sqrt{3} = a_1 \cdot 3^2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{3}$$

Gabarito: "a".

---

22. (EEAR/2004)

Na PG $(y, 2y+2, 3y+3, \dots)$, o 4º termo, que é diferente de zero, vale

a) 2
b) $\frac{3}{2}$
c) -4
d) $-\frac{27}{2}$

Comentários

Se $(y, 2y+2, 3y+3)$ são termos consecutivos de uma PG, então a razão da PG é:

$$q = \frac{3y+3}{2y+2} = \frac{2y+2}{y} \Rightarrow \frac{3(y+1)}{2(y+1)} = \frac{2y+2}{y} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4y + 4 = 3y \Rightarrow y = -4$$

Portanto, o 4º termo é:

$$a_4 = (3y+3)\cdot\frac{3}{2} = \frac{(-12+3)3}{2} = -\frac{27}{2}$$

Gabarito: "d".

23. (EEAR/2004)

Numa P.A., o 10º termo e a soma dos 30 primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1440. A razão dessa progressão é

a) 2
b) 3
c) 4
d) 6

Comentários

O termo geral de uma PA, em função de seu termo inicial a_1 e de sua razão r é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Portanto, o décimo termo pode ser escrito como:

$$a_{10} = \boxed{a_1 + 9r = 26}$$

O 30º termo pode ser escrito como:

$$a_{30} = a_1 + 29r$$

Sabemos que a soma dos 30 primeiros termos pode ser escrita como:

$$Soma = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = 15\cdot(a_1 + a_1 + 29r) = 15(2(a_1+9r)+11r) = 1440$$

Usando a equação emoldurada acima:

$$\Rightarrow 15(2\cdot 26 + 11r) = 1440 \Rightarrow 52 + 11r = 96$$

$$\Rightarrow 11r = 44 \Rightarrow r = 4$$

Gabarito: "c".

24. (EEAR/2005)

A soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \dots\right)$ é

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Comentários

A razão dessa progressão geométrica é:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}$$

Assim, queremos a soma da PG infinita de termo inicial $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e razão $\frac{2}{3}$:

$$Soma = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "d".

25. (EEAR/2005)

Numa PG, onde o 1º termo é 3, a soma dos três primeiros termos é 21. Se a soma dos quatro primeiros termos é 45, o quinto termo é

a) 51
b) 50
c) 49
d) 48

Comentários

É dito que o primeiro termo da PG é 3. Se a sua razão for q, a soma dos três primeiros:

$$3 + 3q + 3q^2 = 21 \Rightarrow 1 + q + q^2 = 7$$

É dito também que a soma dos quatro primeiros termos é 45:

$$21 + 3q^3 = 45 \Rightarrow 3q^3 = 24 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = \sqrt[3]{8} = 2$$

Portanto, o quinto termo é:

$$a_5 = 3 \cdot q^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

Gabarito: "d".

26. (EEAR/2006)

Os números que expressam as medidas das arestas que concorrem em um mesmo vértice de um paralelepípedo retângulo estão em progressão geométrica. Se a maior dessas arestas mede 6m, e o volume desse sólido é 27m³, então a sua área total, em m², é

a) 63
b) 57
c) 53
d) 47

Comentários

Sejam as arestas em PG $\left(\frac{6}{q^2}, \frac{6}{q}, 6\right)$, em que q é a sua razão. Se o volume é dado por 27, então:

$$6 \cdot \frac{6}{q} \cdot \frac{6}{q^2} = 27 \Rightarrow 6^3 = 27q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{216}{27} = 8 \Rightarrow q = \sqrt[3]{2}$$

Portanto, as arestas medem:

$$\left(\frac{3}{2}, 3, 6\right)$$

Assim, a área lateral do paralelepípedo é igual ao dobro das áreas dos retângulos formados pelas arestas acima duas a duas:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 3\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 6\right) + 2 \cdot (3 \cdot 6) = 9 + 18 + 36 = 63$$

Gabarito: "a".

---

27. (EEAR/2007)

Se:

$$\sum_{i=3}^{x} 2^i = 4088$$

O valor de x é divisor de

a) 24
b) 22
c) 21
d) 18

Comentários

O somatório é:

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^x = 4088$$

É o somatório de uma PG de razão 2, termo inicial $2^3 = 8$ e $(x - 3 + 1 = x - 2)$ termos.

Dessa maneira, essa soma é:

$$\sum_{i=3}^{x} 2^i = \frac{8 \cdot (2^{x-2} - 1)}{2 - 1} = 4088 \Rightarrow 2^{x-2} - 1 = \frac{4088}{8} = 511$$

$$\Rightarrow 2^{x-2} = 512 = 2^9$$

$$\Rightarrow x - 2 = 9 \Rightarrow x = 11$$

11 é divisor de 22.

Gabarito: "b".

---

28. (EEAR/2009)

Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é

a) 7
b) 5
c) 4
d) 2

Comentários

A PG crescente é: $\{a, aq, aq^2, aq^3\}$, $q > 1$. A soma dos dois primeiros:

$$a + aq = 12$$

A soma dos dois últimos:

$$aq^2 + aq^3 = 300 \Rightarrow q^2(a + aq) = 300$$

$$\Rightarrow q^2 \cdot 12 = 300 \Rightarrow q^2 = \frac{300}{12} = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 5}$$

Gabarito: “b”.

29. (EEAR/2018)

O 6° termo da sequência 2, 8, 32, 128, ... é um número cuja soma dos algarismos é

a) 10

b) 12

c) 14

d) 16

Comentários

Analisando-se a sequência, podemos ver que temos uma PG de razão 4:

$$(2, 8, 32, 128, \dots) = (2, 2 \cdot 4, 2 \cdot 4 \cdot 4, 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4, \dots)$$

Como o primeiro termo é 2, temos como termo geral:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$$

Logo:

$$a_6 = 2 \cdot 4^{6-1} = 2 \cdot 4^5 = 2048$$

A soma dos algarismos é $2 + 0 + 4 + 8 = 14$.

Gabarito: “c”.

30. (EEAR/2018)

Os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = (-1)^n \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}^*$, são tais que

a) formam uma PA de razão 4

b) formam uma PG de razão 2

c) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

d) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$

Comentários

Calculando os quatro primeiros termos da sequência:

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot 2 + 1 = 3$$

$$a_3 = (-1)^3 \cdot 3 + 1 = -2$$

$$a_4 = (-1)^4 \cdot 4 + 1 = 5$$

Assim, note que $a_1 + a_2 = 0 + 3 = 3$ e $a_3 + a_4 = -2 + 5 = 3$. Logo:

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4$$

Gabarito: “d”.

31. (EEAR/2018)

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ de razão $q = 2$. Se $a_1 + a_5 = 272$, o valor de a_1 é

a) 8

b) 6

c) 18

d) 16

Comentários

Podemos escrever a_5 em função de a_1:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot 2^4 = 16a_1$$

Substituindo na equação:

$$a_1 + 16a_1 = 272 \Rightarrow 17a_1 = 272 \Rightarrow a_1 = \frac{272}{17} = 16$$

Gabarito: "d".

---

32. (EEAR/2017)

Considere esses quatro valores $x, y, 3x, 2y$ em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

Comentários

Da soma dos extremos, temos:

$$x + 2y = 20 \ \ (I)$$

Como $(x, y, 3x, 2y)$ formam uma PA crescente, temos da propriedade da média aritmética:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow y = \frac{x + 3x}{2} = \frac{4x}{2} = 2x$$

Substituindo y em (I):

$$x + 2(2x) = 20 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

O terceiro termo é $a_3 = 3x = 3 \cdot 4 = 12$.

Gabarito: "b".

---

33. (EEAR/2017)

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ uma PG de termos não nulos. Se $2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5$, pode-se afirmar corretamente que a razão dessa PG é

a) 4

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{2}$

Comentários

Reescrevendo os termos da PG na equação, temos:

$$2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5 \Rightarrow 2(a_1 q + a_1 q^3) = a_1 q^2 + a_1 q^4$$
$$\Rightarrow 2a_1 q(1 + q^2) = a_1 q(q + q^3)$$

Sendo os termos da PG não nulos, temos $a_1 q \neq 0$, logo:

$$2(1+q^2) = q + q^3 \Rightarrow 2(1+q^2) - q(1+q^2) = 0 \Rightarrow (2-q)(1+q^2) = 0$$

Para $q \in \mathbb{R}$, a única solução para a equação ocorre para $2 - q = 0$, logo:

$$q = 2$$

Gabarito: "b".

---

34. (EEAR/2016)

A progressão aritmética, cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n = 5n - 18$, tem razão igual a

a) -5

b) -8

c) 5

d) 8

Comentários

Para esse tipo de questão, devemos encontrar os termos iniciais:

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 18 = -13$$

$$a_2 = 5 \cdot 2 - 18 = -8$$

$$a_3 = 5 \cdot 3 - 18 = -3$$

$$\vdots$$

Perceba que a cada termo adicionamos 5, portanto, a razão é $r = 5$.

Gabarito: "c".

---

35. (EEAR/2016)

Quatro números estão dispostos de forma tal que constituem uma PG finita. O terceiro termo é igual a 50 e a razão é igual a 5. Desta maneira, o produto de $a_1 \cdot a_4$ vale

a) 10

b) 250

c) 500

d) 1250

Comentários

Do enunciado temos $a_3 = 50$ e $q = 5$. Assim, a PG é dada por:

$$(a_1, a_2, 50, a_4)$$

$$a_4 = a_3 q = 50 \cdot 5 = 250$$

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{50}{5} = 10$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Rightarrow (2, 10, 50, 250)$$

$$\therefore a_1 \cdot a_4 = 2 \cdot 250 = 500$$

Gabarito: "c".

---

36. (EEAR/2015)

Quatro números estão em PA de razão 3. Se o primeiro termo somado ao último é igual a 19, então o primeiro termo é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

Comentários

Para quatro números em PA de razão 3, temos:

$$(a, a+3, a+6, a+9)$$

A soma do primeiro termo com o último é 19, logo:

$$a+(a+9)=19 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$$

Gabarito: "c".

---

37. (EEAR/2015)

Em uma PA cuja razão é igual ao seu primeiro termo, tem-se $a_3+a_7=5$. Assim, a razão dessa PA é

a) $0,5$.

b) $2,5$.

c) 2.

d) 1.

Comentários

Seja $a_1=r=x$, assim, temos:

$$a_3+a_7=5 \Rightarrow (a_1+2r)+(a_1+6r)=5 \Rightarrow (x+2x)+(x+6x)=5 \Rightarrow 10x=5$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore r=0{,}5$$

Gabarito: "a".

---

38. (EEAR/2015)

Em uma Progressão Geométrica, o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{1}{2}$. A soma dos 7 primeiros termos dessa PG é

a) $\frac{127}{64}$

b) $\frac{97}{64}$

c) $\frac{63}{32}$

d) $\frac{57}{32}$

Comentários

Aplicando-se a fórmula da soma da PG finita, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{128} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1-128}{128}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{127}{128} \cdot (-2) = \frac{127}{64}$$

Gabarito: "a".

---

39. (EEAR/2014)

Em uma PG de razão 6, o quarto termo é 48. Assim, o primeiro termo é

a) 2

b) 3

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2}{9}$

Comentários

Temos uma PG de razão $q = 6$ e $a_4 = 48$, logo:

$$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow 48 = a_1 \cdot 6^3 \Rightarrow 48 = 6 \cdot 36 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{48}{6 \cdot 36} = \frac{2}{9}$$

Gabarito: "d".

---

40. (EEAR/2013)

Na PA decrescente $(18, 15, 12, 9, \dots)$, o termo igual a -51 ocupa a posição

a) 30

b) 26

c) 24

d) 18

Comentários

Nessa PA, o primeiro termo é $a_1 = 18$ e sua razão é $r = -3$, assim, seu termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 18 + (n-1)(-3)$$

O termo igual a -51 é:

$$-51 = 18 + (n-1)(-3) \Rightarrow -51 - 18 = -3n + 3 \Rightarrow -69 - 3 = -3n \Rightarrow -72 = -3n$$

$$\Rightarrow n = \frac{72}{3} = 24$$

Gabarito: "c".

---

41. (EEAR/2012)

Se a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG de termos não nulos, então x^2 é

a) 1.

b) 4.

c) 9.

d) 16.

Comentários

Sendo a sequência uma PG de termos não nulos, podemos escrever pela propriedade da média geométrica:

$$(3x+2)^2 = x \cdot (10x+12)$$
$$9x^2 + 12x + 4 = 10x^2 + 12x$$
$$0 = 10x^2 - 9x^2 + 12x - 12x - 4$$
$$x^2 - 4 = 0 \therefore x^2 = 4$$

Gabarito: "b".

---

42. (EEAR/2011)

Sejam as sequências $S_1 = (1, 5, 25, 125, \dots)$ e $S_2 = (4, 7, 10, 13, \dots)$. A razão entre o $6°$ termo de S_1 e o $8°$ de S_2 é

a) 150.

b) 125.

c) 100.

d) 75.

Comentários

Perceba que S_1 é uma PG cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e razão é $q = 5$. S_2 é uma PA com primeiro termo $b_1 = 4$ e razão $r = 3$. Assim, o 6° termo de S_1 e o 8° termo de S_2 é:

$$S_1 \to a_6 = a_1 q^5 = 1 \cdot 5^5 = 5^5$$
$$S_2 \to b_8 = b_1 + 7r = 4 + 7 \cdot 3 = 25 = 5^2$$

Portanto:

$$\frac{a_6}{b_8} = \frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3 = 125$$

Gabarito: "b".

---

43. (EEAR/2010)

Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma PA cujo sexto termo é

a) 25.

b) 30.

c) 33.

d) 42.

Comentários

Vamos inserir nove meios aritméticos entre 15 e 45:

$$\left(15, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}}_{9\ termos}, 45\right)$$

Calculando a razão da PA:

$$a_{11} = 45 \Rightarrow a_1 + 10r = 45 \Rightarrow 15 + 10r = 45 \Rightarrow 10r = 30 \Rightarrow r = 3$$

Assim, o sexto termo é:

$$a_6 = a_1 + 5r = 15 + 5 \cdot 3 = 30$$

Gabarito: “b”.

---

44. (EEAR/2009)

Quatro números naturais formam uma PG crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da PG é

a) 7.

b) 5.

c) 4.

d) 2.

Comentários

$$PG\ crescente \rightarrow (a, aq, aq^2, aq^3)$$

Do enunciado:

$$a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow a + aq = 12 \Rightarrow a(1+q) = 12$$

$$a_3 + a_4 = 300 \Rightarrow aq^2 + aq^3 = 300 \Rightarrow q^2 a(1+q) = 300 \Rightarrow q^2 \cdot 12 = 300 \Rightarrow q^2 = 25$$

$$\Rightarrow q = \pm 5$$

$$PG\ crescente \rightarrow q = 5$$

Gabarito: “b”.

---

45. (EEAR/2009)

Se a soma dos n primeiros termos de uma P.A. é $3n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então a razão dessa P.A. é

a) 6.

b) 4.

c) 3.

d) 2.

Comentários

Do enunciado, temos $S_n = 3n^2$. Para encontrar os termos da PA, devemos proceder do seguinte modo:

$$S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12 \Rightarrow a_2 = 12 - a_1 = 12 - 3 = 9$$

Assim, a razão é:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 9 - 3 = 6$$

Gabarito: “a”.

---

46. (EEAR/2009)

O $4°$ termo de uma P.G. é -80, e o $6°$ termo é -320. Se essa P.G. é alternante, então sua razão é

a) 4.

b) 3.

c) -1.

d) -2.

Comentários

Uma PG é alternante quando a sua razão é negativa, portanto, temos $q < 0$. Do enunciado:

$$a_4 = -80$$

$$a_6 = -320$$

$$a_6 = a_4 q^2 \Rightarrow -320 = -80 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$$

Como $q < 0$, devemos ter $q = -2$.

Gabarito: “d”.

---

47. (EEAR/2008)

A soma dos n primeiros termos da PG $(1, -2, 4, -8, \ldots)$ é -85. Logo, n é

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

Comentários

A soma de uma PG finita é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Analisando a sequência, vemos que $q = -2$. Logo:

$$\frac{1 \cdot ((-2)^n - 1)}{(-2) - 1} = -85 \Rightarrow (-2)^n - 1 = -85 \cdot (-3) \Rightarrow (-2)^n = 255 + 1 = 256 = (-2)^8$$

$$\Rightarrow (-2)^n = (-2)^8 \therefore n = 8$$

Gabarito: “a”.

---

7. QUESTÕES NÍVEL 2

48. (AFA/2021)

O jogo árabe chamado Quirkat ou Al-Quirg é semelhante ao jogo de damas moderno, no qual há um tabuleiro de 25 casas (5x5).

Esse jogo foi mencionado na obra Kitab Al-Aghani do século X. O Al-Quirg era também o nome para o jogo que atualmente é conhecido como trilha.

Certo dia, um caixeiro viajante apresentou esse jogo a um rei que ficou encantado com ele e decidiu que iria comprá-lo.

Pediu ao viajante que colocasse preço no produto.

O caixeiro disse:

"-Vossa Majestade, posso lhe vender o jogo por uma simples barganha! Basta me dar 1 grão de milho para a 1ª casa do jogo, 2 grãos de milho para a 2ª casa do jogo, 4 grãos de milho para a 3ª casa do jogo, 8 grãos de milho para a 4ª casa do jogo e assim por diante até a 25ª casa do tabuleiro!

O rei, imediatamente, ordenou o pagamento para o caixeiro viajante em troca do jogo que tanto lhe agradou.

Levando em consideração que o peso médio de um grão de milho seja de 0,30g pode-se afirmar que

a) pelo pagamento referente a 13ª casa, considerando o peso médio do grão do milho, o caixeiro recebeu 1,2288 kg.

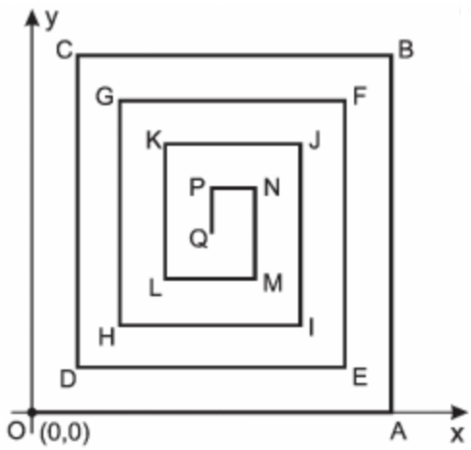
b) até a décima casa do tabuleiro, se considerado o peso médio do grão de milho, o viajante tinha recebido um total de 307,2g.

c) a quantidade de grãos recebido pelo caixeiro viajante é um número terminado em 7.

d) a quantidade de grãos recebido pelo viajante é um número múltiplo de 2.

49. (AFA/2019)

Considere, no plano cartesiano, a figura abaixo, em que os segmentos horizontais são paralelos ao eixo $\overline{Ox}$ e os segmentos verticais são paralelos ao eixo $\overline{Oy}$.



Sabe-se que:

- os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem $O(0,0)$ e termina em Q, formam uma progressão aritmética decrescente de razão r e primeiro termo a_1, em que $\left(-\frac{1}{15} < r < 0\right)$;

- dois comprimentos consecutivos da poligonal são sempre perpendiculares;

- $\overline{OA} = a_1, \overline{AB} = a_2, \overline{BC} = a_3$, e, assim sucessivamente, até $\overline{PQ} = a_{16}$.

Suponha que uma formiga parta da origem $O(0,0)$, e percorra a trajetória descrita pela poligonal até chegar ao ponto Q.

Com base nas informações acima, analise as proposições abaixo.

I. Se $a_1 = 1$ e $r = -\frac{1}{16}$, então a distância d percorrida pela formiga até chegar ao ponto Q é tal que $d = \frac{17}{2}a_1$.

II. Quando a formiga estiver na posição do ponto $L(x, y)$, então $x = -6r$.

III. Se $a_1 = 1$, então de A ate C, a formiga percorrerá a distância de $d = 2 + 3r$.

Quanto a veracidade das populações, tem-se

a) apenas uma delas é verdadeira.

b) apenas duas são verdadeiras.

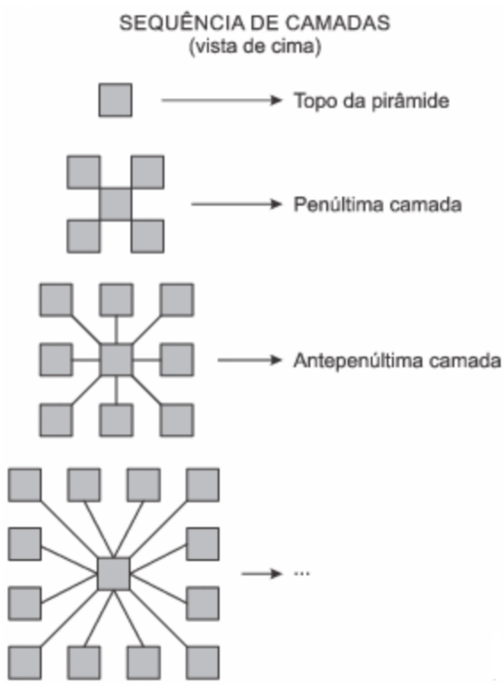
c) todas são verdadeiras.

d) nenhuma delas é verdadeira.

50. (AFA/2018)

Constrói-se um monumento em formato de pirâmide utilizando-se blocos cúbicos:

Para a formação piramidal os blocos são dispostos em uma sequência de camadas, sendo que na última camada, no topo da pirâmide, haverá um único bloco, como mostra a figura a seguir.



Na disposição total, foram utilizados 378 blocos, do topo à base da pirâmide.

Havendo necessidade de acrescentar uma nova camada de blocos abaixo da base da pirâmide, obedecendo à sequência já estabelecida, serão gastos x blocos nesta camada.

A quantidade total de divisores positivos do número x é igual a

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

51. (AFA/2017)

A solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} - \frac{x-y}{54} + \cdots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

é tal que $x + y$ é igual a

a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $-\frac{7}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

52. (AFA/2016)

Considere as expressões

$A = 26^2 - 24^2 + 23^3 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \cdots + 5^2 - 3^2$ **e**

$B = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ldots$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

a) 117 e 120

b) 114 e 117

c) 111 e 114

d) 108 e 111

53. (AFA/2014)

Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre num tubo cilíndrico.

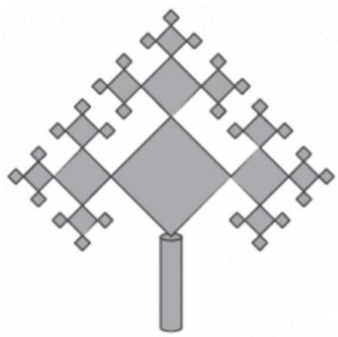
A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ metro.

2ª) em cada um dos vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se de lado $\frac{1}{4}$ de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior.

A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.



Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$

54. (AFA/2013)

A sequência $\left(x, 6, y, y+\frac{8}{3}\right)$ é tal, que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética, e os três últimos formam uma progressão geométrica.

Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é

a) $\frac{92}{3}$

b) $\frac{89}{3}$

c) $\frac{86}{3}$

d) $\frac{83}{3}$

55. (AFA/2011)

De um dos lados de uma avenida retilínea, estão dispostos alguns postes nos pontos $P_1, P_2, \ldots P_i, i \in \mathbb{N}$.

De outro lado dessa mesma avenida, estão dispostas algumas árvores nos pontos $A_1, A_2, \ldots A_j, j \in \mathbb{N}$. Sabe-se que:

- $\overline{P_1P_2} = 3\ dam$

- $\overline{P_1P_i} = 63\ dam$

- $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots)$ é uma progressão aritmética finita de razão 3.

- $\overline{A_1A_j} = \overline{P_1P_i}$

- $(\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots)$ é uma progressão geométrica finita de razão 2.

- $i = j$

Com base nessas informações, é correto afirmar que a maior distância entre duas árvores consecutivas é, em dam, igual a

a) 63

b) 32

c) 18

d) 16

56. (AFA/2010)

Sejam as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = 2^{-x}$.

Considere os números A e B, tais que

$A = f(1) + f(2) + \cdots + f(50)$ e

$B = 1 + g(1) + g(2) + \cdots + g(n) + \cdots$

Se o produto de A por B tende para o número α, então, α é

a) ímpar múltiplo de 9

b) par divisor de 10 000

c) par múltiplo de 15

d) ímpar múltiplo de 25

57. (EFOMM/2020)

Considere a soma

$$S=\frac{1}{15}+\frac{1}{5\cdot 9\cdot 13}+\frac{1}{9\cdot 13\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)(4n+9)}+\cdots,$$

ou seja, a soma continua para n, crescendo indefinidamente. Assinale a opção que apresenta o valor de S.

a) $S=\frac{1}{2}$

b) $S=1$

c) $S=\frac{1}{20}$

d) $S=\frac{1}{40}$

e) $S=\frac{1}{50}$

58. (EFOMM/2016)

Numa progressão geométrica crescente, o 3º termo é igual à soma do triplo do 1º termo com o dobro do 2º termo. Sabendo-se que a soma desses três termos é igual a 26, determine o valor do 2º termo.

a) 6

b) 2

c) 3

d) 1

e) $\frac{26}{7}$

59. (EFOMM/2016)

Um garrafão contém 3 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea. Retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. A quantidade de vinho, em litros, que resta no garrafão, após 5 dessas operações, é aproximadamente igual a

a) $0,396$

b) $0,521$

c) $0,676$

d) $0,693$

e) $0,724$

60. (EFOMM/2010)

A expressão $6 \cdot n + n^2$ representa a soma dos n primeiros termos de uma sequência numérica. É correto afirmar que essa sequência é uma progressão

a) aritmética de razão 3.

b) aritmética de razão 4.

c) aritmética de razão 2.

d) geométrica de razão 4.

e) geométrica de razão 2.

61. (EFOMM/2006)

Os primeiros termos de uma progressão geométrica são $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O quarto termo é

a) $1/\sqrt{2}$

b) 1

c) $\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[9]{2}$

e) $1/2$

62. (EFOMM/2006)

Se o 5º número de uma P.A. de 9 termos é 16, então a soma de seus termos será:

a) 76

b) 96

c) 144

d) 176

e) 196

63. (EFOMM/2005)

A soma dos termos da progressão $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-10}$ é

a) $2^{-(1+2+3+\cdots+10)}$

b) $2^{-1.024}$

c) 1.024^{-1}

d) $\frac{513}{1.024}$

e) $\frac{1.023}{1.024}$

64. (Escola Naval/2019)

Considere um conjunto de números inteiros $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, com n elementos. Se retirarmos um número do conjunto A, a média aritmética dos elementos restantes é $16,4$. Sabendo que p é o número que foi retirado, determine $|p - n|$ e assinale a opção correta.

a) 27

b) 28

c) 33

d) 35

e) 37

65. (Escola Naval/2019)

Sejam (a_n), (b_m) e (c_k) três progressões geométricas de razão q e primeiro termo x. (b_m) tem o dobro de termos de (a_n), e (c_k) tem $\frac{3}{2}$ termos de (b_m). Sabendo que a soma dos termos de (a_n) é igual a 10 e a soma dos termos de (c_k) é $\frac{42}{5}$, assinale a opção que apresenta a diferença, em módulo, dos possíveis valores da soma dos termos de (b_m).

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

66. (Escola Naval/2015)

A soma dos três primeiros termos de uma $P.G.$ crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale

a) 1

b) 4

c) 8

d) 9

e) 11

67. (Escola Naval/2014)

Considere a sequência $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1+2}{1+2}; x_3 = \frac{1+2+3}{1+2+4}; x_4 = \frac{1+2+3+4}{1+2+4+8}; \ldots$ O valor de x_n é

a) $\frac{n+1}{2}$

b) $\frac{n(n-1)}{2^n}$

c) $\frac{n(n+1)}{2^n-1}$

d) $\frac{n(n+1)}{2^n}$

e) $\frac{n(n+1)}{2(2^n-1)}$

68. (Escola Naval/2014)

O quinto termo da progressão aritmética $3-x; -x; \sqrt{9-x} \ldots, x \in \mathbb{R}$ é

a) 7

b) 10

c) -2

d) $-\sqrt{14}$

e) -18

69. (EFOMM/2021)

Observe as progressões aritméticas a seguir e assinale a alternativa que representa o sexagésimo primeiro número a se repetir em ambas as progressões.

$$-1, 3, 7, 11, 15, \ldots$$

$$1, 4, 7, 10, \ldots$$

a) 301

b) 399

c) 619

d) 727

e) 799

70. (EN/2021)

Seja $S_n = n^2 + n + 1$ a soma dos termos de uma sequência numérica $(n \in \mathbb{N})$. Sobre essa sequência assinale a opção correta.

a) Essa sequência numérica não é uma progressão aritmética.

b) A diferença entre o quinto e o quarto termo é 3.

c) Sua razão é 4.

d) S_n é um número múltiplo de 7.

e) Seu sétimo termo é 32.

7.1. GABARITO

48. a
49. c
50. c
51. b
52. b
53. d
54. c
55. b
56. d
57. Anulada
58. a
59. a
60. c
61. b
62. c
63. e
64. a
65. a
66. a
67. e
68. c
69. d
70. a

7.2. RESOLUÇÃO

48. (AFA/2021)

O jogo árabe chamado Quirkat ou Al-Quirg é semelhante ao jogo de damas moderno, no qual há um tabuleiro de 25 casas (5x5).

Esse jogo foi mencionado na obra Kitab Al-Aghani do século X. O Al-Quirg era também o nome para o jogo que atualmente é conhecido como trilha.

Certo dia, um caixeiro viajante apresentou esse jogo a um rei que ficou encantado com ele e decidiu que iria comprá-lo.

Pediu ao viajante que colocasse preço no produto.

O caixeiro disse:

"-Vossa Majestade, posso lhe vender o jogo por uma simples barganha! Basta me dar 1 grão de milho para a 1ª casa do jogo, 2 grãos de milho para a 2ª casa do jogo, 4 grãos de milho para a 3ª casa do jogo, 8 grãos de milho para a 4ª casa do jogo e assim por diante até a 25ª casa do tabuleiro!

O rei, imediatamente, ordenou o pagamento para o caixeiro viajante em troca do jogo que tanto lhe agradou.

Levando em consideração que o peso médio de um grão de milho seja de 0,30g pode-se afirmar que

a) pelo pagamento referente a 13ª casa, considerando o peso médio do grão do milho, o caixeiro recebeu 1,2288 kg.

b) até a décima casa do tabuleiro, se considerado o peso médio do grão de milho, o viajante tinha recebido um total de 307,2g.

c) a quantidade de grãos recebido pelo caixeiro viajante é um número terminado em 7.

d) a quantidade de grãos recebido pelo viajante é um número múltiplo de 2.

Comentários

Note que cada casa do tabuleiro custará um termo de uma progressão geométrica. Essa progressão é dada por:

$$(1, 2, 4, 8, \dots)\ PG\ de\ razão\ 2$$

Vamos analisar cada alternativa:

a) Correta.

$$a_{13} = a_1 q^{12} = 1 \cdot 2^{12} = 4096$$

Assim, o peso do milho correspondente a essa quantidade é

$$p = 4096 \cdot 0{,}3g = 1228{,}8g = 1{,}2288kg$$

b) Errada.

Até a décima casa do tabuleiro, o viajante recebe um total de milhos dado por:

$$S = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{1(2^{10}-1)}{2-1} = 1023$$

Total em peso:

$$p = 1023 \cdot 0{,}3g = 306{,}9g$$

c) Errada.

O total recebido pelo viajante é

$$n = \frac{a_1(q^{25}-1)}{q-1} = 2^{25} - 1 = 33554431$$

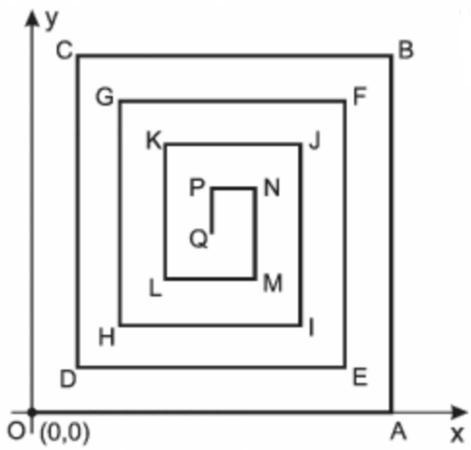
d) Errada.

O total é um número ímpar.

Gabarito: A

49. (AFA/2019)

Considere, no plano cartesiano, a figura abaixo, em que os segmentos horizontais são paralelos ao eixo $\overline{Ox}$ e os segmentos verticais são paralelos ao eixo $\overline{Oy}$.



Sabe-se que:

- os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem $O(0,0)$ e termina em Q, formam uma progressão aritmética decrescente de razão r e primeiro termo a_1, em que $\left(-\frac{1}{15} < r < 0\right)$;

- dois comprimentos consecutivos da poligonal são sempre perpendiculares;

- $\overline{OA} = a_1, \overline{AB} = a_2, \overline{BC} = a_3$, e, assim sucessivamente, até $\overline{PQ} = a_{16}$.

Suponha que uma formiga parta da origem $O(0,0)$, e percorra a trajetória descrita pela poligonal até chegar ao ponto Q.

Com base nas informações acima, analise as proposições abaixo.

I. Se $a_1 = 1$ e $r = -\frac{1}{16}$, então a distância d percorrida pela formiga até chegar ao ponto Q é tal que $d = \frac{17}{2}a_1$.

II. Quando a formiga estiver na posição do ponto $L(x,y)$, então $x = -6r$.

III. Se $a_1 = 1$, então de A ate C, a formiga percorrerá a distância de $d = 2 + 3r$.

Quanto a veracidade das populações, tem-se

a) apenas uma delas é verdadeira.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) todas são verdadeiras.

d) nenhuma delas é verdadeira.

Comentários

I. Verdadeira.

Os comprimentos de segmentos consecutivos formam uma PA decrescente de razão r. Perceba que pela figura temos 16 segmentos, ou seja, a nossa PA possui 16 termos. Assim, temos:

$$a_{16} = a_1 + 15r$$

Para calcular a distância d percorrida, devemos calcular a soma dos 16 termos dessa PA. Lembrando que a soma de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Temos:

$$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2} = (a_1 + a_{16})8$$

Para $a_1 = 1$ e $r = -\frac{1}{16}$:

$$a_{16} = a_1 + 15r = 1 + 15\left(-\frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

Substituindo na expressão da soma:

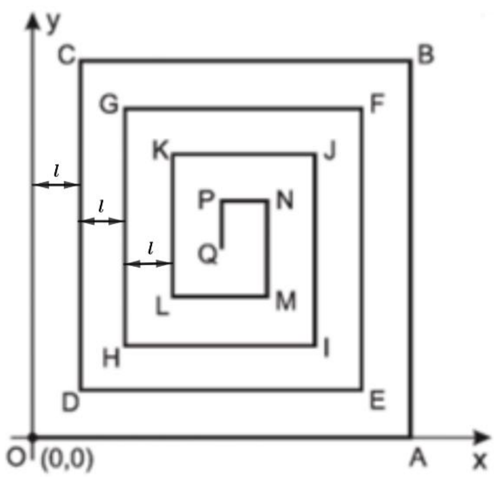
$$S_{16} = \left(1 + \frac{1}{16}\right)8 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

Como $a_1 = 1$, temos:

$$S_{16} = \frac{17}{2} a_1$$

II. Verdadeira.

Como os segmentos consecutivos são perpendiculares, temos que AO é paralelo a BC. Outro fato a se notar é que como os segmentos consecutivos formam uma PA, temos que as distâncias entre Oy e CD, CD e GH, GH e KL são iguais conforme mostra a figura:



Sendo $OA = a_1$ e $BC = a_3 = a_1 + 2r$, temos:

$$OA = BC + l \Rightarrow a_1 = a_1 + 2r + l \therefore l = -2r$$

$L(x, y)$ indica as coordenadas da formiga em relação ao plano cartesiano, queremos saber a coordenada x, ela é dada por:

$$x = 3l = 3 \cdot (-2r) \therefore l = -6r$$

Proposição verdadeira.

III. Verdadeira.

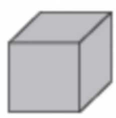
A distância de A até C é dada por:

$$d = AB + BC = a_2 + a_3 = (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 2a_1 + 3r = 2 + 3r$$

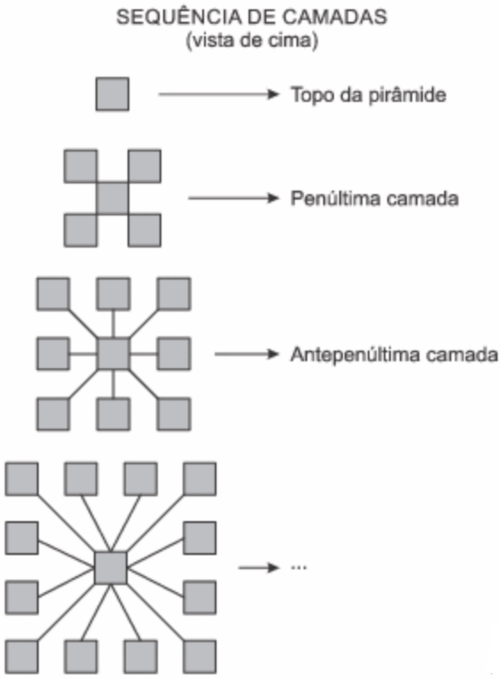
Gabarito: "c".

50. (AFA/2018)

Constrói-se um monumento em formato de pirâmide utilizando-se blocos cúbicos:



Para a formação piramidal os blocos são dispostos em uma sequência de camadas, sendo que na última camada, no topo da pirâmide, haverá um único bloco, como mostra a figura a seguir.



Na disposição total, foram utilizados 378 blocos, do topo à base da pirâmide.

Havendo necessidade de acrescentar uma nova camada de blocos abaixo da base da pirâmide, obedecendo à sequência já estabelecida, serão gastos x blocos nesta camada.

A quantidade total de divisores positivos do número x é igual a

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

Comentários

Note que o número de blocos de cada camada da pirâmide pode ser visto como o termo de uma PA de razão $r = 4$. Consideremos como o primeiro termo o topo da pirâmide:

$$a_1 = 1$$

A penúltima camada será o segundo termo:

$$a_2 = 5$$

O enésimo termo da PA será:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1) \cdot 4$$

Do topo à base da pirâmide, temos como total de blocos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 378$$

$$\frac{\big(1 + (1 + (n-1) \cdot 4)\big)n}{2} = 378$$

$$(2 + 4n - 4)n = 756$$

$$4n^2 - 2n = 756$$

$$4n^2 - 2n - 756 = 0$$

$$2n^2 - n - 378 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-378)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{3025}}{4} = \frac{1 \pm 55}{4} = 14 \; ou - \frac{27}{2}$$

Assim, temos $n = 14$ camadas na pirâmide. Nessa camada, o total de blocos é:

$$a_{14} = a_1 + 13r = 1 + 13 \cdot 4 = 53$$

Acrescentando-se uma nova camada abaixo da base teremos:

$$a_{15} = a_{14} + r = 53 + 4 = 57 \; blocos$$

Fatorando-se 57:

$$57 = 3^1 \cdot 19^1$$

O número de divisores positivos desse número é:

$$N = (1+1)(1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

Gabarito: "c".

---

51. (AFA/2017)

A solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} - \frac{x-y}{54} + \cdots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

é tal que $x + y$ é igual a

a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $-\frac{7}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

Comentários

Na primeira equação temos a soma de uma PG infinita de razão $q = -1/3$ e primeiro termo $a_1 = \frac{x-y}{2}$. Aplicando a fórmula da soma da PG infinita:

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{x-y}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{x-y}{2}}{\frac{4}{3}} = -1 \Rightarrow \frac{3(x-y)}{8} = -1$$

$$\Rightarrow 3x - 3y = -8$$

$$\begin{cases} 3x - 3y = -8 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$3x - y - (3x - 3y) = -2 + 8$$

$$2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$3x - y = -2 \Rightarrow 3x - 3 = -2 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Somando-se x e y:

$$x + y = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

Gabarito: "b".

---

52. (AFA/2016)

Considere as expressões

$A = 26^2 - 24^2 + 23^3 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \cdots + 5^2 - 3^2$ e

$B = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ldots$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

a) 117 e 120

b) 114 e 117

c) 111 e 114

d) 108 e 111

Comentários

Para a expressão A, temos:

$$A = (26^2 - 24^2) + (23^3 - 21^2) + (20^2 - 18^2) + \cdots + (5^2 - 3^2)$$

$$A = (26-24)(26+24)+(23-21)(23+21)+(20-18)(20+18)+\cdots+(5-3)(5+3)$$

$$A = 2\cdot 50 + 2\cdot 44 + 2\cdot 38 + \cdots + 2\cdot 8$$

$$A = 100 + 88 + 76 + \cdots + 16$$

Perceba que A é a soma de uma PA de razão -12 cujo primeiro termo é 100. Assim, temos:

$$a_n = 16 = 100 + (n-1)(-12)$$

$$-84 = -12(n-1)$$

$$7 = n - 1 \Rightarrow n = 8$$

Logo, temos a soma de 8 termos na PA:

$$S_8 = \frac{(a_1+a_8)n}{2} = \frac{(100+16)8}{2} = 116\cdot 4 = 464$$

Para a expressão B:

$$B = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}\ldots = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{16}}\ldots = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}$$

O expoente é a soma de uma PG infinita de razão $1/2$, logo:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow B = 2^2 = 4$$

O valor de A/B é:

$$\frac{A}{B} = \frac{464}{4} = 116$$

Gabarito: "b".

53. (AFA/2014)

Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre num tubo cilíndrico.

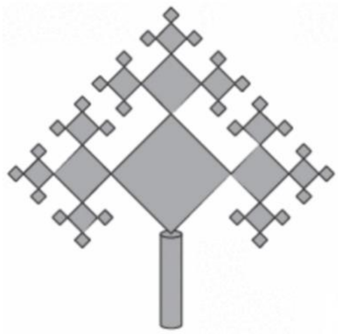
A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ metro.

2ª) em cada um dos vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se de lado $\frac{1}{4}$ de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior.

A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.



Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$

Comentários

Lembrando que a área de um quadrado de lado l é dada por $S = l^2$, temos inicialmente um quadrado de lado 1m, ou seja, $S_0 = 1m^2$. Para cada etapa, temos a adição de quadrados dessa forma:

Etapa 1: adição de 3 quadrados de lado $\frac{1}{2}$

$$S_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Etapa 2: adição de $3 \cdot 3 = 3^2$ quadrados de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$S_2 = 3^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Etapa 3: adição de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ quadrados de lado $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$S_3 = 3^3 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Perceba que seguindo-se esse raciocínio, teremos na etapa 7:

$$S_7 = \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados na etapa 7 é igual a $\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

Gabarito: "d".

54. (AFA/2013)

A sequência $\left(x, 6, y, y + \frac{8}{3}\right)$ é tal, que os três primeiros termos formam uma progressão aritmética, e os três últimos formam uma progressão geométrica.

Sendo essa sequência crescente, a soma de seus termos é

a) $\frac{92}{3}$

b) $\frac{89}{3}$

c) $\frac{86}{3}$

d) $\frac{83}{3}$

Comentários

Como os três primeiros termos formam uma PA, temos:

$$\frac{x+y}{2} = 6 \Rightarrow x + y = 12$$

Para os três últimos termos:

$$y^2 = 6\left(y + \frac{8}{3}\right) \Rightarrow y^2 - 6y - 16 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} = 8 \; ou - 2$$

Como a sequência é crescente, temos que $y = 8$. Para esse valor, temos para x:

$$x + 8 = 12 \Rightarrow x = 4$$

A sequência é

$$\left(x, 6, y, y + \frac{8}{3}\right) = \left(4, 6, 8, 8 + \frac{8}{3}\right) = \left(4, 6, 8, \frac{32}{3}\right)$$

Somando-se os termos:

$$S = 4 + 6 + 8 + \frac{32}{3} = 18 + \frac{32}{3} = \frac{86}{3}$$

Gabarito: "c".

55. (AFA/2011)

De um dos lados de uma avenida retilínea, estão dispostos alguns postes nos pontos $P_1, P_2, \dots P_i, i \in \mathbb{N}$.

De outro lado dessa mesma avenida, estão dispostas algumas árvores nos pontos $A_1, A_2, \dots A_j, j \in \mathbb{N}$. Sabe-se que:

- $\overline{P_1P_2} = 3\ dam$

- $\overline{P_1P_i} = 63\ dam$

- $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots)$ é uma progressão aritmética finita de razão 3.

- $\overline{A_1A_j} = \overline{P_1P_i}$

- $(\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots)$ é uma progressão geométrica finita de razão 2.

- $i = j$

Com base nessas informações, é correto afirmar que a maior distância entre duas árvores consecutivas é, em dam, igual a

a) 63

b) 32

c) 18

d) 16

Comentários

Dos dados do enunciado, temos:

$$(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{i-1}P_i}) \text{ é uma progressão aritmética finita de razão 3}$$

$$\Rightarrow (\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{i-1}P_i}) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}) = (3, 6, 9, \dots, 3 + (i-2)3)$$

$$\overline{P_1P_i} = 63\ dam \Rightarrow \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \dots + \overline{P_{i-1}P_i} = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} = 63$$

$$\frac{(a_1 + a_{i-1})(i-1)}{2} = 63 \Rightarrow (3 + 3 + (i-2)3)(i-1) = 126$$

$$\Rightarrow 3i(i-1) = 126 \Rightarrow i^2 - i - 42 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$i = \frac{\left(-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}\right)}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} = 7\ ou - 6$$

$$\therefore i = 7$$

Como $j = i = 7$, temos:

$$(\overline{A_1A_2}\,, \overline{A_2A_3}\,\dots)\text{ é uma progressão geométrica finita de razão 2}$$

$$\left(\overline{A_1A_2}\,, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{J-1}A_J}\right) = \left(b_1, b_2, \dots, b_{j-1}\right) = \underbrace{(b_1, b_2, \dots, b_6)}_{6\ termos}$$

$$\overline{A_1A_J} = \overline{P_1P_\iota} = 63 \Rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_6 = 63$$

$\overline{A_1A_J}$ é a soma de uma PG finita, logo:

$$\frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = 63 \Rightarrow \frac{b_1(2^6-1)}{2-1} = 63 \Rightarrow b_1 = \frac{63}{63} = 1$$

Assim, temos 7 árvores e a distância entre as árvores consecutivas é dada pela seguinte PG:

$$(\overline{A_1A_2}\,, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_6A_7}) = (1, 2, 4, 8, 16, 32)$$

A maior distância é $32dam$.

Gabarito: "b".

---

56. (AFA/2010)

Sejam as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = 2^{-x}$.

Considere os números A e B, tais que

$A = f(1) + f(2) + \dots + f(50)$ e

$B = 1 + g(1) + g(2) + \dots + g(n) + \dots$

Se o produto de A por B tende para o número α, então, α é

a) ímpar múltiplo de 9

b) par divisor de 10 000

c) par múltiplo de 15

d) ímpar múltiplo de 25

Comentários

Dada uma progressão aritmética finita, vale a seguinte fórmula para sua soma:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \frac{1}{2}(a_1 + a_n) \cdot N$$

Prova:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N$$

$$S = a_N + a_{N-1} + \dots + a_2 + a_1$$

$$\Rightarrow 2S = (a_1 + a_N) + (a_2 + a_{N-1}) + \dots + (a_{N-1} + a_2) + (a_N + a_1)$$

Mas acontece que $a_k + a_{N+1-k} = a_1 + (k-1)\cdot r + a_1 + (N+1-k-1)\cdot r = 2a_1 + (N-1)r$ é constante (não depende de k). Portanto:

$$2S = [2a_1 + (N-1)r] + \cdots + [2a_1 + (N-1)r] = N \cdot [2a_1 + (N-1)r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot N \cdot [a_1 + (a_1 + (N-1)r)] = \frac{1}{2}(a_1 + a_N)\cdot N.$$

Vamos usar a fórmula deduzida para calcular A:

$$A = \sum_{n=1}^{50} f(n) = \sum_{n=1}^{50} \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{50} n = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+50)\cdot 50}{2} = 637{,}5.$$

Para B temos:

$$B = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Reconhecemos B como a soma de uma PG infinita de termo inicial $a = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Portanto, sua soma é:

$$B = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Logo: $A \cdot B = 1275$, ímpar múltiplo de 25.

Gabarito: “d”

---

57. (EFOMM/2020)

Considere a soma

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{15} + \frac{1}{5\cdot 9\cdot 13} + \frac{1}{9\cdot 13\cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)(4n+9)} + \cdots,}$$

ou seja, a soma continua para n, crescendo indefinidamente. Assinale a opção que apresenta o valor de S.

a) $S = \frac{1}{2}$

b) $S = 1$

c) $S = \frac{1}{20}$

d) $S = \frac{1}{40}$

e) $S = \frac{1}{50}$

Comentários

Nessa questão, provavelmente, ocorreu um erro de digitação na prova, pois do termo geral:

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+5)(4n+9)}$$

Se $n=0$, temos:

$$\frac{1}{1\cdot 5\cdot 9}=\frac{1}{45}\neq\frac{1}{15}$$

Assim, na soma da questão, o termo geral é válido para $n\geq 1$. Veremos que devido a esse erro, não encontraremos uma resposta nas alternativas. Vamos resolver a questão do modo como está escrito.

Note que os termos da soma possuem a forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

Em que a_n é o termo de uma PA de razão 4. Vamos transformá-lo em uma soma telescópica. Para isso, vamos reescrever os termos da soma do seguinte modo:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}=\frac{A}{a_n a_{n+1}}+\frac{B}{a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}=\frac{A(a_{n+2})+B(a_n)}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$A(a_{n+2})+B(a_n)=1$$

Escrevendo $a_{n+2}=a_n+2r$:

$$A(a_n+2r)+B(a_n)=1$$

$$(A+B)a_n+2Ar=1$$

$$A+B=0\Rightarrow B=-A$$

$$2Ar=1\Rightarrow A=\frac{1}{2r}\Rightarrow B=-\frac{1}{2r}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$$

Reescrevendo a soma usando essa forma e substituindo $r=4$:

$$S=\frac{1}{15}+\frac{1}{5\cdot 9\cdot 13}+\frac{1}{9\cdot 13\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)(4n+9)}+\cdots$$

$$S = \frac{1}{15} + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{9\cdot 13}\right) + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{9\cdot 13} - \frac{1}{13\cdot 17}\right) + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} - \frac{1}{(4n+5)\cdot(4n+9)}\right) + \cdots$$

$$S = \frac{1}{15} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{9\cdot 13} - \frac{1}{13\cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)} - \frac{1}{(4n+5)\cdot(4n+9)} + \cdots\right)$$

$$S = \frac{1}{15} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{(4n+5)\cdot(4n+9)} + \cdots\right)$$

Nesse momento, como a soma continua para n que cresce indefinidamente, temos que para valores de n muito grandes, as frações $\frac{1}{(4n+5)\cdot(4n+9)}$ se anularão, logo:

$$S = \frac{1}{15} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{45}\right) = \frac{8\cdot 3+1}{8\cdot 45} = \frac{25}{8\cdot 45} = \frac{5}{72}$$

Esse valor não consta nas alternativas. Caso tivéssemos a seguinte soma, teríamos:

$$S = \frac{1}{45} + \frac{1}{5\cdot 9\cdot 13} + \frac{1}{9\cdot 13\cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)(4n+9)} + \cdots$$

$$S = \frac{1}{45} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{45}\right) = \frac{8+1}{8\cdot 45} = \frac{9}{8\cdot 45} = \frac{1}{40}$$

Para esse valor, temos como gabarito a letra “d” conforme o gabarito preliminar da banca.

Gabarito: Anulada.

---

58. (EFOMM/2016)

Numa progressão geométrica crescente, o 3º termo é igual à soma do triplo do 1º termo com o dobro do 2º termo. Sabendo-se que a soma desses três termos é igual a 26, determine o valor do 2º termo.

a) 6

b) 2

c) 3

d) 1

e) $\frac{26}{7}$

Comentários

Temos uma PG crescente com três termos:

$$(a_1, a_2, a_3)$$

Do enunciado:

$$a_3 = 3a_1 + 2a_2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26$$

Como queremos saber apenas a_2, vamos escrever a sequência de outro modo:

$$\left(\frac{a}{q}, a, aq\right), q \neq 0 \text{ pois temos PG crescente}$$

$$a_3 = 3a_1 + 2a_2 \Rightarrow aq = \frac{3a}{q} + 2a \Rightarrow aq^2 - 2aq - 3a = 0 \Rightarrow a(q^2 - 2q - 3) = 0 \ \ (eq. I)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 \Rightarrow \frac{a}{q} + a + aq = 26 \Rightarrow a\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 26 \ \ (eq. II)$$

Note da $eq. II$ que $a \neq 0$, logo da $eq. I$, temos:

$$q^2 - 2q - 3 = 0$$

$$q = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 \ ou - 1$$

Como a PG é crescente, devemos ter $\boxed{q = 3}$. Substituindo na $eq. II$:

$$a\left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) = 26 \Rightarrow a\left(\frac{13}{3}\right) = 26 \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 26}{13} \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Portanto, $a_2 = a = 6$.

Gabarito: "a".

---

59. (EFOMM/2016)

Um garrafão contém 3 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea. Retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. A quantidade de vinho, em litros, que resta no garrafão, após 5 dessas operações, é aproximadamente igual a

a) $\mathbf{0,396}$

b) $\mathbf{0,521}$

c) $\mathbf{0,676}$

d) $\mathbf{0,693}$

e) $\mathbf{0,724}$

Comentários

Inicialmente, na mistura homogênea, temos 2 litros de vinho e 1 litro de água.

Perceba que a cada operação, trocamos 1 litro de líquido que possui 2/3 de vinho e 1/3 de água por 1 litro de água. Desse modo, a quantidade de vinho diminuirá segundo uma PG de razão 2/3. Assim, após a quinta operação, restará de vinho:

$$a_1 = 2$$

$$a_5 = a_1 q^4 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^5}{3^4} = \frac{32}{81} \cong 0{,}396L$$

Gabarito: “a”.

---

60. (EFOMM/2010)

A expressão $6 \cdot n + n^2$ representa a soma dos n primeiros termos de uma sequência numérica. É correto afirmar que essa sequência é uma progressão

a) aritmética de razão 3.

b) aritmética de razão 4.

c) aritmética de razão 2.

d) geométrica de razão 4.

e) geométrica de razão 2.

Comentários

$$S_n = 6n + n^2$$

Podemos encontrar os termos da sequência da seguinte forma:

$$S_1 = a_1 = 6 \cdot 1 + 1^2 = 7 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 6 \cdot 2 + 2^2 = 16 \Rightarrow a_2 = 16 - a_1 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow a_2 = 9$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 6 \cdot 3 + 3^2 = 27 \Rightarrow a_3 = 27 - a_1 - a_2 = 27 - 7 - 9 \Rightarrow a_3 = 11$$

Observe que os termos formam uma PA de razão 2:

$$(7, 9, 11, \dots)$$

Gabarito: “c”.

---

61. (EFOMM/2006)

Os primeiros termos de uma progressão geométrica são $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O quarto termo é

a) $1/\sqrt{2}$

b) 1

c) $\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[9]{2}$

e) $1/2$

Comentários

Temos a seguinte PG:

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}, a_4\right)$$

Vamos encontrar sua razão:

$$a_2 = a_1 q \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \sqrt{2} q \Rightarrow q = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2-3}{6}} \therefore q = 2^{-\frac{1}{6}}$$

O quarto termo é:

$$a_4 = a_3 q = \sqrt[6]{2} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}} = 2^0 = 1$$

Gabarito: "b".

62. (EFOMM/2006)

Se o 5º número de uma P.A. de 9 termos é 16, então a soma de seus termos será:

a) $\mathbf{76}$

b) $\mathbf{96}$

c) $\mathbf{144}$

d) $\mathbf{176}$

e) $\mathbf{196}$

Comentários

Temos a seguinte PA:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, 16, a_6, a_7, a_8, a_9)$$

Note que $a_5 = 16$ é o termo intermediário da PA. Assim, temos:

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9)n}{2}$$

$$a_5 = \frac{(a_1 + a_9)}{2} \Rightarrow a_1 + a_9 = 2a_5$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{2a_5 \cdot 9}{2} = 9 \cdot 16 = 144$$

Gabarito: "c".

63. (EFOMM/2005)

A soma dos termos da progressão $\mathbf{2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-10}}$ **é**

a) $\mathbf{2^{-(1+2+3+\cdots+10)}}$

b) $\mathbf{2^{-1.024}}$

c) 1.024^{-1}

d) $\frac{513}{1.024}$

e) $\frac{1.023}{1.024}$

Comentários

A soma dos termos de uma progressão geométrica de n termos, razão q e termo inicial a_1 é:

$$S = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

No nosso caso, $n = 10$, $a_1 = 2^{-1}$ e $q = 2^{-1}$. Logo:

$$S = \frac{2^{-1} \cdot ((2^{-1})^{10} - 1)}{2^{-1} - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Gabarito: "e"

---

64. (Escola Naval/2019)

Considere um conjunto de números inteiros $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, com n elementos. Se retirarmos um número do conjunto A, a média aritmética dos elementos restantes é $16,4$. Sabendo que p é o número que foi retirado, determine $|p - n|$ e assinale a opção correta.

a) 27

b) 28

c) 33

d) 35

e) 37

Comentários

Retirando-se p do conjunto A, teremos $n - 1$ elementos e a média aritmética torna-se:

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n - p}{n - 1} = 16{,}4$$

Como queremos o valor do número $|p - n|$, vamos isolar esse número na equação acima:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + (n - p) = 16{,}4(n - 1)$$

$$\Rightarrow |p - n| = |(1 + 2 + \cdots + n - 1) - 16{,}4(n - 1)|$$

Vamos escrever 16,4 na forma de fração.

$$16{,}4 = \frac{164}{10} = \frac{82}{5}$$

Note que a soma $1 + 2 + \cdots + n - 1$ é uma progressão aritmética de razão 1 cujo primeiro termo é 1, a soma dessa PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S = \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo os valores encontrados na equação, obtemos:

$$|p - n| = \left|\frac{n(n-1)}{2} - \frac{82}{5}(n-1)\right| = \left|(n-1)\left(\frac{5n - 164}{10}\right)\right|$$

Como o conjunto A possui apenas números inteiros, temos que $p - n$ também deve ser inteiro. Logo, observando-se a expressão à direita, vemos que n deve ser múltiplo de 10, assim, temos:

$n - 1 = 10k$

Testando as possibilidades:

I) $n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$

$$\Rightarrow \left|(n-1)\left(\frac{5n - 164}{10}\right)\right| = \left|10\left(\frac{5 \cdot 11 - 164}{10}\right)\right| = |55 - 164| = 109$$

II) $n - 1 = 20 \Rightarrow n = 21$

$$\Rightarrow \left|(n-1)\left(\frac{5n - 164}{10}\right)\right| = \left|20\left(\frac{5 \cdot 21 - 164}{10}\right)\right| = |2(105 - 164)| = 118$$

III) $n - 1 = 30 \Rightarrow n = 31$

$$\Rightarrow \left|(n-1)\left(\frac{5n - 164}{10}\right)\right| = \left|30\left(\frac{5 \cdot 31 - 164}{10}\right)\right| = |3(155 - 164)| = 27$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra “a”.

Gabarito: “a”.

---

65. (Escola Naval/2019)

Sejam (a_n), (b_m) e (c_k) três progressões geométricas de razão q e primeiro termo x. (b_m) tem o dobro de termos de (a_n), e (c_k) tem $\frac{3}{2}$ termos de (b_m). Sabendo que a soma dos termos de (a_n) é igual a 10 e a soma dos termos de (c_k) é $\frac{42}{5}$, assinale a opção que apresenta a diferença, em módulo, dos possíveis valores da soma dos termos de (b_m).

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

Comentários

Sejam n_a, n_b, n_c a quantidade de termos de $(a_n), (b_m), (c_k)$, respectivamente. Do enunciado, temos:

$$n_a = n$$

$$n_b = 2n_a = 2n$$

$$n_c = \frac{3}{2}n_b \Rightarrow n_c = 3n_a = 3n$$

Temos a seguinte sequência:

$$(a_n) \to (x, xq, \dots, xq^{n-1})$$

$$(b_m) \to (x, xq, \dots, xq^{n-1}, xq^n, \dots, xq^{2n-1})$$

$$(c_k) \to (x, xq, \dots, xq^{n-1}, xq^n, \dots, xq^{2n-1}, xq^{2n}, \dots, xq^{3n-1})$$

A soma dos termos de (a_n) é 10, logo:

$$x + xq + \cdots + xq^{n-1} = 10 \quad (I)$$

A soma dos termos de (c_k) é $42/5$, logo:

$$x + xq + \cdots + xq^{n-1} + xq^n + \cdots + xq^{2n-1} + xq^{2n} + \cdots + xq^{3n-1} = \frac{42}{5}$$

$$(x + xq + \cdots + xq^{n-1}) + q^n(x + xq + \cdots + xq^{n-1}) + q^{2n}(x + xq + \cdots + xq^{n-1}) = \frac{42}{5}$$

$$(1 + q^n + q^{2n})(x + xq + \cdots + xq^{n-1}) = \frac{42}{5}$$

Usando (I):

$$(1 + q^n + q^{2n}) \cdot 10 = \frac{42}{5} \Rightarrow 10q^{2n} + 10q^n + 10 - \frac{42}{5} = 0 \Rightarrow 50q^{2n} + 50q^n + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 25q^{2n} + 25q^n + 4 = 0$$

Resolvendo a equação em q^n:

$$q^n = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4}}{2 \cdot 25} = \frac{-25 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 25} = \frac{-25 \pm 15}{50}$$

$$q^n = -\frac{4}{5} \text{ ou } q^n = -\frac{1}{5}$$

A soma dos termos de (b_m) é:

$$S = x + xq + \cdots + xq^{n-1} + xq^n + \cdots + xq^{2n-1}$$

$$S = (x + xq + \cdots + \ xq^{n-1}) + q^n(x + xq + \cdots + \ xq^{n-1})$$

$$S = (1 + q^n)(x + xq + \cdots + \ xq^{n-1}) = 10(1 + q^n)$$

Os possíveis valores de soma são:

$$S_1 = 10\left(1 + \left(-\frac{4}{5}\right)\right) = 10 - 8 = 2$$

$$S_2 = 10\left(1 + \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = 10 - 2 = 8$$

O módulo da diferença dos possíveis valores das somas dos termos de (b_m) é:

$$|S_1 - S_2| = |2 - 8| = |-6| = 6$$

Gabarito: "a".

---

66. (Escola Naval/2015)

A soma dos três primeiros termos de uma $P.G.$ crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale

a) 1

b) 4

c) 8

d) 9

e) 11

Comentários

Temos a seguinte sequência:

$$(a, aq, aq^2)$$

Do enunciado:

$$a + aq + aq^2 = 13 \Rightarrow a(1 + q + q^2) = 13 \Rightarrow a^2(1 + q + q^2)^2 = 13^2 \ (eq. I)$$

$$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 91 \Rightarrow a^2(1 + q^2 + q^4) = 13 \cdot 7 \ (eq. II)$$

Dividindo-se a $eq. I$ pela $eq. II$:

$$\frac{a^2(1 + q + q^2)^2}{a^2(1 + q^2 + q^4)} = \frac{13^2}{13 \cdot 7} \Rightarrow \frac{(1 + q + q^2)^2}{(1 + q^2 + q^4)} = \frac{13}{7}$$

Perceba que

$$1 + q^2 + q^4 = 1 + 2q^2 + q^4 - q^2 = (1 + q^2)^2 - q^2 = (1 - q + q^2)(1 + q + q^2)$$

Assim, temos:

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{(1-q+q^2)(1+q+q^2)}=\frac{13}{7}$$

Como $1+q+q^2 \neq 0$ (pois o discriminante é negativo), podemos simplificar a fração, logo:

$$\frac{1+q+q^2}{1-q+q^2}=\frac{13}{7} \Rightarrow 7+7q+7q^2=13-13q+13q^2$$

$$\Rightarrow 6q^2-20q+6=0$$

$$\Rightarrow 3q^2-10q+3=0$$

Resolvendo a equação:

$$q=\frac{\left(-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 3\cdot 3}\right)}{6}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}$$

$$\Rightarrow q=3\ ou\ q=\frac{1}{3}$$

$$PG\ crescente \rightarrow q=3$$

Substituindo a razão na $eq.I$:

$$a(1+3+3^2)=13 \Rightarrow a(13)=13 \Rightarrow a=1$$

A sequência é

$$(a,aq,aq^2)=(1,3,9)$$

Justapondo-se os termos:

$$139$$

Fazendo a divisão de 139 por 23, obtemos como resto:

$$139=23\cdot 6+1$$

$$\therefore r=1$$

Gabarito: "a".

---

67. (Escola Naval/2014)

Considere a sequência $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{1+2}{1+2}$; $x_3=\frac{1+2+3}{1+2+4}$; $x_4=\frac{1+2+3+4}{1+2+4+8}$;... O valor de x_n é

a) $\frac{n+1}{2}$

b) $\frac{n(n-1)}{2^n}$

c) $\frac{n(n+1)}{2^n-1}$

d) $\frac{n(n+1)}{2^n}$

e) $\frac{n(n+1)}{2(2^n-1)}$

Comentários

Observe que nos termos da sequência, o numerador é a soma de uma PA cujo primeiro termo é 1 e razão 1 e o denominador é a soma de uma PG cujo primeiro termo é 1 e razão 2. Assim, temos:

$$x_n = \frac{S_{PA}}{S_{PG}} = \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{1 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}} = \frac{n(n+1)}{2(2^n - 1)}$$

Gabarito: "e".

---

68. (Escola Naval/2014)

O quinto termo da progressão aritmética $3 - x; -x; \sqrt{9-x} \ldots, x \in \mathbb{R}$ é

a) 7

b) 10

c) -2

d) $-\sqrt{14}$

e) -18

Comentários

Precisamos determinar o valor de x. Vamos usar a propriedade da média aritmética:

$$-x = \frac{(3-x) + \sqrt{9-x}}{2} \Rightarrow -2x = 3 - x + \sqrt{9-x} \Rightarrow -x - 3 = \sqrt{9-x} \;\; (eq.I)$$

Da condição de existência do radical:

$$9 - x \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x \Rightarrow x \leq 9$$

Como $\sqrt{9-x} \geq 0$, temos:

$$-x - 3 \geq 0 \Rightarrow -x \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$$

Elevando-se a $eq.I$ ao quadrado:

$$(-x-3)^2 = \sqrt{9-x}^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - x \Rightarrow x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x+7) = 0$$

$$x = 0 \; ou \; x = -7$$

Como $x \leq -3$, devemos ter $x = -7$.

Assim, a PA é dada por:

$$\left(3-(-7),-(-7),\sqrt{9-(-7)},\dots\right)$$

$$(10,7,4,\dots)$$

Ela possui primeiro termo 10 e razão -3. O quinto termo é:

$$a_5 = a_1 + 4r = 10 + 4(-3) = 10 - 12 = -2$$

Gabarito: "c".

---

69. (EFOMM/2021)

Observe as progressões aritméticas a seguir e assinale a alternativa que representa o sexagésimo primeiro número a se repetir em ambas as progressões.

$$\mathbf{-1, 3, 7, 11, 15, \dots}$$

$$\mathbf{1, 4, 7, 10, \dots}$$

a) 301

b) 399

c) 619

d) 727

e) 799

Comentários

Vamos analisar as duas PA:

$$(-1,3,7,11,15,19,23,27,31,35,39,\dots)$$

$$(1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,\dots)$$

Os termos que são iguais formam uma nova progressão aritmética de razão 12:

$$(7,19,31,\dots)$$

O termo geral dessa PA é dado por:

$$a_n = 7 + (n-1)\cdot 12$$

Queremos a_{61}:

$$a_{61} = 7 + (61-1)\cdot 12 = 7 + 60\cdot 12 = 727$$

Gabarito: D

---

70. (EN/2021)

Seja $S_n = n^2 + n + 1$ a soma dos termos de uma sequência numérica $(n \in \mathbb{N})$. Sobre essa sequência assinale a opção correta.

a) Essa sequência numérica não é uma progressão aritmética.

b) A diferença entre o quinto e o quarto termo é 3.

c) Sua razão é 4.

d) S_n é um número múltiplo de 7.

e) Seu sétimo termo é 32.

Comentários

De acordo com a lei de S_n, podemos calcular a_1 fazendo o S_1:

$$S_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3 = a_1$$

$$\therefore a_1 = 3$$

Sabemos que $S_2 = a_1 + a_2$ e pela função de S_n, temos:

$$S_2 = 2^2 + 2 + 1$$

$$a_1 + a_2 = 7$$

$$3 + a_2 = 7$$

$$\therefore a_2 = 4$$

Além disso, sabemos que $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ e pela função de S_n, vem:

$$S_3 = 3^2 + 3 + 1$$

$$\underbrace{a_1 + a_2}_{=S_2} + a_3 = 13$$

$$7 + a_3 = 13$$

$$a_3 = 6$$

Por fim, fazendo $S_4 = S_3 + a_4$, vemos:

$$S_4 = 4^2 + 4 + 1$$

$$S_3 + a_4 = 21$$

$$13 + a_4 = 21$$

$$a_4 = 8$$

Poderíamos determinar o a_n fazendo $S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = n^2 + n + 1 - ((n-1)^2 + n - 1 + 1)$$

$$a_n = n^2 - (n-1)^2 + n - (n-1)$$

$$a_n = 2n - 1 + 1 = 2n$$

Mas perceba que isso só é válido se existir S_{n-1}, ou seja, para $n \geq 1$. Portanto, a lei de formação da sequência é dada por:

$$S = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$$

Não é uma PA.

Gabarito: A

8. QUESTÕES NÍVEL 3

71. (ITA/2021)

Um relógio digital mostra o horário no formato $H : M : S$, onde H é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, M é um inteiro representando os minutos e S é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia (H, M, S) são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

72. (ITA/2021)

O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

(a) a soma dos 40 primeiros termos;

(b) o produto dos 7 primeiros termos.

73. (ITA/2020)

Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

74. (ITA/2020)

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

75. (ITA/2019/Modificada)

Classifique a afirmação:

Se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

76. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, \ldots, 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \frac{3}{2}$.

b) Escreve $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $mdc(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para n.

77. (ITA/2017)

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) -140

b) -120

c) 0

d) 120

e) 140

78. (ITA/2015)

Sabe-se que $1, B, C, D$ e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;

II. os números $1, B, C$, e os números $1, C, E$, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

79. (ITA/2015)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

80. (ITA/2012)

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60

b) -30

c) 0

d) 30

e) 60

81. (ITA/2010)

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

82. (ITA/2010)

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão d.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 11.

e) 14.

83. (ITA/2007)

Seja k um número inteiro positivo e

$A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k \text{ e } mdc(j, k) = 1\}$.

Verifique se $n(A_3), n(A_9), n(A_{27})$ e $n(A_{81})$ estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

84. (ITA/2007)

Se A, B e C forem conjuntos tais que $n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10, n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

a) formam uma progressão aritmética de razão 6.

b) formam uma progressão aritmética de razão 2.

c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.

d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.

e) não formam uma progressão aritmética.

85. (ITA/2006)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

86. (ITA/2005)

Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2,\ para\ n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

87. (ITA/2003)

Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V a.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \ldots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k$$

da corrida.

Verifique que os termos $t_k, k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

88. (ITA/2002)

Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e responda, justificando:

Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

89. (ITA/2000)

O valor de n que torna a sequência

$$2 + 3n, -5n, 1 - 4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

a) $[-2, -1]$.

b) $[-1, 0]$.

c) $[0, 1]$.

d) $[1, 2]$.

e) $[2,3]$.

90. (ITA/1998)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1, 0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $8/27$

b) $20/27$

c) $26/27$

d) $30/27$

e) $38/27$

91. (ITA/1995)

Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por $0,3: 0,03: 0,003: \ldots$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

a) $1/3$

b) $2/3$

c) 1

d) 2

e) $1/2$

92. (ITA/1994)

Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a 2^{25} e o termo do meio é 2^5. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, então:

a) $a_1 + q = 16$

b) $a_1 + q = 12$

c) $a_1 + q = 10$

d) $a_1 + q + n = 20$

e) $a_1 + q + n = 11$

93. (IME/2019)

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

94. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

95. (IME/2017)

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3, a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

96. (IME/2016)

Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

97. (IME/2015)

A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

98. (IME/2014)

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}}$$

Obs.: algs = algarismos

99. (IME/2014)

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) 1

100. (IME/2013)

Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão r e q, respectivamente, onde r e q são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1+\frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é

a) 12

b) 48

c) 66

d) 99

e) 129

101. (IME/2012)

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão r, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão q, com $q\ e\ r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão r;

b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

102. (IME/2010)

Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 79^2$. O valor de S satisfaz:

a) $S < 7x10^4$

b) $7x10^4 \leq S < 8x10^4$

c) $8x10^4 \leq S < 9x10^4$

d) $9x10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

103. (IME/2010)

A quantidade k de números naturais positivos, menores do que 1000, que não são divisíveis por 6 ou 8, satisfaz a condição:

a) $k < 720$

b) $720 \leq k < 750$

c) $750 \leq k < 780$

d) $780 \leq k < 810$

e) $k \geq 810$

104. (IME/2000)

Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

105. (IME/1996)

Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$$

106.(OBM)

O número $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros.

107.(IME/2021)

Uma sequência é gerada pelo produto dos termos correspondentes de duas progressões aritméticas de números inteiros. Os três primeiros termos dessa sequência são 3053, 3840 e 4389. O sétimo termo da sequência é:

a) 3035

b) 4205

c) 4398

d) 4608

e) 5063

108. (IME/2021)

Considere uma progressão aritmética (PA) de números inteiros com razão $p>2$, seu primeiro termo maior do que 2 e seu último termo menor do que 47. Retirando-se uma determinada quantidade de elementos da PA, recai-se em uma PG de 3 elementos e razão $q>2$. Para p e q inteiros, p diferente de q, determine a PA cuja soma de seus elementos seja a maior possível.

8.1. GABARITO

71. $n_T=624$
72. a) $S_{40}=0$ b) $P_7=-1$
73. d
74. c
75. Verdadeira.
76. a) $(4,6,9),(8,12,18)\ e\ (12,18,27)$ b) $n=4$
77. d
78. $B=\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{2}, D=1, E=-2$
79. d
80. $xyz=-60$
81. $S=14-6\sqrt{2}$

82. d
83. Progressão geométrica de razão 3.
84. d
85. $a + r = 11$
86. $r = \frac{2\pi}{3}$ e $a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$
87. $S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$ e S é o tempo que Aquiles demora para alcançar a tartaruga.
88. $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 > \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$
89. b
90. e
91. c
92. e
93. 5 termos
94. d
95. a
96. $j = 12$
97. a
98. $\underbrace{333\ldots3}_{30\ algs}$
99. b
100. c
101. a) $r = 3$ b) $a_{18} = 53$
102. c
103. c
104. $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
105. $S = \frac{1000}{3001}$
106. $\frac{4004000}{2001}$
107. B
108. $(\mathbf{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44})$

8.2. RESOLUÇÃO

71. (ITA/2021)

Um relógio digital mostra o horário no formato $H : M : S$, onde H é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, M é um inteiro representando os minutos e S é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia (H, M, S) são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

Comentários

Como a progressão aritmética deve ter razão estritamente positivo, devemos ter $r > 0$. As progressões são da forma:

$$(H, M, S) = (H, H + r, H + 2r), com\ r \in \mathbb{N}$$

Veja que para cada hora, devemos analisar a quantidade de progressões que podemos ter. Observe o caso para $H = 1$:

$$\{(1, 2, 3); (1, 3, 4); (1, 4, 7); (1, 5, 9); \dots ; (1, 30, 59)\} \Rightarrow total = 29\ casos$$

Note que em cada progressão para $H = 1$ a razão aumenta 1 unidade. Assim, podemos contar da seguinte forma: a primeira razão será $r = 1$ e a última será dada por:

$$H + 2r \leq 59 \Rightarrow r \leq \frac{59 - H}{2}$$

$$H = 1 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 1}{2} = 29 \Rightarrow r_{max} = 29 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 29 \Rightarrow 29\ casos$$

$$H = 2 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 2}{2} = \frac{57}{2} \Rightarrow r_{max} = 28 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 28 \Rightarrow 28\ casos$$

$$H = 3 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 3}{2} = 28 \Rightarrow r_{max} = 28 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 28 \Rightarrow 28\ casos$$

$$H = 4 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 4}{2} = \frac{55}{2} \Rightarrow r_{max} = 27 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 27 \Rightarrow 27\ casos$$

$$H = 5 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 5}{2} = 27 \Rightarrow r_{max} = 27 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 27 \Rightarrow 27\ casos$$

$$H = 6 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 6}{2} = \frac{53}{2} \Rightarrow r_{max} = 26 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 26 \Rightarrow 26\ casos$$

$$H = 7 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 7}{2} = 26 \Rightarrow r_{max} = 26 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 26 \Rightarrow 26\ casos$$

$$H = 8 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 8}{2} = \frac{51}{2} \Rightarrow r_{max} = 25 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 25 \Rightarrow 25\ casos$$

$$H = 9 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 9}{2} = 25 \Rightarrow r_{max} = 25 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 25 \Rightarrow 25\ casos$$

$$H = 10 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 10}{2} = \frac{49}{2} \Rightarrow r_{max} = 24 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 24 \Rightarrow 24\ casos$$

$$H = 11 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 11}{2} = 24 \Rightarrow r_{max} = 24 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 24 \Rightarrow 24\ casos$$

$$H = 12 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59 - 12}{2} = \frac{47}{2} \Rightarrow r_{max} = 23 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 23 \Rightarrow 23\ casos$$

Somando os casos, encontramos:

$$n = 29 + 2(28 + 27 + 26 + 25 + 24) + 23 = 52 + 2 \cdot \frac{(28 + 24)5}{2} = 52 \cdot 6 = 312$$

Como queremos a quantidade em 1 dia, devemos considerar AM e PM, ou seja, devemos multiplicar o valor encontrado por 2:

$$n_T = 624$$

Gabarito: $n_T = 624$

---

72. (ITA/2021)

O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

(a) a soma dos 40 primeiros termos;

(b) o produto dos 7 primeiros termos.

Comentários

Temos a seguinte progressão geométrica de razão q:

$$(1, q, q^2, q^3, q^4, \dots)$$

A soma e produto dos n primeiros termos de uma PG é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

$$P_n = a_1^n q^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}$$

Do enunciado:

$$S_{79} = P_{13} \Rightarrow \frac{q^{79} - 1}{q - 1} = q^{\frac{13(12)}{2}} = q^{78}$$

$$q^{79} - 1 = q^{79} - q^{78}$$

$$q^{78} = 1 \therefore q = \pm 1 \Rightarrow q = -1$$

Portanto, a PG é $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

a) A soma é

$$S_{40} = \frac{(-1)^{40} - 1}{-1 - 1} \therefore S_{40} = 0$$

b) O produto é

$$P_7 = (-1)^{21} \therefore P_7 = -1$$

Gabarito: a) $S_{40} = 0$ **b)** $P_7 = -1$

---

73. (ITA/2020)

Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

Comentários

Vamos reescrever a sequência (a, b, c) como $\left(\frac{b}{k}, \text{b}, bk\right)$ para simplificar as contas.

Assim, a partir do enunciado, podemos escrever:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 + b^2 = (bk)^2$$

$$\frac{b^2}{k^2} + b^2 = b^2k^2$$

$$b^2k^2 - b^2 - \frac{b^2}{k^2} = 0$$

Como $a \neq 0$, implica que $b \neq 0$, dessa forma, temos:

$$k^2 - 1 - \frac{1}{k^2} = 0$$

$$k^4 - k^2 - 1 = 0$$

Façamos $y = k^2$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{ou}$$

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Como k é um número real, temos que não existe $k^2 < 0$. Logo:

$$\Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Assim,

$$P = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) = 0$$

Gabarito: "d".

74. (ITA/2020)

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

Comentários

Veja que a quantidade de velas gastas a cada aniversário pode ser vista como uma progressão aritmética de razão 1.

Aniversário	Velas gastas
1º	1
2º	2
3º	3
⋮	⋮
nº	n

Assim, o total de velas gastas até o n-ésimo aniversário é:

$$V_T = \frac{(1+n)n}{2}$$

Como todo ano um novo pacote de 12 velas é compradas, temos até o n-ésimo aniversário:

$$12n - \frac{(1+n)n}{2} \text{ velas remanescentes}$$

O primeiro ano em que as velas serão insuficientes ocorrerá quando as velas remanescentes satisfazerem a condição:

$$12n - \frac{(1+n)n}{2} < 0 \Rightarrow 12n < \frac{(1+n)n}{2}$$

Sendo n a idade, temos que $n \neq 0$, logo:

$$12 < \frac{1+n}{2} \Rightarrow 24 < 1+n \Rightarrow 23 < n \therefore n > 23$$

O menor inteiro que satisfaz essa condição é $n = 24$.

Gabarito: “c”.

75. (ITA/2019/Modificada)

Classifique a afirmação:

Se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

Comentários

Se a, b e c formam, nessa ordem, uma PA então podemos escrever:

$$b = a + r$$

$$c = a + 2r$$

Veja que:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-r} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}$$

Analogamente:

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-r} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}$$

Então para a sequência $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formar uma PA nessa ordem, devemos ter:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

Vamos tentar encontrar essa relação.

Calculando $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}\right) = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{r}$$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{c}+\sqrt{a}$:

$$\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{r}\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})} = \frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

Da condição (a, b, c) ser uma PA:

$$c = a + 2r \Rightarrow c - a = 2r$$

Substituindo $c = 2r$ na equação $\frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$:

$$\frac{c-a}{r\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{2r}{r\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$$

Portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

∴Verdadeira.

Gabarito: Verdadeira.

---

76. (ITA/2017)

Sejam $A=\{1,2,\dots,29,30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1,a_2,a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q>1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1,a_2,a_3) de razão $q=\frac{3}{2}$.

b) Escreve $q=\frac{m}{n}$, com $m,n\in\mathbb{Z}$ e $mdc(m,n)=1$. Determine o maior valor possível para n.

Comentários

a) Temos que encontrar todas as progressões geométricas da forma (a_1,a_2,a_3) de razão $q=\frac{3}{2}$. Cada PG é formada pelos elementos de $A=\{1,2,\dots,30\}$.

Vamos escrever a PG em função do a_1 e de $q=3/2$:

$$(a_1,a_2,a_3)$$

$$(a_1,a_1q,a_1q^2)$$

$$\left(a_1,a_1\left(\frac{3}{2}\right),a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$\left(a_1,\frac{3a_1}{2},\frac{9a_1}{4}\right)$$

Os elementos da PG são elementos de A, um conjunto de números inteiros de 1 a 30.

Assim, $a_1,\frac{3a_1}{2},\frac{9a_1}{4}$ devem ser números inteiros e o último termo da PG deve ser menor ou igual a 30, pois este é o maior número elemento de A:

$$\frac{9a_1}{4}\leq 30$$

Disso, encontramos que a_1 deve ser múltiplo de 4, já que $\frac{9a_1}{4}$ deve ser inteiro.

Vamos encontrar as sequências:

$$a_1=4$$

$$a_2=a_1\left(\frac{3}{2}\right)=4\left(\frac{3}{2}\right)=6$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right) = 9$$

$(4, 6, 9)$ é a primeira PG

$$a_1 = 8$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 8\left(\frac{3}{2}\right) = 12$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{9}{4}\right) = 18$$

$(8, 12, 18)$ é a segunda PG

$$a_1 = 12$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right) = 18$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 12\left(\frac{9}{4}\right) = 27$$

$(12, 18, 27)$ é a terceira PG

$a_1 = 16$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 16\left(\frac{3}{2}\right) = 24$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 16\left(\frac{9}{4}\right) = 36 > 30 \Rightarrow não\ satisfaz\ a\ condição$$

Portanto, temos apenas três progressões geométricas que satisfazem a condição:

$$(4, 6, 9), (8, 12, 18)\ e\ (12, 18, 27)$$

b) Se $mdc(m, n) = 1 \to m$ e n são primos entre si. A PG pode ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3)$$

$$(a_1, a_1 q, a_1 q^2)$$

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m}{n}\right)^2\right)$$

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

Como os termos dessa PG são elementos de A, um conjunto de inteiros:

$$a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right) deve\ ser\ inteiro \to a_1\ \text{é}\ múltiplo\ de\ n^2$$

Se a_1 é múltiplo de n^2 e $a_1 \in \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, então a_1 é múltiplo de um número quadrado perfeito (um número quadrado perfeito é da forma x^2, onde x é um número inteiro).

Para a_1 pertencer ao conjunto A, $a_1 < 30$.

A questão pede o maior valor de n. Como a_1 é múltiplo de n^2, a_1 deve também possuir o maior valor possível.

O maior número quadrado perfeito que satisfaz essa condição é $a_1 = 25$

$$a_1 = 25 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$$

Como $q > 1$ e m, n são primos, para o menor valor de q que satisfaz essa condição, temos:

$$q = \frac{m}{n} = \frac{6}{5}$$

Para esse valor, encontramos a PG:

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(25, 25\left(\frac{6}{5}\right), 25\left(\frac{36}{25}\right)\right)$$

$$(25, 30, 36)$$

Perceba que o último termo dessa PG não é elemento de A. Então n^2 deve ser menor que 25. O próximo valor que satisfaz a condição é:

Para $a_1 = 16 \rightarrow n^2 = 16 \rightarrow n = 4$. Esses valores geram a PG:

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(16, 16\left(\frac{5}{4}\right), 16\left(\frac{25}{16}\right)\right)$$

$$(16, 20, 25)$$

Essa PG satisfaz todas as condições do problema.

$$\therefore n = 4$$

Gabarito: a) $(4, 6, 9), (8, 12, 18)\ e\ (12, 18, 27)$ b) $n = 4$

---

77. (ITA/2017)

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) -140

b) -120

c) 0

d) 120

e) 140

Comentários

Do enunciado, (a, b, c, d) é PG:

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

$$d = aq^3$$

$\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right)$ é PA:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{a + \frac{c}{4}}{2}$$

$$b = a + \frac{c}{4}$$

Usando as informações da PG na PA, obtemos:

$$aq = a + \frac{aq^2}{4}$$

$$q = 1 + \frac{q^2}{4}$$

$$q^2 - 4q + 4 = 0$$

Fatorando:

$$(q - 2)^2 = 0$$

A solução para essa equação é: $q = 2$.

Substituindo $q = 2$ e representando b, c, d em função de a:

$$b = aq = 2a$$

$$c = aq^2 = 4a$$

$$d = aq^3 = 8a$$

Das informações da PA, obtemos:

$$\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right)$$

$$\left(a, \frac{2a}{2}, \frac{4a}{4}, 8a - 140\right)$$

$$(a, a, a, 8a - 140)$$

Repare nos termos dessa PA. Essa sequência é uma PA de razão $r = 0$, pois $a_1 = a_2 = a_3 = a$

Então, podemos escrever:

$$a_4 = a$$

$$8a - 140 = a$$

$$7a = 140$$

$$a = 20$$

A questão pede $d - b$:

$$d - b = aq^3 - aq = 20(2)^3 - 20(2) = 160 - 40 = 120$$

$$\therefore d - b = 120$$

Gabarito: “d”.

---

78. (ITA/2015)

Sabe-se que $1, B, C, D$ e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;

II. os números $1, B, C,$ e os números $1, C, E,$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números $B, C, D, E,$ estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

Comentários

Vamos extrair as informações do enunciado.

Da afirmação II, temos:

$$(1, B, C) \text{ PA} \rightarrow B = 1 + r \text{ e } C = 1 + 2r$$

$$(1, C, E) \text{ PA} \rightarrow C = 1 + r' \text{ e } E = 1 + 2r'$$

Igualando os dois valores de C:

$$C = 1 + 2r = 1 + r' \rightarrow r' = 2r$$

Colocando E em função de r:

$$E = 1 + 2r' = 1 + 4r$$

Então, encontramos:

$$B = 1 + r$$

$$C = 1 + 2r$$

$$E = 1 + 4r$$

Da III, (B, C, D, E) estão em PG nesta ordem. Seja q sua razão:

$$C = Bq$$

$$q = \frac{C}{B} = \frac{1 + 2r}{1 + r}$$

Vamos escrever E em função do primeiro termo B e da razão q:

$$E = Bq^3 = (1+r)\left(\frac{1+2r}{1+r}\right)^3 = \frac{(1+2r)^3}{(1+r)^2}$$

Temos duas equações para E, vamos igualá-las:

$$E = 1 + 4r = \frac{(1+2r)^3}{(1+r)^2}$$

Desenvolvendo a equação e simplificando:

$$(1+4r)(1+r)^2 = (1+2r)^3$$

$$(1+4r)(1+2r+r^2) = 1 + 8r^3 + 3(1)^2(2r) + 3(1)(2r)^2$$

$$1 + 2r + r^2 + 4r + 8r^2 + 4r^3 = 1 + 8r^3 + 6r + 12r^2$$

$$1 + 6r + 9r^2 + 4r^3 = 1 + 6r + 12r^2 + 8r^3$$

$$8r^3 - 4r^3 + 12r^2 - 9r^2 + 6r - 6r + 1 - 1 = 0$$

$$4r^3 + 3r^2 = 0$$

$$r^2(4r+3) = 0$$

As raízes dessa equação são:

$$r = 0 \text{ ou } 4r + 3 = 0$$

Da afirmação I, os termos são dois a dois distintos, logo $r \neq 0$.

$$4r + 3 = 0 \rightarrow r = -\frac{3}{4}$$

Vamos encontrar o valores dos números reais:

$$B = 1 + r = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$C = 1 + 2r = 1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$E = 1 + 4r = 1 + 4\left(-\frac{3}{4}\right) = -2$$

$$(B, C, D, E)\ PG \rightarrow q = \frac{1+2r}{1+r}$$

$$q = \frac{1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)} = -2$$

$$D = Cq = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 1$$

$$\therefore B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2$$

Gabarito: $\boldsymbol{B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2}$

---

79. (ITA/2015)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Comentários

A sequência da questão é conhecida como sequência de Fibonacci. Vamos analisar as afirmações:

I. Pela definição da sequência, podemos escrever:

$$a_{p+2} = a_{p+1} + a_p$$

Se (a_p, a_{p+1}, a_{p+2}) for uma PG de razão q, podemos escrever:

$$a_p q^2 = a_p q + a_p$$

$$q^2 = q + 1$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

Temos que resolver uma equação de segundo grau. Podemos encontrá-lo usando a fórmula:

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da equação, temos $a = 1, b = -1, c = -1$:

$$q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Encontramos uma razão irracional. Então, se multiplicarmos a_p pela razão q, um número irracional, obteremos a_{p+1}, um número irracional. Pela definição da sequência de Fibonacci, seus termos são a soma dos dois anteriores. A sequência é formada apenas por números inteiros positivos, logo é impossível ter números irracionais na sequência.

∴Falsa.

II. Vamos ver se a_7 é um número primo. A sequência de Fibonacci é:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

$$a_7 = 13$$

13 é número primo

∴Verdadeira.

III. Vamos olhar a sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

Perceba que os termos com índices múltiplo de 3 são pares:

$$a_3 = 2, a_6 = 8, a_9 = 34$$

Os dois termos anteriores a estes números são ímpares.

Vamos provar por PIF a propriedade:

1) Já verificamos a sua validade para a_3.

2) Temos que generalizar o resultado.

Hipótese: $n = 3k \in \mathbb{N}, a_{3k}$ é par e a_{3k-1} e a_{3k-2} são ímpares.

Tese: $a_{3(k+1)}$ é par

Supondo a hipótese verdadeira, vamos tentar chegar à tese.

$$a_{3k+1} = a_{3k} + a_{3k-1}$$

a_{3k-1} é ímpar e 3_{3k} é par → a_{3k+1} é ímpar

$$3_{3k+2} = a_{3k+1} + a_{3k}$$

a_{3k+1} é ímpar e a_{3k} é par → a_{3k+2} é ímpar

$$a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{3k+1}$$

a_{3k+2} é ímpar e a_{3k+1} é ímpar → a_{3k+3} é par

$a_{3k+3} = a_{3(k+1)}$ é par

Pela hipótese conseguimos provar que a tese também é verdadeira. Logo, está provada a propriedade.

∴Verdadeira.

ESCLARECENDO

Considere os números naturais a, b, c:

c será par quando a e b forem ímpares ou a e b forem pares ao mesmo tempo.

Se a for par e b for ímpar, c será ímpar. Veja:

$$a\ par \to a = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$b\ ímpar \to b = 2k' + 1, k' \in \mathbb{N}$$

$$c = a + b = 2k + 2k' + 1$$

$$c = 2(k + k') + 1$$

$$k + k' = k'' \in \mathbb{N}$$

$$c = 2k'' + 1$$

$$c \text{ é } ímpar$$

O mesmo resultado é válido se a for ímpar e b for par.

Se a for ímpar e b for ímpar, c será par:

$$a\ ímpar \to a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$$b\ ímpar \to b = 2k' + 1, k' \in \mathbb{N}$$

$$c = a + b = (2k + 1) + (2k' + 1)$$

$$c = 2k + 2k' + 2$$

$$c = 2(k + k' + 1)$$

$$k + k' + 1 = k'' \in \mathbb{N}$$

$$c = 2k''$$

$$c \text{ é } par$$

Se a é par e b é par, c será par:

$$a\ par \to a = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$b\ par \to b = 2k', k' \in \mathbb{N}$$

$$c = a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$$

$$k + k' = k''$$

$$c = 2k''$$

$$c \text{ é } par$$

Gabarito: “d”.

80. (ITA/2012)

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60

b) -30

c) 0

d) 30

e) 60

Comentários

Temos uma PA cujos termos possuem as incógnitas x, y e z. Pelas propriedades da PA, podemos escrever:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$
$$3x - 5y = \frac{(x + 2y) + (8x - 2y)}{2}$$
$$3x - 5y = \frac{9x}{2}$$
$$6x - 10y = 9x$$
$$-10y = 3x$$
$$3x + 10y = 0 \ \ (I)$$

Também podemos escrever:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$
$$8x - 2y = \frac{(3x - 5y) + (11x - 7y + 2z)}{2}$$
$$16x - 4y = 14x - 12y + 2z$$
$$2x + 8y - 2z = 0$$
$$x + 4y - z = 0 \ \ (II)$$

A questão afirma que o último termo é igual a -127:

$$11x - 7y + 2z = -127 \ \ (III)$$

Dessa forma, encontramos o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 10y = 0 \ \ (I) \\ x + 4y - z = 0 \ \ (II) \\ 11x - 7y + 2z = -127 \ \ (III) \end{cases}$$

(A resolução desse sistema será melhor entendida na aula de Sistemas Lineares.)

Vamos resolver esse sistema, somando $2 \cdot (II)$ e (III), obtemos:

$$(2x + 11x) + (8y - 7y) + (2z - 2z) = -127$$
$$13x + y = -127 \ \ (IV)$$

Para encontrar x, podemos fazer $10 \cdot (IV) - (I)$:

$$10 \cdot (IV) = 130x + 10y = -1270$$
$$-(I) = -3x - 10y = 0$$
$$10 \cdot (IV) - (I) = 127x = -1270$$
$$x = -10$$

Substituindo $x = -10$ em (I) para encontrar y:

$$3x + 10y = 0 \ \ (I)$$

$$3(-10) + 10y = 0$$

$$10y = 30$$

$$y = 3$$

Por fim, substituímos $x = -10$ e $y = 3$ em (II) para encontrar z:

$$x + 4y - z = 0 \ \ (II)$$

$$z = x + 4y$$

$$z = (-10) + 4(3)$$

$$z = 2$$

$$xyz = (-10)(3)(2)$$

$$\therefore xyz = -60$$

Gabarito: $xyz = -60$

---

81. (ITA/2010)

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Comentários

Questão sobre PG infinita de razão negativa. Ela nos dá o valor de dois somatórios. Sabemos que a soma de uma PG infinita é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

a_1 é o primeiro termo da PG e q é sua razão.

Vamos verificar o primeiro somatório dado na questão:

$$a_1 + a_6 + a_{11} + \cdots = 8$$

$(a_1, a_6, a_{11}, \dots)$ é uma PG. Precisamos descobrir a nova razão dessa PG para aplicar a fórmula.

Podemos escrever a_6 em função de a_1 e r:

$$a_6 = a_1 r^5$$

Sabemos que a forma de uma PG é a sequência $(a_1, a_1 r', a_1 r'^2, \dots)$

Então a razão da PG $(a_1, a_6, a_{11}, \dots)$ é $r' = r^5$.

A soma dessa PG é dada por:

$$S' = \frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

Para o segundo somatório temos:

$$a_5 + a_{10} + a_{15} + \cdots = 2$$

$$a_{10} = a_5 q^5 \Rightarrow r'' = r^5$$

$$S'' = \frac{a_5}{1 - r''}$$

$$a_5 = a_1 r^4$$

$$S'' = \frac{a_1 q^4}{1 - r^5} = 2$$

Encontramos as seguintes equações:

$$(I)\ \frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

$$(II)\ \frac{a_1 r^4}{1 - r^5} = 2$$

Vamos dividir (II) por (I) para sumir o termo a_1:

$$\frac{(II)}{(I)} = \frac{\left(\frac{a_1 r^4}{1 - r^5}\right)}{\left(\frac{a_1}{1 - r^5}\right)} = \frac{2}{8}$$

$$r^4 = \frac{1}{4}$$

$$r^4 = \frac{1}{2^2}$$

Ainda estudaremos equações de potenciação nas próximas aulas. Por enquanto saiba que quando a incógnita está na forma x^{2k}, devemos considerar os valores positivos e negativos como soluções da equação. Pois se x é solução de x^{2k}, $(-x)$ também será. Veja: $(x^k)(x^k) = (-x^k)(-x^k) = x^{2k}$.

$$r = \pm \frac{1}{2^{\frac{2}{4}}} = \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O enunciado afirma que $r < 0$. Então:

$$r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo r em (I) para encontrar a_1:

$$\frac{a_1}{1 - r^5} = 8$$

$$\frac{a_1}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5} = 8$$

$$\frac{a_1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{8}} = 8$$

$$a_1 = 8 + \sqrt{2}$$

ESCLARECENDO

Essas operações serão explanadas na aula de Potênciação e Radiciação.

$$-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$$

Quando o termo está elevado a um número ímpar, podemos extrair o sinal negativo para fora da potência. Veja:

$$(-x)^{2k+1} = (-x)^{2k}(-x)^1 = x^{2k}(-1)x = (-1)x^{2k+1}$$

Dessa forma:

$$-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = -\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$$

Podemos simplificar desse modo:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^5 = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^5} = \frac{2^2 2^{\frac{1}{2}}}{2^5} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{5-2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Sabemos o valor de a_1 e r. A soma pedida na questão é dado pela fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = \frac{(8+\sqrt{2})}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$S = \frac{(8+\sqrt{2})2}{2+\sqrt{2}} = \frac{16+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Vamos simplificar:

$$S = \frac{(16+2\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})}\frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = \frac{32-16\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}{4-2} = \frac{28-12\sqrt{2}}{2} = 14-6\sqrt{2}$$

$$\therefore S = 14-6\sqrt{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = 14 - 6\sqrt{2}}$

82. (ITA/2010)

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão d.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 11.

e) 14.

Comentários

Pelo enunciado, podemos extrair:

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 10 + 25d$$

$$S_{50} = \sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$$

$$S_{50} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4550$$

$(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ é uma PA de razão d.

A soma de uma PA de razão d é dado pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Aplicando a fórmula na primeira somatória:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} = 10 + 25d$$

$$(a_1 + a_{10})5 = 10 + 25d$$

Simplificando:

$$a_1 + a_{10} = 2 + 5d$$

Podemos escrever a_{10} em função de a_1 e d:

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

Substituindo a_{10} na equação:

$$a_1 + (a_1 + 9d) = 2 + 5d$$

$$2a_1 = 2 - 4d$$

$$a_1 = 1 - 2d$$

Encontramos uma equação com a_1 e d. Vamos aplicar a fórmula para a segunda somatória e encontrar a outra equação:

$$S_{50} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4550$$

$$\frac{(a_1 + a_{50})50}{2} = 4550$$

$$(a_1 + a_{50})25 = 4550$$

$$(a_1 + a_{50}) = 182$$

Escrevendo a_{50} em função de a_1 e d:

$$a_{50} = a_1 + 49d$$

Substituindo na equação e simplificando:

$$\big(a_1 + (a_1 + 49d)\big) = 182$$

$$2a_1 + 49d = 182$$

$$2a_1 = 182 - 49d$$

Temos agora duas equações:

$(I)\ a_1 = 1 - 2d$

$$(II)\ 2a_1 = 182 - 49d$$

Vamos encontrar o valor de d, substituindo (I) em (II):

$$2(1 - 2d) = 182 - 49d$$

$$2 - 4d = 182 - 49d$$

$$49d - 4d = 182 - 2$$

$$45d = 180$$

$$\Rightarrow d = 4$$

Substituindo $d = 4$ na (I) para encontrar a_1:

$$a_1 = 1 - 2(4)$$

$$a_1 = 1 - 8 = -7$$

Encontramos o valor de d e a_1, a questão pede $d - a_1$:

$$d - a_1 = 4 - (-7) = 11$$

Gabarito: "d".

---

83. (ITA/2007)

Seja k um número inteiro positivo e

$\boldsymbol{A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k\ e\ mdc(j,k) = 1\}}$.

Verifique se $n(A_3), n(A_9), n(A_{27})$ e $n(A_{81})$ estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Comentários

Vamos traduzir os termos do enunciado.

Ele nos dá a definição de um conjunto:

$$A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leq k\ e\ mdc(j,k) = 1\}$$

Esse conjunto está em função de k, e seus elementos são os números naturais $(j \in \mathbb{N})$ menores ou iguais a k $(j \leq k)$ e $mdc(j,k) = 1$, isto é, j e k são primos entre si.

Vamos ao primeiro conjunto:

$$A_3 = \{j \in \mathbb{N}: j \leq 3 \; e \; mdc(j,3) = 1\}$$

Os elementos desse conjunto são os números naturais menores ou iguais a 3 e estes números são primos em relação ao número 3 $(mdc(j,3) = 1)$. Logo, os elementos não podem ser múltiplos de 3. Os números naturais que satisfazem essa condição são: 1 e 2. Logo:

$$A_3 = \{1,2\}$$

A questão pede para verificar a sequência $\left(n(A_3), n(A_9), n(A_{27}), n(A_{81})\right)$.

O número de elementos de A_3 é $n(A_3) = 2$.

Podemos continuar com o mesmo raciocínio e encontrar todos os elementos de cada conjunto. Mas a questão pede apenas o número de elementos desses conjuntos. Vamos economizar nosso tempo e encontrar um modo de calcular diretamente o número de elementos de cada conjunto.

Perceba que o número de elementos totais sem a restrição $mdc(j,k) = 1$ é k (da definição $j \in \mathbb{N}, j \leq k$). Agora, impondo a restrição no conjunto, temos que remover os elementos não primos em relação a k. A sequência pedida possui k potências de 3 $(A_3, A_9, A_{27}, A_{81})$. Então os elementos que não satisfazem a condição $mdc(j,k) = 1$ são os números múltiplos de 3 $(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots)$

Vamos calcular o número de elementos de A_9. Os múltiplos de $k = 9$ são $3, 6, 9$, então o número de elementos de A_9 será $9 - 3$ (9 devido à $k = 9$ e 3 devido aos múltiplos de 3).

$n(A_9) = 9 - 3 = 6$

Note que a cada 3 números naturais, devemos remover 1 número (múltiplo de 3). Então o número de elementos não primos pode ser dado pelo número $k/3$.

Usando esse raciocínio:

$$n(A_{27}) = 27 - \left(\frac{27}{3}\right) = 27 - 9 = 18$$

$$n(A_{81}) = 81 - \left(\frac{81}{3}\right) = 81 - 27 = 54$$

Dessa forma, encontramos a sequência:

$$\left(n(A_3), n(A_9), n(A_{27}), n(A_{81})\right)$$

$$(2, 6, 18, 54)$$

Essa sequência é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{6}{2} = 3$.

Gabarito: Progressão geométrica de razão 3.

---

84. (ITA/2007)

Se A, B e C forem conjuntos tais que $n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10, n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, então $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

a) formam uma progressão aritmética de razão 6.

b) formam uma progressão aritmética de razão 2.

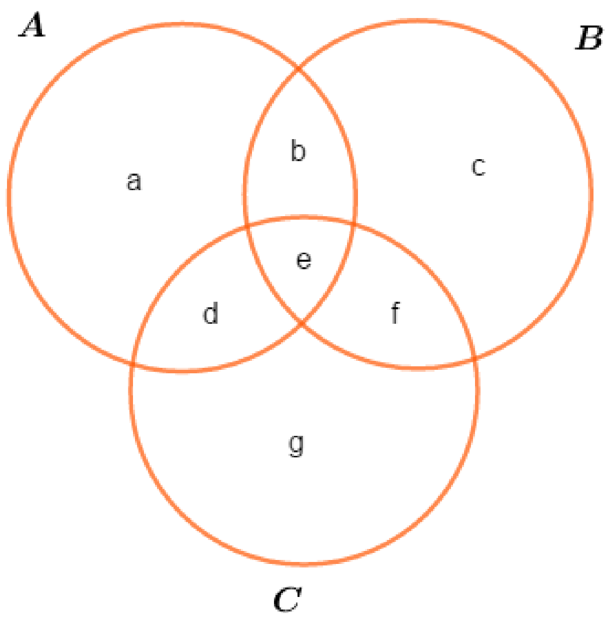
c) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.

d) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.

e) não formam uma progressão aritmética.

Comentários

Vamos resolver usando o Diagrama de Venn-Euler:



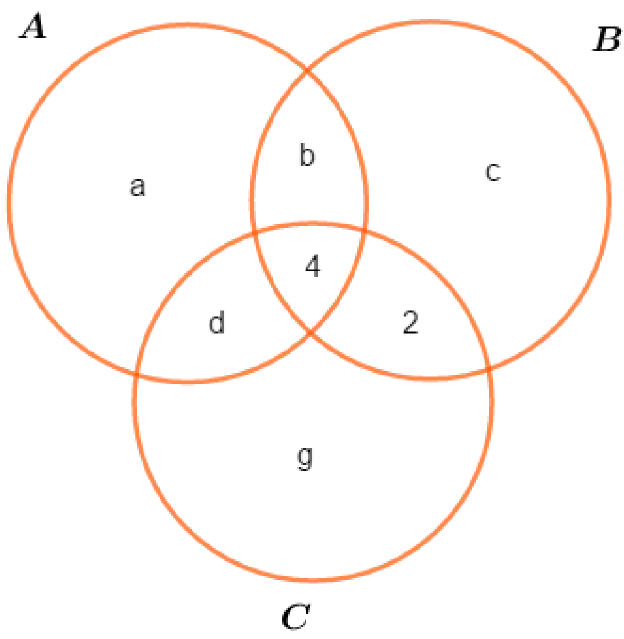
Nomeamos cada região do círculo com letras minúsculas.

Pelo enunciado, vamos descobrir os valores de cada região:

$$n(A \cap B \cap C) = 4 = e$$

$$n(B \cap C) = 6 = e + f \Rightarrow f = 2$$

Agora nosso diagrama fica assim:



Usando as outras informações, temos:

$$n(B-A)=12$$

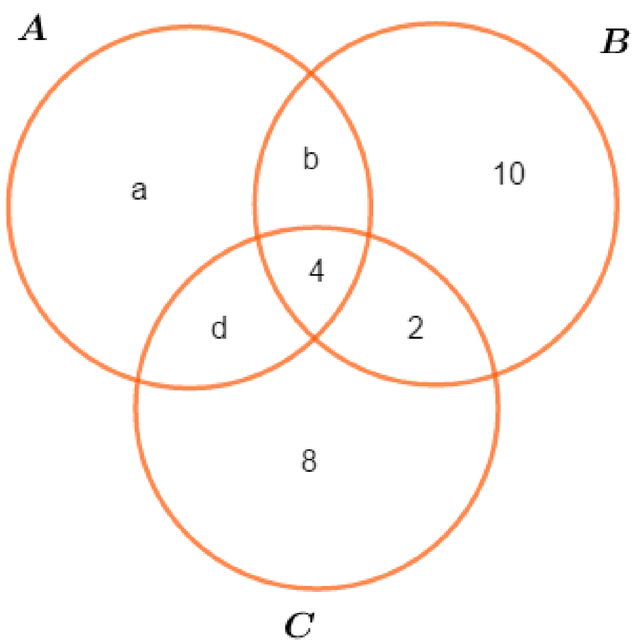
Veja que $n(B-A)$ é igual a $c+2$ que é a região de elementos de B menos os elementos de A.

$$n(B-A)=c+2=12\Rightarrow c=10$$

Agora para $n(C-A)=10$ usando o mesmo raciocínio:

$$g+2=10\Rightarrow g=8$$

Atualizando nosso diagrama:



Falta usar $n(A\cup B)=23$.

Pela figura:

$$n(A \cup B) = a + b + d + 4 + 10 + 2 = 23$$

Devemos encontrar os valores de $n(A), n(A \cup C)\ e\ n(A \cup B \cup C)$.

Note que $a + b + d + 4 = n(A)$. Assim, substituindo $n(A)$ na equação, conseguimos descobrir o valor de $n(A)$.

$$n(A) + 10 + 2 = 23$$

$$n(A) + 12 = 23$$

$$\Rightarrow n(A) = 11$$

Vamos encontrar $n(A \cup C)$. Usando o diagrama:

$$n(A \cup C) = a + b + d + 4 + 2 + 8 = (a + b + d + 4) + 10 = n(A) + 10 = 11 + 10 = 21$$

$$\Rightarrow n(A \cup C) = 21$$

Agora o último termo:

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + d + 4 + 10 + 2 + 8$$

$$= (a + b + d + 4) + 10 + 2 + 8 = n(A) + 20 = 31$$

$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 31$$

Dessa forma, encontramos a sequência:

$$\left(n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)\right)$$

$$(11, 21, 31)$$

Essa sequência é uma progressão aritmética de razão 10 $(a_2 - a_1 = 21 - 11 = 10)$ e último termo 31.

Gabarito: "d".

---

85. (ITA/2006)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

Comentários

Problema de PG infinita com razão r e $a_1 = a$.

A questão nos dá a soma dos termos de índices pares e também a soma dos termos de índices múltiplos de 3. Desse modo:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = 4$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \cdots = \frac{16}{13}$$

Perceba que podemos definir $(a_2, a_4, a_6, \dots)$ e $(a_3, a_6, a_9, \dots)$ como duas novas PG`s infinitas. Veja:

$$\begin{cases} a_4 = a_2 r^2 \\ a_6 = a_2 r^4 \\ a_8 = a_2 r^6 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow PG\ infinita\ de\ razão\ r^2\ e\ termo\ inicial\ a_2$$

$$\begin{cases} a_6 = a_3 r^3 \\ a_9 = a_3 r^6 \\ a_{12} = a_3 r^9 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow PG\ infinita\ de\ razão\ r^3\ e\ termo\ inicial\ a_3$$

Vamos usar a fórmula da soma de PG infinita nas duas PG`s e encontrar uma relação para a e r:

$$S_1 = \frac{a_2}{1-r^2} = \frac{a_1 r}{1-r^2} = \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

$$S_2 = \frac{a_3}{1-r^3} = \frac{a_1 r^2}{1-r^3} = \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13}$$

Fatorando S_1 e S_2:

$$S_1 = \frac{ar}{1-r^2} = 4 \Rightarrow \frac{ar}{(1-r)(1+r)} = 4$$

$$S_2 = \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13} \Rightarrow \frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)} = \frac{16}{13}$$

Vamos dividir $\frac{S_1}{S_2}$ para sumir com o termo a:

$$\frac{\frac{ar}{(1-r)(1+r)}}{\frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}} = \frac{4}{\frac{16}{13}}$$

$$\frac{ar}{ar^2} \frac{(1-r)(1+r+r^2)}{(1-r)(1+r)} = 4 \cdot \frac{13}{16}$$

$$\frac{\cancel{ar}}{\cancel{ar^2}} \frac{\cancel{(1-r)}(1+r+r^2)}{\cancel{(1-r)}(1+r)} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{1}{r} \frac{(1+r+r^2)}{(1+r)} = \frac{13}{4}$$

Desenvolvendo a equação:

$$4(1+r+r^2) = 13r(1+r)$$

$$4 + 4r + 4r^2 = 13r + 13r^2$$

$$4r^2 + 9r - 4 = 0$$

Encontramos uma equação de segundo grau, ainda estudaremos esse assunto mais a fundo nas próximas aulas.

Lembre-se: as raízes de uma equação de segundo grau dessa forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

É dado por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde\ \Delta = \mathrm{b}^2 - 4ac$$

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(9)(-4) = 81 + 144 = 225$$

$$r_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm 15}{18}$$

$$r_1 = \frac{-9 - 15}{18} = -\frac{4}{3}$$

$$r_2 = \frac{-9 + 15}{18} = \frac{1}{3}$$

O enunciado diz que a razão é positiva, logo $r = r_2 = \frac{1}{3}$.

Substituindo $r = 1/3$ em S_1 para encontrar a:

$$S_1 = \frac{ar}{1 - r^2} = 4$$

$$\frac{a\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 4$$

$$\frac{\left(\frac{a}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = 4$$

$$\frac{3a}{8} = 4$$

$$a = \frac{32}{3}$$

Vamos encontrar $a + r$:

$$a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Gabarito: $\boldsymbol{a + r = 11}$

---

86. (ITA/2005)

Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2,\ para\ n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Comentários

Temos uma PA infinita. A questão nos dá a fórmula do somatório de seus elementos em função de um $n \in \mathbb{N}$.

O somatório é a soma dos elementos a_{3k}, isso que dizer que ela é a soma dos elementos múltiplos de 3, isto é, $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_n$.

Vamos substituir os valores de n e encontrar alguma relação.

Para $n = 1$:

$$a_3 = 1 \cdot \sqrt{2} + \pi 1^2$$

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi$$

Para $n = 2$:

$$a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + \pi(2)^2 = 2\sqrt{2} + 4\pi$$

Substituindo a_3 na equação para encontrar a_6:

$$\sqrt{2} + \pi + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi$$

$$a_6 = \sqrt{2} + 3\pi$$

A forma geral dos elementos de uma PA é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

A questão pede a_1 e r.

Vamos encontrar a_3 em função de a_1 e r:

$$a_3 = a_1 + (3-1)r = a_1 + 2r$$

Fazendo o mesmo para a_6:

$$a_6 = a_1 + (6-1)r = a_1 + 5r$$

Encontramos as relações:

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi = a_1 + 2r$$

$$a_6 = \sqrt{2} + 3\pi = a_1 + 5r$$

Subtraindo a_6 e a_3:

$$a_6 - a_3 = \sqrt{2} + 3\pi - \left(\sqrt{2} + \pi\right) = a_1 + 5r - (a_1 + 2r)$$

$$2\pi = 3r$$

$$r = \frac{2\pi}{3}$$

Substituindo r em a_3 para encontrar a_1:

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi = a_1 + 2r$$

$$\sqrt{2} + \pi = a_1 + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{2} + \pi = a_1 + \frac{4\pi}{3}$$

$$a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: $r = \frac{2\pi}{3}$ **e** $a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$

---

87. (ITA/2003)

Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V a.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \dots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \dots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante

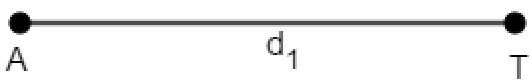
$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k$$

da corrida.

Verifique que os termos $t_k, k = 1, 2, 3, \dots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

Comentários

A situação inicial do problema diz que a tartaruga começa a uma distância d_1 de Aquiles, conforme a figura:



Da cinemática, como não temos aceleração, sabemos que esse problema trata de movimento uniforme e desse modo a equação do espaço é dado por:

$$\Delta S = v \cdot t$$

ΔS é a distância que separa os corpos A e T

v é a velocidade

t é o tempo

O tempo que Aquiles demora para percorrer d_1 será:

$$d_1 = v_A t_1$$

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A}$$

Mas até Aquiles percorrer d_1, a tartaruga continuou correndo e percorreu d_2. Essa distância em função dos dados da tartaruga é:

$$d_2 = v_T t_1$$

Substituindo t_1 na equação:

$$d_2 = \frac{v_T d_1}{v_A}$$

Agora Aquiles deve percorrer d_2 para alcançar a tartaruga:

$$d_2 = v_A t_2$$

$$t_2 = \frac{d_2}{v_A}$$

Substituindo d_2 encontrado com os dados da tartaruga nessa equação para obter t_2:

$$t_2 = \frac{\left(\frac{v_T d_1}{v_A}\right)}{v_A} = \frac{v_T d_1}{v_A^2}$$

A tartaruga continuou correndo e está a d_3 de distância de Aquiles:

$$d_3 = v_T t_2 = \frac{v_T^2 d_1}{v_A^2}$$

Aquiles demora t_3 para percorrer d_3:

$$t_3 = \frac{d_3}{v_A} = \frac{v_T^2 d_1}{v_A^3}$$

Perceba o padrão no formato do tempo:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A}$$

$$t_2 = \frac{v_T d_1}{v_A^2}$$

$$t_3 = \frac{v_T^2 d_1}{v_A^3}$$

Repare que a diferença entre um termo e outro é a razão $q = \frac{v_T}{v_A}$, isso é uma PG. Se continuássemos as calcular os termos, encontraríamos a forma geral:

$$t_n = t_1 q^{(n-1)}$$

$$t_n = \left(\frac{d_1}{v_A}\right)\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1}$$

$$t_n = \frac{d_1}{v_A}\frac{v_T^{n-1}}{v_A^{n-1}}$$

$$t_n = \frac{v_T^{n-1}}{v_A^n} d_1$$

Como $v_A > v_T$, temos $q = \frac{v_T}{v_A} < 1$. Assim, encontramos uma PG de razão $0 < q < 1$. Isso é uma PG infinita.

A soma será dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{t_1}{1 - \frac{v_T}{v_A}}$$

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A} \rightarrow S = \frac{\left(\frac{d_1}{v_A}\right)}{\frac{v_A - v_T}{v_A}} = d_1/v_A$$

$$S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$$

$v_A - v_T$ é a velocidade relativa de Aquiles em relação à tartaruga e d_1 é a distância que separava os dois no começo da corrida. Então, S é o tempo que Aquiles demora para alcançar a tartaruga.

Gabarito: $S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$ e S é o tempo que Aquiles demora para alcançar a tartaruga.

---

88. (ITA/2002)

Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e responda, justificando:

Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

Comentários

Perceba que A_n é a soma da PA. A soma da PA é dada pela fórmula:

$$A_n = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Vamos substituir essa fórmula nos números pedidos:

$$\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$$

$$\left(\frac{\left(\frac{(a_1 + a_n)n}{2}\right)}{n} - a_n\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{(a_1 + a_n)n}{2n}\right) - a_n\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{(a_1 + a_n)}{2}\right) - a_n\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_n}{2}-a_n\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_n}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2=\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2$$

$$\left(\frac{\left(\frac{(a_1+a_n)n}{2}\right)}{n}\right)^2-a_n^2$$

$$\left(\frac{(a_1+a_n)n}{2n}\right)^2-a_n^2$$

$$\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2-a_n^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2-a_n^2$$

Para saber qual é maior, vamos subtrair os termos e ver se encontramos um número positivo ou negativo. Caso seja positivo, o primeiro termo será maior. Caso contrário, o segundo termo será maior. Perceba os termos elevados ao quadrado, não precisamos desenvolvê-los. Vamos usar produtos notáveis para simplificar os cálculos.

$$\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2-\left(\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2\right)$$

$$\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2-a_n^2\right)$$

$$\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)^2-\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)^2+a_n^2$$

Fatorando os termos coloridos:

$$\left[\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)-\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{a_1-a_n}{2}\right)+\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\right]+a_n^2$$

Simplificando:

$$\left(\frac{a_1-a_n-a_1-a_n}{2}\right)\left(\frac{a_1-a_n+a_1+a_n}{2}\right)+a_n^2$$

$$\left(\frac{-2a_n}{2}\right)\left(\frac{2a_1}{2}\right)+a_n^2$$
$$(-a_n)(a_1)+a_n^2$$

Colocando a_n em evidência, obtemos:

$$a_n(a_n-a_1)$$

O enunciado afirma que os termos são positivos e a razão também. Portanto:

$$a_n=a_1+(n-1)r>a_1$$
$$a_n>a_1$$
$$a_n(a_n-a_1)>0$$

Assim, provamos que o termo azul é maior que o termo verde.

$$\therefore \left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2>\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2, \forall n\in\mathbb{N}$$

Gabarito: $\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2>\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-a_n^2, \forall n\in\mathbb{N}$

---

89. (ITA/2000)

O valor de n que torna a sequência

$$2+3n, -5n, 1-4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

a) $[-2,-1]$.

b) $[-1,0]$.

c) $[0,1]$.

d) $[1,2]$.

e) $[2,3]$.

Comentários

Vamos usar a propriedade da Média Aritmética:

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$$

Dos dados da questão:

$$a_1=2+3n$$
$$a_2=-5n$$
$$a_3=1-4n$$

Substituindo os dados na propriedade:

$$2(-5n)=(2+3n)+(1-4n)$$
$$-10n=3-n$$

$$-9n = 3$$

$$n = -\frac{1}{3}$$

$$-1 < -\frac{1}{3} < 0$$

$$\therefore n \in [-1, 0]$$

Gabarito: "b".

---

90. (ITA/1998)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1, 0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $8/27$

b) $20/27$

c) $26/27$

d) $30/27$

e) $38/27$

Comentários

Temos uma PG de razão $q = a_1$ com $0 < a_1 < 1$. A soma da PG infinita é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

O problema diz que $S = 3a_1$.

Substituindo os termos na fórmula, obtemos:

$$3a_1 = \frac{a_1}{1 - a_1}$$

$$3 = \frac{1}{1 - a_1}$$

$$1 - a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$q = a_1 = \frac{2}{3}$$

A soma dos três primeiros termos da PG será:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_3 = \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 1\right)}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\left(\frac{8}{27}\right) - 1\right)}{-\frac{1}{3}}$$

$$S_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{19}{27}\right)}{-\frac{1}{3}}$$

$$S_3 = \frac{38}{27}$$

Gabarito: "e".

---

91. (ITA/1995)

Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por $0,3: 0,03: 0,003: \dots$ é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:

a) $1/3$

b) $2/3$

c) 1

d) 2

e) $1/2$

Comentários

Vamos calcular a soma dos termos da progressão geométrica $(0{,}3; 0{,}03; 0{,}003; \dots)$. Essa PG possui razão $q = 0{,}1 \Rightarrow |q| < 1$. Logo, sua soma é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}3 \\ q = 0{,}1 \end{cases}$$

$$S = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$

A soma que obtemos é o termo médio de uma PA com três termos:

$$\left(a_1, \frac{1}{3}, a_3\right)$$

A soma da PA é dada por:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

Das propriedades da PA, temos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3$$

Sabemos que $a_2 = 1/3$.

$$a_1 + a_3 = 2a_2 = \frac{2}{3}$$

Desse modo:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = (a_1 + a_3) + a_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Temos uma PG de razão $q = a_1$ com $0 < a_1 < 1$. A soma da PG infinita é dada por:

Gabarito: "c".

---

92. (ITA/1994)

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a 2^{25} e o termo do meio é 2^5. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, então:

a) $a_1 + q = 16$

b) $a_1 + q = 12$

c) $a_1 + q = 10$

d) $a_1 + q + n = 20$

e) $a_1 + q + n = 11$

Comentários

Segundo o enunciado, o produto dos termos da PG é:

$$P_n = 2^{25}$$

A fórmula do produtório dos termos da PG é dado por:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Então temos:

$$a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{25}$$

Podemos reescrever a equação dessa forma:

$$a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = a_1^n \left(q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = \left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n$$

$$\left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = 2^{25}$$

A questão diz que a PG possui um número ímpar de termos e que o termo do meio é 2^5.

Vamos usar essas informações.

Veja que se n é ímpar, então $n+1$ é par e $\frac{n+1}{2}$ será o índice do termo do meio.

ESCLARECENDO

Tome como exemplo a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Nesse caso, para $n = 5$, temos a_5 e o índice do termo do meio é $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ que é a_3.

Analisando a equação:

$$\left(a_1 q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = 2^{25}$$

A razão pode ser reescrita dessa forma:

$$q^{\frac{n-1}{2}} = q^{\frac{n+1-2}{2}} = q^{\frac{n+1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow \left(a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^n = 2^{25}$$

Usando o termo geral para o termo do meio da PG:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}$$

Do enunciado temos o valor do termo do meio, vamos substituir na equação:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = 2^5$$

$$\left(a_1 q^{\frac{n+1}{2}-1}\right)^n = 2^{25}$$

$$(2^5)^n = 2^{25}$$

$$2^{5n} = 2^{25}$$

$$5n = 25 \Rightarrow n = 5$$

Portanto, a PG possui 5 termos.

A última informação do enunciado diz que a soma dos $n-1$ termos da PG é $2(1+q)(1+q^2)$. Então, usando a fórmula da soma da PG finita:

$$S_{n-1} = \frac{a_1(q^{n-1}-1)}{q-1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

Substituindo $n = 5$:

$$S_4 = \frac{a_1(q^{5-1}-1)}{q-1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

$$\frac{a_1(q^4-1)}{q-1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

Podemos fatorar a expressão da esquerda:

$$\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{a_1(q^2+1)(q^2-1)}{q-1}=\frac{a_1(q^2+1)(q+1)(q-1)}{q-1}$$

Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{a_1(q^2+1)(q+1)(q-1)}{q-1}=2(q+1)(q^2+1)$$

Perceba que os termos coloridos se cancelam. Dessa forma:

$$\frac{a_1\cancel{(q^2+1)}\cancel{(q+1)}\cancel{(q-1)}}{\cancel{(q-1)}}=2\cancel{(q+1)}\cancel{(q^2+1)}$$

$$a_1=2$$

Substituindo $a_1=2$ no termo do meio:

$$a_3=a_1q^2=2^5$$

$$2q^2=2^5\Rightarrow q^2=2^4$$

$$q=2^2=4$$

Observando as alternativas, vemos que:

$$a_1+q+n=2+4+5=11$$

Gabarito: “e”.

---

93. (IME/2019)

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

Comentários

Precisamos mostrar que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG. A única condição é que os termos dessa PG sejam número naturais. Vamos supor que essa PG seja crescente de razão $q\in\mathbb{Q}$ e ver se encontramos uma PG com esses números.

$$\left(a_0,a_1,\dots,\underbrace{16}_{a_i},\dots,\underbrace{24}_{a_j},\dots,\underbrace{81}_{a_k},\dots,a_n\right)\ PG\ de\ razão\ q>0$$

Da relação dos termos da PG:

$$\begin{cases}a_j=a_i\cdot q^{j-i}\\a_k=a_j\cdot q^{k-j}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{24}{16}=q^{j-i}\ \ (1)\\\dfrac{81}{24}=q^{k-j}\ \ (2)\end{cases},com\ i,j,k\in\mathbb{N}$$

Simplificando a relação (1), obtemos:

$$\frac{24}{16}=q^{j-i}\Rightarrow q^{j-i}=\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^1$$

Sendo $q\in\mathbb{Q}$ e $i,j\in\mathbb{N}$, devemos ter:

$$\boxed{q = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{j - i = 1}$$

Para a relação (2):

$$\frac{81}{24} = q^{k-j} \Rightarrow q^{k-j} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

Aqui, podemos ter:

$$q = \frac{27}{8} \text{ e } k - j = 1 \text{ ou } q = \frac{3}{2} \text{ e } k - j = 3$$

Das condições das relações (1) e (2), concluímos que:

$$\begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ j - i = 1 \\ k - j = 3 \end{cases}$$

Desse modo:

$$j = i + 1$$

$$k = j + 3 = i + 4$$

A PG é do seguinte tipo:

$$\left(a_0, a_1, \dots, \underbrace{16}_{a_i}, \underbrace{24}_{a_{i+1}}, a_{i+2}, a_{i+3}, \underbrace{81}_{a_{i+4}}, \dots, a_n\right)$$

Vamos calcular a_{i+2} e a_{i+3}:

$$a_{i+2} = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 36$$

$$a_{i+3} = 36 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 54$$

$$\boxed{(a_0, a_1, \dots, 16, 24, 36, 54, 81, \dots, a_n)}$$

Supondo que exista o termo a_{i-1}, devemos ter:

$$a_i = a_{i-1} \cdot q \Rightarrow a_{i-1} = \frac{16}{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3} \notin \mathbb{N}$$

Como a_{i-1} não é um número natural, podemos concluir que 16 é o termo inicial da PG e, assim, $i = 1$:

$$(16, 24, 36, 54, 81, a_6, \dots, a_n)$$

Resta verificar se existe a_6:

$$a_6 = 81 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{243}{2} \notin \mathbb{N}$$

a_6 não é um número natural, logo, $a_5 = 81$ é o último termo da PG.

Portanto, a PG possui 5 termos.

Gabarito: 5 termos

---

94. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

Comentários

Como os ângulos estão em PA, podemos encontrar a expressão que representa o somatório usando a fórmula da soma da PA.

Lembrando que essa fórmula é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Temos:

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} \theta_i = \frac{(\theta_1 + \theta_{100})100}{2} = 50(\theta_1 + \theta_{100})$$

O bizu nessa questão é perceber que os termos $\underbrace{\theta_1 + \theta_{100}}_{1+100=101} = \underbrace{\theta_{11} + \theta_{90}}_{11+90=101} = \underbrace{\theta_{26} + \theta_{75}}_{26+75=101}$ são equidistantes. Assim, usando a propriedade dos termos equidistantes de uma PA:

$$\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$$

$$\underbrace{\theta_{11} + \theta_{90}}_{\theta_1 + \theta_{100}} + \underbrace{\theta_{26} + \theta_{75}}_{\theta_1 + \theta_{100}} = \frac{\pi}{4}$$

$$2(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{8}}$$

Então, o valor que queremos calcular é:

$$sen\left(\sum_{i=1}^{100}\theta_i\right) = sen(50(\theta_1+\theta_{100})) = sen\left(\frac{50\pi}{8}\right) = sen\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \boxed{sen\left(\sum_{i=1}^{100}\theta_i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Gabarito: "d".

---

95. (IME/2017)

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3, a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

Do enunciado, temos:

$$a_1 + b_2 = 3 \quad (I)$$
$$a_4 + b_3 = 26 \quad (II)$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \text{ é PA} \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$
$$(b_1, b_2, b_3, \dots) \text{ é PG} \Rightarrow b_2 = b_1 q \text{ e } b_3 = b_1 q^2$$

Reescrevendo as equações, obtemos:

$$a_1 + b_1 q = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - b_1 q \quad (I)$$
$$(a_1 + 3r) + b_1 q^2 = 26 \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$(3 - b_1 q + 3r) + b_1 q^2 = 26$$
$$3r + b_1 q^2 - b_1 q = 26 - 3$$
$$3r + b_1 q(q-1) = 23 \quad (III)$$

A PA e a PG da questão possuem termos inteiros e r e q também são inteiros.

A questão nos dá uma desigualdade para q e b_1. Repare que temos $b_1 q(q-1)$ na equação (III). Vamos tentar encontrar alguma relação usando essas desigualdades.

Como q é inteiro, podemos escrever:

$$q > 2 \Rightarrow q \geq 3$$

$$q - 1 \geq 3 - 1 \Rightarrow q - 1 \geq 2$$

b_1 também é inteiro:

$$b_1 > 0 \Rightarrow b_1 \geq 1$$

Das propriedades da desigualdade de números inteiros, podemos multiplicar os termos e encontrar uma nova desigualdade:

$$b_1 \geq 1$$

$$q \geq 3$$

$$q - 1 \geq 2$$

$$b_1 q(q - 1) \geq 1 \cdot 3 \cdot 2$$

$$b_1 q(q - 1) \geq 6 \quad (IV)$$

Da equação (III):

$$3r + b_1 q(q - 1) = 23$$

$$b_1 q(q - 1) = 23 - 3r$$

Dessa forma, encontramos as seguintes relações:

$$\begin{cases} b_1 q(q - 1) \geq 6 \\ b_1 q(q - 1) = 23 - 3r \end{cases}$$

Combinando as duas, obtemos:

$$23 - 3r \geq 6$$

$$23 - 6 \geq 3r$$

$$17 \geq 3r$$

$$3r \leq 17$$

Sabemos que r é inteiro positivo. Vamos ver quais valores de r podemos ter com essa desigualdade.

$3r$ deve ser menor ou igual a 17.

$r = 6$ já não satisfaz essa condição, pois $3r = 3 \cdot 6 = 18 > 17$.

$r = 5 \Rightarrow 3r = 15 < 17$

$r = 5$ satisfaz a condição, então r deve ser menor ou igual a 5, ou seja, $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Agora temos valores plausíveis para r, vamos substituir esses valores na equação (III):

$$3r + b_1 q(q - 1) = 23 \quad (III)$$

$$b_1 q(q - 1) = 23 - 3r$$

a) $r = 5$

$$b_1 q(q - 1) = 23 - 3 \cdot 5$$

$$b_1 q(q - 1) = 8 = 2^3$$

Note que $q(q - 1)$ é um produto de inteiros consecutivos já que q é inteiro positivo.

$b_1 q(q-1) = 2 \cdot 2 \cdot 2$ é produto de inteiros iguais e $q \geq 3$. Não podemos ter q e $q-1$ que satisfaz essas condições.

b) $r = 4$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 4$$
$$b_1 q(q-1) = 11$$

b_1 é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$q \geq 3$

11 é um número primo e não é produto de inteiros consecutivos

Não temos valores para b_1, q que satisfaz essas condições.

c) $r = 3$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 3$$
$$b_1 q(q-1) = 14 = 2 \cdot 7$$

b_1 é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

Se $q = 2$ e $b_1 = 7$, teríamos $b_1 q(q-1) = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$

Mas $q \geq 3$, então $q = 2$ não é possível.

Logo, não temos valores para b_1, q que satisfaz essas condições.

d) $r = 2$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 2$$
$$b_1 q(q-1) = 17$$

b_1 é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$q \geq 3$

17 é um número primo e não é produto de inteiros consecutivos.

Não temos valores para b_1, q que satisfaz essas condições.

e) $r = 1$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 1$$
$$b_1 q(q-1) = 20 = 4 \cdot 5$$

b_1 é inteiro

$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$q \geq 3$

20 é produto de inteiros consecutivos

Se $q = 5$ e $b_1 = 1$:

$$b_1 q(q-1) = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Para $r = 1$, temos valores para b_1 e q que satisfazem o problema.

$$\therefore b_1 = 1$$

Gabarito: "a".

---

96. (IME/2016)

Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

Comentários

Se a_1, a_2, a_{10} estão em PG nessa ordem, então das propriedades da PG, podemos escrever:

$$a_2^2 = a_1 a_{10}$$

Como $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ estão em PA com razão $r \neq 0$, podemos escrever esses termos em função do primeiro termo e da razão r:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + r$$

$$a_{10} = a + 9r$$

$$(a+r)^2 = a(a+9r)$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 9ar$$

$$r^2 = 7ar$$

$$r \neq 0 \Rightarrow r = 7a$$

a_6, a_j, a_{25} também estão em PG $\Rightarrow a_j^2 = a_6 a_{25}$

Escrevendo a_6 e a_{25} em função de a e r:

$$a_6 = a + 5r$$

$$a_{25} = a + 24r$$

Substituindo $r = 7a$ nos termos:

$$a_6 = a + 5(7a) = 36a$$

$$a_{25} = a + 24(7a) = 169a$$

Encontrando uma relação para a_j:

$$a_j^2 = a_6 a_{25} = 36a \cdot 169a = 6^2 \cdot 13^2 \cdot a^2$$

$$a_j = \pm 6 \cdot 13 \cdot a$$

$$a_j = \pm 78a$$

Vamos testar os valores encontrados para a_j:

$$a_j = a + (j-1)r = a + (j-1)7a = a(7j-6)$$

I) $a_j = -78a$

$$-78a = a(7j-6)$$
$$-78 = 7j - 6$$
$$7j = -72$$
$$j < 0$$

j é o índice do termo da PA, logo não pode ser negativo.

II) $a_j = 78a$

$$78a = a(7j-6)$$
$$78 = 7j - 6$$
$$7j = 84$$
$$j = 12$$

Esse valor satisfaz as condições do problema.

$$\therefore j = 12$$

Gabarito: $j = 12$

---

97. (IME/2015)

A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

Comentários

Temos uma PA cuja soma é 244. Seja a_1, o primeiro termo, r, a razão e n, o número de termos, podemos escrever:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(a_1 + (a_1 + (n-1)r)\big)n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = 244$$

Do enunciado, (a_1, r, n) é uma PA de razão $r' = 1$. Então, vamos escrever as relações dessa PA:

$$r = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = r - 1$$

$$n = r + 1$$

Substituindo r, n na equação da soma para descobrir o valor de a_1:

$$\frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = 244$$

$$\frac{\{2(r-1) + [(r+1) - 1]r\}(r+1)}{2} = 244$$

Simplificando a equação:

$$\{2(r-1) + r^2\}(r+1) = 488$$

$$(r^2 + 2r - 2)(r+1) = 488$$

$$r^3 + 2r^2 - 2r + r^2 + 2r - 2 = 488$$

$$r^3 + 3r^2 - 490 = 0$$

Temos que descobrir as raízes dessa equação. Vamos isolar o número 490 no outro lado da igualdade:

$$r^3 + 3r^2 = 490$$

$$r^2(r+3) = 490$$

Note que $490 = 49 \cdot 10$.

49 é um quadrado perfeito e pode ser escrito na forma 7^2.

$$r^2(r+3) = 49 \cdot 10 = 7^2 \cdot 10$$

$$r^2(r+3) = 7^2 \cdot 10$$

Vamos ver se $r = 7$ é raiz, substituindo na equação acima:

$$7^2(7+3) = 7^2 \cdot 10$$

$$7^2 10 - 7^2 10 = 0$$

$\therefore r = 7$ é raiz

Para encontrar as outras raízes, podemos aplicar o Algoritmo de Briot-Ruffini (ainda estudaremos esse assunto na aula de Polinômios). Veja:

	1	3	0	-490
7	1	10	70	

Então, obtemos a seguinte equação:

$$r^3 + 3r^2 - 490 = (r-7)(r^2 + 10r + 70) = 0$$

Calculando o delta da equação quadrática:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 70 = -180 < 0$$

Portanto, a equação quadrática não possui raízes reais.

O único r que satisfaz o problema é $r = 7$.

(Todos os assuntos que não foram estudados ainda serão vistos futuramente, então não se preocupe se você não entendeu alguma etapa).

Gabarito: "a".

---

98. (IME/2014)

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{\mathbf{370370\ldots037}}_{89\ algarismos} - \underbrace{\mathbf{11\ldots1}}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{\mathbf{00\ldots0}}_{30\ algs\ "0"}}$$

Obs.: algs = algarismos

Comentários

Vamos simplificar a expressão.

Para o primeiro termo, temos:

$$\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} = \underbrace{370370370370\ldots37037}_{89\ algarismos}$$

Vamos escrever esse número em potências de 10:

$$370370370370\ldots37037 = 37\cdot10^{87} + 37\cdot10^{84} + 37\cdot10^{81} + \cdots + 37\cdot10^{3} + 37\cdot10^{0}$$

Perceba que escrevendo dessa forma, obtemos uma PG finita cujo primeiro termo é $a_1 = 37$ e razão é $q = 10^3$.

Podemos aplicar a fórmula para soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Vamos calcular o número de termos dessa PG.

Pela forma da PG, podemos escrever:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = 37\cdot10^{87} = 37\cdot(10^3)^{n-1}$$

$$37\cdot10^{87} = 37\cdot10^{3(n-1)}$$

$$3(n-1) = 87$$

$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

$$n = 30$$

Logo, a PG possui 30 termos.

Substituindo as variáveis na fórmula da soma, obtemos:

$$S_{30} = \frac{37((10^3)^{30} - 1)}{10^3 - 1}$$

Simplificando:

$$S_{30}=\frac{37(10^{90}-1)}{1000-1}=\frac{10^{90}-1}{\frac{999}{37}}=\frac{10^{90}-1}{27}$$

Vamos reescrever o segundo termo e colocá-lo em função de potências de 10:

$$\underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}=\underbrace{(10^{29}+10^{28}+10^{27}+\cdots+10^{1}+10^{0})}_{PG\ de\ razão\ q=10\ e\ n=30}\cdot 10^{30}$$

$$10^{29}+10^{28}+10^{27}+\cdots+10^{1}+10^{0}=\frac{10^{0}(10^{30}-1)}{10-1}=\frac{10^{30}-1}{9}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}=\frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}$$

Dessa forma, temos que calcular o valor da seguinte expressão:

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos}-\underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}}=\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27}-\frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}}$$

Podemos fatorar o termo $10^{90}-1$ usando a fatoração clássica:

$$10^{90}-1=(10^{30}-1)(10^{60}+10^{30}+1)$$

Substituindo na expressão e simplificando:

$$\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27}-\frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)(10^{60}+10^{30}+1)}{27}-\frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}}=$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{(10^{60}+10^{30}+1)}{27}-\frac{10^{30}}{9}\right]}=$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{(10^{60}+10^{30}+1)}{27}-\frac{3\cdot10^{30}}{27}\right]}=$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{10^{60}+10^{30}+1-3\cdot10^{30}}{27}\right]}=$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{10^{60}-2\cdot10^{30}+1}{27}\right]}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)(10^{30}-1)^{2}}{3^{3}}}=\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)^{3}}{3^{3}}}=$$

$$\frac{10^{30}-1}{3}=\frac{1}{3}\underbrace{999\ldots 9}_{30\ algs}=$$

$$\underbrace{333\ldots 3}_{30\ algs}$$

Gabarito: $\underbrace{\mathbf{333\ldots 3}}_{\mathbf{30\ algs}}$

---

99. (IME/2014)

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) 1

Comentários

Temos uma PA crescente e a questão nos dá a soma dos três termos consecutivos S_1 e a soma de seus quadrados S_2. Vamos representar a PA dessa forma:

$$(a-r, a, a+r)$$

Assim, podemos escrever:

$$S_1 = (a-r) + a + (a+r) = 3a$$

$$S_1 = 3a$$

$$S_2 = (a-r)^2 + a^2 + (a+r)^2$$

$$S_2 = a^2 - 2ar + r^2 + a^2 + a^2 + 2ar + r^2$$

$$S_2 = 3a^2 + 2r^2$$

Os dois maiores termos da PA são a e $a+r$ e são também raízes da equação:

$$x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Substituindo S_1 e S_2:

$$x^2 - 3ax + \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Estudaremos relações de Girard na aula de Expressões Algébricas. Das relações de Girard, podemos escrever:

$$a'x^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a'}$$

$$a + (a + r) = -\frac{-3a}{1} = 3a$$

$$r = a$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a'}$$

$$a(a + r) = \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 + ar = 3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}$$

Substituindo $r = a$, na equação acima:

$$a^2 + aa = 3a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}$$

$$2a^2 = 3a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}$$

$$3a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{6}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} = r$$

Como a PA é crescente, temos $r = \sqrt{6}/6$.

Gabarito: "b".

---

100. (IME/2013)

Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão r e q, respectivamente, onde r e q são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é

a) 12

b) 48

c) 66

d) 99

e) 129

Comentários

Do enunciado podemos extrair as seguintes informações:

$$\underbrace{(3, \dots, 192)}_{n\ termos} \text{ PA de razão } r \in \mathbb{Z}$$

$$\underbrace{(3, \dots, 192)}_{n\ termos} \text{ PG de razão } q \in \mathbb{Z}$$

O terceiro termo de $\left(1+\frac{1}{q}\right)^8$ em potências crescentes de $\frac{1}{q}$ é $\frac{r}{9q}$.

Não se preocupe se você não entendeu essa parte do problema, isso será explicado detalhadamente na aula de Análise Combinatória. Para resolver essa parte precisamos do conhecimento da Fórmula do Binômio de Newton.

A Fórmula do Binômio de Newton pode ser escrita como:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

$\binom{n}{p}$ é chamado de número binomial n sobre p:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$n!$ é chamado de fatorial do número n.

Voltando ao problema, podemos escrever:

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^8 = \binom{8}{0}1^8 + \binom{8}{1}1^{8-1}\left(\frac{1}{q}\right) + \binom{8}{2}1^{8-2}\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \dots + \binom{8}{8}\left(\frac{1}{q}\right)^8$$

O terceiro termo dessa expansão em potências crescentes de $1/q$ é:

$$\binom{8}{2}1^{8-2}\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \binom{8}{2}1^6\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{8!}{2!\,6!}\left(\frac{1}{q^2}\right) = \frac{28}{q^2}$$

A questão afirma:

$$\frac{28}{q^2} = \frac{r}{9q} \rightarrow qr = 9 \cdot 28 = 3^2 2^2 7$$

Da PA, podemos escrever:

$$192 = 3 + (n-1)r$$

$$(n-1)r = 189$$

Da PG:

$$192 = 3q^{n-1}$$

$$64 = q^{n-1}$$

$$2^6 = q^{n-1}$$

Como q é um número inteiro, q deve ser múltiplo de 2. $n-1$ é um número natural, então podemos ter os seguintes casos possíveis:

$$q = 2 \ e \ n-1 = 6 \ (I)$$

$$q = 4 \; e \; n - 1 = 3 \; (II)$$
$$q = 8 \; e \; n - 1 = 2 \; (III)$$

Vamos testar esses casos na condição da PA:

$$(n-1)r = 189$$
$$r = \frac{189}{n-1}$$

r também é um número inteiro, então 189 deve ser divisível por $n-1$.

Note que 189 não possui o número 2 como fator, logo ele não é divisível por números com fator 2. Dessa condição, apenas a (II) não possui 2 como fator. 189 é divisível por 3, pois seus algarismos somados são divisíveis por 3 $(1+8+9=18)$.

Assim, $n-1=3 \rightarrow r = \frac{189}{3} \rightarrow r = 63$.

O segundo termo da PA é dado por:

$$a_2 = 3 + r = 3 + 63 = 66$$

Gabarito: "c"

101.(IME/2012)

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão r, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão q, com $q \; e \; r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão r;

b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

Comentários

a) Do enunciado:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ PA de razão } r \in \mathbb{N}^*$$
$$(a_2, a_7, a_{27}) \text{ PG de razão } q \in \mathbb{N}^*$$

Das propriedades da PG, podemos escrever:

$$a_7^2 = a_2 a_{27}$$

Usando as definições de PA, podemos reescrever os seus termos:

$$a_7 = a_2 + 5r$$
$$a_{27} = a_2 + 25r$$

Substituindo esses valores na equação, obtemos:

$$(a_2 + 5r)^2 = a_2(a_2 + 25r)$$
$$a_2^2 + 10a_2 r + 25r^2 = a_2^2 + 25a_2 r$$
$$25r^2 - 15a_2 r = 0$$
$$5r^2 - 3a_2 r = 0$$

$$r(5r - 3a_2) = 0$$

$$r \in \mathbb{N}^* \to r \neq 0$$

$$5r - 3a_2 = 0 \to r = \frac{3a_2}{5}$$

a_2 é um número inteiro conforme a questão e r é um número natural diferente de zero.

O problema pede o menor valor possível para r. r será mínimo quando a_2 for mínimo, então para r ser natural, devemos ter $a_2 = 5$. O que implica $r = 3$.

b) Para a condição do item (a), temos:

$$a_{18} = a_2 + 16r$$

$$a_{18} = 5 + 16(3)$$

$$a_{18} = 53$$

Gabarito: a) $r = 3$ b) $a_{18} = 53$

102.(IME/2010)

Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 79^2$. O valor de S satisfaz:

a) $S < 7x10^4$

b) $7x10^4 \leq S < 8x10^4$

c) $8x10^4 \leq S < 9x10^4$

d) $9x10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

Comentários

Nessa questão, você deve se lembrar que na aula de Álgebra Elementar, na lista de exercícios, demonstramos que a seguinte relação é válida:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

É normal não ter memorizado essa fórmula, então, vamos aprender a deduzi-la. Sabendo que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, temos:

$$1^3 = 1^3$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (1+2)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$4^3 = (1+3)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 3^2 + 3^3$$

$$\vdots$$

$$n^3 = \left(1 + (n-1)\right)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (n-1) + 3 \cdot 1 \cdot (n-1)^2 + (n-1)^3$$

Somando todas essas equações, obtemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$$
$$= n \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \big(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\big) + 3 \cdot 1 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$$
$$+ (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3)$$

Vamos definir $X = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Note que os termos em vermelho se eliminam. A soma dos termos em azul é a soma de uma PA de razão 1 e a soma verde é a soma $X - n^2$. Assim, podemos escrever:

$$n^3 = n + \frac{3\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} + 3(X - n^2)$$

Isolando X:

$$n^3 = n + \frac{3n(n-1)}{2} + 3X - 3n^2$$
$$2n^3 = 2n + 3n^2 - 3n + 6X - 6n^2$$
$$2n^3 = 6X - n - 3n^2$$
$$6X = 2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$$

Portanto, encontramos a fórmula para a soma dos naturais elevados ao quadrado:

$$X = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vamos voltar à resolução da questão:

Perceba que S é a soma dos números naturais ímpares elevados ao quadrado.

Para calcular $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 79^2$, precisamos completar a soma com os números pares.

Podemos reescrever a soma da seguinte forma:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \cdots + 78^2)$$
$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - ((2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + \cdots + (2 \cdot 39)^2)$$
$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - (2^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + \cdots + 2^2 \cdot 39^2)$$
$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 39^2)$$

Sabendo que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Temos:

$$S = \frac{79(79+1)(2 \cdot 79 + 1)}{6} - \frac{4\big(39(1+39)(2 \cdot 39 + 1)\big)}{6}$$
$$S = \frac{79 \cdot 80 \cdot 159}{6} - \frac{4(39 \cdot 40 \cdot 79)}{6}$$

Simplificando:

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 53 - 2 \cdot 13 \cdot 40 \cdot 79$$

Perceba que temos os termos $79 \cdot 40$ nos dois números acima. Vamos fatorar:

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 53 - 26 \cdot 40 \cdot 79$$

$$S = 79 \cdot 40 \cdot (53 - 26)$$

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 27$$

Agora, podemos calcular o valor de S:

$$S = 85320$$

S é um número entre 80000 e 90000.

$$\therefore \boxed{8x10^4 \leq S < 9x10^4}$$

Atenção! Sempre que você puder, você deve fatorar os números para facilitar o cálculo.

Gabarito: "c".

103.(IME/2010)

A quantidade k de números naturais positivos, menores do que 1000, que não são divisíveis por 6 ou 8, satisfaz a condição:

a) $k < 720$

b) $720 \leq k < 750$

c) $750 \leq k < 780$

d) $780 \leq k < 810$

e) $k \geq 810$

Comentários

Das informações da questão:

$$k < 1000 \; e \; k \in \mathbb{N}_+$$

Seja x a quantidade de elementos que são divisíveis por 6 e por 8.

k será dada por:

$$k = 999 - x$$

Para calcular n, devemos somar a quantidade de elementos que são divisíveis por 6 e por 8 e depois subtrair a quantidade de elementos que são divisíveis por 6 e por 8 ao mesmo tempo (esses elementos acabam sendo somados 2 vezes). Os elementos que são divisíveis por 6 e por 8 são os múltiplos do MMC:

$$MMC[6; 8] = 24$$

Dessa forma, vamos encontrar a quantidade de elementos divisíveis por 6:

$$(6, 12, 18, \dots, a_n)$$

Usando a forma geral da PA:

$$a_n = 6 + (n - 1)6 < 1000$$

$$n - 1 < \frac{994}{6}$$

$$n < 1 + \frac{994}{6} \cong 166{,}6$$

$$n = 166$$

Elementos divisíveis por 8:

$$(8, 16, \dots, a_m)$$

$$a_m = 8 + (m - 1)8 < 1000$$

$$m - 1 < \frac{992}{8}$$

$$m < 1 + 124 = 125$$

$$m = 124$$

Elementos divisíveis por 24:

$$(24, 48, \dots, a_l)$$

$$a_l = 24 + (l - 1)24 < 1000$$

$$l - 1 < \frac{976}{24}$$

$$l < 1 + \frac{976}{24} \cong 41{,}6$$

$$l = 41$$

$$\Rightarrow x = m + n - l = 166 + 124 - 41 = 249$$

Portanto, k será dada por:

$$k = 999 - 249 = 750$$

Gabarito: "c".

104.(IME/2000)

Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Comentários

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Vamos substituir os valores de $n \in \mathbb{N}^*$ na fórmula e ver o que obtemos.

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$S_3 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$
$$S_4 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$$
$$\vdots$$

Veja que obtemos a sequência:

$$(1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

Perceba que subtraindo os termos consecutivos, obtemos uma PA estacionária:

$$(3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

Logo, a sequência do problema é uma PA de ordem 2. De acordo com o teorema da soma, podemos escrever S_n como um polinômio de grau 3:

$$S_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Temos 4 incógnitas (A, B, C, D), então precisamos de 4 equações:

$$S_1 = A(1)^3 + B(1)^2 + C(1) + D = A + B + C + D = 1 \quad (I)$$
$$S_2 = A(2)^3 + B(2)^2 + C(2) + D = 8A + 4B + 2C + D = 5 \quad (II)$$
$$S_3 = A(3)^3 + B(3)^2 + C(3) + D = 27A + 9B + 3C + D = 14 \quad (III)$$
$$S_4 = A(4)^3 + B(4)^2 + C(4) + D = 64A + 16B + 4C + D = 30 \quad (IV)$$

Vamos resolver o sistema linear:

$(IV) - (III)$:

$$37A + 7B + C = 16 \quad (V)$$

$(III) - (II)$:

$$19A + 5B + C = 9 \quad (VI)$$

$(II) - (I)$:

$$7A + 3B + C = 4 \quad (VII)$$

$(V) - (VI)$:

$$18A + 2B = 7 \quad (VIII)$$

$(VI) - (VII)$:

$$12A + 2B = 5 \quad (IX)$$

$(VIII) - (IX)$:

$$6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Substituindo $A = 1/3$ em (IX):

$$12\left(\frac{1}{3}\right) + 2B = 5$$
$$4 + 2B = 5$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/3$ e $B = 1/2$ em (VII):

$$7\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + C = 4$$

$$\frac{7}{3} + \frac{3}{2} + C = 4$$

$$\frac{(14+9)}{6} + C = 4$$

$$\frac{23}{6} + C = 4$$

$$C = \frac{24}{6} - \frac{23}{6} = \frac{1}{6}$$

Substituindo A, B, C em (I):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + D = 1$$

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$$

$$\frac{6}{6} + D = 1$$

$$D = 0$$

Assim, obtemos o polinômio:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$

105. (IME/1996)

Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Comentários

Essa expressão é uma soma telescópica. Apesar da questão ser antiga, pode ser que ela seja cobrada no seu vestibular. O IME adora questões que exigem que o aluno já tenha visto algo parecido durante sua preparação.

Lembra do bizu da aula?

Para resolver essa questão, precisamos escrevê-la na forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

Vamos substituir os valores e encontrar A e B:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{A}{1}+\frac{B}{4}\Rightarrow \frac{1}{4}=A+\frac{B}{4}\Rightarrow A=\frac{1-B}{4}\quad (I)$$

$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\Rightarrow \frac{1}{28}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\quad (II)$$

Substituindo (I) em (II) para encontrar B:

$$\frac{1}{28}=\frac{\frac{1-B}{4}}{4}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{1-B}{16}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{(1-B)7+B\cdot 16}{16\cdot 7}$$

$$16\cdot\frac{7}{28}=(1-B)7+B\cdot 16$$

$$4=7-7B+16B$$

$$-3=9B$$

$$B=-\frac{1}{3}$$

Substituindo B em (I):

$$A=\frac{1-B}{4}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{4}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$$

Encontramos $A=1/3$ e $B=-1/3$.

Podemos escrever:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{A}{a_n}+\frac{B}{a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3a_n}-\frac{1}{3a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Agora podemos resolver a questão. Vamos chamar a soma de S:

$$S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Podemos reescrever a soma usando o termo geral da série telescópica aritmética:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2995}-\frac{1}{2998}\right)+\left(\frac{1}{2998}-\frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{2995}}-\cancel{\frac{1}{2998}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2998}}-\frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3001}\right)$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right)=\frac{1000}{3001}$$

Poderíamos aplicar diretamente a fórmula para a soma:

$$S_n=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Observando a soma telescópica, vemos que $r=3$, $a_1=1$ e $a_{n+1}=3001$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3001}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right)=\frac{1000}{3001}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\frac{1000}{3001}}$

---

106. (OBM)

O número $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros.

Comentários

Para resolver essa questão, vamos pensar o seguinte: Isso não parece uma PG, muito menos uma PA. Seria interessante se de alguma forma aparecesse uma soma telescópica. Vamos tentar o seguinte então:

Olhando o termo geral, temos:

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}$$

Desenvolvendo, temos:

$$\sqrt{\frac{a^4+2a^3+3a^2+2a+1}{a^2(a+1)^2}}$$

Se $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$ fosse um quadrado perfeito isso resolveria nosso problema. Perceba que não é tão simples fatorar esse número por separação de termos. Porém, podemos suspeitar que isso é, de alguma forma, um quadrado perfeito, pois faria a questão dar certo... Então vamos tentar achar algo da forma $A^2+2AB+B^2$. Fazendo $a^4+2a^3+3a^2+2a+1=(a^2)^2+2a^2(a+1)+(a^2+2a+1)=(a^2+a+1)^2$ obtemos o nosso quadrado perfeito!

Assim,

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2}{a^2(a+1)^2}}=\frac{(a^2+a+1)}{a(a+1)}=1+\frac{1}{a(a+1)}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

$$\sum_{a=1}^{2000}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}+\cdots+1+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2000+1}$$

$$=2000+1-\frac{1}{2001}=\frac{4004000}{2001}$$

Gabarito: $\frac{4004000}{2001}$

107.(IME/2021)

Uma sequência é gerada pelo produto dos termos correspondentes de duas progressões aritméticas de números inteiros. Os três primeiros termos dessa sequência são 3053, 3840 e 4389. O sétimo termo da sequência é:

a) 3035

b) 4205

c) 4398

d) 4608

e) 5063

Comentários

Temos duas progressões aritméticas:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)\ PA\ de\ razão\ r$$
$$(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)\ PA\ de\ razão\ q$$

Do enunciado, temos a sequência:

$$(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots) = (3053, 3840, 4389, \ldots)$$
$$\Rightarrow a_1b_1 = 3053$$
$$a_2b_2 = (a_1+r)(b_1+q) = a_1b_1 + a_1q + b_1r + rq$$
$$a_2b_2 - a_1b_1 = a_1q + b_1r + rq$$
$$a_1q + b_1r + rq = 3840 - 3053 = 787$$
$$\Rightarrow \boxed{a_1q + b_1r = 787 - rq}$$
$$a_3b_3 = (a_1+2r)(b_1+2q) = a_1b_1 + 2(a_1q + b_1r) + 4rq$$
$$a_3b_3 - a_1b_1 = 2(a_1q + b_1r) + 4rq$$
$$4389 - 3053 = 2(787 - rq) + 4rq$$
$$1336 = 1574 + 2rq$$
$$\Rightarrow \boxed{rq = -119}$$
$$a_1q + b_1r = 787 - (-119)$$
$$\Rightarrow \boxed{a_1q + b_1r = 906}$$

O número pedido é a_7b_7:

$$a_7b_7 = (a_1 + 6r)(b_1 + 6q) = a_1b_1 + 6(a_1q + b_1r) + 36rq$$

$$a_7b_7 = 3053 + 6(906) + 36(-119)$$

$$a_7b_7 = 3053 + 5436 - 4284$$

$$\therefore a_7b_7 = 4205$$

Gabarito: B

108.(IME/2021)

Considere uma progressão aritmética (PA) de números inteiros com razão $p > 2$, seu primeiro termo maior do que 2 e seu último termo menor do que 47. Retirando-se uma determinada quantidade de elementos da PA, recai-se em uma PG de 3 elementos e razão $q > 2$. Para p e q inteiros, p diferente de q, determine a PA cuja soma de seus elementos seja a maior possível.

Comentários

Sabemos que os termos envolvidos são todos inteiros positivos. Vamos analisar a restrição da PG. Como temos três termos e razão $q > 2$, podemos escrever:

$$(b, bq, bq^2)$$

Lembrando que o último termo da PA é menor do que 47 e os termos da PG são termos da PA, vamos analisar alguns casos:

1) $b \geq 6$ e admitindo razão mínima $q = 3$:

$$bq^2 \geq 6 \cdot 3^2 = 54 > 47$$

Portanto, como o termo ultrapassa o maior valor permitido para o último termo da PA, verificamos que o primeiro termo da PG deve ser $b \leq 5$.

2) $q \geq 4$ e admitindo o menor termo possível $b = 3$:

$$bq^2 \geq 3 \cdot 4^2 = 48 > 47$$

Novamente extrapolamos o valor do último termo da PA, logo $q \leq 3$.

Como $q > 2$ e é inteiro, temos que $\boxed{q = 3}$.

Para maximizarmos a soma da PA, um possível caminho seria maximizar o número de termos dela. Isso pode ser feito minimizando o valor da razão p da PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Como $p \neq q$, temos $p \geq 4$.

Sabendo que $q = 3$, os possíveis termos da PG são:

a) $(3, 9, 27)$

Nessa sequência, temos $k_1 \cdot p = 9 - 3 = 6$, ou seja, p deve ser divisor de 6. Como $p \neq q = 3$, devemos ter $p = 6$, logo, a PA é:

$$(3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45)$$

$$S_a = \frac{(3+45)8}{2} = 192$$

b) $(4, 12, 36)$

Analogamente, temos $k_2 \cdot p = 12 - 4 = 8$. p deve ser mínimo, diferente de q e divisor de 8, logo $p = 4$ é o menor valor possível:

$$(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)$$

$$S_b = \frac{(4+44)11}{2} = 264$$

c) $(5, 15, 45)$

Analogamente, temos $k_3 \cdot p = 15 - 5 = 10$. p deve ser divisor de 10, logo $p = 5$.

$$(5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)$$

$$S_c = \frac{(5+45)9}{2} = 225$$

Das possibilidades acima, a maior soma é $S_b = 264$, logo a PA que satisfaz ao problema é

$$(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)$$

Gabarito: $\mathbf{(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)}$

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da nossa aula. Aprendemos as principais sequências que serão cobradas no concurso. A maioria das questões que cobram sequências seguem o mesmo tipo de raciocínio, basta saber como trabalhar com as variáveis e saber aplicar as ideias aprendidas nessa aula.

Eu sei que o caminho para a aprovação é árduo, mas no final você verá que valerá todo o esforço. Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/profvictorso

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Hazzan, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. Atual, 2013. 282p.

[2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Lima, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio, v. 2. 7 ed. SBM, 2016. 305p.

11. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.