
OBJETIVO
ITA
Matemática
4

MÓDULO 13

Fatoração

1. Prove que se a e b são dois números reais então $a^2 + b^2 \geq 2ab$

2. Prove que se $\{a; b\} \subset \mathbb{R}^*$ então $a^2 + b^2 > ab$

3. Se a, b, c e d são números reais, então a expressão $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ é sempre:
a) equivalente a $(a + b + c + d)^4$
b) igual a 3abcd
c) menor que 5abcd
d) maior ou igual a 4 abcd
e) um número primo

4. Um possível valor de $a + \dfrac{1}{a}$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$, é:

a) 0,25 b) – 0,25 c) 1,75
d) – 1 e) 4,25

5. Mostre que $a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$, com a inteiro, é múltiplo de 24.

MÓDULO 14

Fatoração

1. Os lados de um retângulo são números naturais tais que a soma do semiperímetro com a área é numericamente igual a 90. O perímetro desse retângulo é:
a) 12 b) 24 c) 36 d) 48 e) 60

2. Mostre que se a, b e c são três números inteiros ímpares, então o número N tal que
$N = a^2b - a^2c + ac^2 + b^2c - ab^2 - bc^2$ é múltiplo de 8.

3. Prove que "se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$".

4. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 98 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

5. Resolva o sistema em $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

MÓDULO 15

Fatoração

1. **(IME)** – Seja x um número real ou complexo para o qual $x + \dfrac{1}{x} = 1$. O valor de $x^6 + \dfrac{1}{x^6}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2. Mostre que, se **a** é um número inteiro par, então $N = \dfrac{a}{12} + \dfrac{a^2}{8} + \dfrac{a^3}{24}$ é um número inteiro.

3. Fatore as expressões:

a) $x^4 - y^4$

b) $x^5 - y^5$

c) $x^5 + y^5$

4. Fatore as expressões $243x^5 - 32y^5$.

MÓDULO 16

Fatoração

1. Se $x + \dfrac{1}{x} = 3$ qual o valor de $x^8 + \dfrac{1}{x^8}$

2. Desenvolva a expressão $(x + y)^5$.

3. **(ITA)** – A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$. b) $2690\sqrt{5}$. c) $2712\sqrt{5}$.

d) $1584\sqrt{15}$. e) $1604\sqrt{15}$.

4. Resolva a equação $(x - 2)^3 + (x - 4)^3 + (6 - 2x)^3 = 0$

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 13

1. Se a, b, c, d são números reais positivos tais que a.b.c.d = 1 então, $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$ pode ser:
a) 1,7 b) 2,3 c) 3,4 d) 3,8 e) 4,9

2. Prove que
$km(k + m) + mn(m + n) + kn(k + n) \geq 6kmn$. $\forall k, m, n \in \mathbb{R}^*$.

3. Se $x = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + \left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right) + \left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$; então:
a) $0 < x < 1$ b) $x = 1$ c) $1 < x < 2$
d) $x = 5$ e) $x \geq 6$

4. Sendo x um número inteiro, o valor numérico da expressão $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ é sempre:
a) ímpar b) um quadrado perfeito
c) múltiplo de 5 d) múltiplo de 24
e) um número ímpar

■ MÓDULO 14

1. Fatore $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$

2. Desenvolva:
a) $(x + y)(y + z)(x + z)$ b) $(x + y + z)^3$

3. Resolver o sistema
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

4. Dados dois números naturais não-nulos, determiná-los, sabendo-se que a soma do produto de um pelo outro com a soma dos dois números é igual a 142.

■ MÓDULO 15

1. **(UCMG)** – Simplifique
$(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$

2. Fatore a expressão $32x^5 - a^{10}$.

■ MÓDULO 16

1) O valor da expressão
$(\sqrt[5]{7} - \sqrt[5]{2}) \cdot (\sqrt[5]{2401} + \sqrt[5]{686} + \sqrt[5]{196} + \sqrt[5]{56} + \sqrt[5]{16}$ é:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

2. Para que valor de k a soma das raízes da equação $(x - k)^3 + (x - 3k)^3 + (4k - 2x)^3 = 0$ é igual a 30?

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 13

1) $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 =$
$= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 =$
$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (2ab) \cdot (2cd) = 4abcd = 4$
Resposta: E

Obs.: Veja um exemplo, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **e** $d = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= 0^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2 = 4,9$$

2) $k^2 + m^2 \geq 2km \Rightarrow nk^2 + m^2n \geq 2kmn$
$k^2 + n^2 \geq 2kn \Rightarrow mk^2 + mn^2 \geq 2kmn$
$m^2 + n^2 \geq 2mn \Rightarrow km^2 + kn^2 \geq 2kmn$

$nk^2 + m^2n + mk^2 + mn^2 + km^2 + kn^2 \geq 6kmn \Rightarrow$
$\Rightarrow km(k + m) + mn(m + n) + kn(k + n) \geq 6kmn$

3)
$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) \geq 2 \\ \left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right) \geq 2 \\ \left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right) \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 6 \Rightarrow x \geq 6$$
Resposta: E

4) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) =$
$= x(x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6) =$
$= x[x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1)] =$
$= x \cdot (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$ **que**

é o produto de quatro números inteiros e consecutivos. Desses, quatro números, um e múliplo de 2, outro é múltiplo de quatro e pelo menos um deles é múltiplo de 3, portanto o produto é múltiplo de 2 . 4 . 3 = 24

Resposta: D

■ MÓDULO 14

1) Se

$$\left.\begin{array}{l} x = b - c \\ y = c - a \\ z = a - b \end{array}\right\} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c) . (c - a) . (a - b)$$

2)

a) $(x + y)(y + z)(x + z) = (xy + xz + y^2 + yz) .(x + z) =$
$= x^2y + x^2z + xy^2 + xyz + xyz + xz^2 + y^2z + yz^2 =$
$= x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz$

b) $(x + y + z)^3 = [(x + y) + z]^3 =$
$= (x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3 =$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z +$
$+ 3xz^2 + 3yz^2 + z^3 =$
$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 +$
$+ 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz$

3)

1) $x^3 + y^3 = 91 \Rightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 91 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + y) . 13 = 91 \Rightarrow x + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - x$

2) $x^2 - xy + y^2 = 13 \Rightarrow x^2 - x(7 - x) + (7 - x)^2 = 13 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 4 \\ x = 4 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$V = \{(3;4), (4;3)\}$

4) $x . y + x + y = 142$
$x(y + 1) + y = 142$
$x(y + 1) + (y + 1) = 142 + 1$
$\underbrace{(y + 1)} . \underbrace{(x + 1)} = 11 . 13$

11	13	→	x = 12 e y = 10
13	11	→	x = 10 e y = 12

$\underbrace{(y + 1)} . \underbrace{(x + 1)} = 1 . 143$

$$\left.\begin{array}{llll} 1 & 143 & \to & x = 142 \text{ e } y = 0 \\ 143 & 1 & \to & x = 0 \text{ e } y = 142 \end{array}\right\} \text{impossível}$$

pois, $x,y \in \mathbb{N}^*$

Respostas: 10 e 12

■ MÓDULO 15

1) $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 -$
$- (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 =$
$= (a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 +$
$+ (a - b - c)^3 - (a - b + c)^3 =$
$= [(a + b) + c]^3 - [(a + b) - c]^3 +$
$+ [(a - b) - c]^3 - [(a - b) + c]^3 =$

$= \cancel{(a + b)^3} + 3(a + b)^2c + \cancel{3(a + b)c^2} + \cancel{c^3} -$

$\cancel{- (a + b)^3} + 3(a + b)^2c - \cancel{3(a + b)c^2} + \cancel{c^3} + \cancel{(a - b)^3} -$

$- 3(a - b)^2c + \cancel{3(a - b)c^2} - \cancel{c^3} - \cancel{(a - b)^3} -$

$- 3(a - b)^2c - \cancel{3(a - b)c^2} - \cancel{c^3} =$

$= 6(a + b)^2c - 6(a - b)^2c = 6c[(a + b)^2 - (a - b)^2] =$

$= 6c[a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2] =$

$= 6c . 4ab = 24abc$

2) $32x^5 - a^{10} = (2x)^5 - (a^2)^5 =$

$= (2x - a^2)[(2x)^4 + (2x)^3(a^2)^1 + (2x)^2(a^2)^2 +$

$+ (2x)^1(a^2)^3 + (a^2)^4] =$

$= (2x - a^2)(16x^4 + 8x^3a^2 + 4x^2a^4 + 2xa^6 + a^8)$

■ MÓDULO 16

1)

$(\sqrt[5]{7} - \sqrt[5]{2}) . (\sqrt[5]{2401} + \sqrt[5]{686} + \sqrt[5]{196} + \sqrt[5]{56} + \sqrt[5]{16} =$
$= (\sqrt[5]{7} - \sqrt[5]{2}) . ((\sqrt[5]{7})^4 + (\sqrt[5]{7})^3 . (\sqrt[5]{2}) +$
$+ (\sqrt[5]{7})^2 . (\sqrt[5]{2})^2 + (\sqrt[5]{7}) . (\sqrt[5]{2})^3 + (\sqrt[5]{2})^4) =$
$= (\sqrt[5]{7})^5 - (\sqrt[5]{2})^5 = 7 - 2 = 5$

pois $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

Resposta: D

2) No exercício 3 da aula 14 demonstramos que "Se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$". Como $(x - k) + (x - 3k) + (4k - 2x) = 0$ temos que
$(x - k)^3 + (x - 3k)^3 + (4k - 2x)^3 =$
$= 3 . (x - k) . (x - 3k) . (4k - 2x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - k) = 0, (x - 3k) = 0$ ou $(4k - 2x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = k, x = 3k$ ou $x = 2k$

A soma das raízes é $k + 3k + 2k = 6k = 30 \Leftrightarrow k = 5$.

Resposta: 5