Livro Eletrônico

Aula 05

Matemática II p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

Aula 05: Sistemas lineares

Sumário

Olá, jovem estudante. Como vai? Como estamos para mais uma empreitada de conhecimento, agora o poderoso e incrível tema denominado *Sistemas Lineares*? Estaremos com isso fechando o terceiro e ultimo dos assuntos que constituem a já mencionada Álgebra Linear.

Já resolvemos sistemas lineares desde nossos estudos fundamentais, os atuais 5º a 9º anos da escolaridade básica. Hoje, porém, estudaremos esse assunto específico sob uma perspectiva um pouco diferente. Seremos mais detalhados quanto à apresentação e conseguiremos entender esse assunto de forma mais ampliada. É um assunto bastante recorrente em concursos e teremos a chance de resolver bastante exercícios.

Mas antes disso, fale comigo um pouco. Como você está? Como estão os seus estudos? Espero que o material esteja sendo de valia e que estejamos conseguindo expandir aos poucos a sua cabeça para esses temas de Álgebra Linear. Não se preocupe se estiver encontrando alguma dificuldade; é normal. É razoável, inclusive. Principalmente se faz tempo que você não estudava matemática, é normal que fosse encontrar alguns obstáculos. Mas sério: persista. É exatamente assim que você alcançará o entendimento pleno dos conteúdos. Leia, releia e resuma o nosso material. Siga essas instruções e não se esqueça de entrar em contato com o seu professor. Estou aqui para você.

Vamos começar então? Então partiu!

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Razões e proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regra de três simples e composta.*
Aula 01	*Porcentagem; Juros Simples; Juros Compostos*
Aula 02	*Sequências numéricas: Lei de formação de uma sequência. Progressões aritméticas e geométricas: termo geral, soma dos termos e propriedades.*
Aula 03	*Matrizes: conceito, tipos especiais, operações e matriz inversa.*
Aula 04	*Determinantes: conceito, resolução e propriedades.*
Aula 05	*Sistemas lineares: resolução, classificação e discussão.*
Aula 06	*Números complexos: O número "i". Conjugado e módulo de um número complexo. Representação algébrica e trigonométrica de um número complexo. Operações nas formas algébrica e trigonométrica.*
Aula 07	*Polinômios (parte 1): Função polinomial; polinômio identicamente nulo; grau de um polinômio; identidade de um polinômio, raiz de um polinômio; operações com polinômios; valor numérico de um polinômio. Divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffini.*
Aula 08	*Polinômios (parte 2): Equações polinomiais: Definição, raízes e multiplicidade. Teorema Fundamental da Álgebra. Relações entre coeficientes e raízes. Raízes reais e complexas.*
Aula 09	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 10	*Geometria analítica: Ponto: o plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos. Estudo da reta: equação geral e reduzida; interseção, paralelismo e perpendicularidade entre retas; distância de um ponto a uma reta; área de um triângulo.*
Aula 11	*Estudo da circunferência: equação geral e reduzida; posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; tangência.*
Aula 12	*Análise combinatória: Fatorial: definição e operações. Princípio Fundamental da Contagem. Arranjos, permutações e combinações.*
Aula 13	*Probabilidade: Experimento aleatório, espaço amostral, evento. Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. Probabilidade da união e interseção de eventos. Probabilidade condicional. Eventos independentes.*
Aula 14	*Noções de estatística: População e amostra. Frequência absoluta e frequência relativa. Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda.*
Aula 15	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Sistemas lineares: definição e soluções

1.1– Definições e estruturas iniciais

Equação linear

Nós dizemos que uma determinada equação será dita linear quando ela puder ser expressa com a seguinte configuração:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n \quad b.}$$

Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados de *coeficientes*, enquanto que os termos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as chamadas *variáveis* ou incógnitas. Vejamos alguns exemplos de equações lineares:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\quad 7 \\ -x - y + z &\quad 0 \\ \sqrt{3}x + \pi - z &\quad 1 \\ 3x_1 1 + 4x_2 - x_3 &\quad 4.0 \end{aligned}$$

Veja a seguir exemplos de equações não-lineares:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3y &\quad 12 \\ \frac{1}{x} - y + z &\quad 33 \\ x^2 + 3y - z &\quad 1. \end{aligned}$$

Veja então que as variáveis, para que uma equação seja considerada linear, devem estar livres de qualquer tipo de função: raízes, exponenciais, potências, nada. Elas têm de estar puras, apenas multiplicando os seus respectivos coeficientes.

Sim! São as formas mais simples de equações, coruja. São formadas apenas por adições e multiplicações, fazendo com que sejam de fato muito simples. Essas serão as equações que estudaremos no decorrer desse material. Não falaremos aqui de equações não-lineares, apenas lineares. E não fique se preocupando com equações não-lineares agora, tudo bem? As lineares já serão bastante extensas, nada de ficar ocupando a sua cabeça com mais conteúdo. Vamos lá!

Sistemas lineares

Um *sistema*, em matemática, é uma lista de equações que conservem as mesmas variáveis. Um sistema linear será um sistema em que todas as equações são lineares. Veja abaixo um exemplo de sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - y + z \quad 1 \\ 3x - 4y - z \quad 7 \\ -2x + y - 15z \quad 18 \end{cases}.$$

Veja que as três equações que constituem esse sistema são equações lineares; portanto, se trata de um sistema linear.

Coruja, não estamos interessados no momento em resolver o sistema. A ideia agora é entendermos as nomenclaturas associadas aos sistemas lineares, e algumas generalizações imediatas que podemos inferir das definições que estamos fazendo. Temos mais algumas generalizações ainda a fazer, então, não se preocupe quanto à solução do sistema por enquanto. Daqui a pouco falaremos mais sobre os métodos para conseguirmos a solução de um sistema.

A seguir vemos a forma geral de um sistema linear qualquer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \quad b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \quad b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \quad b_m \end{cases}$$

Essa é a forma geral, isto é, qualquer sistema pode ser expresso ou representado dessa maneira. Usando as propriedades de multiplicações de matrizes que vimos em aulas anteriores, podemos chegar nesse mesmo sistema linear efetuando a multiplicação das duas matrizes a seguir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } X} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Matriz } B}.$$

Essa forma é a chamada *forma matricial* de um sistema linear. É uma forma muito importante para organizarmos os dados de um sistema linear em nossa cabeça. Dê uma boa atenção a ela.

Veja que de fato, ao multiplicarmos a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ pela matriz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ encontramos a matriz $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ que, ao ser igualada à matriz $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, chega-se ao sistema original.

Com isso, podemos representar aquele sistema geral simplesmente por:

$$A \cdot X \quad B.$$

A matriz A é a chamada *matriz dos coeficientes* ou ainda *matriz incompleta*; a matriz X é a chamada *matriz das variáveis* ou *matriz das incógnitas*; a matriz B, por sua vez, é chamada de *matriz dos termos independentes*. Vejamos um exemplo para nos acomodarmos melhor com essa ideia.

QUESTÃO 1

Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4x - 5y + z \quad 19 \\ -2x - y + z \quad -1 \\ x + y - z \quad 0 \end{cases}.$$

Podemos afirmar que a matriz incompleta, a matriz das incógnitas e a matriz dos termos independentes desse sistema está exposto, respectivamente, na alternativa:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 19 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 19 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

R: Questão bastante direta, basta extrair as informações. Dando uma outra olhada no sistema $\begin{cases} 4x - 5y + z \quad 19 \\ -2x - y + z \quad -1 \\ x + y - z \quad 0 \end{cases}$, vamos às extrações: a matriz incompleta é a matriz dos coeficientes, ou seja, basta extrair cada coeficiente: $A \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; a matriz das incógnitas é, como o próprio nome diz, a matriz-coluna cujos termos são as incógnitas, isto é, as variáveis do sistema: $X \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; e finalmente a matriz dos termos independentes é aquela que apresenta os resultados de cada igualdade: $B \quad \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gabarito: C

Um último detalhe antes de prosseguirmos é o entendimento do que vem a ser uma *matriz completa*. Chamamos de matriz completa à matriz incompleta com uma última coluna adicional cujos termos são os termos independentes do sistema.

No exemplo anterior tínhamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x-5y+z \quad 19 \\ -2x-y+z \quad -1 \\ x+y-z \quad 0 \end{cases}.$$

Esse sistema possui matriz incompleta $A \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. A matriz completa será, então: $A' \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 19 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Veja que foi adicionada uma coluna extra ao final, que corresponde justamente à matriz dos termos independentes. Essa é a chamada matriz completa do sistema linear acima apresentado. Beleza, estudante? Estamos indo até aqui?

> A matriz completa de um sistema é obtida a partir da justaposição da matriz incompleta e dos termos independentes.

Sistemas homogêneos

Sistemas lineares homogêneos são sistemas cuja matriz dos termos independentes é uma matriz nula. Veja abaixo alguns exemplos de sistemas lineares homogêneos:

$$\begin{cases} 2x+3y \quad 0 \\ -5x+7y \quad 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+7y-4z \quad 0 \\ -x+z \quad 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x_1+7x_2+4x_3-x_4 \quad 0 \\ 4x_1+11x_2-15x_3+x_4 \quad 0 \\ 11x_1-7x_2-15x_3-x_4 \quad 0 \\ -3x_1++7x_2-3x_3-3x_4 \quad 0 \end{cases}$$

Sistemas homogêneos serão importantes daqui a pouco, quando formos discutir as soluções de um sistema. Por enquanto, porém, basta sabermos reconhecê-los pelo nome.

1.2– SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Solução de uma equação linear

Antes de discutirmos o que seria a solução de um sistema linear, vejamos algo mais simples, isto é, a solução de uma equação linear. Comecemos por um exemplo. Considere a equação linear a seguir:

$$x+y \quad 15.$$

Chamaremos de uma *solução* dessa equação um par ordenado (x, y) que satisfaça aquela equação. Por exemplo, $x \quad 7$ e $y \quad 8$ resultam no par ordenado $(7, 8)$, que é uma solução dessa equação linear visto que $7+8 \quad 15$. Outras soluções dessa equação são: $(0, 15), (1, 14), (-4, 19), (26, -11)$, etc. Veja então que há infinitas soluções para essa equação linear, é impossível listarmos todas as soluções.

Solução de um sistema linear

A solução de um sistema linear é uma solução que sirva para cada equação que o constitui. Considere, por exemplo, o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2x+y \quad 11 \\ x-y \quad 4 \end{cases}.$$

É claro que existem infinitas soluções para a equação linear $2x+y \quad 11$, e é claro que existem também infinitas soluções para $x-y \quad 3$. Mas será que existem soluções para os dois sistemas *ao mesmo tempo*? Tente, por exemplo, $x \quad 2$ e $y \quad 7$. E aí? Funcionou? Vejamos se funciona para a primeira equação:

$$\begin{aligned} 2x+y &\quad 11 \\ 2\cdot 2+7 &\quad 11 \\ 4+7 &\quad 11 \\ 11 &\quad 11. \end{aligned}$$

Opa, obtivemos resultado verdadeiro para uma das equações, ou seja, $(2,7)$ é uma solução da equação linear $2x + y \quad 11$. Agora, verifiquemos para a outra equação:

$$\begin{aligned} x - y &\quad 4 \\ 2 - 7 &\quad 4 \\ -5 &\quad 4. \end{aligned}$$

Obtivemos um par que NÃO é solução da segunda equação e, portanto, esse par ordenado não é solução desse sistema (pois é solução da primeira equação mas não o é da segunda equação).

Agora, tente o par $(5,1)$. Seria solução desse sistema? Vejamos:

$$\begin{aligned} 2x + y &\quad 11 \\ 2 \cdot 5 + 1 &\quad 11 \\ 10 + 1 &\quad 11 \\ 11 &\quad 11. \end{aligned}$$

Opa, novamente obtivemos resultado verdadeiro para uma das equações, ou seja, $(5,1)$ é uma solução da equação linear $2x + y \quad 11$. Agora, verifiquemos para a outra equação:

$$\begin{aligned} x - y &\quad 4 \\ 5 - 1 &\quad 4 \\ 4 &\quad 4. \end{aligned}$$

Dessa vez o par ordenado foi solução das duas equações lineares. Como essas duas equações lineares são TODAS as equações desse sistema, esse par ordenado pode ser dito como uma *solução* desse sistema linear.

Sim, sim, coruja. Exatamente. Se não for solução de todas as equações desse sistema não será solução do sistema. Não importa que seja apenas uma equação, não será solução. Vimos há pouco, por exemplo, que o par ordenado $(2,7)$ não é solução daquele específico sistema, pois não foi solução da segunda equação linear que constitui aquele sistema. Porém $(5,1)$ o foi, pois satisfez a ambas. Beleza? Sigamos!

Veja que ainda não é o caso aqui de discutirmos COMO podemos conseguir essa solução. Em breve veremos isso. Aqui nosso objetivo foi simplesmente de entendermos o que vem a ser a solução de um sistema linear. Beleza, jovem e futuro aprovado?

Um sistema linear poderá vir a ter, sempre: uma, nenhuma ou infinitas soluções. Entenderemos melhor sobre essas contagens no próximo capítulo, quando formos discutir as soluções de um sistema linear.

Solução de um sistema linear homogêneo

Bom, como vimos há pouco, um sistema linear homogêneo será aqueles em que todos os resultados são nulos, isto é, todos os termos constantes são nulos. Um fato muito importante dos sistemas lineares homogêneos é o seguinte:

> Todo e qualquer sistema linear homogêneo possui uma solução $(0, 0, 0, \ldots, 0)$.

Essa solução é chamada uma *solução trivial* desse sistema (às vezes alguns textos chamam essa solução de uma solução *imprópria*). Veja, por exemplo, o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z \quad 0 \\ x + 6y + 3z \quad 0 \\ x - y - z \quad 0 \end{cases}.$$

Veja que de fato $(0, 0, 0)$ é uma solução desse sistema (claro que aqui não se trata mais de um par ordenado mas sim um trio ou terno ordenado). Trata-se portanto de uma solução trivial desse sistema. Veja também que $(3, -4, 7)$ também é uma solução desse sistema (verifique essa informação). Como se trata de uma solução diferente daquela totalmente nula, a chamamos de uma solução *não-trivial* desse sistema.

1.3– Regra de Cramer

A regra de Cramer é uma regra prática para obtermos as soluções de um sistema linear. É importante notarmos que a regra de Cramer somente funciona quando o sistema *tem solução única*. Veremos mais à frente, como já disse, quanto aos sistemas que não possuem solução única ou que simplesmente não possuem solução. Bom, vamos lá.

A melhor forma de entendermos a regra de Cramer é utilizarmos um exemplo. Suponha que queiramos, por exemplo, encontrar a solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z \quad -2 \\ -x + 3y - 4z \quad -21 \\ x - 5y + 4z \quad 23 \end{cases}.$$

É claro que poderíamos simplesmente isolar alguma variável e substituir esse valor nas outras duas equações, a fim de reduzirmos a quantidade de variáveis no sistema. Mas aqui a intenção é ilustrarmos a aplicação dessa regra nova, a regra de Cramer.

Primeiro, calculamos o determinante da matriz incompleta, isto é, o determinante da matriz dos coeficientes. Vejamos:

$$D \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right.$$

$$36 - 8 - 20 + 12 - 60 + 8$$

$$-32.$$

Esse determinante é chamado de *determinante principal*. Chamaremos esse determinante de D. Assim, o que concluímos com isso é que $D \quad -32$.

Agora, calcularemos mais três determinantes, um para cada variável. Funciona da seguinte forma. Cada coluna da matriz simboliza uma variável: a primeira coluna representa a variável x, a segunda coluna representa a variável y e a terceira coluna representa a variável z. Vamos então aprender a calcular os determinantes de cada variável.

O determinante da variável x é calculado trocando a primeira coluna pelos resultados lá do sistema. Da seguinte forma:

$$D_x \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -21 & 3 & -4 \\ 23 & -5 & 4 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ -21 & 3 & -4 & -21 & 3 \\ 23 & -5 & 4 & 23 & -5 \end{array}\right.$$

$$-24 - 184 - 420 + 276 + 40 + 168$$

$$-144.$$

Agora, substituímos novamente a matriz dos termos independentes na segunda coluna da matriz, para calcularmos D_y :

$$D_y \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & -21 & -4 \\ 1 & 23 & 4 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & -21 & -4 & -1 & -21 \\ 1 & 23 & 4 & 1 & 23 \end{array}\right.$$

$$-252 + 8 + 92 - 84 + 276 - 8$$

$$32.$$

Finalmente, fazendo o mesmo para a terceira coluna:

$$D_z \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -21 \\ 1 & -5 & 23 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -21 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 23 & 1 & -5 \end{array}\right.$$

$$207 - 42 - 10 + 6 - 315 + 46$$

$$-108.$$

Daí, podemos encontrar os valores de x, y e z usando as fórmulas a seguir:

$$x \quad \frac{D_x}{D} \qquad\qquad y \quad \frac{D_y}{D} \qquad\qquad z \quad \frac{D_z}{D}$$

$$x \quad \frac{-144}{-32} \qquad\qquad y \quad \frac{32}{-32} \qquad\qquad z \quad \frac{-108}{-32}$$

$$x \quad \frac{9}{4} \qquad\qquad y \quad -1 \qquad\qquad z \quad \frac{27}{8}.$$

Veja então que encontramos a solução desse sistema utilizando apenas determinantes, sem nos preocuparmos em substituição de variáveis.

2.0– Sistemas lineares: discussão

Continuemos então, jovem. Esse capítulo será na verdade bem breve. Bastará que aprendamos um pouco mais sobre as caracterizações dos sistemas lineares, a fim de sabermos utilizar e opinar melhor quanto aos exercícios. Vamos lá então?

Inicialmente é importante aprendermos a discutir sobre um sistema.

Haha, que inocência, corujinha. Não, não, discutir aqui não significa brigar. Discutir um sistema linear significa discursar sobre as suas soluções: se são muitas, se é única, se não existe, essas coisas. Então, sempre que formos discutir um sistema, o objetivo será esse. Tudo bem, corujinha? Então vamos lá.

2.1– Sistemas possíveis

Um sistema será dito possível quando tiver solução, ao menos uma. Existem dois tipos de sistemas possíveis: os determinados e os indeterminados. Analisemos cada um deles.

Sistemas determinados

> Um sistema será dito possível determinado quando tiver apenas uma solução.

Sistemas desse tipo são abreviados como SPD (sistemas possíveis e determinados). Esses sistemas são os mais fáceis de detectar. A detecção pode ser feita utilizando-se a regra prática abaixo:

> Um sistema será SPD quando o determinante de sua matriz incompleta for não-nulo.

Vejamos um exemplo:

(ESSA-2010) QUESTÃO 2

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} kx + 2y - z \quad 2 \\ 2x - 8y + 2z \quad 0 \\ 2x + z \quad 4 \end{cases}$$

O valor de k real, para que o sistema acima seja possível e determinado é:

(a) $k \;/\; -1/2$

(b) $k \quad 1/2$

(c) $k \;/\; -1/6$

(d) $k \;/\; -3/2$

(e) $k \;/\; -7/2$

R: Ser possível e determinado significa ter solução única, isto é, ter determinante da matriz incompleta (matriz dos coeficientes) não-nulo. Temos de forçar então a matriz $A \quad \begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a ter determinante não-nulo. Perceba também que tivemos de inserir um termo "zero" na última linha dessa matriz pela ausência de y na última linha do sistema linear proposto. Façamos, então, os cálculos:

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \;/\; 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} k & 2 & -1 & k & 2 \\ 2 & -8 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right. \;/\; 0$$

$$-8k + 8 + 0 - 16 - 0 - 4 \;/\; 0$$

$$-8k - 12 \;/\; 0$$

$$8k \;/\; -12$$

$$k \;/\; -\frac{12}{8}$$

$$k \;/\; -\frac{3}{2}.$$

Gabarito: D

Exatamente, coruja! Calculou o determinante e deu um número não-nulo, isto é, diferente de zero, pode ter a certeza de que o sistema é SPD, ou seja, tem solução única. Agora, corujinha, seguinte: se der nulo, a parada é diferente. Se der nulo, de cara, nada podemos concluir, a não ser que não se trata de um sistema SPD. Vejamos agora sobre os sistemas SPI.

Sistemas indeterminados

Um sistema será dito possível e indeterminado quando tiver infinitas soluções. Sim existem sistemas que possuem infinitas soluções. Serão ditos sistemas SPI (sistemas possíveis e indeterminados).

Corujinha, eis o grande problema. Para conseguirmos fazer isso de modo técnico, precisaríamos aprender algo chamado o Teorema de Rouché-Capelli que, sinceramente, foge o nosso objetivo aqui. Daí, para deduzirmos a indeterminação de um sistema, coruja, vamos utilizar o método da substituição mesmo. Os sistemas impossíveis, que veremos a seguir, sofrem do mesmo mal. Não dá para concluir direto, só fazendo as contas. Vejamos alguns exemplos.

(EEAR-2001) QUESTÃO 3

O sistema linear $\begin{cases} x+y \quad 0 \\ y+z \quad 0 \\ y+mz \quad 0 \end{cases}$ é indeterminado para

(a) nenhum m real.
(b) todo m real.
(c) $m \quad 0$
(d) $m \quad 1$

R: Trata-se de um sistema homogêneo; portanto, pelo menos a solução trivial deverá ter. Para que seja indeterminado, deveremos encontrar pelo menos mais uma solução. Vamos fazer algumas contas a fim de chegarmos a alguma conclusão.

Da primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} x + y &\quad 0 \\ y &\quad -x. \end{aligned}$$

Agora substituiremos nas duas equações restantes. Substituindo na segunda:

$$\begin{aligned} y + z &\quad 0 \\ -x + z &\quad 0 \\ z &\quad x. \end{aligned}$$

Substituindo na terceira:

$$\begin{aligned} y + mz &\quad 0 \\ -x + mx &\quad 0 \\ mx &\quad x. \end{aligned}$$

Se $x \quad 0$, não importa o valor de m. Se $x \ / \ 0$:

$$\begin{aligned} mx &\quad x \\ m &\quad \frac{x}{x} \\ m &\quad 1. \end{aligned}$$

2.2– SISTEMAS IMPOSSÍVEIS

São sistemas sem solução. Não há muito o que dizermos aqui a não ser que são sistemas contraditórios, isto é, não podem apresentar uma solução. Vejamos algum exemplo.

(EEAR-2002) QUESTÃO 4

Para que valor de k o sistema $\begin{cases} x - y \quad 1 \\ y + 3z \quad 1 \\ 2x + kz \quad 2 \end{cases}$ não possui solução?

(a) -3
(b) -6
(c) 6
(d) 3

R: Isolemos x na primeira equação:

$$\begin{aligned} x - y &\quad 1 \\ x &\quad y + 1. \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na última equação:

$$\begin{aligned} 2x + kz &\quad 2 \\ 2(y+1) + kz &\quad 2 \\ 2y + 2 + kz &\quad 2 \\ 2y + kz &\quad 0. \end{aligned}$$

Ficamos então com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y + 3z \quad 1 \\ 2y + kz \quad 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2:

$$\begin{cases} -2y - 6z \quad -2 \\ 2y + kz \quad 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} -6z + kz &\quad -2 + 0 \\ (-6 + k) \cdot z &\quad -2 \\ z &\quad \frac{-2}{-6 + k}. \end{aligned}$$

A única forma de z não existir é se o denominador da fração encontrada for nulo. Logo:

$$\begin{aligned} -6 + k &\quad 0 \\ k &\quad 6. \end{aligned}$$

Gabarito: C

Vamos então aos exercícios sobre todo o conteúdo. Jovem, finalizamos aqui então o conteúdo de Álgebra Linear. Veja e reveja, revise todos os materiais. Foque para que a sua aprovação chegue sem dúvidas. Grandes abraços e bons estudos.

QUESTÕES
COMENTADAS

(ESSA-2010) QUESTÃO 5

Uma pessoa deseja totalizar a quantia de R$600, 00 utilizando cédulas de um, dez e vinte reais, num total de 49 cédulas, de modo que a diferença entre as quantidades de cédulas de dez e de um real seja igual a nove unidades. Nesse caso, a quantidade de cédulas de vinte reais de que a pessoa precisará será igual a:

(a) 10
(b) 19
(c) 20
(d) 21
(e) 29

R: Chamarei a quantidade de notas de um real de u, a quantidade de notas de dez reais de d e a quantidade de notas de vinte reais de v. Como são 49 cédulas, a soma dessas três quantidade resulta em 49, isto é:

$$u + d + v \quad 49.$$

Agora, vamos à interpretação dos R$600, 00. Cada nota tem um valor, correto? Então devemos somar o produto da quantidade individual de cada nota pelo seu respectivo valor para podermos alcançar o valor total. Ficamos então com:

$$1u + 10d + 20v \quad 600.$$

O problema também afirma que a diferença entre as quantidade de cédulas de dez e de um real tem de ser igual a 9; isso pode ser equacionado da seguinte forma:

$$d - u \quad 9.$$

Temos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} u + d + v \quad 49 \\ 1u + 10d + 20v \quad 600 \\ d - u \quad 9 \end{cases}.$$

Queremos calcular v, isto é, a quantidade de cédulas de vinte reais. Vamos então aos cálculos. Em primeiro lugar, da última equação, podemos isolar d. Veja:

$$\begin{aligned} d - u &\quad 9 \\ d &\quad u + 9. \end{aligned}$$

Agora, substituamos esse d nas duas equações. Substituindo na primeira:

$$\begin{aligned} u + d + v &\quad 49 \\ u + u + 9 + v &\quad 49 \\ 2u + v &\quad 40. \end{aligned}$$

Substituindo na segunda:

$$\begin{aligned} u + 10d + 20v &\quad 600 \\ u + 10 \cdot (u + 9) + 20v &\quad 600 \\ u + 10u + 90 + 20v &\quad 600 \\ 11u + 20v &\quad 510. \end{aligned}$$

Temos então um novo sistema, dessa vez com apenas duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2u + v \quad 40 \\ 11u + 20v \quad 510 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por -11 e a segunda por 2:

$$\begin{cases} -22u + -11v \quad -440 \\ 22u + 40v \quad 1020 \end{cases}.$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} -11v + 40v &\quad -440 + 1020 \\ 29v &\quad 580 \\ v &\quad 20. \end{aligned}$$

Há, portanto, 20 notas de vinte reais.

Gabarito: C

(ESSA-2011) QUESTÃO 6

Três amigos, Abel, Bruno e Carlos, juntos possuem um total de 555 figurinhas. Sabe-se que Abel possui o triplo de Bruno menos 25 figurinhas, e que Bruno possui o dobro de Carlos mais 10 figurinhas. Desses amigos, o que possui mais tem

(a) 250 figurinhas.
(b) 365 figurinhas.
(c) 275 figurinhas.
(d) 325 figurinhas.
(e) 300 figurinhas.

R: Chamarei a quantidade de figurinhas de Abel de a, a quantidade de figurinhas de Bruno de b e a quantidade de figurinhas de Carlos de c. Como são 555 figurinhas, a soma dessas três quantidade resulta em 555, isto é:

$$a + b + c \quad 555.$$

Agora, vamos às interpretações dos trechos seguintes da questão. Abel possui o triplo de figurinhas de Bruno menos 25 figurinhas; então:

$$a \quad 3b - 25.$$

Bruno, por sua vez, possui o dobro de figurinhas de Carlos mais 10 figurinhas; então:

$$b \quad 2c + 10$$

Temos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a+b+c \quad 555 \\ a \quad 3b-25 \\ b \quad 2c+10 \end{cases}.$$

Vamos então ao cálculo das variáveis, isto é, das incógnitas. Em primeiro lugar, da última equação vemos que b já está isolado. Substituindo na primeira:

$$\begin{aligned} a+b+c &\quad 555 \\ a+2c+10+c &\quad 555 \\ a+3c &\quad 545. \end{aligned}$$

Substituindo na segunda:

$$\begin{aligned} a &\quad 3b-25 \\ a &\quad 3\cdot(2c+10)-25 \\ a &\quad 6c+30-25 \\ a-6c &\quad 5. \end{aligned}$$

Temos então um novo sistema, dessa vez com apenas duas incógnitas:

$$\begin{cases} a+3c \quad 545 \\ a-6c \quad 5 \end{cases}.$$

Multiplicando a segunda equação por -1:

$$\begin{cases} a+3c \quad 545 \\ -a+6c \quad -5 \end{cases}.$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} 3c+6c &\quad 545-5 \\ 9c &\quad 540 \\ c &\quad 60. \end{aligned}$$

Carlos tem, portanto, 60 figurinhas. Achando, agora, a quantidade de figurinhas de Abel:

$$\begin{aligned} a - 6c &\quad 5 \\ a - 6 \cdot 60 &\quad 5 \\ a - 360 &\quad 5 \\ a &\quad 365. \end{aligned}$$

Não precisamos nem calcular quantidade de figurinhas de Bruno para concluirmos que certamente Abel tem mais figurinhas que todos os outros dois. Ele tem 365 figurinhas.

Gabarito: B

(ESSA-2012) QUESTÃO 7

Em um programa de TV, o participante começa com R\$$500,00$. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe R\$$200,00$; e para cada resposta errada perde R\$$150,00$. Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas no programa e terminou com R\$$600,00$, quantas questões ele acertou?

(a) 14
(b) 9
(c) 10
(d) 11
(e) 12

R: Chamarei a quantidade de respostas certas de c e a quantidade de respostas erradas de e. Como foram um total de 25 questões, podemos criar a nossa primeira equação:

$$c + e \quad 25.$$

Para cada resposta certa, ela recebe 200 reais. Logo, ela receberá pelas respostas certas um total de $200 \cdot c$. Porém, ele perde 150 reais para cada resposta errada, ou seja, perde um total de $150 \cdot e$. Como ele terminou com 600 reais começando com 500 reais, podemos afirmar que ganhou, no total, 100 reais. Logo:

$$200c - 150e \quad 100.$$

Dividindo essa equação toda por 50, para simplificar, obtemos:

$$4c - 3e \quad 2.$$

Ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c + e \quad 25 \\ 4c - 3e \quad 2. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação toda por 3:

$$\begin{cases} 3c + 3e \quad 75 \\ 4c - 3e \quad 2. \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} 3c + 4c &\quad 75 + 2 \\ 7c &\quad 77 \\ c &\quad 11. \end{aligned}$$

Ele acertou, portanto, 11 questões.

Gabarito: D

(ESSA-2018) QUESTÃO 8

Dadas as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} k^2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considerando que a equação matricial $A \cdot X \quad B$ tem solução única, podemos afirmar que:

(a) $k \quad \pm 2$
(b) $k \quad \pm 1$
(c) $k \;/\; \pm 4$
(d) $k \quad \pm 4$

(e) $k \ / \ \pm 2$

R: Não seremos enganados pela forma matricial que a questão está nos propondo. Estudamos isso. Sabemos que um sistema pode ser apresentado assim, não nos assusta mesmo. Vamos lá? Para que o sistema tenha solução única, ele deve ser um SPD (sistema possível e determinado). Para isso, basta que o determinante da matriz incompleta (matriz dos coeficientes) seja diferente de zero. Logo:

$$\begin{vmatrix} k^2 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \ / \ 0$$

$$\begin{vmatrix} k^2 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \ / \ 0$$

$$-k^2 + 16 \ / \ 0$$

$$k^2 \ / \ 16$$

$$k \ / \ \pm 4.$$

Gabarito: C

(EEAR-2001) QUESTÃO 9

O sistema linear $\begin{cases} x+y \quad 0 \\ y+z \quad 0 \\ y+mz \quad 0 \end{cases}$ é indeterminado para

(a) nenhum m real.

(b) todo m real.

(c) $m \quad 0$

(d) $m \quad 1$

R: Trata-se de um sistema homogêneo; portanto, pelo menos a solução trivial deverá ter. Para que seja indeterminado, deveremos encontrar pelo menos mais uma solução. Vamos fazer algumas contas a fim de chegarmos a alguma conclusão.

Da primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} x+y &\quad 0 \\ y &\quad -x. \end{aligned}$$

Agora substituiremos nas duas equações restantes. Substituindo na segunda:

$$\begin{aligned} y+z &\quad 0 \\ -x+z &\quad 0 \\ z &\quad x. \end{aligned}$$

Substituindo na terceira:

$$\begin{aligned} y+mz &\quad 0 \\ -x+mx &\quad 0 \\ mx &\quad x. \end{aligned}$$

Se $x \quad 0$, não importa o valor de m. Se $x \;/\; 0$:

$$\begin{aligned} mx &\quad x \\ m &\quad \frac{x}{x} \\ m &\quad 1. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 10

O sistema $\begin{cases} 3x - 2y \quad -4 \\ x + 4y \quad -6 \\ 2x - 3y \quad m \end{cases}$,nas incógnitas x e y, admite uma única solução se, e somente se,

(a) $m \; / \; -1$
(b) $m \quad 0$
(c) $m \quad -1$
(d) $m \quad 2$

R: Resolvamos inicialmente o sistema formado pelas duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 3x - 2y \quad -4 \\ x + 4y \quad -6 \end{cases}$$

Multiplique a primeira equação por 2:

$$\begin{cases} 6x - 4y \quad -8 \\ x + 4y \quad -6 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} 6x + x &\quad -8 - 6 \\ 7x &\quad -14 \\ x &\quad -2. \end{aligned}$$

Achando y:

$$\begin{aligned} x + 4y &\quad -6 \\ -2 + 4y &\quad -6 \\ 4y &\quad -4 \\ y &\quad -1. \end{aligned}$$

Se esta é a solução única para as duas primeiras equações, deverá ser uma das soluções da terceira equação; logo;

$$\begin{aligned} 2x - 3y &\quad m \\ m &\quad 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \\ m &\quad -4 + 3 \\ m &\quad -1. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2002) QUESTÃO 11

O sistema de equações $\begin{cases} 3x + 4y - z \quad 0 \\ 2x - y + 3z \quad 0 \\ \quad x + y \quad 0 \end{cases}$

(a) não tem solução

(b) tem infinitas soluções

(c) tem apenas a solução trivial

(d) tem uma única solução não trivial

R: Da última equação, temos:

$$\begin{aligned} x + y &\quad 0 \\ y &\quad -x. \end{aligned}$$

Substituiremos agora, esse resultado, nas outras duas equações. Na primeira:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &\quad 0 \\ 3x + 4(-x) - z &\quad 0 \\ 3x - 4x - z &\quad 0 \\ -x - z &\quad 0 \\ z &\quad -x. \end{aligned}$$

Substituindo tudo na segunda equação:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &\quad 0 \\ 2x - (-x) + 3(-x) &\quad 0 \\ 3x - 3x &\quad 0 \\ 0 &\quad 0. \end{aligned}$$

Chegamos a uma igualdade que é verdade para qualquer x; logo, esse sistema possui infinitas soluções.

Gabarito: B

(EEAR-2002) QUESTÃO 12

Os valores de k tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y + 2z \quad 0 \\ x - ky + z \quad 0 \\ kx - y - z \quad 0 \end{cases}$ admita apenas a solução trivial, são:

(a) $k \;/\; 0$ e $k \;/\; -1$
(b) $k \;/\; 1$ e $k \;/\; -1$
(c) $k \quad 0$ e $k \quad -1$
(d) $k \;/\; 1$ e $k \;/\; -2$

R: Trata-se de um sistema homogêneo e portanto já admite tal solução trivial. Para que não admita qualquer outra solução, basta que forcemos o sistema a ser possível e determinado, isto é, forçar o determinante da matriz incompleta a ser nulo. Vejamos então:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{vmatrix} \;/\; 0$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -k \\ k & -1 \end{matrix} \;/\; 0$$

$$k + k - 2 + 2k^2 + 1 + 1 \;/\; 0$$
$$2k^2 + 2k \;/\; 0$$
$$k^2 + k \;/\; 0$$
$$k(k+1) \;/\; 0.$$

Daí $k \;/\; 0$ e:

$$k + 1 \;/\; 0$$
$$k \;/\; -1.$$

Resumindo: $k \;/\; 0$ e $k \;/\; -1$.

Gabarito: A

(EEAR-2003) QUESTÃO 13

Para que o sistema $\begin{cases} 3x + my \quad 0 \\ x + 3y \quad 0 \end{cases}$ tenha solução diferente da imprópria, o valor de m deve ser

(a) 9
(b) 0
(c) 10
(d) 15

R: Para que um sistema homogêneo tenha solução diferente da trivial (ou imprópria) temos de forçá-lo a ser possível e indeterminado. Façamos isso. Da segunda equação, temos:

$$\begin{aligned} x + 3y &\quad 0 \\ x &\quad -3y. \end{aligned}$$

Substituindo na primeira:

$$\begin{aligned} 3x + my &\quad 0 \\ 3 \cdot (-3y) + my &\quad 0 \\ -9y + my &\quad 0 \\ my &\quad 9y \\ m &\quad 9. \end{aligned}$$

Veja que só pudemos cortar o y nessa última equação porque estamos buscando soluções em que $y \ / \ 0$.

Gabarito: A

■■■(EEAR-2004) QUESTÃO 14

Sendo $abcd \ / \ 0$, para que o sistema $\begin{cases} ax + by \quad c \\ px + qy \quad d \end{cases}$ seja indeterminado, é necessário que p e q sejam respectivamente iguais a

(a) $\frac{da}{c}$ e $\frac{bd}{c}$.
(b) $\frac{bd}{c}$ e $\frac{da}{c}$.
(c) $\frac{ab}{c}$ e $\frac{d}{c}$.
(d) $\frac{d}{c}$ e $\frac{ab}{c}$.

R: A informação $abcd \ / \ 0$ significa que nenhum dos quatro coeficientes é nulo. Vamos então à resolução. Resolverei utilizando algum conhecimento de geometria analítica. Vamos lá.
Primeiro, isolemos y na primeira equação:

$$\begin{aligned} ax + by &\quad c \\ by &\quad -ax + c \\ y &\quad -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Formamos então a *equação reduzida da reta*. O termo $-\frac{a}{b}$ é o que chamamos de *coeficiente angular* e o termo $\frac{c}{b}$ é o chamado *coeficiente linear*. Façamos agora o mesmo para a outra equação:

$$\begin{aligned} px + qy &\quad d \\ qy &\quad -px + d \\ y &\quad -\frac{p}{q}x + \frac{d}{q}. \end{aligned}$$

Para que o sistema seja indeterminado, basta que os coeficientes angulares das retas sejam iguais e que os coeficientes lineares também. Façamos então a igualdade entre os coeficientes lineares:

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &\quad \frac{d}{q} \\ cq &\quad bd \\ q &\quad \frac{bd}{c}. \end{aligned}$$

Agora façamos a igualdade entre os coeficientes angulares:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{b} &\quad -\frac{p}{q} \\ \frac{a}{b} &\quad \frac{p}{q} \\ aq &\quad bp \\ a \cdot \frac{bd}{c} &\quad bp \\ abd &\quad cbp \\ ad &\quad cp \\ p &\quad \frac{da}{c}. \end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2004) QUESTÃO 15

Em uma escola há 56 professores, entre homens e mulheres. Se a metade do número de mulheres é igual ao triplo do de homens, então o número de mulheres supera o de homens em

(a) 32.
(b) 36.
(c) 40.
(d) 44.

R: Como há 56 professores dentre homens e mulheres, chamando de h a quantidade de homens e de m a quantidade de mulheres:

$$h + m \quad 56.$$

O problema também afirma que a metade do número de mulheres é igual ao triplo do de homens, então:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} &\quad 3h \\ m &\quad 6h. \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\begin{aligned} h + 6h &\quad 56 \\ 7h &\quad 56 \\ h &\quad 8. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} h + m &\quad 56 \\ 8 + m &\quad 56 \\ m &\quad 56 - 8 \\ m &\quad 48. \end{aligned}$$

Assim o número de mulheres supera o de homens em $48 - 8 \quad 40$ unidades.

Gabarito: C

(EEAR-2005) QUESTÃO 16

Se a solução do sistema $\begin{cases} x + y - z \quad 0 \\ x - y - 2z \quad 1 \\ x + 2y + z \quad 4 \end{cases}$ é $\{(a, b, c)\}$, então o valor de $a \cdot b \cdot c$ é

(a) -12
(b) -18
(c) -24
(d) -30

R: Há um truque aqui para encontrarmos x rapidamente. Vamos começar somando as duas últimas equações:

$$\begin{aligned} x - y - 2z + x + 2y + z &\quad 1 + 4 \\ 2x + y - z &\quad 5 \\ y - z &\quad 5 - 2x. \end{aligned}$$

Agora, substitua esse valor na primeira equação:

$$\begin{aligned} x + \underbrace{y - z}_{5-2x} &\quad 0 \\ x + 5 - 2x &\quad 0 \\ -x &\quad -5 \\ x &\quad 5. \end{aligned}$$

Substituindo em $y - z \quad 5 - 2x$:

$$\begin{aligned} y - z &\quad 5 - 2x \\ y - z &\quad 5 - 2 \cdot 5 \\ y - z &\quad -5 \\ y &\quad z - 5. \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na segunda equação do sistema:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &\quad 1 \\ 5 - (z - 5) - 2z &\quad 1 \\ 5 - z + 5 - 2z &\quad 1 \\ -3z &\quad -9 \\ z &\quad 3. \end{aligned}$$

Daí, encontrando y:

$$\begin{aligned} y &\quad z - 5 \\ y &\quad 3 - 5 \\ y &\quad -2. \end{aligned}$$

Efetuando o produto, como a questão pediu: $5 \cdot (-2) \cdot 3 \quad -30$.

E esse é o gabarito. Porém, aproveitarei a questão para exemplificarmos uma utilização da regra de Cramer. Vamos lá?

Primeiro, calculamos o determinante da matriz incompleta:

$$\begin{aligned} D \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad & \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right| \\ & -1 - 2 - 2 - 1 + 4 - 1 \\ & -3. \end{aligned}$$

Calculando D_x:

$$D_x \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right.$$

$$0 - 8 - 2 - 4 - 0 - 1$$

$$-15.$$

Calculando D_y:

$$D_y \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right.$$

$$1 + 0 - 4 + 1 + 8 + 0$$

$$6.$$

Calculando D_z:

$$D_z \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$-4 + 1 + 0 - 0 - 2 - 4$$

$$-9.$$

Daí temos para D_x:

$$x \quad \frac{D_x}{D}$$

$$\frac{-15}{-3}$$

$$5.$$

Para D_y:

$$\begin{aligned} y \quad & \frac{D_y}{D} \\ & \frac{6}{-3} \\ & -2. \end{aligned}$$

Para D_z:

$$\begin{aligned} z \quad & \frac{D_z}{D} \\ & \frac{-9}{-3} \\ & 3. \end{aligned}$$

E daí, portanto, a solução é $\{(5, -2, 3)\}$, idêntico ao que encontramos da outra maneira. Tudo beleza? Sigamos!

Gabarito: D

(EEAR-2006) QUESTÃO 17

O sistema $\begin{cases} x + y \quad 3 \\ 2x - my \quad 6 \end{cases}$ é possível e indeterminado para:

(a) $m \quad 2$
(b) $m \;/\; 2$
(c) $m \quad -2$
(d) $m \;/\; -2$

R: Podemos utilizar o método da adição para resolver o sistema. Vamos lá. Primeiro, multiplicamos a primeira equação por -2:

$$\begin{cases} -2x - 2y \quad -6 \\ 2x - my \quad 6 \end{cases}.$$

Somando as duas equações obtemos:

$$\begin{aligned}
-2y - my &\quad -6+6\\
-2y - my &\quad 0\\
my &\quad -2y\\
m &\quad -2.
\end{aligned}$$

Com esse valor de m, o resultado será válido para qualquer y, tornando o sistema possível e indeterminado (infinitas soluções).

Gabarito: C

(EEAR-2007) QUESTÃO 18

Seja $\begin{cases} x + my \quad 1 \\ 4x + 5y \quad 2 \end{cases}$ um sistema de equações do 1º grau nas incógnitas x e y. Ele será impossível se o valor de m for

(a) $\frac{5}{4}$
(b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{5}{3}$
(d) 2

R: Podemos resolver novamente pelo método da adição. Essa é uma grande vantagem das discussões de sistemas 2×2, os antigos métodos de resolução geralmente funcionam. Vejamos então. Multipliquemos a primeira equação por -4:

$$\begin{cases} -4x - 4my \quad -4 \\ 4x + 5y \quad 2 \end{cases}.$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
-4my + 5y &\quad -4+2\\
(-4m+5)y &\quad -2.
\end{aligned}$$

A equação acima somente não terá solução se $-4m+5 \quad 0$. Resolvendo essa equação:

$$-4m+5 \quad 0$$
$$4m \quad 5$$
$$m \quad \frac{5}{4}.$$

Gabarito: A

(EEAR-2007) QUESTÃO 19

A tabela mostra os pedidos de 4 clientes em uma lanchonete.

Cliente	Pedidos
1	1 suco de laranja, 2 hambúrgueres e 3 porções de batata frita.
2	3 sucos de laranja, 1 hambúrguer e 2 porções de batata frita.
3	2 sucos de laranja, 3 hambúrgueres e 1 porção de batata frita.
4	1 suco de laranja, 1 hambúrguer e 1 porção de batata frita.

Se os clientes 1, 2 e 3 pagaram, respectivamente, R$11,10, R$10,00 e R$11,90 por seus pedidos, então o cliente 4 pagou R$

(a) 5,00.
(b) 5,10.
(c) 5,40.
(d) 5,50.

R: Chamarei de s o preço do suco de laranja, de h o preço do hambúrguer e de p o preço da porção de batata frita. Dessa forma, de acordo com a tabela apresentada, podemos afirmar que:

$$\begin{cases} s+2h+3p \quad 11,1 \\ 3s+h+2p \quad 10 \\ 2s+3h+p \quad 11,9 \end{cases}.$$

Veja que se somarmos todas as equações, obtemos:

$$\begin{aligned} s+3s+2s+2h+h+3h+3p+2p+p &\quad 11,1+10+11,9 \\ 6s+6h+6p &\quad 33 \\ 6(s+h+p) &\quad 33 \\ s+h+p &\quad 5,5. \end{aligned}$$

Perceba que o problema pede o que foi gasto pelo cliente 4; esse cliente gastou justamente $s+h+p \quad 5,5.$

Gabarito: D

(EEAR-2008) QUESTÃO 20

Se $\begin{cases} ax+2y \quad -1 \\ 3x+by \quad 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x+y \quad 1 \\ x-y \quad -4 \end{cases}$ são sistemas equivalentes, então o valor de $a+b$ é

(a) 11.

(b) 9.

(c) -5.

(d) -7.

R: Sistemas são ditos equivalentes quando possuem o mesmo conjunto-solução. Resolvamos o segundo sistema, que não possui variáveis:

$$\begin{cases} 2x+y \quad 1 \\ x-y \quad -4 \end{cases}.$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} 2x + x &\quad 1 - 4 \\ 3x &\quad -3 \\ x &\quad -1. \end{aligned}$$

Encontrando y:

$$\begin{aligned} x - y &\quad -4 \\ -1 - y &\quad -4 \\ 1 + y &\quad 4 \\ y &\quad 3. \end{aligned}$$

O conjunto-solução desse sistema é então $\{(-1, 3)\}$. Substituindo essa solução no primeiro sistema:

$$\begin{cases} ax + 2y \quad -1 \\ 3x + by \quad 3 \end{cases}.$$

Para a primeira equação:

$$\begin{aligned} ax + 2y &\quad -1 \\ a \cdot (-1) + 2 \cdot 3 &\quad -1 \\ -a + 6 &\quad -1 \\ a &\quad 7. \end{aligned}$$

Para a segunda equação:

$$\begin{aligned} 3x + by &\quad 3 \\ 3 \cdot (-1) + b \cdot 3 &\quad 3 \\ -3 + 3b &\quad 3 \\ 3b &\quad 6 \\ b &\quad 2. \end{aligned}$$

Logo $a + b \quad 9$.

Gabarito: B

■■■(EEAR-2010) QUESTÃO 21

Para que o sistema $\begin{cases} kx - y + z \quad 0 \\ 2x - 4y - z \quad 1 \\ -3x + 4y - z \quad -1 \end{cases}$ seja possível e determinado, deve-se ter

(a) $k \;/\; \frac{9}{8}$.

(b) $k \;/\; \frac{2}{5}$.

(c) $k \quad \frac{7}{6}$.

(d) $k \quad \frac{1}{3}$.

R: Para que um sistema seja possível e determinado (isto é, que tenha solução única), basta que o determinante da matriz incompleta (matriz dos coeficientes) seja não-nulo. Vejamos então:

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \;/\; 0$$

$$\left|\begin{matrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} k & -1 \\ 2 & -4 \\ -3 & 4 \end{matrix} \;/\; 0$$

$$4k - 3 + 8 - 12 + 4k - 2 \;/\; 0$$

$$8k - 9 \;/\; 0$$

$$8k \;/\; 9$$

$$k \;/\; \frac{9}{8}.$$

Gabarito: A

(EEAR-2013) QUESTÃO 22

O valor de x que é solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ é um número

(a) par primo.
(b) ímpar primo.
(c) par não primo.
(d) ímpar não primo.

R: Multiplique a primeira equação por -2:

$$\begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

Somando as duas equações, encontramos:

$$\begin{aligned} 4y - 3y &= -2 + 3 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\begin{aligned} x - 2 \cdot 1 &= 1 \\ x - 2 &= 1 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Veja finalmente que $x = 3$ é um número ímpar primo, assistindo a resposta da alternativa B.

Gabarito: B

(ESPCEX-2000) QUESTÃO 23

José e Maria, acompanhados de seu filho Pedro, queriam se pesar. Para tanto, utilizaram uma balança defeituosa que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Desta forma, eles se pesaram, dois a dois, e obtiveram os seguintes resultados:

José e Pedro: $87\,\text{kg}$

José e Maria: $123\,\text{kg}$

Maria e Pedro: $66\,\text{kg}$

Diante desses resultados, pode-se concluir que

(a) cada um deles pesa menos que $60\,\text{kg}$.

(b) dois deles pesam mais que $60\,\text{kg}$.

(c) José é mais pesado que Maria e Pedro juntos.

(d) Maria é a mais pesada dos três.

(e) o peso de Maria é a média aritmética dos pesos de José e Pedro.

R: Chamarei de j o peso[1] de José, de p o peso de Pedro e m o peso de Maria. De acordo com as informações apresentadas pelo problema, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} j+p \quad 87 \\ j+m \quad 123 \\ m+p \quad 66 \end{cases}$$

Resolvamos esse sistema de uma forma alternativa. Primeiro, somemos todas as equações:

$$\begin{aligned} j+p+j+m+m+p &\quad 87+123+66 \\ 2j+2m+2p &\quad 276 \\ j+m+p &\quad 138 \\ \underbrace{j+m}_{123}+p &\quad 138 \\ 123+p &\quad 138 \\ p &\quad 15. \end{aligned}$$

Pedro pesa, então $15\,\text{kg}$. Achando o peso de José:

$$\begin{aligned} j+p &\quad 87 \\ j+15 &\quad 87 \\ j &\quad 87-15 \\ j &\quad 72. \end{aligned}$$

[1] Permito-me aqui chamar de peso a massa dos indivíduos, mesmo que saibamos que a definição física de peso não é a mesma que a definição de massa.

Isso já é suficiente para marcarmos a alternativa C. Veja que José pesa $72\,\text{kg}$ e, de fato, Maria e Pedro pesam juntos menos que José, visto que $m + p \quad 66$.

Gabarito: C

■■■(ESPCEX-2001) QUESTÃO 24

Numa partida de basquetebol, uma equipe, entre cestas de 2 (dois) pontos e 3 (três) pontos, fez 40 cestas, totalizando 98 pontos. Pode-se dizer que o número de cestas de 3 (três) pontos dessa equipe foi de:

(a) 20
(b) 18
(c) 26
(d) 24
(e) 22

R: Chamarei de d a quantidade de cestas de dois pontos e de t a quantidade de cestas de três pontos. Podemos, então, formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} d + t \quad 40 \\ 2d + 3t \qquad\quad 98 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por -2:

$$\begin{cases} -2d - 2t \quad -80 \\ 2d + 3t \qquad\qquad 98 \end{cases}.$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} -2t + 3t &\quad -80 + 98 \\ t &\quad 18. \end{aligned}$$

Foram, então, 18 cestas de três pontos.

Gabarito: B

(ESPCEX-2001) QUESTÃO 25

Ao chegar a uma partida de basquete, um torcedor viu sua equipe perdendo por uma diferença de 30 pontos. A partir desse momento essa equipe começou a reagir à razão de 3 pontos para cada ponto da equipe adversária. Sabendo que a partida terminou empatada e o total de pontos marcados pelas duas equipes juntas foi de 120, pode-se dizer que o placar da partida no instante da chegada do torcedor era:

(a) 18×48
(b) 20×50
(c) 17×47
(d) 15×45
(e) 16×46

R: Primeira questão que fazemos um pouco fora da curva. Mas nada impossível, certo? Vamos lá. Organizemos os nossos dados numa tabela. Chamarei de **equipe A** a equipe que estava inicialmente perdendo e de **equipe B** a outra equipe.

	Equipe A	**Equipe B**
Pontos iniciais	x	$x+30$
Pontos ganhos até o empate	$3y$	y
Pontos finais	60	60

Veja então que:

$$\begin{cases} x+3y \quad 60 \\ x+30+y \quad 60 \end{cases}$$

Reorganizando:

$$\begin{cases} x+3y \quad 60 \\ x+y \quad 30 \end{cases}$$

Subtraindo a equação de baixo da de cima:

$$\begin{aligned} 3y - y &\quad 60 - 30 \\ 2y &\quad 30 \\ y &\quad 15. \end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} x + y &\quad 30 \\ x + 15 &\quad 30 \\ x &\quad 15. \end{aligned}$$

Então, como os pontos iniciais eram x e $x + 30$, temos que o placar inicial era de 15×45.

Gabarito: D

(ESPCEX-2002) QUESTÃO 26

No Brasil, três turistas trocaram por reais, no mesmo dia e pelas mesmas cotações, as quantias que possuíam em dólares, libras e euros, da seguinte forma:

Turista A: 10 dólares, 20 libras e 15 euros por 122 reais;

Turista B: 15 dólares, 10 libras e 20 euros por 114 reais;

Turista C: 20 dólares, 10 libras e 10 euros por 108 reais.

O valor em reais recebido por uma libra foi

(a) $2,60$
(b) $2,80$
(c) $3,00$
(d) $3,20$
(e) $3,40$

R: Chamarei de d o valor de um dólar em real, de l o valor de uma libra em real e de e o valor de um euro em real. Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10d + 20l + 15e & 122 \\ 15d + 10l + 20e & 114 \\ 20d + 10l + 10e & 108 \end{cases}$$

Isolemos $10l$ na segunda equação:

$$\begin{aligned} 15d + 10l + 20e &\quad 114 \\ 10l &\quad 114 - 15d - 20e. \end{aligned}$$

Substituiremos agora esse resultado na primeira e na terceira equação. Substituindo na primeira:

$$\begin{aligned} 10d + 20l + 15e &\quad 122 \\ 10d + 2 \cdot 10l + 15e &\quad 122 \\ 10d + 2 \cdot (114 - 15d - 20e) + 15e &\quad 122 \\ 10d + 228 - 30d - 40e + 15e &\quad 122 \\ -20d - 25e &\quad 122 - 228 \\ -20d - 25e &\quad -106 \\ 20d + 25e &\quad 106. \end{aligned}$$

Substituindo na terceira:

$$\begin{aligned} 20d + 10l + 10e &\quad 108 \\ 20d + 114 - 15d - 20e + 10e &\quad 108 \\ 5d - 10e &\quad 108 - 114 \\ 5d - 10e &\quad -6. \end{aligned}$$

O sistema atual fica então:

$$\begin{cases} 20d + 25e & 106 \\ 5d - 10e & -6 \end{cases}.$$

Multiplicando a segunda equação por -4:

$$\begin{cases} 20d + 25e & 106 \\ -20d + 40e & 24 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} 25e + 40e &\quad 106 + 24 \\ 65e &\quad 130 \\ e &\quad 2. \end{aligned}$$

Achando d:

$$\begin{aligned} 20d + 25e &\quad 106 \\ 20d + 25 \cdot 2 &\quad 106 \\ 20d &\quad 106 - 50 \\ 20d &\quad 56 \\ d &\quad 2,8. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão isolada de $10l$:

$$\begin{aligned} 10l &\quad 114 - 15d - 20e \\ 10l &\quad 114 - 15 \cdot 2,8 - 20 \cdot 2 \\ 10l &\quad 114 - 42 - 40 \\ 10l &\quad 32 \\ l &\quad 3,2. \end{aligned}$$

Uma libra vale então $R\$3,20$.

Gabarito: D

(ESPCEX-2004) QUESTÃO 27

No conjunto $\mathbb{R}$, o sistema de equações $\begin{cases} ax + y \quad -1 \\ x + 2z \quad 0 \\ y - z \quad 2 \end{cases}$ é:

(a) possível e determinado para todo $a \;/\; \frac{1}{2}$.
(b) possível e indeterminado para a real qualquer.
(c) impossível para $a \quad -\frac{1}{2}$.
(d) possível e indeterminado para $a \quad \frac{1}{2}$.
(e) impossível para $a \quad \frac{1}{2}$.

R: Bom, teremos de discutir esse sistema, dado que as opções não são simples verificações numéricas. Vamos lá então. Trata-se de um sistema com três variáveis, certo? Isolemos z na última equação:

$$\begin{aligned} y - z &\quad 2 \\ z &\quad y - 2. \end{aligned}$$

Agora, vamos substituir z na segunda equação:

$$\begin{aligned} x + 2z &\quad 0 \\ x + 2 \cdot (y - 2) &\quad 0 \\ x + 2y - 4 &\quad 0 \\ x + 2y &\quad 4. \end{aligned}$$

O sistema fica então da seguinte forma:

$$\begin{cases} ax + y \quad -1 \\ x + 2y \quad 4 \end{cases}.$$

Multiplique a primeira equação por -1:

$$\begin{cases} -2ax - 2y \quad 2 \\ x + 2y \quad 4 \end{cases}.$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} -2ax + x &\quad 2 + 4 \\ (-2a + 1)x &\quad 6 \\ x &\quad \frac{6}{-2a + 1} \end{aligned}$$

Perceba que, caso $-2a+1$ seja igual a zero, o sistema tornar-se-á impossível, porque não existe divisão por zero. Resolvendo a equação que o torna impossível:

$$\begin{aligned} -2a+1 &\quad 0 \\ 2a &\quad 1 \\ a &\quad \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nisso acabamos de concluir que caso $a \quad \frac{1}{2}$ o sistema será impossível, isto é, não admitirá solução.

Gabarito: E

■■■(ESPCEX-2005) QUESTÃO 28

Uma tropa realizou um exercício em que soldados, sargentos e oficiais executaram módulos padronizados de tiro, consumindo, individualmente, o número de munição estabelecido conforme o seu nível hierárquico. No primeiro dia atiraram 16 soldados, 8 sargentos e 4 oficiais, totalizando 96 munições; no segundo dia, 5 soldados, 4 sargentos e 3 oficiais, totalizando 38 munições; no terceiro dia, 16 soldados, 4 sargentos e 1 oficial, totalizando 78 munições. Quantas munições foram usadas no quarto dia, quando atiraram 14 soldados, 8 sargentos e 2 oficiais?

(a) 78
(b) 80
(c) 82
(d) 84
(e) 86

R: Cada hierarquia militar terá uma quantidade específica de munições. Chamarei de s a quantidade de munição dos soldados, de g a quantidade de munição de sargentos e o a quantidade de munição dos oficiais.
Pelo que foi dito, podemos afirmar o seguinte:

$$\begin{cases} 16s+8g+4o \quad 96 \\ 5s+4g+3o \quad 38 \\ 16s+4g+o \quad 78 \end{cases}.$$

O problema pede $14s + 8g + 2o$, não podemos nos esquecer disso. Bom, vamos lá. Vou inicialmente dividir a primeira equação toda por 4:

$$\begin{cases} 4s + 2g + o \quad 24 \\ 5s + 4g + 3o \quad 38 \\ 16s + 4g + o \quad 78 \end{cases}.$$

Isolando o na primeira equação:

$$\begin{aligned} 4s + 2g + o &\quad 24 \\ o &\quad 24 - 4s - 2g. \end{aligned}$$

Substituindo na segunda equação:

$$\begin{aligned} 5s + 4g + 3o &\quad 38 \\ 5s + 4g + 3 \cdot (24 - 4s - 2g) &\quad 38 \\ 5s + 4g + 72 - 12s - 6g &\quad 38 \\ -7s - 2g &\quad 38 - 72 \\ 7s + 2g &\quad 34. \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação:

$$\begin{aligned} 16s + 4g + o &\quad 78 \\ 16s + 4g + 24 - 4s - 2g &\quad 78 \\ 12s + 2g &\quad 78 - 24 \\ 12s + 2g &\quad 54. \end{aligned}$$

Ficamos então com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 7s + 2g \quad 34 \\ 12s + 2g \quad 54 \end{cases}.$$

Subtraindo as duas equações obtemos:

$$\begin{aligned} 5s &\quad 54 - 34 \\ 5s &\quad 20 \\ s &\quad 4. \end{aligned}$$

Achando g:

$$\begin{aligned} 7s + 2g &\quad 34 \\ 7 \cdot 4 + 2g &\quad 34 \\ 28 + 2g &\quad 34 \\ 2g &\quad 6 \\ g &\quad 3. \end{aligned}$$

Achando o:

$$\begin{aligned} o &\quad 24 - 4s - 2g \\ o &\quad 24 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \\ o &\quad 24 - 16 - 6 \\ o &\quad 2. \end{aligned}$$

Substituindo tudo na expressão pedida:

$$\begin{aligned} 14s + 8g + 2o &\quad 14 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ &\quad 56 + 24 + 4 \\ &\quad 84. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(ESPCEX-2006) QUESTÃO 29

Em um grupo de três crianças de idades diferentes foi notado que a soma das duas idades menores menos a maior é igual a 2 anos e que a menor idade mais o dobro da maior é igual a 28 anos. As idades são números inteiros positivos. Dentre todas as possibilidades, existe uma em que a soma das idades das crianças é a maior possível, observando-se sempre o fato de as crianças terem idades diferentes. Essa soma, em anos, é

(a) 20
(b) 22
(c) 24
(d) 26
(e) 28

R: Vamos dizer que essas idades sejam a, b e c, em ordem crescente de idades. Daí, a primeira equação a ser deduzida é:

$$a + b - c \quad 2.$$

A segunda equação, referente ao trecho em que ele diz que a menor idade mais o dobro da maior é igual a 28 anos, é:

$$a + 2c \quad 28.$$

Obtivemos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b - c \quad 2 \\ a + 2c \quad 28 \end{cases}.$$

Isolando a nessa última equação:

$$\begin{aligned} a + 2c &\quad 28 \\ a &\quad 28 - 2c. \end{aligned}$$

Substituindo na primeira:

$$\begin{aligned} a + b - c &\quad 2 \\ 28 - 2c + b - c &\quad 2 \\ b - 3c &\quad 2 - 28 \\ b - 3c &\quad -26 \\ b &\quad 3c - 26. \end{aligned}$$

Obtivemos então o seguinte conjunto-solução: $\{(a, b, c)\} \quad \{28 - 2c, 3c - 26, c\}, c \in \mathbb{Z}$. Queremos que a soma das idades seja a maior possível, então, vamos começar a encontrar as limitações de c. Uma das crianças, a de idade a, tem $28 - 2c$ de idade. Idades têm de ser positivas, logo:

$$\begin{aligned} 28 - 2c &> 0 \\ -2c &> -28 \\ 2c &< 28 \\ c &< 14. \end{aligned}$$

Veja então que c não chega a alcançar o valor 14. A outra criança, a que tem idade b, também tem de ter idade positiva. Resolvendo a inequação:

$$\begin{aligned} 3c - 26 &> 0 \\ 3c &> 26 \\ c &> \frac{26}{3} \approx 8,6 \\ c &\geq 9. \end{aligned}$$

Para cumprir essas duas condições, c deve assumir algum desses valores: $\{9, 10, 11, 12, 13\}$. Vejamos como ficarão cada uma das idades:

	Menor idade	**Média idade**	**Maior idade**
Fórmulas encontradas	$28 - 2c$	$3c - 26$	c
$c \quad 9$	10	1	9
$c \quad 10$	8	4	10
$c \quad 11$	6	7	11
$c \quad 12$	4	10	12
$c \quad 13$	2	13	13

Veja que as únicas duas situações em que as idades das crianças ficaram em ordem crescente foram os casos $c \quad 11$ e $c \quad 12$. No caso $c \quad 11$, a soma fica:

$$6 + 7 + 11 \quad 24.$$

No caso $c \quad 12$:

$$4 + 10 + 12 \quad 26.$$

Como 26 foi a maior soma, essa é a resposta.

Gabarito: D

■■■(ESPCEX-2007) QUESTÃO 30

Em uma bolsa existem peças em formatos de triângulos, quadrados e pentágonos, nas quantidades de x triângulos, y quadrados e z pentágonos. Sabendo-se que a soma das quantidades de peças é igual a 10; que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 37; e que a quantidade de triângulos é igual à soma das quantidades de quadrados e pentágonos, o valor de $2x + 3y + z$ é igual a:

(a) 21
(b) 19
(c) 15
(d) 10
(e) 8

■■■(ESPCEX-2008) QUESTÃO 31

A soma das idades dos amigos Pedro, José e Ivo é igual a 60. Sabe-se que a soma da idade de José com a diferença entre as idades de Pedro e Ivo (nesta ordem) é igual a 30 e que o dobro da idade de Pedro mais a idade de José, menos a idade de Ivo é igual a 55. Assim, a idade de José é Final da Prova de Matemática

(a) 10
(b) 15

(c) 20
(d) 25
(e) 30

(ESPCEX-2009) QUESTÃO 32

Um investidor possui ações das companhias A, B e C. A tabela abaixo fornece, em 3 dias consecutivos, as variações, em Reais, dos valores das ações e o lucro obtido em cada dia, também em Reais. Os valores negativos correspondem a desvalorizações, e os valores positivos a valorizações.

	Variações (R$)			Lucro Total (R$)
	A	B	C	
Dia 1	4	5	-2	800
Dia 2	1	2	-1	200
Dia 3	2	3	3	1700

Sabendo que o investidor não comprou nem vendeu ações nesses dias, pode-se afirmar que a soma das quantidades de ações das companhias A, B e C que ele possui é

(a) 700
(b) 600
(c) 550
(d) 400
(e) 350

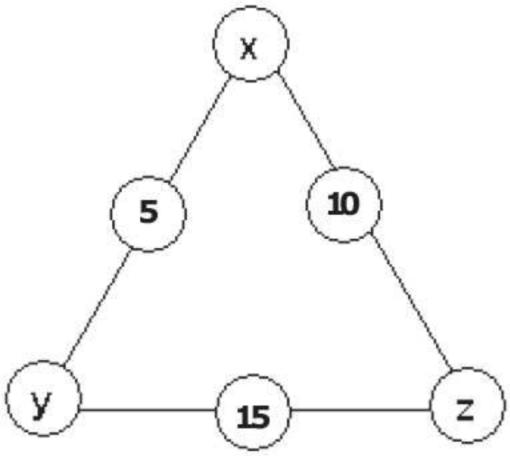
(ESPCEX-2010) QUESTÃO 33

Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + y & 5 \\ ax + 2y & b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é:

(a) -1
(b) 4
(c) 9
(d) 14
(e) 19

(ESPCEX-2011) QUESTÃO 34

A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.



Assim, o valor numérico da expressão $x - y \cdot z$ é

(a) -2
(b) -1
(c) 2
(d) 5
(e) 10

(ESPCEX-2015) QUESTÃO 35

Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az \quad 1 \\ x + 2y + z \quad 2 \\ 2x + 5y - 3z \quad b \end{cases}$, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é igual a:

(a) 10
(b) 11
(c) 12
(d) 13
(e) 14

(ESPCEX-2016) QUESTÃO 36

Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 3y + kz \quad 0 \\ 3x + ky + z \quad 0 \\ kx + y \quad 0 \end{cases}$, onde k é um número real. O único valor que torna o sistema, acima, possível e indeterminado, pertence ao intervalo

(a) $(-4, -2]$
(b) $(-2, 1]$
(c) $(1, 2]$
(d) $(2, 4]$
(e) $(4, 6]$

2.2– Índice Remissivo