POSIÇÕES ENTRE RETAS, CIRCUNFERÊNCIA E POSIÇÕES RELATIVAS COM CIRCUNFERÊNCIAS

1. (ITA 2020) Duas curvas planas c_1 e c_2 são definidas pelas equações

c_1: $16x^2 + 9y^2 - 224x - 72y + 640 = 0$,
c_2: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$.

Sejam P e Q os pontos de interseção de c_1 com o eixo x e R e S os pontos de interseção de c_2 com o eixo y.

A área do quadrilátero convexo de vértices P, Q, R e S é igual a

a. $15+7\sqrt{3}$.

b. $15-7\sqrt{3}$.

c. $15+14\sqrt{3}$.

d. $15-14\sqrt{3}$.

e. $25+10\sqrt{3}$.

2. (ITA 2020) Os pontos $B=(1, 1+6\sqrt{2})$ e $C=(1+6\sqrt{2}, 1)$ são vértices do triângulo isósceles ABC de base BC, contido no primeiro quadrante. Se o raio da circunferência inscrita no triângulo mede 3, então as coordenadas do vértice A são

a. $(7\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$.

b. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

c. $(1+7\sqrt{2}, 1+7\sqrt{2})$.

d. $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

e. $(1+6\sqrt{2}, 1+6\sqrt{2})$.

3. (ACAFE 2020) Analise as afirmações e assinale a alternativa correta.

a. Os pontos $A(3, 0), B(1, 2)$ e $C(1, 4)$ determinam um triângulo equilátero.

b. Se $A(3, 0), B(-1, 0)$ e $C(1, 2)$ pertencem à circunferência de centro em (a, b) e raio r, então $a+b+r$ é 3.

c. Uma equação geral da reta que passa pelo ponto de interseção das retas $r: y = 2x-3$ e $s: 3x+2y=1$, e é perpendicular à reta $t: y=-5x+2$, é $x-5y+6=0$.

d. Se $p(x)=2x^3+2x^2+x+1$, então $p(x)>0$ somente para x real não negativo.

4. (FUVEST 2020) Um ponto (x, y) do plano cartesiano pertence ao conjunto F se é equidistante dos eixos OX e OY e pertence ao círculo de equação $x^2+y^2-2x-6y+2=0$. É correto afirmar que F

a. é um conjunto vazio.

b. tem exatamente 2 pontos, um no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

c. tem exatamente 2 pontos, ambos no primeiro quadrante.

d. tem exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

e. tem exatamente 4 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e dois no segundo quadrante.

5. (UEPG-PSS 3 2019) Considerando as retas r de equação $5x+2y=10$ e s que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(5, 4)$, assinale o que for correto.

01. Se α é o ângulo agudo entre as retas r e s, então $tg\alpha = \frac{31}{5}$.

02. A distância do ponto $C(1, 0)$ até a reta r é menor que a distância de $C(1, 0)$ até a reta s.

04. A distância do ponto $C(1, 0)$ ao ponto B pertence ao intervalo [5, 6].

08. O ponto médio de $\overline{AB}$ é o ponto $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

6. (UNIOESTE 2019) Considere as equações $y=4x-5$ e $y=x^2-5x+3$. Suponha que os pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) satisfaçam as duas equações e que $x_1<x_2$. Suponha ainda que o par $(4, y_3)$ satisfaça somente a primeira equação. Então é CORRETO afirmar que a equação da circunferência, que tem centro em $(4, y_3)$ e que passa pelo ponto (x_2, y_2), é dada por

a. $(x-4)^2+(y-11)^2=153$.

b. $(x-4)^2+(y-4)^2=225$.

c. $(x-4)^2+(y-11)^2=256$.

d. $(x-4)^2+(y-4)^2=264$.

e. $(x-4)^2+(y-11)^2=272$.

7. (UFSC 2019) Duas retas r e s, perpendiculares, interceptam-se no interior de uma circunferência γ, de centro $C\ (1, 3)$. Os pontos de intersecção da reta r com a circunferência γ são $A\ (1, -2)$ e $B\ (5, 6)$. O ponto $D\ (-4, 3)$ é intersecção da reta s com a circunferência γ.

01. A equação da circunferência γ é $x^2+y^2-2x-6y-15=0$.

02. A equação da reta s é $x+2y-2=0$.

04. O ponto $E\ (4, 1)$ também é ponto de intersecção da reta s com a circunferência γ.

08. O ponto $P(0, 2)$ é ponto de intersecção das retas r e s.

8. (UEPG 2019) Considerando, no plano cartesiano, os pontos $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(8, 0)$, $D(5, 2)$, $E(3, 5)$ e $F(0, 5)$, assinale o que for correto.

01. A área do polígono $ABCDEF$ é $22\ u.a.$

02. A circunferência de equação $4x^2+4y^2-20x-8y-7=0$, tem centro no ponto médio de AD e raio 3.

04. A circunferência de equação $x^2+y^2-4x=0$, tem centro no ponto médio de AC e raio 4.

08. A área do polígono $ABCDEF$ é $25\ u.a.$

9. (UECE 2019) No plano cartesiano, a reta t, paralela $x=\sqrt{3}\,y$ tangencia a circunferência $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ no ponto $Z=(x\ y)$, $y>2$. Para os pontos $X=(2, 0)$ e $Y=(0, 2)$ na circunferência, a medida do arco XYZ (que contém o ponto Y) é igual a

Observação: $tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

a. $\frac{4\pi}{3}$.

b. $\frac{5\pi}{3}$.

c. $\frac{5\pi}{4}$.

e. $\frac{6\pi}{5}$.

10. (ESPM 2019) As soluções reais da equação $(x^2-x)^2+(y^2-y)^2=0$ representadas em um plano cartesiano, são vértices de um polígono cuja área vale:

a. 1

b. 2

c. $\sqrt{2}$

d. $2\sqrt{2}$

e. 4

11. (UEG 2018) Uma circunferência com centro na origem está tangenciando duas retas paralelas de equações $y=-2x+b$ e $y=-2x+c$. Nesse caso, o valor de $b+c$ é

a. 0

b. –2

c. –1

d. 1

e. 2

12. (UPE-SSA 3 2018) Qual é a razão entre a medida da área e do comprimento da circunferência que, no plano cartesiano, passa pelos pontos $A(-4,\ 1)$, $B(-1,\ -2)$ e $C(2,\ 1)$?

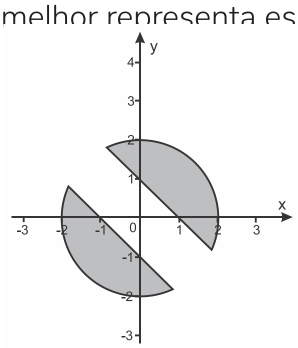
a. 0,5
b. 1
c. 1,5
d. 2
e. 2,5

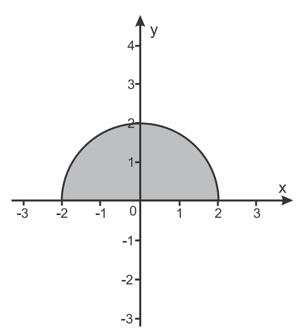
13. (Mackenzie 2018) A equação da reta que corta o eixo das ordenadas no ponto $P=(0,\ -6)$ e que tangencia a circunferência $x^2+y^2=4$ no quarto quadrante é

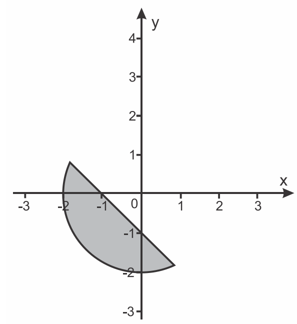
a. $y = -2\sqrt{2}x + 6$
b. $y = 2\sqrt{2}x - 6$
c. $y = 2\sqrt{2}x + 6$
d. $y = 4x - 6$
e. $y = -4x + 6$

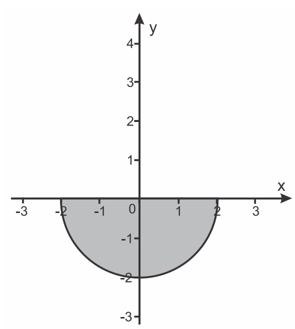
14. (UFRGS 2018) Considere a região delimitada pelas inequações $x+y\geq 1$ e $x^2+y^2\leq 4$, representadas em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

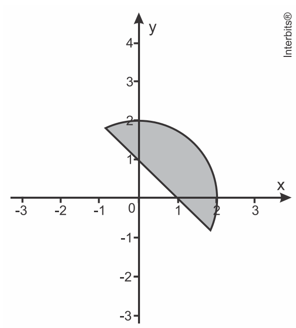
Assinale a alternativa que contém o gráfico que melhor representa essa região.

a.


b.


c.


d.


e.


15. (ESPCEX (AMAN) 2018) Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto $(4,\ 4)$ e não intercepta o eixo das coordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a. 3.
b. 4.
c. 5.
d. 6.
e. 7.

16. (UPF 2018) Na figura a seguir, estão representados o círculo trigonométrico e a reta r. Nela, observa-se que:

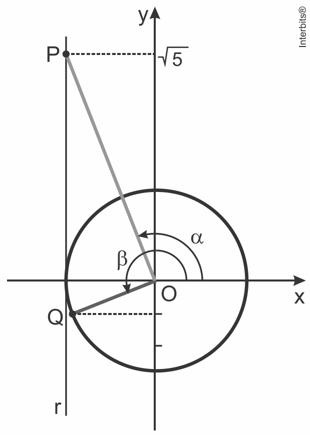
- A equação da reta r é $x=-1$.

- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e como lado final o segmento OP.

- β é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e como lado final o segmento OQ.

- O ponto P pertence à reta r e a sua ordenada é $\sqrt{5}$.

- O ponto Q pertence ao círculo trigonométrico e a sua ordenada é $-\frac{1}{3}$.



O valor de $tg\ (-\alpha)+cos\ \ \beta$ é

a. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

b. $\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{5}$

c. $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$

d. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e. $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$

17. (ITA 2017) Sejam $S_1=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\!:y\geq||x|-1|\}$ e $S_2=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\!:x^2+(y+1)^2\leq 25\}$. A área da região $S_1\cap S_2$ é

a. $\frac{25}{4}\pi-2.$

b. $\frac{25}{4}\pi-1.$

c. $\frac{25}{4}\pi.$

d. $\frac{75}{4}\pi-1.$

e. $\frac{75}{4}\pi-2.$

18. (EPCAR (AFA) 2017) Seja $\lambda\!:3x^2+3y^2-6x-12y+k=0$, uma circunferência que no plano cartesiano tem intersecção vazia com os eixos coordenados.

Considerando $k\in\mathbb{R}$, é correto afirmar que

a. $P\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3}\right)$ é interior a λ.

b. existem apenas dois valores inteiros para k.

c. a reta $r\!:x=k$ intersecta λ.

d. se c é o comprimento de λ, então $c>2\pi$ unidades de comprimento.

19. (UNICAMP 2017) Considere a circunferência de equação cartesiana $x^2+y^2=x-y$. Qual das equações a seguir representa uma reta que divide essa circunferência em duas partes iguais?

a. $x+y=-1.$

b. $x-y=-1.$

c. $x-y=1.$

d. $x+y=1.$

20. (UECE 2017) Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $x^2+y^2-10\sqrt{3}x-25=0$ e $x^2+y^2+10\sqrt{3}x-25=0$ representam circunferências. Cada uma dessas circunferências limitam uma área no plano. O comprimento da linha que contorna a união das áreas limitadas por cada uma destas circunferências é

Dados: $u.c.\equiv$ unidade de comprimento

a. $\frac{200\pi}{3}\ u.c.$

b. $\frac{80\pi}{3}\ u.c.$

c. $\frac{50\pi}{3}\ u.c.$

d. $\frac{100\pi}{3}\ u.c.$

GABARITO

1. C.

De $c_1 : 16x^2 + 9y^2 - 224x - 72y + 640 = 0,$

$16x^2 - 224x + 640 = 0$

$x^2 - 14x + 40 = 0$

$x = 10$ ou $x = 4$

Logo, $P(10, 0)$ e $Q(4, 0)$

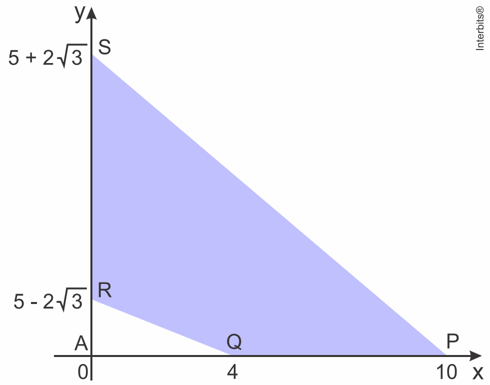
De $c_2 : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0,$

$y^2 - 10y + 13 = 0$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{10 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$y = 5 - 2\sqrt{3}$ ou $y = 5 + 2\sqrt{3}$



$$S_{PQRS} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(5 - 2\sqrt{3}\right)$$

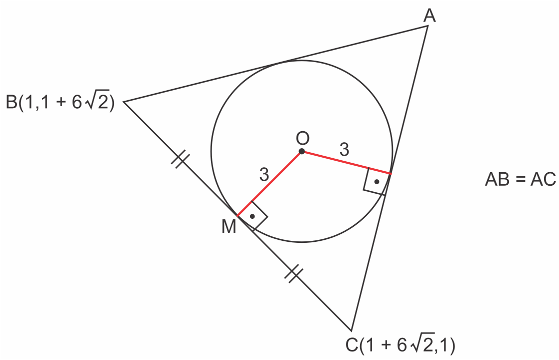
$$S_{PQRS} = 5 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right) - 2 \cdot \left(5 - 2\sqrt{3}\right)$$

$$S_{PQRS} = 25 + 10\sqrt{3} - 10 + 4\sqrt{3}$$

$$S_{PQRS} = 15 + 14\sqrt{3}$$

2. C.

Do enunciado, temos a seguinte figura:



$$BC = \sqrt{\left(1 + 6\sqrt{2} - 1\right)^2 + \left(1 - \left(1 + 6\sqrt{2}\right)\right)^2}$$

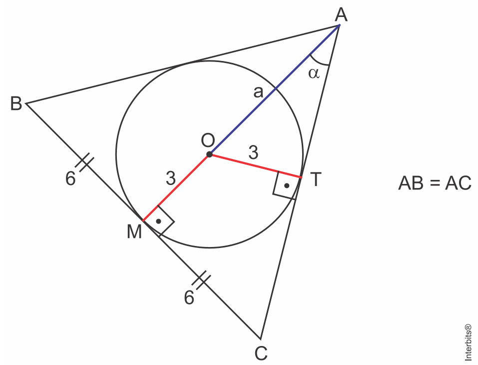
$$BC = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2}$$

$$BC = \sqrt{2 \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2}$$

$$BC = \sqrt{2 \cdot 6^2 \cdot 2}$$

$$BC = 12$$

Daí, temos a seguinte figura:



$T\hat{A}O = C\hat{A}M = \alpha$ e $A\hat{T}O = A\hat{M}C = 90°$, logo, os triângulos AMC e ATO são semelhantes.

Dessa forma,

$$\frac{AC}{AO} = \frac{MC}{TO}$$

$$\frac{AC}{a} = \frac{6}{3}$$

$$AC = 2a$$

No triângulo AMC,

$$(2a)^2 = (a + 3)^2 + 6^2$$

$$4a^2 = a^2 + 6a + 9 + 36$$

$$3a^2 - 6a - 45 = 0$$

$$a^2 - 2a - 15 = 0$$

$a = 5$ ou $a = -3$

Como $a > 0$, $a = 5.$

Então,

$AM = 8$

Note que:

$$m_{\overline{BC}} = \frac{1 - \left(1 + 6\sqrt{2}\right)}{1 + 6\sqrt{2} - 1}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{-6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$$

$$m_{\overline{BC}} = -1$$

Logo,

$m_{\overrightarrow{AM}} = 1$

$x_M = \dfrac{1+1+6\sqrt{2}}{2}$

$x_M = 1+3\sqrt{2}$

$y_M = \dfrac{1+6\sqrt{2}+1}{2}$

$y_M = 1+3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AM}: y-\left(1+3\sqrt{2}\right) = 1\cdot\left(x-\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)$

$\overrightarrow{AM}: y-1-3\sqrt{2} = x-1-3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AM}: y = x$

Então, $A(x, x)$

Como $AM = 8$, $A(x, x)$ e $M\left(1+3\sqrt{2}, +3\sqrt{2}\right)$,

$8^2 = \left(x-\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(x-\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)^2$

$64 = 2\cdot\left(x-\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)^2$

$32 = \left(x-\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)^2$

$x-\left(1+3\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$ ou $x-\left(1+3\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$

De $x-\left(1+3\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$, $x = 1+7\sqrt{2}$

De $x-\left(1+3\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$, $x = 1-\sqrt{2} < 0$

Como A está no primeiro quadrante, $A\left(1+7\sqrt{2}, 1+7\sqrt{2}\right)$.

3. b.

[A] Falsa. Desde que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 6+4-2-12 \neq 0,$$

podemos concluir que A, B e C não estão alinhados. Porém, como $d(A, B)=\sqrt{(2^2+(-2)^2)}=2\sqrt{2}\neq 2\sqrt{5}=\sqrt{(2^2+(-4)^2)}=d(A, C)$,

tem-se que ABC não é equilátero.

[B] Verdadeira. De fato, se $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ é a equação da circunferência, então

$$\begin{cases} (a-3)^2+b^2=r^2 \\ (a+1)^2+b^2=r^2 \\ (a-1)^2+(b-2)^2=r^2 \end{cases}.$$

Subtraindo as duas primeiras equações, temos $(a-3)^2-(a+1)^2=0 \Leftrightarrow 2a-2=0 \Leftrightarrow a=1.$

Logo, vem

$2^2+b^2=(b-2)^2 \Leftrightarrow 4=-4b+4 \quad \Leftrightarrow b=0.$

Em consequência, encontramos $r=2$ e, portanto, segue que $a+b+r=3.$

[C] Falsa. A abscissa do ponto de interseção das retas r e s é igual a

$3x+2(2x-3)=1 \Leftrightarrow x=1.$

Por conseguinte, as retas r e s se intersectam em $(1, -1)$. Ademais, sendo o coeficiente angular da reta t igual a -5, vem

$$y+1=\frac{1}{5}(x-1) \Leftrightarrow x-5y-6=0.$$

[D] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3+2x^2+x+1 \\ &= 2x^2(x+1)+(x+1) \\ &= (x+1)(2x^2+1). \end{aligned}$$

Tomando $x=-\dfrac{1}{2}$, vem

$$p\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)>0.$$

Contradição.

4. d.

Completando os quadrados, vem $x^2+y^2-2x-6y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{2})^2$.

Logo, o centro da circunferência é o ponto $(1, 3)$ e seu raio mede $2\sqrt{2}$.

Agora, é fácil ver que (x, y) só pode ser um ponto pertencente ao primeiro ou segundo quadrantes, isto é, $x=y$ ou $-x=y$. Em consequência, deve-se ter

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+2=0 \; e \; x=y \\ \quad ou \\ x^2+y^2-2x-6y+2=0 \; e \; -x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+1=0 \; e \; x=y \\ \quad ou \\ x^2+2x+1=0 \; e \; -x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}) \; ou \; (2-\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}) \\ \quad ou \\ (1,-1) \end{cases}$$

Portanto, segue que F tem exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

5. 01 + 04 + 08 = 13.

Para validar a questão, o enunciado foi alterado de

“Considerando as retas r de equação $5x+2y=10$ e s que passam pelos pontos...” para “Considerando as retas r de equação $5x+2y=10$ e s que passa pelos pontos..”:

reta r: $5x+2y-10=0$ e $m_r=-\dfrac{5}{2}$

reta s: $y-1=\dfrac{4-1}{5-0}\cdot(x-0)\Rightarrow 3x-5y+5=0$

e $m_s=\dfrac{3}{5}$

[01] Verdadeira.

$$tg\alpha=\frac{\left|-\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\right|}{1+\left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}\right)}=\frac{-\frac{31}{10}}{-\frac{1}{2}}=\frac{31}{5}$$

[02] Falsa.

$$d_{c_1r}=\frac{|5\cdot1+2\cdot0-10|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{29}}<1$$

$$d_{c_2s}=\frac{|3\cdot1+2\cdot0+5|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\frac{8}{\sqrt{34}}>1$$

$$\therefore d_{c_1r}<d_{c_2s}$$

[04] Verdadeira.

$$d_{C,B}=\sqrt{(5-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\simeq5{,}6$$

[08] Verdadeira.

$$x_M=\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}$$

$$y_M=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$$

6. e. Considerando que $P_1=(x_1,\ y_1)$, $P_2=(x_2,\ y_2)$ e $P_3=(4,\ y_3)$.

Determinando os pontos P_1 e P_2, resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y=4x-5 \\ y=x^2-5x+3 \end{cases}$$

$$x^2-5x+3=4x-5$$

$$x^2-9x+8=0\Rightarrow x=\frac{9\pm7}{2}\Rightarrow x_1=1 \text{ e } x_2=8$$

$$x_1=1\Rightarrow y_1=4\cdot1-5=-1$$

$$x_2=8\Rightarrow y_2=4\cdot8-5=27$$

Temos então $P_1=(1,-1)$ e $P_2=(8,27)$

Calculando agora o valor de y_3: $y_2=4\cdot4-5=11$, logo $P_3=(4,11)$

Para determinar o raio r do circunferência devemos calcular a distância entre os pontos P_3 e P_2

$$r=\sqrt{(8-4)^2+(27-11)^2}=\sqrt{272}$$

Como o centro é ponto P_3, podemos determinar a equação reduzida desta circunferência:

$$(x-4)^2+(y-11)^2=\sqrt{272}^2\Rightarrow(x-4)^2+(y-11)^2=272.$$

7. 01 + 02 = 03.

Como r passa por $A=(1,-2)$ e $B=(5,6)$, segue que seu coeficiente angular é igual a

$$m_r=\frac{6-(-2)}{5-1}=2.$$

Logo, sendo r e s perpendiculares, vem $m_s=-\dfrac{1}{2}$.

O raio de γ é dado por

$$d(A,C)=\sqrt{(1-1)^2+(3-(-2))^2}=5.$$

[01] Verdadeira. Com efeito, a equação de γ é

$$(x-1)^2+(y-3)^2=5^2\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y-15=0.$$

[02] Verdadeira. De fato, pois a reta s passa por $D(-4,3)$ e $m_s=-\dfrac{1}{2}$, o que implica em

$$y-3=-\frac{1}{2}\cdot(x-(-4))\Leftrightarrow x+2y-2=0.$$

[04] Falsa. Desde que $4+2\cdot1-2=4\neq0$ podemos afirmar que o ponto $E(4,\ 1)$ não pertence a s. Portanto, não pode ser uma interseção de s com γ.

[08] Falsa. Sendo $0+2\cdot2-2=2\neq0$, podemos concluir que o ponto $P(0,\ 2)$ não pertence a s. Desse modo, não pode ser a interseção de r e s.

8. 02 + 08 = 10.

[01] Falsa. Na verdade, sabemos que a área do polígono ABCDEF é igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}0&3&8&5&3&0&0\\0&0&0&2&5&5&0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|16+25+15-6|$$
$$=25 \text{ u.a.}$$

[02] Verdadeira. Com efeito, fatorando e completando os quadrados, vem

$$4x^2+4y^2-20x-8y-7=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=3^2.$$

Assim, a circunferência tem centro em $\left(\dfrac{5}{2},1\right)$ e raio igual a 3.

Por outro lado, o ponto médio de AD é dado por $\left(\dfrac{0+5}{2},\dfrac{0+2}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2},1\right)$.

[04] Falsa. Completando os quadrados, temos

$$x^2+y^2-4x=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=2^2.$$

Logo, a circunferência tem, centro em $(2,\ 0)$ e raio 2.

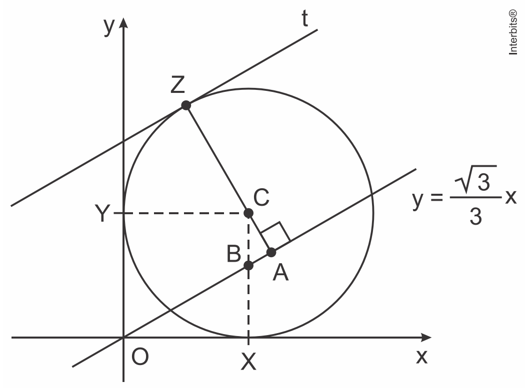
[08] Verdadeira. De fato, como mostrado em [01].

9. b.

Completando os quadrados, encontramos

$$x^2+y^2-4x-4y+4=0\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2=2^2.$$

Logo, segue que o centro da circunferência é o ponto $C = (2, 2)$ e seu raio mede 2.



Sendo $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ o coeficiente angular da reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, podemos concluir que $X\hat{O}B = 30°$. Daí, vem $A\hat{C}B = 30°$ e, portanto, temos $Z\hat{C}Y = 60°$, uma vez que $X\hat{C}Y$ é reto.

Em consequência, a resposta é $\hat{X}YZ = \hat{X}Y + \hat{Y}Z$

$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 + \frac{\pi}{3} \cdot 2 = \frac{5\pi}{3}$.

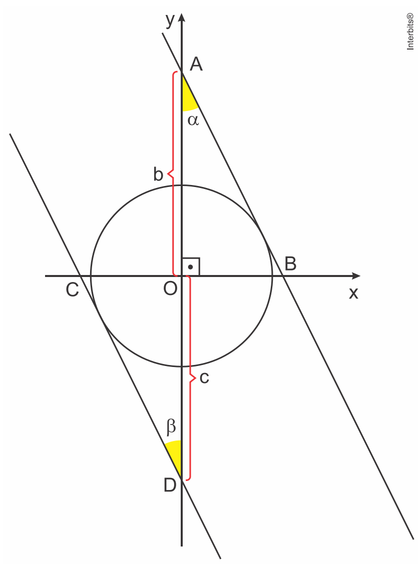
10. a.

$(x^2 - x)^2 + (y^2 - y)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$ e $y^2 - y = 0$

Resolvendo as equações obtemos os seguintes pares ordenados (x, y):

$(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ e $(1, 1)$ que são vértices de um quadrado de lado 1 no sistema Cartesiano Ortogonal. Portanto, a área desse quadrado é dada por: $A = 1^2 = 1$.

11. a.



$OB = OC$ (raios)

$A\hat{O}B = C\hat{O}D$ (retos)

$\alpha = \beta$ (alternos internos)

Portanto, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (caso LAA_o)

Portanto, $AO = DO$, ou seja b e c tem o mesmo tamanho, porém sinais contrários. Então, sua soma será: $b + c = 0$.

12. c.

Tem-se que

$d(A, B) = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$,

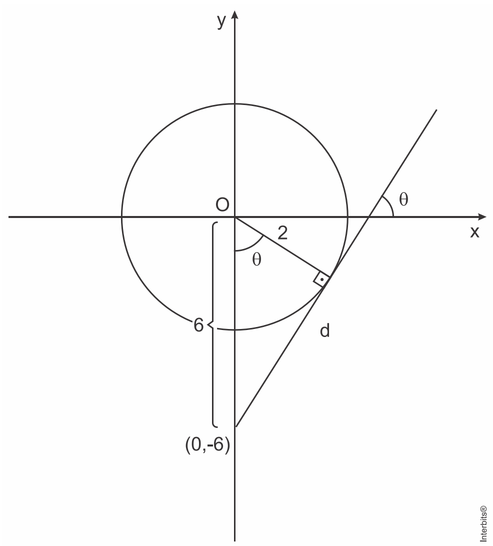
$d(A, C) = 2 + 4 = 6$

e $d(B, C) = \sqrt{(2+1)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{2}$.

Logo, o triângulo ABC é retângulo e sua hipotenusa mede 6. Em consequência, a circunferência circunscrita a ABC tem raio igual a $r = \frac{6}{2} = 3$.

A resposta é $\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

13. b.



Considerando o ângulo de medida θ graus como sendo a inclinação da reta, podemos obter sua tangente e assim determinar o coeficiente angular da reta tangente à circunferência de centro na origem e raio 2.

$$d^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow d = \sqrt{32} \Rightarrow$$

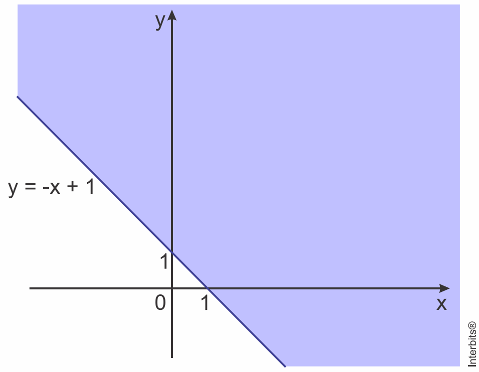
$$d = 4\sqrt{2} tg\theta = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tg\theta = 2\sqrt{2}.$$

Portanto, a equação da reta tangente será dada por:

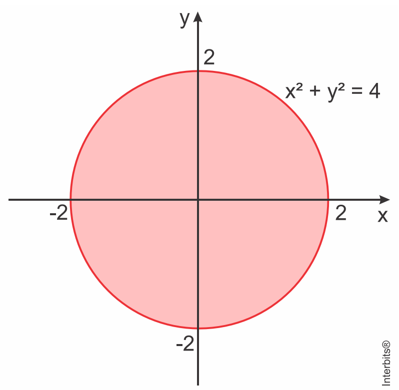
$y - (-6) = 2\sqrt{2} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \cdot x + 6$

14. e.

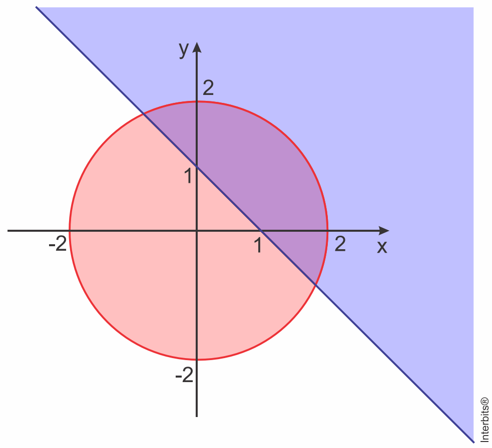
De $x + y \geq 1, \ \ y \geq -x + 1$



De $x^2 + y^2 \leq 4,$

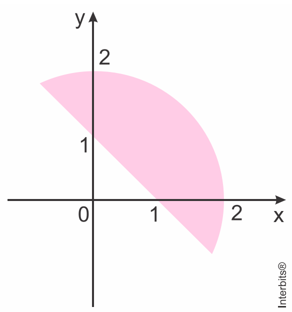


A intersecção das duas regiões é dada abaixo:



Assim, a solução do sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \text{ é:}$$



15. c.

Como a área do círculo é 17π, temos:

$\pi\, r^2 = 17\pi$, onde r é a medida do raio do círculo.

$r^2 = 17$

Sendo $C(x_c,\ 0)$ o centro da circunferência, temos:

$(x - x_c)^2 + y^2 = 17$

Como o ponto $(4,\ 4)$ pertence à circunferência, temos:

$(4 - x_c)^2 + 4^2 = 17 (4 - x_c)^2 = 14 - x_c = 1 \ \ ou \ \ 4 - x_c = -1$

De $4 - x_c = 1,$

$x_c = 3$

De $4 - x_c = -1,$

$x_c = 5$

Assim, a circunferência têm equação $(x-3)^2 + y^2 = 17$ ou $(x-5)^2 + y^2 = 17.$

Observe que a circunferência $(x-3)^2 + y^2 = 17$ intercepta o eixo das ordenadas, pois a equação $(0-3)^2 + y^2 = 17$ admite solução real, já a circunferência $(x-5)^2 + y^2 = 17$ não intercepta o eixo das ordenadas, pois equação $(0-5)^2 + y^2 = 17$ não admite solução real.

Portanto, a abscissa do centro da circunferência é 5.

16. c. Seja s a reta suporte do segmento $\overline{PO}.$

$$m_s = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O}$$

$$m_s = \frac{\sqrt{5} - 0}{-1 - 0}$$

$$m_s = -\sqrt{5}$$

Logo, $tg\alpha = -\sqrt{5},$ ou seja, $tg(-\alpha) = \sqrt{5}.$

A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 1.$

Como $Q\left(x_Q, -\frac{1}{3}\right)$ é um ponto da circunferência,

$$x_Q^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$x_Q^2 = 1 - \frac{1}{9}$$

$$x_Q^2 = \frac{8}{9}$$

Como $x_Q < 0,$

$$x_Q = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Seja u a reta suporte do segmento $\overline{QO}.$

$$m_u = \frac{y_Q - y_O}{x_Q - x_O}$$

$$m_u = \frac{-\frac{1}{3}-0}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}-0}$$

$$m_u = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Seja θ o ângulo de inclinação da reta u, logo, $tg\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\beta = \pi + \theta\theta = \beta - \pi tg\theta = tg(\beta - \pi)\frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$tg(-(\pi-\beta))\frac{\sqrt{2}}{4} = -tg(\pi-\beta)\frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$-(-tg\beta)\frac{\sqrt{2}}{4} = tg\beta\frac{sen\beta}{cos\,\beta} = \frac{\sqrt{2}}{4}16\cdot sen^2\beta =$$

$$2\cdot cos^2\beta\,16\cdot(1-cos^2\beta) =$$

$$2\cdot cos^2\beta\,cos^2\beta = \frac{8}{9}$$

Note que $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, logo, cosβ<0.

Daí,

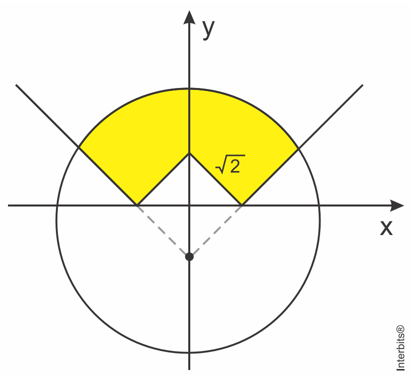
$$cos\,\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Portanto,

$$tg(-\alpha) + cos\,\beta =$$

$$\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3}tg(-\alpha) + cos\,\beta = \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$$

17. a. Esboçando o gráfico de $y \geq ||x|-1|$ e a circunferência definida por $x^2+(y+1)^2 \leq 25$, a região $S_1 \cap S_2$ será a apresentada em amarelo na figura a seguir.



Calculando sua área, tem-se que essa será igual a um quarto da área do círculo menos a área de um quadrado de lado $\sqrt{2}$, ou seja:

$$S_1 \cap S_2 = \frac{\pi\cdot 5^2}{4} - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{4} - 2$$

18. b. Colocando na equação geral da circunferência:

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + k$$
$$= 03\cdot(x^2-2x) + 3\cdot(y^2-4y) + k = 0$$
$$\to 3\cdot(x^2-2x+1) + 3\cdot(y^2-4y+4)$$
$$= 15 - k(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{15-k}{3} = R^2$$

Assim, conclui-se que o centro da circunferência será em $(1, 2)$ e que para que a mesma possua intersecção vazia com os eixos coordenados é necessário que:

$$0 < R < 1 \to 0 < R^2 < 10 < \frac{15-k}{3} < 1 \to$$
$$0 < 15 - k < 3 \to 12 < k < 15 \quad com \quad k \in \mathbb{R}$$

Analisando as alternativas conclui-se que apenas a alternativa b. é a correta, pois entre o intervalo 12 e 15 há apenas dois números inteiros: 13 e 14.

19. c. Calculando:

$$x^2 + y^2 = x - y \to \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$C\left(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\right) \text{ e } R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

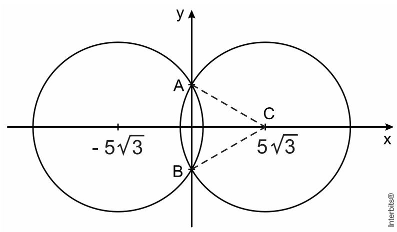
A reta que divide a circunferência em duas partes iguais passa pelo centro C e pode ter equação igual a $x - y = 1$.

20. d. Completando os quadrados, vem

$x^2 + y^2 - 10\sqrt{3}x - 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5\sqrt{3})^2 + (y-0)^2 = 10^2$ e

$x^2 + y^2 + 10\sqrt{3}x - 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 5\sqrt{3})^2 + (y-0)^2 = 10^2$.

Considere a figura, em que A e B são os pontos de interseção das duas circunferências.



Se O é a origem do sistema de eixos cartesianos, então

$$cos\,O\hat{C}A = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos\,O\hat{C}A = \frac{5\sqrt{3}}{10} \Leftrightarrow O\hat{C}A = \frac{\pi}{6}rad$$

Portanto, segue que

$$\widehat{AB} = 2\cdot O\hat{C}A\cdot\overline{AC} = 2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot 10 = \frac{10\pi}{3}rad$$

O resultado pedido corresponde ao dobro do comprimento do maior arco $\widehat{AB}$, isto é,

$$2\cdot\left(2\pi\cdot 10 - \frac{10\pi}{3}\right) = \frac{100\pi}{3} \text{ u.c.}$$