Matemática
Conjuntos - Teoria

1 - Conjunto:
Conceito primitivo; não necessita, portanto, de definição.
Exemplo: conjunto dos números pares positivos: **P = {2,4,6,8,10,12, ... }.**
Esta forma de representar um conjunto, pela enumeração dos seus elementos, chama-se forma de listagem. O mesmo conjunto também poderia ser representado por uma propriedade dos seus elementos ou seja, sendo x um elemento qualquer do conjunto **P** acima, poderíamos escrever:
P = { x | x é par e positivo } = { 2,4,6, ... }.

1.1 - Relação de pertinência:
Sendo **x** um elemento do conjunto A , escrevemos **x** $\in$ **A** , onde o símbolo $\in$ significa ***"pertence a"***.
Sendo **y** um elemento que não pertence ao conjunto **A** , indicamos esse fato com a notação **y** $\notin$ **A**.

O conjunto que não possui elementos , é denominado conjunto vazio e representado por ϕ .
Com o mesmo raciocínio, e opostamente ao conjunto vazio, define-se o conjunto ao qual pertencem todos os elementos, denominado conjunto universo, representado pelo símbolo **U**.
Assim é que, pode-se escrever como exemplos:
$\varnothing = \{ x;\ x \neq x\}$ e $U = \{x;\ x = x\}$.

1.2 - Subconjunto:
Se todo elemento de um conjunto A também pertence a um conjunto B, então dizemos que
A é subconjunto de **B** e indicamos isto por $A \subset B$.
Notas:
a) todo conjunto é subconjunto de si próprio. ($A \subset A$)
b) o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. ($\varnothing \subset A$)
c) se um conjunto **A** possui m elementos então ele possui 2^m subconjuntos.
d) o conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto **A** é denominado
conjunto das partes de **A** e é indicado por **P(A).**
Assim, se **A = {c, d}** , o conjunto das partes de A é dado por **P(A) = {ϕ , {c}, {d}, {c,d}}**
e) um subconjunto de **A** é também denominado parte de **A**.

2 - Conjuntos numéricos fundamentais
Entendemos por conjunto numérico, qualquer conjunto cujos elementos são números. Existem infinitos conjuntos numéricos, entre os quais, os chamados conjuntos numéricos fundamentais, a saber:

Conjunto dos números naturais
N = {0,1,2,3,4,5,6,... }
Conjunto dos números inteiros
Z = {..., -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,... }
Obs: é evidente que $N \subset Z$.

Conjunto dos números racionais
$Q = \{x;\ x = p/q \text{ com } p \in Z,\ q \in Z \text{ e } q \neq 0 \}$.
Temos então que número racional é aquele que pode ser escrito na forma de uma fração p/q onde p e q são números inteiros, com o denominador diferente de zero.
Lembre-se que **não existe divisão por zero!**.
São exemplos de números racionais:
2/3, -3/7, 0,001=1/1000, 0,75=3/4, 0,333... = 1/3, 7 = 7/1, etc.

Notas:
a) é evidente que $N \subset Z \subset Q$.
b) toda dízima periódica é um número racional, pois é sempre possível escrever uma dízima periódica na forma de uma fração.
Exemplo: 0,4444... = 4/9
Conjunto dos números irracionais
I = {x; x é uma dízima não periódica}.

Exemplos de números irracionais:
π = 3,1415926... (número pi = razão entre o comprimento de qualquer circunferência e o seu diâmetro)
2,01001000100001... (dízima não periódica)
$\sqrt{3}$ = 1,732050807... (raiz não exata).

Conjunto dos números reais
R = { x; x é racional ou x é irracional}.

Notas:
a) é óbvio que $N \subset Z \subset Q \subset R$
b) $I \subset R$
c) $I \cup Q = R$
d) um número real é racional ou irracional, não existe outra hipótese!

3 - Intervalos numéricos
Dados dois números reais **p** e **q**, chama-se **intervalo** a todo conjunto de todos números reais compreendidos entre **p** e **q** , podendo inclusive incluir **p** e **q**. Os números **p** e **q** são os limites do intervalo, sendo a diferença **p - q** , chamada amplitude do intervalo.
Se o intervalo incluir **p** e **q** , o intervalo é fechado e caso contrário, o intervalo é dito aberto.
A tabela abaixo, define os diversos tipos de intervalos.

TIPOS	REPRESENTAÇÃO	OBSERVAÇÃO
INTERVALO FECHADO	[p;q] = {x ∈ R; p ≤ x ≤ q}	inclui os limites p e q
INTERVALO ABERTO	(p;q) = { x ∈ R; p < x < q}	exclui os limites p e q
INTERVALO FECHADO A ESQUERDA	[p;q) = { x ∈ R; p ≤ x < q}	inclui p e exclui q
INTERVALO FECHADO À DIREITA	(p;q] = {x ∈ R; p < x ≤ q}	exclui p e inclui q
INTERVALO SEMI-FECHADO	[p;∞) = {x ∈ R; x ≥ p}	valores maiores ou iguais a p.
INTERVALO SEMI-FECHADO	(- ∞ ; q] = { x ∈ R; x ≤ q}	valores menores ou iguais a q.
INTERVALO SEMI-ABERTO	(-∞ ; q) = { x ∈ R; x < q}	valores menores do que q.
INTERVALO SEMI-ABERTO	(p; ∞) = { x > p }	valores maiores do que p.

Nota: é fácil observar que o conjunto dos números reais, (o conjunto R) pode ser representado na forma de intervalo como **R = (-∞ ; + ∞).**

4 - Operações com conjuntos

4.1 - União (∪)
Dados os conjuntos **A** e **B** , define-se o conjunto união **A ∪ B = { x; x ∈ A ou x ∈ B}**.
Exemplo: {0,1,3} ∪ { 3,4,5 } = { 0,1,3,4,5}.
Percebe-se facilmente que o conjunto união contempla todos os elementos do conjunto A ou do conjunto B.
Propriedades imediatas:
a) A ∪ A = A
b) A ∪ ϕ = A
c) A ∪ B = B ∪ A (a união de conjuntos é uma operação comutativa)
d) A ∪ U = U , onde U é o conjunto universo.

4.2 - Interseção (∩)
Dados os conjuntos **A** e **B** , define-se o conjunto interseção **A ∩ B = {x; x ∈ A e x ∈ B}**.
Exemplo: {0,2,4,5} ∩ { 4,6,7} = {4}.
Percebe-se facilmente que o conjunto interseção contempla os elementos que são comuns aos conjuntos A e B.
Propriedades imediatas:
a) A ∩ A = A
b) A ∩ ∅ = ∅
c) A ∩ B = B ∩ A (a interseção é uma operação comutativa)
d) A ∩ U = A onde U é o conjunto universo.

São importantes também as seguintes propriedades :
P1. A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) (propriedade distributiva)
P2. A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) (propriedade distributiva)
P3. A ∩ (A ∪ B) = A (lei da absorção)
P4. A ∪ (A ∩ B) = A (lei da absorção)
Obs: Se A ∩ B = ϕ , então dizemos que os conjuntos A e B são Disjuntos.

4.3 - Diferença: A - B = {x ; x ∈ A e x ∉ B}.
Observe que os elementos da diferença são aqueles que pertencem ao primeiro conjunto, mas não pertencem ao segundo.

Exemplos:
{ 0,5,7} - {0,7,3} = {5}.
{1,2,3,4,5} - {1,2,3} = {4,5}.

Propriedades imediatas:
a) A - ϕ = A
b) ϕ - A = ϕ
c) A - A = ∅
d) A - B ≠ B - A (a diferença de conjuntos não é uma operação comutativa).

4.3.1 - Complementar de um conjunto
Trata-se de um caso particular da diferença entre dois conjuntos. Assim é , que dados dois conjuntos **A** e **B**, com a condição de que **B ⊂ A** , a diferença **A - B** chama-se, neste caso, complementar de **B** em relação a **A** .
Simbologia: **C_AB = A - B.**
<u>*Caso particular:*</u> O complementar de **B** em relação ao conjunto universo **U**, ou seja , **U - B** ,é indicado pelo símbolo **B'** .Observe que o conjunto **B'** é formado por todos os elementos que não pertencem ao conjunto **B**, ou seja:
B' = {x; x ∉ B}. É óbvio, então, que:
a) B ∩ B' = ϕ
b) B ∪ B' = U
c) ϕ' = U
d) U' = ϕ

5 - Partição de um conjunto
Seja **A** um conjunto não vazio. Define-se como **partição de A**, e representa-se por **part(A)**, qualquer

subconjunto do **conjunto das partes de A** (representado simbolicamente por **P(A)**), que satisfaz simultaneamente, às seguintes condições:
1 - nenhuma dos elementos de **part(A)** é o conjunto vazio.
2 - a interseção de quaisquer dois elementos de **part(A)** é o conjunto vazio.
3 - a união de todos os elementos de **part(A)** é igual ao conjunto A.
Exemplo: Seja A = {2, 3, 5}
Os subconjuntos de A serão: {2}, {3}, {5}, {2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5}, e o conjunto vazio - Ø.
Assim, o **conjunto das partes de A** será:
P(A) = { {2}, {3}, {5}, {2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5}, Ø }
Vamos tomar, por exemplo, o seguinte subconjunto de P(A):
X = { {2}, {3,5} }
Observe que **X** é uma partição de **A** - cuja simbologia é part(A) - pois:
a) nenhum dos elementos de X é Ø .
b) {2} $\cap$ {3, 5} = Ø
c) {2} U {3, 5} = {2, 3, 5} = A
Sendo observadas as condições 1, 2 e 3 acima, o conjunto **X** é uma partição do conjunto A.
Observe que **Y** = { {2,5}, {3} } **;** **W** = { {5}, {2}, {3} }**;** **S** = { {3,2}, {5} } são outros exemplos de partições do conjunto A.

Outro exemplo: o conjunto Y = **{** {0, 2, 4, 6, 8, ...}, {1, 3, 5, 7, ...} **}** é uma partição do conjunto **N** dos números naturais, pois {0, 2, 4, 6, 8, ...} $\cap$ {1, 3, 5, 7, ...} = Ø e {0, 2, 4, 6, 8, ...} U {1, 3, 5, 7, ...} = **N** .

6 - Número de elementos da união de dois conjuntos

Sejam **A** e **B** dois conjuntos, tais que o número de elementos de **A** seja **n(A)** e o número de elementos de **B** seja **n(B).**
Nota: o número de elementos de um conjunto, é também conhecido com cardinal do conjunto.
Representando o número de elementos da interseção **A $\cap$ B** por **n(A $\cap$ B)** e o número de elementos da união **A $\cup$ B** por n(A $\cup$ B) , podemos escrever a seguinte fórmula:
n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B) - n(A $\cap$ B)

Exercícios

1- (ITA-1969) Sejam **R** o conjunto dos números reais e C um subconjunto de **R**. Definimos SUPREMO de C(sup(C)) como sendo o número real L satisfazendo às seguintes condições:
i) L é maior ou igual a qualquer número pertencente a C;
ii) Dado um número real L' < L, existe sempre um número x' de C tal que x'>L'.
Seja C o conjunto dos números naturais menores do que 11. Uma das afirmações abaixo, relativas ao conjunto C, é verdadeira. Assinale-a.
a) L = 9
b) L = 10
c) L = 11
d) L = 12
e) não existe sup(C)

2- (ITA-1974) Sejam A, B e C conjuntos contidos num mesmo conjunto U. Seja x um elemento de U. <u>**Seja**</u> C_BA = { x $\in$ U : x $\in$ B e x $\notin$ A }, então $C_C(A\cup B)$ é igual a:
a) $C_CA \cup C_CB$
b) $C_CA \cap C_CB$
c) C_AB
d) $\varnothing$
e) nda

3- (ITA-1985) Seja X um conjunto não vazio e sejam A e B dois subconjuntos de X. Define-se A^C = { x $\in$ X : x $\notin$ A } e A – B = {x $\in$ A:x $\notin$ B}. Dadas as sentenças:
1. A $\cap$ B = $\varnothing \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$;
2. Se X = **R**; A = {x $\in$ **R**; $x^3 – 1 = 0$} ;
B = { x $\in$ **R** ; $x^2 – 1 = 0$ } ;
C = { x $\in$ **R**; x – 1 = 0 },
então A = C = B.
3. A - $\varnothing$ = A
4. $A – B \neq A \cap B^C$
Podemos afirmar que está(ão) correta(s):
a) As sentenças 1 e 3.
b) As sentenças 1, 2 e 4 .
c) As sentenças 3 e 4 .
d) As sentenças 2, 3 e 4.
e) Apenas a sentença 2.

4- (ITA-1987) Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de **R**. Assinale a alternativa correta:
a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.
b) Se $F \cap G$ é o conjunto vazio, então necessariamente F = **R .**
c) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.
d) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.
e) Se $F \subset G$ e G ≠ **R**, então $(F \cap G) \cup G$ = **R.**

5- (ITA-1988) Sejam A, B e C subconjuntos dos números reais. Então:
a) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$
b) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$
c) Se $A \subset B$, então $A^C \subset B^C$
d) $(A \cap B) \cup C^C = (A^C \cup C)^C \cap (B^C \cup C)^C$
e) $A \cup (B \cup C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$

6- (ITA-1989) Sejam A, B e C subconjuntos não vazios de **R.** Dadas as igualdades abaixo:

1. (A – B) X C = (A X C) – (B X C)
2. (A – B) X C = (A X B) – (B X C)
3. $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$
4. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
5. $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$

Podemos afirmar que:
a) 2 e 4 são verdadeiras
b) 1 e 5 são verdadeiras
c) 3 e 4 são verdadeiras
d) 1 e 4 são verdadeiras
e) 1 e 3 são verdadeiras

7- (ITA-1995) Seja o conjunto:
Qual o conjunto abaixo é tal que sua intersecção com A é o próprio A?
a) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
b) $(-\infty, -2]$
c) [-2, 2]
d) [-2, 0]
e) [0,2)

8- (ITA-1995;questão "convidada") Visto que, para todo $x \geq 1$ e $n \in N$, vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$, temos como conseqüência que, para $0 < x < 1$ e $n \in N$, tem-se:
a) $x^{n-1} < [n(x + 1)]^{-1}$
b) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$
d) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

9- (ITA-1996) Sejam A e B subconjuntos não vazios de **R**, e considere as seguintes afirmações:
i) $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \varnothing$
ii) $(A - B^C)^C = B - A^C$
iii) $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

Sobre essas afirmações podemos garantir que:
a) apenas a afirmação (i) é verdadeira.
b) apenas a afirmação (ii) é verdadeira.
c) apenas a afirmação (iii) é verdadeira.
d) todas as afirmações são verdadeiras.
e) apenas as afirmações (i) e (iii) são verdadeiras.

10- (ITA-1999) Sejam E, F, G e H subconjuntos não vazios de **R**. Considere as afirmações:
(i) Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.
(ii) Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.
(iii) Se $(E \times G) \cup (F \times H) = (F \times H)$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.

Então:

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + \operatorname{sen}\left(\frac{n!\,\pi}{6} \right); n \in N \right\}$$

a) Apenas a afirmação (i) é verdadeira.
b) Apenas a afirmação (ii) é verdadeira.
c) Apenas as afirmações (ii) e (iii) são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações (i) e (ii) são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

11- (ITA-2000) Denotemos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup C) = 9$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então n(A)+n(B)+n(C) é igual a:
a) 11
b) 14
c) 15
d) 18
e) 25

12- (ITA-2001) Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de R, não vazios. Com respeito às afirmações:
(I) $X \cap \{ [Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C] \} = X$
(II) Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$
(III) Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$.

temos que:
a) apenas (I) é verdadeira.
b) apenas (I) e (II) são verdadeiras.
c) apenas (I) e (III) são verdadeiras.
d) apenas (II) e (III) são verdadeiras.
e) todas são verdadeiras.

"POR QUE NOS CONTENTAMOS COM VIVER RASTEJANDO, QUANDO SENTIMOS O DESEJO DE VOAR?" HELLEN KELLER

GABARITO

01 - B
02 - B
03 - A
04 - C
05 - E
06 - D
07 - C
08 - E
09 - A
10 - E
11 - D
12 - B

Júlio Sousa
julio.sousa@projetomedicina.com.br