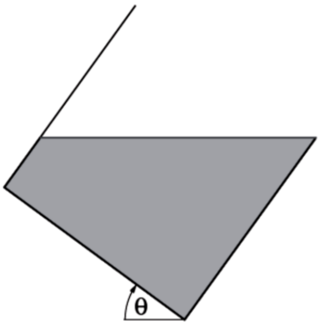
LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 10

109 **Unicamp 2013** Um recipiente cúbico de aresta *a* e sem tampa, apoiado em um plano horizontal, contém água até a altura $\frac{3}{4}a$. Inclina-se lentamente o cubo, girando-o em um ângulo θ em torno de uma das arestas da base, como está representado na figura a seguir.

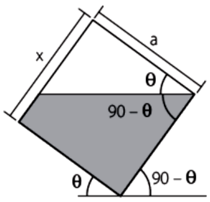


a) Supondo que o giro é interrompido exatamente antes de a água começar a derramar, determine a tangente do ângulo θ.

b) Considerando, agora, a inclinação tal que $\tan(\theta) = 1/4$, com $0 < \theta < \pi/2$, calcule o valor numérico da expressão $\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta)$.

Gabarito - LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 10

109. a) De acordo com o enunciado, podemos construir a seguinte figura:



Por outro lado, quando apoiado em um plano horizontal, o recipiente contém água até a altura $\frac{3a}{4}$, o que significa que o volume de água corresponde a $\frac{3}{4}$ do volume do recipiente; assim, o volume de ar contido no recipiente corresponde a $\frac{1}{4}$ do volume do cubo e é equivalente a um prisma triangular.

$$V_{ar} = V_{pris}$$

$$\frac{1}{4}a^3 = \frac{a \cdot x}{2} \cdot a \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

A tangente do ângulo θ é dada por:

$$\text{tg}\theta = \frac{x}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a}$$

$$\boxed{\text{tg}\theta = \frac{1}{2}}$$

b) Se $\text{tg}\theta = \frac{1}{4}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então:

$$\text{sen}\theta = \frac{x}{x\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\theta = \frac{4x}{x\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta - 2\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta) = \frac{16}{17} - \frac{1}{17} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta) = \frac{15}{17} - \frac{8}{17}$$

$$\boxed{\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta) = \frac{7}{17}}$$

LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 11

67 **Unicamp 2017** Sabendo que *k* é um número real, considere a função $f(x) = k\,\text{sen}x + \cos x$, definida para todo número real *x*.

a) Seja t um número real tal que $f(t) = 0$. Mostre que $f(2t) = -1$.

b) Para $k = 3$, encontre todas as soluções da equação $f(x)^2 + f(-x)^2 = 10$ para $0 \le x \le 2\pi$.

Gabarito - LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 11

67. a) (I): Se $f(x) = k \cdot \text{sen } x + \cos x$ e $f(t) = 0$, então

$$f(t) = k \cdot \text{sen } t + \cos t = 0 \Rightarrow k \cdot \text{sen } t = -\cos t.$$

Como $\text{sen}(2t) = 2 \cdot \text{sen } t \cdot \cos t$ e $\cos(2t) = \cos^2 t - \text{sen}^2 t$:

$$f(2t) = k \cdot \underbrace{\text{sen}(2t)}_{2\text{sen}t \cdot \cos t} + \underbrace{\cos(2t)}_{\cos^2 t - \text{sen}^2 t}$$

De (I), pode-se concluir que:

$$f(2t) = 2\underbrace{k \cdot \text{sen } t}_{-\cos t} \cdot \cos t + \cos^2 t - \text{sen}^2 t \Rightarrow f(2t) = \cos^2 t - \text{sen}^2 t$$

Lembrando que a relação fundamental da trigonometria impõe que $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$, então:

$$f(2t) = -\cos^2 t - \text{sen}^2 t \Rightarrow f(2t) = -\underbrace{(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}_{1} \Rightarrow f(2t) = -1 \quad \text{(c.q.d.)}$$

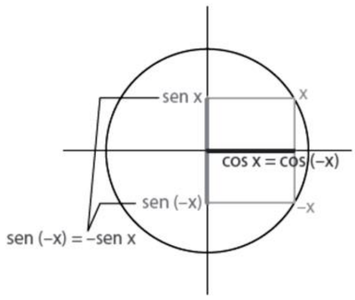
b) Para $k = 3$, tem-se que (I) $f(x) = 3\text{sen } x + \cos x$.

Além disso, sabe-se que:

$$\underbrace{\text{sen}(-x) = -\text{sen } x}_{\text{função ímpar}}$$

e

$$\underbrace{\cos(-x) = \cos x}_{\text{função par}}$$



Portanto:

(II) $f(-x) = -3\text{sen } x + \cos x$

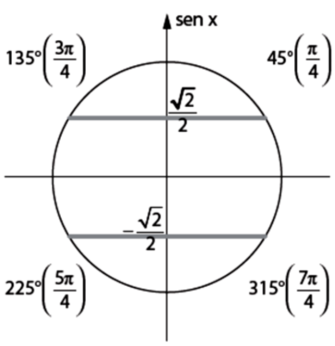
Nesse caso, para $[f(x)]^2 + [f(-x)]^2 = 10$, teremos, de (I) e (II), a seguinte equação:

$$(3\text{sen } x + \cos x)^2 + (-3\text{sen } x + \cos x)^2 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 5 \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \text{ (R.F.T.)}} \text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{[0,2\pi]}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}}$$

Uma vez que:



121 **UFPE 2011** Um escritório tem 7 copiadoras e 8 funcionários que podem operá-las. Calcule o número m de maneiras de se copiar simultaneamente (em máquinas distintas, sendo operadas por funcionários diferentes) 5 trabalhos idênticos neste escritório. Indique a soma dos dígitos de m.

120 **Unesp 2011** Em todos os 25 finais de semana do primeiro semestre de certo ano, Maira irá convidar duas de suas amigas para ir à sua casa de praia, sendo que nunca o mesmo par de amigas se repetirá durante esse período. Respeitadas essas condições, determine o menor número possível de amigas que ela poderá convidar.

Dado: $\sqrt{201} \cong 14,2$.

119 **Unicamp 2011** O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gorduras (lipídios) no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como "bom colesterol"), colesterol LDL (o "mau colesterol") e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: CT = LDL + HDL + TG/5. A tabela a seguir mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

Indicador	Valores normais
CT	Até 200 mg/dℓ
LDL	Até 130 mg/dℓ
HDL	Entre 40 e 60 mg/dℓ
TG	até 150 mg/dℓ

a) O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198 mg/dℓ, e que a de triglicérides era igual a 130 mg/dℓ. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?

b) Acidentalmente, o laboratório SangueBom deixou de etiquetar as amostras de sangue de cinco pessoas. Determine de quantos modos diferentes seria possível relacionar essas amostras às pessoas, sem qualquer informação adicional. Na tentativa de evitar que todos os exames fossem refeitos, o laboratório analisou o tipo sanguíneo das amostras, e detectou que três delas eram de sangue O+ e as duas restantes eram de sangue A+. Nesse caso, supondo que cada pessoa indicasse seu tipo sanguíneo, de quantas maneiras diferentes seria possível relacionar as amostras de sangue às pessoas?

118 **Fuvest 2011** Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.

a) Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?

b) A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?

c) Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual é a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?

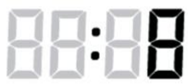
117 **Fuvest 2011**

a) Quantos são os números inteiros positivos de quatro algarismos, escolhidos sem repetição, entre 1, 3, 5, 6, 8, 9?

b) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a), quantos são divisíveis por 5?

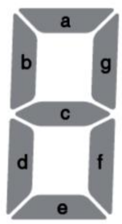
c) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a), quantos são divisíveis por 4?

116 **Unicamp 2012** O mostrador de determinado relógio digital indica horas e minutos, como ilustra a figura a seguir, na qual o dígito da unidade dos minutos está destacado.

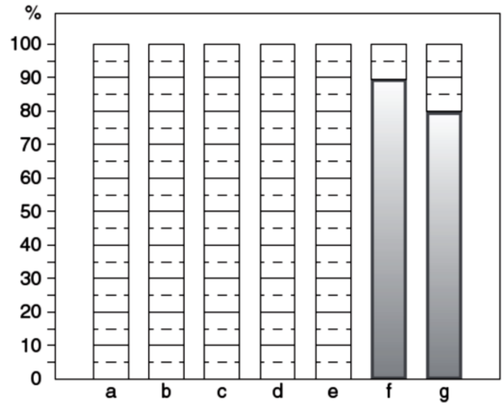


O dígito em destaque pode representar qualquer um dos dez algarismos, bastando para isso que se ative ou desative as sete partes que o compõem, como se mostra abaixo.

a) Atribuindo as letras a, b, c, d, e, f, g aos trechos do dígito destacado do relógio, como se indica a seguir:



pinte no gráfico de barras a seguir a porcentagem de tempo em que cada um dos trechos fica aceso. Observe que as porcentagens referentes aos trechos f e g já estão pintadas.



b) Supondo, agora, que o dígito em destaque possua dois trechos defeituosos, que não acendem, calcule a probabilidade de o algarismo 3 ser representado corretamente.

115 **Fuvest 2012**

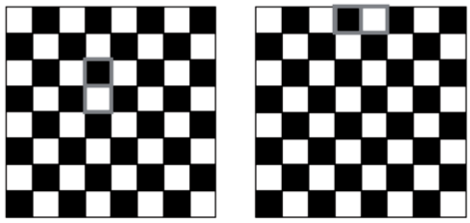
a) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos *A*, *B*, *C* e *D*, cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos *A* e *C* serão formados apenas por meninas e o grupo *B*, apenas por meninos?

b) Acontecida a fase inicial do torneio, a fase semifinal terá os jogos entre Maria e João e entre Marta e José. Os vencedores de cada um dos jogos farão a final. Dado que a probabilidade de um menino ganhar de uma menina é 3/5, calcule a probabilidade de uma menina vencer o torneio.

114 **UFG 2013** Uma pessoa dispõe de R$ 800,00 para comprar camisas e calças, de modo a obter exatamente vinte trajes distintos. Cada traje consiste de uma calça e uma camisa, que custam R$ 110,00 e R$ 65,00, respectivamente. Considerando-se que cada peça pode fazer parte de mais de um traje, calcule o número de camisas e de calças que a pessoa comprará sem ultrapassar a quantia em dinheiro de que dispõe.

113 **Unesp 2013** Quantos são os números naturais que podem ser decompostos em um produto de quatro fatores primos, positivos e distintos, considerando que os quatro sejam menores que 30?

112 **Unifesp 2015** Um tabuleiro de xadrez possui 64 casas quadradas. Duas dessas casas formam uma dupla de casas contíguas se estão lado a lado, compartilhando exatamente um de seus lados. Veja dois exemplos de duplas de casas contíguas nos tabuleiros.



Dispõem-se de duas peças, uma na forma ☺, e outra na forma ☹, sendo que cada uma cobre exatamente uma casa do tabuleiro.

a) De quantas maneiras diferentes é possível colocar as peças ☺ e ☹ em duplas de casas contíguas de um tabuleiro de xadrez?

b) Considere as 64 casas de um tabuleiro de xadrez como sendo os elementos de uma matriz $A=(a_{ij})_{8\times 8}$. Coloca-se a peça ☺, ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro tal que $i = j$. Em seguida, a peça ☹ será colocada, também ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro que esteja desocupada. Na situação descrita, calcule a probabilidade de que as peças ☺ e ☹ tenham sido colocadas em duplas de casas contíguas do tabuleiro.

111 **Fuvest 2015** Um "alfabeto minimalista" é constituído por apenas dois símbolos, representados por * e #. Uma palavra de comprimento n, $n \geq 1$, é formada por n escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, # é uma palavra de comprimento 1 e #**# é uma palavra de comprimento 4.

Usando esse alfabeto minimalista,

a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?

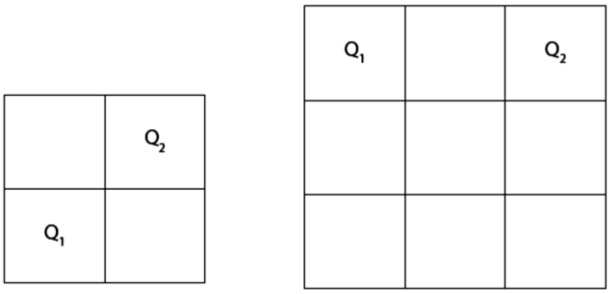
b) qual é o menor valor de N para o qual é possível formar 1.000.000 de palavras de tamanho menor ou igual a N?

70 **Unesp 2016** Está previsto que, a partir de 1º de janeiro de 2017, entrará em vigor um sistema único de emplacamento de veículos para todo o Mercosul, o que inclui o Brasil. As novas placas serão compostas por 4 letras e 3 algarismos.

Admita que no novo sistema possam ser usadas todas as 26 letras do alfabeto, incluindo repetições, e os 10 algarismos, também incluindo repetições. Admita ainda que, no novo sistema, cada carro do Mercosul tenha uma sequência diferente de letras e algarismos em qualquer ordem. Veja alguns exemplos das novas placas.

No novo sistema descrito, calcule o total de placas possíveis com o formato "Letra-Letra-Algarismo-Algarismo-Algarismo-Letra-Letra", nessa ordem. Em seguida, calcule o total geral de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa. Deixe suas respostas finais em notação de produto ou de fatorial.

69 **Fuvest 2017** Um quadriculado é formado por $n \times n$ quadrados iguais, conforme ilustrado para $n = 2$ e $n = 3$. Cada um desses quadrados será pintado de azul ou de branco. Dizemos que dois quadrados Q_1 e Q_2 do quadriculado estão conectados se ambos estiverem pintados de azul e se for possível, por meio de movimentos horizontais e verticais entre quadrados adjacentes, sair de Q_1 e chegar a Q_2 passando apenas por quadrados pintados de azul.



$n = 2$ $n = 3$

a) Se $n = 2$, de quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto inferior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

b) Suponha que $n = 3$ e que o quadrado central esteja pintado de branco. De quantas maneiras distintas será possível pintar o restante do quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

c) Suponha que $n = 3$. De quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

68 **Unifesp 2018** Em uma classe de 16 alunos, todos são fluentes em português. Com relação à fluência em línguas estrangeiras, 2 são fluentes em francês e inglês, 6 são fluentes apenas em inglês e 3 são fluentes apenas em francês.

a) Dessa classe, quantos grupos compostos por 2 alunos podem ser formados **sem** alunos fluentes em francês?

b) Sorteando ao acaso 2 alunos dessa classe, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja fluente em inglês?

Gabarito - LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 12

121. 9

120. 1. Seja n: o número de amigas ($n \in \mathbb{N}$)

Assim, $C_{n;2} \geq 25$.

2. $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} \geq 25 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)} \geq 25 \therefore n^2 - n - 50 \geq 0$

3. Raízes aproximadas da expressão $n^2 - n - 50$ são $-6{,}6$ e $7{,}6$.

119. a) Substituindo os valores temos:

$$198 = \frac{130}{5} + LDL + HDL \therefore LDL = 172 - HDL$$

Como $40 \leq HDL \leq 60 \Rightarrow 40 \leq 172 - LDL \leq 60 \therefore 112 \leq LDL \leq 132$

Assim: $\boxed{112 \leq LDL \leq 130}$

b) Distribuindo as amostras entre as 5 pessoas, temos SI = 120 maneiras distintas.

Como 3 pessoas são O+ e 2 são A+, temos $3! \cdot 2!$ maneiras de relacionar as amostras de sangue, ou seja, 12 maneiras.

118. a) O total de permutações das 14 questões é igual a 14! (P = 14!).

Assim, poderão ser produzidas 14! versões distintas da prova.

b) As 7 primeiras questões devem ser de Português, então existem 7! permutações possíveis para essa parte da prova. A prova é composta de 4 questões de Geografia e 3 de Matemática, que podem ser permutadas de 4! e 3! modos diferentes, respectivamente.

Como a última questão da prova deve ser de Matemática e essa disciplina não pode ter duas questões consecutivas, as questões dessa parte da prova podem ser distribuídas em 6 modos.

MGMGGGM	GGMGMGM
MGGMGGM	GMGGMGM
MGGGMGM	GMGMGGM

Assim, poderão ser produzidas $7! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6$ versões classe A distintas da prova, ou 4.354.560.

c) O número de provas, cujas 7 primeiras questões são de Português, é: $7! \cdot 7!$

O número de versões classe A distintas da prova é: $7! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6$.

Desse modo, a probabilidade de o candidato, nessas condições, receber uma versão classe A é:

$$p = \frac{7! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6}{7! \cdot 7!} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 6}{7!} = \frac{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{6}}{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}} \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{6}{35}}$$

117. a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ números.

b) Para ser divisível por 5, dentro dos possíveis números do item a, o número necessita ser terminado em 5. Assim, temos apenas uma possibilidade de terminação dentre os 6 números possíveis.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ números.

c) Para ser divisível por 4, os dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Dentre os números disponíveis, podemos ter apenas o 16, 36, 56, 68 ou 96, totalizando 5 possibilidades. Logos, teremos:

$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ números.

116. a) Basta verificar a série de 0 a 9 (dada como modelo no enunciado):

a → aceso em 8 dos 10 dígitos → 80%

b → aceso em 6 dos 10 dígitos → 60%

c → aceso em 7 dos 10 dígitos → 70%

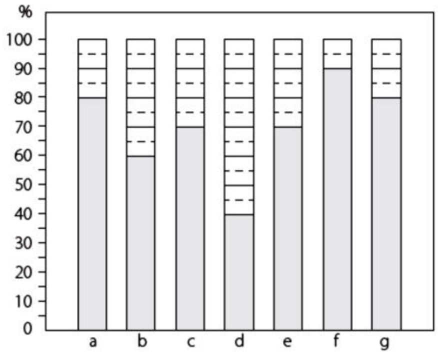
d → aceso em 4 dos 10 dígitos → 40%

e → aceso em 7 dos 10 dígitos → 70%

f → aceso em 9 dos 10 dígitos → 90%

g → aceso em 8 dos 10 dígitos → 80%

Com os valores plotados na grade fornecida, temos:



b) Inicialmente, dimensionamos o espaço amostral: há um total de $C_{7,2}=21$ modos de termos dois trechos defeituosos (queimados). Exemplos seriam "a" e "b", "a" e "e", "c" e "g", e assim por diante.

Para que o dígito 3 seja corretamente representado, há apenas uma combinação de trechos que pode estar queimada ("b" e "d"), pois todos os demais trechos são usados para representar o dígito 3.

Assim, temos a probabilidade: $\boxed{P=\frac{1}{21}}$.

115. a) $C_{10,4}\cdot C_{6,4}\cdot C_{6,4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}=47.250$

b) Semifinal $\begin{cases}\text{Maria x João \_\_\_\_\_\_} \\ \text{Marta x José \_\_\_\_\_\_}\end{cases}$ ______ Campeão

$P(\text{menino ganhar})=\frac{3}{5}\Rightarrow P(\text{menina ganhar})=\frac{2}{5}$

Caso 1: Meninas vencem ambas as semifinais. Maria x Marta.
$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{4}{25}=\frac{20}{125}$

Caso 2: Maria ganha de João. José vence Marta. Maria vence José na final.
$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{125}$

Caso 3: João ganha de Maria. Marta vence José. Marta vence João.
$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{125}$

Logo: P(menina vencer) $=\frac{20}{125}\cdot\frac{12}{125}\cdot\frac{12}{125}=\frac{44}{125}$

$\boxed{P(\text{menina vencer})=\frac{44}{125}}$

114. A pessoa comprará 4 calças e 5 camisas.

113. Inicialmente, vamos escrever os números (fatores) primos menores que 30: 2, 3, 5, 7, 11, 13 17, 19, 23, 29.

Observe que temos 10 fatores dos quais devemos escolher 4 distintos, ou seja, $C_{10,4}=\binom{10}{4}=\boxed{210\text{ naturais}}$.

112. a) Observando o tabuleiro, temos 7 duplas de casas contíguas em cada uma das 8 linhas e em cada uma das 8 colunas. Logo, temos $2\cdot 7\cdot 8=112$ duplas de casas contíguas. Temos ainda a possibilidade de as peças trocarem de lugar em cada dupla. Logo, $2\cdot 112=\boxed{224}$ maneiras diferentes de posicionar as peças.

b) De acordo com o enunciado, se i = j, a 1ª peça será colocada na diagonal do tabuleiro, podendo ser posta nos cantos (a_{11} ou a_{88}) ou não (a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66} ou a_{77}).

Se a 1ª peça for colocada nos cantos do tabuleiro, temos 2 possibilidades para dispor a 2ª peça. Porém, se a 1ª peça não for colocada nos cantos, temos 4 possibilidades para dispor a 2ª peça.

Assim:

$$P=\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{63}+\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{63}=\frac{1}{126}+\frac{6}{126}=\frac{7}{126}=\boxed{\frac{1}{18}}$$

111. Como o alfabeto é formado apenas por 2 símbolos, o número de "palavras" de comprimento n é 2^n.

a) Logo, o número de "palavras" com comprimento menor que 6 é

$$2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=\frac{2(1-2^5)}{1-2}=62.$$

b) O número de "palavras" com comprimento menor ou igual a N é

$$2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^N=\frac{2(1-2^N)}{1-2}.$$

Portanto, N é o menor natural que satisfaz $\frac{2(1-2^N)}{1-2}\geq 1000\,000 \therefore 2^N\geq 500001.$

Como N é natural, $2^{18}=262\,144$ e $2^{19}=524\,288$, podemos concluir que N = 19.

LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capítulo 11

128 Unesp 2011 A média aritmética dos elementos de um conjunto formado por n valores numéricos diminui quatro unidades quando o número 58 é retirado. Quando o número 57 é adicionado ao conjunto original, a média aritmética dos elementos desse novo conjunto aumenta três unidades em relação à média inicial. Qual o valor da soma dos elementos originais do conjunto?

127 Unicamp 2011 Um grupo de pessoas resolveu encomendar cachorros-quentes para o lanche. Entretanto, a lanchonete enviou apenas 15 sachês de mostarda e 17 de *ketchup*, o que não é suficiente para que cada membro do grupo receba um sachê de cada molho. Desta forma, podemos considerar que há três subgrupos: um formado pelas pessoas que ganharão apenas um sachê de mostarda, outro por aquelas que ganharão apenas um sachê de *ketchup*, e o terceiro pelas que receberão um sachê de cada molho.

a) Sabendo que, para que cada pessoa ganhe ao menos um sachê, 14 delas devem receber apenas um dos molhos, determine o número de pessoas do grupo.

b) Felizmente, somente 19 pessoas desse grupo quiseram usar os molhos. Assim, os sachês serão distribuídos aleatoriamente entre essas pessoas, de modo que cada uma receba ao menos um sachê. Nesse caso, determine a probabilidade de que uma pessoa receba um sachê de cada molho.

126 UFG 2012 Um fabricante combina cereais, frutas desidratadas e castanhas para produzir três tipos de granola. As quantidades, em gramas, de cada ingrediente utilizado na preparação de 100 g de cada tipo de granola são dadas na tabela a seguir.

Tipo de granola/ ingredientes	Cereais	Frutas	Castanhas
Light	80	10	10
Simples	60	40	0
Especial	60	20	20

O fabricante dispõe de um estoque de 18 kg de cereais, 6 kg de frutas desidratadas e 2 kg de castanhas. Determine quanto de cada tipo de granola ele deve produzir para utilizar exatamente o estoque disponível.

125 Unicamp 2013 Na formulação de fertilizantes, os teores percentuais dos macronutrientes N, P e K, associados respectivamente a nitrogênio, fósforo e potássio, são representados por x, y e z.

a) Os teores de certo fertilizante satisfazem o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x+y-z=0{,}20 \\ 2y+z=0{,}55 \\ z=0{,}25 \end{cases}$$

Calcule x e y nesse caso.

b) Suponha que para outro fertilizante valem as relações $24\% \le x+y+z \le 54\%$, $x \ge 10\%$, $y \ge 20\%$ e $z = 10\%$. Indique no plano cartesiano a seguir a região de teores (x, y) admissíveis para tal fertilizante.

124 Unicamp 2013 A numeração dos calçados obedece a padrões distintos, conforme o país. No Brasil, essa numeração varia de um em um, e vai de 33 a 45, para adultos. Nos Estados Unidos a numeração varia de meio em meio, e vai de 3,5 a 14 para homens e de 5 a 15,5 para mulheres.

a) Considere a tabela abaixo.

Numeração brasileira (t)	Comprimento do calçado (x)
35	23,8 cm
42	27,3 cm

Suponha que as grandezas estão relacionadas por funções afins t(x) = ax + b para a numeração brasileira e x(t) = ct + d para o comprimento do calçado. Encontre os valores dos parâmetros *a* e *b* da expressão que permite obter a numeração dos calçados brasileiros em termos do comprimento, **ou** os valores dos parâmetros *c* e *d* da expressão que fornece o comprimento em termos da numeração.

b) A numeração dos calçados femininos nos Estados Unidos pode ser estabelecida de maneira aproximada pela função real *f* definida por f(x) = 5(x – 20)/3, em que *x* é o comprimento do calçado em cm.

Sabendo que a numeração dos calçados n_k forma uma progressão aritmética de razão 0,5 e primeiro termo $n_1 = 5$, em que $n_k = f(c_k)$, com *k* natural, calcule o comprimento c_5.

73 Unicamp 2017 Sabendo que *m* é um número real, considere o sistema linear nas variáveis *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} mx+2z=4, \\ x-y+z=3, \\ 2x+mz=4. \end{cases}$$

a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de *m* para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz *A* é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.

b) Para $m = 2$, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto $x\,y\,z$ é mínimo.

Gabarito - LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 11

124. a) Observando a tabela e utilizando as funções afins do enunciado, podemos escrever:

(I) $\begin{matrix} t(23{,}8)=35 \\ t(27{,}3)=42 \end{matrix}$ ou (II) $\begin{matrix} x(35)=23{,}8 \\ x(42)=27{,}3 \end{matrix}$

Optando por (I) e substituindo na função t(x) = ax + b, temos:

$$\begin{cases} a\cdot 23{,}8+b=35 \\ a\cdot 27{,}3+b=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23{,}8a+b=35 \\ 3{,}5a=7 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=-12{,}6 \\ a=2 \end{cases}}$$

Optando por (II) e substituindo na função x(t) = cx + d, temos:

$$\begin{cases} c\cdot 35+d=23{,}8 \\ c\cdot 42+d=27{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35c+d=23{,}8 \\ 7c=3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} d=6{,}3 \\ c=0{,}5 \end{cases}}$$

b) A numeração americana dos calçados femininos é uma progressão aritmética de razão r = 0,5 e $n_1 = 5$. Assim, $n_5 = n_1 + 4\cdot r \Leftrightarrow n_5 = 5+4\cdot 0{,}5 = 7$.

Substituindo na função dada, temos:

$$f(c_5)=n_5 \Leftrightarrow 5(c_5-20)/3=7$$
$$c_5-20=21/5$$
$$\boxed{c_5=24{,}2\,\text{cm}}$$

125. a) $\begin{cases} 3x+y-z=0{,}20 \quad (1) \\ 2y+z=0{,}55 \quad (2) \\ z=0{,}25 \quad (3) \end{cases}$

Substituindo (3) em (2), conclui-se que y = 0,15.

Na equação (1), temos:

$3x+0{,}15-0{,}25=0{,}20 \Leftrightarrow 3x=0{,}30 \Leftrightarrow \boxed{x=0{,}10}$

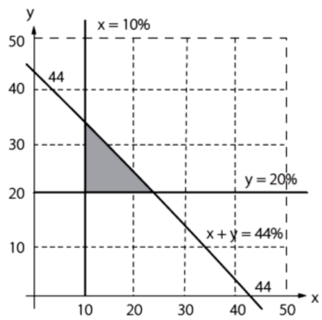
b) Para z = 10%,

$24\% \le x+y+z \le 54\%$

$24\% \le x+y+10\% \le 54\%$

$14\% \le x+y \le 44\%$

Como x ≥ 10% e y ≥ 20%, x + y ≥ 30%. Assim, a desigualdade anterior pode ser substituída por x + y ≤ 44%. A região a ser destacada está à direita da reta x = 10%, acima de y = 20% e abaixo de x + y = 44%, como na figura a seguir.



126. 12 kg de granola *light*, 10 kg de granola simples e 4 kg de granola especial.

127. a) Seja x o número de pessoas. Como 14 receberam 1 sachê, x − 14 receberam 2 sachês. Como temos 32 sachês, podemos escrever $32 = 14 \cdot 1 + (x - 14) \cdot 2 \therefore \boxed{x = 23}$.

b) Vamos calcular agora a probabilidade de que uma pessoa receba um sachê de cada molho. Sendo x o número de pessoas que receberam 2 sachês de cada tipo, 19 − x receberão apenas 1 sachê.

Assim, $19 - x + 2x = 32 \therefore x = 13$.

A probabilidade de que uma pessoa receba um sachê de cada molho é $\frac{13}{19}$.

128. 1. Média aritmética inicial:

$$M_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \therefore x_1 + x_2 + ... + x_n = n \cdot M_i$$

2. Retirando o número 58:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n - 58}{n-1} = M_i - 4 \therefore x_1 + x_2 + ... + x_n = (n-1)\cdot(M_i - 4)$$

3. Adicionando o número 57:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + 57}{n+1} = M_i + 3 \therefore x_1 + x_2 + ... + x_n = (n+1)\cdot(M_i + 3)$$

4. De 1, 2 e 3, podemos montar o sistema: $\begin{cases} M_i + 4n = 62 \\ M_i + 3n = 54 \end{cases}$

$n = 8$ e $Mi = 30$

5. De 1, temos $x_1 + x_2 + ... + x_n = 8 \cdot 30 = 240$.

$\boxed{\text{Soma} = 240}$

73. a) Tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix}. \text{ Então, } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m^2+4 & 0 & 4m \\ m+1 & 1 & m+1 \\ 4m & 0 & m^2+4 \end{bmatrix}, \text{ cuja soma dos elementos é igual a}$$

$2(m^2+4) + 2(4m) + 2(m+1) + 1 = 2m^2 + 10m + 11.$

Como a soma dos quadrados dos elementos de A é igual a

$2m^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + (-1)^2 = 2m^2 + 11$, tem-se que

$2m^2 + 10m + 11 = 2m^2 + 11 \Leftrightarrow \boxed{m = 0}$.

Assim, para que a soma dos quadrados dos elementos de A seja igual à soma dos elementos de A^2, deve-se ter m = 0.

b) Para m = 2, o sistema se reduz a:

$$\left| \begin{matrix} 2x + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + 2z = 4 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x - y + z = 3 \\ x + z = 2 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} (2 - z) - y + z = 3 \\ x = 2 - z \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x = 2 - z \\ y = -1 \end{matrix} \right.$$

O sistema é possível e indeterminado. Logo, o produto xyz se torna uma função P(z) dada por:

$P(z) = x \cdot y \cdot z = (2 - z)(-1) \cdot z = z^2 - 2z$

Portanto, P(z) é uma função de segundo grau com concavidade voltada para cima e atinge mínimo em $z = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1$, com valor mínimo igual a $P(1) = (1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$.

Sendo assim, a solução com o mínimo valor de $x \cdot y \cdot z$ é:

$(2 - z, -1, z) = (2 - 1, -1, 1) = \boxed{(1, -1, 1)}$

LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 12

130 Fuvest 2011

a) Sendo i a unidade imaginária, determine as partes real e imaginária do número complexo:

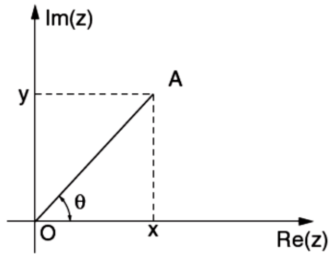
$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i$$

b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

c) Determine os números complexos w tais que $z_0 \cdot w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 \cdot w$ sejam iguais.

d) No plano complexo, determine o número complexo z_1 que é o simétrico de z_0 com relação à reta de equação $y - x = 0$.

131 Unifesp 2011 No plano de Argand-Gauss (figura), o ponto A é chamado afixo do número complexo z = x + yi, cujo módulo (indicado por |z|) é a medida do segmento $\overline{OA}$ e cujo argumento (indicado por **θ**) é o menor ângulo formado com $\overline{OA}$, no sentido anti-horário, a partir do eixo Re (z). O número complexo z = i é chamado "unidade imaginária".



a) Determinar os números reais x tais que $z = (x + 2i)^4$ é um número real.

b) Se uma das raízes quartas de um número complexo z é o complexo z_0, cujo afixo é o ponto (0, a), a > 0, determine |z|.

Gabarito - LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 12

130. a) Primeiramente, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador.

$$z_0=\left[\left(\frac{1}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{1-i}{1-i}\right)\right]-\left[\left(\frac{1}{2i}\right)\cdot\left(\frac{-2i}{-2i}\right)\right]+i=\frac{1-i}{2}-\left(\frac{-2i}{4}\right)+i$$

$$z_0=\frac{1}{2}+i$$

Assim:

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_0)=\frac{1}{2}\ \text{e}\ \operatorname{Im}(z_0)=1}$$

b) Um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, pode ser definido pela seguinte função:

$p(z)=az^2+bz+c$ (I)

Se z_0 é raiz do polinômio, o conjugado de z_0 também deve ser raiz do polinômio.

Das relações de Girard, temos:

$$z_1+z_2=\frac{-b}{a}\quad \text{e}\quad z_1\cdot z_2=\frac{c}{a}$$

Seja $z_1 = z_0$ uma das raízes do polinômio, então $z_2=\overline{z_0}$, onde $\overline{z_0}$ é o conjugado de z_0, temos:

$$z_0+\overline{z_0}=\frac{-b}{a}\quad \text{e}\quad z_0\cdot\overline{z_0}=\frac{c}{a}$$

Do exercício anterior, vimos que $z_0=\frac{1}{2}+i$, logo:

$$z_0+\overline{z_0}=\frac{-b}{a}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+i\right)+\left(\frac{1}{2}-i\right)=\frac{-b}{a}\Leftrightarrow\frac{-b}{a}=1\Leftrightarrow a=-b$$

$$z_0\cdot\overline{z_0}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-i\right)=\frac{c}{a}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow c=\frac{5a}{4}$$

Como os coeficientes devem ser inteiros, para que a fração $\left(\frac{5a}{4}\right)$ seja inteira, a deve ser múltiplo de 4.

Para $a = 4k$, temos:

$b=-4k$ e $C=5k$

Substituindo os valores dos coeficientes em (I):

$p(z)=4kz^2+(-4k)z+5k$

$p(z)=\left(4z^2-4z+5\right)\cdot k$

Onde k deve assumir valores inteiros não nulos. Para k = 1, temos, por exemplo, o polinômio:

$$\boxed{p(z)=4z^2-4z+5}$$

c) Das condições iniciais:

(I) $\operatorname{Re}(z_0\cdot w)=I_m(z_0\cdot w)$ e $|z_0\cdot w|=5\sqrt{2}$ (II)

Seja $w = a + bi$, então:

$$z_0\cdot w=\left(\frac{1}{2}+i\right)\cdot(a+bi)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}bi+ai+bi^2$$

$$z_0\cdot w=\frac{1}{2}a-b+\left(a+\frac{1}{2}b\right)\cdot i$$

Da condição (I):

$$\frac{1}{2}a-b=a+\frac{1}{2}b\Rightarrow\frac{1}{2}a-a=\frac{1}{2}b+b\Leftrightarrow a=-3b$$

Assim:

$$z_0\cdot w=\frac{1}{2}(-3b)-b+\left(-3b+\frac{1}{2}b\right)\cdot i=\frac{-5b}{2}-\frac{5b}{2}i$$

Da condição (II):

$$\left|\frac{-5b}{2}-\frac{5b}{2}i\right|=5\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{-5b}{2}\right)^2+\left(\frac{-5b}{2}\right)^2}=5\sqrt{2}\Rightarrow b=\pm 2$$

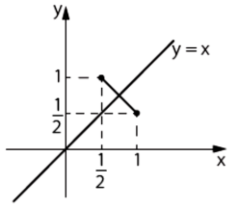
Para $a=-3b$ e $b=\pm 2$, os números complexos são:

$$\boxed{w=-6+2i\ \text{ e }\ w=6-2i}$$

d) O número complexo $z_0=\frac{1}{2}+i$ é identificado como o ponto $\left(\frac{1}{2};1\right)$, cujo simétrico em relação à reta $y-x=0$ é o ponto $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Desse modo, o número complexo z_1 é dado por:

$$\boxed{z_1=1+\frac{1}{2}i}$$



131. a) $(x+2i)^4=(x+2i)^2(x+2i)^2=\left(x^2+4xi+4i^2\right)^2=\left(x^2+4xi-4\right)\left(x^2+4xi-4\right)$

$(x+2i)^4=x^4+8x^3i-24x^2-32xi+16=\left(x^4-24x^2+16\right)+i\left(8x^3-32x\right)$

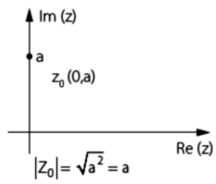
Para tal número ser real, basta que:

$8x^3-32x=0$

$x\left(8x^2-32\right)=0\ \begin{cases}x=0\\x^2=4\Rightarrow x=2\ \text{ou}\ x=-2\end{cases}$

Logo, $x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

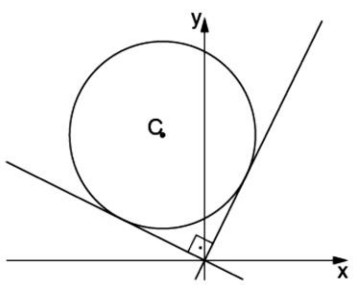
b) Lembrando que o módulo de raiz quarta de um complexo é a raiz quarta (real) do módulo:



Então: $|z_0|=\sqrt[4]{|z|}\Rightarrow|z|=|z_0|^4=a^4$

LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 14

135 **Unicamp 2012** Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas $y = 2x$ e $y = -x/2$, conforme mostra a figura a seguir.



a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta $y = -x/2$.

b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

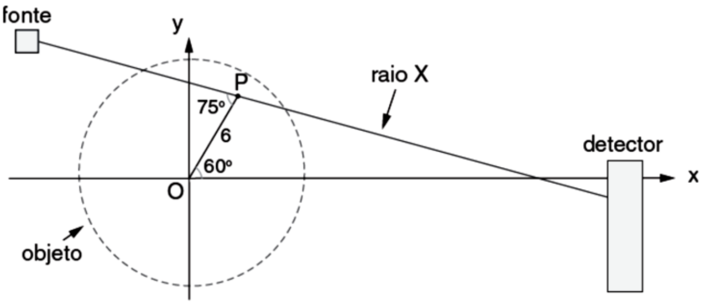
134 Unesp 2014 Chegou às mãos do Capitão Jack Sparrow, do Pérola Negra, o mapa da localização de um grande tesouro enterrado em uma ilha do Caribe.

Ao aportar na ilha, Jack, examinando o mapa, descobriu que P1 e P2 se referem a duas pedras distantes 10 m em linha reta uma da outra, que o ponto A se refere a uma árvore já não mais existente no local e que

a) ele deve determinar um ponto M1 girando o segmento P1A em um ângulo de 90° no sentido anti-horário, a partir de P1;
b) ele deve determinar um ponto M2 girando o segmento P2A em um ângulo de 90° no sentido horário, a partir de P2;
c) o tesouro está enterrado no ponto médio do segmento M1M2.

Jack, como excelente navegador, conhecia alguns conceitos matemáticos. Pensou por alguns instantes e introduziu um sistema de coordenadas retangulares com origem em P1 e com o eixo das abscissas passando por P2. Fez algumas marcações e encontrou o tesouro.

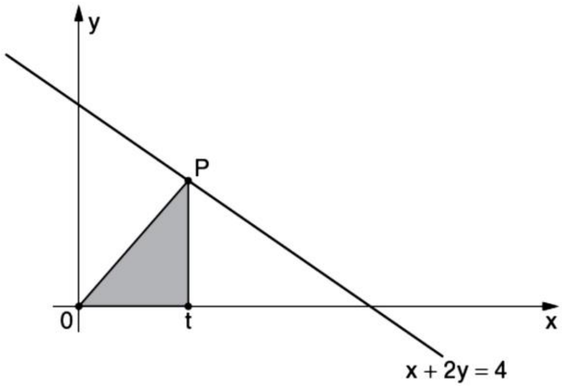
133 Unifesp 2015 Um tomógrafo mapeia o interior de um objeto por meio da interação de feixes de raios X com as diferentes partes e constituições desse objeto. Após atravessar o objeto, a informação do que ocorreu com cada raio X é registrada em um detector, o que possibilita, posteriormente, a geração de imagens do interior do objeto.



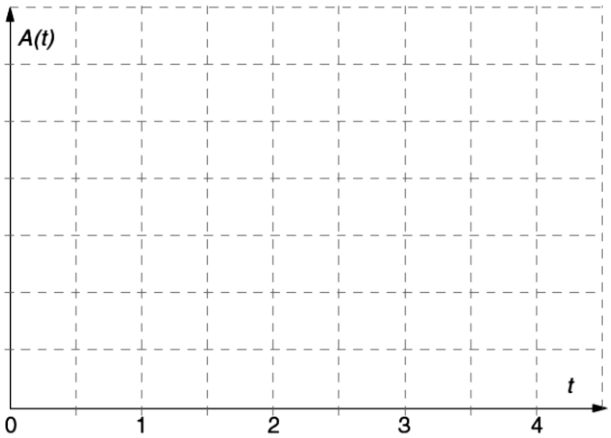
No esquema indicado na figura, uma fonte de raios X está sendo usada para mapear o ponto P, que está no interior de um objeto circular centrado na origem O de um plano cartesiano. O raio X que passa por P se encontra também nesse plano. A distância entre P e a origem O do sistema de coordenadas é igual a 6.

a) Calcule as coordenadas (x, y) do ponto P.
b) Determine a equação reduzida da reta que contém o segmento que representa o raio X da figura.

132 Unicamp 2015 Seja *r* a reta de equação cartesiana $x + 2y = 4$. Para cada número real *t* tal que $0 < t < 4$, considere o triângulo *T* de vértices em (0, 0), (*t*, 0) e no ponto *P* de abscissa $x = t$ pertencente à reta *r*, como mostra a figura abaixo.

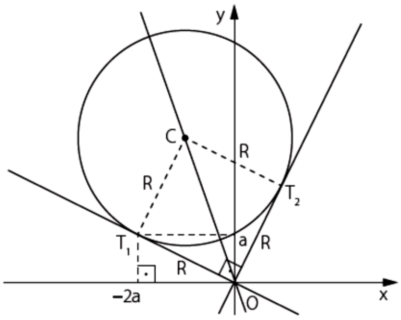


a) Para $0 < t < 4$, encontre a expressão para a função $A(t)$, definida pela área do triângulo *T*, e esboce o seu gráfico.



b) Seja *k* um número real não nulo e considere a função $g(x) = k/x$, definida para todo número real *x* não nulo. Determine o valor de *k* para o qual o gráfico da função *g* tem somente um ponto em comum com a reta *r*.

135. a)



De acordo com o texto, o ponto T_1 pertence à reta de equação $y = -x/2$, então suas coordenadas são $T_1(-2a, a)$. A medida $OT_1 = OT_2 = R = 2$, pois o quadrilátero OT_1T_2C é um quadrado; assim, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$(-2a)^2 + a^2 = 2^2$

$5a^2 = 4$

$a^2 = \frac{4}{5} = \frac{20}{25} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \boxed{T_1\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$

b) Seja r a reta de equação $y = 2x$, cuja inclinação θ é tal que $m_r = tg\theta = 2$.

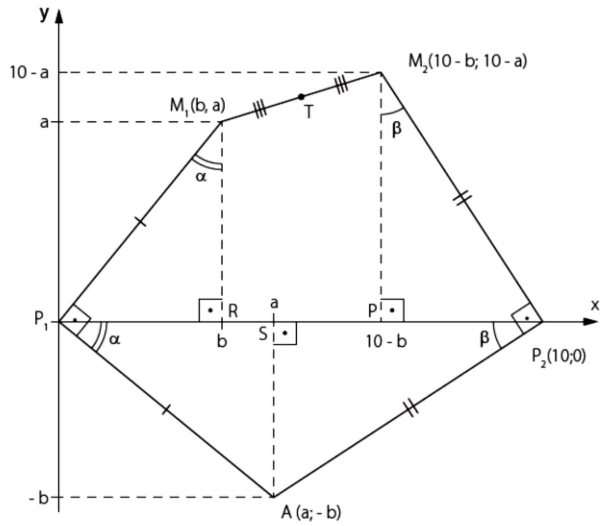
Seja s a reta que passa pela origem e pelo ponto C, cuja inclinação $(\theta + 45°)$ é tal que:

$m_s = tg(\theta + 45°)$

$m_s = \frac{tg\theta + tg45°}{1 - tg\theta \cdot tg45°} = \frac{2+1}{1-2\cdot 1} = -3$

Assim, a equação da reta s é dada por: $y = -3x + 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -3x}$

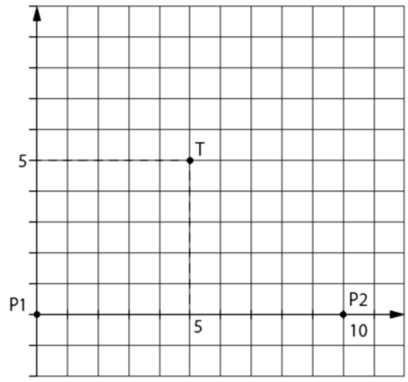
134. Sendo P, Q e R as projeções ortogonais dos pontos M_1, A e M_2 sobre o eixo x, respectivamente, tem-se o seguinte:



$\Delta P_1PM_1 \equiv \Delta AQP_1$ e $\Delta QAP_2 \equiv \Delta RP_2M_2$

Então, se $M_1(a,b)$, tem-se $A(b, -a)$, $M_2(10-a, 10-b)$ e o ponto médio de $\overline{M_1M_2}$, T, onde se encontra o tesouro, é:

$$T = \left(\frac{a+10-a}{2}\right), \left(\frac{b+10-b}{2}\right) = (5,5)$$



133. a) A abscissa x_p é dada por: $\cos 60° = \frac{x_p}{6} = \frac{1}{2} \therefore x_p = 3$.

A ordenada y_p é dada por: $sen 60° = \frac{y_p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore y_p = 3\sqrt{3}$.

Assim, $\boxed{P(3;\ 3\sqrt{3})}$

b) Seja r a reta que contém o raio X e Q o ponto de interseção de r com o eixo y.

O ângulo $P\hat{Q}O = 75°$, então $OQ = 6$. Assim, Q (0; 6).

A reta r contém P e Q e sua equação reduzida é dada por:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

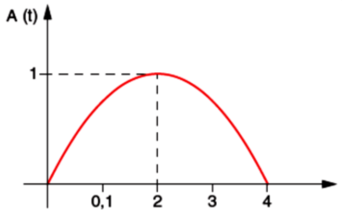
$18 + 3\sqrt{3}x = 6x - 3y = 0$

$3y = 3(\sqrt{3} - 2)x + 18$

Assim, $\boxed{y = (\sqrt{3} - 2)x + 6}$

132. a) Como $P \in r$ e $x = t$, então $P\left(t, \frac{4-t}{2}\right)$, com $0 < t < 4$.

Logo, a área do triângulo é $A(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \left(\frac{4-t}{2}\right) = \frac{-t^2}{4} + t; 0 < t < 4$.



b) Para que o gráfico de *g(x)* e a reta *r* tenham apenas um ponto em comum,

o sistema $\begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ deve ter apenas uma solução.

Substituindo y, chegamos em: $x^2 - 4x + 2k = 0$

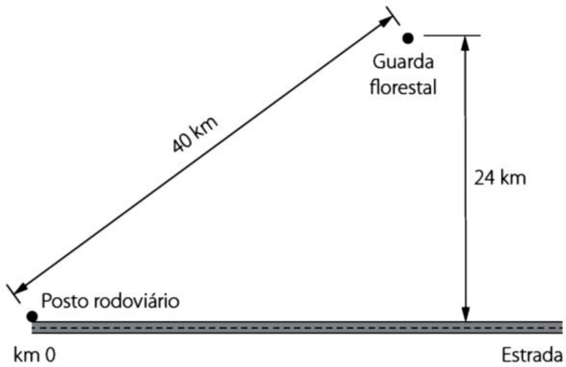
Para que tenha apenas uma solução, o discriminante da equação deve ser nulo. Logo:

$4^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0$

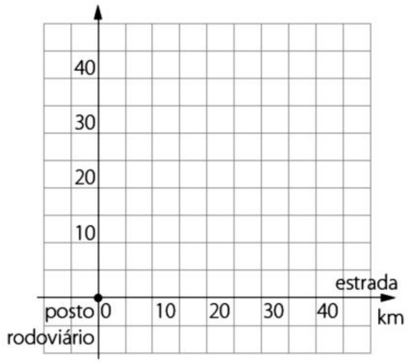
$\therefore k = 2$

LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 15

141 Unicamp 2011 Suponha um trecho retilíneo de estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponha, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura a seguir.



a) Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada. O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicite as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por essas antenas, e esboce essas regiões no gráfico a seguir, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.



b) Pretende-se substituir as antenas atuais por uma única antena, mais potente, a ser instalada em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto rodoviário e à estação da guarda florestal sejam iguais. Determine em que quilômetro da estrada essa antena deve ser instalada.

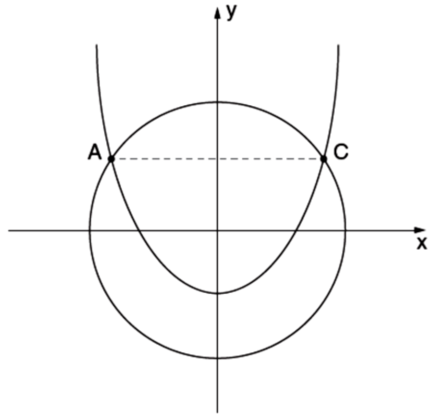
140 Unifesp 2013 Considere o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \geq 0 \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

a) Represente graficamente, no sistema cartesiano de eixos ortogonais inserido no campo de resolução e resposta, a solução desse sistema de inequações.

b) Calcule a área da superfície que representa a solução gráfica do sistema de inequações.

139 Unesp 2013 Os pontos A e C são intersecções de duas cônicas dadas pelas equações $x^2 + y^2 = 7$ e $y = x^2 - 1$, como mostra a figura fora de escala. Sabendo que tg $49° \cong \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$ e tomando o ponto $B\left(0, -\sqrt{7}\right)$, determine a medida aproximada do ângulo $A\hat{B}C$ em graus.



138 **Unicamp 2013** Considere a família de retas no plano cartesiano descrita pela equação $(2-p)x+(2p+1)y+8p+4=0$, nas variáveis x e y, em que p é um parâmetro real.

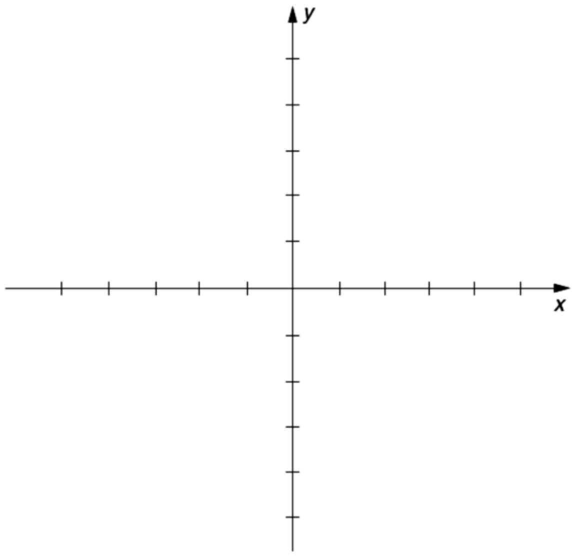
a) Determine o valor do parâmetro p para que a reta correspondente intercepte perpendicularmente o eixo y. Encontre o ponto de interseção neste caso.

b) Considere a reta $x + 3y + 12 = 0$ dessa família para $p = 1$. Denote por A o seu ponto de interseção com o eixo x e por O a origem do plano cartesiano. Exiba a equação da circunferência em que o segmento OA é um diâmetro.

137 **Fuvest 2014** Considere a circunferência λ de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e a parábola α de equação $y = 4 - x^2$.

a) Determine os pontos pertencentes à interseção de λ com α.

b) Desenhe, no par de eixos dado na página de respostas, a circunferência λ e a parábola α. Indique, no seu desenho, o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, as inequações $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ e $y \geq 4 - x^2$.



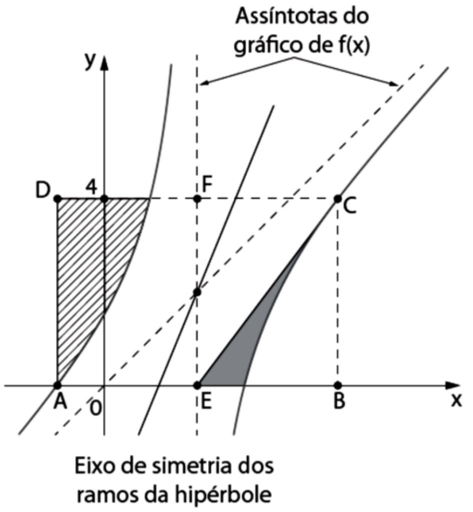
117 **Fuvest 2016** No plano cartesiano Oxy, a circunferência C tem centro no ponto $P = (2, 1)$, e a reta t é tangente a C no ponto $Q = (-1, 5)$.

a) Determine o raio da circunferência C.

b) Encontre uma equação para a reta t.

c) Calcule a área do triângulo PQR, sendo R o ponto de interseção de t com o eixo Ox.

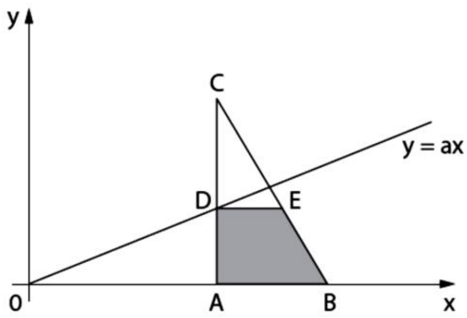
83 **Unesp 2018** O gráfico representa uma hipérbole, dada pela função real $f(x) = x + \dfrac{3}{2-x}$. Sabe-se que ABCD é um retângulo, que EC é diagonal do retângulo EBCF e que a área da região hachurada é igual a 4,7 cm^2.



a) Determine as coordenadas (x, y) do ponto A.

b) Calcule a área da região indicada em cinza no gráfico.

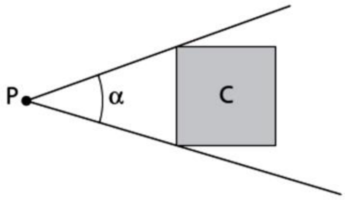
82 **Fuvest 2018** No plano cartesiano real, considere o triângulo ABC, em que $A = (5,0)$, $B = (8,0)$, $C = (5,5)$, e a reta de equação $y = \alpha x$, $0 < \alpha < 1$. Seja $f(\alpha)$ a área do trapézio $ABED$, em que D é a intersecção da reta $y = \alpha x$ com a reta de equação $x = 5$, e o segmento DE é paralelo ao eixo Ox.



a) Encontre o comprimento do segmento DE em função de α.

b) Expresse $f(\alpha)$ e esboce o gráfico da função f.

81 **Fuvest 2018** Sejam *C* um subconjunto não vazio e *P* um ponto, ambos em um mesmo plano, tais que $P \notin C$. Diz-se que "*P* enxerga *C* sob um ângulo α" se α for a medida do menor ângulo com vértice em *P* que contenha *C*. Por exemplo, na figura, o ponto *P* enxerga o quadrado *C* sob o ângulo α indicado.

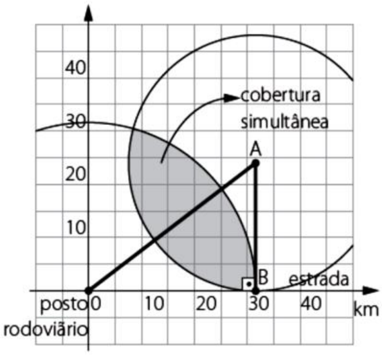


a) Se *C* for um círculo de raio *r*, centrado na origem de um plano cartesiano real, determine o lugar geométrico dos pontos que enxergam *C* sob um ângulo de 60°.

b) Se *C* for a união dos segmentos *OA* e *OB*, em que $O = (0,0)$, $A = (a,0)$ e $B = (0,b)$, com $a,b > 0$, determine o lugar geométrico dos pontos que enxergam *C* sob um ângulo de 90°.

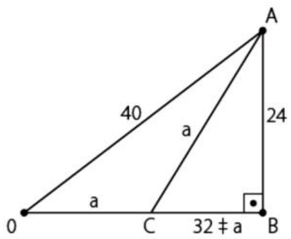
Gabarito - LIVRO 3 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 15

141.



a) Seja A a localização da guarda florestal.
O $\Delta A0B$ possui lados 40, 24 e 32. Assim, $0B = 32$ km.
$A(32;\ 24)$
Área de cobertura da 1ª antena:
$\boxed{(x-32)^2 + (y-24)^2 \le (24)^2}$
Área de cobertura da 2ª antena: $\boxed{x^2 + y^2 \le (32)^2}$

b) Na situação desse item, temos o seguinte desenho:



ΔABC temos: $a^2 = (32-a)^2 + (24)^2$.
$\therefore \boxed{a = 25 \text{ km}}$

140. a) $x^2 + y^2 - 2x \ge 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 \ge 1$

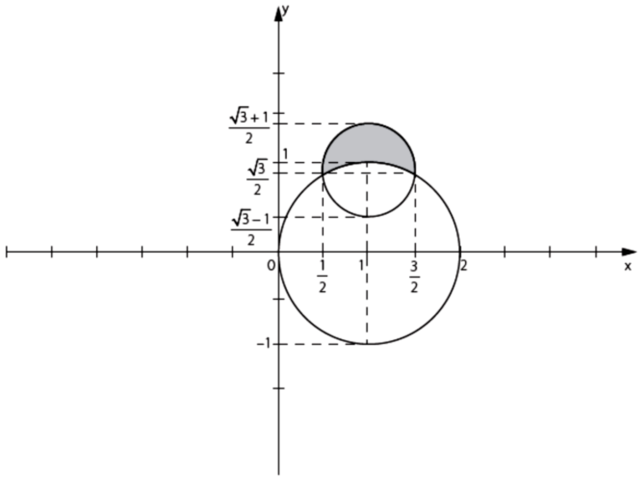
$(x-1)^2 + y^2 \ge 1$

Logo, (x, y) é ponto exterior ou pertencente à circunferência de centro $C_1(1,0)$ e raio $R_1 = 1$.

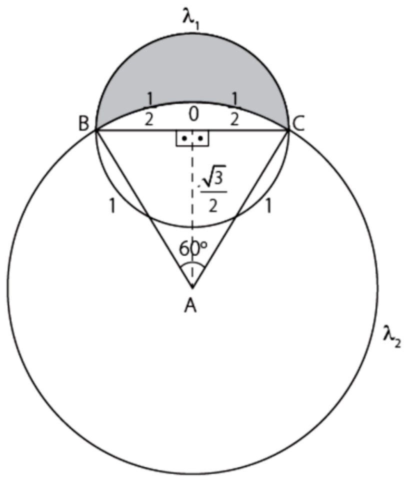
$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Logo, (x, y) é ponto interior ou pertencente à circunferência de centro $C_2\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio $R_2 = \frac{1}{2}$.

Assim, a solução gráfica do sistema de inequações é dada por:



b)



Os ΔABO e ΔACO são retângulos, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2$. Logo, $BC = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ e o ΔABC é equilátero. A área pedida (A) é o semicírculo de $\lambda_1(A_1)$, subtraído de um segmento circular de 60° de $\lambda_2(A_2)$.

$$A_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$A_2 = \text{Área (setor de } 60°) - A_{\Delta ABC}$$

$$A_2 = \frac{60° \cdot \pi \cdot 1^2}{360°} - \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}$$

$$\boxed{A = \frac{6\sqrt{3} - \pi}{24}}$$

139. De acordo com o enunciado, os pontos A e C representam as soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ y=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=7 \\ y+1=x^2 \end{cases}$$

Substituindo a 2ª equação na 1ª, temos:

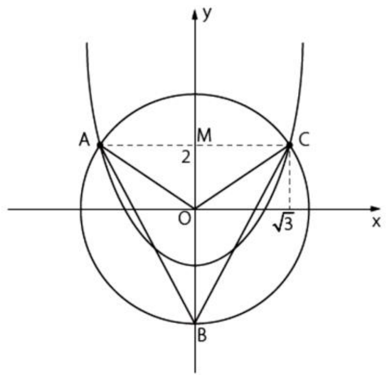
$y+1+y^2=7 \Leftrightarrow y^2+y-6=0$

$\therefore y=2$ ou $y=-3$ (não convém, pois $x^2 \neq -2$)

Se $y = 2$, então $x2 = 3$, ou seja, $x=\pm\sqrt{3}$. Assim, $A\left(-\sqrt{3},\ 2\right)$ e $C\left(\sqrt{3},\ 2\right)$.

Seja O a origem do sistema cartesiano, tal que o triângulo AOC seja isósceles.

O ponto B pertence à circunferência, pois $0^2+\sqrt{7}^2=7$. Assim, podemos construir a seguinte figura:



Se $\text{tg } 49° \cong \frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, então $\text{tg } 41° \cong \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{MC}{MO}$. Assim, $M\hat{O}C \cong 41°$.

Portanto, o ângulo $A\hat{O}C=82°$,e o ângulo inscrito $\boxed{A\hat{B}C=41°}$.

138. a) A reta procurada é paralela ao eixo x; assim, devemos ter:

$$\begin{cases} 2-p=0 \\ 2p+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ p\neq -\frac{1}{2} \end{cases} \therefore \boxed{p=2}$$

Para $p = 2$, a equação da reta é dada por: $5y + 8 \cdot 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4$.

Assim, o ponto de interseção da reta com o eixo y é P(0; –4).

b) Se o ponto A pertence ao eixo x, então y = 0; assim:

$x + 3 \cdot 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12 \therefore A(-12; 0)$

Como $\overline{OA}$ é um diâmetro da circunferência, sendo O a origem do plano cartesiano, o centro C é o ponto médio de $\overline{OA}$, e a medida do raio é igual a $\frac{OA}{2}$; assim:

$C\left(\frac{x_0+x_A}{2},\ \frac{y_0+y_A}{2}\right) \Rightarrow C(-6,\ 0)$

$OA=\sqrt{(0+12)^2+(0-0)^2}=12 \Rightarrow R=6$

A equação da circunferência é dada por:

$(x+6)^2+(y-0)^2=6^2$

$\boxed{(x+6)^2+y^2=36}$

137. a) Para determinar as interseções, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 & \text{(i)} \\ y=4-x^2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Substituindo x^2 de (ii) em (i), temos:

$4-y+y^2-4y=0 \Rightarrow y^2-5y+4=0 \Rightarrow \boxed{y=1}$ ou $\boxed{y=4}$

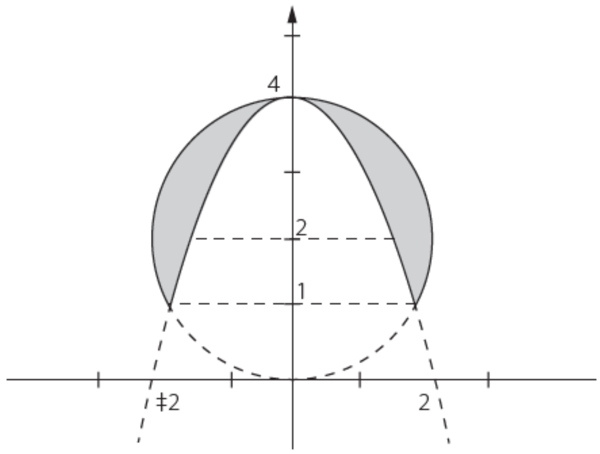
Se y = 1: $1=4-x^2 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{3}}$ ou $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

Se y = 4: $4=4-x^2 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

Portanto, os pontos de interseção são: $\left(\sqrt{3},1\right)$; $\left(-\sqrt{3},1\right)$ e (0, 4).

b) Primeiramente, notemos que λ é a circunferência de centro (0, 2) e raio 2.

Agora, notemos que a região que representa o conjunto de pontos tais que $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ é a região interna à circunferência λ e que a região representa o conjunto de pontos tais que $y \geq 4 - x^2$ é a região acima da parábola, logo:



117. a) O raio é a distância entre P e Q, logo:

$r^2=(2+1)^2+(1-5)^2=9+16=25 \Rightarrow \boxed{r=5}$

b) Como t é tangente à circunferência, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta t. Assim, seus coeficientes angulares detêm a propriedade $m_t=\frac{-1}{m_{PQ}}$. Logo,

$m_t=\frac{-1}{\frac{5-1}{-1-2}} \Rightarrow m_t=\frac{3}{4}$.

Como t passa por Q = (–1, 5), então a equação de t:

$y-5=\frac{3}{4}\cdot\left(x-(-1)\right) \Rightarrow \boxed{y=\frac{3x}{4}+\frac{23}{4}}$

c) Como R está no eixo Ox e pertence a t, então:

$0=\frac{3x_R}{4}+\frac{23}{4} \Rightarrow x_R=-\frac{23}{3}$. Assim, o ponto $R=\left(-\frac{23}{3};0\right)$.

A área do ΔPQR vale:

$$A_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ \frac{-23}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(10-\frac{23}{3}+\frac{115}{3}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{125}{3} \Rightarrow \boxed{A_\Delta=\frac{125}{6}}$$

83. a) O ponto A é da forma A(x, 0) e x < 0. Logo:

$$f(x)=0$$
$$x+\frac{3}{2-x}=0\Leftrightarrow\frac{x(2-x)+3}{2-x}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=3$$

As coordenadas do ponto A são (–1, 0).

b) Para f(x) = 4

$$x+\frac{3}{2-x}=4\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=5$$

O ponto C e a extremidade à direita da região hachurada têm coordenadas (5, 4) e (1,4), respectivamente. Assim, o centro do retângulo tem coordenadas:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}\Leftrightarrow x_M=\frac{-1+5}{2}=2$$
$$y_M=\frac{y_A+y_C}{2}\Leftrightarrow y_M=\frac{0+4}{2}=2$$

Todo segmento que passa por M e encontra a hipérbole em dois pontos tem esse ponto como ponto médio. Dessa forma, conclui-se que M é o ponto de encontro das assíntotas da hipérbole e as abscissas de E e F são iguais a 2. Portanto, por simetria, conclui-se que a área do triângulo EBC é a soma das áreas cinza e hachurada.

$$A_{\Delta EBC}=A_{cinza}+A_{hachurada}$$
$$\frac{3\cdot 4}{2}=A_{cinza}+4{,}7\Leftrightarrow A_{cinza}=1{,}3\,cm^2$$

82. Cálculo de AD:

Como $\overline{CA}\perp Ox$ e α é o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{OD}$, tem-se:

$$\alpha=\frac{AD}{OA}\Rightarrow AD=5\alpha$$

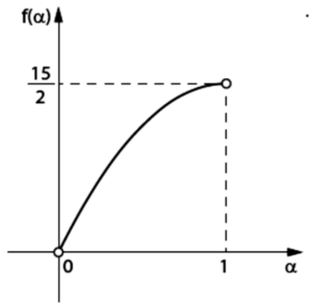
a) Cálculo de DE:

$$\overline{DE}//\overline{AB}\Rightarrow\Delta CDE\sim\Delta CAB\Rightarrow\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{5-5\alpha}{5}=\frac{DE}{3}\Rightarrow DE=3(1-\alpha)$$

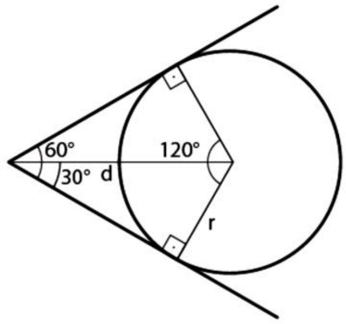
b) $$f(\alpha)=\frac{\left(3+3(1+\alpha)\right)5\alpha}{2}$$

$$f(\alpha)=\frac{-15\alpha^2}{2}+15\alpha, 0<\alpha<1$$

Logo, o gráfico é um arco de parábola da origem até o vértice $(1, \frac{15}{2})$.



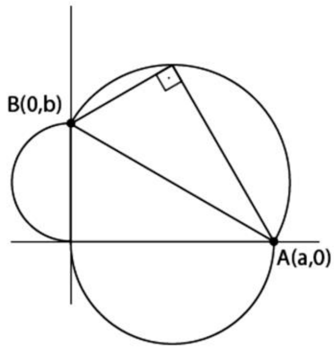
81. a) O lugar geométrico dos pontos que enxergam uma circunferência sob o ângulo de 60º é uma circunferência com mesmo centro e o dobro do raio, pois, seja um ponto que enxerga a circunferência sob um ângulo de 60º, como na figura:



Tem-se: $sen30^\circ=\frac{r}{d}\Rightarrow d=2r$

Logo, o lugar geométrico dos pontos que enxergam C sob um ângulo de 60º é a circunferência de equação $x^2+y^2=4r^2$.

b) O lugar geométrico dos pontos que enxergam a união de OB e AO é formado por três semicircunferências: uma com centro no ponto médio de AB e raio $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, outra com centro no ponto médio de OB e raio $\frac{b}{2}$ e uma última com centro no ponto médio de AO e raio $\frac{a}{2}$.

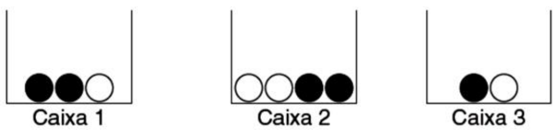


Logo, o lugar geométrico dos pontos que enxergam C sob um ângulo de 90º são as semicircunferências de equações:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}, \text{com } x>0 \text{ e } y>0,$$
$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}, \text{com } x>0 \text{ e } y<0, \text{ e}$$
$$x^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}, \text{com } x<0 \text{ e } y>0.$$

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 14

153 **UFPR 2011** Considere três caixas contendo bolas brancas e pretas, conforme ilustra a figura.



Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 1 e colocada na caixa 2. Então, uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 2 e colocada na caixa 3. Finalmente, uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 3. Calcule a probabilidade de que essa última bola retirada seja branca.

152 **Unifesp 2012** O quadro mostra o resultado de uma pesquisa realizada com 200 nadadores de competição da cidade de São Paulo, visando apontar o percentual desses nadadores que já tiveram lesões (dores) em certas articulações do corpo, decorrentes da prática de natação, nos últimos três anos.

Articulação	Percentual de nadadores
ombro	80%
coluna	50%
joelho	25%
pescoço	20%

Com base no quadro, determine:

a) quantos nadadores do grupo pesquisado tiveram lesões (dores) no joelho ou no pescoço, considerando que 5% dos nadadores tiveram lesões nas duas articulações, joelho e pescoço.

b) qual é a probabilidade de um nadador do grupo pesquisado, escolhido ao acaso, não ter tido lesões (dores) no ombro ou na coluna, considerando as manifestações de dores como eventos independentes.

151 **Unifesp 2013** Considere a distribuição de genótipos **AA**, **aa**, **Aa** em uma população de 500 animais jovens, todos com x anos de idade. Sorteando ao acaso um indivíduo dessa população, a probabilidade de que ele seja de genótipo **AA** é de 32%, e de que seja de genótipo **Aa** é de 46%.

Quando os membros dessa população envelhecem, ao atingirem y anos de idade ($y > x$), o gene **a** provoca a morte instantânea e, como **A** é dominante sobre **a**, os indivíduos **AA** e **Aa** permanecem sadios, enquanto que os indivíduos **aa** morrem.

a) Quantos indivíduos de genótipo **aa** teríamos que acrescentar à população dos 500 animais de x anos de idade para que o sorteio de um indivíduo nesse novo grupo pudesse ser feito com probabilidade de 50% de que o indivíduo sorteado tivesse o gene **A** em seu genótipo?

b) Sorteando-se ao acaso um indivíduo da população original dos 500 animais quando a idade de seus membros é de y anos, logo após a morte dos indivíduos de genótipo **aa**, qual é a probabilidade de que o indivíduo sorteado tenha um gene **a** em seu genótipo?

149 **Fuvest 2013** Sócrates e Xantipa enfrentam-se em um popular jogo de tabuleiro, que envolve a conquista e ocupação de territórios em um mapa. Sócrates ataca jogando três dados e Xantipa se defende com dois. Depois de lançados os dados, que são honestos, Sócrates terá conquistado um território se e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

1) o maior valor obtido em seus dados for maior que o maior valor obtido por Xantipa;

2) algum outro dado de Sócrates cair com um valor maior que o menor valor obtido por Xantipa.

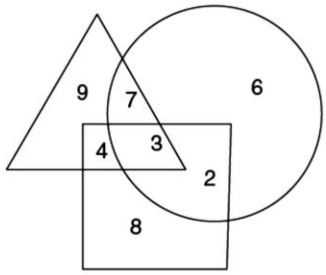
a) No caso em que Xantipa tira 5 e 5, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

b) No caso em que Xantipa tira 5 e 4, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

150 **Unicamp 2013** O diagrama a seguir indica a distribuição dos alunos matriculados em três cursos de uma escola. O valor da mensalidade de cada curso é de R$ 600,00, mas a escola oferece descontos aos alunos que fazem mais de um curso. Os descontos, aplicados sobre o valor total da mensalidade, são de 20% para quem faz dois cursos e de 30% para os matriculados em três cursos.

a) Por estratégia de marketing, suponha que a escola decida divulgar os percentuais de desconto, calculados sobre a mensalidade dos cursos adicionais e não sobre o total da mensalidade. Calcule o percentual de desconto que incide sobre a mensalidade do segundo curso para aqueles que fazem dois cursos e o percentual de desconto sobre o terceiro curso para aqueles que fazem três cursos.

b) Com base nas informações do diagrama, encontre o número de alunos matriculados em pelo menos dois cursos. Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estar matriculado em apenas um curso?



148 **Unifesp 2014** Uma população de 10 camundongos, marcados de 1 a 10, será utilizada para um experimento em que serão sorteados aleatoriamente 4 camundongos. Dos 10 camundongos, apenas 2 têm certa característica C_1, 5 têm certa característica C_2 e nenhum deles têm as duas características. Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de que ao menos um dos camundongos com a característica C_1 esteja no grupo sorteado?

b) Qual é a probabilidade de que o grupo sorteado tenha apenas 1 camundongo com a característica C_1 e ao menos 2 com a característica C_2?

147 **Unicamp 2014** Uma loteria sorteia três números distintos entre doze números possíveis.

a) Para uma aposta em três números, qual é a probabilidade de acerto?

b) Se a aposta em três números custa R$ 2,00, quanto deveria custar uma aposta em cinco números?

146 Fuvest 2014 Deseja-se formar uma comissão composta por sete membros do Senado Federal brasileiro, atendendo às seguintes condições: (i) nenhuma unidade da Federação terá dois membros na comissão, (ii) cada uma das duas regiões administrativas mais populosas terá dois membros e (iii) cada uma das outras três regiões terá um membro.

a) Quantas unidades da Federação tem cada região?

b) Chame de *N* o número de comissões diferentes que podem ser formadas (duas comissões são consideradas iguais quando têm os mesmos membros). Encontre uma expressão para *N* e simplifique-a de modo a obter sua decomposição em fatores primos.

c) Chame de *P* a probabilidade de se obter uma comissão que satisfaça as condições exigidas, ao se escolher sete senadores ao acaso. Verifique que $P < 1/50$.

Segundo a Constituição da República Federativa do Brasil – 1988, cada unidade da Federação é representada por três senadores.

145 Unesp 2015 Renato e Alice fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas, ao acaso, em fila. Calcule a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Renato e Alice na fila que será formada.

Generalize uma fórmula para o cálculo da probabilidade do problema descrito acima com o mesmo grupo de "8 pessoas", trocando "4 pessoas" por "m pessoas", em que $1 \le m \le 6$. A probabilidade deverá ser dada em função de m.

Gabarito - LIVRO 4– Questões Dissertativas
Matemática – Frente 1 – Capitulo 14

153. $P=\dfrac{22}{45}$

152. a) Da relação $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, que fornece o número de elementos da união de dois conjuntos, temos que o número de nadadores que tiveram lesão no joelho ou no pescoço é igual a: $n=(25\%+20\%-5\%)\cdot 200 \Rightarrow \boxed{n=80}$

b) Supondo-se independentes os eventos, a probabilidade de que um desses nadadores tenha sofrido uma lesão em ambos os lugares (ombro e coluna) é dada pelo produto $80\% \cdot 50\%$, ou seja, é de 40%.

Sendo assim, a probabilidade de escolhermos aleatoriamente um nadador que não tenha sofrido lesão em pelo menos um desses lugares (ombro ou coluna) é de: $100\% - 40\% = \boxed{60\%}$.

Já a probabilidade de escolhermos um nadador que não tenha sofrido lesões no ombro nem na coluna é dada pelo produto: $(100\% - 80\%)\cdot(100\% - 50\%) = \boxed{10\%}$.

Ambas as intepretações são possíveis com base no enunciado.

151. a) Na população, há:

32% de 500 = 160 indivíduos **AA**

46% de 500 = 230 indivíduos **Aa**

Acrescentando N indivíduos de genótipo **aa**, a probabilidade de que seja sorteado um que tenha o gene **A** é de 50%. Logo:

$$\frac{160+230}{500+N}=50\% \Leftrightarrow \frac{390}{500+N}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{N=280}$$

b) Após y anos, sem os indivíduos de genótipo **aa**, a probabilidade pedida é:

$$P=\frac{230}{230+160}=\frac{230}{390}=\frac{23}{39} \Rightarrow \boxed{P=\frac{23}{39}}$$

150. a) Para aqueles que fazem dois cursos, a mensalidade com o desconto de 20% é de $(1 - 0{,}20) \times 2 \times 600 = 960$ reais. Se o preço de um dos cursos é de 600 reais, o outro custa $960 - 600 = 360$ reais, o que equivale a um desconto de:

$$\frac{600-360}{600}=\frac{240}{600}=\frac{40}{100}=\boxed{40\%}$$

Para os alunos com três cursos e desconto de 30%, a mensalidade fica em $(1 - 0{,}30) \times 3 \times 600 = 1.260$ reais. Assim, o 1º curso custa 600 reais, o 2º custa 360 reais e o 3º custa $1.260 - 600 - 360 = 300$ reais por mês. O desconto no último é de:

$$\frac{600-300}{600}=\frac{300}{600}=\frac{50}{100}=\boxed{50\%}$$

b) Com base no diagrama, o número de alunos matriculados em pelo menos 2 dois cursos é $7 + 3 + 4 + 2 = 16$. O diagrama ainda indica $9 + 6 + 8 = 23$ alunos matriculados em apenas um curso.

A probabilidade pedida é:

$$P=\frac{23}{16+23}$$

$$\boxed{P=\frac{23}{39}}$$

149. a) Ao lançar os dados, Sócrates pode obter $6 \times 6 \times 6 = 216$ resultados diferentes. Para conquistar o território, deve obter pelo menos dois dados com resultados iguais a 6. Enumerando as possibilidades, temos:

(6, 6, 6), (6, 6, x), (6, x, 6) e (x, 6, 6); sendo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Assim, há $1 + 5 + 5 + 5 = 16$ possibilidades, e a probabilidade pedida é $\dfrac{16}{216}=\boxed{\dfrac{2}{27}}$.

b) Nesse caso, Sócrates deve obter um resultado 6 e pelo menos um resultado maior que 4. As possibilidades do item a devem ser acrescidas de:

(6, 5, 5), (5, 6, 5), (5, 5, 6) e as permutações de (6, 5, y), sendo y {1, 2, 3, 4}.

Assim, há $16 + 3 + 4 \times P_3 = 19 + 4 \times 3! = 43$ possibilidades, e a probabilidade pedida é $\boxed{\dfrac{43}{216}}$.

148. a) P (pelo menos 1 camundongo com C_1) = 1 − P (nenhum com C_1) =

$$1-\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}=1-\frac{1}{3}\ \boxed{\therefore p\ (\text{pelo menos 1 camundongo com } C_1)=\frac{2}{3}}$$

b) Neste item, temos duas situações a serem consideradas:

I) 1 camundongo com C_1 e 3 com C_2:

Nesse caso, temos $P_4^3=\dfrac{4!}{3!}=4$ situações diferentes, mas todas elas com a mesma probabilidade: $\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{7}$.

$$\therefore P\,(1\!: C_1 \text{ e } 3\!: C_2)=4\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2}{21}.$$

II) 1 camundongo com C_1, 2 com C_2 e 1 sem essas características:

Nesse caso, tem-se $P_4^2=\dfrac{4!}{2!}=12$ situações diferentes, mas todas elas com a mesma probabilidade: $\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{7}$.

$$\therefore P\,(1\!: C_1, 2\!: C_2 \text{ e } 1\!: \overline{C_1}\cap\overline{C_2})=12\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2}{7}.$$

$$\boxed{\text{Logo, P (1: } C_1 \text{ e pelo menos 2: } C_2)=\frac{2}{21}+\frac{2}{7}=\frac{8}{21}.}$$

147. a) $P(\text{acerto}) = \dfrac{1}{C_{12,3}} = \dfrac{9!3!}{12!} = \dfrac{1}{220}$

b) Ao fazer uma aposta com 5 números, fazemos $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ apostas com 3 números, portanto devemos pagar $2 \cdot 10 = 20$ reais por essa aposta.

146. a) As regiões brasileiras são divididas nas seguintes unidades federativas: Região Norte: são 7 unidades (AP, PA, AM, RR, AC, RO e TO); região Nordeste: são 9 unidades (BA, SE, AL, PE, PB, RN, CE, PI e MA); região Centro-Oeste: 4 unidades (MT, MS, GO e DF*); região Sudeste: 4 unidades (ES, MG, RJ e SP); região Sul: 3 unidades (PR, SC e RS), o que totalizam 27 Unidades Federativas.

* o Distrito Federal possui *status* de Unidade Federativa.

Região Administrativa	UF
Sudeste	4
Sul	3
Centro-Oeste	4
Nordeste	9
Norte	7

b) As regiões administrativas mais populosas são Sudeste e Nordeste.

Para a região Sudeste, escolhemos as duas UF que terão representantes e, para cada UF, um dentre os três senadores:

$$n_{SE} = \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} = 2 \cdot 3^3$$

O mesmo para a região Nordeste:

$$n_{SE} = \binom{9}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} = 2^2 \cdot 3^4$$

Para a região Sul, escolhemos a UF que terá representante e, para essa UF, um dentre os três senadores:

$$n_S = \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} = 3^2$$

O mesmo para as regiões Centro-Oeste e Norte:

$$n_{CO} = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 2^2 \cdot 3$$

$$n_N = \binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1} = 7 \cdot 3$$

Logo:

$$N = 2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 7$$

c) Escolhendo 7 senadores ao acaso, teremos:

$$N_T = \binom{81}{7} = \frac{81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 11 \cdot 76 \cdot 75$$

Assim:

$$P = \frac{2^5 \cdot 3^{11} \cdot 7}{3^2 \cdot 79 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{2^2 \cdot 3^7 \cdot 7}{79 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 5^2} <$$

$$< \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 100 \cdot 7}{70 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 5^2} = \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{1}{50}$$

147. a) $P(\text{acerto}) = \dfrac{1}{C_{12,3}} = \dfrac{9!3!}{12!} = \dfrac{1}{220}$

b) Ao fazer uma aposta com 5 números, fazemos $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ apostas com 3 números, portanto devemos pagar $2 \cdot 10 = 20$ reais por essa aposta.

145. Inicialmente, vamos considerar que Renato (R) está posicionado "mais à esquerda" que Alice (A) na fila. Nesse caso, existem apenas 3 configurações para a fila:

R					A		

	R					A	

		R					A

Em cada uma delas, contabilizamos um total de $n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ possibilidades.

Assim, existem $N_1 = 3 \cdot 6!$ sequências em que quatro pessoas separam Renato (à esquerda) de Alice (à direita). Naturalmente, temos outras $N_2 = 3 \cdot 6!$ sequências em que Renato está "mais à direita" que Alice.

Como nosso espaço amostral é formado por 8! possíveis filas, temos a probabilidade solicitada:

$$P(\text{4 pessoas entre Renato Alice}) = \frac{3 \cdot 6! + 3 \cdot 6!}{8!} = \frac{6 \cdot 6!}{8!} = \frac{3}{28}.$$

Para um caso mais geral, com m pessoas entre Renato e Alice ($1 \le m \le 6$), o que muda é a *quantidade de configurações*:

- Para $m = 1$ pessoa (entre Renato e Alice, nessa ordem), temos 6 configurações: pode haver 5, 4, 3, 2, 1 ou nenhuma pessoa à esquerda de Renato.
- Para $m = 2$ pessoas (entre Renato e Alice, nessa ordem), temos 5 configurações: pode haver 4, 3, 2, 1 ou nenhuma pessoa à esquerda de Renato.
- Para $m = 3$ pessoas (entre Renato e Alice, nessa ordem), termos 4 configurações: pode haver 3, 2, 1 ou nenhuma pessoa à esquerda de Renato.
- Assim, temos um padrão recorrente: inserindo m pessoas entre Renato e Alice, sempre haverá $(7 - m)$ configurações com Renato à esquerda de Alice, e outras $(7 - m)$ com Renato à direita de Alice.

Logo, a probabilidade solicitada é:

$$P(\text{m pessoas entre Renato e Alice}) = \frac{(7-m) \cdot 6! + (7-m) \cdot 6!}{8!} = \frac{2 \cdot (7-m) \cdot 6!}{8!} = \frac{7-m}{28}.$$

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 13

162 **Unicamp 2011** Uma grande preocupação atual é a poluição, particularmente aquela emitida pelo crescente número de veículos automotores circulando no planeta. Ao funcionar, o motor de um carro queima combustível, gerando CO_2, além de outros gases e resíduos poluentes.

a) Considere um carro que, trafegando a uma determinada velocidade constante, emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de combustível que consome. Nesse caso, quantos quilogramas de CO_2 ele emitiu em uma viagem de 378 km, sabendo que fez 13,5 km por litro de gasolina nesse percurso?

b) A quantidade de CO_2 produzida por quilômetro percorrido depende da velocidade do carro. Suponha que, para o carro em questão, a função c(v) que fornece a quantidade de CO_2, em g/km, com relação à velocidade v, para velocidades entre 20 e 40 km/h, seja dada por um polinômio do segundo grau. Determine esse polinômio com base nos dados da tabela a seguir.

Velocidade (km/h)	Emissão de CO_2 (g/km)
20	400
30	250
40	200

161 **Fuvest 2011** As raízes da equação do terceiro grau:
$x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$
são todas reais e formam uma progressão geométrica. Determine:

a) as raízes da equação.

b) o valor de k.

160 **Fuvest 2012** O polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 8$, em que a, b, c são números reais, tem o número complexo $1 + i$ como raiz, bem como duas raízes simétricas.

a) Determine a, b, c e as raízes de $p(x)$.

b) Subtraia 1 de cada uma das raízes de $p(x)$ e determine todos os polinômios com coeficientes reais, de menor grau, que possuam esses novos valores como raízes.

159 **Unicamp 2013** Considere o polinômio $p(x) = x^2 - 11x + k + 2$, em que x é variável real e k um parâmetro fixo, também real.

a) Para qual valor do parâmetro k o resto do quociente de $p(x)$ por $x - 1$ é igual a 3?

b) Supondo, agora, $k = 4$, e sabendo que a e b são raízes de $p(x)$, calcule o valor de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right)$.

158 **Fuvest 2013** Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 1$.

a) Ache todas as raízes complexas de $p(x)$.

b) Escreva $p(x)$ como produto de dois polinômios de segundo grau, com coeficientes reais.

156 **Fuvest 2014** Os coeficientes a, b e c do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e $1 + \alpha i$, com $\alpha > 0$, são raízes da equação $p(x) = 0$ e que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ é 8, determine

a) o valor de α;

b) o quociente de $p(x)$ por $(x + 1)$.

i é a unidade imaginária, $i^2 = -1$.

97 **Unicamp 2016** Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que $p(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A a seguir não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de $p(x)$, determine o valor de $|z|$.

96 **Unicamp 2017**

Veja também em:
Matemática • Livro 2 • Frente 2 • Capítulo 8

Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Mostre que, se r é uma raiz de $p(x)$, então $1/r$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$.

b) Determine os valores de a e b para os quais a sequência $(p(-1), p(0), p(1))$ é uma progressão aritmética (PA), cuja razão é igual a $p(2)$.

Gabarito - LIVRO 4– Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 13

162. a) Para percorrer 378 km, o carro consome $\frac{378}{13{,}5}$ L de gasolina, ou seja 28 L de combustível. Como cada litro emite 2,7 kg de CO_2, então, na viagem, o carro emitirá $28 \cdot 2{,}7 = 75{,}6$ kg de CO_2.

b) $c(v) = \alpha \cdot v^2 + \beta v + \gamma,\ v \in [20;40]$

$$\begin{cases} c(20) = 400 \\ c(30) = 250 \\ c(40) = 200 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -40 \text{ e } \gamma = 1.000$$

Assim $c(v) = \frac{v^2}{2} - 40\,v + 1.000$ para $v \in [20;40]$

161. a) Sejam as raízes da equação $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$, dadas por x_1, x_2 e x_3, reais e formando uma progressão geométrica, temos:

$x_2^2 = x_1 \cdot x_3$ (média geométrica)

Das relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a};\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a};\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a}$$

Logo,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-(-64)}{1} \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_3) \cdot x_2 = 64 \Leftrightarrow x_2^2 \cdot x_2 = 64$$

$$x_2^3 = 64 \Rightarrow x_2 = 4$$

Como $x_2^2 = x_1 \cdot x_3$,

$$\therefore (x_1 \cdot x_3) = 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-(-14)}{1} \Leftrightarrow x_1 + 4 + x_3 = 14 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 10$$

Para encontrar as raízes x_1 e x_3, resolveremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_3 = 16 \\ x_1 + x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_3 = 8 \end{matrix}$$

Assim, as raízes da equação são $\boxed{2, 4 \text{ e } 8}$.

b) Da relação de Girard $(x_1x_2) + (x_1x_3) + (x_2x_3) = \frac{c}{a}$, temos:

$$(2 \cdot 4) + (2 \cdot 8) + (4 \cdot 8) = \frac{k}{1}$$

$$\boxed{k = 56}$$

160. a) Como o polinômio possui apenas coeficientes reais e o complexo $1 + i$ é uma de suas raízes, podemos escrever todas as raízes do seguinte modo:

$1 + i$, $1 - i$, k, $-k$

Aplicando as relações de Girard, obtemos:

$$(1+i) + (1-i) + k + (-k) = -\frac{a}{1} \Leftrightarrow a = -2$$

$$(1+i) \cdot (1-i) \cdot k \cdot (-k) = -\frac{8}{1} \Leftrightarrow k = 2 \text{ ou } k = -2$$

Como 2 e −2 são as outras raízes do polinômio e o valor de a é −2, temos:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + bx^2 + cx - 8$$

$$\begin{cases} p(2) = 0 \Leftrightarrow 16 - 16 + 4b + 2c - 8 = 0 \\ p(-2) = 0 \Leftrightarrow 16 + 16 + 4b - 2c - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \text{ e } c = -8$$

Portanto:

$$\boxed{a = -2,\ b = -2,\ c = 8,\ x_1 = 1 + i,\ x_2 = 1 - i,\ x_3 = 2 \text{ e } x_4 = -2}$$

b) Subtraindo 1 de cada uma das raízes de p(x), obtemos 1, −3, i, −i. Na forma fatorada, esses polinômios podem ser escritos da seguinte forma:

$q(x) = w \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - i) \cdot (x + i) \Leftrightarrow q(x) = w \cdot (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$, w é uma constante real não nula.

Portanto:

$$\boxed{q(x) = w \cdot (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3),\ \forall\, w \in \mathbb{R}^*}$$

159. a) Pelo teorema do resto, se o resto da divisão de p(x) por x − 1 é 3, então $p(1) = 3$, ou seja, $p(1) = 3 \Leftrightarrow 1^2 - 11 \cdot 1 + k + 2 = 3 \Leftrightarrow k = 11$.

b) Para $k = 4$, temos o polinômio $p(x) = x^2 - 11x + 6$, com raízes a e b e $a + b = 11$ e $a \cdot b = 6$.

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = \text{sen}\left(\pi\left(\frac{b + a}{ab}\right)\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = -\frac{1}{2}}$$

158. a) As raízes de p(x) são as raízes complexas da equação $x^4 + 1 = 0$.

$$x^4 = -1$$

$$x^4 = 1[\cos(\pi + 2k\pi) + i \cdot \text{sen}(\pi + 2k\pi)] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$x = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

Substituindo k por valores inteiros, temos as soluções no 1° ciclo trigonométrico.

$$k = 0 \to x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = 1 \to x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = 2 \to x = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = 2 \to x = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}}$$

b) $p(x) = x^4 + 1$

$$p(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$

$$p(x) = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2$$

$$\boxed{p(x) = (x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2})}$$

157. a) Por Girard, temos:

$$r + (-r) + s = \frac{-(-2)}{1} \Rightarrow s = 2$$

e

$$r \cdot (-r) \cdot 2 = \frac{-18}{1} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

Portanto: $s = 2$ e $r = \pm 3$

b) Escrevendo o polinômio na forma fatorada, temos:

$P(z) = (z - 2)(z - 3)(z + 3) \Rightarrow P(1 + i) = (1 + i - 2)(1 + i - 3)(1 + i + 3) =$
$= 7 - 11i$

156. Como os coeficientes são reais e $x > 0$, as raízes são −1; $(1 + \alpha i)$ e $(1 - \alpha i)$.

Portanto: $-1 + (1 + \alpha i) + (1 - \alpha i) = \frac{-a}{1} \Rightarrow \boxed{a - 1}$

Logo: $p(x) = x^3 - x^2 + bx + c$

Pelo teorema do resto: $p(1) = 8$

Como −1 é raiz: $p(-1) = 0$

$$\text{Logo: } \begin{cases} 1 - 1 + b + c = 8 \\ -1 - 1 - b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 8 \\ -b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$$

Portanto: $p(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$

Dividindo p(x) por x + 1, temos:

	1	−1	3	5
−1	1	−2	5	0

Logo, as raízes complexas são as raízes de $x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1 + 2i}$ ou $\boxed{x = 1 - 2i}$

Portanto:

a) $\boxed{\alpha = 2}$

b) o quociente de p(x) por (x + 1) é $x^2 - 2x + 5$.

97. Inicialmente, é necessário observar que, pelos dados do enunciado, $\det A = x^3 - 3x + a$. Portanto, $p(x) = \det A = x^3 - 3x + a$

a) Para que matriz não seja invertível (ou seja, para que ela seja singular) $\det A = 0$; logo, $p(x) = 0$.

Em outros termos, determinar os valores para que a matriz seja singular é encontrar as raízes do polinômio p(x).

Pelo enunciado:

$p(1) = 0$, tem-se que:

$p(1) = (1)^3 - 3 \cdot (1) + a$

$0 = -2 + a \Rightarrow a = 2$. Sendo assim, $p(x) = \det A = x^3 - 3x + 2$

Se $p(1) = 0$, então 1 é raiz do polinômio e, com efeito, pelo teorema de D'Alembert, p(x) é divisível por (x – 1). Logo, utilizando-se do método de Briot-Ruffini para obter o quociente q(x) da divisão de p(x) por (x – 1):

1	1	0	–3	2
	1	1	–2	0

Sendo assim, $q(x) = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2$, cujas raízes são –2 e 1, podendo ser fatorado da seguinte forma: $q(x) = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 2 = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

Porquanto, $p(x) = (x - 1) \cdot q(x) = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$

Logo, as raízes de p(x) são 1 e –2, sendo 1 uma raiz dupla e –2 uma raiz simples.

De todo o exposto, conclui-se que os valores de x para os quais a matriz não é invertível são 1 e –2.

b) Denotando x_1, x_2 e x_3 como raízes de p(x), em que $x_1 = z$ citado no enunciado, pode-se afirmar que, se $x_1 = z = 2 + bi$ é raiz de p(x), então, pelo teorema das raízes complexas, o seu conjugado, $x_2 = \bar{z} = 2 - bi$, também é raiz de p(x).

Lembra-se, pois, que $p(x) = x^3 - 3x + a$ e, pelas relações de Girard, conclui-se que:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1}$,

$(2 + bi) + (2 - bi) + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -4$

Se – 4 é raiz de p(x), então $p(-4) = 0$

$p(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (-4) + a$

$0 = -64 + 12 + a \Rightarrow a = 52$

Sendo assim, $p(x) = x^3 - 3x + 52$.

Como –4 é raiz de p(x), então, pelo teorema de D'Alembert, p(x) é divisível por (x + 4). Utilizando-se do método de Briot-Ruffini para obter o quociente q(x) da divisão de p(x) por (x + 4):

–4	1	0	–3	52
	1	–4	13	0

Com efeito, $q(x) = 1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 13$, cujas raízes (Bháskara) são 2 + 3i e 2 – 3i, como já era de se esperar, pois $x_1 = z = 2 + bi$.

Sendo assim, $b = \pm 3 \Rightarrow z = 2 \pm 3i$

Em qualquer um dos casos, $|z| = \sqrt{2^2 + (\pm 3)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$

96. a) (I): Se r é raiz de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, então $p(r) = 0$ e, portanto, $r^3 + ar^2 + br + 1 = 0$.

(II): Se $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$, então:

$$q(1/r) = \left(\frac{1}{r}\right)^3 + b\left(\frac{1}{r}\right)^2 + a\left(\frac{1}{r}\right) + 1 = 0 \Rightarrow q(1/r) = \frac{r^3 + ar^2 + br + 1}{r^3}$$

Nesse caso, $q(1/r) = 0$, se, e somente se, $r^3 + ar^2 + br + 1 = 0$ (conclusão obtida em (I), como queríamos demonstrar) e $r \neq 0$.

Com efeito, cabe a correção do enunciado, impondo que 1/r será raiz de q(x) se r é raiz de p(x) e se $r \neq 0$.

b) Se $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, conforme dito no enunciado, então:

$p(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 \Rightarrow p(-1) = a - b$

$p(0) = (0)^3 + a\,(0)^2 + b(0) + 1 \Rightarrow p(0) = 1$

$p(1) = (1)^3 + a\,(1)^2 + b(1) + 1 \Rightarrow p(1) = a + b + 2$

$p(2) = (2)^3 + a\,(2)^2 + b(2) + 1 \Rightarrow p(1) = 4a + 2b + 9$

Se p(–1), p(0) e p(1) estão em progressão aritmética, então

$\frac{p(-1) + p(1)}{2} = p(0)$.

Ante o exposto, pode-se concluir que: $\frac{(a - b) + (a + b + 2)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

Portanto: $p(-1) = -b$, $p(0) = 1$, $p(1) = b + 2$ e $p(2) = 2b + 9$

Se p(2) é razão da progressão aritmética, então:

$p(0) = p(-1) + p(2)$, ou, em notação de sequência, $a_2 = a_1 + r$.

Sendo assim: $1 = (-b) + (2b + 9) \Rightarrow \boxed{b = -8}$

Nesse caso, $p(-1) = 8$, $p(0) = 1$, $p(1) = -6$ e $p(2) = -7$, ou seja, a sequência é dada por (8, 1, –6), cuja razão é –7.

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 14

100 **Fuvest 2015** Resolva os três itens a seguir.

a) Calcule $\cos(3\pi/8)$ e $\text{sen}(3\pi/8)$.

b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.

c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

101 **Unicamp 2015** Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

a) Mostre que $x = -1/q$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

b) Sejam e e f números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis x e y, $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Determine para que valores da razão q esse sistema tem solução única.

Gabarito - LIVRO 4– Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 14

100. a) Lembrando que $\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x \;\therefore\; \cos(2x)=\begin{cases}2\cos^2 x-1\\ 1-2\text{sen}^2 x\end{cases}$

Tomando $x=\dfrac{3\pi}{8}$, nestas duas expressões, temos:

$$\begin{cases}\cos\dfrac{3\pi}{4}=2\cdot\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)-1\\ \cos\dfrac{3\pi}{4}=1-2\text{sen}^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)\end{cases}\;\therefore\;\begin{cases}\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\\ \text{sen}^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\end{cases}\;\therefore\;\begin{cases}\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

b) $z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\text{sen}\dfrac{3\pi}{8}\right)\;\therefore\; z^n=2^n\left(\cos\dfrac{3n\pi}{8}+i\text{sen}\dfrac{3n\pi}{8}\right)$

Mas, $z^n\in\mathbb{R}\;\therefore\;\text{sen}\dfrac{3n\pi}{8}=0\;\therefore\;\dfrac{3n\pi}{8}=k\pi;\,k\in\mathbb{Z}\;\therefore\;3n=8k$

Logo, n é múltiplo de 8 e, portanto, o menor inteiro positivo é $n=8$.

c) Como $z^8\in\mathbb{R}$, ou seja, $z^8=-256$, z é raiz de $P(x)=x^8+256$, que não contém raiz real.

101. a) Se q é a razão da PG(a, b, c, d), então $b=a\cdot q$; $c=a\cdot q^2$ e $d=a\cdot q^3$

Logo, $p(x)=a+aqx+aq^2x^2+aq^3x^3$ e $p\left(-\dfrac{1}{q}\right)=a+aq\left(-\dfrac{1}{q}\right)+aq^2\cdot\left(-\dfrac{1}{q}\right)^2+$

$+aq^3\cdot\left(-\dfrac{1}{q}\right)^3=a-a+a-a=0$

$\therefore\;-\dfrac{1}{q}$ é a raiz de p(x).

b) Para que o sistema tenha solução única

$\begin{vmatrix}a & c\\ d & b\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow ab-cd\neq 0\Rightarrow a^2q-a^2q^5\neq 0$

$\Rightarrow a^2q\left(1-q^4\right)\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow a\neq 0,\, q\neq 0$ e $1-q^4\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow a\neq 0,\, q\neq 0,\, q\neq 1,\, q\neq -1,\, q\neq i$ e $q\neq -1$

$\therefore$ q pode ser qualquer real pertencente a $\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 21

170 **UFPR 2011** Uma jarra de vidro em forma cilíndrica tem 15 cm de altura e 8 cm de diâmetro. A jarra está com água até quase a borda, faltando 1 cm de sua altura para ficar totalmente cheia.

a) Se uma bolinha de gude de 2 cm de diâmetro for colocada dentro dessa jarra, ela deslocará que volume de água?

b) Quantas bolinhas de gude de 2 cm de diâmetro serão necessárias para fazer com que a água se desloque até a borda superior da jarra?

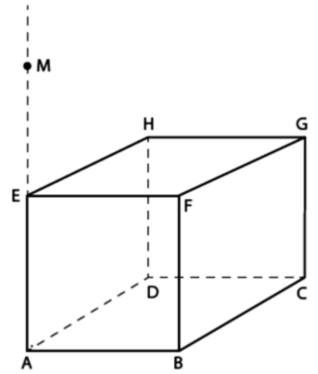
Gabarito - LIVRO 4– Questões Dissertativas
Matemática – Frente 2 – Capitulo 21

170. a) $\dfrac{4}{3}\pi\ \text{cm}^3$

b) 12 bolinhas.

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 18

106 **Fuvest 2015** No cubo ABCDEFGH, representado na figura a seguir, cada aresta tem medida 1. Seja M um ponto na semirreta de origem A que passa por E. Denote por θ o ângulo BMH e por x a medida do segmento $\overline{AM}$.

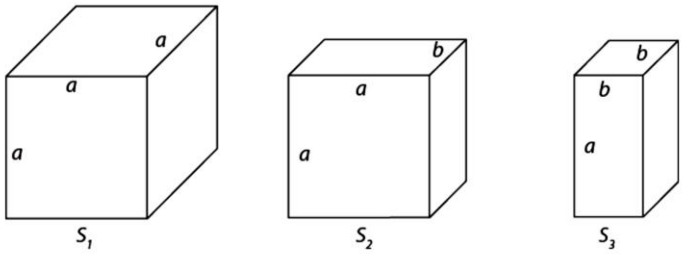


a) Exprima $\cos\theta$ em função de x.

b) Para que valores de x o ângulo θ é obtuso?

c) Mostre que, se $x = 4$, então θ mede menos do que 45°.

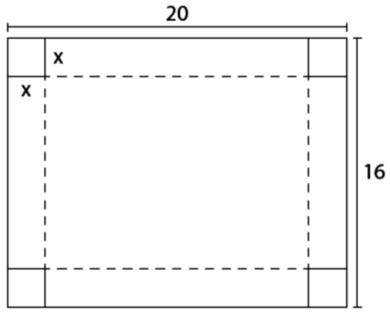
105 **Unicamp 2016** Considere os três sólidos exibidos na figura a seguir, um cubo e dois paralelepípedos retângulos, em que os comprimentos das arestas, a e b, são tais que $a > b > 0$.



a) Determine a razão $r = a/b$ para a qual o volume de S_1 é igual à soma dos volumes de S_2 e S_3.

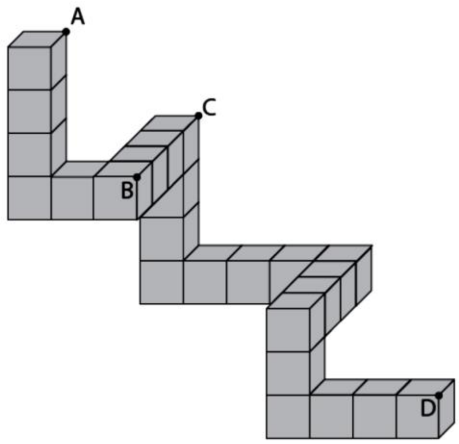
b) Sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos é igual a 60 cm, determine a soma das áreas de superfície dos três sólidos.

103 **Fuvest 2017** Considere uma folha de papel retangular com lados 20 cm e 16 cm. Após remover um quadrado de lado *x* cm de cada um dos cantos da folha, foram feitas 4 dobras para construir uma caixa (sem tampa) em forma de paralelepípedo reto-retângulo com altura *x* cm. As linhas tracejadas na figura indicam onde as dobras foram feitas.



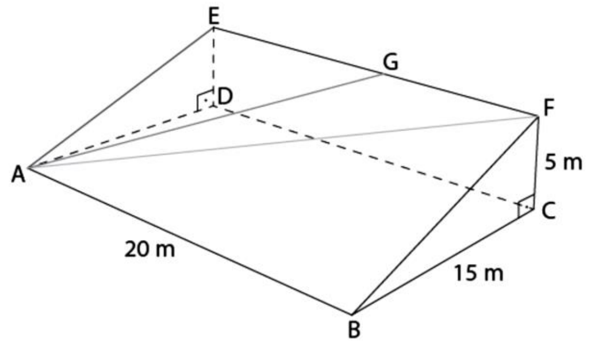
a) Expresse o volume da caixa em função de *x*.
b) Determine o conjunto dos valores de *x* para os quais o volume da caixa é maior ou igual a 384 cm^3.

104 **Unifesp 2017** Um sólido é formado por 24 cubos idênticos, conforme a figura. O contato entre dois cubos contíguos sempre se dá por meio da sobreposição perfeita entre as faces desses cubos. Na mesma figura também estão marcados A, B, C e D, vértices de quatro cubos que compõem o sólido.



a) Admitindo-se que a medida de $\overline{AB}$ seja $2\sqrt{7}$ cm, calcule o volume do sólido.
b) Calcule a medida de $\overline{CD}$ admitindo-se que a medida da aresta de cada cubo que compõe o sólido seja igual a 2 cm.

102 **Unesp 2018** Uma rampa, com a forma de prisma reto, possui triângulos retângulos ADE e BCF nas bases do prisma, e retângulos nas demais faces. Sabe-se que AB = 20 m, BC = 15 m e CF = 5 m. Sobre a face ABFE da rampa estão marcados os caminhos retilíneos $\overline{AE}$, $\overline{AG}$ e $\overline{AF}$, com G sendo um ponto de $\overline{EF}$, como mostra a figura.



a) Calcule a medida do segmento $\overline{AE}$. Em seguida, assuma que a inclinação de subida (razão entre vertical e horizontal) pelo caminho $\overline{AG}$ seja igual a $\frac{1}{4}$ e calcule a medida do segmento $\overline{EG}$.

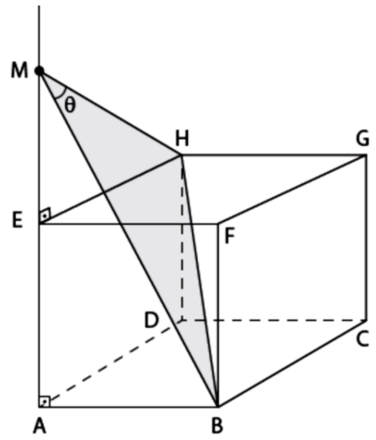
b) Considere os seguintes dados para responder a este item:

α	7,1°	11,3°	14,0°	18,4°
tg α	0,125	0,200	0,250	0,333

Comparando-se o caminho $\overline{AF}$ com o caminho $\overline{AE}$, nota-se que o ângulo de inclinação de $\overline{AF}$ e de $\overline{AE}$, em relação ao plano que contém o retângulo ABCD, aumentou. Calcule a diferença aproximada, em graus, desses ângulos.

Gabarito - LIVRO 4– Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 18

106.



a) Aplicando Pitágoras nos triângulos retângulos MEH e MAB, com MA = x e ME = x –1, temos:

$$\begin{cases}(MH)^2=(ME)^2+(EH)^2\\(MB)^2=(MA)^2+(AB)^2\end{cases} \therefore \begin{cases}MH=\sqrt{x^2-2x+2}\\MB=\sqrt{x^2+1}\end{cases}$$

Como $BH=\sqrt{3}$, pois $\overline{BH}$ é a diagonal do cubo com aresta 1, temos:

$$(BH)^2=(MH)^2+(MB)^2-2(MH)(MB)\cdot\cos\theta \therefore$$

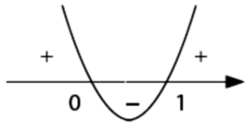
$$\therefore\ 3=x^2-2x+2+x^2+1-2\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}\cdot\cos\theta \therefore$$

$$\therefore\ \boxed{\cos\theta=\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}}}$$

b) Para θ obtuso, temos:

$$\cos\theta < 0 \ \therefore\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}} < 0$$

Como $x^2 + 1 > 0$ e $x^2 - 2x + 2 > 0$, para todo x real, basta $x^2 - x < 0$.
Fazendo o estudo do sinal, temos:



$\therefore \boxed{0 < x < 1}$

c) Com x = 4, temos:

$$\cos\theta = \frac{4^2-4}{\sqrt{4^2+1}\cdot\sqrt{4^2-2\cdot4+2}} = \frac{12}{\sqrt{170}} = \sqrt{\frac{144}{170}} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45 \ \therefore\ \boxed{\theta < 45°}$$

105. a) O enunciado denota S1, S2 e S3 como os respectivos volumes dos sólidos (paralelepípedos) expostos. Sabe-se que o volume desse tipo de sólido se dá por V = Ab · H, sendo Ab a área da base do sólido e H a sua altura. Assim:

$$(\text{I}) \begin{cases} S_1 = a^3 \\ S_2 = a^2 \cdot b \\ S_3 = a \cdot b^2 \end{cases}$$

Pelos dados do enunciado, tem-se que:

(II) $S_1 = S_2 + S_3$, então

$a^3 = a^2 \cdot b + a \cdot b^2$, como $a \neq 0$

$a^2 - a \cdot b = b^2$

$a^2 - a \cdot b = b^2$, adicionando a parcela $\frac{b^2}{4}$ nos dois membros da equação:

$a^2 - a \cdot b + \frac{b^2}{4} = b^2 + \frac{b^2}{4}$. Assim, obtém-se:

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5\cdot b^2}{4} \Rightarrow a - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{5\cdot b^2}{4}} \Rightarrow a = \frac{b}{2} \pm \frac{b\cdot\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{b \pm b\cdot\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{b\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como a e b são medidas de arestas dos sólidos e, portanto, são positivos, conclui-se por fim que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

b) Denotando C_1, C_2 e C_3 como a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos, obtém-se:

$$(\text{III}) \begin{cases} C_1 = 12a \\ C_2 = 8a + 4b \\ C_3 = 4a + 8b \end{cases}$$

Do enunciado,

(IV) $C_1 + C_2 + C_3 = 60$ cm

De (III) e (IV), tem-se que:

$(12a) + (8a + 4b) + (4a + 8b) = 60 \Rightarrow b = 5 - 2a$ (V)

Denotando as áreas de superfície dos três sólidos como A_1, A_2 e A_3, afere-se que:

$$\begin{cases} A_1 = 6a^2 \\ A_2 = 2\left(a^2 + 2ab\right) \\ A_3 = 2\left(b^2 + 2ab\right) \end{cases}$$

Sendo assim, o valor de $M = A_1 + A_2 + A_3$, será encontrado por:

$M = 6a^2 + 2\left(a^2 + 2ab\right) + 2\left(b^2 + 2ab\right)$

(VI) $M = 8a^2 + 8ab + 2b^2$

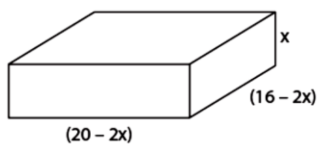
Substituindo (V) em (VI)

$M = 8a^2 + 8a(5 - 2a) + 2(5 - 2a)^2$

$M = 8a^2 + 40a - 16a^2 + 2\left(25 - 20a + 4a^2\right)$

$\boxed{M = 50 \text{ cm}^2}$

103. a) As dimensões da caixa após a retirada dos quadrados e a montagem estão expressas abaixo:



Assim, a expressão do volume da caixa será dada por:

$$\boxed{V(x) = x(20 - 2x)(16 - 2x)}$$

b) Como o volume precisa ser maior ou igual a 384 cm³, tem-se:

$V(x) \geq 384$

$x(20 - 2x)\ (16 - 2x)\ \geq\ 384$

$4x(10 - x)\ (8 - x)\ \geq\ 384$

$x\ (10 - x)\ (8 - x)\ \geq\ 96$

$x^3 - 18x^2 + 80x - 96 \geq 0$

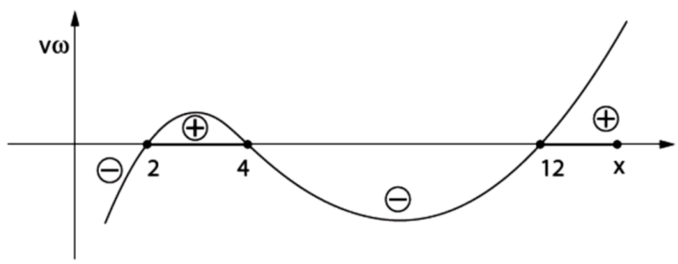
Utilizando o teste das raízes racionais, tem-se que x = 2 é uma raiz.

Logo, a expressão fatorada fica:

$(x - 2)\ (x^2 - 16x + 48)\ \geq 0$

$(x - 2)\ (x - 4)\ (x - 12)\ \geq 0$

Fazendo o estudo do sinal, tem-se o seguinte gráfico da função polinomial:



Analisando a condição inicial das dimensões da caixa, nota-se que:

$x > 0$		$x > 0$		
$20 - 2x > 0$	$\rightarrow$	$x < 10$	$\rightarrow$	$0 < x < 8$
$16 - 2x > 0$		$x < 8$		

Logo, o conjunto de valores de x que satisfazem a condição inicial é:

$$\boxed{\{x \text{ e } \mathbb{R}\}\ 2 \leq x \leq 4\}}$$

104. a) Seja a a medida da aresta do cubo.

O segmento $\overline{AB}$ equivale à diagonal de um bloco retangular de arestas medindo a, $2a$ e $3a$.

Assim:

$$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{a^2+(2a)^2+(3a)^2}=2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{a^2+4a^2+9a^2}=2\sqrt{7}$$

$$\sqrt{14a^2}=2\sqrt{7}$$

$$14a^2=4\cdot 7$$

$$a^2=2$$

$$a=\sqrt{2}$$

$$V_{\text{sólido}}=24a^3=24\left(\sqrt{2}\right)^3$$

$$\boxed{V_{\text{sólido}}=48\sqrt{2}\ \text{cm}^3}$$

b) A medida do segmento $\overline{CD}$ equivale à diagonal de um bloco retangular de arestas medindo 14 cm, 8 cm e 10 cm.

Assim: $CD=\sqrt{14^2+8^2+10^2}$

$$CD=\sqrt{196+64+100}$$

$$CD=\sqrt{360}$$

$$\boxed{CD=6\sqrt{10}\,\text{cm}}$$

102. a) Pela figura, DE = 5 m e AD = 15 m. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADE, tem-se:

$$(AE)^2=(AD)^2+(DE)^2$$

$$(AE)^2=15^2+5^2$$

$$(AE)^2=250$$

$$\boxed{AE=5\sqrt{10}\ \text{m}}$$

Sendo H a projeção ortogonal do ponto G no segmento CD, GH = CF = 5 m e utilizando a inclinação de subida dada, tem-se:

$$\frac{GH}{AH}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{5}{AH}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow AH=20\ \text{m}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AGH e AEG, tem-se:

$$(AG)^2=(AH)^2+(GH)^2 \qquad (AG)^2=(AE)^2+(EG)^2$$

$$(AG)^2=20^2+5^2 \qquad 425=250+(EG)^2$$

$$(AG)^2=425 \qquad (EG)^2=175$$

$$\boxed{EG=5\sqrt{7}\ \text{m}}$$

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtém-se:

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$$

$$(AC)^2=20^2+15^2$$

$$(AC)^2=625$$

$$AC=25\ \text{m}$$

$$\text{tg}(E\hat{A}D)=\frac{DE}{AD}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}\cong 0{,}333$$

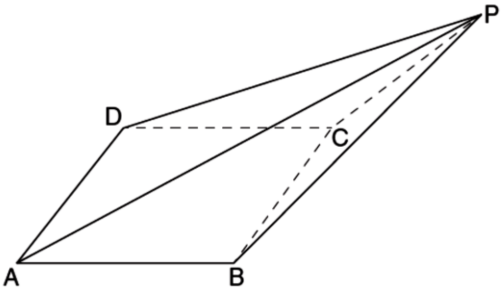
$$\text{tg}(F\hat{A}C)=\frac{CF}{AC}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=0{,}200$$

Utilizando a tabela fornecida, conclui-se que:

$$\boxed{E\hat{A}D=18{,}4°,\ F\hat{A}C=11{,}3°\ \text{e}\ E\hat{A}D-F\hat{A}C=7{,}1°}$$

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente – Capitulo 19

178 **Fuvest 2012** A base do tetraedro $PABCD$ é o quadrado $ABCD$ de lado ℓ, contido no plano α.



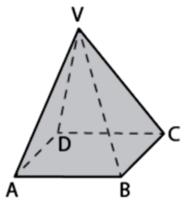
Sabe-se que a projeção ortogonal do vértice P no plano está no semiplano de α determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o lado $\overline{AD}$. Além disso, a face BPC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ cuja altura forma, com o plano α, um ângulo θ, em que $0<\theta<\pi/2$. Sendo $PB=\ell\sqrt{2}/2$, determine, em função de ℓ e θ:

a) o volume do tetraedro $PABCD$;

b) a altura do triângulo APB relativa ao lado $\overline{AB}$;

c) a altura do triângulo APD relativa ao lado $\overline{AD}$.

110 **Unifesp 2014** A figura indica uma pirâmide regular quadrangular reta cujas faces laterais são triângulos equiláteros. A aresta da base dessa pirâmide mede 12 cm.



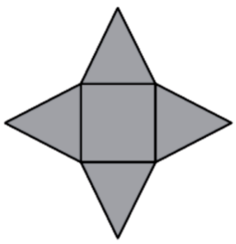
Duas formigas, F_1 e F_2, partiram do ponto médio da aresta $\overline{VA}$ para o ponto médio da aresta $\overline{VC}$, sempre caminhando por faces, arestas, ou cruzando arestas. Dentre todos os caminhos possíveis ligando os dois pontos, a formiga F_1 escolheu o mais curto deles. Já a formiga F_2 escolheu o caminho mais curto dentre todos que passam pela base ABCD da pirâmide. Calcule:

a) a distância percorrida pela formiga F_1.

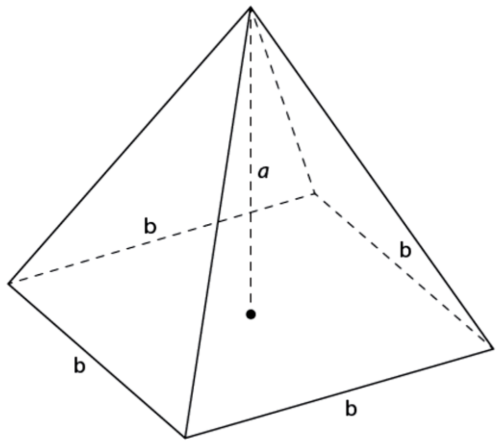
Sugestão de planificação

b) a distância percorrida pela formiga F_2.

Sugestão de planificação



109 **Unicamp 2014** Considere a pirâmide reta de base quadrada, ilustrada na figura a seguir, com lado da base $b = 6$ m e altura a.



a) Encontre o valor de a de modo que a área de uma face triangular seja igual a 15 m^2.
b) Para $a = 2$ m, determine o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

108 **Unifesp 2015** O metano (CH_4) possui molécula de geometria tetraédrica (figura I). Do ponto de vista matemático, isso significa que, em uma molécula de metano, os 4 átomos de hidrogênio localizam-se idealmente nos vértices de um tetraedro regular, e o átomo de carbono localiza-se no centro da esfera que circunscreve esse tetraedro (figura II). Nesse modelo de molécula, a distância entre um átomo de hidrogênio e o átomo de carbono é de 0,109 nanômetro (nm).

Figura I

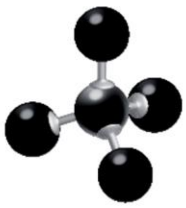
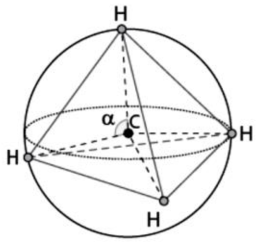


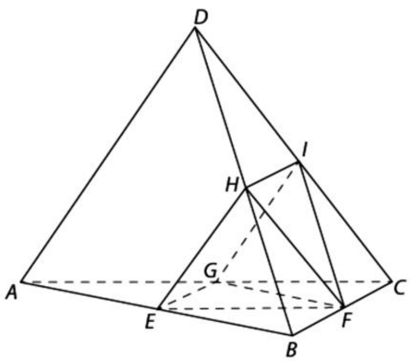
Figura II



a) Sabendo que 1 nm = 10^{-9} m, calcule, em milímetros, a medida da distância entre hidrogênio e carbono na molécula de metano. Registre sua resposta em notação científica.
b) Uma importante propriedade do tetraedro regular é a de que, sendo P um ponto interior qualquer, a soma das distâncias de P às quatro faces do tetraedro será igual à altura do tetraedro. Nas condições do problema, isso equivale a dizer que a altura do tetraedro é igual a $\frac{4}{3}$ do raio da esfera. Na figura II, α indica a medida do ângulo de ligação HCH na molécula de metano. Considerando a tabela trigonométrica a seguir e as informações fornecidas, calcule o valor aproximado de α.

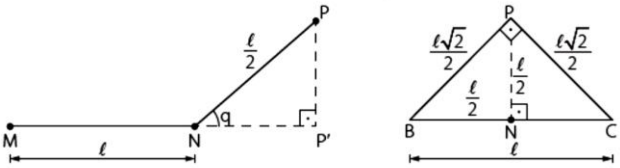
α (em grau)	sen α	cos α	tg α
70	0,9397	0,3420	2,7475
70,5	0,9426	0,3338	2,8239
71	0,9455	0,3256	2,9042
71,5	0,9483	0,3173	2,9887
72	0,9511	0,3090	3,0777
72,5	0,9537	0,3007	3,1716
73	0,9563	0,2924	3,2709
73,5	0,9588	0,2840	3,3759
74	0,9613	0,2756	3,4874
74,5	0,9636	0,2672	3,6059
75	0,9659	0,2588	3,7321
75,5	0,9681	0,2504	3,8667
76	0,9703	0,2419	4,0108

107 **Fuvest 2017** Considere um tetraedro regular $ABCD$ cujas arestas medem 6 cm. Os pontos E, F, G, H e I são os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, respectivamente.



a) Determine a área do triângulo EFH.
b) Calcule a área do quadrilátero $EGIH$.
c) Determine o volume da pirâmide de vértices E, G, I, H e F, cuja base é o equilátero $EGIH$.

178. De acordo com o enunciado, temos os seguintes desenhos:



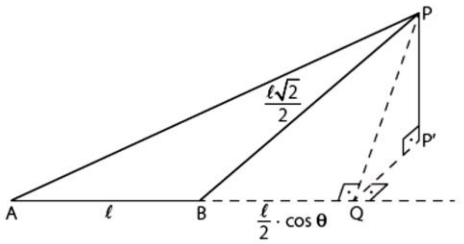
a) $\text{volume} = \dfrac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot (PP')$

$\Delta PP'N \ \text{sen}\theta = \dfrac{PP'}{\ell/2} \Rightarrow PP' = \dfrac{\ell \text{sen}\theta}{2}$

$\text{volume} = \dfrac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot \dfrac{\ell \text{sen}\theta}{2} = \dfrac{\ell^3 \cdot \text{sen}\theta}{6}$

$\therefore \boxed{\text{volume} = \dfrac{\ell^3 \cdot \text{sen}\theta}{6}}$

b) Pelo teorema das 3 perpendiculares, observe a figura:

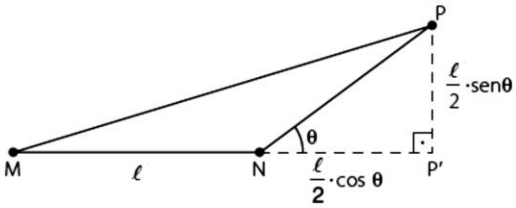


$\overline{PQ}$ é altura do ΔPAB relativo ao lado $\overline{AB}$.

$BQ = NP' = \dfrac{\ell}{2} \cdot \cos\theta$, assim:

$\Delta PBQ: \left(\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\ell}{2}\cos\theta\right)^2 + (PQ)^2 \ \therefore \boxed{PQ = \dfrac{\ell}{2} \cdot \sqrt{2 - \cos^2\theta}}$

c) Observe a figura a seguir, que contém a altura $\overline{PM}$.

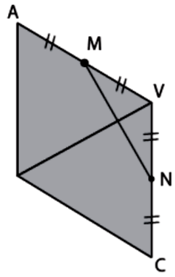


$\Delta MPP': (MP)^2 = \left(\ell + \dfrac{\ell}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\text{sen}\theta\right)^2$

$(MP)^2 = \ell^2 + \ell^2\cos\theta + \dfrac{\ell^2}{4} \cdot \cos^2\theta + \dfrac{\ell^2}{4} \cdot \text{sen}^2\theta$

$(MP)^2 = \ell^2 \cdot \left(\dfrac{5}{4} + \cos\theta\right) \ \therefore \boxed{MP = \dfrac{\ell}{2} \cdot \sqrt{5 + 4\cos\theta}}$

110. a)



Do texto, tem-se que VA = VC = 12 cm. Chamando M – o ponto médio de VA e N – o ponto médio de VC, podemos escrever, pelo teorema dos cossenos:

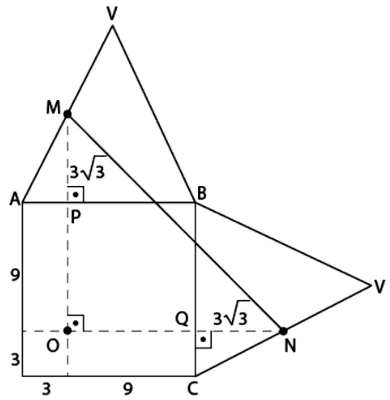
$(MN)^2 = (VM)^2 + (VC)^2 - 2VM \cdot VC \cdot \cos(A\hat{V}C) \Rightarrow$

$(MN)^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$(MN)^2 = 36 + 36 + 36 \Rightarrow$

$\boxed{MN = 6\sqrt{3} \text{ cm}}$

b)



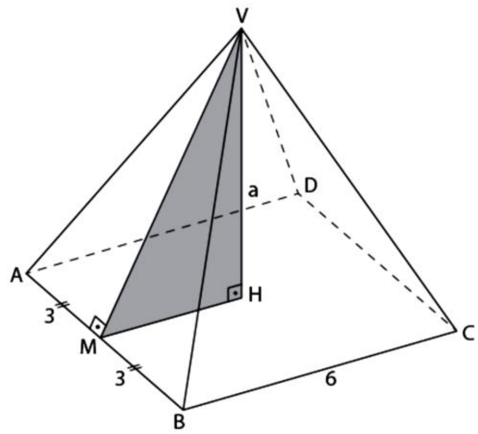
Primeiramente, note que a distância percorrida por F_2 pode ser descrita pelo segmento $\overline{MN}$. Agora, tomando as perpendiculares $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$, obtém-se um triângulo retângulo isósceles MON.

Por Pitágoras, tem-se:

$MN = (9 + 3\sqrt{3})\sqrt{2}$

$\therefore \boxed{MN = 3\sqrt{2}\ (3 + \sqrt{3}) \text{ cm}}$

109. a)



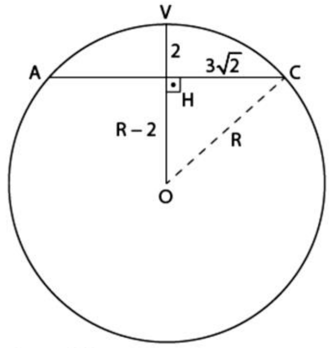
Se a área do $\Delta VAB = 15\ m^2$, então

$$\frac{6\cdot(VM)}{2} = 15 \Rightarrow VM = 5\ m.$$

Como MH = 3 m, VH = 4 m (por Pitágoras).

b) Como ABCD é quadrado de lado 6 cm, sua diagonal $\overline{AC}$ mede $6\sqrt{2}$ m e H é ponto médio de $\overline{AC}$.

Agora, inscrevendo a pirâmide em uma esfera, tem-se:



$$R^2 = (R-2)^2 + (3\sqrt{2})^2$$
$$R^2 = R^2 - 4R + 4 + 18$$
$$R = \frac{11}{2}\ m$$

108. a) De acordo com o enunciado, temos:

$0{,}109\ nm = 1{,}09\cdot10^{-1}nm = 1{,}09\cdot10^{-1}\cdot10^{-9}m =$
$= 1{,}09\cdot10^{-1}\cdot10^{-9}\cdot10^{3}\,mm = \boxed{1{,}09\cdot10^{-7}\,mm}$

b) Seja a a aresta do tetraedro, assim, a altura H é dada por: $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Do enunciado, temos: $H = \dfrac{4}{3}R.$

Assim: $\dfrac{4}{3}R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo HCH, temos:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot R\cdot R\cdot\cos\alpha$$
$$2R^2\cos\alpha = 2R^2 - a^2$$
$$\cos\alpha = \frac{2R^2}{2R^2} - \frac{a^2}{2R^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{6} = -\frac{1}{3}$$

Da tabela, tem-se:

$\cos 70{,}5° = 0{,}3338 \therefore \cos 109{,}5° = -0{,}3338$

Portanto, $\boxed{\alpha = 109{,}5°}$

107. a) Como EH, EF e FH são bases médias dos triângulos ABD, ABC e BCD, respectivamente, então EH = EF = FH = 3 cm, o que implica que o triângulo EFH é equilátero, logo sua área será:

$$\boxed{A_{\Delta EFH} = \frac{3^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^2}$$

b) Primeiramente, nota-se que EG = GI = IH = EH = 3 cm, pois são todas bases médias das faces.

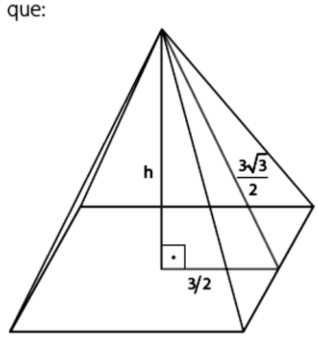
Além disso, o triângulo DEC é isósceles, logo a mediana EI é também altura e, portanto, perpendicular a DC. Aplicando Pitágoras no triângulo ECI, tem-se:

$(EC)^2 = (EI)^2 + (IC)^2 \Rightarrow EI = 3\sqrt{2}\,cm$

Assim, EGIH é quadrado, e sua área é:

$\boxed{A_{EGIH} = 9\ cm^2}$

c) A pirâmide EGIHF é regular com base quadrada, logo sua altura h é tal que:



$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{2}}{2}cm$$

Portanto, o volume da pirâmide será:

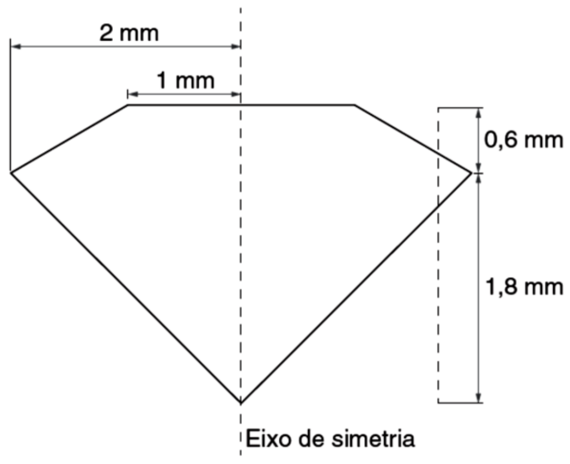
$$\boxed{V = 9\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}\ cm^3 = \frac{9\sqrt{2}}{2}\ cm^3}$$

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capítulo 20

181 **Unicamp 2012** Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.

a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/cm^3, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura a seguir apresenta a seção transversal de um brilhante.



Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.

Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula $V=\frac{\pi}{3}h\left(R^2+Rr+r^2\right)$, em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

180 **Unesp 2014** A imagem mostra uma taça e um copo. A forma da taça é, aproximadamente, de um cilindro de altura e raio medindo R e de um tronco de cone de altura R e raios das bases medindo R e r. A forma do copo é, aproximadamente, de um tronco de cone de altura 3R e raios das bases medindo R e 2r.

Sabendo que o volume de um tronco de cone de altura h e raios das bases B e b é $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(B^2+B\cdot b+b^2)$ e dado que $\sqrt{65}\cong 8$, determine o raio aproximado da base do copo, em função de R, para que a capacidade da taça seja $\frac{2}{3}$ da capacidade do copo.

111 **Unesp 2017** Um cone circular reto de geratriz medindo 12 cm e raio da base medindo 4 cm foi secionado por um plano paralelo à sua base, gerando um tronco de cone, como mostra a figura I. A figura II mostra a planificação da superfície lateral S desse tronco de cone, obtido após a seção.

Figura 1

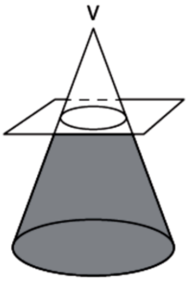
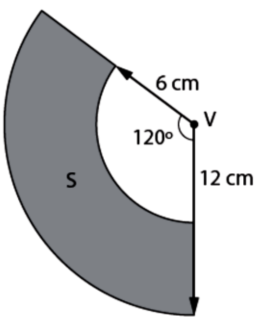


Figura 2



Calcule a área e o perímetro da superfície S. Calcule o volume do tronco de cone indicado na figura I.

181. a) Como um quilate corresponde a 200 mg, 0,7 quilate corresponde a 140 mg, ou, ainda, 0,14 grama. Assim, temos:

$$V=\frac{0{,}14}{3{,}5}=0{,}04\ cm^3$$

$$\boxed{V=40\ mm^3}$$

b) De acordo com o enunciado, temos:

Volume do tronco: $V=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$

$$V=\frac{\pi 0{,}6}{3}\left(2^2+2\cdot 1+2^1\right)=\pi\cdot 0{,}2\cdot(7)=1{,}4\pi$$

Volume do cone: $V=\frac{1}{3}A_b\cdot H$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi 2^2\cdot 1{,}8=2{,}4\pi$$

Volume do brilhante: volume do tronco + volume do cone.

Volume do brilhante: 1,4 π + 2,4 π.

$\boxed{\text{Volume do brilhante: } 3{,}8\ \pi\ mm^3}$

180. O volume da taça é dado por:

$$V_{taça}=\pi\cdot R^2\cdot R+\frac{1}{3}\pi\cdot R\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)$$

E o volume do copo:

$$V_{copo}=\frac{1}{3}\pi\cdot 3R\left(R^2+R\cdot 2r+(2r^2)\right)$$

A taça terá $\frac{2}{3}$ da capacidade do copo se, e somente se:

$$\pi\cdot R^3+\frac{\pi R}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)=\frac{2}{3}\left[\pi R\left(R^2+2Rr+4r^2\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3R^3+R\left(R^2+Rr+r^2\right)=2R\left(R^2+2Rr+4r^2\right)\Leftrightarrow$$

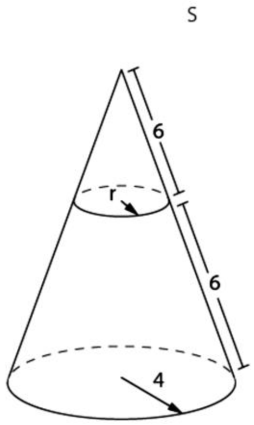
$$\Leftrightarrow 3r^2+R^2+Rr+r^2=2R^2+4Rr+8r^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7r^2+3Rr-2R^2=0\Leftrightarrow 7\left(\frac{r}{R}\right)^2+3\left(\frac{r}{R}\right)-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{R}=\frac{-3\sqrt{65}}{14},\ \text{pois}\ \frac{r}{R}>0.$$

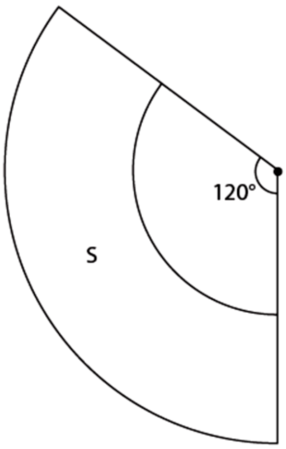
Assim, $\frac{r}{R}\cong\frac{-3+8}{14}\Rightarrow r\cong\frac{5R}{14}$, e o raio da base do corpo é $2r\cong\frac{5R}{7}$.

111.



Como o plano secante é paralelo à base do cone maior, o cone menor é semelhante de razão $K = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
Daí, o raio r do cone menor mede $r = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ e a área S será

$$S = \pi \cdot 4 \cdot 12 - \pi \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{S = 36\pi\,cm^2}$$



O perímetro de S será dado pela adição dos perímetros das bases do tronco à soma de duas geratrizes do tronco:

perímetro $= 2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 4 + 6 + 6 = \boxed{12(\pi + 1)\,cm}$

O volume será: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 8\sqrt{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 8\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{112\pi\sqrt{2}}{3}\,cm^3}$

LIVRO 4 – Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 21

182 Unicamp 2012 Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme se descreve na tabela abaixo:

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1.700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.

b) Geralmente, as cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem 192π cm^2 de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

113 Fuvest 2016 Dois aviões vão de Brasília a Moscou. O primeiro voa diretamente para o norte, até atingir o paralelo de Moscou, quando então muda o rumo para o leste, seguindo para o seu destino final. O segundo voa para o leste até atingir o meridiano de Moscou, tomando então o rumo norte até chegar a esta cidade.

a) Desprezando as variações de altitude, qual avião terá percorrido a maior distância em relação ao solo? Justifique sua resposta.

b) Calcule a diferença entre as distâncias percorridas, supondo que a Terra seja esférica.

Note e adote:
cos 56° = 0,56; sen 56° = 0,83; cos 16° = 0,96; sen 16° = 0,28
Latitude e longitude de Brasília: 16°S e 48°W
Latitude e longitude de Moscou: 56°N e 37°E
Raio da Terra: 6.400 km

Gabarito - LIVRO 4– Questões Dissertativas
Matemática – Frente 3 – Capitulo 21

182. a) Sendo x e y as quantidades de cebolas pequenas e grandes selecionadas, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 25x + 200y = 1.700 \end{cases} \Rightarrow x = 36 \text{ e } y = 4$$

$\boxed{\text{Foram selecionadas 36 cebolas grandes e 4 pequenas.}}$

b) Podemos observar que 600 gramas de cebolas pequenas correspondem a 24 cebolas, pois $\frac{600}{25} = 24$. Podemos calcular a área de casca dessas 24 cebolas, que é dada por $24 \cdot 4\pi \cdot 2^2 = 384\pi$ cm².
Como esse número é maior que 192π cm², concluímos que a cebola grande gera o menor desperdício de cascas.

Área de casca das 24 cebolas pequenas: 384π cm². A cebola grande gera o menor desperdício de cascas.

113. a) As distâncias percorridas para o norte são iguais para os dois aviões. Porém, as distâncias percorridas para o leste não são as mesmas, ainda que ambos percorram arcos de circunferências de medidas iguais de 48°W até 37°E.
O avião 1 voa para leste no paralelo 56°N, enquanto o 2 no paralelo 16°S.
Logo, o raio da circunferência que o avião 1 percorre é menor que o do 2.
Uma vez que o comprimento da circunferência, no caso, a distância percorrida, é dado pelo produto entre a medida do arco e o tamanho do raio, então a distância percorrida pelo avião 1 é menor que a do 2.

b) A diferença entre as distâncias (Δd) vale:

$$\Delta d = d_2 - d_1 \Rightarrow \Delta d = \text{medArco}_2 \cdot r_2 - \text{medArco}_1 \cdot r_1 \Rightarrow$$

$$\Delta d = 85° \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 6400 \cdot \cos 16° - 85° \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 6400 \cdot \cos 56° \Rightarrow$$

$$\Delta d = 85° \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 6400\,(0{,}96 - 0{,}56) \Rightarrow \Delta d \cong 1.208{,}9\pi \text{ km.}$$

Obs.: A medida do arco deve ser em radianos.