ESCALONAMENTO

Na apostila de sistemas lineares você já aprendeu a encontrar o valor das incógnitas pela regra de Cramer, mas essa regra só é válida para calcular Sistemas Normais com determinante diferente de zero. Mas, e se eles não forem normais? Existe outro método para calcular Sistemas Lineares? Para responder essas perguntinhas, vamos conhecer o método de Escalonamento.

O escalonamento consiste na substituição do sistema original por um sistema mais fácil de resolver chamado de **Sistema Equivalente**, que possui o **mesmo conjunto solução** do sistema original.

MÉTODO DE GAUSS

Existe um método de escalonamento conhecido como Método de Gauss, esse método é bem prático e utilizamos a representação matricial do sistema para escalonar.

O procedimento utilizado é converter a matriz do sistema aplicando uma sequência de operações nas suas linhas, partindo do pivô, que é o primeiro elemento não nulo de cada linha. Para escalonar você terá que seguir os seguintes procedimentos:

1) Representar o sistema em forma matricial;
2) Encontrar o pivô da 1ª linha;
3) Zerar os elementos dessa coluna;
4) Encontrar o pivô da 2º linha;
5) Zerar os elementos dessa coluna, abaixo do pivô;
6) Encontrar o pivô da 3ª linha;
7) Zerar os elementos dessa coluna, abaixo do terceiro pivô;
8) Continuamos com o mesmo processo, até que todos os elementos abaixo da diagonal principal sejam zerados.
9) Desta forma você terá encontrado uma matriz triangular. Agora é só escrever o sistema no formato de chaves e você terá encontrado o sistema equivalente.
10) O próximo passo é substituir o valor da incógnita encontrada nas demais equações até encontrar o valor de todas as incógnitas.
11) E, finalmente, escrever na simbologia adequada o conjunto solução.

OPERAÇÕES ENTRE LINHAS E COLUNAS

Faltou falar um detalhe importante! Como fazemos para zerar os elementos? Você poderá usar as seguintes operações para zerar os elementos da coluna e não alterar o sistema (Essa é a parte mais divertida!):

- Trocar de posição as linhas da matriz;
- Multiplicar as linhas por um número não nulo;
- Somar uma linha com múltiplos de outra linha.

Puxa! Quanta informação, não é mesmo? Não se preocupe, com o passo a passo dos exemplos você verá o quanto pode ser fácil e divertido escalonar, pois desafiará você a pensar em quais operações utilizar para chegar no Sistema Equivalente. Vamos lá então?

Exemplo 1: Resolva o Sistema Linear, utilizando o método de escalonamento.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

Resolução:

1° Passo: Primeiro vamos fazer a representação matricial, mas dessa vez vamos colocar a matriz dos termos independentes junto com a dos coeficientes, ficará assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

2° Passo: Encontrar o pivô da primeira linha, depois zerar os demais elementos da coluna, chamaremos as linhas de

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = 2L_1 - L_2 \\ L_3 = 3L_1 - L_3 \end{array}$$

3° Passo: Aqui vamos trocar as linhas de lugar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

4° Passo: Temos o pivô, agora vamos zerar a coluna.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \quad L_3 = 3L_2 - L_3$$

5° Passo: Vamos montar o sistema equivalente e resolvê-lo.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ y + 8z = 2 \\ 23z = 0 \end{cases}$$

$$23z = 0 \qquad y + 8z = 2 \qquad x + y + 3z = 3$$

$$z = \frac{0}{23} \qquad y + 8.0 = 2 \qquad x + 2 + 3.0 = 3$$

$$z = 0 \qquad y = 2 \qquad x = 3 - 2$$

$$x = 1$$

Logo, temos que a solução do sistema linear é dada por S=$\{(1, 2, 0)\}$.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolva o Sistema Linear, utilizando o método de escalonamento.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Resolução:

1° Passo: Primeiro vamos fazer a representação matricial, da mesma forma do exemplo anterior:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{array}$$

2° Passo: Encontrar o pivô da primeira linha, depois zerar os demais elementos da coluna, chamaremos as linhas de

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Ficou assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -11 & 3 & -5 \\ 0 & -14 & 1 & -12 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3 - \frac{14}{11} L_2$$

3° Passo: Aqui vamos ser mais diretos, vamos deixar o pivô da 2ª linha valendo -11, não transformaremos ele em 1. Então vamos para a , zerando a coluna abaixo dele.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -11 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{31}{11} & -\frac{62}{11} \end{array}\right]$$

4° Passo: Temos a forma matricial do Sistema Equivalente, agora é só montar e resolver.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 4 \\ -11y + 3z = -5 \\ -\frac{31}{11}z = -\frac{62}{11} \end{cases}$$

$$-\frac{31}{11}z = -\frac{62}{11} \qquad -11y + 3z = -5 \qquad x + 5y - z = 4$$

$$z = \frac{-62}{-31} \qquad -11y + 3.2 = -5 \qquad x + 5 - 2 = 4$$

$$z = 2 \qquad y = 1 \qquad x = 1$$

Logo, temos que a solução do sistema linear é dada por S={(1, 1, 2)}.

GRAU DE INDETERMINAÇÃO DO SISTEMA

Em um Sistema Linear, podemos calcular o grau de indeterminação do sistema. É bem simples, basta calcular a diferença entre o número de variáveis e o número de equações. Veja:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x - 2y + 5z = 3 \end{cases}$$

Grau de Indeterminação: 1

$$\begin{cases} x + y + z + w + t = 2 \\ x - z + 2w + 3t = 5 \\ x + 3y + 2z + w = -2 \end{cases}$$

Grau de Indeterminação: 2

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 2 \\ x + 3y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Grau de Indeterminação: Não Há

Número de Equações > Número de Incógnitas

Quando temos mais equações do que incógnitas, resolvemos o problema como se fosse um sistema normal, podemos calcular as incógnitas pelo método comum, o da **substituição**. Veja com o exemplo:

Exemplo: Resolva o sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$.

Resolução: Vamos isolar o x na 1ª equação, em seguida substituir ele na 2ª equação, e calcular o valor de y. Tendo o valor de y, é só substituir na 1ª equação e calcular o valor de x.

$$x + 2y = 5 \qquad 2x - y = 0 \qquad x = 5 - 2y$$

$$x = 5 - 2y \qquad 2(5 - 2y) - y = 0 \qquad x = 5 - 2.2$$

$$10 - 4y - y = 0 \qquad x = 1$$

$$-5y = -10$$

$$y = 2$$

Logo, temos que a solução do sistema linear é dada por S={(1,2)}.

Número de Incógnitas > Número de Equações

Quando temos mais incógnitas do que equações, teremos uma solução literal. Nestes casos a solução ficará sempre em função de uma incógnita.

Exemplo: Resolva o sistema linear $\begin{cases} x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - y - 2z = 1 \end{cases}$.

Resolução: Vamos isolar o x na 1ª equação, em seguida substituir ele na 2ª equação, e isolar o y, deixando ele em função de z. Tendo o valor de y, é só substituir na 1ª equação e calcular o valor de x, deixando ele também em função de z.

$$x + 3y - 3z = 2$$
$$x = 2 - 3y + 3z$$
$$x = 2 - 3\left(\frac{3 + 4z}{7}\right) + 3z$$
$$x = \frac{9z + 5}{7}$$

$$2x - y - 2z = 1$$
$$2(2 - 3y + 3z) - y - 2z = 1$$
$$4 - 6y + 6z - y - 2z = 1$$
$$4 - 7y + 4z = 1$$
$$-7y = 1 - 4 - 4z$$
$$-7y = -3 - 4z$$
$$y = \frac{3 + 4z}{7}$$

Logo, temos que a solução do sistema linear que é dada por $S = \left\{\left(\frac{9z + 5}{7}, \frac{3 + 4z}{7}\right) z \in \mathbb{R}\right\}$.

ANOTAÇÕES