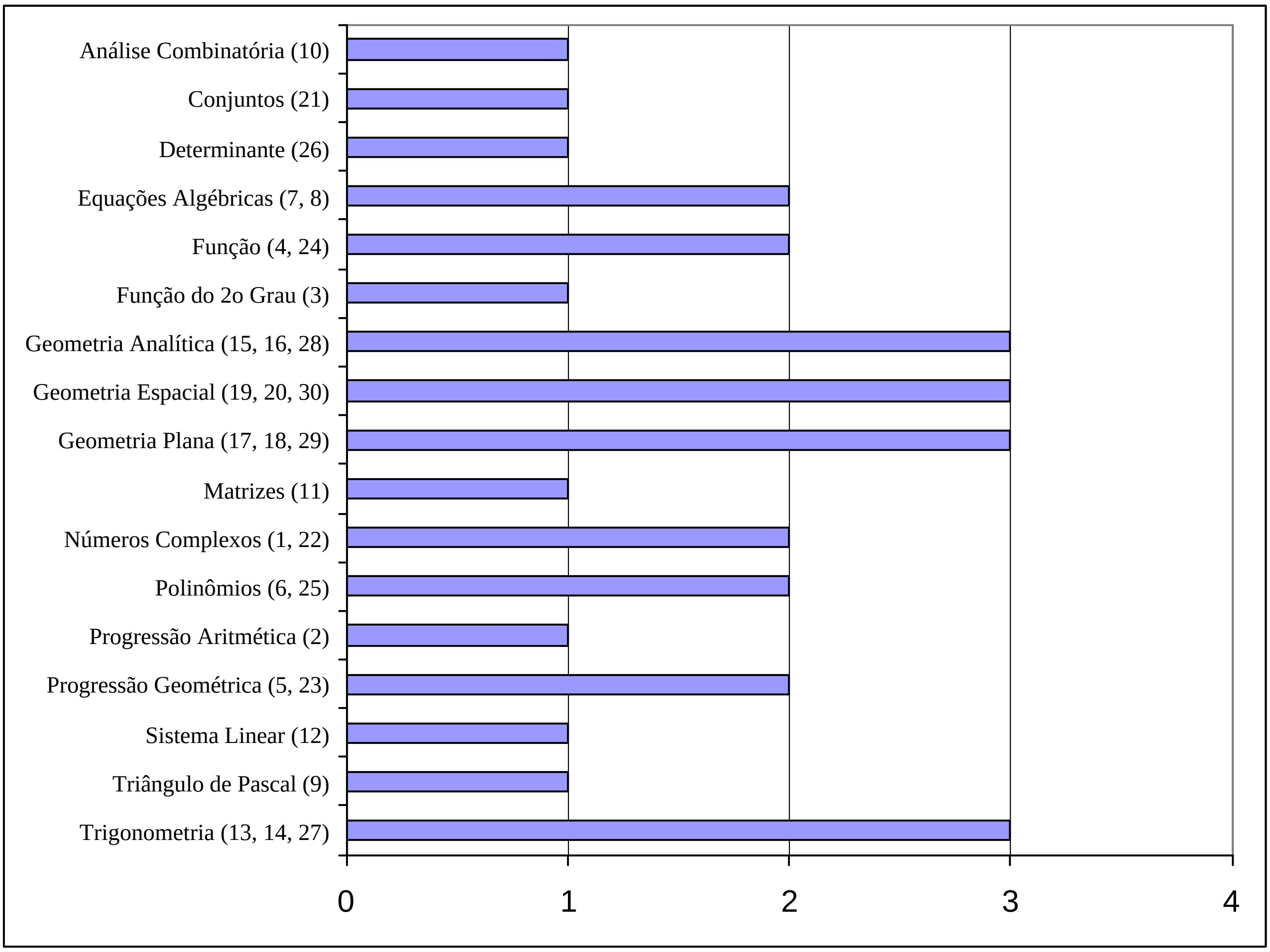
Comentários e estatísticas:

No Vestibular 2003 do ITA, a Banca Examinadora preparou uma prova equilibrada, abrangendo todos os tópicos importantes da programação, mas as questões foram muito trabalhosas, decorrendo que bons candidatos não tiveram tempo para que seus conhecimentos fossem efetivamente verificados. Os alunos poderiam ter percebido que alguns testes poderiam ser resolvidos por eliminação através das alternativas. Sem o uso dessa estratégia, ficaria comprometida a resolução no tempo disponível de 4 horas. O aluno também deveria selecionar as questões mais simples, como de costume, as de Geometria Plana e Geometria Espacial no final da parte de testes.

Quanto a parte dissertativa, algumas questões de aparência complicada eram de resolução simples, mas somente para aqueles alunos conceitualmente seguros.

No geral, achamos que a prova deste ano apresentou um nível de dificuldade superior a do ano passado.

Distribuição das questões:



NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto de números complexos.

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\bar{z}$: conjunto do número $z \in \mathbb{C}$.

i : unidade imaginária; $i^2 = -1$.

$\arg z$: um argumento de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.

$\varnothing$: conjunto vazio.

$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$.

$X^C = U \setminus X$, para $X \subset U, U \neq \varnothing$

I : matriz identidade $n \times n$.

A^{-1} : inversa da matriz inversível A.

A^T : transposta da matriz A.

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.

$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

1. Seja $z \in \mathbb{C}$. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $\omega = \dfrac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{\omega} = \dfrac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II. Se $z \neq 0$ e $\omega = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então $|\omega| \le \dfrac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$.

III. Se $\omega = \dfrac{(1 + i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \dfrac{\pi}{12}$ é um argumento de ω.

é(são) verdadeira(s):

A. ( ) todas.
B. ( ) apenas I e II.
C. ( ) apenas II e III.
D. ( ) apenas I e III.
E. ( ) apenas II.

Alternativa: A

I. *Verdadeira* - Sabemos que se $k = \dfrac{a + bi}{c + di}$, então $\bar{k} = \dfrac{a - bi}{c - di}$ para $c + di \neq 0$

Como temos:

$$\omega = \frac{2i.z^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3.|z|^2 + 2.|z|}, \text{ teremos então:}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-2i.\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3.|\bar{z}|^2 + 2.|z|}$$

Notemos que neste ponto, tanto faz colocarmos |z| ou $|\bar{z}|$, visto que são iguais.

II. *Verdadeira* - Temos: $\omega = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i).z}$, então: $|\omega| = \left|\dfrac{2iz + 3(1 + i)}{z.(1 + 2i)}\right|$

$$|\omega| = \frac{|2iz + 3(1 + i)|}{|z.(1 + 2i)|} = \frac{|2iz + 3(1 + i)|}{|z|.|(1 + 2i)|} = \frac{|2iz + 3(1 + i)|}{\sqrt{5}.|z|}$$

Aplicando agora a desigualdade $|a + b| \le |a| + |b|$, temos:

$$|\omega| \le \frac{|2iz| + |3(1 + i)|}{\sqrt{5}.|z|} \Rightarrow |\omega| \le \frac{2.|z| + 3.|1 + i|}{\sqrt{5}.|z|} \therefore |\omega| \le \frac{2.|z| + 3.\sqrt{2}}{\sqrt{5}.|z|}$$

III. *Verdadeira* - $\omega = \dfrac{(1+i).z^2}{4\sqrt{3}+4i} = \dfrac{\sqrt{2}.cis(45^o).[\rho.cis(\theta)]^2}{8.cis(30^o)} = \dfrac{\sqrt{2}.cis(45^o).\rho^2.cis(2\theta)}{8.cis(30^o)}$

$$= \frac{\sqrt{2}.\rho^2.cis(45^o+2\theta)}{8.cis(30^o)} = \frac{\sqrt{2}.\rho^2}{8}.cis(45^o+2\theta-30^o) = \frac{\sqrt{2}.\rho^2}{8}.cis\left(\frac{\pi}{12}+2\theta\right)$$

$$\therefore\ arg(\omega) = \frac{\pi}{12}+2\theta = \frac{\pi}{12}+2.arg(z)$$

---

2. O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números $sen\dfrac{\pi}{12}$, x, y, z e $sen75°$, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

A. ( ) 3^{-4}
B. ( ) 2^{-6}
C. ( ) 6^{-2}
D. ( ) 2^{-5}
E. ( ) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

Alternativa: D

Do enunciado, temos: $sen75^o = sen\dfrac{\pi}{12} + 4R \Rightarrow (4R)^2 = (cos15^o - sen15^o)^2 \Rightarrow R^2 = \dfrac{1}{32}$

Por outro lado, sendo R a razão desta PA:

$$y^2 - x.z = y^2 - x.(y+R) = y^2 - x.y - x.R = y.(y-x) - x.R = y.R - x.R = R.(y-x) = R.R = R^2 = \frac{1}{32}$$

Logo: $\boxed{y^2 - x.z = 2^{-5}}$

---

3. Considere a função

$$f: \mathbb{Z}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + 1.$$

A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

A. ( ) 0
B. ( ) 1
C. ( ) 2
D. ( ) 4
E. ( ) 6

Alternativa: C

Dado f: $Z_* \to R$ $f(x) = \sqrt{3^{x-2}}.\left(9^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2x}} - \left(3^{2x+5}\right)^{\frac{1}{x}} + 1$

Temos que: $f(x) = 3^{\frac{x-2}{2}}\left(\left(3^2\right)^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2x}} - \left(3^{2x+5}\right)^{\frac{1}{x}} + 1$

$f(x) = 3^{\frac{x-2}{2}+\frac{2x+1}{x}} - 3^{\frac{2x+5}{x}} + 1$ (I)

Para que a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tenha raiz dupla, temos que:

$\Delta = 0 \Rightarrow 2^2 - 4f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ (II)

De (I) e (II) vem: $3^{\frac{x-2}{2}+\frac{2x+1}{x}} - 3^{\frac{2x+5}{x}} + 1 = 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{2x+5}{x}} = 3^{\frac{x-2}{2}+\frac{2x+1}{x}} \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{x} = \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{2x+1}{x} \Rightarrow$

$$2(2x+5) = x(x-2) + 2(2x+1) \Rightarrow 4x+10 = x^2 - 2x + 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

Soma das raízes = $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-2)}{1} \Rightarrow \boxed{Soma = 2}$

4. Considere uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x+y)=f(x)f(y),\ \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$

Das afirmações:

I. $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

II. $f(nx)=\left[f(x)\right]^n,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

III. f é par.

é(são) verdadeira(s):

A. ( ) apenas I e II. B. ( ) apenas II e III. C. ( ) apenas I e III.
D. ( ) todas. E. ( ) nenhuma.

Alternativa: A

I. *Verdadeira* - Fazendo $x=y=\frac{k}{2}\in R,$ temos:

$$f\left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)=f\left(\frac{k}{2}\right).f\left(\frac{k}{2}\right)\therefore f(k)=f^2\left(\frac{k}{2}\right)\therefore f^2\left(\frac{k}{2}\right)\geq 0.$$

Teríamos, então, $f(k)\geq 0.$

Para x = y = 0, temos $f(0) = f^2(0)$ $\therefore$ f(0) = 0 ou f(0) = 1. Precisamos determinar o valor de f(0).
Para x = k e y = 0, temos: f(k + 0) = f(k).f(0) $\therefore$ f(k) = f(k).f(0) $\therefore$ f(k).[1 – f(0)] = 0.
Se f(0) = 0, teremos f(k) = 0 $\forall$ k $\in$ R, que é uma função constante, contrariando a hipótese do problema. Logo f(0) = 1 e f(k) $\neq$ 0. Assim, f(x) > 0 $\forall$ x $\in$ R.

II. *Verdadeira* - Observe a indução vulgar:

$f(2x) = f(x + x) = f^2(x)$
$f(3x) = f(2x + x) = f(2x).f(x) = f^3(x)$
…………………………….
$f(nx) = [f(x)]^n$; $\forall$ x $\in$ R e $\forall$ n $\in$ N*.

Vamos demonstrar pelo PIF:

1ª parte: n = 1 $f(1.x) = [f(x)]^1$ (verdadeiro)
2ª parte: hipótese: $f(kx) = [f(x)]^k$
tese: $f[(k+1).x] = [f(x)]^{k+1}$
demonstração: $f[(k+1).x] = f(kx + x) = f(kx).f(x) = [f(x)]^k.f(x) = [f(x)]^{k+1}$ (cqd)

III. *Falsa* - Para x = a e y = – a, temos f(a – a) = f(a).f(–a) $\therefore$ f(0) = f(a).f(–a) $\therefore$ f(a). f(–a) = 1.
Então f(–a) $\neq$ f(a) e a função não é par.

5. Considere o polinômio $P(x)=2x+a_2x^2+\ \cdots\ +a_nx^n$, cujos coeficientes 2, a_2, … , a_n formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q > 0. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que P(2) = 5 460, tem-se que o valor de $\frac{n^2-q^3}{q^4}$ é igual a:

A. ( ) $\frac{5}{4}$ B. ( ) $\frac{3}{2}$ C. ( ) $\frac{7}{4}$
D. ( ) $\frac{11}{6}$ E. ( ) $\frac{15}{8}$

Alternativa: C

Sabemos que: 2, a_2, a_3, a_4, …, a_n é uma P.G. de razão q.

Como $-\frac{1}{2}$ é raiz, podemos escrever: $\underbrace{-\frac{2}{2}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_3}{8}+\frac{a_4}{16}+\ ...\ +(-1)^n.\frac{a_n}{2^n}}_{\text{P.G. de razão } -\frac{q}{2}}=0$

Ou ainda: $\underbrace{-2+\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{4}+\frac{a_4}{8}+\ ...\ +(-1)^n.\frac{a_n}{2^{n-1}}}_{\text{P.G. de razão } -\frac{q}{2}}=0$

Aplicando a expressão da soma da P.G., temos: $\dfrac{-2.\left[\left(-\frac{q}{2}\right)^n-1\right]}{-\frac{q}{2}-1}=0$

Logo, devemos ter:

$\left(-\frac{q}{2}\right)^n=1$. Como q > 0, então n é par e q = 2. Porém, temos ainda que P(2) = 5460, logo:

$4 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + \ldots + 2^n.a_n = 5460$

ou:

$\underbrace{2+2a_2+4a_3+8a_4+\ ...\ +2^{n-1}.a_n}_{\text{P.G. de razão } 2q \Rightarrow \text{ P.G. de razão } 4}=2730$

Aplicando a expressão da soma da P.G., temos: $\frac{2.(4^n-1)}{4-1}=2730 \Rightarrow n=6$

Assim, temos que $\frac{n^2-q^3}{q^4}=\frac{36-8}{16}=\frac{28}{16} \Rightarrow \boxed{\frac{n^2-q^3}{q^4}=\frac{7}{4}}$

---

6. Dividindo-se o polinômio P(x) = $x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor $\frac{ab}{c}$ é igual a:

A. ( ) – 6 B. ( ) – 4 C. ( ) 4
D. ( ) 7 E. ( ) 9

Alternativa: E

Dado o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$, de acordo com o enunciado do problema:

$P(1) = 2 \Rightarrow 2 = 1^5 + a.1^4 + b.1^2 + c.1 + 1 \Rightarrow 0 = a + b + c$

$P(-1) = 3 \Rightarrow 3 = (-1)^5 + a.(-1)^4 + b.(-1)^2 + c.(-1) + 1 \Rightarrow 3 = a + b - c$

$P(2) = 0 \Rightarrow 0 = 2^5 + a.2^4 + b.2^2 + c.2 + 1 \Rightarrow -33 = 16a + 4b + 2c$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b-c=3 \\ 16a+4b+2c=-33 \end{cases} \Rightarrow a=-3;\ b=\frac{9}{2};\ c=-\frac{3}{2}$$

Logo $\frac{a.b}{c}=\dfrac{-3.\frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{a.b}{c}=9}$

7. Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$.

é(são) verdadeira(s):

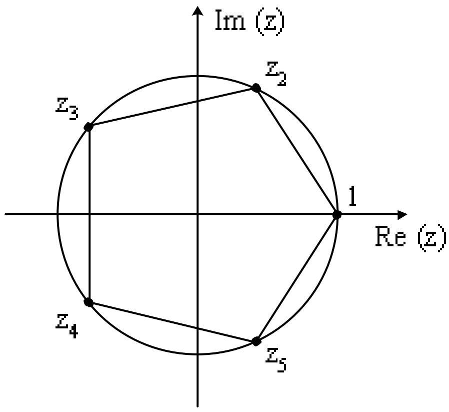
A. ( ) nenhuma. B. ( ) apenas I. C. ( ) apenas II.
D. ( ) apenas III. E. ( ) apenas I e III.

Alternativa: D

Observe a fatoração: $z^5 - 1 = (z-1).(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$

As raízes da equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ são raízes da equação $z^5 - 1 = 0$.

A equação $z^5 - 1 = 0$ possui 5 raízes que são os vértices de um pentágono regular centrado na origem com um vértice no ponto (1; 0).
Observe a figura ao lado:



z_2, z_3, z_4 e z_5 são as raízes da equação dada no problema.

I. *Falsa* - todas as raízes são imaginárias.

II. *Falsa* - todas as raízes possuem módulo igual a 1.

III. *Verdadeira* - $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Para $n \to \infty$ temos a seguinte série convergente:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$. Para $\forall n \in N$ teremos um resultado menor do que $\frac{1}{2}$.

---

8. Seja *k* Î *R* tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

A. ( ) – 6 B. ( ) – 3 C. ( ) 1
D. ( ) 2 E. ( ) 8

Alternativa: B

Sendo x_1, x_1 e x_2 as razões de $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$, pelas relações de Girard temos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{2} - 2x_1 \quad (\text{ I }) \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = 2 \quad (\text{ II }) \\ x_1^2.x_2 = -\frac{k}{2} \quad (\text{ III }) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos $x_1 = -2$ ou $x_1 = -\dfrac{1}{3}$ (não convém).

Assim: $x_2 = \dfrac{1}{2}$ e $k = -4$

Portanto: $(k + x_1).x_2 = (-4 - 2).\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(k + x_1).x_2 = -3}$

---

9. Considere o conjunto $S = \{(a,\ b) \in N \times N : a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\dfrac{18!}{a!b!}$, $\forall (a,\ b) \in S$, é:

A. ( ) 8^6 B. ( ) 9! C. ( ) 9^6
D. ( ) 12^6 E. ( ) 12!

Alternativa: A

Do enunciado, temos: b = 18 – a, com a, b ∈ N e $\dfrac{18!}{a!b!} = \dfrac{18!}{a!(18-a)!} = \dbinom{18}{a}$

Assim, a soma pedida é dada por: $\displaystyle\sum_{a=0}^{18} \binom{18}{a} = 2^{18} \Rightarrow \boxed{\displaystyle\sum_{a=0}^{18} \binom{18}{a} = 8^6}$

---

10. O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

A. ( ) 24 B. ( ) 36 C. ( ) 48
D. ( ) 54 E. ( ) 72

Alternativa: C

Sabemos que $17640 = 2^3.3^2.5^1.7^2$.
Assim, o total de divisores de 17640 que são divisíveis por 3 é dado por:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & = & 48 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2^0 & & & & 5^0 & & 7^0 & & \\ 2^1 & & 3^1 & & 5^1 & & 7^1 & & \\ 2^2 & & 3^2 & & & & 7^2 & & \\ 2^3 & & & & & & & & \end{array}$$

$\boxed{\text{Números de divisores positivos (ou só negativos)} = 48}$

---

11. Sejam A e P matrizes $n \times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I. B^T é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.
II. Se A é simétrica, então B também o é.
III. $det(A - lI) = det(B - lI)$, " $l \in R$.

é(são) verdadeira(s):

A. ( ) todas. B. ( ) apenas I. C. ( ) apenas I e II.
D. ( ) apenas I e III. E. ( ) apenas II e III.

Alternativa: D

I. *Verdadeira* - $B = P^{-1}.A.P \Rightarrow \det B = \det (P^{-1}.A.P) \Rightarrow \det B = \det P^{-1}.\det A.\det P \Rightarrow \det B = \det A$
Como $\det A \neq 0$ (A é inversivel) e $\det B^t = \det B = \det A$, então B^t é inversível e $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$

II. *Falsa* - Hipótese: $A^t = A$; Tese: $B^t = B$
$B = P^{-1}.A.P \Rightarrow B^t = (P^{-1}.A.P)^t = P^t.A^t.(P^{-1})^t \Rightarrow B^t = P^t.A.(P^{-1})^t \neq B$

III. *Verdadeira* - $B = P^{-1}.A.P \Rightarrow B - P^{-1}\,\lambda\,P = P^{-1}AP - P^{-1}\,\lambda\,P \Rightarrow B - (P^{-1}.P)\lambda = P^{-1}(A - \lambda I)P \Rightarrow$
$B - I\lambda = P^{-1}.(A - \lambda I)P \Rightarrow \det(B - \lambda I) = \det P^{-1}.\det(A - \lambda I).\det P$
Logo $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$

---

12. O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \text{sen}\,2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a, \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

A. ( ) 2 B. ( ) 3 C. ( ) 4
D. ( ) 5 E. ( ) 6

Alternativa: A

Escalonando o sistema dado:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = \text{sen}\,2a \\ -4x + y - 6z = \cos 3a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases} \quad -6 \quad \sim \begin{cases} x + 2y - 5z = \text{sen}\,2a \\ 9y - 26z = 4\,\text{sen}\,2a + \cos 3a \\ -9y + 26z = -6\,\text{sen}\,2a - 2\cos a \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 5z = \text{sen}\,2a \\ 9y - 26z = 4\,\text{sen}\,2a + \cos 3a \\ 0.z = -2\,\text{sen}\,2a + \cos 3a - 2\cos a \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível (neste caso, indeterminado) devemos ter:
$-2\text{sen}2a + \cos 3a - 2\cos a = 0 \Rightarrow -2\text{sen}2a + (\cos 3a - \cos a) - \cos a = 0$
$\Rightarrow -2\text{sen}2a - 2\text{sen}2a\,\text{sen}a - \cos a = 0 \Rightarrow -2\text{sen}2a(1 + \text{sen}a) - \cos a = 0$
$\Rightarrow -4.\text{sen}a\cos a(1 + \text{sen}a) - \cos a = 0 \Rightarrow \cos a(-4\text{sen}^2 a - 4\text{sen}a - 1) = 0$
$\Rightarrow \cos a = 0$ ou $(2\text{sen}a + 1)^2 = 0$

I. $\cos a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\pi}{2}$ ou $a = \dfrac{3\pi}{2}$. Não convém nenhuma das soluções, pois, neste caso, teremos um sistema homogêneo.

II. $\text{sen}a = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $a = \dfrac{11\pi}{6}$

Logo, o sistema é possível e não-homogêneo para 2 valores de A.

---

13. Para todo x ∈ R, a expressão $[\cos(2x)]^2[\text{sen}(2x)]^2\text{sen}x$ é igual a:

A. ( ) 2^{-4} [sen(2x) + sen(5x) + sen(7x)].
B. ( ) 2^{-4} [2 sen$x$ + sen(7x) – sen(9x)].
C. ( ) 2^{-4} [– sen(2x) – sen(3x) + sen(7x)].
D. ( ) 2^{-4} [– sen$x$ + 2 sen(5x) – sen(9x)].
E. ( ) 2^{-4} [sen$x$ + 2 sen(3x) + sen(5x)].

Alternativa: B

Se $E = [\cos(2x)]^2.[\text{sen}(2x)]^2.\text{senx}, \ \forall x \in R,$ temos:

$$E = [\text{sen}(2x).\cos(2x)]^2.\text{sen}(x) \Rightarrow E = \left[\frac{1}{2}\text{sen}(4x)\right]^2.\text{sen}(x) \Rightarrow E = \frac{1}{4}.\text{sen}(4x).\text{sen}(x).\text{sen}(4x)$$

$$E = \frac{1}{4}.\frac{2}{2}.\text{sen}(4x).\text{sen}(x).\text{sen}(4x) \Rightarrow E = \frac{1}{8}[\cos(3x) - \cos(5x)].\text{sen}(4x)$$

$$E = \frac{1}{8}.[\text{sen}(4x).\cos(3x) - \text{sen}(4x).\cos(5x)] \Rightarrow E = \frac{1}{8.2}[2\text{sen}(4x).\cos(3x) + 2\text{sen}(-4x).\cos(5x)]$$

$$E = \frac{1}{16}[\text{sen}(x) + \text{sen}(7x) + \text{sen}(x) - \text{sen}(9x)] \Rightarrow \boxed{E = 2^{-4}.[2\text{sen}(x) + \text{sen}(7x) - \text{sen}(9x)]}$$

14. Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função

$$f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \ f(x) = \text{arcsenx} + \text{arccosx},$$

temos que:
A. ( ) f é não-crescente e ímpar.
B. ( ) f não é par nem ímpar.
C. ( ) f é sobrejetora.
D. ( ) f é injetora.
E. ( ) f é constante.

Alternativa: E

Dada a função $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, f(x) = arcsenx + arccosx

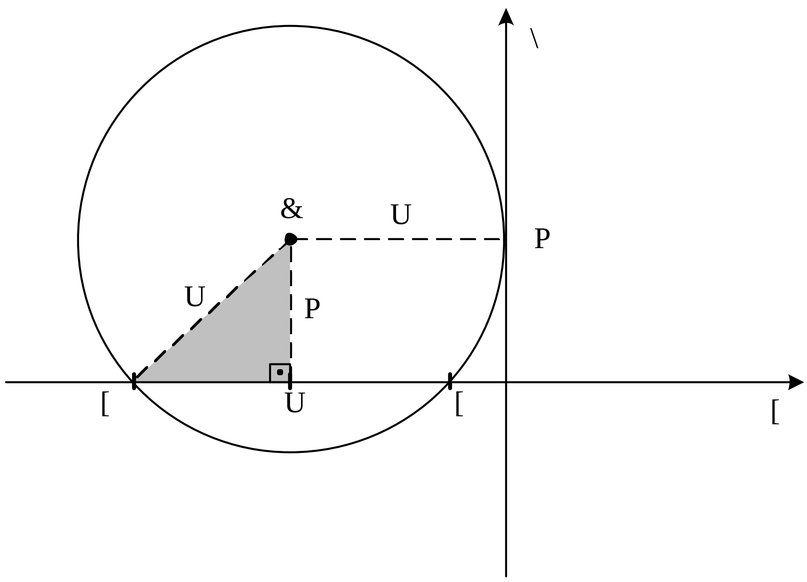
temos: sen [f(x)] = sen(arcsenx + arccosx)
sen [f(x)] = sen(arcsenx).cos(arccosx) + sen(arccosx).cos(arcsenx)
sen [f(x)] = $x.x + \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-x^2}$
sen [f(x)] = $x^2 + 1 - x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,[f(x)] = 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le f(x) \le \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2},$$ que é uma função constante.

15. Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangente ao eixo *Oy*. Cada uma destas circunferências corta o eixo *Ox* em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:
A. ( ) de uma elipse.
B. ( ) de uma parábola.
C. ( ) de uma hipérbole.
D. ( ) de duas retas concorrentes.
E. ( ) da reta y = –x.

Alternativa: C

A figura abaixo representa a situação do enunciado:



Na figura, podemos identificar o centro da circunferência como sendo: C(–r; m)

Mas, no triângulo retângulo assinalado, podemos escrever: $r^2 = m^2 + 4$

ou ainda: $r^2 - m^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{r^2}{2^2} - \dfrac{m^2}{2^2} = 1$

Assim, as coordenadas dos centros das circunferências representam um ramo de hipérbole.

---

16. A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$,

é igual a:

A. ( ) $\sqrt{6}$

B. ( ) $\dfrac{5}{2}$

C. ( ) $2\sqrt{2}$

D. ( ) 3

E. ( ) $\dfrac{10}{3}$

Alternativa: B

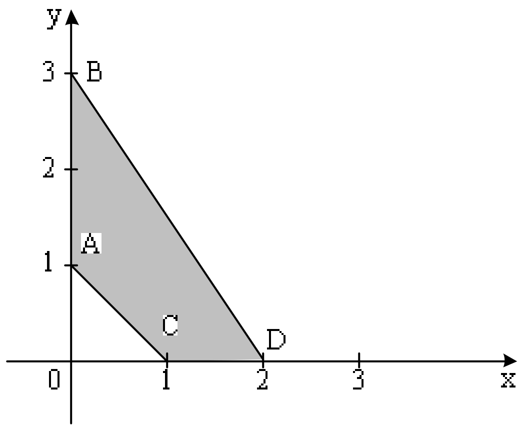
Vamos resolver na variável x a equação $3x^2 + (5y - 9)x + 2y^2 - 8y + 6 = 0$

$$x = \frac{(9-5y) \pm \sqrt{(5y-9)^2 - 4.3.\left(2y^2 - 8y + 6\right)}}{6} \therefore x = \frac{(9-5y) \pm \sqrt{y^2 + 6y + 9}}{6} = \frac{(9-5y) \pm \sqrt{(y+3)^2}}{6}$$

$$x = \frac{(9-5y) \pm (y+3)}{6} \therefore x = \frac{9-5y+y+3}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{9-5y-y-3}{6},$$

obtemos assim as retas: $3x + 2y - 6 = 0$ e $x + y - 1 = 0$

Observe os gráficos das retas na figura ao lado:



Área do polígono = $A_{\Delta BOD} - A_{\Delta AOC} = \frac{3.2}{2} - \frac{1.1}{2} = 3 - \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Área} = \frac{5}{2}}$

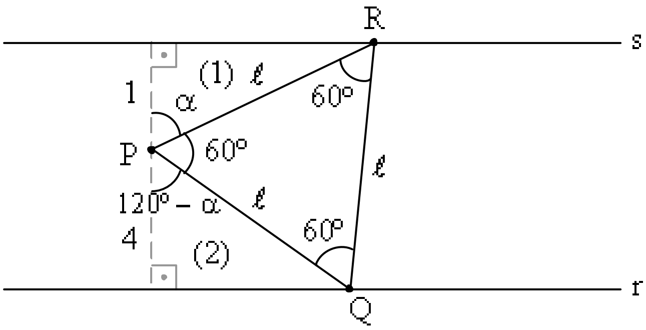
---

17. Sejam *r* e *s* duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja *P* um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triangulo eqüilátero *PQR*, cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, é igual, em cm^2, a:

A. ( ) $3\sqrt{15}$
B. ( ) $7\sqrt{3}$
C. ( ) $5\sqrt{6}$
D. ( ) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$
E. ( ) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

Alternativa: B

Observe a figura:



Utilizando relações trigonométricas nos triângulos (1) e (2), temos:

$\cos\alpha = \frac{1}{\ell}$ e $\cos(120^o - \alpha) = \frac{4}{\ell} \therefore \cos 120^o.\cos\alpha + \text{sen}120^o.\text{sen}\alpha = \frac{4}{\ell} \therefore$

$-\frac{1}{2}.\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\alpha = \frac{4}{\ell} \therefore -\frac{1}{2\ell} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\alpha = \frac{4}{\ell}$. Assim: $\text{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\ell}$.

Pela relação fundamental da trigonometria, temos: $\left(\frac{1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{\ell}\right)^2 = 1 \therefore \frac{28}{\ell^2} = 1 \therefore \ell^2 = 28$

A área do triângulo é $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{28\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 7\sqrt{3}}$

18. Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780º. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

A. ( ) 63 B. ( ) 69 C. ( ) 90
D. ( ) 97 E. ( ) 106

Alternativa: D

Consideremos os três polígonos A, B e C, com n_A, n_B e n_C lados, respectivamente.
Do enunciado do problema:

$$\begin{cases} 2n_B = n_A + n_C \\ n_A.n_B.n_C = 585 \\ 180°.(n_A - 2) + 180°.(n_B - 2) + 180°.(n_C - 2) = 3780° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n_B = n_A + n_C \\ n_A.n_B.n_C = 585 \\ n_A + n_B + n_C = 27 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: $n_A = 5$; $n_B = 9$; $n_C = 13$

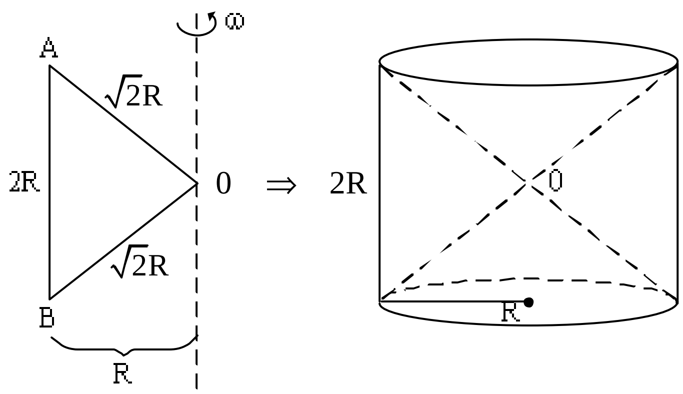
Assim, o número total de diagonais é:

$$n = \frac{5.(5-3)}{2} + \frac{9.(9-3)}{2} + \frac{13.(13-3)}{2} \Rightarrow \boxed{n = 97}$$

19. Considere o triangulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

A. ( ) $\frac{\pi}{2}R^3$ B. ( ) πR^3 C. ( ) $\frac{4\pi}{3}R^3$
D. ( ) $\sqrt{2}\pi R^3$ E. ( ) $\sqrt{3}\pi R^3$

Alternativa: C



O volume do sólido formado pela revolução do triângulo em torno do eixo ω será:

$$\underbrace{V = \pi R^2.2R}_{cilindro} - \underbrace{2\left[\frac{\pi R^2.R}{3}\right]}_{cone} \Rightarrow V = 2\pi R^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}}$$

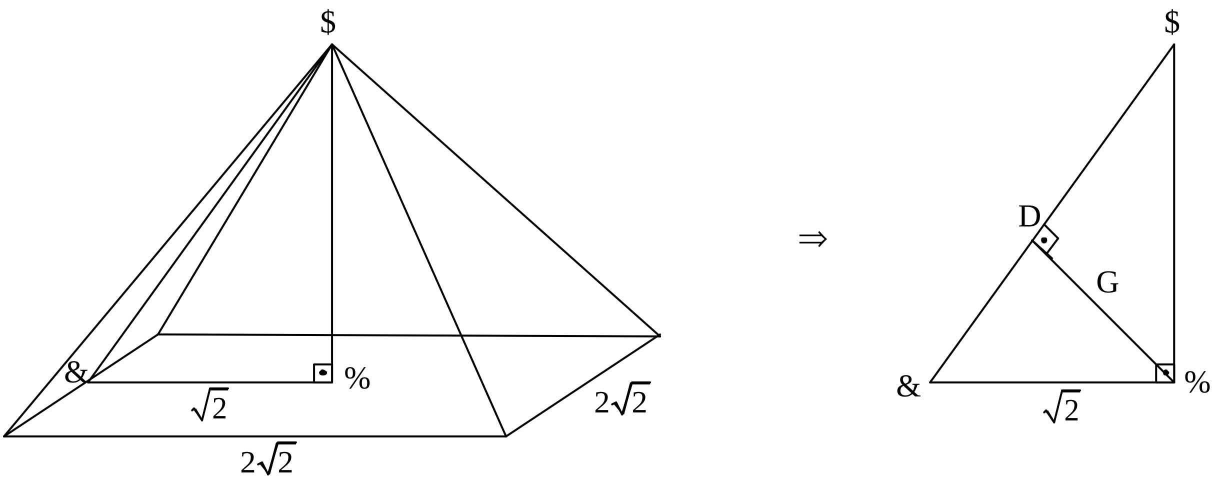
20. Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm^2. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

A. ( ) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. ( ) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ C. ( ) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

D. ( ) $\frac{7}{5}$ E. ( ) $\sqrt{3}$

Alternativa: B

Dada a pirâmide do enunciado:



Através do teorema de Pitágoras: $a^2 = 5^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$.

Então:

$$3\sqrt{3}.d = 5.\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{5\sqrt{6}}{9}}$$

AS QUESTÕES DE 21 A 30 DEVERÃO SER RESOLVIDAS NO CADERNO DE RESPOSTAS ANEXO.

21. Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B$ = Æ, então $B \subset A^C$.

II. $B \setminus A^C = B \cap A$.

Resolução:

I. Como $A \cap B = \varnothing$, então $\forall x \in B$, $x \notin A$. Logo $\forall x \in B$, $x \in A^C \Leftrightarrow B \subset A^C$

II. $B \setminus A^C = \left\{x \,/\, x \in B \text{ e } x \notin A^C\right\} = \left\{x \,/\, x \in B \text{ e } x \in A\right\} = B \cap A$

22. Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

$$w = \frac{z + \overline{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

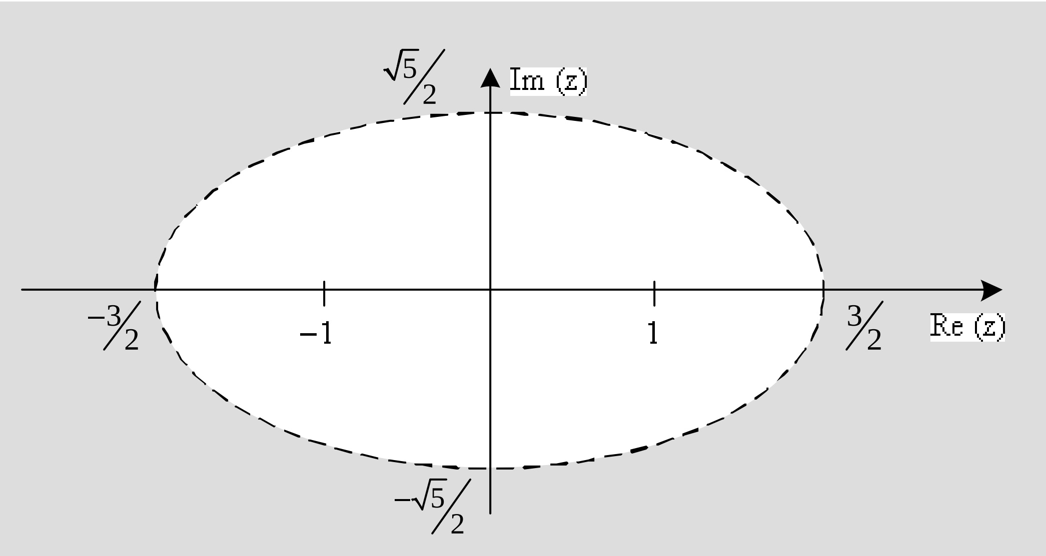
pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

Resolução:

O numerador da fração é $z + \overline{z} + 2 = a + bi + a - bi + 2 = 2a + 2$. Como a e b $\in$ R, teremos como resultado um número real.

O denominador da fração é $\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}$. Para ser real, devemos ter $|z-1| + |z+1| - 3 > 0 \therefore |z-1| + |z+1| > 3$

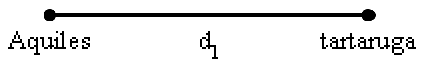
Esta desigualdade representa pontos do plano não pertencentes e exteriores a uma elipse de focos (1; 0) e (–1; 0) com eixo maior igual a 3.



23. Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos t_1, t_2, t_3, … que Aquiles precisa para percorrer as distâncias d_1, d_2, d_3, …, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida. Verifique que os termos t_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

Resolução:

No instante t = 0, temos:



Para o instante t = t_1 (tempo que Aquiles levou para percorrer d_1): $t_1 = \dfrac{d_1}{v_A}$

Nesse período, a tartaruga deslocou-se $d_2 = v_t.\dfrac{d_1}{v_A}$

Para o instante t = t_2: $t_2 = \dfrac{d_2}{v_A} \Rightarrow t_2 = \dfrac{v_t}{v_A}.\dfrac{d_1}{v_A} = \dfrac{v_t}{v_A^2}.d_1$ e para a tartaruga $d_3 = \dfrac{v_t^2}{v_A^2}.d_1$

Analogamente:

$t_3 = \dfrac{v_t^2}{v_A^3}.d_1$

$\vdots$

$t_n = \dfrac{v_t^{n-1}}{v_A^n}.d_1$, que é o termo geral da PG infinita, em que $a_1 = t_1 = \dfrac{d_1}{v_A}$ e de razão $q = \dfrac{v_t}{v_A}$ (que é menor que 1, pois $v_t < v_A$, garantindo a convergência da soma)

Sua soma é dada por: $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{d_1/v_A}{1-v_t/v_A} \Rightarrow \boxed{S = \dfrac{d_1}{v_A - v_t}}$

Esta soma representa o tempo que Aquiles levará para alcançar a tartaruga.
Obs: Da Cinemática, temos:
Aquiles: $S_A(t) = v_A.t$
Tartaruga: $S_t(t) = d_1 + v_t.t$

No encontro: $S_A(t) = S_t(t) \Rightarrow v_A.t = d_1 + v_t.t \Rightarrow t = \dfrac{d_1}{v_A - v_t}$, como já mostrado anteriormente.

---

24. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo *f(xy) = f(x) + f(y)* em todo seu domínio, é par.

Resolução:

Para x = y = a, temos: $f(a.a) = f(a) + f(a) \therefore f(a^2) = 2f(a);\ \forall a \in R$

Para x = y = –a, temos: $f(-a.-a) = f(-a) + f(-a) \therefore f(a^2) = 2f(-a);\ \forall a \in R$

Portanto: 2f(a) = 2f(–a) $\therefore$ f(a) = f(–a) para $\forall a \in$ R. Logo a função é PAR.

---

25. Sejam *a*, *b*, *c* e *d* constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a –5, determine o valor de *a* + *b* + *c* + *d*.

Resolução:

Seja $\{a, b, c, d\} \subset R$. Temos:

$P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$

$P_2(x) = x^2 + 2x + 4$

$P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$

$P_4(x) = x^2 - x + 2$

1º) $P_1(x)$ é divisível por $P_2(x)$, logo:

$$\begin{array}{l|l} x^4+0x^3+ax^2+0x+b & x^2+2x+4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4-2x^3-4x^2} & x^2-2x+a \\ \quad -2x^3+(a-4)x^2+0x & \\ \quad \underline{2x^3+4x^2+8x} & \\ \qquad ax^2+8x+b & \\ \qquad \underline{-ax^2-2ax-4a} & \\ \qquad (8-2a).x+(b-4a) & \end{array}$$

$$(8-2a).x+(b-4a)\equiv 0x+0$$

$$\begin{cases} 8-2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-4a=0 \Rightarrow b=16 \end{cases}$$

2º) $P_3(x) = P_4(x).Q(x) + (-5)$

Logo:

$$\begin{array}{l|l} x^3+cx^2+dx-3 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3+x^2-2x} & x+c+1 \\ (c+1).x^2+(d-2).x-3 & \\ \underline{-(c+1).x^2+(c+1).x-2(c+1)} & \\ \qquad (d+c-1).x-2c-5 & \end{array}$$

$$(d+c-1).x-2c-5\equiv 0x+(-5)$$

$$\begin{cases} -2c-5=-5 \Rightarrow c=0 \\ d+c-1=0 \Rightarrow d=1 \end{cases}$$

$$\therefore a+b+c+d=4+16+0+1 \Rightarrow \boxed{a+b+c+d=21}$$

---

26. Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

Resolução:

Seja A a matriz apresentada e $\det A = \begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$

Multiplicando a 1ª, 2ª, 3ª e 4ª linha por a, b, c e d, respectivamente, temos:

$$\det A = \frac{1}{abcd}.\begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \frac{abcd}{abcd}.\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Trata-se do determinante de Vandermonde. Assim:

$$\boxed{\det A = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}$$

27. Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real x,

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)=a,$$

admite solução.

Resolução:

Com a, $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)$ e $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\forall x \in R$, vem:

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)\right]=\operatorname{tg}a$$

$$\frac{\sqrt{2}-1+\cancel{\frac{e^x}{2}}+\sqrt{2}-1-\cancel{\frac{e^x}{2}}}{1-\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)}=\operatorname{tg}a \Rightarrow \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{e^{2x}}{4}}=\operatorname{tg}a \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{e^{2x}}{8\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\operatorname{tg}a$$

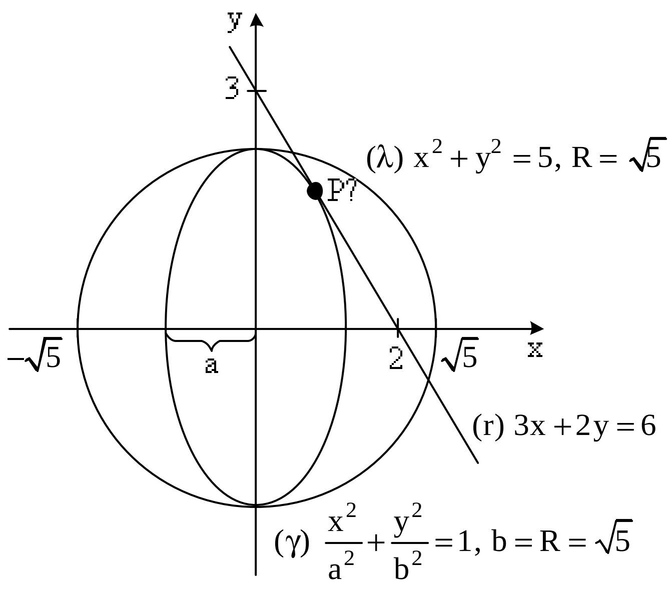
$$\Rightarrow e^{2x}=8\left(\sqrt{2}-1\right)(\operatorname{cotg}a-1)>0 \Rightarrow \operatorname{cotg}a>1 \Rightarrow \boxed{a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[}$$

---

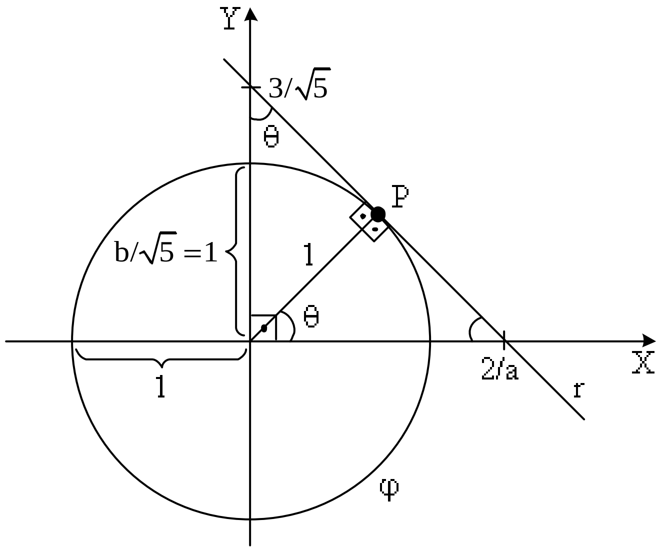
28. Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

Resolução:

As informações remetem à seguinte construção:



Com a mudança de base $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{\sqrt{5}}$, vem, em XOY, a construção:



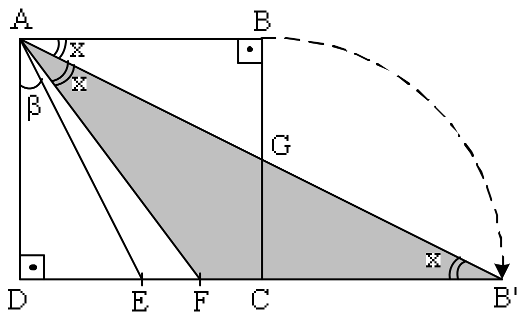
Assim: $Y_P = \text{sen}\theta = \frac{1}{3/\sqrt{5}} \Rightarrow Y_P = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Retornando à base xOy: $y_P = \sqrt{5}.Y_P \Rightarrow y_P = \frac{5}{3} \Rightarrow x_P = \frac{8}{9} \Rightarrow$ $\boxed{P\left(\frac{8}{9}; \frac{5}{3}\right)}$

---

29. Considere um quadrado *ABCD*. Sejam *E* o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e *F* um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que cos α = cos2β, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

Resolução:



Como $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$, vamos rotacionar o lado $\overline{BC}$ em torno de C até a reta $\overleftrightarrow{CD}$. Obtemos assim o triângulo isósceles AFB'. A base $\overline{AB}$' do triângulo AFB' corta $\overline{BC}$ em G tal que $\Delta ABG \cong \Delta B'CG$ e BG = GC.

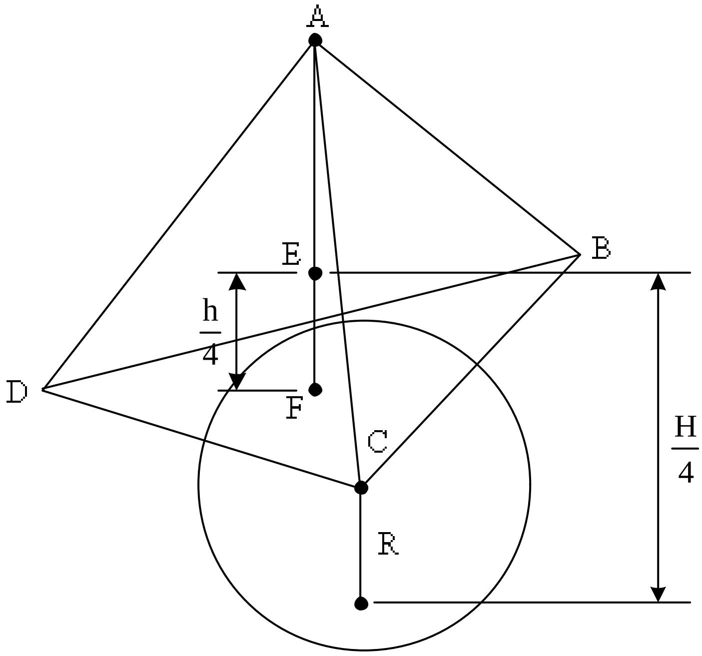
Temos então que $\alpha = 2x$. Os triângulos ADE e ABG são congruentes. Então $\beta = x$.

Assim, $\alpha = 2\beta$ e podemos afirmar que cos α = cos 2β.

30. Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

Resolução:

Observe a figura, que a esfera desenhada é uma das 4 do enunciado:



Tetraedro regular de aresta 2R e altura $h = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

E é o centro do tetraedro regular e $EF = \frac{h}{4}$

E também é o centro do tetraedro regular circunscrito às 4 esferas.

Assim: $EF + R = \frac{H}{4}$, tal que H é a altura do novo tetraedro. Então:

$$\frac{R\sqrt{6}}{6} + R = \frac{H}{4} \therefore H = 4R + \frac{2}{3}R\sqrt{6} \therefore H = \frac{12R + 2R\sqrt{6}}{3} = \frac{2R\left(\sqrt{6}+6\right)}{3}$$

L é o lado do tetraedro circunscrito: $H = \frac{L\sqrt{6}}{3} \therefore \frac{2R\left(\sqrt{6}+6\right)}{3} = \frac{L\sqrt{6}}{3} \therefore L = \frac{2R\left(6+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{6}} = 2R\left(\sqrt{6}+1\right)$

Volume do tetraedro $= \frac{L^3\sqrt{2}}{12} = \left[2R\left(\sqrt{6}+1\right)\right]^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = 8R^3\left(\sqrt{6}+1\right)^3 . \frac{\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \boxed{V = \frac{2\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{6}+1\right)^3}{3}}$

Errata da resolução ITA 2003 - Física

Questão 13

Alternativa: E

O som da corneta, com freqüência aparente de 485 Hz, foi emitido na altura 18,3 m e levará um tempo Δt para atingir o aluno:

$$\Delta t = \frac{h}{v_s} = \frac{18,3}{340} \Rightarrow \Delta t \cong 0,053\ s$$

Então, a distância total percorrida pela corneta será dada por:

$$d = 18,3 + v_{fonte}.\Delta t + \frac{1}{2}g.\Delta t^2 = 18,3 + 18,9.0,053 + \frac{1}{2}.9,8.0,053^2$$

Logo: $\boxed{d \cong 19,3\ m}$

Professores responsáveis:	Coordenação:	Digitação e diagramação:
Alex Sander Schröeder de Barros	*André Oliveira de Guadalupe*	*Anderson Flávio Correia*
Celso Faria de Souza	*Nicolau Arbex Sarkis*	*Antonio José Domingues da Silva*
Émerson de Maria		*João Paulo Marques de Lima*
Fabiano Rodrigues dos Santos		*Kleber de Souza Portela*
Henrique Ferreira		*Nelson de Siqueira*
Umberto César Chacon Malanga		

ALOJAMENTO

O Poliedro possui um alojamento em São José dos Campos com todas as facilidades para hospedar alunos de outras cidades. O **Alojamento Poliedro** é uma pousada construída num espaço de 10.000 m^2, com acomodações amplas e confortáveis, que garante o melhor desempenho do aluno durante o curso.

O convívio nos alojamentos é importante, pois cria-se um ambiente de forte estudo e concentração, não só pelo apoio dado por professores e coordenadores do Poliedro, como também pela progressiva interação dos alunos, que podem discutir assuntos e questões das diversas matérias, permitindo um crescimento mais homogêneo do grupo.

O alojamento oferece alimentação completa e dispõe ainda de ônibus fretados que executam o trajeto alojamento-curso-alojamento nos horários de interesse. Tudo isso para que o aluno se preocupe apenas com o estudo.

ENSINO MÉDIO NO POLIEDRO

O Colégio Poliedro possui uma turma 3º Ano IME-ITA, que oferece uma preparação integrada ao cursinho, específica para os vestibulares do IME, ITA, Escolas Militares e Faculdades de Engenharia.