FUNÇÃO: INJETORA, SOBREJETORA, BIJETORA, PAR, ÍMPAR, CRESCENTE, DECRESCENTE, LIMITADA E PERIÓDICA

1. FUNÇÕES MONOTÔNICAS

Chama-se monotônica ou monótona a função que é sempre crescente ou decrescente no seu domínio.

Seja a função $f: A \to B$, então:

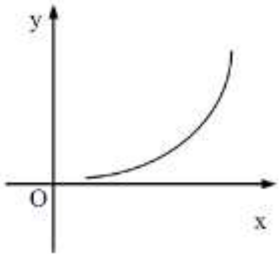
- f é crescente (não decrescente) se $\forall x, y \in A$ tais que $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$.
- f é decrescente (não crescente) se $\forall x, y \in A$ tais que $x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$.
- f é estritamente crescente (crescente) se $\forall x, y \in A$ tais que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f é estritamente decrescente (decrescente) se $\forall x, y \in A$ tais que $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

São funções crescentes $f(x) = 3x - 1$, $f(x) = 2^x$ e $f(x) = x^3$.

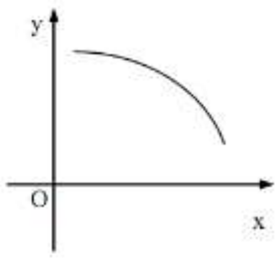
São funções decrescentes $f(x) = -2x + 5$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = -x^3$.

As funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$ não são crescentes e nem decrescentes em $\mathbb{R}$.

Esses conceitos são facilmente observados no gráfico da função. Nas funções crescentes o gráfico "sobe" para a direita, enquanto nas funções decrescentes o gráfico "desce" para a direita.

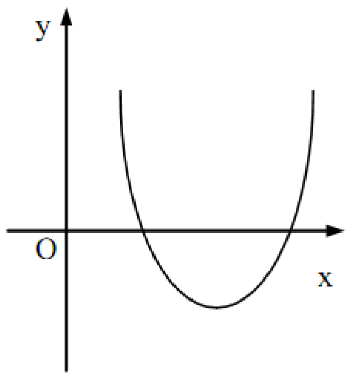


função crescente



função decrescente

Já a função a seguir não é monótona, pois ela é decrescente numa parte do domínio e crescente em outra.



2. PARIDADE

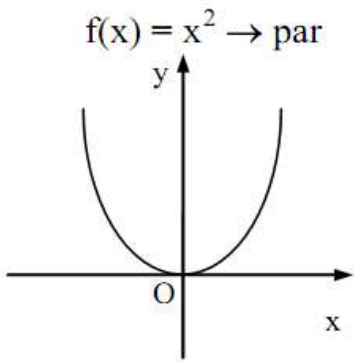
FUNÇÃO PAR

Seja A um conjunto tal que $x \in A \Rightarrow -x \in A$ e a função $f: A \to B$. Diz-se que:

f é par $\Leftrightarrow f(-x) = f(x),\ \forall x \in A$

Exemplos: $f(x) = x^2$ e $f(x) = \cos x$.

O gráfico das funções pares é simétrico em relação ao eixo Oy, pois $(x,y) \in f \Leftrightarrow (-x,y) \in f$.



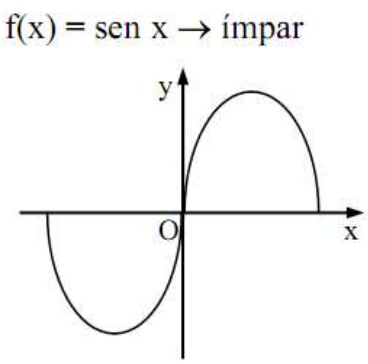
FUNÇÃO ÍMPAR

Seja A um conjunto tal que $x \in A \Rightarrow -x \in A$ e a função $f: A \to B$. Diz-se que:

f é ímpar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in A$

Exemplos: $f(x) = x^3$ e $f(x) = \text{sen}\, x$.

O gráfico das funções ímpares é simétrico em relação a origem, pois $(x,y) \in f \Leftrightarrow (-x,-y) \in f$.



Se uma função não é nem par nem ímpar dizemos que ela não possui paridade.

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 1$.

Para identificar a paridade de uma função devemos obter a expressão de $f(-x)$. Caso essa expressão seja idêntica à de $f(x)$, a função é par, caso à de $-f(x)$, a função é ímpar, e caso não seja idêntica a nenhuma das duas, a função não possui paridade.

Note que devemos obter identidades, não basta que a igualdade ocorra para alguns pontos, ele tem que ocorrer em todo o domínio.

Exemplo: Identifique a paridade de $f(x)=x^5+\text{sen}^3 x$.

$$f(-x)=(-x)^5+\text{sen}^3(-x)=-x^5+(-\text{sen}x)^3=-x^5-\text{sen}^3 x=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Logo, a função é ímpar.

PROBIZU

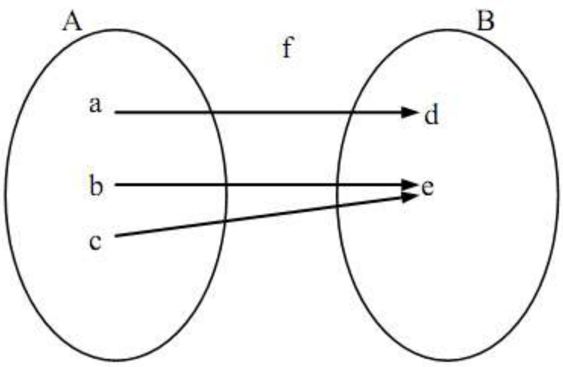
A soma, diferença, produto ou quociente de duas funções pares é uma função par.
A soma ou diferença de duas funções ímpares é uma função ímpar.
O produto ou o quociente de duas funções ímpares é função par.

3. TIPOLOGIA DAS FUNÇÕES

A função $f: A\to B$ é **sobrejetora** quando todo elemento de B está associado por f a pelo menos um elemento de A, ou seja, quando a imagem da função é igual ao seu contradomínio.

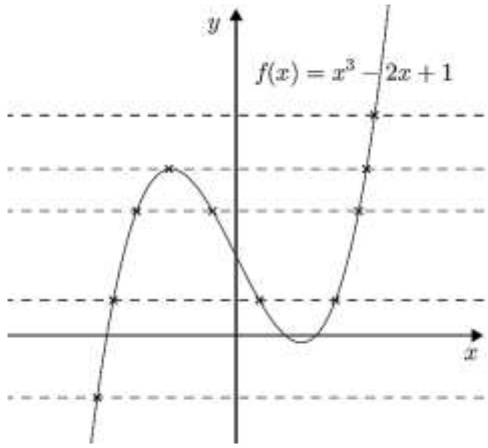
$f: A\to B$ é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall y\in B,\ \exists \text{x}\in \text{A}$ tal que $(x,y)\in f$ *ou* $y=f(x)$

No diagrama de flechas, todo elemento do contradomínio B recebe flecha.



No gráfico, retas horizontais traçadas a partir de pontos do contradomínio intersectam o gráfico em pelo menos um ponto.

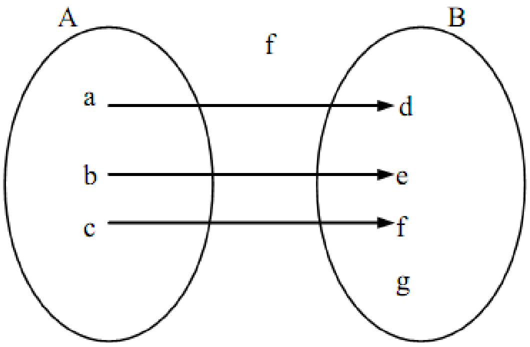
Exemplo: A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3-2x+1$ é sobrejetora, mas não é injetora. Observe que as retas horizontais traçadas intersectam o gráfico em um, dois ou três pontos.



A função $f: A \to B$ é**injetora** quando cada elemento de B está associado por f a no máximo um elemento de A, ou seja, elementos distintos de A estão associados a elementos distintos de B.

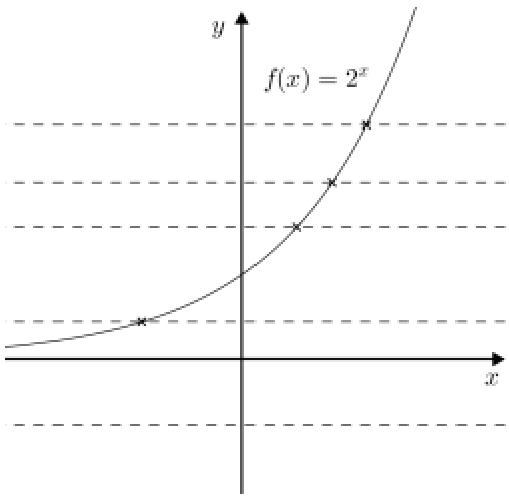
$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ ou } \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

No diagrama de flechas, não há elemento em B que receba mais de uma flecha.



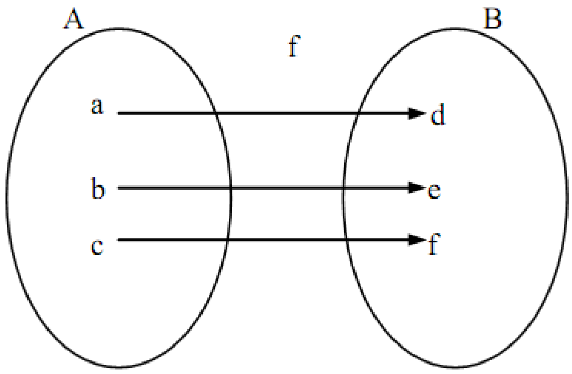
No gráfico, retas horizontais traçadas a partir de pontos do contradomínio intersectam o gráfico em no máximo um ponto.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$ é injetora, mas não é sobrejetora. Observe que as retas horizontais traçadas intersectam o gráfico em um ou nenhum ponto.



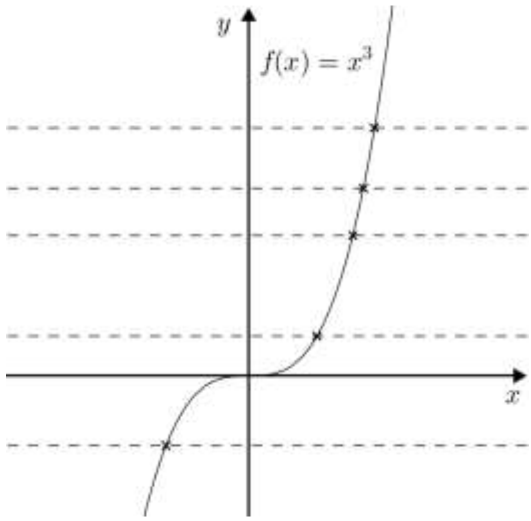
A função $f: A \to B$ é bijetora se, e somente se, é sobrejetora e injetora, ou seja, todo elemento de B está associado por f a um único elemento de A.

No diagrama de flechas, todo elemento de B recebe exatamente uma flecha.



No gráfico, retas horizontais traçadas a partir de pontos do contradomínio intersectam o gráfico em exatamente um ponto.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é bijetora. Observe que as retas horizontais traçadas intersectam o gráfico em exatamente ponto.



PROBIZU

Seja $f: A \to B$, onde A e B são conjuntos finitos e suas quantidades de elementos são dadas por $\#(A)$ e $\#(B)$, respectivamente, então
se f é sobrejetora, então $\#(A) \geq \#(B)$;
se f é injetora, então $\#(A) \leq \#(B)$; e
se f é bijetora, então $\#(A) = \#(B)$.

4. FUNÇÃO LIMITADA

Uma função f é limitada se $\exists K > 0$ tal que $\forall x \in D_f \Rightarrow |f(x)| < K$.

Exemplos:

A função $f(x)=\operatorname{sen} x$ é uma função limitada, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen} x| \le 1$.

A função $f(x)=x^2$ não é limitada, pois $\forall K>0,\ \exists x \in D_f$ tal que $f(x)=x^2>K$.

5. FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função f é periódica se, e somente se, $\exists p>0$ tal que $f(x)=f(x+p),\ \forall x \in D_f$.

Isso significa que os valores da função se repetem em intervalos de tamanho $p>0$.O menor número positivo p com essa propriedade é chamado período da função.

Os exemplos mais comuns de funções periódicas são as funções trigonométricas. A função $f(x)=\operatorname{sen} x$, por exemplo, é uma função periódica de período 2π, pois $\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen} x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (UFRN 2002) Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E. Se $f: E \to P$ é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então

a) f não pode ser uma função bijetora.

b) f não pode ser uma função injetora.

c) f é uma função sobrejetora.

d) f é necessariamente uma função injetora.

2. Classifique as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

( ) O produto de duas funções ímpares é ímpar.

( ) O produto de duas funções pares é par.

( ) A soma de duas funções ímpares é par.

( ) A soma de duas funções pares é par.

( ) Se uma função é ímpar e bijetora, sua inversa é ímpar.

A diferença entre o número de afirmativas verdadeiras e o número de afirmativas falsas é igual a

a) 1

b) -1

c) 3

d) -3

e) 5

3. Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $p > 0$, classifique as afirmações a seguir em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) A função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período $2p$.

( ) A função $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ é periódica de período $\frac{p}{2}$

( ) A função $j(x) = f(x+q)$, onde q é uma constante positiva, não é periódica.

A sequência obtida foi

a) V, V, V

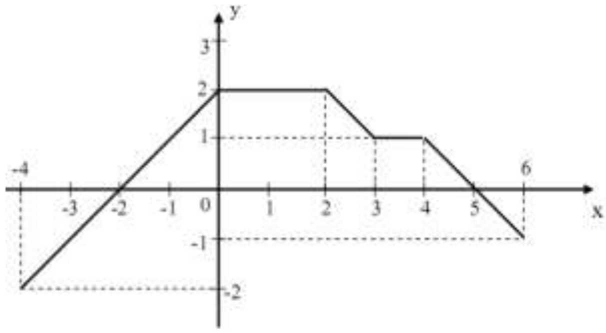
b) V, V, F

c) F, V, V

d) F, F, V

e) F, F, F

4. (CMRJ 2003) Observe o gráfico abaixo de uma função real f e, em seguida, assinale a afirmativa FALSA, relativa a esse gráfico.



a) Os zeros da função são -2 e 5.

b) A função é crescente para os valores de x que pertencem a $]-4,0[$.

c) $f(2)=f(3)+f(4)$

d) $f(x)>0$ se $-2\le x\le 5$

e) A soma das imagens dos elementos -4 e 6 do domínio de f é -3.

5. Sejam f e g duas funções cujos domínio e contradomínio são o conjunto dos números reais. Considere as afirmações a seguir:

I. Sempre que g é injetora, $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é injetora.

II. Se f é decrescente e g também é decrescente, então, $f\circ g$ também é decrescente.

III. Se f é crescente, g é decrescente e $g(x)>0$ para todo x real, então, $\frac{f}{g}$ é crescente.

IV. Se f é decrescente e g é decrescente, então, $f+g$ é decrescente.

V. Se os gráficos de f e g não interceptam o eixo das abscissas, então, o gráfico de $f\cdot g$ também não intercepta o eixo das abscissas.

A quantidade de afirmações INCORRETAS é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

6. (EPCAR 2006 -3° ano) Uma função f é definida em A e tem imagem em B. Sabe-se que o conjunto A tem $2k-2$ elementos e o conjunto B tem $k+3$ elementos, com $k>1$. Neste caso, é correto afirmar que

a) se f é injetora, então k é estritamente igual a 5.

b) o número máximo de funções injetoras que podem ser definidas de A em B é dado pelo arranjo de $(k+3)$ elementos tomados $(2k-2)$ a $(2k-2)$ elementos.

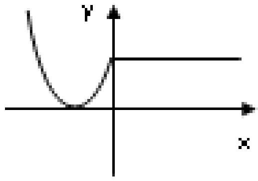
c) se f é sobrejetora, então $1<k\le 5$.

d) f é bijetora para todo k

7. (EPCAR 2003 – 3º ano) Analise os itens abaixo, classificando-os em V (verdadeiro) ou F (falso).

I. Se $f(2+x)=x\cdot(x^2+1)^{-1}$, então $f(3)=0{,}5$.

II. A função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ representada no gráfico ao lado não é injetora, mas é sobrejetora.



III. Se g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ associa x à expressão $\frac{1}{1+x^2}$, então $g\left(\sqrt[4]{7}\right)=\frac{1-\sqrt{7}}{6}$.

A sequência correta é

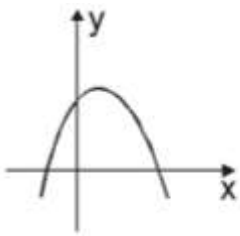
a) V VV

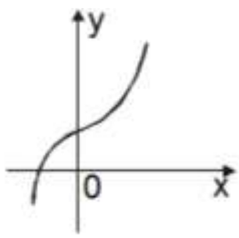
b) F V V

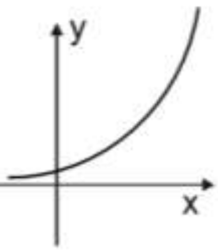
c) V F V

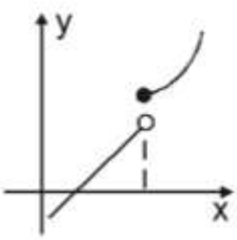
d) V V F

8. (EPCAR 2002 – 3º ano) Dados os gráficos de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, assinale aquele cuja função não é injetora e nem sobrejetora.

a)


c)


b)


d)


9. (EPCAR 2002 – 3º ano) Sejam A e B dois conjuntos com, respectivamente, 19 e 92 elementos. Seja a função $f: A \to B$. Então,

a) existem sobrejeções de A em B.

b) toda função de A em B é uma injeção.

c) não existem bijeções de A em B.

d) o conjunto imagem de qualquer função, de A em B, tem 19 elementos.

10. (EPCAr 1999 – 2º ano) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injetora definida por $y = f(x)$. Tem-se que $f(0) = -5$, $f(1) = 0$ e $f(3) = 6$. Sabendo-se que $f(f(a-2)) = -5$, então $f(a)$ é igual a

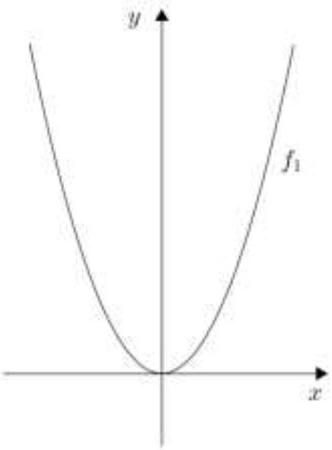
a) zero

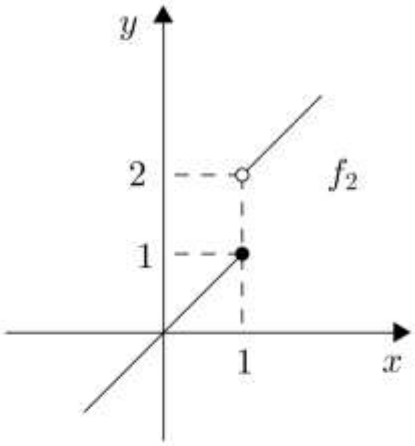
b) -5

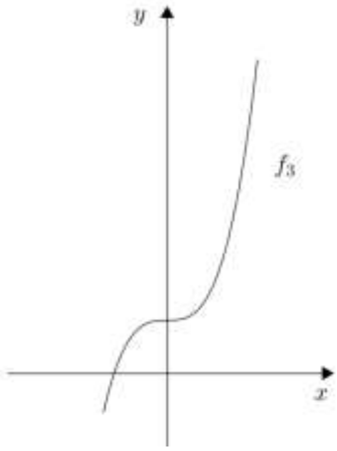
c) 3

d) 6

11. (EPCAR 1997 – 3° ano) Sejam as funções reais f_1, f_2 e f_3 abaixo representadas:







Considere as afirmações:

I. f_1 admite inversa

II. f_2 é uma função crescente

III. f_3 é sobrejetora

Associe a cada uma delas V, se for verdadeiro, e F, caso seja falso. Nesta ordem, tem-se

a) V, V, F

b) V, F, V

c) F, V, V

d) F, F, V

12. (EPCAR 1997 – 3° ano) Analise as funções abaixo quanto à tipologia e assinale a opção correta

I. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$

II. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ tal que $f(x)=x^2$

III. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^3$

IV. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=|x|$

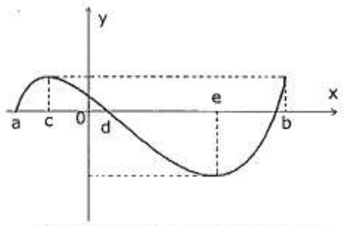
a) III é bijetora

b) I e III são injetoras

c) II e IV são sobrejetoras

d) Todas são bijetoras

13. (EsPCEx 2014) Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real $[a,b]$. Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:



desenho ilustrativo - fora de escala

a) f é crescente no intervalo $[a,0]$.

b) $f(x)\le f(e)$ para todo x no intervalo $[d,b]$.

c) $f(x)\le 0$ para todo x no intervalo $[c,0]$.

d) a função f é decrescente no intervalo $[c,e]$.

e) se $x_1\in[a,c]$ e $x_2\in[d,e]$ então $f(x_1)<f(x_2)$.

14. (EsPCEx 2004) Analise os itens abaixo para a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

I. Se $f(x)+f(-x)=0$, então f é uma função par.

II. Se $f(x)$ é uma função constante, então f é função par.

III. Se $|f(x)|=f(x)$, então $\text{Im}(f)\subset\mathbb{R}_+$.

IV. Se $|f(x)|=f(x)$, então f é função bijetora.

São corretas as afirmativas:

a) I e II

b) II e IV

c) II e III

d) I e III

e) III e IV

15. (EFOMM 2015) Sejam as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Sabendo que f é bijetora e g é sobrejetora, considere as sentenças a seguir:

I. $g\circ f$ é injetora;

II. $f\circ g$ é bijetora;

III. $g\circ f$ é sobrejetora.

Assinalando com verdadeiro (V) ou falso (F) a cada sentença, obtém-se

a) V – V – V

b) V – V – F

c) F – V – F

d) F – F – V

e) V – F – V

16. (EFOMM 2011) Seja a função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ (sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais) com a seguinte propriedade definida por $f(x-1)+1=\frac{f(x-1)-1}{f(x)}$. Sabendo-se que $f(0)=4$, o valor de $f(1007)$ é igual a

a) -1

b) 4

c) $-\frac{1}{4}$

d) $-\frac{5}{3}$

e) $\frac{3}{5}$

17. (EFOMM 2010) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função estritamente decrescente, quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1<x_2$ tem-se $f(x_1)>f(x_2)$. Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I. f é injetora.

II. f pode ser uma função par.

III. Se f possui inversa, então sua inversa é estritamente decrescente.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

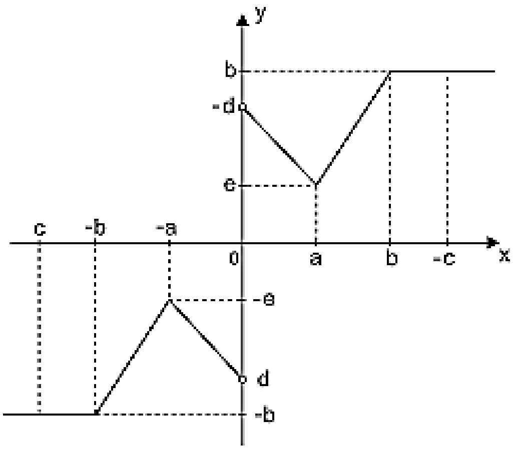
b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

18. (AFA 2013) O gráfico abaixo descreve uma função $f: A \to B$



Analise as proposições que seguem.

I. $A = \mathbb{R}^*$

II. f é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$.

III. Para infinitos valores de $x \in A$, tem-se $f(x) = -b$.

IV. $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = 2b$

V. f é função par.

VI. $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -d$

São verdadeiras apenas as proposições

a) I, III e IV

b) I, II e VI

c) III, IV e V

d) I, II e IV

19. (ITA 2002) Sendo par a função dada por $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, $-c < x < c$, então $f(x)$, para $-c < x < c$, é constante e igual a

a) $a+b$

b) $a+c$

c) c

d) b

e) a

20. (ITA 1979) Seja f uma função real definida para todo x real tal que: f é ímpar; $f(x+y)=f(x)+f(y)$; e $f(x)\geq 0$, se $x\geq 0$. Definindo $g(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x}$, se $x\neq 0$. Sendo n um número natural, podemos afirmar que:

a) f é não decrescente e g é uma função ímpar.

b) f é não decrescente e g é uma função par.

c) f é não decrescente e $0\leq g(n)\leq f(1)$.

d) f não é monótona e $0\leq g(n)\leq f(1)$.

e) não é possível garantir que $0\leq g(n)\leq f(1)$.

21. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{3\}$ uma função com a propriedade que existe $\omega>0$ tal que $f(x+\omega)=\dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Sobre a função f pode-se afirmar que:

a) não é periódica

b) é periódica de período ω

c) é periódica de período 2ω

d) é periódica de período 3ω

e) é periódica de período 4ω

22. Seja $f(x)$ uma função par e periódica de período 2. Sabendo que, no intervalo $[0,1]$, $f(x)=x^{\frac{1}{2006}}$, pode-se afirmar que:

a) $f\left(\dfrac{98}{19}\right)<f\left(\dfrac{104}{15}\right)<f\left(\dfrac{101}{17}\right)$

b) $f\left(\dfrac{101}{17}\right)<f\left(\dfrac{104}{15}\right)<f\left(\dfrac{98}{19}\right)$

c) $f\left(\dfrac{104}{15}\right)<f\left(\dfrac{98}{19}\right)<f\left(\dfrac{101}{17}\right)$

d) $f\left(\frac{98}{19}\right) < f\left(\frac{101}{17}\right) < f\left(\frac{104}{15}\right)$

e) $f\left(\frac{101}{17}\right) < f\left(\frac{98}{19}\right) < f\left(\frac{104}{15}\right)$

GABARITO

1. Como o conjunto P é formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E, então todos os elementos de P são imagem de algum elemento de E. Portanto, f é sobrejetora.

Não podemos garantir que f seja e nem que não seja injetora, pois pode haver ou não duas escolas com a mesma quantidade de professores.

Pela mesma razão não podemos garantir que a função seja e nem que não seja bijetora.

RESPOSTA: C

2.

(F) O produto de duas funções ímpares é ímpar.

Sejam f e g funções ímpares, então

$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.

Logo, o produto de duas funções ímpares é uma função par.

(V) O produto de duas funções pares é par.

Sejam f e g funções pares, então

$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.

Logo, o produto de duas funções pares é uma função par.

(F) A soma de duas funções ímpares é par.

Sejam f e g funções ímpares, então

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = [-f(x)] + [-g(x)] = -[f(x) + g(x)] = -(f+g)(x)$.

Logo, a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.

(V) A soma de duas funções pares é par.

Sejam f e g funções pares, então

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$.

Logo, a soma de duas funções pares é uma função par.

(V) Se uma função é ímpar e bijetora, sua inversa é ímpar.

Seja f uma função ímpar bijetora e f^{-1} a sua inversa,então

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \\ f(-x)=-f(x)=-y \Leftrightarrow f^{-1}(-y)=-x \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$$

Logo, f^{-1} é ímpar.

Portanto, há 3 afirmativas verdadeiras e 2 falsas, e a diferença entre a quantidade de verdadeiras e falas é $3-2=1$.

RESPOSTA: A

3.

(F) A função $g(x)=f(2x)$ é periódica de período $2p$.

Seja $2T=p$, então $g(x+T)=f(2(x+T))=f(2x+2T)=f(2x+p)=f(2x)=g(x)$.

Logo, g é periódica de período $T=\frac{p}{2}$.

(F) A função $h(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$ é periódica de período $\frac{p}{2}$

Seja $T=2p$, então $h(x+T)=f\left(\frac{x+T}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{2p}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}+p\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)=h(x)$.

Logo, h é periódica de período $T=2p$.

(F) A função $j(x)=f(x+q)$, onde q é uma constante positiva, não é periódica.

Seja $T=p$, então $j(x+T)=f((x+T)+q)=f((x+q)+p)=f(x+q)=j(x)$.

Logo, j é periódica de período $T=p$.

RESPOSTA: E

4.

a) VERDADEIRA: $f(-2)=f(5)=0$

b) VERDADEIRA: basta identificar o gráfico “subindo para a direita” em todo o intervalo $]-4,0[$.

c) VERDADEIRA: $f(2)=2=1+1=f(3)+f(4)$

d) FALSA: $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-2,5[$

e) VERDADEIRA: $f(-4)+f(6)=(-2)+(-1)=-3$

RESPOSTA: D

5.

I. INCORRETA

Contra exemplo: Suponha que f seja uma função par, então, para algum $x \neq 0$, temos: $g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, o que implica que $g \circ f$ não é injetora.

II. INCORRETA

$x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Leftrightarrow f \circ g(x_1) > f \circ g(x_2)$, o que implica $f \circ g$ é crescente.

III. CORRETA

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \wedge 0 < g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow \frac{f(x_1)}{g(x_1)} > \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$$

IV. CORRETA

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \wedge g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

V. CORRETA

Se os gráficos de f e g não interceptam o eixo das abscissas, então, as funções f e g não possuem raízes e, portanto, a função $f \cdot g$ também não possui raízes, o que implica que o gráfico de $f \cdot g$ também não intercepta o eixo das abscissas.

REFERÊNCIA: UEM 2011 INVERNO (adaptado)

RESPOSTA: B

6.

a) INCORRETA

Se f é injetora, então $n(B) \geq n(A) \Leftrightarrow k + 3 \geq 2k - 2 \Leftrightarrow k \leq 5$.

b) CORRETA

Para definir uma função injetora tenho que escolher $n(A) = 2k - 2$ elementos em $n(B) = k - 3$. Fixando-se uma ordem para os elementos de A, cada ordenação dos elementos escolhidos de B corresponderá a uma função injetora distinta. Logo, o número de funções injetoras é dado por $A_{n(B)}^{n(A)} = A_{(k+3)}^{(2k-2)}$.

c) INCORRETA

Se f é sobrejetora, então $n(B) \leq n(A) \Leftrightarrow k + 3 \leq 2k - 2 \Leftrightarrow k \geq 5$.

d) INCORRETA

Se f é bijetora, então $n(B) = n(A) \Leftrightarrow k + 3 = 2k - 2 \Leftrightarrow k = 5$. Note, porém, que essa é uma condição necessária, mas que não garante que a função seja bijetora.

RESPOSTA: B

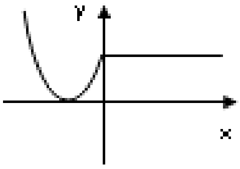
7.

I. (V)

$f(2+x)=x\cdot(x^2+1)^{-1}$

$x=1 \Rightarrow f(3)=f(2+1)=1\cdot(1^2+1)^{-1}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

II. (V)



No gráfico, podemos identificar que todos os reais positivos possuem a mesma imagem. Logo, a função não é injetora.

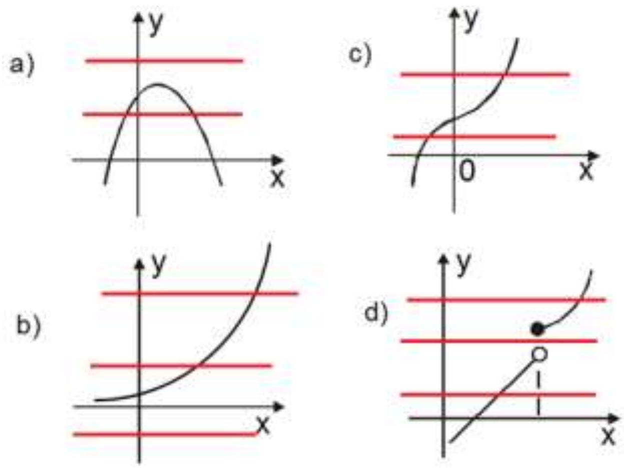
Também analisando o gráfico, podemos identificar a imagem da função $\mathrm{Im}=\mathbb{R}_+$ que é igual ao contradomínio da função. Logo, a função h não é injetora, mas é sobrejetora.

III. (F)

$g(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow g\left(\sqrt[4]{7}\right)=\dfrac{1}{1+\left(\sqrt[4]{7}\right)^2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-1}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{6}$

RESPOSTA: D

8.



a) Não é injetora (há retas horizontais que cortam o gráfico em dois pontos) e não é sobrejetora (há retas horizontais que não cortam o gráfico).

b) É bijetora (as retas horizontais cortam o gráfico em exatamente um ponto).

c) É injetora (as retas horizontais cortam o gráfico em no máximo um ponto), mas não é sobrejetora (há retas horizontais que não cortam o gráfico).

d) É injetora (as retas horizontais cortam o gráfico em no máximo um ponto), mas não é sobrejetora (há retas horizontais que não cortam o gráfico).

RESPOSTA: A

9.

a) ERRADA: Se $\#(A)=19>92=\#(B)$, então não existem sobrejeções de A em B.

b) ERRADA: Se $\#(A)=19>92=\#(B)$, podem ser definidas funções injetoras de A em B, mas não necessariamente todas as funções de A em B serão injetoras.

c) CORRETA: Se $\#(A)=19>92=\#(B)$, então não existem sobrejeções de A em B e, consequentemente, não existem bijeções.

d) ERRADA: Basta que dois elementos de A tenham as mesma imagem e o conjunto imagem da função terá menos de 19 elementos. Observe que a imagem de todas as funções injetoras de A em B possui 19 elementos.

RESPOSTA: C

10. Se f é uma função injetora, então $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.

Vamos usar essa ideia para encontrar $f(a)$.

$f(f(a-2))=-5=f(0)\Rightarrow f(a-2)=0$

$f(a-2)=0=f(1)\Rightarrow a-2=1\Leftrightarrow a=3$

$f(a)=f(3)=6$

RESPOSTA: D

11.

I. F

Retas horizontais cortam o gráfico de f_1 em mais de um ponto, logo f_1 não é injetora e, portanto, não possui inversa.

II. V

O gráfico de f_2 sempre "sobe" para a direita.

III. V

Retas horizontais cortam o gráfico de f_3 em exatamente um ponto, logo a função é bijetora e, consequentemente, também é sobrejetora.

RESPOSTA: C

12.

I. Não é injetora e não é sobrejetora ($\text{Im}_f = \mathbb{R}_+$).

II. É sobrejetora, mas não é injetora.

III. É bijetora

IV. Não é injetora e não é sobrejetora.

RESPOSTA: A

13.

a) INCORRETA, pois no intervalo $[c,0] \subset [a,0]$ a função é decrescente.

b) INCORRETA, pois $f(e) \le f(x)$ para todo $x \in [d,b]$.

c) INCORRETA, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in [c,0]$.

d) CORRETA, pois $\forall x_1 < x_2$ em $[c,e]$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, f é decrescente em $[c,e]$.

e) INCORRETA, pois $f(x_1) > 0 > f(x_2)$.

RESPOSTA: D

14.

I. Se $f(x) + f(-x) = 0$, então f é uma função par. (INCORRETA)

$f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ o que implica que f é ímpar.

II. Se $f(x)$ é uma função constante, então f é função par. (CORRETA)

Seja $f(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}$, então $f(-x) = k = f(x)$, o que implica que f é par.

III. Se $|f(x)| = f(x)$, então $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$. (CORRETA)

$f(x) = |f(x)| \ge 0 \Rightarrow \text{Im}_f \subset \mathbb{R}_+$

IV. Se $|f(x)| = f(x)$, então f é função bijetora. (INCORRETA)

Se $\text{Im}_f \subset \mathbb{R}_+$, então f não é sobrejetora e, consequentemente, não é bijetora.

RESPOSTA: C

15.

I. FALSA

Contra-exemplo: Se $f(x) = x$ que é uma função bijetora, então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$ que não é necessariamente injetora.

II. FALSA

Como não foi afirmado que g é injetora, então podemos supor que existam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, tais que $g(x_1) = g(x_2)$. Aplicando a função f nos dois lados dessa igualdade, temos $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, o que implica que a função $f \circ g$ não é injetora e, consequentemente, não é bijetora.

III. VERDADEIRA

Devemos provar que $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = y$. Como g é sobrejetora, então $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = y$. Como f é bijetora, então existe f^{-1} a função inversa de f. Assim, basta tomar $f(x) = z \Leftrightarrow x = f^{-1}(z)$. Dessa forma, temos $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = y$ e $x = f^{-1}(z)$ tais que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(f^{-1}(z))) = g(z) = y$. Portanto, $g \circ f$ é sobrejetora.

RESPOSTA: D

16.

$$f(x-1)+1 = \frac{f(x-1)-1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}$$

$$f(x+1) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}-1}{\frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}+1} = \frac{-2}{2\cdot f(x-1)} = \frac{-1}{f(x-1)}$$

$$f(x+2) = \frac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1} = \frac{\frac{-1}{f(x-1)}-1}{\frac{-1}{f(x-1)}+1} = \frac{-f(x-1)-1}{f(x-1)-1} =$$

$$f(x+3) = \frac{f(x+2)-1}{f(x+2)+1} = \frac{\frac{-f(x-1)-1}{f(x-1)-1}-1}{\frac{-f(x-1)-1}{f(x-1)-1}+1} = \frac{-2f(x-1)}{-2} = f(x-1)$$

$$f(x+4) = \frac{f(x+3)-1}{f(x+3)+1} = \frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1} = f(x)$$

Logo, a função f é periódica de período 4, o que implica $f(x+4\cdot n) = f(x), \forall n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow f(1007) = f(3+4\cdot 251) = f(3)$.

$$f(1+2) = \frac{-f(1-1)-1}{f(1-1)-1} \Leftrightarrow f(3) = \frac{-f(0)-1}{f(0)-1} = \frac{-4-1}{4-1} = -\frac{5}{3}$$

RESPOSTA: D

17.

I. VERDADEIRA

$f(x_1) \neq f(x_2) \overset{S.P.G.}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Logo, a função f é injetora.

II. FALSA

$-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1) \Rightarrow f(-1) \neq f(1)$

Logo, f não é par.

III. VERDADEIRA

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$
$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) \ e \ x_2 = f^{-1}(f(x_2))$
$\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$
$\Rightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 > y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Logo, f^{-1} é estritamente decrescente.

RESPOSTA: B

18.

I. VERDADEIRA

O conjunto $A = \mathbb{R}^*$ é o domínio da função, que é obtido projetando o gráfico sobre o eixo x.

II. FALSA

f é sobrejetora se $B = \text{Im}_f = [-b,b] -]-e,e[= [-b,-e] \cup [e,b]$

III. VERDADEIRA

$f(x) = -b$, $\forall x \in]-\infty,-b]$, ou seja, para infinitos valores de x.

IV. VERDADEIRA

$f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = b - (-b) + (-b) + b = 2b$

Observe, no gráfico, que c e d são números negativos, enquanto a, b e e são números positivos.

V. FALSA

f não é uma função par, pois seu gráfico não é simétrico em relação ao eixo Oy.

Observe que o gráfico de f é simétrico em relação à origem, ou seja, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$, o que implica que f é uma função ímpar.

VI. FALSA

Basta observar que existe um $x_0 \in]a,b[$ e cuja imagem é $-d$, ou seja, $f(x_0) = -d$.

RESPOSTA: A

19.

f é par $\Leftrightarrow f(-x)=f(x) \Leftrightarrow \dfrac{a(-x)+b}{(-x)+c}=\dfrac{ax+b}{x+c} \Leftrightarrow -ax^2+(b-ac)x+bc=-ax^2-(b-ac)x+bc$

$\Leftrightarrow b-ac=0 \Leftrightarrow b=ac \Rightarrow f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{ax+ac}{x+c}=a$

RESPOSTA: E

20.

$x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2 \geq 0 \Rightarrow f(x_1-x_2) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_1)+f(-x_2) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Logo, f é não decrescente.

De enunciado, temos: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Sendo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(n)=n \cdot f(1)$.

Isso pode ser verificado pelo P.I.F., notando que:

1º) $f(0)=0$

f é ímpar $\Rightarrow f(0)=-f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$

2º) Hip. de Indução: $f(k)=k \cdot f(1), k \in \mathbb{N}$

3º) $f(k+1)=f(k)+f(1)=k \cdot f(1)+f(1)=(k+1)f(1)$

$\Rightarrow g(n)=\dfrac{f(n)-f(1)}{n}=\dfrac{nf(1)-f(1)}{n}=\dfrac{n-1}{n}f(1) \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq f(1)$

RESPOSTA: C

21.

$f(x+\omega)=\dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$

$$f(x+2\omega)=\frac{f(x+\omega)-5}{f(x+\omega)-3}=\frac{\frac{f(x)-5}{f(x)-3}-5}{\frac{f(x)-5}{f(x)-3}-3}=\frac{-4f(x)+10}{-2f(x)+4}=\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}$$

$$f(x+3\omega)=\frac{f(x+2\omega)-5}{f(x+2\omega)-3}=\frac{\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}-5}{\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}-3}=\frac{-3f(x)+5}{-f(x)+1}=\frac{3f(x)-5}{f(x)-1}$$ $$f(x+4\omega)=\frac{f(x+3\omega)-5}{f(x+3\omega)-3}=\frac{\frac{3f(x)-5}{f(x)-1}-5}{\frac{3f(x)-5}{f(x)-1}-3}=\frac{-2f(x)}{-2}=f(x)$$

Logo, a função f é periódica de período 4ω.

RESPOSTA: E

22.

$$f\left(\frac{98}{19}\right)=f\left(6-\frac{16}{19}\right)=f\left(-\frac{16}{19}\right)=f\left(\frac{16}{19}\right)$$

$$f\left(\frac{101}{17}\right)=f\left(6-\frac{1}{17}\right)=f\left(-\frac{1}{17}\right)=f\left(\frac{1}{17}\right)$$

$$f\left(\frac{104}{15}\right)=f\left(6+\frac{14}{15}\right)=f\left(\frac{14}{15}\right)$$

Como f é crescente em $[0,1]$ e $\frac{1}{17}<\frac{16}{19}<\frac{14}{15}$, então: $f\left(\frac{101}{17}\right)<f\left(\frac{98}{19}\right)<f\left(\frac{104}{15}\right)$

RESPOSTA: E