Estou na área, grande guerreiro, futuro oficial da Marinha, Marinha Mercante ou Aeronáutica do Brasil!

Esta é a aula 05 do nosso curso de Matemática 1 para as provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL e estudaremos hoje as funções do primeiro grau (funções afins). Este é um tópico bastante simples, então não há motivo para ter medo, combinado? Prontos para a batalha? Vamos lá!

SUMÁRIO

FUNÇÃO AFIM

1. DEFINIÇÃO

Uma função do 1º grau (ou função afim) é dada pela lei de formação $f(x)=ax+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$. O número a é chamado de coeficiente angular de *f* e b é dito coeficiente linear.

EXEMPLO

$$f_1(x)=5x+3, f_2(x)=\sqrt{3}x-\pi^4$$

OBSERVAÇÃO

As raízes (ou zeros) de uma função *f* real são os valores que anulam tal função. Por exemplo, a raiz de $5x+3$ é $x=-\frac{3}{5}$. De forma mais geral, a ÚNICA raiz de $f(x)=ax+b$ é $x=-\frac{b}{a}$.

Dizemos que uma função afim é linear se $b=0$, ou seja, uma função é linear se é da forma $f(x)=ax$, $a\neq 0$.

2. GRÁFICO

O gráfico de uma função linear é uma reta. Desta forma, para efetuar a construção de tal gráfico, basta que conheçamos dois de seus pontos. Em geral, escolhemos os pontos onde a reta corta o eixo x e o eixo y.

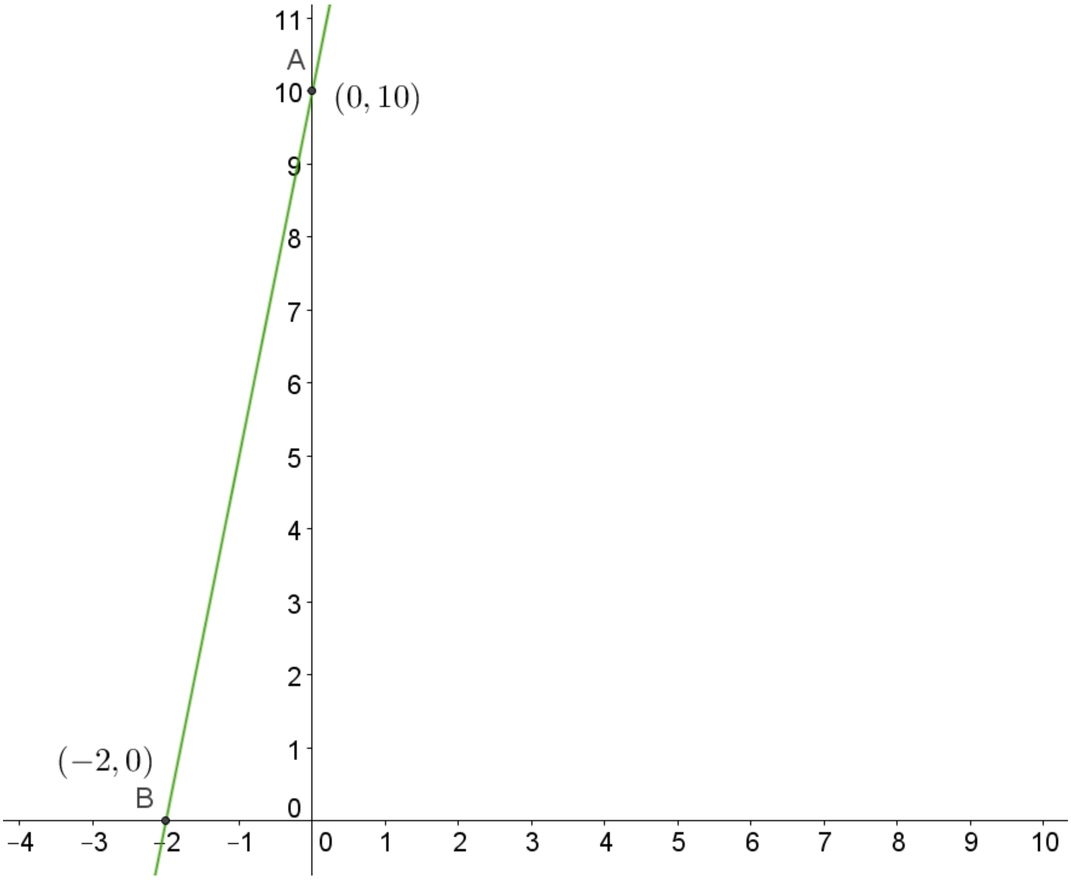
OBSERVAÇÃO

No gráfico, o coeficiente angular é igual a tangente do ângulo de inclinação da reta e o coeficiente linear é igual a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas (eixo *y*).

Vejamos agora um exemplo:

Construir o gráfico de f(x) = 5x + 10.

A raiz desta função é x = - 2. Assim, a nossa reta deve passar pelo ponto (-2,0). Por outro lado, quando x = 0, a função assume valor igual a 10. Desta forma, a reta também deve passar pelo ponto (0,10). Estes dois pontos são suficientes para construirmos o gráfico:



3. MONOTONISMO

Nesta seção, estaremos interessados em determinar condições para que uma função afim seja crescente ou decrescente. Para nossa sorte, estas condições são extremamente simples, como veremos a seguir.

TEOREMA: Seja $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, uma função afim. Assim, temos:

i) Se $a>0$, então f é crescente, isto é, $f(x)>f(y)$ se $x>y$.

ii) Se $a<0$, então f é decrescente, isto é, $f(x)>f(y)$ se $x<y$.

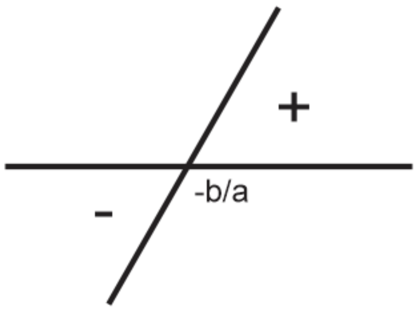
4. ESTUDO DO SINAL

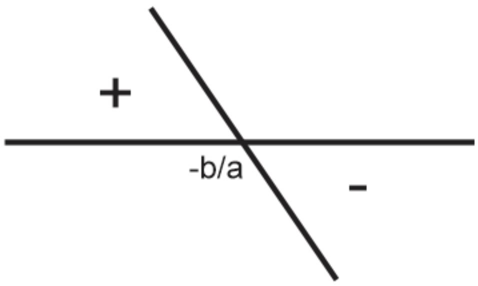
Com isso, veremos agora como estudar o sinal de uma função afim, o que será extremamente útil na sequência do curso, quando estudarmos os quadros de sinais. Mais uma vez, para nossa alegria, o resultado é bastante simples e pode ser expresso através de um esquema. Temos o seguinte resultado:

TEOREMA: Seja $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, uma função afim. Então:

i) $a > 0: \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) > 0 \\ x < -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$

ii) $a < 0: \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) < 0 \\ x < -\dfrac{b}{a} \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$





Pronto, já acabamos a teoria!
Viu como foi fácil? Vamos partir para os exercícios de combate?

1. A variação de temperatura $y=f(x)$ num intervalo de tempo x é dada pela função $f(x)=(m^2-9)x^2+(m+3)x+m-3$. Determine o valor de m para que o gráfico da função seja uma reta e também para que f seja crescente.

a) – 3

b) 9

c) 3

d) – 9

e) 0

2. Um operário ganha R$3,00 por hora de trabalho de sua jornada semanal regular de trabalho, que é de 40 horas. Eventuais horas extras são pagas com um acréscimo de 50%. Encontre uma fórmula algébrica para expressar seu salário bruto semanal, S, para as semanas em que trabalhar h horas, com $h \geq 40$.

3. A Companhia de Abastecimento de Água de uma cidade cobra mensalmente, pela água fornecida a uma residência, de acordo com a seguinte tabela: Pelos primeiros $12m^3$ fornecidos, R$15,00 por m^3; pelos $8m^3$ seguintes, R$50,00 por m^3; pelos $10m^3$ seguintes, R$90,00 por m^3 e, pelo consumo que ultrapassar $30m^3$, R$100,00 o m^3. Calcule o montante a ser pago por um consumo de $32m^3$.

4. Uma produtora pretende lançar um filme em fita de vídeo e prevê uma venda de 20.000 cópias. O custo fixo de produção do filme foi R$150.000,00 e o custo por unidade foi de R$20,00 (fita virgem, processo de copiar e embalagem). Qual o preço mínimo que deverá ser cobrado por fita, para não haver prejuízo?

a) R$ 20,00

b) R$ 22,50

c) R$ 25,00

d) R$ 27,50

e) R$ 35,00

5. Uma pessoa, pesando atualmente 70kg, deseja voltar ao peso normal de 56kg. Suponha que uma dieta alimentar resulte em um emagrecimento de exatamente 200g por semana. Fazendo essa dieta, a pessoa alcançará seu objetivo ao fim de

a) 67 semanas.

b) 68 semanas.

c) 69 semanas.

d) 70 semanas.

e) 71 semanas.

6. Determine o valor de m para que a equação $m^2x - m + 1 = 3mx - 2x$ possua infinitas soluções.

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

7. O ônibus X parte da cidade A com velocidade constante de 80 km/h, à zero hora de certo dia. Às 2 horas da madrugada, o ônibus Y parte da mesma cidade, na direção e sentido do ônibus X, com velocidade constante de 100 km/h. O ônibus Y vai cruzar com o ônibus X, pela manhã, às

a) 6 horas.

b) 8 horas.

c) 10 horas.

d) 11 horas.

e) 12 horas

8. Sobre a equação $kx - \frac{x-1}{k} = 1$, na variável x, é correto afirmar que:

a) admite solução única se $k^2 \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}^*$

b) NÃO admite solução única se k = 1

c) admite mais de uma solução se $k = -1$

d) admite infinitas soluções se $k = 0$

9. Uma pequena empresa fabrica camisas de um único modelo e as vende por R$ 80,00 a unidade. Devido ao aluguel e a outras despesas fixas que não dependem da quantidade produzida, a empresa tem um custo fixo anual de R$ 96 000,00. Além do custo fixo, a empresa tem que arcar com custos que dependem da quantidade produzida, chamados custos variáveis, tais como matéria-prima, por exemplo; o custo variável por camisa é R$ 40,00. Em 2009, a empresa lucrou R$ 60 000,00. Para dobrar o lucro em 2010, em relação ao lucro de 2009, a quantidade vendida em 2010 terá de ser x% maior que a de 2009. O valor mais próximo de x é:

a) 120

b) 100

c) 80

d) 60

e) 40

10. A prefeitura de uma cidade concede benefícios fiscais às indústrias que lá se instalam. Para obter os benefícios, o número de empregados que reside na cidade deve ser, no mínimo, o dobro mais 5% do número de empregados que não residem nela. Uma indústria que contratou 80 funcionários que residem fora da cidade deve contratar, entre os moradores da cidade, um número mínimo de

a) 160 funcionários.

b) 166 funcionários.

c) 176 funcionários.

d) 164 funcionários.

e) 178 funcionários.

11. (EFOMM 02) Determine o coeficiente angular da reta cujas equações são dadas por $x = 2t - 1$ e $y = t + 2$, onde t é real.

a) – 1

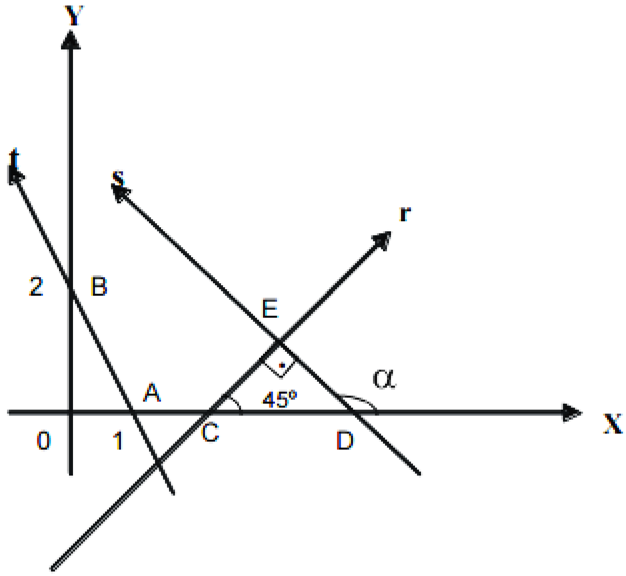
b) – 1/2

c) 2/5

d) 1/2

e) 1

12. (EFOMM 04) Calcule o coeficiente angular da reta **s** representada no gráfico.



a) – 1

b) 0

c) 1

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{3}$

13. (EFOMM 07) Uma empresa mercante A paga R$ 1000,00 fixos mais R$ 600,00 por dia de viagem e uma empresa B R$ 400,00 fixos mais R$ 800,00 por dia de viagem. Sabe-se que Marcos trabalha na empresa A e Cláudio na B e obtiveram o mesmo valor salarial. Quantos dias eles ficaram embarcados?

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

14. (EFOMM 08) Uma churrascaria cobra, num almoço, R$ 10,00 por pessoa. Após as 15h, esse valor cai para R$ 8,00. Estima-se que o custo total de um almoço seja de R$ 6,00 por pessoa. Em certo dia, na churrascaria almoçaram 100 pessoas; x dos quais permaneceram até as 15h. Assinale a alternativa que represente o intervalo de variação de x a fim de que 300<L(lucro)<400.

a) maior que 100

b) menor que 50

c) entre 50 e 100

d) menor que 50 e maior que 100

e) maior que 50

15. (EFOMM 09) Todos os anos uma fábrica aumenta a produção em uma quantidade constante. No 5º ano de funcionamento, ela produziu 1460 peças, e no 8º ano, 1940. Quantas peças, então, ela produziu no 1º ano de funcionamento?

a) 475

b) 520

c) 598

d) 621

e) 820

16. (AFA 13) Dois corredores partem de um ponto ao mesmo tempo e se deslocam da seguinte forma: o primeiro é tal, que sua velocidade y_1 é dada em função da distância x por ele percorrida através de

$$y_1 = \begin{cases} 4, \text{se } x \leq 200 \\ \dfrac{n}{200}x - \dfrac{n^2+n-8}{2}, \text{se } 200n < x \leq 200(n+1) \end{cases}$$

Em que n varia no conjunto dos números naturais não nulos.

O segundo é tal que sua velocidade y_2 é dada em função da distância x por ele percorrida através de $y_2 = \dfrac{x}{100} + 4$.

Tais velocidades são marcadas em km/h, e as distâncias, em metros. Assim sendo, ambos estarão à mesma velocidade após terem percorrido

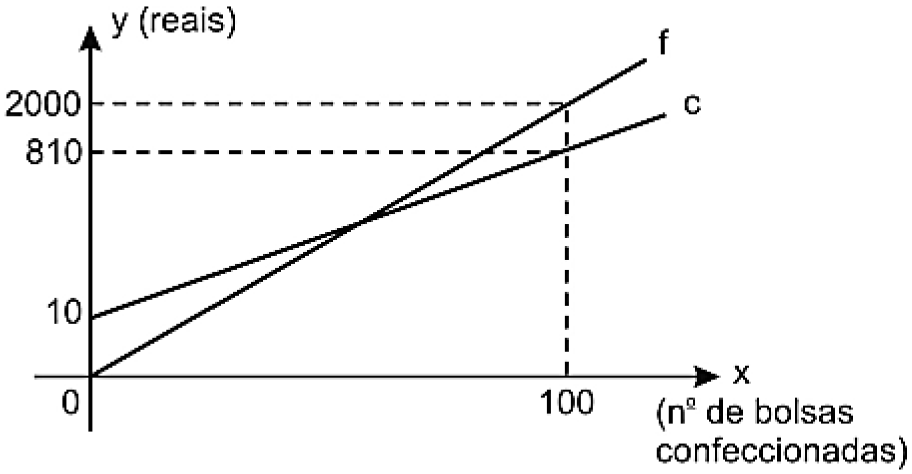
a) 800 m

b) 900 m

c) 1000 m

d) 1100 m

17. (AFA 11) Luiza possui uma pequena confecção artesanal de bolsas. No gráfico abaixo, a reta c representa o custo total mensal com a confecção de x bolsas e a reta f representa o faturamento mensal de Luiza com a confecção de x bolsas.



Com base nos dados acima, é correto afirmar que Luiza obtém lucro se, e somente se, vender

a) no mínimo 2 bolsas.

b) pelo menos 1 bolsa.

c) exatamente 3 bolsas.

d) no mínimo 4 bolsas.

18. Supondo $a<b$, onde a e b são constantes reais, considere a função $g(x)=a+(b-a)x$ definida no intervalo $(0,1)$. Podemos assegurar que:

a) g não é uma função injetora

b) dado qualquer $y_0<b$, sempre existe um $x_0\in(0,1)$ tal que $g(x_0)=y_0$

c) para cada $a<y_0<b$, corresponde um único real $x_0\in(0,1)$ tal que $g(x_0)=y_0$

d) não existe uma função real h, definida no intervalo (a,b), satisfazendo a relação $h(g(x))=x$ para cada $x\in(0,1)$.

e) n.d.a

19. Dadas as funções reais de variável real $f(x)=mx+1$ e $g(x)=x+m$, onde m é uma constante real com $0<m<1$, considere as afirmações:

I- $f\circ g(x)=g\circ f(x)$, para algum x real.

II- $f(m)=g(m)$

III- Existe a real tal que $f\circ g(a)=f(a)$

IV- Existe b real tal que $f\circ g(b)=mb$

V- $0<g\circ g(m)<3$

Podemos concluir que:

a) todas são verdadeiras

b) apenas quatro são verdadeiras

c) apenas três são verdadeiras

d) apenas duas são verdadeiras

e) apenas uma é verdadeira

20. Há muito tempo atrás, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a ideia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma ideia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos. Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17 então o número de moedas que havia originalmente no baú era:

a) 99

b) 95

c) 135

d) 87

e) n.d.a.

GABARITO

1. A função deve ser afim e com coeficiente de x positivo.

Logo $m^2 = 9$ e $m + 3 > 0$. Daí segue que $m = 3$.

RESPOSTA: C

2. Trabalhando h horas, com $h \geq 40$, ele cumpre 40 horas regulares a 3 reais cada e cumpre $h - 40$ horas extras a $1{,}5 \cdot 3 = 4{,}50$ reais cada.

Assim, o seu salário bruto na semana é dado por $S = 40 \cdot 3 + 4{,}5(h - 40) = 4{,}5h - 60$.

3. Dos 32m³ consumidos, temos:

12m³ a 15 reais o m³ : $12 \cdot 15 = 180$ reais

8m³ a 50 reais o m³: $8 \cdot 50 = 400$ reais

10m³ a 90 reais o m³: $10 \cdot 90 = 900$ reais

(32-10-8-12) = 2m³ a 100 reais o m³: $2 \cdot 100 = 200$ reais

Logo o montante a ser pago é $180 + 400 + 900 + 200 = 1680$ reais.

4. Vendendo 20.000 cópias, o custo da produtora é $150.000 + 20 \cdot 20.000 = 550.000$ reais.

Para que não haja prejuízo, deve vender cada cópia a pelo menos $\frac{550.000}{20.000} = 27{,}5$, ou seja, R$ 27,50.

RESPOSTA: D

5. Seja n o número de semanas para a pessoa voltar ao peso normal.

Devemos ter então $70-0{,}2n=56 \Leftrightarrow 0{,}2n=14 \Leftrightarrow n=70$.

RESPOSTA: D

6. A equação é equivalente a $\left(m^2-3m+2\right)x=m-3$.

Para que esta equação possua infinitas soluções, devemos ter $m^2-3m+2=0$ e $m-3=0$. Por fim, veja que se $m=3$, a primeira equação não é satisfeita. Desta forma, não há valor de m que faça a equação dada possuir infinitas soluções.

RESPOSTA: E

7. A partir de duas da madrugada, a função horária do ônibus X é $x(t)=80t+160$ (pois o ônibus já andou 160 km) e a função horária do ônibus Y é $y(t)=100t$ (estamos adotando a cidade A como origem). Para que os ônibus se cruzem, devemos ter $100t=80t+160 \Leftrightarrow t=8$ horas. Como começamos às duas da madrugada, temos que o cruzamento ocorrerá às 10h.

8. A equação é equivalente a $x\left(k-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{k}$.

Se $k-\frac{1}{k}\neq 0 \Rightarrow k^2\neq 1$ e k é não nulo, a equação admite solução única, pois podemos passar $k-\frac{1}{k}$ dividindo.

Se $k=1$, temos que 0 = 0 e possuímos infinitas soluções.

Se k = - 1, temos que 0 = 2 e a equação não admite solução.

RESPOSTA: As letras A e B estão corretas

9. Sendo m a quantidade de camisas vendidas em 2009, temos que o custo total da empresa foi de 96.000 + 40m e o rendimento da empresa foi de 80m. Como ela lucrou 60.000, temos que $80m - 40m - 96.000 = 60.000 \Leftrightarrow 40m = 156.000 \Leftrightarrow m = 3900$.

Em 2010, a empresa quer ter um lucro de 120.000 reais. Sendo então n a quantidade de camisas que deve vender em 2010, temos que $80n - 40n - 96.000 = 120.000 \Leftrightarrow 40n = 216.000 \Leftrightarrow n = 5400$.

Assim, o aumento percentual referente à quantidade vendida foi de $\frac{5400-3900}{3900} \cong 38{,}5\%$.

Logo $x \cong 38{,}5$ e assim o valor mais próximo de x presente nas alternativas é 40.

RESPOSTA: E

10. Sendo x o número de funcionários que residem fora da cidade, o número de empregados residentes na cidade deve ser pelo menos $2x + 0{,}05x = 2{,}05x$. No problema, temos que x = 80 e então o número de empregados residentes na cidade deve ser pelo menos $2{,}05 \cdot 80 = 164$.

RESPOSTA: D

11. Isolando t em ambas as equações, temos:

$t = \frac{x+1}{2}$ e $t = y - 2$

Igualando t, vem $\frac{x+1}{2} = y - 2 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.

Desta forma, o coeficiente angular da reta é $\frac{1}{2}$.

RESPOSTA: D

12. Analisando o triângulo CED, vemos que pelo teorema do ângulo externo, $\alpha = 90° + 45° = 135°$.

Sabemos que o coeficiente angular da reta s é dado por $\mathrm{tg}\,\alpha$. Desta forma, tal coeficiente é igual a $\mathrm{tg}\,135° = -1$.

RESPOSTA: A

13. Sendo x a quantidade de dias que Marcos e Cláudio, ficaram embarcados, temos que:

Salário de Marcos (empresa A): $1000+600x$

Salário de Cláudio (empresa B): $400+800x$

Desta forma, como eles obtiveram o mesmo valor salarial, vem que $1000+600x=400+800x \Leftrightarrow 200x=600 \Leftrightarrow x=3$.

Desta forma, eles ficaram 3 dias embarcados.

RESPOSTA: B

14. A receita da churrascaria no dia foi de $10x+8(100-x)=2x+800$ e o custo que a churrascaria teve foi de 600. Assim, o lucro foi de $2x+800-600=2x+200$.

Queremos que $300<2x+200<400 \Leftrightarrow 50<x<100$.

RESPOSTA: D

15. Seja $f(n)=an+b$ o número de peças produzidas no ano n de funcionamento (como a produção a cada ano aumenta de uma quantidade constante, sabemos que tal função é afim). Assim, temos:

$$\left|\begin{array}{l}5a+b=1460\\8a+b=1940\end{array}\right. \Rightarrow 3a=480 \Rightarrow a=160$$

Logo a = 160 e b = 660. Queremos $f(1)=a+b=160+660=820$.

RESPOSTA: E

16. Para que os corredores estejam à mesma velocidade, devemos ter:

$$\frac{n}{200}x-\frac{n^2+n-8}{2}=\frac{x}{100}+4 \text{ e } 200n<x\leq 200(n+1)$$

Da primeira equação, segue que $\frac{x}{200}(n-2)=\frac{n^2+n}{2} \Leftrightarrow x=\frac{100n(n+1)}{n-2}$.

Como $200n < x \leq 200(n+1)$, segue que:

$200n < \frac{100n(n+1)}{n-2} \leq 200(n+1)$ e então obtemos que $4 \leq n < 5$.

Como n é natural, devemos ter $n = 4$, donde a distância x pedida é $\frac{100 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 1000$ metros.

RESPOSTA: C

17. Seja $f = ax + b$ a função que representa o faturamento mensal de Luiza e seja $c = mx + n$ a função que representa o custo mensal de Luiza.

Temos que f passa pelos pontos (0,0) e (100,2000). Desta forma, temos:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 100a + b = 2000 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos a = 2 e b = 0. Logo $f = 20x$

Temos que c passa pelos pontos (0,10) e (100,810). Desta forma, temos:

$$\begin{cases} n = 10 \\ 100m + n = 810 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $m = 8$ e $n = 10$. Logo $c = 8x + 10$.

Para que Luiza tenha lucro, seu faturamento deve ser maior que o custo.

Desta forma, $20x > 8x + 10 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$. Como x é inteiro, x deve ser pelo menos 1.

RESPOSTA: B

18. Veja que $g(0) = a$ e $g(1) = b$. Como $a < b$, temos que g é crescente (em particular, g é injetora). Também, por ser g linear, g é sobrejetora.

Desta forma, dado $a < y_0 < b$, existe um único real $x_0 \in (0,1)$ tal que $g(x_0) = y_0$.

Para facilitar o entendimento, é recomendado fazer o gráfico da função.

RESPOSTA: C

19.

I.

$f \circ g(x) = f(x+m) = m(x+m)+1 = mx+m^2+1$ e $g \circ f(x) = g(mx+1) = mx+m+1$

Para que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$, devemos ter $mx+m^2+1 = mx+m+1 \Leftrightarrow m^2 = m$, ou seja, m = 0 ou m = 1, o que não é permitido, pois 0 < m < 1.

Afirmação FALSA

II.

$f(m) = m^2+1$

$g(m) = 2m$

$m^2+1 = 2m \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, que não é o caso.

Afirmação FALSA

III.

$f \circ g(a) = ma+m^2+1$

$f(a) = am+1$

Para que $f \circ g(a) = f(a)$, devemos ter $m^2 = 0$, o que não pode acontecer.

Afirmação FALSA

IV.

$f \circ g(b) = mb+m^2+1$

Logo devemos ter $mb+m^2+1 = mb \Leftrightarrow m^2+1 = 0$, o que é impossível.

Afirmação FALSA

V.

$$g \circ g(m) = g(2m) = 3m$$

Como $0 < m < 1$, segue que $0 < 3m < 3$.

Afirmação VERDADEIRA

Há, portanto, apenas uma afirmativa verdadeira.

RESPOSTA: E

21. Seja n a quantidade de moedas que o primeiro marinheiro pegou na madrugada. Assim, no total havia 2n+1 moedas no baú.

O segundo marinheiro então pegou $\frac{n-1}{2}$ moedas logo depois do primeiro marinheiro e sobraram no baú $\frac{n-1}{2}$ moedas.

Pela manhã, o imediato deu $\dfrac{\frac{n-1}{2}-1}{2} = \dfrac{n-3}{4}$ moedas para cada marinheiro.

Com isso, o primeiro marinheiro ficou com $n + \frac{n-3}{4} = \frac{5n-3}{4}$ moedas e o segundo marinheiro com $\frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{4} = \frac{3n-5}{4}$.

A razão entre o número de moedas dos dois é 29/17 e então temos que

$$\dfrac{\frac{5n-3}{4}}{\frac{3n-5}{4}} = \frac{29}{17} \Rightarrow 17(5n-3) = 29(3n-5) \Leftrightarrow n = 47$$

O número original de moedas no baú era, portanto, $2 \cdot 47 + 1 = 95$.

RESPOSTA: B