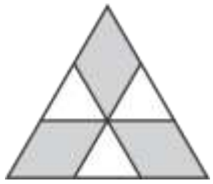
Canguru Brasil 2013 – Nível C - Soluções

Problemas de 3 pontos



01. Na figura, o triângulo maior é equilátero e tem área igual a 9. Os três segmentos paralelos aos lados dividem os lados em três partes iguais. Qual é a área da parte cinza?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

01. Resposta: alternativa D

Os lados dos triângulos brancos menores medem $\frac{1}{3}$ dos lados do triângulo maior, logo suas áreas são iguais a $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ da área do mesmo, isto é, $\frac{1}{9}\times 9 = 1$. Portanto, a área da região cinza é $9 - 3\times 1 = 6$

02. Sabe-se que $\frac{1111}{101} = 11$. Qual é o valor de $\frac{3\,333}{101} + \frac{6\,666}{303}$?

(A) 5 **(B)** 9 **(C)** 11 **(D)** 55 **(E)** 99

02. Resposta: alternativa D

$\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303} = \frac{3333}{101} + \frac{2222}{101} = \frac{5555}{101} = 5\times\frac{1111}{101} = 5\times 11 = 55$.

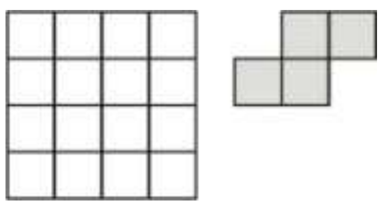
03. A razão entre as massas de sal e água doce da água do mar em Fernando de Noronha é de 7:193. Quantos quilogramas de sal podem ser retirados de 1 000 kg da água do mar nessa região?

(A) 35 **(B)** 186 **(C)** 193 **(D)** 200 **(E)** 350

03. Resposta: alternativa A

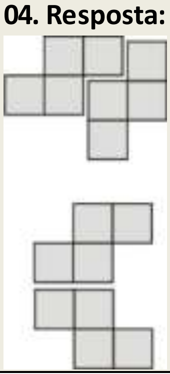
Se s é a massa do sal, então $\frac{s}{1000 - s} = \frac{7}{193} \Leftrightarrow 193s = 7000 - 7s \Leftrightarrow 200s = 7000 \Leftrightarrow s = 35$ kg.

04. Ana tem uma folha de papel quadrada dividida em quadradinhos iguais, conforme figura. Cortando ao longo das linhas do quadriculado, ela obteve a maior quantidade possível de peças iguais à peça cinza representada na figura. Qual é o número de quadradinhos que sobraram na folha original?

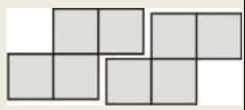


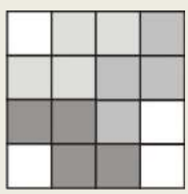
(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

04. Resposta: alternativa C



É impossível cortar duas peças que estejam na mesma posição, conforme indicado à direita, pois a folha só tem quatro quadradinhos em cada linha. Entretanto duas peças podem ser obtidas, se uma delas estiver em outra posição, conforme o desenho à esquerda. Mais uma peça pode ser recortada, obtendo-se três peças. Assim, o número de quadradinhos que sobram da folha original é $16 - 3\times 4 = 4$, conforme a figura à direita. Há outras formas de cortar, mas o resultado final é o mesmo.





05. Can está com muita vontade de falar para Guru um número cujo produto dos algarismos é 24. Guru pede então que este número seja o menor possível. Qual é a soma dos algarismos deste número?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

05. Resposta: alternativa E
O número deve ter dois algarismos. Como $24 = 3\times 8 = 8\times 3 = 4\times 6 = 6\times 4$ o menor número cujo produto dos algarismos é 24 é o número 38. A soma dos seus algarismos é 11.

06. Uma sacola contém duas bolas vermelhas, três azuis, dez brancas, quatro verdes e três pretas. Bruna quer tirar as bolas da sacola sem olhar, pegando uma de cada vez sem colocá-la de volta na sacola. Pelo menos quantas bolas Bruna deve retirar, para ter certeza de que entre as bolas retiradas haja duas de mesma cor?

(A) 2 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 10 **(E)** 12

06. Resposta: alternativa C
Pode ser que Bruna retire uma bola de cada cor. Neste caso, ela precisa tirar mais uma bola para ter a certeza que alguma cor irá repetir. Como há 5 cores diferentes, ela precisa retirar 6 bolas.

07. Alexandre acende uma vela a cada dez minutos. Cada vela acesa dura exatamente 40 minutos. Quantas velas estão acesas 55 minutos depois que Alexandre acendeu a primeira vela?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

07. Resposta: alternativa C
Nos primeiros 55 minutos, Alexandre acendeu 6 velas. Dessas velas, a primeira apagou aos 40 minutos e a segunda aos 50 minutos. Portanto, aos 55 minutos haverá 6 – 2 = 4 velas acesas.

08. Qual dos números a seguir não pode ser o número médio de crianças de cinco famílias?

(A) 0,2 **(B)** 1,6 **(C)** 2,2 **(D)** 2,4 **(E)** 2,5

08. Resposta: alternativa E
Multiplicando-se o número médio de crianças das cinco famílias por 5, deve-se obter um número inteiro, que é o número total de crianças. Isto não ocorre para 2, 5 x 5 = 12,5.

09. Para os inteiros positivos *x*, *y* e *z* valem as igualdades $x\cdot y = 14$, $y\cdot z = 10$ e $z\cdot x = 35$. Qual é o valor de $x+y+z$?

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 14 **(D)** 16 **(E)** 18

09. Resposta: alternativa C

Temos $\left|\begin{array}{l} x\cdot y = 14 \\ y\cdot z = 10 \\ z\cdot x = 35 \end{array}\right. \Rightarrow x\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z\cdot x = 14\cdot 10\cdot 35 \Leftrightarrow x^2y^2z^2 = 2\cdot 7\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7 \Leftrightarrow xyz = 70$

Então $x = \frac{70}{10} = 7$, $y = \frac{70}{35} = 2$, $z = \frac{70}{14} = 5$ e $x+y+z = 2+5+7 = 14$.

10. Marcos e Luísa estão em pontos diametralmente opostos de uma pista circular, quando começam a correr no mesmo sentido. As velocidades com que correm são constantes, sendo a de Marcos igual a $\frac{9}{8}$ da velocidade de Luísa. Quantas voltas inteiras completou Luísa no momento em que Marcos a alcançou pela primeira vez?

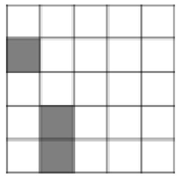
(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 36 **(E)** 72

10. Resposta: alternativa B

Como a razão entre as velocidades de Marcos e Luísa é $\frac{9}{8}$, nesta ordem, a razão entre as distâncias que percorrem no mesmo tempo é a mesma, ou seja, quando Marcos completar 9 voltas, Luísa completará 8 voltas. Para que Marcos alcance Luíza pela primeira vez, ele precisa correr meia pista a mais que ela, logo quando Luísa completar $\frac{8}{2}=4$ voltas, Marcos completará $\frac{9}{2}=4{,}5$ voltas na pista, alcançando ela.

Problemas de 4 pontos

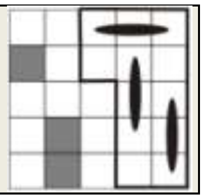
11. Carina e uma amiga estão brincando de batalha naval num tabuleiro 5×5. Carina já colocou dois navios, conforme indicado na figura. Ela ainda quer colocar um navio 3 X 1 de modo a cobrir exatamente três casas do tabuleiro. Sabendo que dois navios não podem ter nenhum ponto em comum, quantas posições estão disponíveis para Carina colocar seu navio?



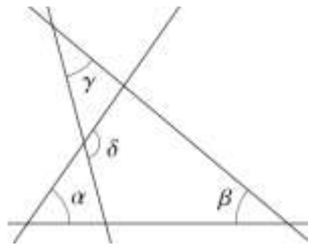
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

11. Resposta: alternativa E

Carina pode colocar o navio na região destacada pela linha mais grossa na figura, onde se podem ver três posições possíveis. Há 2 posições horizontais possíveis e 6 posições verticais possível, totalizando 8 posições.



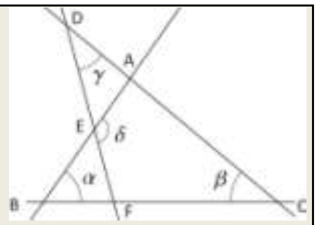
12. Vários ângulos são formados por quatro retas, conforme indicado na figura. Sabe-se que $\alpha=55^{\circ}$, $\beta=40^{\circ}$ e $\gamma=35^{\circ}$. Qual é o valor de δ?



(A) 100° **(B)** 105° **(C)** 120° **(D)** 125° **(E)** 130°

12. Resposta: alternativa E

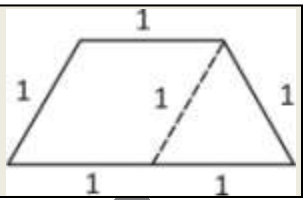
No triângulo *ABC*, a medida do ângulo externo $D\hat{A}E$ é igual a $\alpha+\beta$. No triângulo *DAE* a medida do ângulo externo $A\hat{E}F=\delta$ é igual a $(\alpha+\beta)+\gamma$, ou seja, $\delta=55^{\circ}+40^{\circ}+35^{\circ}=130^{\circ}$.



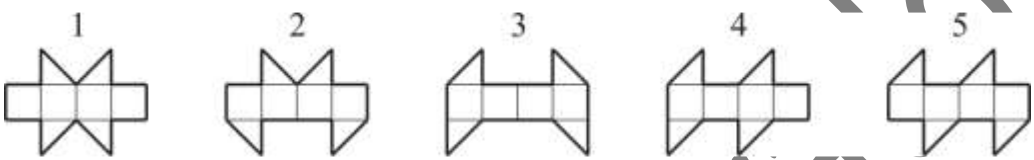
13. As medidas dos lados de um trapézio são números inteiros e seu perímetro é 5. Quais são as medidas dos menores ângulos deste trapézio?

(A) 30^{o} e 30^{o} **(B)** 60^{o} e 60^{o} **(C)** 45^{o} e 45^{o} **(D)** 30^{o} e 60^{o} **(E)** 45^{o} e 90^{o}

13. Resposta: alternativa B
O trapézio tem 4 lados, cujas medidas são números inteiros e somam 5. Portanto, tem três lados de medida 1 e um lado de medida 2. Na figura traçamos uma paralela a um dos lados inclinados do trapézio, mostrando que os ângulos da base maior são os menores e são iguais aos ângulos de um triângulo equilátero, ambos de 60^{o}.

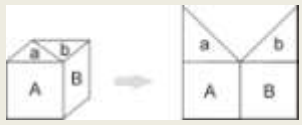


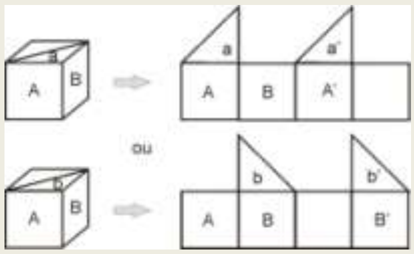
14. Somente uma das figuras a seguir **não** é a planificação de um cubo. Qual é ela?



(A) Figura 1 **(B)** Figura 2 **(C)** Figura 3 **(D)** Figura 4 **(E)** Figura 5

14. Resposta: alternativa C
Na figura ao lado, temos três faces visíveis de um cubo e a planificação dessas três faces, quando se faz um corte diagonal na face superior com uma extremidade na aresta comum às faces A e B. Na figura de baixo, o corte diagonal é o outro possível: a planificação mostra as três faces visíveis e a face oposta à face A ou à face B, dependendo da dobra. Na primeira situação, as metades das faces estão em A e A', opostas, e na segunda, as metades estão nas faces B e B', opostas.
Analisando essas situações, a única que não se enquadra como planificação do cubo é a figura 3. De fato, neste diagrama, não se produzirá um cubo fechado, pois haverá duas faces com um buraco e uma sobreposição de meias faces.

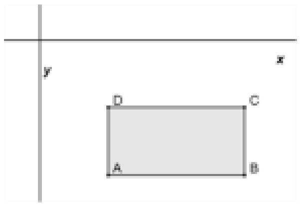




15. Vera escreveu vários números inteiros consecutivos. Entre os números a seguir, qual não pode ser o percentual do total de números ímpares em relação ao total de números escritos?

(A) 40% **(B)** 45% **(C)** 48% **(D)** 50% **(E)** 60%

15. Resposta: alternativa B
Se há um número par de inteiros consecutivos, metade deles são ímpares e metade deles são pares, logo haverá 50% de ímpares. Se houver um número ímpar de inteiros consecutivos, então haverá um par ou um ímpar a mais. Assim, se $p\%$ dos números são ímpares, $(100-p)\%$ dos números são pares e a diferença $|100-2p|\%$ representa exatamente o inteiro (par ou ímpar) a mais. Logo haverá $\dfrac{p}{|100-2p|}$ inteiros ímpares e $\dfrac{100-p}{|100-2p|}$ inteiros pares dentre os números consecutivos. Substituindo p pelo valor de cada alternativa (com exceção da (D) que corresponde a um número par de inteiros consecutivos), observamos que apenas a (B) não representa uma porcentagem válida, pois haveria $\dfrac{45}{|100-2\cdot 45|}=4{,}5$ números ímpares e $\dfrac{100-45}{|100-2\cdot 45|}=5{,}5$ números pares, um absurdo.



16. Os lados de um retângulo ABCD são paralelos aos eixos coordenados. O retângulo está no quarto quadrante, como mostra a figura e as coordenadas dos vértices A, B, C e D são números inteiros. Para cada um desses pontos calculamos o quociente entre o valor da ordenada *y* e o valor da abscissa *x*. Para qual dos pontos encontraremos o menor valor?

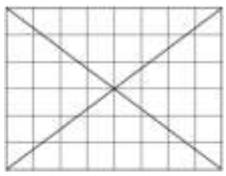
(A) A **(B)** B **(C)** C **(D)** D **(E)** depende do retângulo

16. Resposta: alternativa A
Todos os pontos têm abscissas *x* positivas e ordenadas *y* negativas. A razão $\frac{y}{x}$ é negativa, logo o menor valor dessa razão ocorrerá para o maior valor absoluto de *y* e o menor valor de *x*. O ponto cujas coordenadas fornecem esta razão é o ponto A.

17. Mariana listou no quadro-negro, em ordem decrescente de valor, todos os números inteiros positivos de quatro algarismos escritos com os mesmos algarismos do número 2013. Qual é a maior diferença possível entre dois números vizinhos na lista que Mariana fez?

(A) 702 **(B)** 703 **(C)** 693 **(D)** 793 **(E)** 798

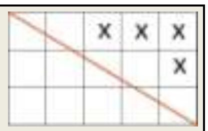
17. Resposta: alternativa A
Se os dois números possuem a mesma casa de milhar, então as casas das centenas vão diferir por no máximo 1 e a diferença entre eles será menor que 100, logo queremos dois números com casa de milhar diferentes. Isso ocorre na lista para $3012-2310=702$ e para $2013-1320=693$, portanto a maior diferença entre dois números vizinhos é 702.



18. No quadriculado 6×8 ao lado, 24 casas não são cortadas por nenhuma das duas diagonais. Quantas casas não são cortadas por nenhuma das duas diagonais num quadriculado 6×10?

(A) 28 **(B)** 29 **(C)** 30 **(D)** 31 **(E)** 32

18. Resposta: alternativa E



O quadriculado 6×10 é formado por 4 retângulos 3×5 e, a exemplo do quadriculado 6×8, basta contar o número de casas não cortadas por uma diagonal em somente um deles, pela simetria das figuras. Vemos, ao lado, que em cada retângulo 3×5 o número de casas não cortadas por uma diagonal é 8. Portanto, o número de casas não cortadas por nenhuma diagonal no quadriculado 6×10 é $4\times8=32$.

19. Ada, Bia, Cris, Dina e Edna nasceram, não necessariamente nesta ordem, em 20/2/2001, 12/3/2000, 20/3/2001, 12/4/2000 e 23/4/2001. Ada e Edna nasceram no mesmo mês, assim como Bia e Cris. Ada e Cris nasceram no mesmo dia, porém em diferentes meses. O mesmo ocorre com Dina e Edna. Qual delas é a mais jovem?

(A) Ana **(B)** Bia **(C)** Cris **(D)** Dina **(E)** Edna

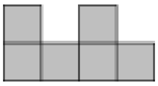
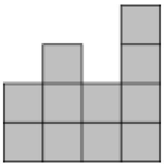
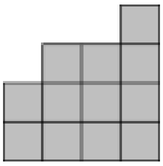
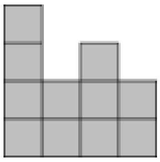
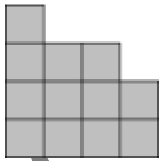
19. Resposta: alternativa B
Dina nasceu em 20/2/2001, pois as outras quatro garotas nasceram em pares de meses iguais. Logo Edna nasceu em 20/3/2001 (no mesmo dia de Dina), Ada nasceu em 12/3/2000 (no mesmo mês de Edna), Cris nasceu em 12/4/2000 (no mesmo mês de Ada) e Bia nasceu em 23/4/2001, sendo Bia, portanto, a mais jovem.

20. Carlos fez uma montagem de várias torres com cubos. O esquema ao lado é uma representação da construção vista de cima, onde o número em cada célula representa a quantidade de cubos empilhados naquela célula. Se Carlos estiver atrás da construção e olhar para ela, que forma ele irá observar?

FUNDO

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

FRENTE

(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

20. Resposta: alternativa C

dir.	4	3	3	2	esq.

FUNDO

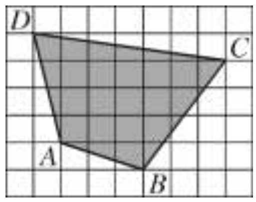
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

FRENTE

Olhando a partir dos fundos, Carlos vê à sua esquerda a torre mais baixa, de altura 2. No meio vê as duas torres de altura 3 e, à direita, vê a torre de altura 4.

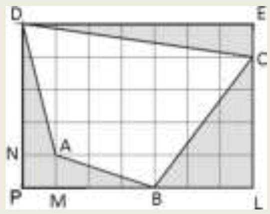
Problemas de 5 pontos

21. O quadriculado da figura ao lado é formado de quadrados de lado 2 cm. O quadrilátero cinzento *ABCD* têm seus vértices coincidindo com alguns vértices desses quadrados. Qual é a área do quadrilátero *ABCD* em cm^2?



(A) 76 **(B)** 84 **(C)** 88 **(D)** 96 **(E)** 104

21. Resposta: alternativa B



A área do quadrilátero é igual à área do retângulo de vértices *D*, *E*, *L* e *P*, subtraída das áreas dos triângulos *CED*, *BCL*, *ABM*, *ADN* e do quadrado de vértices *A*, *M*, *N* e *P*, resultando:

$$\left[5\times 7-\left(\frac{7\times 1}{2}+\frac{4\times 3}{2}+\frac{3\times 1}{2}+\frac{4\times 1}{2}+1\times 1\right)\right]\times 4=(35-14)\times 4=84\,\text{cm}^2.$$

Obs.: cada quadradinho tem área de 4 cm^2, o que justifica a multiplicação por 4.

22. Seja *Q* o número de quadrados entre os números de 1 a 2013^6. Seja *C* o número de cubos entre os mesmos inteiros. Qual das igualdades a seguir é verdadeira?

(A) $Q=C$ **(B)** $2Q=3C$ **(C)** $3Q=2C$ **(D)** $Q=2013C$ **(E)** $20Q=13C$

22. Resposta: alternativa D

Os números de 1 a 2013^6 que são quadrados são $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (2013^3)^2$, logo $Q=2013^3$. Os números de 1 a 2013^6 que são cubos são $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, (2013^2)^3$, logo $C=2013^2$. Temos, assim, $\frac{Q}{C}=\frac{2013^3}{2013^2}\Leftrightarrow Q=2013C$.

23. José escolhe um número inteiro de cinco algarismos e apaga um desses algarismos, obtendo um número de quatro algarismos. A soma deste número com o número original é 52 713. Qual é a soma dos cinco algarismos do número original?

(A) 17 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 23 **(E)** 26

23. Resposta: alternativa D

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ +\ A\,B\,C\,D \\ \hline 5\,2\,7\,1\,3 \end{array}$$

Seja ABCDE o número original. Como o algarismo das unidades da soma é 3, o algarismo retirado do número original foi E, pois do contrário ABCDE + XXXE terminaria num número par. Vemos que A só pode ser 4 (se A fosse 5, A + B seria 11 ou 12 e teríamos "vai um", impossível). Do mesmo modo, B só pode ser 7 (se B fosse 8, B + C seria 16 ou 17 e teríamos "vai um", absurdo) e A + B = 11 precisa de "vai um". Logo, temos que C é 9, D é 2 e E é 1. Temos então 47 921 + 4 792 = 52 713. A soma dos algarismos do número original é 23.

Solução Alternativa: Conforme a solução anterior, o número removido foi E. Observe agora que se subtrairmos E da soma ABCDE + ABCD, teremos ABCD0 + ABCD = ABCD$\cdot(10+1)$ = 11 · ABCD, um múltiplo de 11. Como $52713 = 11\cdot 4792 + 1$, temos que E = 1 e ABCD = 4792, logo o número original é 47921 e a soma de seus algarismos é 23.

24. Um jardineiro deseja plantar 20 árvores, entre perobas e jacarandás, ao longo de uma rua de um parque. Ele quer fazê-lo de modo que entre duas perobas quaisquer não haja três árvores. Se o número de perobas entre as 20 árvores for o maior possível, quantos jacarandás serão plantados?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 14 **(E)** 16

24. Resposta: alternativa A

Representemos cada um dos 20 espaços para plantar as árvores por um quadrado e pintamos esses 20 quadrados com 4 cores diferentes, conforme a figura acima.
Observe que se uma peroba é plantada, por exemplo, num quadrado branco, nos quadrados brancos vizinhos devem ser plantados jacarandás, pois entre dois quadrados brancos há exatamente 3 árvores.
Deste modo, para cada cor, há no máximo 3 perobas plantadas (intercaladas com 2 jacarandás); se houver 4, haverá duas perobas de mesma cor vizinhas, um absurdo. Portanto, o jardineiro pode plantar no máximo $3\cdot 4 = 12$ perobas e neste caso haverá $20 - 12 = 8$ jacarandás plantados.

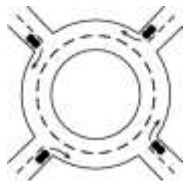
25. André e Daniel foram correr numa maratona. Após a corrida, descobriram que André chegou à frente do dobro do número de corredores que chegaram à frente de Daniel. Daniel, por sua vez, chegou à frente de um número de corredores 1,5 maior do que o número de corredores que chegaram à frente de André, que chegou em 21º lugar. Quantos corredores participaram da maratona?

(A) 31 **(B)** 41 **(C)** 51 **(D)** 61 **(E)** 81

25. Resposta: alternativa B

Como André chegou em 21º lugar, chegaram à sua frente 20 corredores. Portanto, Daniel chegou à frente de $1{,}5\times 20 = 30$ corredores. Se x é o número de corredores que chegaram à frente de Daniel, então André chegou antes de $2x$ corredores. Então $x + 1 + 30 = 21 + 2x \Leftrightarrow x = 10$. Logo, o número de corredores é 10 + 1 + 30 = 41.

26. Quatro carros entram numa rotatória ao mesmo tempo, vindos de direções diferentes, conforme mostrado na figura. Cada carro dá menos de uma volta inteira na rotatória; além disso, não há dois carros que saem da rotatória na mesma direção. De quantas maneiras diferentes os quatro carros podem sair da rotatória?



(A) 9 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 24 **(E)** 81

26. Resposta: alternativa A

Sejam A, B,C e D as entradas na rotatória. O carro que entrou por A, não pode sair por A, o que entrou por B, não pode sair por B, etc. Assim, se considerarmos a sequência ABCD de entradas, nenhuma sequência de saída pode ter alguma letra na mesma posição da entrada, por exemplo, não pode ser ACDB, pois isto significa que o carro que entrou por A saiu por A. Podemos achar essas sequências fazendo uma lista, na tabela a seguir:

A	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
B	A	D	C	C	A	D	B	D	A	B	C
B	D	A	C	C	D	A	B	D	C	A	B
B	C	D	A	C	D	B	A	D	C	B	A

Há, portanto, 9 maneiras diferentes de os carros saírem da rotatória.

27. Os cinco primeiros termos de uma sequência são $1, -1, -1, 1, -1$. Depois do 5º termo, cada termo é igual ao produto dos dois termos antes dele. Por exemplo, o sexto termo é o produto do quarto e quinto termos. Qual é a soma dos primeiros 2013 termos?

(A) -1006 **(B)** -671 **(C)** 0 **(D)** 671 **(E)** 1007

27. Resposta: alternativa B

A sequência é periódica, e o período compreende três termos consecutivos:

$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = -1, a_6 = -1, a_7 = 1, a_8 = -1, \ldots$

A soma dos termos em cada período é $1 + (-1) + (-1) = -1$. Como 2013 dividido por 3 resulta em 671, concluímos que a soma dos 2013 primeiros termos é $671 \times (-1) = -671$.

28. Rita assa seis tortas de maçã, uma após a outra, numerando-as de 1 a 6, na ordem em que são assadas. Enquanto ela faz isso, seus filhos de vez em quando correm até a cozinha e comem a torta mais quente. Qual das sequências a seguir não pode corresponder à ordem em que as tortas são comidas?

(A) 123456 **(B)** 125436 **(C)** 325461 **(D)** 456231 **(E)** 654321

28. Resposta: alternativa D

(A) possível: cada torta é comida antes de a próxima estar assada.

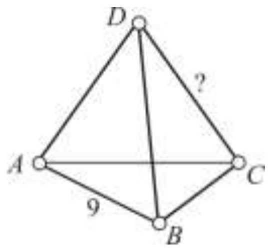
(B) possível: sai torta 1, é comida, sai a 2 é comida, saem as tortas 3, 4 e 5 e aí 5, 4, 3 são comidas nesta ordem e por fim sai a 6, que é comida.

(C) possível: saem as tortas 1, 2 e 3; as crianças comem 3 e 2, nesta ordem e deixam a 1; saem as tortas 4 e 5, as crianças comem 5 e 4 nesta ordem e, por fim, comem a 1.

(E) possível: saem todas as tortas e as crianças comem nesta ordem 6, 5, 4, 3, 2 e 1.

(D) **impossível**: saem as tortas 1, 2, 3 e 4 e as crianças comem a 4, deixando as outras três. Sai a torta 5 e elas comem, sai a torta 6 e elas comem. Das que sobraram, deveriam comer na ordem 3, 2 e 1 e não 2, 3 e 1.

29. Cada um dos quatro vértices e seis arestas de um tetraedro é numerado com um dos dez números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 11 (o número 10 não é usado). Cada número é utilizado exatamente uma vez. A soma dos números atribuídos a dois vértices quaisquer é igual ao número da aresta que une esses dois vértices. Conforme se vê na figura, a aresta AB foi marcada com o número 9. Qual é o número com que foi marcada a aresta CD?



(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 11

29. Resposta: alternativa B

A soma de todos os dez números é $\frac{11\cdot 12}{2}-10=56$. A soma dos números das arestas vale 3 vezes a soma dos números nos vértices, pois de cada vértice partem 3 arestas. Logo, a soma dos números nos vértices é um quarto da soma de todos os números, ou seja, é igual a $\frac{56}{4}=14$. Ora, a soma dos números nos vértices A e B é 9, logo a soma dos números nos vértices C e D é 14 – 9 = 5, número escrito na aresta CD.

30. Um número inteiro positivo N é menor do que a soma de seus três maiores divisores (entre estes, claro, não está o próprio número). Pode-se dizer então que, qualquer que seja N, ele é divisível por:

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** Não existe tal número

30. Resposta: alternativa D

Se $1 < a < b < c$ são os menores divisores positivos de N, então $\frac{N}{a},\frac{N}{b}$ e $\frac{N}{c}$ são os maiores divisores de N diferentes de N. Temos que $\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}>N$, logo devemos ter $\frac{N}{a}>\frac{N}{3}$ ou senão a soma dos três divisores será $\leq 3\cdot\frac{N}{3}=N$. Portanto a = 2. Substituindo na desigualdade, temos $\frac{N}{b}+\frac{N}{c}>\frac{N}{2}=2\cdot\frac{N}{4}$ e, analogamente, $\frac{N}{b}>\frac{N}{4}\Leftrightarrow b\leq 3$. Como $b>a=2$, então b = 3. Finalmente, $\frac{N}{c}>\frac{N}{2}-\frac{N}{3}=\frac{N}{6}\Leftrightarrow c\leq 5$, ou seja, c = 4 ou 5 e N é um múltiplo de 12 ou 30. Independente dos casos, N sempre será um múltiplo de 6.