Capítulo 8
Análise combinatória e binômio de Newton

Para pensar

1. Resposta pessoal.

2. Analisando o infográfico, percebemos que a segunda senha mais utilizada é 12345.

3. Com os caracteres %, $ e @, sem repetição, podemos formar as seguintes senhas:

% $ @	@ % $	$ @ %
% @ $	@ $ %	$ % @

Portanto, nessas condições, podemos formar 6 senhas.

Exercícios propostos

1. Pelo princípio multiplicativo, o número n de cubinhos que compõem esse paralelepípedo é dado por:
$n = 4 \cdot 7 \cdot 3 = 84$

2. Pelo princípio multiplicativo, o número n estimado de estrelas no cosmo é dado por:
$n = 10^{11} \cdot 10^{11} = 10^{22}$

3.

1ª colocada	2ª colocada	3ª colocada
12	11	10

Pelo princípio fundamental da contagem, o número n de maneiras diferentes que pode ocorrer a classificação das três primeiras colocadas é dado por:
$n = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1.320$

4. a)

cor	letra	número
4	26	45

Logo, o número de cadeiras destinadas aos espectadores é dado por: $4 \cdot 26 \cdot 45 = 4.680$

5. a)

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
6	6	6	6

Logo, o total de números que podem ser representados é dado por: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.296$

b)

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
6	5	4	3

Logo, o total de números que podem ser representados é dado por: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

6. a)

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
4	5	5	5

Logo, o total de números naturais de quatro algarismos que podemos representar é dado por:
$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

b)

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
4	4	3	2

Logo, o total de números naturais de quatro algarismos que podemos representar é dado por:
$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

7. a) Para que o número seja par, a casa das unidades deve ser ocupada por um algarismo par. Como, entre os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9, apenas o 4 é par, fixamos esse algarismo na última casa, obtendo:

		4
6	6	1

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que o total de números nas condições enunciadas é $6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$

b) Novamente fixamos o algarismo 4 na última casa e, considerando que os algarismos não se repetem, obtemos:

		4
5	4	1

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números nas condições enunciadas é $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$

8. a) Representando as posições dos oito dígitos por um diagrama, temos:

5, 6, 7, 8 ou 9

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
5 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10

Logo, o número máximo possível de linhas antes do acréscimo do nono dígito seria:
$5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5 \cdot 10^7 = 50.000.000$

b) Representando as posições dos nove dígitos por um diagrama, temos:

Apenas o dígito 9

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
1 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10 ·	10

Logo, o número máximo possível de linhas com o acréscimo do nono dígito passou a ser:
$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 10^8 = 100.000.000$

9.

1º bit	2º bit	3º bit	4º bit	5º bit	6º bit	7º bit	8º bit
2	2	2	2	2	2	2	2

Logo, o número máximo de caracteres que podem ser representados é dado por:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$
Alternativa **e**.

10. O número possível n de respostas distintas é dado por:
$n = 5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$
Logo, o diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
Alternativa **a**.

11. a) Sendo t o total de placas que podem ser formadas, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
4	4	4	5	5	5	5

$t = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4^3 \cdot 5^4 = 40.000$

Logo, podem ser formadas 40.000 placas nas condições estabelecidas.

b) Sendo k o total de placas que podem ser formadas, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
4	3	2	5	4	3	2

$k = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2.880$

Logo, podem ser formadas 2.880 placas nas condições estabelecidas.

c) Sendo n o total de placas que podem ser formadas, com quaisquer letras e quaisquer algarismos, inclusive o zero, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
26	26	26	10	10	10	10

$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4 =$
$= 175.760.000$

Sendo m o número de placas que contêm apenas algarismos nulos, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	0	0	0	0
26	26	26	1	1	1	1

$m = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 26^3 = 17.576$

A diferença $n - m$ é a quantidade de placas que podem ser formadas com pelo menos um algarismo não nulo:

$n - m = 175.760.000 - 17.576 = 175.742.424$

12. a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow n(A \cup B) = 18 + 15 - 6$
$\therefore n(A \cup B) = 27$

b) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) \Rightarrow$
$\Rightarrow 28 = 17 + 20 - n(C \cap D)$
$\therefore n(C \cap D) = 9$

13. Sendo A o conjunto das pessoas da amostra que dormem menos de quatro horas por noite e B o conjunto das pessoas da amostra que dormem mais de duas horas por noite, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 80 = 56 + 28 - n(A \cap B)$
$\therefore n(A \cap B) = 4$

Logo, quatro pessoas da amostra dormem mais de duas e menos de quatro horas por noite.

14. I) Sendo n o número de placas que podem ser formadas, sendo as três letras vogais, temos:

1ª letra vogal	2ª letra vogal	3ª letra vogal	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
3	3	3	6	6	6	6

$n = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 34.992$

II) Sendo k o número de placas que podem ser formadas, sendo as três letras consoantes, temos:

1ª letra cons.	2ª letra cons.	3ª letra cons.	1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.
4	4	4	6	6	6	6

$k = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 82.944$

Como o conjunto das placas que satisfazem a condição mencionada no item (I) e o conjunto das placas que satisfazem a condição mencionada no item (II) são disjuntos, a soma $n + k$ é o número de placas distintas que podem ser formadas nas condições estabelecidas:

$n + k = 34.992 + 82.944 = 117.936$

15. Indicando, respectivamente, por H e M o número de homens e mulheres que tocam algum instrumento e por h e m o número de homens e mulheres que não tocam instrumento algum, nos interessa obter a quantidade de duplas do tipo: HM ou Hm ou hM. Assim, pelos princípios multiplicativo e aditivo da contagem, o número n de duplas que podem ser formadas nas condições enunciadas é dado por:

$(H \text{ e } M)$ ou $(H \text{ e } m)$ ou $(h \text{ e } M)$

$n = 12 \cdot 25 + 12 \cdot 35 + 28 \cdot 25 = 1.420$

Outro modo:

Podemos calcular o total de duplas que podem ser formadas com um homem e uma mulher e, desse total, subtrair o número de duplas formadas por um homem e uma mulher que não tocam instrumento algum. Assim, o número n de duplas que podem ser formadas nas condições enunciadas é dado por:

$n = 40 \cdot 60 - 28 \cdot 35 = 1.420$

Alternativa **d**.

16. I) Calculando a quantidade de números de três algarismos, temos:

3, 5, 7 ou 8

centenas	dezenas	unidades
4	5	4

Nas condições enunciadas, temos: $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$

II) Calculando a quantidade de números de quatro algarismos, temos:

1 ou 2

milhares	centenas	dezenas	unidades
2	5	4	3

Nas condições enunciadas, temos: $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$

Como esses conjuntos de 80 e 120 números são disjuntos, o total de números, nas condições enunciadas, é: $80 + 120 = 200$

17. I) Calculando a quantidade de números entre 4.500 e 5.000, temos:

4 — 5, 6 ou 7

milhares	centenas	dezenas	unidades
1	3	4	3

Assim, temos: $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

II) Calculando a quantidade de números maiores que 5.000, temos:

5, 6 ou 7

milhares	centenas	dezenas	unidades
3	5	4	3

Assim, temos: $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$

Como esses conjuntos de 36 e 180 números são disjuntos, o total de números, nas condições enunciadas, é: $36 + 180 = 216$

18. **I)** Com o algarismo zero na última casa (unidades), temos:

0

milhares	centenas	dezenas	unidades
6	5	4	1

Assim, temos: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$

II) Com os algarismos 2 ou 4 na última casa, temos:

2 ou 4

milhares	centenas	dezenas	unidades
5	5	4	2

Assim, temos: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 200$

Como esses conjuntos de 120 e 200 números são disjuntos, o total de números, nas condições enunciadas, é:
$120 + 200 = 320$

19. **a)** Indicando por H e M um homem e uma mulher, genéricos, nos interessam as sequências: HMHMHM ou MHMHMH. Esquematizando os números de possibilidades, temos:

(H e M e H e M e H e M)
$\downarrow$ 3 3 2 2 1 1

ou (M e H e M e H e M e H)
$\downarrow$ 3 3 2 2 1 1

Logo, pelos princípios multiplicativo e aditivo da contagem, o número n de sequências nas condições enunciadas é dado por:
$n = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 72$
Portanto, as 6 pessoas podem ser dispostas na escada em 72 sequências diferentes, de modo que em dois degraus consecutivos quaisquer não fiquem pessoas do mesmo sexo.

b) O número total de sequências em que podem ser dispostas essas 6 pessoas, independentemente de suas posições relativas, é dado por $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Subtraindo desse total o valor de n obtido no item **a**, obtemos o número k de sequências nas condições enunciadas, isto é:
$k = 720 - 72 = 648$
Portanto, as 6 pessoas podem ser dispostas na escada em 648 sequências diferentes, de modo que em pelo menos dois degraus consecutivos fiquem pessoas do mesmo sexo.

20. **a)**

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo
2	2	2	2	2	2	2	2

Logo, o número de sequências de oito algarismos que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1 é dado por: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$.

b)

Apenas o algarismo 1

0	0	0	0	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo
1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	2 ·	2 ·	2 = 8

ou

Apenas o algarismo 1 — Apenas o algarismo 1

1º termo	0	0	0	0	6º termo	7º termo	8º termo
1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	2 ·	2 = 4

ou

Apenas o algarismo 1 — Apenas o algarismo 1

1º termo	2º termo	0	0	0	0	7º termo	8º termo
2 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	2 = 4

ou

Apenas o algarismo 1 — Apenas o algarismo 1

1º termo	2º termo	3º termo	0	0	0	0	8º termo
2 ·	2 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 = 4

ou

Apenas o algarismo 1

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	0	0	0	0
2 ·	2 ·	2 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 = 8

Assim, o número n de sequências que apresentam exatamente quatro posições consecutivas com o algarismo zero é dado por:
$n = 8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28$

c) Podemos considerar 4 casos de sequências que apresentam o algarismo 0 em posições consecutivas:

- exatamente 5 zeros em posições seguidas

Apenas o algarismo 1

0	0	0	0	0	6º termo	7º termo	8º termo
1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	2 ·	2 = 4

ou

Apenas o algarismo 1 — Apenas o algarismo 1

1º termo	0	0	0	0	0	7º termo	8º termo
1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	2 = 2

ou

Apenas o algarismo 1 — Apenas o algarismo 1

1º termo	2º termo	0	0	0	0	0	8º termo
2 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 ·	1 = 2

ou

Apenas o algarismo 1

1º termo	2º termo	3º termo	0	0	0	0	0

$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

- exatamente 6 zeros em posições seguidas

Apenas o algarismo 1

0	0	0	0	0	0	7º termo	8º termo

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$

ou

Apenas o algarismo 1 Apenas o algarismo 1

1º termo	0	0	0	0	0	0	8º termo

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

ou

Apenas o algarismo 1

1º termo	2º termo	0	0	0	0	0	0

$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

- exatamente 7 zeros em posições seguidas

Apenas o algarismo 1

0	0	0	0	0	0	0	8º termo

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

ou

Apenas o algarismo 1

1º termo	0	0	0	0	0	0	0

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

- exatamente 8 zeros em posições seguidas

0	0	0	0	0	0	0	0

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Assim, o número t de sequências que apresentam pelo menos cinco posições consecutivas com o algarismo 0 é dado por:

$t = 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20$

21. a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

c) $4! - 3! = 24 - 6 = 18$

d) $1! + 2! = 1 + 2 = 3$

e) $0! \cdot 3! = 1 \cdot 6 = 6$

f) $\dfrac{4!}{3! + 2!} = \dfrac{24}{6 + 2} = \dfrac{24}{8} = 3$

22. a) F, pois $2! + 3! = 2 + 6 = 8$, e $8 \neq 5!$

b) F, pois $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$, e $12 \neq 6!$

c) V, pois $2 \cdot 3! = (1 + 1) \cdot 3! = 3! + 3!$

d) V, pois, para que exista $(n - 5)!$, devemos ter $(n - 5) \in \mathbb{N}$ e $n - 5 \geqslant 0$, ou seja, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 5$

e) F, pois, para $n = 2$, o número $(n - 4)$ não é natural e, portanto, não existe $(n - 4)!$

f) F, pois, sendo $(n - 5)$ e $(n - 8)$ números naturais, temos $n - 5 > n - 8$ e, portanto, $(n - 5)! > (n - 8)!$

g) V, pois, sendo $(n - 9)$ e $(n - 12)$ números naturais, temos $n - 9 > n - 12$ e, portanto, $(n - 9)! > (n - 12)!$

h) V, pois, como existem todos os fatoriais envolvidos, para $n \geqslant 2$, a igualdade é obtida pela propriedade fundamental dos fatoriais.

i) F, pois, para $n = 0$, não existe pelo menos um dos fatoriais relacionados na igualdade.

23. a) $\dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8 \cdot 7!}{7!} = 8$

b) $\dfrac{7!}{10!} = \dfrac{7!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \dfrac{1}{720}$

c) $\dfrac{6! \cdot 9!}{3! \cdot 11!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 9!}{3! \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!} = \dfrac{12}{11}$

d) $\dfrac{n!}{(n - 1)!} = \dfrac{n \cdot (n - 1)!}{(n - 1)!} = n$

e) $\dfrac{(n - 2)!}{n!} = \dfrac{(n - 2)!}{n(n - 1)(n - 2)!} = \dfrac{1}{n^2 - n}$

f) $\dfrac{(n - 1)!}{(n + 1)!} = \dfrac{(n - 1)!}{(n + 1)\,n\,(n - 1)!} = \dfrac{1}{n^2 + n}$

g) $\dfrac{(n + 3)!}{(n + 1)!} = \dfrac{(n + 3)(n + 2)(n + 1)!}{(n + 1)!} = n^2 + 5n + 6$

h) $\dfrac{(n - 4)!}{(n - 2)!} = \dfrac{(n - 4)!}{(n - 2)(n - 3)(n - 4)!} = \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$

24. $\dfrac{(n + 1)! + n!}{(n + 2)!} = \dfrac{(n + 1) \cdot n! + n!}{(n + 2)(n + 1)n!} = \dfrac{n![n + 1 + 1]}{(n + 2)(n + 1)n!} =$

$= \dfrac{1}{n + 1}$

Alternativa **d**.

25. $(n - 1)! \cdot [(n + 1)! - n!] =$

$= (n - 1)! \cdot [(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)! - n \cdot (n - 1)!] =$

$= (n - 1)! \cdot (n - 1)! \cdot [(n + 1) \cdot n - n] =$

$= [(n - 1)!]^2 \cdot n^2 = [(n - 1)! \cdot n]^2 = (n!)^2$

Alternativa **d**.

26. Multiplicando e dividindo ao mesmo tempo o segundo membro da igualdade por 6!, ela se mantém; logo:

$x = \dfrac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 20}{6!} = \dfrac{20!}{6!}$

Alternativa **b**.

27. a) $\dfrac{(n + 7)!}{(n + 6)!} = 15 \Rightarrow \dfrac{(n + 7)\cancel{(n + 6)!}}{\cancel{(n + 6)!}} = 15$

$\therefore\ n + 7 = 15 \Rightarrow n = 8$

Como, para $n = 8$, existem todos os fatoriais relacionados na equação proposta, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{8\}$.

b) $\dfrac{(n-6)!}{(n-5)!} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow \dfrac{\cancel{(n-6)!}}{(n-5)\cancel{(n-6)!}} = \dfrac{1}{32}$

$\therefore\ n - 5 = 32 \Rightarrow n = 37$

Como, para $n = 37$, existem todos os fatoriais relacionados na equação proposta, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{37\}$.

c) $\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!} = 6 \Rightarrow \dfrac{(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} = 6$

$\therefore\ n^2 - 5n + 6 = 6 \Rightarrow n^2 - 5n = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 0$ ou $n = 5$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 5 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{5\}$.

d) $\dfrac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \dfrac{(n+1)n! + n!}{(n+2)(n+1)n!} = \dfrac{1}{9}$

$\therefore\ \dfrac{\cancel{n!}(n+1+1)}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \dfrac{\cancel{n+2}}{\cancel{(n+2)}(n+1)} = \dfrac{1}{9}$

$\therefore\ n + 1 = 9 \Rightarrow n = 8$

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para $n = 8$, concluímos que 8 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{8\}$.

28. $(n + 4)! + (n + 3)! = 15(n + 2)! \Rightarrow$

$\Rightarrow (n + 4)(n + 3)(n + 2)! + (n + 3)(n + 2)! = 15(n + 2)!$

Podemos dividir ambos os membros dessa igualdade por $(n + 2)!$, pois essa expressão representa um número diferente de zero; assim, obtemos:

$(n + 4)(n + 3) + n + 3 = 15 \Rightarrow n^2 + 8n = 0$

$\therefore\ n(n + 8) = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $n = -8$

Verificação:

- Para $n = 0$, existem todos os fatoriais presentes na equação.
- Para $n = -8$, não existe pelo menos um fatorial presente na equação.

Assim, $S = \{0\}$.

Alternativa **e**.

29. Decompondo em fatores primos o número 40.320, temos:

$$\begin{array}{r|l} 40.320 & 2 \\ 20.160 & 2 \\ 10.080 & 2 \\ 5.040 & 2 \\ 2.520 & 2 \\ 1.260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, acrescentando o fator 1 aos fatores primos do número 40.320, podemos escrever:

$40.320 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$

Alternativa **c**.

30. Acrescentando o fator 1 ao segundo membro da igualdade, temos:

$n! = 1 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (5 \cdot 2) =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$

$\therefore\ n = 10$

31. Inicialmente calculamos o total de números que podem ser lidos no hodômetro, podendo haver repetição de algarismos.

10	10	10	10	10	10	10	10

Então, temos:

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$

A seguir, calculamos o total de números que podem ser lidos no hodômetro, sem repetição de algarismos.

10	9	8	7	6	5	4	3

Então, temos:

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \dfrac{10!}{2}$

Logo, a diferença $10^8 - \dfrac{10!}{2}$ é o resultado procurado.

Alternativa **a**.

32. a) Os seis números escolhidos formam uma combinação, pois, qualquer que seja a ordem de escolha, a aposta é a mesma.

b) Os quatro primeiros colocados no campeonato brasileiro de futebol formam um arranjo, pois a ordem das colocações altera a classificação.

c) As duas cores de tinta misturadas formam uma combinação, pois a ordem na mistura não altera a nova cor.

d) Os oito dígitos distintos formam um arranjo, pois a ordem deles altera o número de telefone.

e) Os dois alunos associados aos respectivos cargos formam um arranjo, pois a ordem dos cargos (porta-voz e secretário), associados ao par (aluno 1, aluno 2) altera a comissão.

f) A escolha de três vértices de um cubo formam uma combinação, pois a ordem de escolha desses vértices não altera o triângulo formado.

g) As três letras formam um arranjo, pois a ordem delas altera a palavra formada.

33. a)

1º elemento	2º elemento	3º elemento
6	5	4

Assim, temos: $A_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

b)

1º elemento	2º elemento
10	9

Assim, temos: $A_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$

c)

1º elem.	2º elem.	3º elem.	4º elem.	5º elem.	6º elem.	7º elem.
7	6	5	4	3	2	1

Assim, temos: $A_{7,\,7} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

34. a) $A_{10,\,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

b) $A_{6,\,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$

c) $A_{8,\,4} = \dfrac{8!}{(8-4)!} = \dfrac{8!}{4!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1.680$

35. O número de maneiras diferentes de distribuir os dez hóspedes nos quartos é igual ao número de sequências de dez elementos distintos que podem ser formadas com vinte elementos distintos, ou seja: $A_{20,\,10}$
Alternativa **d**.

36. O número de maneiras diferentes de distribuir as medalhas é igual ao número de sequências de três elementos distintos que podem ser formadas com n elementos distintos, ou seja: $A_{n,\,3}$
Alternativa **a**.

37. a) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$A_{n,\,2} = 20 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = 20$

$\therefore \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0$

$\therefore n = 5$ ou $n = -4$

Apenas o número 5 satisfaz a condição de existência; logo, S = {5}.

b) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$

$A_{n,\,2} = 14 + A_{n-2,\,2} \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = 14 + \dfrac{(n-2)!}{(n-4)!}$

$\therefore \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 14 + \dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1) = 14 + (n-2)(n-3)$

$\therefore 4n = 20 \Rightarrow n = 5$

Como o número 5 satisfaz a condição de existência, concluímos que S = {5}.

c) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

$A_{n,\,3} = 3(n-1) \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} = 3(n-1)$

$\therefore \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 3(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 3(n-1)$

$\therefore n(n-1)(n-2) - 3(n-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-1)[n(n-2) - 3] = 0$

$\therefore (n-1)[n^2 - 2n - 3] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 0$ ou $n^2 - 2n - 3 = 0$

$\therefore n = 1$ ou $n = 3$ ou $n = -1$

Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência; logo, S = {3}.

38. O total de sequências de 6 termos que podem ser formadas com os elementos de A é $A_{n,\,6}$.
Subtraindo desse total o número de sequências de 6 números pares formadas com os elementos de A, obtemos: $A_{n,\,6} - A_{n-5,\,6}$, que é o resultado pedido.
Alternativa **e**.

39. **I)** A cada dupla escolhida é estabelecida a ordem (pergunta, resposta); assim, o número k de perguntas é o número de arranjos simples das n pessoas tomadas duas a duas, isto é, $A_{n,\,2} = k$.
Alternativa **b**.

II) Substituindo k por $10n$ na equação obtida no item I, temos:
$A_{n,\,2} = 10n$
Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$A_{n,\,2} = 10n \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = 10n$

$\therefore \dfrac{n!}{(n-2)!} = 10n \Rightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 10n$

$n^2 - 11n = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $n = 11$

Apenas o número 11 satisfaz a condição de existência; logo $n = 11$.

40. Em cada mês, o número de sequências diferentes em que as empresas podem ser visitadas é o número de permutações de cinco elementos distintos, isto é, $P_5 = 5! = 120$.
Alternativa **b**.

41. O número de filas indianas formadas pelas n pessoas é o número de permutações de n elementos distintos; portanto:

$n! = 720$

Decompondo em fatores primos o número 720, obtemos:

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Acrescentando o fator 1 aos fatores obtidos e agrupando-os de modo que formem uma sequência de números naturais consecutivos, chegamos a:
$720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$
$\therefore n = 6$

42.

1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	6º dia	7º dia
3	2	1	4	3	2	1

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 4!$

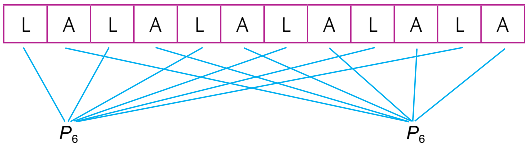
Alternativa **d**.

43. Considerando um único elemento cada equipe de nadadores (N), tenistas (T) e iatistas (I), há P_3 possibilidades de formação para essa fila de atletas: NTI, NIT, INT, ITN, TIN e TNI. Para cada uma dessas possibilidades, podemos permutar entre si os elementos de uma mesma equipe.
Assim, considerando a primeira possibilidade NTI, temos:

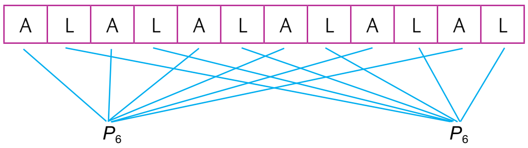
$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square}_{\substack{\text{nadadores}\\ P_4}}\ \underbrace{\square\,\square\,\square}_{\substack{\text{tenistas}\\ P_3}}\ \underbrace{\square\,\square}_{\substack{\text{iatistas}\\ P_2}}$$

Como esse resultado é obtido para cada uma das possibilidades, concluímos que o número n de sequências diferentes com que a fila de atletas pode ser formada, nas condições estabelecidas, é dado por:
$n = P_3 \cdot (P_4 \cdot P_3 \cdot P_2) = 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1.728$

44. Indicando por A e L um algarismo e uma letra quaisquer, respectivamente, temos:



ou



Logo, o número n possível de chaves de instalação é dado por:

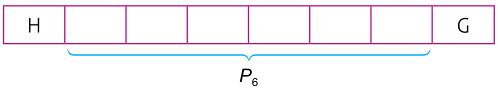
$n = P_6 \cdot P_6 + P_6 \cdot P_6 = 2(P_6)^2 = 2 \cdot (6!)^2$

Alternativa **e**.

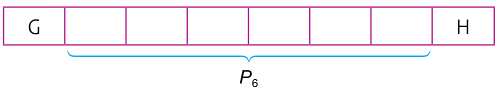
45. Indicando por M, F, Q, H, G, B, P e I os livros de Matemátiva, Física, Química, História, Geografia, Biologia, Português e Inglês, respectivamente, temos:

a) O número de sequências diferentes que podem ser formadas é $P_8 = 8! = 40.320$

b)



ou



Logo, o número n de sequências que apresentam os livros de História e Geografia nos extremos é dado por:

$n = P_6 + P_6 = 6! + 6! = 1.440$

c) Considerando o bloco MFQ um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos seis elementos MFQ, H, G, B, P, I é dado por:

$P_6 = 6! = 720$

Logo, existem 720 sequências possíveis dos livros, nas condições enunciadas.

d) Nesse caso, um bloco composto de M, F, Q pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: MFQ, MQF, FMQ, FQM, QFM e QMF. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_6 = 6! = 720$ sequências diferentes de livros, conforme vimos no item **c**.

Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 720 = 4.320$ sequências, ou seja, o número de sequências diferentes de livros que podem ser formadas, nas condições enunciadas, é dado por:

$P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$

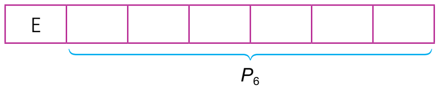
e) Esse número é a diferença entre os resultados obtidos nos itens **a** e **d**, isto é:

$P_8 - P_3 \cdot P_6 = 40.320 - 4.320 = 36.000$

46. a) O número de anagramas da palavra FUTEBOL é igual ao número de permutações simples de 7 letras distintas, isto é:

$P_7 = 7! = 5.040$

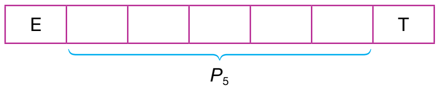
b) Fixando a letra E na primeira posição, sobram 6 letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores:



$P_6 = 6! = 720$

Logo, há 720 anagramas que começam por E.

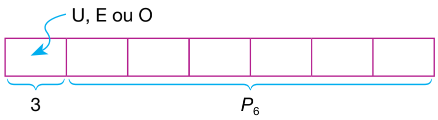
c) Fixando a letra E na primeira posição e a letra T na última, sobram 5 letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias:



$P_5 = 5! = 120$

Portanto, há 120 anagramas que começam por E e terminam por T.

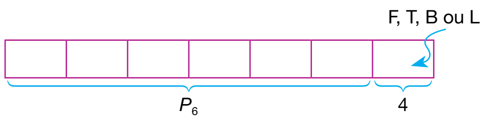
d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira casa: U, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores:



$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot 720 = 2.160$

Assim, há 2.160 anagramas que começam por vogal.

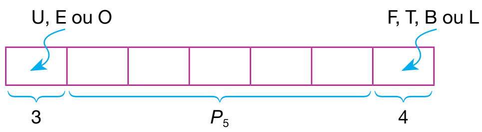
e) Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) casa: F, T, B ou L. Para cada consoante fixada na última posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições anteriores:



$P_6 \cdot 4 = 6! \cdot 4 = 720 \cdot 4 = 2.880$

Assim, há 2.880 anagramas que terminam por consoante.

f) Há 3 possibilidades para o preenchimento da primeira posição e 4 possibilidades para o da última (sétima). Fixadas uma vogal na primeira posição e uma consoante na última, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:



$3 \cdot P_5 \cdot 4 = 3 \cdot 5! \cdot 4 = 3 \cdot 120 \cdot 4 = 1.440$

Há, portanto, 1.440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g) Considerando o bloco EOU um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos cinco elementos EOU, F, T, B e L é dado por:

$P_5 = 5! = 120$

Logo, existem 120 anagramas com as vogais em ordem alfabética.

h) Nesse caso, um bloco composto de E, O, U pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: EOU, EUO, OEU, OUE, UEO e UOE. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme vimos no item **g**. Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas, ou seja, o número de anagramas diferentes que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:

$P_3 \cdot P_5 = 3! \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

i) Esse número é a diferença entre os resultados obtidos nos itens **a** e **h**, isto é:

$P_7 - P_3 \cdot P_5 = 5.040 - 720 = 4.320$

47. O número de anagramas que apresentam o G antes do D é igual ao número de anagramas que apresentam o D antes do G. Logo, o total n de anagramas que apresentam essas letras em ordem alfabética é dado por:

$$n = \frac{P_5}{2} = \frac{5!}{2} = 60$$

48. **a)** $P_6^{(2)} = \dfrac{6!}{2!} = 360$

Logo, há 360 anagramas da palavra CAMISA.

b) $P_7^{(3)} = \dfrac{7!}{3!} = 840$

Logo, há 840 anagramas da palavra ENFEITE.

c) $P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Logo, há 420 anagramas da palavra SOSSEGO.

d) $P_9^{(4,\,2)} = \dfrac{9!}{4! \cdot 2!} = 7.560$

Logo, há 7.560 anagramas da palavra ASSESSORA.

49. **a)** $P_6^{(3)} = \dfrac{6!}{3!} = 120$

Logo, o número de anagramas da palavra AVARIA é 120.

b)

A	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	6ª letra

1 $\quad P_5^{(2)}$

Logo, o número de anagramas da palavra AVARIA que começam pela letra A é dado por:

$$1 \cdot P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$$

c)

A	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	6ª letra

1 $\quad P_5^{(2)}$

ou

I	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	6ª letra

1 $\quad P_5^{(3)}$

Logo, o número de anagramas da palavra AVARIA que começam por vogal é dado por:

$$1 \cdot P_5^{(2)} + 1 \cdot P_5^{(3)} = \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} = 60 + 20 = 80$$

d)

V ou R	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	6ª letra

2 $\quad P_5^{(3)}$

Logo, o número de anagramas da palavra AVARIA que começam por consoante é dado por:

$$2 \cdot P_5^{(3)} = 2 \cdot \frac{5!}{3!} = 40$$

e)

A	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	V ou R

1 $\quad P_4^{(2)} \quad$ 2

ou

I	2ª letra	3ª letra	4ª letra	5ª letra	V ou R

1 $\quad P_4^{(3)} \quad$ 2

Logo, o número de anagramas da palavra AVARIA que começam por vogal e terminam por consoante é dado por:

$1 \cdot P_4^{(2)} \cdot 2 + 1 \cdot P_4^{(3)} \cdot 2 =$

$= \dfrac{4!}{2!} \cdot 2 + \dfrac{4!}{3!} \cdot 2 =$

$= 24 + 8 = 32$

f) Considerando o bloco RV um único elemento, devemos calcular o número de permutações dos 5 elementos: RV, A, A, A, I. Assim, temos:

$$P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$$

Logo, o número de anagramas da palavra AVARIA que apresentam as consoantes juntas e em ordem alfabética é 20.

g) Basta considerar a permutação das letras R e V do resultado do item anterior, isto é:

$$P_2 \cdot P_5^{(3)} = 2! \cdot \frac{5!}{3!} = 40$$

Assim, o número de anagramas da palavra AVARIA que apresentam as consoantes juntas em qualquer ordem é 40.

50. O número 1.125 é o produto dos fatores 5, 5, 5, 3 e 3, em qualquer ordem.

Logo, o número n de sequências diferentes de teclas que podem ser digitadas é o número de permutações desses fatores:

$$n = P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Alternativa **d**.

51. **a)** O número n de sequências, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos C, C, C, K e K, ou seja:

$$n = P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

b) Interessam sequências:

- com três caras e duas coroas, cujo total já foi calculado no item **a**;
- com quatro caras e uma coroa, cujo total é dado por $P_5^{(4)} = \dfrac{5!}{4!} = 5$.
- com 5 caras; nesse caso, existe uma única possibilidade.

Assim, concluímos que o total k de sequências nas condições estabelecidas é dado por:

$k = P_5^{(3,\,2)} + P_5^{(4)} + 1 = 10 + 5 + 1 = 16$

c) Vamos calcular, inicialmente, o número p de resultados possíveis do experimento:

1º lance	2º lance	3º lance	4º lance	5º lance
2	2	2	2	2

Logo, $p = 2^5 = 32$

Desses 32 resultados possíveis, apenas o resultado KKKKK não apresenta a face C; logo, há 31 resultados possíveis com pelo menos uma cara.

52. Indicaremos por N e L cada quilômetro percorrido para o norte e para o leste, respectivamente.

a) Para ir de O a A, nas condições estabelecidas, Pedro deve percorrer 4 km para o norte e 5 km para o leste. Assim, o total de caminhos que Pedro pode percorrer é o número de permutações dos elementos N, N, N, N, L, L, L, L e L, ou seja:

$$P_9^{(4,\,5)} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$$

Logo, há 126 caminhos possíveis que Pedro pode percorrer.

b) (I) Para ir de O a C, Luís deve percorrer 3 km para o norte e 4 km para o leste. Assim, o número de caminhos que podem ser percorridos de O a C, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos N, N, N, L, L, L e L, ou seja:

$$P_7^{(3,\,4)} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

(II) Para ir de C a B, Luís deve percorrer 2 km para o norte e 2 km para o leste. Assim, o número de caminhos que podem ser percorridos de C a B, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos N, N, L e L, ou seja:

$$P_4^{(2,\,2)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

(III) Por (I) e (II), temos:

Ir de O a B	Ir de B a C
35	6

Logo, o número n de caminhos que Luís pode percorrer de O a B, passando por C, é dado por:

$n = 35 \cdot 6 = 210$

53. Indicando por n o número de bolas pretas, temos:

$$P_{n+2}^{(2,\,n)} = 21 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!} = 21$$

$$\therefore \frac{(n+2)(n+1)}{2} = 21 \Rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 5$ ou $n = -8$ (não convém).

Logo, a urna contém exatamente 5 bolas pretas.

54. $P_n^{(3,\,n-3)} = 2n \Rightarrow \dfrac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = 2n$

Condição de existência $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = 2n$$

Como $n \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por n, obtendo:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} = 2 \Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0$$

$\therefore\ n = 5$ ou $n = -2$

Apenas o valor 5 satisfaz a condição de existência. Logo, $n = 5$.

55. a) $C_{7,\,3} = \dfrac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

b) $C_{7,\,4} = \dfrac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$

c) $C_{8,\,5} = \dfrac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

d) $C_{8,\,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

56. a) Inicialmente, calculamos o número de sequências de 3 elementos distintos escolhidos entre 5 elementos distintos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Nesse cálculo, a ordem dos elementos foi considerada. Para desconsiderar a ordem, basta dividir o resultado pelo fatorial de 3, obtendo o número de combinações, isto é:

$$C_{5,\,3} = \frac{60}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

b) Inicialmente, calculamos o número de sequências de 4 elementos distintos escolhidos entre 6 elementos distintos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Nesse cálculo, a ordem dos elementos foi considerada. Para desconsiderar a ordem, basta dividir o resultado pelo fatorial de 4, obtendo o número de combinações, isto é:

$$C_{6,\,4} = \frac{360}{4!} = \frac{360}{24} = 15$$

57. $C_{10,\,2} = \dfrac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = 45$

Logo, o campeonato é composto de 45 jogos.

58. $C_{7,\,4} = \dfrac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = 35$

Logo, a comissão pode ser formada de 35 modos diferentes.

59. a) A ordem dos dois pontos escolhidos não altera a reta determinada; por exemplo, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$. Logo, o número de retas que podem ser determinadas é dado por:

$$C_{7,\,2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = 21$$

b) Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices) não colineares. Como não existem três pontos colineares entre os pontos A, B, C, D, E, F e G, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo.

A ordem dos três pontos escolhidos não altera o triângulo formado e, portanto, o número de triângulos com vértices em três pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por:

$$C_{7,\,3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 35$$

c) Raciocinando de modo análogo ao do item **b**, concluímos que o número de quadriláteros convexos com vértices em quatro pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por:

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = 35$$

d) Raciocinando de modo análogo ao do item **b**, concluímos que o número de pentágonos convexos com vértices em cinco pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por:

$C_{7,5} = \dfrac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = 21$

e) Fixado o ponto A como um dos vértices, os demais devem ser escolhidos entre os seis pontos restantes. Logo, o número de pentágonos convexos que têm A como um dos vértices é dado por:

$C_{6,4} = \dfrac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = 15$

f) Fixado o lado $\overline{AB}$, estarão fixados os vértices A e B; logo, falta escolher três vértices entre os pontos C, D, E, F e G. Portanto, o número de pentágonos convexos que têm $\overline{AB}$ como um dos lados é dado por:

$C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$

60. a) A ordem dos dois pontos escolhidos não altera o segmento formado; por exemplo, $\overline{AB} = \overline{BA}$. Logo, o número de segmentos que podem ser formados é dado por:

$C_{7,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = 21$

b) Uma diagonal do heptágono é qualquer segmento com extremos em dois vértices não consecutivos do polígono. Assim, o número d de diagonais pode ser calculado subtraindo-se o número de lados do resultado obtido no item **a**, isto é:

$d = C_{7,2} - 7 = 21 - 7 = 14$

61. Em um polígono de 10 vértices, o número de segmentos que podem ser formados com extremidades nesses vértices, é dado por:

$C_{10,2} = \dfrac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

Assim, o número d de diagonais desse polígono pode ser obtido subtraindo, do número total de segmentos possíveis, o número de lados:

$d = C_{10,2} - 10 = 45 - 10 = 35$

Logo, esse polígono possui 35 diagonais.

62. Como as questões sobre logaritmo e função quadrática devem fazer parte da prova, o professor deve escolher as outras três questões entre as seis questões disponíveis. O número de escolhas possíveis é dado por:

$C_{6,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

Logo, o professor pode escolher as questões de 20 maneiras diferentes.

63. Sendo $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{10}$ os dez cientistas, em que c_1 e c_2 são marido e mulher, o grupo escolhido pode ser formado por:

- c_1, c_2 e mais quatro cientistas escolhidos entre os oito restantes, ou
- seis cientistas escolhidos entre os oito cientistas $c_3, c_4, c_5, \dots, c_{10}$.

Logo, o número n de formações distintas que pode ter o grupo escolhido é dado por:

$n = C_{8,4} + C_{8,6} = 70 + 28 = 98$

64. Sendo $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_9$ as nove comissárias, em que c_1 e c_2 são irmãs, o grupo escalado pode ser formado por:

- c_1 e mais três comissárias escolhidas entre as sete comissárias $c_3, c_4, c_5, \dots, c_9$ ou
- c_2 e mais três comissárias escolhidas entre as sete comissárias $c_3, c_4, c_5, \dots, c_9$ ou
- quatro comissárias escolhidas entre as sete comissárias $c_3, c_4, c_5, \dots, c_9$.

Logo, o número n de formações distintas que pode ter o grupo escalado é dado por:

$n = 2 \cdot C_{7,3} + C_{7,4} = 2 \cdot 35 + 35 = 105$

65. Além de José e Anita, sejam $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_8$ as outras oito pessoas do grupo:

a) O número n de formações possíveis do júri contendo José, Anita e mais cinco pessoas escolhidas entre as oito pessoas $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_8$ é dado por:

$n = C_{8,5} = 56$

b) O número de formações possíveis do júri, não contendo José nem Anita, é o número k de escolhas de sete pessoas entre as oito pessoas $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_8$, que é dado por:

$k = C_{8,7} = 8$

c) O número m de formações possíveis do júri contendo Anita e mais seis pessoas escolhidas entre as oito pessoas $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_8$ é dado por:

$m = C_{8,6} = 28$

66. a) O número de comissões de quatro alunos que podem ser formadas com os sete candidatos é $C_{7,4} = 35$.

b) O número de comissões de quatro alunos que podem ser formadas com os sete candidatos de modo que Cláudio participe de todas é $C_{6,3} = 20$.

c) O número de comissões de quatro alunos escolhidos entre os sete candidatos de modo que Cláudio não participe de nenhuma é $C_{6,4} = 15$.

67. $C_{5,2} \cdot C_{6,3} = 10 \cdot 20 = 200$

Logo, a equipe pode ser formada de 200 maneiras diferentes.

68. $C_{4,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{6,3} = 4 \cdot 10 \cdot 20 = 800$

Concluímos, então, que o número de equipes que podem ser formadas é 800.

Alternativa **d**.

69. a) Vamos resolver este item de dois modos:

1º modo

Uma reta fica determinada por dois pontos distintos; logo, qualquer combinação desses dez pontos tomados dois a dois determina uma reta. Porém, entre essas combinações há retas coincidentes; por exemplo: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, o cálculo do número de retas distintas pode ser feito subtraindo de todas as combinações dos dez pontos dois a dois as combinações dos pontos colineares dois a dois e adicionando 2, que são as próprias retas r e s, isto é:

$$C_{10,2} - \underbrace{C_{6,2}}_{\text{combinações de pontos de } r} - \underbrace{C_{4,2}}_{\text{combinações de pontos de } s} + \underbrace{2}_{\text{retas } r \text{ e } s} =$$

$= 45 - 15 - 6 + 2 = 26$

2º modo

Além das retas r e s, uma reta fica determinada por um dos seis pontos destacados em r e um dos quatro pontos destacados em s. Assim, o número de retas, nas condições enunciadas, é dado por:

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r \text{ e } s}} + \underbrace{C_{6,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } r}} \cdot \underbrace{C_{4,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } s}} =$$

$= 2 + 6 \cdot 4 = 26$

b) Um triângulo fica determinado por três pontos não colineares. Assim, algumas das combinações dos dez pontos tomados três a três determinam triângulos; outras não. Por exemplo, a combinação ABG determina um triângulo, enquanto a combinação ABC não determina um triângulo. Podemos resolver esse item de dois modos:

1º modo

O número de triângulos é a diferença entre o número de combinações dos dez pontos três a três e o total de combinações dos pontos colineares três a três, isto é:

$$C_{10,3} - \underbrace{C_{6,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos de } r}} - \underbrace{C_{4,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } s}}$$

$= 120 - 20 - 4 = 96$

2º modo

Um triângulo estará determinado se escolhermos dois pontos em uma das retas e um ponto na outra.

- 2 pontos em r e um ponto em s:
  $C_{6,2} \cdot C_{4,1} = 15 \cdot 4 = 60$
  ou
- 1 ponto em r e dois pontos em s:
  $C_{6,1} \cdot C_{4,2} = 6 \cdot 6 = 36$

Logo, o número de triângulos é $60 + 36 = 96$.

c) Um triângulo com vértice H pode ter:

- os outros dois vértices em r:
  $C_{6,2} = 15$
  ou
- um vértice em r e o outro em s:
  $C_{6,1} \cdot C_{3,1} = 6 \cdot 3 = 18$
  Assim, o número de triângulos com vértice H é dado por:
  $15 + 18 = 33$

d) O número de possibilidades de escolher dois pontos em r e um ponto em s, é dado por:

$C_{6,2} \cdot C_{4,1} = 15 \cdot 4 = 60$

Logo, há 60 triângulos com um dos lados contido em r.

e) Um quadrilátero convexo fica determinado por dois pontos escolhidos em r e dois pontos em s. Assim, o número de quadriláteros convexos é dado por:

$C_{6,2} \cdot C_{4,2} = 15 \cdot 6 = 90$

70. Um paralelogramo será determinado por quatro pontos obtidos com a intersecção de dois pares de retas paralelas.

Assim, é necessário escolhermos duas retas distintas em um dos feixes de paralelas e duas retas distintas em outro feixe de paralelas. Logo, o número de paralelogramos determinados é dado por:

$C_{5,2} \cdot C_{6,2} = 10 \cdot 15 = 150$

71. Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$C_{n,2} + C_{n+1,3} = 6n \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + \frac{(n+1)!}{3! \cdot (n-2)!} = 6n$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{6(n-2)!} = 6n$$

Como $n \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por n, obtendo:

$$\frac{n-1}{2} + \frac{(n+1)(n-1)}{6} = 6 \Rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$$

$\therefore n = 5$ ou $n = -8$

Apenas o número 5 satisfaz a condição de existência. Logo, $S = \{5\}$.

72. Indicando por n o número de jogadores, temos:

Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$C_{n,2} = 78 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 78$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 78 \Rightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

$\therefore n = 13$ ou $n = -12$

Apenas o número 13 satisfaz a condição de existência. Logo, o número de jogadores era 13.

Alternativa **d**.

73. Indicando por n o número de capitais que existiam inicialmente nesse país, temos:

Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$C_{n+2,2} = C_{n,2} + 21 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + 21$$

$$\therefore \frac{(n+2)(n+1)n!}{2n!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + 21 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 + 3n + 2 = n^2 - n + 42$

$\therefore 4n = 40 \Rightarrow n = 10$

Como o número 10 satisfaz a condição de existência, concluímos que, inicialmente, existiam 10 capitais nesse país.

74. Para que o produto de três números inteiros seja par, pelo menos um deles deve ser par.

Assim, podemos raciocinar da seguinte maneira: sendo n_1 o número de maneiras de escolher três números inteiros distintos no intervalo considerado e n_2 o número de maneiras de escolher três números inteiros ímpares distintos nesse intervalo, o número n de maneiras de escolher três números distintos tal que pelo menos um deles seja par é dado por $n = n_1 - n_2$. Como existem 21 números inteiros nesse intervalo, temos:

$n_1 = C_{21,3} = 1.330$

Como nesse intervalo há 10 números são ímpares, temos:

$n_2 = C_{10,3} = 120$

Portanto, o número de possibilidades é dado por:

$n = n_1 - n_2 = 1.330 - 120 = 1.210$

Logo, a escolha de três números inteiros distintos no intervalo $10 \leqslant x \leqslant 30$, tal que o produto deles seja par, pode ser feita de 1.210 maneiras diferentes.

75. Podem ocorrer as seguintes possibilidades:

- resolver de maneira correta 4 questões da 1ª parte, 3 questões da 2ª e 3 questões da 3ª:

$$\underbrace{\boxed{\text{1ª parte}}}_{C_{5,4}} \cdot \underbrace{\boxed{\text{2ª parte}}}_{C_{5,3}} \cdot \underbrace{\boxed{\text{3ª parte}}}_{C_{5,3}}$$

- resolver de maneira correta 3 questões da 1ª parte, 4 questões da 2ª e 3 questões da 3ª:

1ª parte	2ª parte	3ª parte
$C_{5,\,3}$ ·	$C_{5,\,4}$ ·	$C_{5,\,3}$

- resolver de maneira correta 3 questões da 1ª parte, 3 questões da 2ª e 4 questões da 3ª:

1ª parte	2ª parte	3ª parte
$C_{5,\,3}$ ·	$C_{5,\,3}$ ·	$C_{5,\,4}$

Logo, o número de maneiras diferentes com que podemos alcançar 10 pontos nessa prova é dado por:

$C_{5,\,4} \cdot C_{5,\,3} \cdot C_{5,\,3} + C_{5,\,3} \cdot C_{5,\,4} \cdot C_{5,\,3} + C_{5,\,3} \cdot C_{5,\,3} \cdot C_{5,\,4} =$
$= 5 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 5 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \cdot 5 =$
$= 500 + 500 + 500 = 1.500$

76. a) $C_{4,\,2} \cdot C_{4,\,3} = 6 \cdot 4 = 24$

Logo, podem ser formados exatamente 24 *full hands* com um par de ases e uma trinca de 3.

b) $C_{4,\,2} \cdot 12 \cdot C_{4,\,3} = 6 \cdot 12 \cdot 4 = 288$

Logo, podem ser formados exatamente 288 *full hands* com um par de ases.

c) $13 \cdot C_{4,\,2} \cdot 12 \cdot C_{4,\,3} = 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4 = 3.744$

Logo, podem ser formados exatamente 3.744 *full hands*.

77. a) $(x + a)^3 = \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 + \binom{3}{3}x^0a^3 =$
$= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

b) $(x + 1)^6 = \binom{6}{0}x^6 \cdot 1^0 + \binom{6}{1}x^5 \cdot 1^1 + \binom{6}{2}x^4 \cdot 1^2 +$
$+ \binom{6}{3}x^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4}x^2 \cdot 1^4 + \binom{6}{5}x^1 \cdot 1^5 + \binom{6}{6}x^0 \cdot 1^6 =$
$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

c) $(2x - 1)^5 = [2x + (-1)]^5 =$
$= \binom{5}{0}(2x)^5 \cdot (-1)^0 + \binom{5}{1}(2x)^4 \cdot (-1)^1 +$
$+ \binom{5}{2}(2x)^3 \cdot (-1)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2 \cdot (-1)^3 +$
$+ \binom{5}{4}(2x)^1 \cdot (-1)^4 + \binom{5}{5}(2x)^0 \cdot (-1)^5 =$
$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$

d) $(y^2 - 2x)^4 = [y^2 + (-2x)]^4 =$
$= \binom{4}{0}(y^2)^4(-2x)^0 + \binom{4}{1}(y^2)^3(-2x)^1 +$
$+ \binom{4}{2}(y^2)^2(-2x)^2 + \binom{4}{3}(y^2)^1(-2x)^3 + \binom{4}{4}(y^2)^0(-2x)^4 =$
$= y^8 - 8y^6x + 24y^4x^2 - 32y^2x^3 + 16x^4$

78. a) $E = \binom{3}{0} \cdot 2^0 \cdot 4^3 + \binom{3}{1} \cdot 2^1 \cdot 4^2 + \binom{3}{2} \cdot 2^2 \cdot 4^1 +$
$+ \binom{3}{3} \cdot 2^3 \cdot 4^0$
$\therefore E = (2 + 4)^3 = 216$

b) $F = \binom{5}{0} \cdot 2^0 \cdot (-3)^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^1 \cdot (-3)^4 +$
$+ \binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot (-3)^3 + \binom{5}{3} \cdot 2^3 \cdot (-3)^2 +$
$+ \binom{5}{4} \cdot 2^4 \cdot (-3)^1 + \binom{5}{5} \cdot 2^5 \cdot (-3)^0 = (2 - 3)^5$
$\therefore F = (-1)^5 = -1$

c) $G = \binom{5}{0} \cdot 3^0 + \binom{5}{1} \cdot 3^1 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot 3^3 +$
$+ \binom{5}{4} \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 3^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow G = \binom{5}{0} \cdot 3^0 \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot 3^1 \cdot 1^4 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 1^3 +$
$+ \binom{5}{3} \cdot 3^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{4} \cdot 3^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{5} \cdot 3^5 \cdot 1^0$
$\therefore G = (3 + 1)^5 = 1.024$

d) $H = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow H = \binom{6}{0} \cdot 1^0 \cdot 1^6 + \binom{6}{1} \cdot 1^1 \cdot 1^5 + \binom{6}{2} \cdot 1^2 \cdot 1^4 +$
$+ \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot 1^3 + \binom{6}{4} \cdot 1^4 \cdot 1^2 + \binom{6}{5} \cdot 1^5 \cdot 1^1 +$
$+ \binom{6}{6} \cdot 1^6 \cdot 1^0$
$\therefore H = (1 + 1)^6 = 2^6 = 64$

79. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = -32 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 4 \\ (x + y)^5 = -32 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x + 3y = 4 & \text{(I)} \\ x + y = -2 & \text{(II)} \end{cases}$

Subtraímos (I) e (II) membro a membro, obtendo:
$2y = 6 \Rightarrow y = 3$
Substituímos então y por 3 em (I), concluindo:
$x + 3 \cdot 3 = 4 \Rightarrow x = -5$
Logo, $S = \{(-5, 3)\}$.

80. $\sum_{p=0}^{10} \binom{10}{p} 5^p \cdot 2^{10-p} = (5 + 2)^{10} = 7^{10}$

Alternativa **d**.

81. $\sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p} 3^p = \sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p} 3^p \cdot 1^{20-p} = (3 + 1)^{20} = 4^{20} =$
$= (4^2)^{10} = 16^{10}$

Alternativa **a**.

82. $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p \cdot 1^{n-p} = (1 + 1)^n = 2^n$

Alternativa **d**.

83. Atribuindo o valor 1 à variável x, temos:
$(5 \cdot 1 - 4)^{35} = 1^{35} = 1$
Logo, a soma dos coeficientes é 1.

84. a) $(1{,}0004)^{22} = (1 + 0{,}0004)^{22} = \binom{22}{0}1^{22} \cdot (0{,}0004)^0 +$
$+ \binom{22}{1}1^{21} \cdot (0{,}0004)^1 + \binom{22}{2}1^{20} \cdot (0{,}0004)^2 + ... +$
$+ \binom{22}{22}1^0 \cdot (0{,}0004)^{22}$

As parcelas em que o número 0,0004 apresenta expoente maior que 1 são muito pequenas em relação às demais; logo, a soma das demais parcelas oferece uma boa aproximação para a potência $(1{,}0004)^{22}$, isto é:

$(1{,}0004)^{22} \approx \binom{22}{0}1^{22} \cdot (0{,}0004)^0 + \binom{22}{1}1^{21} \cdot (0{,}0004)^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}0004)^{22} \approx 1 \cdot 1 \cdot 1 + 22 \cdot 1 \cdot 0{,}0004$
$\therefore (1{,}0004)^{22} \approx 1{,}0088$

b) O montante M, em real, acumulado por essa aplicação ao final do mês considerado é dado por:
$M = 10.000 \cdot (1 + 0{,}0004)^{22} = 10.000(1{,}0004)^{22}$
De acordo com a aproximação obtida no item **a**, temos:
$M \approx 10.000 \cdot 1{,}0088 \Rightarrow M \approx 10.088$
Logo, o montante acumulado por essa aplicação ao final do mês considerado é de R$ 10.088,00.

85. O número de bombons comprados pelo comerciante pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

número de engradados	número de pacotes por engradado	número de caixinhas de bombons por pacote	número de bombons por caixinha
$(x + 2)$	$\cdot\ (x + 2)$	$\cdot\ (x + 2)$	$\cdot\ (x + 2)$

Logo, o comerciante comprou $(x + 2)^4$ bombons.
O número de bombons destinados à loja A também pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

número de pacotes destinados à loja A	número de caixinhas de bombons por pacote	número de bombons por caixinha
$4(x + 2)$	$\cdot\ (x + 2)$	$\cdot\ (x + 2)$

Logo, $4(x + 2)^3$ bombons serão destinados à loja A.
Assim, o número n de bombons destinados à loja B é dado por:
$n = (x + 2)^4 - 4(x + 2)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x +$
$+ 16 - 4(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$
$\therefore n = x^4 + 4x^3 - 16x - 16$
Alternativa **a**.

86. O número máximo n de grupos distintos de pesquisa de campo que podem ser formados é dado por:
$$n = \binom{20}{2} + \binom{20}{3} + \binom{20}{4} + \ldots + \binom{20}{18}$$
Pelo exercício proposto 82, temos:
$$\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \ldots + \binom{20}{20} = 2^{20}$$
Assim, concluímos que:
$$n = 2^{20} - \binom{20}{0} - \binom{20}{1} - \binom{20}{19} - \binom{20}{20} \Rightarrow$$
$\Rightarrow n = 2^{20} - 1 - 20 - 20 - 1$
$\therefore n = 2^{20} - 42$
Alternativa **e**.

87. Para expoentes crescentes de x, o termo geral é:
$$T = \binom{8}{p}(2x^3)^p \cdot x^{8-p} \Rightarrow T = \binom{8}{p}2^p \cdot x^{2p+8}$$
Fazendo $p = 2$, obtemos o terceiro termo:
$$T = \binom{8}{2} \cdot 2^2 \cdot x^{2 \cdot 2 + 8} \Rightarrow T = 28 \cdot 4 \cdot x^{12}$$
Logo, o terceiro termo é $112x^{12}$.

88. Para expoentes decrescentes de x, o termo geral é:
$$T = \binom{7}{p}(x^2)^{7-p} \cdot (-2x)^p \Rightarrow T = \binom{7}{p}(-2)^p \cdot x^{14-p}$$
Fazendo $p = 3$, obtemos o quarto termo:
$$T = \binom{7}{3} \cdot (-2)^3 \cdot x^{14-3} \Rightarrow T = 35 \cdot (-8) \cdot x^{11}$$
Logo, o quarto termo é $-280x^{11}$.

89. O termo geral T é dado por:
$$T = \binom{15}{p} \cdot a^p \cdot (-2)^{15-p}$$
Para determinar o coeficiente de a^{13}, fazemos $p = 13$, obtendo:
$$T = \binom{15}{13} \cdot a^{13} \cdot (-2)^{15-13} \Rightarrow T = 420a^{13}$$
Logo, o coeficiente de a^{13} é 420.
Alternativa **d**.

90. Representando a expressão $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ por $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)^6$, temos que o seu termo geral T é dado por:
$$T = \binom{6}{p} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p \cdot (x^{-1})^{6-p} \Rightarrow T = \binom{6}{p} \cdot x^{\frac{3p-12}{2}}$$
Para determinar o termo em x^{-3}, fazemos:
$$\frac{3p - 12}{2} = -3 \Rightarrow p = 2$$
Logo:
$$T = \binom{6}{2} \cdot x^{\frac{3 \cdot 2 - 12}{2}} \Rightarrow T = 15x^{-3}$$
Portanto, o coeficiente é 15.
Alternativa **d**.

91. O termo geral T do desenvolvimento de $(x + a)^{11}$ é dado por:
$$T = \binom{11}{p}x^p a^{11-p}$$
Logo, para $p = 5$ obtemos o termo em x^5:
$$T = \binom{11}{5}x^5 a^{11-5} \Rightarrow T = 462x^5a^6$$
Assim, devemos ter:
$462x^5a^6 = 1.386x^5 \Rightarrow a^6 = 3$
$\therefore a = \sqrt[6]{3}$
Alternativa **a**.

92. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^8 = [2x + (-x^{-1})]^8$
O termo geral pode ser representado por:
$$T = \binom{8}{p}(-1)^p \cdot (x^{-1})^p \cdot (2x)^{8-p}\text{, ou seja,}$$
$$T = \binom{8}{p} \cdot 2^{8-p} \cdot x^{8-2p} \cdot (-1)^p$$
Para determinar o termo independente, devemos considerar o expoente de x igual a zero:
$8 - 2p = 0 \Rightarrow p = 4$
Assim, temos:
$$T = \binom{8}{4} \cdot 2^{8-4} \cdot x^{8-2 \cdot 4} \cdot (-1)^4 = 70 \cdot 16 \cdot x^0 = 1.120$$
Logo, o termo independente é 1.120.

93. $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^6 = \left[x^2 - \frac{1}{x^2}\right]^6 = [x^2 + (-x^{-2})]^6$

O termo geral T é dado por:

$T = \binom{6}{p} \cdot (-x^{-2})^p \cdot (x^2)^{6-p} \Rightarrow T = \binom{6}{p} \cdot (-1)^p \cdot x^{12-4p}$

Para determinar o termo independente de x, devemos considerar que $12 - 4p = 0$, obtendo $p = 3$. Logo:

$T = \binom{6}{3} \cdot (-1)^3 \cdot x^{12-4\cdot 3} \Rightarrow T = -20$

Alternativa **d**.

94. $\left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8 = \left[x^{\frac{1}{5}} + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)\right]^8$

O termo geral T é dado por:

$T = \binom{8}{p} \cdot \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)^p \cdot \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{8-p} \Rightarrow T = \binom{8}{p} \cdot (-1)^p \cdot x^{\frac{24-8p}{15}}$

Para determinar o termo independente de x, devemos considerar que $\frac{24-8p}{15} = 0$, obtendo $p = 3$. Logo:

$T = \binom{8}{3} \cdot (-1)^3 \cdot x^{\frac{24-8\cdot 3}{15}} \Rightarrow T = -56$

95. **a)** O complementar do binomial $\binom{9}{4}$ é da forma $\binom{9}{x}$, tal que $x = 9 - 4 = 5$.

Logo, o complementar de $\binom{9}{4}$ é $\binom{9}{5}$.

b) $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$

e

$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$

c) Dois números binomiais complementares são da forma $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$, quaisquer que sejam os números naturais n e p, $p \leqslant n$. Assim, temos:

$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$

e

$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot [n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$

Portanto, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

96. **a)** $\binom{21}{2x+1} = \binom{21}{3x+5} \Rightarrow 2x + 1 = 3x + 5$ ou $2x + 1 + 3x + 5 = 21$

$\therefore x = -4$ ou $x = 3$

Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência dos binomiais que compõem a equação. Logo, $S = \{3\}$.

b) A equação $C_{9,\,x+1} = C_{9,\,x+2}$ é correspondente a:

$\binom{9}{x+1} = \binom{9}{x+2} \Rightarrow x + 1 = x + 2$ ou $x + 1 + x + 2 = 9$

$\therefore x = 3$

Como o número 3 satisfaz a condição de existência dos binomiais, concluímos que $S = \{3\}$.

c) A equação $C_{12,\,x+1} = C_{12,\,x+2}$ é correspondente a:

$\binom{12}{x+1} = \binom{12}{x+2} \Rightarrow x + 1 = x + 2$ ou $x + 1 + x + 2 = 12$

$\therefore x = \frac{9}{2}$

Como o número $\frac{9}{2}$ não satisfaz a condição de existência dos binomiais, concluímos que $S = \varnothing$.

97. $\binom{15}{8} + \binom{15}{9} = \binom{16}{x} \Rightarrow \binom{16}{9} = \binom{16}{x}$

$\therefore\ 9 = x$ ou $9 + x = 16 \Rightarrow x = 9$ ou $x = 7$

Como os números 9 e 7 satisfazem a condição de existência do binomial, concluímos que $S = \{9, 7\}$.

98. **a)** O número de comissões que podem ser formadas é $C_{7,5} = 21$.

b) Cada comissão deve ser formada por Paulo e mais 4 diretores entre os 6 demais. Assim, o número de comissões é $C_{6,4} = 15$.

c) Para que Paulo não seja membro de nenhuma dessas comissões, os membros devem ser escolhidos entre os 6 demais diretores. Assim, o número de comissões é $C_{6,5} = 6$.

d) $C_{6,4} + C_{6,5} = C_{7,5} \Rightarrow \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$

99.

	coluna zero	coluna um	coluna dois	coluna três	coluna quatro	coluna cinco	coluna seis	coluna sete	coluna oito
linha zero	1								
linha um	1	1							
linha dois	1	2	1						
linha três	1	3	3	1					
linha quatro	1	4	6	4	1				
linha cinco	1	5	10	10	5	1			
linha seis	1	6	15	20	15	6	1		
linha sete	1	7	21	35	35	21	7	1	
linha oito	1	8	28	56	70	56	28	8	1

100. **a)** O valor do binomial $\binom{4}{2}$ está localizado na linha 4 e na coluna 2 do triângulo de Pascal:

$\binom{4}{2} = 6$

b) O valor do binomial $\binom{7}{4}$ está localizado na linha 7 e na coluna 4 do triângulo de Pascal:

$\binom{7}{4} = 35$

c) O valor do binomial $\binom{8}{5}$ está localizado na linha 8 e na coluna 5 do triângulo de Pascal:

$\binom{8}{5} = 56$

101. Pela relação de Stiffel, o número binomial pedido é a soma 220 + 495, ou seja, 715.

102. A soma dos elementos que compõem a linha n do triângulo de Pascal é 2^n. Assim, temos:

a) $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$

b) $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{9} = 2^9 = 512$

103. O binomial localizado na linha n e na coluna 2 é $\binom{n}{2}$. Assim:

$\binom{n}{2} = 45 \Rightarrow \dfrac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 45$

$\therefore\ \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 45 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$

$\therefore\ n = 10$ ou $n = -9$

Apenas o número 10 satisfaz a condição de existência do binomial; logo, a linha em questão é a décima. Assim, a soma pedida é 2^{10}, ou seja, 1.024.

104. O somatório $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ representa a soma dos elementos que compõem a linha n do triângulo de Pascal; logo:

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 512 \Rightarrow 2^n = 512$$

$\therefore\ 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$

Como o número 9 satisfaz a condição de existência dos binomiais, então $n = 9$.

105. De acordo com a propriedade P2, para qualquer coluna p do triângulo de Pascal, tem-se:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Logo:

a) $\binom{7}{7} + \binom{8}{7} + \binom{9}{7} + \binom{10}{7} + \binom{11}{7} = \binom{12}{8}$

b) $\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} + \binom{10}{5} = \binom{11}{6}$

106. De acordo com a propriedade P3, para qualquer transversal n do triângulo de Pascal, tem-se:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

Logo:

a) $\binom{7}{0} + \binom{8}{1} + \binom{9}{2} + \binom{10}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5} = \binom{13}{5}$

b) $\binom{9}{0} + \binom{10}{1} + \binom{11}{2} + \binom{12}{3} + \binom{13}{4} + \binom{14}{5} + \binom{15}{6} = \binom{16}{6}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) Para que o número seja ímpar, a casa das unidades deve ser ocupada pelo algarismo 1 ou pelo algarismo 3. Assim:

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
5	5	5	2

1 ou 3

Logo, o total de números que podem ser formados é dado por: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$

b) Novamente, a casa das unidades deve ser ocupada pelo algarismo 1 ou pelo algarismo 3. Assim:

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
4	3	2	2

1 ou 3

Logo, o total de números que podem ser formados é dado por: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

2. A resposta à primeira pergunta é o total de números naturais de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
7	6	5	4	3

Pelo princípio fundamental da contagem, esse total é dado por: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2.520$

A resposta à segunda pergunta é o total de números naturais de cinco algarismos distintos, formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, que terminam por 2, 4 ou 6. Para isso, a casa das unidades deve ser ocupada por um algarismo par e os seis algarismos restantes devem ser distribuídos nas outras casas. Assim, temos:

dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
6	5	4	3	3

2, 4 ou 6

Aplicando o princípio fundamental da contagem: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1.080$

Assim, concluímos que com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 podem ser formados 2.520 números naturais nas condições enunciadas, dos quais 1.080 são pares.

3. O algarismo da casa das dezenas de milhar deve ser diferente de zero; portanto, esse algarismo pode ser qualquer um entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. A casa das unidades de milhar pode ser ocupada por qualquer um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, excetuando-se aquele que já ocupa a casa das dezenas de milhar, e assim por diante:

dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
9	9	9	9	9

Concluímos, então, que o total de números nas condições enunciadas é 9^5.
Alternativa **e**.

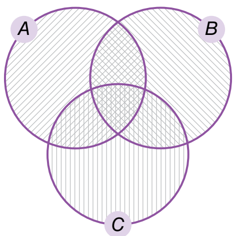
4. O total de números nas condições enunciadas é dado por: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
Considerando esses 120 números, cada um dos algarismos dados ocupa a casa das unidades em 24 deles (resultado da divisão de 120 por 5). O mesmo ocorre na casa das dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar.
Assim, a soma dos valores absolutos dos algarismos de cada posição é $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 600$.
Então, a soma S dos 120 números é dada por:

$$S = \underbrace{600 \cdot 10.000}_{\substack{\text{soma das}\\\text{dezenas de}\\\text{milhar}}} + \underbrace{600 \cdot 1.000}_{\substack{\text{soma das}\\\text{unidades}\\\text{de milhar}}} + \underbrace{600 \cdot 100}_{\substack{\text{soma das}\\\text{centenas}}} + \underbrace{600 \cdot 10}_{\substack{\text{soma das}\\\text{dezenas}}} + \underbrace{600 \cdot 1}_{\substack{\text{soma das}\\\text{unidades}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 600 \cdot (10.000 + 1.000 + 100 + 10 + 1) = 6.666.600$$

Alternativa **b**.

5. Na figura abaixo os interiores dos círculos estão hachurados em direções diferentes.



Assim, observamos que:

a) Cada uma das intersecções $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ é hachurada completamente duas vezes, e a intersecção $A \cap B \cap C$ é hachurada três vezes.

b) Na soma $n(A) + n(B) + n(C)$, cada elemento das intersecções $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ está sendo contado duas vezes, e cada elemento da intersecção $A \cap B \cap C$ está sendo contado três vezes.
Assim, para calcular $n(A \cup B \cup C)$, efetuamos:
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

6. **I)** Com o algarismo 0 na casa das unidades, temos:

unidades de milhar	centenas	dezenas	0	
4 ·	3 ·	2 ·	1	= 24

II) Com os algarismos 2 ou 4 na casa das unidades, temos:

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades	
3 ·	3 ·	2 ·	2	= 36

Logo, o total de números que podem ser formados nas condições enunciadas é 24 + 36, ou seja, 60.
Alternativa **a**.

7. **a)** Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos:

unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades	
6 ·	5 ·	4 ·	3	= 360

Logo, podem ser formados 360 números nas condições enunciadas.

b) Entre os números citados no item **a**, são divisíveis por 5 aqueles que terminam pelo algarismo 5. Fixando esse algarismo na casa das unidades temos, pelo princípio fundamental da contagem:

unidades de milhar	centenas	dezenas	5	
5	· 4	· 3	· 1	= 60

Logo, entre os números citados no item **a**, 60 números são divisíveis por 5.

c) Para que um número seja divisível por 4, o número formado pelos algarismos das dezenas e das unidades deve ser divisível por 4. Assim, entre os números citados no item **a**, são divisíveis por 4 aqueles que terminam por 16, 36, 56, 68 e 96. Fixando esses pares ordenados de algarismos nas duas últimas casas, calculamos:

unidades de milhar	centenas	1	6	
4	· 3	· 1	· 1	= 12

ou

unidades de milhar	centenas	3	6	
4	· 3	· 1	· 1	= 12

ou

unidades de milhar	centenas	5	6	
4	· 3	· 1	· 1	= 12

ou

unidades de milhar	centenas	6	8	
4	· 3	· 1	· 1	= 12

ou

unidades de milhar	centenas	9	6	
4	· 3	· 1	· 1	= 12

Logo, entre os números citados no item **a**, o total de números divisíveis por 4 é 12 + 12 + 12 + 12 + + 12, ou seja, 60.

8. a) $\frac{12!}{13!} = \frac{12!}{13 \cdot 12!} = \frac{1}{13}$

b) $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$

c) $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

d) $\frac{8! \cdot 10!}{6! \cdot 9!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6! \cdot 10 \cdot 9!}{6! \cdot 9!} = 560$

e) $\frac{5! \cdot 9!}{3! \cdot 12!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 9!}{3! \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!} = \frac{1}{66}$

f) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = n^2 + 3n + 2$

g) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = n^2 - 7n + 12$

9. $\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)n! + n!}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{n!(n+1+1)}{(n+2)(n+1)n!} =$

$= \frac{n!(n+2)}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$

10. a) $\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 12 \Rightarrow \frac{(n+5)\cancel{(n+4)!}}{\cancel{(n+4)!}} = 12$

$\therefore n + 5 = 12 \Rightarrow n = 7$

Como para $n = 7$ existem todos os fatoriais relacionados na equação proposta, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{7\}$.

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30$

$\therefore n^2 - n = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, encontramos $n = 6$ ou $n = -5$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 6 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{6\}$.

c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot \cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+2)!}} = 20$

$\therefore n^2 + 7n + 12 = 20 \Rightarrow n^2 + 7n - 8 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 1$ ou $n = -8$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 1 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{1\}$.

d) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{42} \Rightarrow \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1)n\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{42}$

$\therefore \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{42} \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 6$ ou $n = -7$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que apenas o número 6 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \{6\}$.

e) $\frac{n!}{n+1} - n! = \frac{4(n+1)!}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n!}{n+1} - n! = \frac{4(n+1)n!}{9}$

$\therefore \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{4(n+1)}{9} \Rightarrow 4n^2 + 17n + 4 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos

$n = -\frac{1}{4}$ ou $n = -4$.

Verificando a existência dos fatoriais apresentados na equação proposta, para esses valores de n, concluímos que nenhum deles é raiz da equação. Logo, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

f) $n! + (n+1)! = n!(n+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow n! + (n+1)n! = n!(n+2)$

$\therefore 1 + n + 1 = n + 2$

$\therefore 0 = 0$

Concluímos, então, que a igualdade se verifica para qualquer valor de n desde que existam os fatoriais relacionados nessa equação. Verificando a existência dos fatoriais, concluímos que eles são válidos para qualquer valor natural de n. Portanto, o conjunto solução é $S = \mathbb{N}$.

11. Condição de existência: $x \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{(x+2)!}{3! \cdot x!} = \frac{x!}{(x-1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)\cdot(x+1)\cdot \cancel{x!}}{6 \cdot \cancel{x!}} = \frac{x \cdot \cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}}$$

$\therefore\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

Logo: $S = \{1, 2\}$

Alternativa **a**.

12. $P = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 50) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{2^{50}}\underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50)}_{50!}$$

$\therefore\ P = 2^{50} \cdot 50!$

Alternativa **b**.

13. Um número natural n é primo se, e somente se, n possui exatamente dois divisores naturais distintos, que são 1 e n.

Um número natural k é composto se, e somente se, k possui pelo menos três divisores naturais distintos.

Observando que

$50! + 11 = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot 10! + 11 =$

$= 11(50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 12 \cdot 10! + 1)$

concluímos que 11 é divisor de $50! + 11$. Assim, o número $(50! + 11)$ é composto, pois os números naturais 1, $(50! + 11)$ e 11 são três divisores distintos de $50! + 11$.

14. O número 23! possui os fatores 2 e 5; logo, $23! = 10k$, para algum número natural k.

Assim:

$23! - 243 = 10k - (10 \cdot 24 + 3) = 10(k - 24) - 3$

Observando que $23! > 243$, podemos concluir que $10(k - 24)$ é positivo.

Na diferença $10(k - 24) - 3$, o minuendo é múltiplo de 10 e, por isso, termina em 0. Logo, na diferença $23! - 243$, o algarismo das unidades é 7.

Alternativa **e**.

15. Uma função $f: A \to B$ é injetora se, e somente se, é obedecida a seguinte condição para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Em outras palavras, elementos distintos do domínio de f devem ter imagens distintas.

Assim, para cada elemento de A, verificamos quantas são as possibilidades de associação a um único elemento de B de modo que elementos distintos de A tenham imagens distintas.

Podemos resolver esse problema pelo princípio fundamental de contagem:

−2	0	2	4	
6 ·	5 ·	4 ·	3	= 360

Assim, temos: $A_{6,4} = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Alternativa **a**.

16. a) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$A_{n,2} = 3n + 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 3n + 12$$

$$\therefore\ \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 3n + 12 \Rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 6$ ou $n = -2$.

Apenas o número 6 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{6\}$.

b) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

$$A_{n,3} = 3A_{n,2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{3n!}{(n-2)!}$$

$$\therefore\ \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = \frac{3\cancel{n}(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

(Observe que a condição de existência permite a divisão de ambos os membros por n.)

$\therefore\ n^2 - 6n + 5 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 1$ ou $n = 5$.

Apenas o número 5 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{5\}$.

c) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$A_{n+1,2} = A_{n,2} \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\therefore\ \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^2 + n = n^2 - n$

$\therefore\ n = 0$

Como esse valor de n não satisfaz a condição de existência, o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

d) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 0$

$A_{n+3,3} = 2A_{n+3,2} + 3A_{n+2,2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(n+3)!}{n!} = \frac{2(n+3)!}{(n+1)!} + \frac{3(n+2)!}{n!}$$

$$\therefore\ \frac{(n+3)(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{2(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} + \frac{3(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

$\therefore\ (n+3)\cancel{(n+2)}(n+1) =$

$= 2(n+3)\cancel{(n+2)} + 3\cancel{(n+2)}(n+1)$

(Observe que a condição de existência permite a divisão de ambos os membros por $n + 2$.)

$\therefore\ n^2 - n - 6 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $n = 3$ ou $n = -2$.

Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{3\}$.

17. Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$A_{n,2} + A_{(n+1),2} = 18 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 18$$

$$\therefore\ \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 18 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2n^2 - 18 = 0$

$\therefore\ n = 3$ ou $n = -3$

Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência. Concluímos então que $n = 3$ e, portanto, a equação possui uma única raiz.

Alternativa **c**.

18. a) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$P_n = 24 \cdot A_{n,2} \Rightarrow n! = 24 \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$$

Como $n!$ é diferente de zero, podemos dividir ambos os membros por $n!$, obtendo:

$$1 = 24 \cdot \frac{1}{(n-2)!} \Rightarrow (n-2)! = 24$$

$\therefore\ n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$

Como o número 6 satisfaz a condição de existência, concluímos que $S = \{6\}$.

b) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$

$5P_n + 5P_{n+1} = P_{n+2} \Rightarrow 5n! + 5(n+1)! = (n+2)!$

$\therefore 5n! + 5(n+1)n! = (n+2)(n+1)n!$

Como $n!$ é diferente de zero, podemos dividir ambos os membros por $n!$, obtendo:

$5 + 5(n+1) = (n+2)(n+1) \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0$

$\therefore n = 4$ ou $n = -2$

Apenas o número 4 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{4\}$.

19. Uma função f: $A \to B$ é bijetora se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.

Em outras palavras, elementos distintos do domínio de f devem ter imagens distintas, e todo elemento do contradomínio deve ser imagem de algum elemento do domínio.

Assim, o número de funções bijetoras que podem ser definidas de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em $B = \{a, e, i, o, u\}$ é igual ao número de sequências de cinco elementos distintos que podem ser formadas com os cinco elementos de B. Esse número é $A_{5,5} = P_5 = 5! = 120$.

Podemos resolver esse problema pelo princípio fundamental de contagem:

1	2	3	4	5
5	4	3	2	1

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Portanto, podem ser definidas 120 funções bijetoras de A em B.

20. a) O total de números que podem ser formados é $P_6 = 6! = 720$.

Para calcular quantos desses números começam pelo algarismo 1, fixamos esse algarismo na casa das centenas de milhar, observando que os 5 algarismos restantes devem ser distribuídos nas seis casas posteriores:

1	dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
1	5	4	3	2	1

$1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Logo, dos 720 números que podem ser formados, 120 começam pelo algarismo 1.

b) Colocando em ordem crescente todos os 720 números, temos que aqueles que começam por 1, 2, 3 ou 4 são menores que 512.346, e o próximo número dessa sequência é exatamente 512.346.

Repetindo o raciocínio do item **a**, concluímos que existem 120 números que começam com cada um dos algarismos: 1, 2, 3 ou 4; portanto, existem exatamente 480 números menores que 512.346 nessa sequência.

Portanto, 512.346 ocupa a 481ª posição.

Há 120 números que começam por 1 e 120 números que começam por 2.

Depois desses 240 números, os próximos dois números na sequência crescente são 312.456 e 312.465. Logo, o número que ocupa a 242ª posição é 312.465.

21. I) Vamos calcular inicialmente quantos números naturais de seis algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, de modo que os dígitos 3 e 4 apareçam em posições adjacentes:

Considerando um único elemento os algarismos 3 e 4, as possibilidades são:

34 ou 43				

$\underbrace{\underbrace{34 \text{ ou } 43}_{2}\ \square\ \square\ \square\ \square}_{P_5}$

Logo, o total de números que podem ser formados é: $2 \cdot P_5 = 2 \cdot 120 = 240$

II) Dos 240 números obtidos no item I, vamos calcular quantos apresentam, também, os algarismos 1 e 2 em posições adjacentes:

Considerando que os pares 3, 4 e 1, 2 formam, cada um, um único elemento, temos:

34 ou 43	12 ou 21		

$\underbrace{\underbrace{34 \text{ ou } 43}_{2}\ \underbrace{12 \text{ ou } 21}_{2}\ \square\ \square}_{P_4}$

Logo, o total de números que podem ser formados é: $2 \cdot 2 \cdot P_4 = 4 \cdot 24 = 96$

A diferença entre os resultados obtidos em I e II, isto é, $240 - 96 = 144$, é o total de números nas condições enunciadas.

Alternativa **a**.

22. a) O número de sequências é o número de permutações de 8 elementos com 6 elementos iguais ao símbolo | e dois elementos iguais ao símbolo +. Assim, temos:

$$P_8^{(6,\,2)} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

Logo, podem ser formadas 28 sequências diferentes.

b) Usando o mesmo raciocínio do item **a**, o número de soluções (x, y, z) da equação $x + y + z = 6$, com $\{x, y, z\} \subset \mathbb{N}$, é dado pelo número de permutações de 8 elementos com 6 elementos iguais ao símbolo | e dois elementos iguais ao símbolo +, isto é:

$$P_8^{(6,\,2)} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

Logo, a equação possui 28 soluções diferentes (x, y, z), com $\{x, y, z\} \subset \mathbb{N}$.

23. a) $C_{8,2} + C_{6,0} + C_{0,0} = \dfrac{8!}{2! \cdot 6!} + \dfrac{6!}{0! \cdot 6!} + \dfrac{0!}{0! \cdot 0!} =$

$= 28 + 1 + 1 = 30$

b) $C_{5,4} + A_{6,2} + P_3 = \dfrac{5!}{4! \cdot 1!} + \dfrac{6!}{4!} + 3! =$

$= 5 + 30 + 6 = 41$

24. a) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$

$C_{n,4} + C_{n-1,3} = (n-2)(n-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n!}{4!(n-4)!} + \dfrac{(n-1)!}{3!(n-4)!} = (n-2)(n-3)$

$\therefore \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4!(n-4)!} +$

$+ \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{3!(n-4)!} = (n-2)(n-3)$

Como, pela condição de existência, $n - 2$ e $n - 3$ são diferentes de zero, podemos dividir os dois membros da igualdade por $(n-2)(n-3)$, obtendo:

$\dfrac{n(n-1)}{24} + \dfrac{n-1}{6} = 1 \Rightarrow n^2 + 3n - 28 = 0$

$\therefore n = 4$ ou $n = -7$

Apenas o número 4 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{4\}$.

b) Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

$$A_{n,\,2} - C_{n,\,3} = \frac{2 \cdot P_n}{(n-1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{2n!}{(n-1)!}$$

$$\therefore \frac{n\,(n-1)\,(n-2)!}{(n-2)!} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)!}{3!\,(n-3)!} =$$

$$= \frac{2n\,(n-1)!}{(n-1)!} \Rightarrow n(n-1) - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6} = 2n$$

Como, pela condição de existência, n é diferente de zero, podemos dividir os dois membros por n, obtendo:

$$n - 1 - \frac{(n-1)\,(n-2)}{6} = 2 \Rightarrow n^2 - 9n + 20 = 0$$

$\therefore n = 5$ ou $n = 4$

Como os números 5 e 4 satisfazem a condição de existência, concluímos que $S = \{5, 4\}$.

25. **a)** $(1{,}005)^{15} = \binom{15}{0} \cdot 1^{15} \cdot (0{,}005)^0 + \binom{15}{1} \cdot 1^{14} \cdot (0{,}005)^1 +$

$+ \binom{15}{2} \cdot 1^{13} \cdot (0{,}005)^2 + \ldots + \binom{15}{0} \cdot 1^0 \cdot (0{,}005)^{15}$

As parcelas em que o número 0,005 apresenta expoente maior que 1 são muito pequenas em relação às demais; logo, a soma das demais parcelas oferece uma boa aproximação para a potência $(1{,}005)^{15}$.

Portanto:

$$(1{,}005)^{15} \approx \binom{15}{0} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{15}{1} \cdot 1 \cdot 0{,}005 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1{,}005)^{15} \approx 1 + 15 \cdot 0{,}005$

$\therefore (1{,}005)^{15} \approx 1{,}075$

26. $\text{sen}^4\, x - 4\,\text{sen}^3\, x + 6\,\text{sen}^2\, x - 4\,\text{sen}\, x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\text{sen}\, x - 1)^4 = 0$

$\therefore \text{sen}\, x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 1$

Para $\text{sen}\, x = 1$, temos $\cos x = 0$

Alternativa **b**.

27. Multiplicando por 1^{50-p} cada parcela da expressão $\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} \cdot (-1)^p$, obtém-se uma expressão equivalente: $\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} \cdot (-1)^p \cdot 1^{50-p}$. Assim, pelo teorema do binômio de Newton, temos:

$$\sum_{p=0}^{50} \binom{50}{p} \cdot (-1)^p \cdot 1^{50-p} = (-1+1)^{50} = 0^{50} = 0$$

Alternativa **d**.

28. $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p \cdot 3^{n-p} = 625^{n-3} \Rightarrow (2+3)^n = 625^{n-3}$

$\therefore 5^n = (5^4)^{n-3} \Rightarrow 5^n = 5^{4n-12}$

$\therefore n = 4n - 12 \Rightarrow 3n = 12$

$\therefore n = 4$

29. $\sum_{p=2}^{20} \binom{20}{p} = \sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p} - \sum_{p=0}^{1} \binom{20}{p} =$

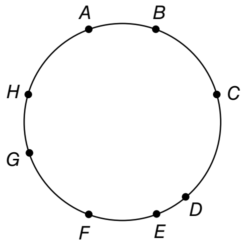
$= 2^{20} - \left[\binom{20}{0} + \binom{20}{1}\right] = 2^{20} - 1 - 20 = 2^{20} - 21$

Alternativa **c**.

30. Sendo A um conjunto de n elementos e p o número de elementos de cada subconjunto de A, sendo p um número natural, com $p \leqslant n$, o número de subconjuntos de A com p elementos é $C_{n,\,p}$. Assim, o total de subconjuntos de A é:

$$\sum_{p=0}^{n} C_{n,\,p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

31.



Os 8 pontos determinam triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos e um octógono. Assim, sendo n o número de polígonos convexos, temos:

$$n = \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} =$$

$$= (1+1)^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2}$$

$n = 2^8 - 1 - 8 - 28 = 219$

Logo, os 8 pontos determinam 219 polígonos convexos.

32. A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^m$ é obtida substituindo x e y por 1; logo, essa soma é $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)^m$, ou seja, 5^m.

Assim, temos:

$5^m = 625 \Rightarrow 5^m = 5^4$

$\therefore m = 4$

Alternativa **e**.

33. **a)** Sabemos que $4{,}1 < \sqrt{17} < 4{,}2$, pois $(4{,}1)^2 = 16{,}81$ e $(4{,}2)^2 = 17{,}64$; assim, podemos afirmar que $\sqrt{17} = 4{,}1 + x$, em que $0 < x < 0{,}1$.

Devemos ter:

$(4{,}1 + x)^2 = 17 \Rightarrow (4{,}1)^2 + 2 \cdot 4{,}1 \cdot x + x^2 = 17$

$\therefore 16{,}81 + 8{,}2x + x^2 = 17$

Observando que, para $0 < x < 0{,}1$, a parcela x^2 é menor que 0,001, podemos garantir que, eliminando essa parcela do primeiro membro da igualdade anterior, obteremos um valor "bem próximo" de 17. Isto é, $16{,}81 + 8{,}2x \approx 17$; portanto, $x \approx 0{,}023$.

Concluímos, então, que:

$\sqrt{17} \approx 4{,}1 + 0{,}023$, ou seja, $\sqrt{17} \approx 4{,}123$

b) Sabemos que $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$, pois $(1{,}2)^3 = 1{,}728$ e $(1{,}3)^3 = 2{,}197$; assim, podemos afirmar que $\sqrt[3]{2} = 1{,}2 + x$, em que $0 < x < 0{,}1$. Devemos ter:

$(1{,}2 + x)^3 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}2)^3 + 3 \cdot (1{,}2)^2 \cdot x + 3 \cdot 1{,}2 \cdot x^2 + x^3 = 2$

$\therefore 1{,}728 + 4{,}32x + 3{,}6x^2 + x^3 = 2$

Observando que, para $0 < x < 0{,}1$, as parcelas $3{,}6x^2$ e x^3 são menores que 0,036 e 0,001, respectivamente, podemos garantir que, eliminando essas parcelas do primeiro membro da igualdade anterior, obteremos um valor "bem próximo" de 2. Isto é, $1{,}728 + 4{,}32x \approx 2$; portanto, $x \approx 0{,}063$.

Concluímos, então, que:

$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2 + 0{,}063$, ou seja, $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}263$

34. $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{12} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$

O termo geral T é dado por:

$T = \binom{12}{p} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^p \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-p} \Rightarrow T = \binom{12}{p} \cdot x^{\frac{36-p}{6}}$

Para determinar o coeficiente de x^5, fazemos $\frac{36-p}{6} = 5$, obtendo $p = 6$. Logo:

$T = \binom{12}{6} \cdot x^{\frac{36-6}{5}} \Rightarrow T = 924x^5$

Logo, o coeficiente de x^5 é 924.
Alternativa **e**.

35. $(x^4 + 2)^{10} \cdot (x^4 - 2)^{10} = [(x^4 + 2)(x^4 - 2)]^{10} = (x^8 - 4)^{10}$

$T = \binom{10}{p}(x^8)^p \cdot (-4)^{10-p} \Rightarrow T = \binom{10}{p}x^{8p} \cdot (-4)^{10-p}$

Para $8p = 64$, temos $p = 8$; logo:

$T = \binom{10}{8} \cdot x^{8 \cdot 8} \cdot (-4)^{10-8} = 45 \cdot x^{64} \cdot (-4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T = 720x^{64}$

Portanto, o coeficiente de x^{64} é 720.

36. O termo geral do binômio, segundo as potências decrescentes de x, é dado por:

$T = \binom{8}{p}y^p \cdot (kx)^{8-p} \Rightarrow T = \binom{8}{p} \cdot y^p \cdot k^{8-p} \cdot x^{8-p}$

O quarto termo é obtido para $p = 3$:

$T = \binom{8}{3} \cdot y^3 \cdot k^{8-3} \cdot x^{8-3} \Rightarrow T = 56 \cdot k^5 \cdot y^3 \cdot x^5$

Assim, devemos ter:
$56k^5 = 1.792 \Rightarrow k^5 = 32$
$\therefore k = 2$
Alternativa **a**.

37. Podemos escrever $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n = (x + x^{-2})^n$. Assim, o termo geral T desse binômio é dado por:

$T = \binom{n}{p}(x^{-2})^p \cdot x^{n-p} \Rightarrow T = \binom{n}{p}x^{n-3p}$

Para que esse termo independa de x, devemos ter $n - 3p = 0$, ou seja, $n = 3p$. Assim, concluímos que o número natural n deve ser múltiplo de 3.
Alternativa **c**.

38. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8 = [x^3 + (x^{-1})]^8$

O termo geral pode ser representado por:

$T = \binom{8}{p}(x^{-1})^p \cdot (x^3)^{8-p}$, ou seja:

$T = \binom{8}{p}x^{24-4p}$

Igualando a zero o expoente de x, temos:
$24 - 4p = 0 \Rightarrow p = 6$
Assim, concluímos que:

$T = \binom{8}{6}x^{24-4 \cdot 6} = 28x^0 = 28$

Logo, o termo independente é 28.

39. $\left(2x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^7 = [2x^4 + (-x^{-3})]^7$

O termo geral pode ser representado por:

$T = \binom{7}{p} \cdot (2x^4)^p \cdot (-x^{-3})^{7-p}$, ou seja,

$T = \binom{7}{p} \cdot 2^p \cdot (-1)^{7-p} \cdot x^{7p-21}$

Igualando a zero o expoente de x, temos:
$7p - 21 = 0 \Rightarrow p = 3$
Assim, concluímos que:

$T = \binom{7}{3} \cdot 2^3 \cdot (-1)^{7-3} \cdot x^{7 \cdot 3 - 21} =$

$= 35 \cdot 8 \cdot (-1)^4 \cdot x^0 = 280$

Logo, o termo independente é 280.

40. Podemos escrever $\left(x + \frac{k}{x}\right)^6 = (x + kx^{-1})^6$. Assim, o termo geral T desse binômio é dado por:

$T = \binom{6}{p}(kx^{-1})^p \cdot x^{6-p} \Rightarrow T = \binom{6}{p}k^p x^{6-2p}$

Para que esse termo independa de x, devemos ter $6 - 2p = 0$, ou seja, $p = 3$. Logo:

$\binom{6}{3}k^3x^{6-2 \cdot 3} = 160 \Rightarrow 20k^3 = 160$

$\therefore k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$
Alternativa **b**.

41. $$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!\,(n-k-1)!}{n!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)\,(n-k-1)!} \cdot \frac{(k+1)k!\,(n-k-1)!}{n!} = \frac{k+1}{n-k}$$

Alternativa **a**.

42. a) $\binom{18}{x+3} = \binom{18}{x+7} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 = x + 7$ ou $x + 3 + x + 7 = 18$
$\therefore 2x = 8 \Rightarrow x = 4$
Observando que para $x = 4$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \{4\}$.

b) $\binom{18}{4x+2} = \binom{18}{2x+4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 2 = 2x + 4$ ou $4x + 2 + 2x + 4 = 18$
$\therefore 2x = 2$ ou $6x = 12 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$
Observando que para $x = 1$ e $x = 2$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \{1, 2\}$.

c) $\binom{9}{5x+2} = \binom{9}{4x+12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x + 2 = 4x + 12$ ou $5x + 2 + 4x + 12 = 9$

$\therefore x = 10$ ou $x = -\frac{5}{9}$

Observando que para cada um dos valores, $x = 10$ ou $x = -\frac{5}{9}$, não existe pelo menos um dos binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \varnothing$.

d) A equação $C_{20,\,5x+2} = C_{20,\,x+6}$ é correspondente a:
$\binom{20}{5x+2} = \binom{20}{x+6} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x + 2 = x + 6$ ou $5x + 2 + x + 6 = 20$
$\therefore x = 1$ ou $x = 2$
Observando que para $x = 1$ e $x = 2$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \{1, 2\}$.

e) A equação $C_{15,\,3x} = C_{15,\,2x}$ é correspondente a:
$\binom{15}{3x} = \binom{15}{2x} \Rightarrow 3x = 2x$ ou $3x + 2x = 15$
$\therefore x = 0$ ou $x = 3$
Observando que para $x = 0$ e $x = 3$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \{0, 3\}$.

f) A equação $C_{8,\,x+1} = C_{8,\,x+2}$ é correspondente a:
$\binom{8}{x+1} = \binom{8}{x+2} \Rightarrow x + 1 = x + 2$ ou
$x + 1 + x + 2 = 8$
$\therefore x = \frac{5}{2}$
Observando que para $x = \frac{5}{2}$ não existe pelo menos um dos binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \varnothing$.

43. a) $\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \binom{10}{7}$
b) $\binom{30}{12} + \binom{30}{13} = \binom{31}{13}$
c) $\binom{45}{0} + \binom{45}{1} = \binom{46}{1}$

44. a) $\underbrace{\binom{12}{5} + \binom{12}{6}}_{\text{Stiffel}} = \binom{13}{x+2} \Rightarrow \binom{13}{6} = \binom{13}{x+2}$
$\therefore 6 = x + 2$ ou $6 + x + 2 = 13 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 5$
Observando que para $x = 4$ e $x = 5$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \{4, 5\}$.
b) $\underbrace{\binom{20}{10} + \binom{20}{11}}_{\text{Stiffel}} = \binom{21}{2x+1} \Rightarrow \binom{21}{11} = \binom{21}{2x+1}$
$\therefore 11 = 2x + 1$ ou $11 + 2x + 1 = 21 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5$ ou $x = \frac{9}{2}$
Observando que para $x = 5$ e $x = \frac{9}{2}$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que $S = \left\{5, \frac{9}{2}\right\}$.

45. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 172 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 172$
$\therefore 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 172 \Rightarrow n^2 + n - 342 = 0$
$\therefore n = 18$ ou $n = -19$
Apenas o número 18 satisfaz a condição de existência dos binomiais. Assim, a linha em questão é a 18ª do triângulo de Pascal. Assim,o quarto elemento dessa linha é $\binom{18}{3}$, ou seja, 816.
Alternativa **e**.

46. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 92 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 92$
$\therefore 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 92 \Rightarrow n^2 + n - 182 = 0$
$\therefore n = 13$ ou $n = -14$
Apenas o número 13 satisfaz a condição de existência dos binomiais. Assim, a linha n é a 13ª do triângulo de Pascal. Concluímos, então, que a soma dos três primeiros elementos da linha $n + 1$ é:
$\binom{14}{0} + \binom{14}{1} + \binom{14}{2} = 1 + 14 + 91 = 106$

47. Em qualquer linha do triângulo de Pascal, os números binomiais equidistantes dos extremos são iguais, pois são complementares. Assim, $a = 7$, $b = 35$ e $c = 21$.

Outro modo
Observando que o terceiro elemento dessa linha é 21, temos:
$\binom{n}{2} = 21 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 21$
$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 21 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$
$\therefore n = 7$ ou $n = -6$
Apenas o número 7 satisfaz a condição de existência dos binomiais. Assim, a linha em questão é a 7ª do triângulo de Pascal. Então:
$a = \binom{7}{1}$, $b = \binom{7}{4}$ e $c = \binom{7}{5}$, ou seja, $a = 7$, $b = 35$ e $c = 21$.

48. $\binom{n+1}{n-1} = 153 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-n+1)!} = 153$
$\therefore \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \cdot 2!} = 153 \Rightarrow n^2 + n - 306 = 0$
$\therefore n = 17$ ou $n = -18$
Apenas o número 17 satisfaz a condição de existência dos binomiais. Assim, a linha n é a 17ª do triângulo de Pascal. Logo, a soma dos elementos dessa linha é 2^{17}.
Alternativa **d**.

49. a) $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} =$
$= 2^9 - \binom{9}{7} - \binom{9}{8} - \binom{9}{9} = 512 - 36 - 9 - 1 = 466$
b) $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{10}{9} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{10} =$
$= 1.024 - 1 - 1 = 1.022$

50. a) $\binom{8}{8} + \binom{9}{8} + \binom{10}{8} + \binom{11}{8} + \binom{12}{8} = \binom{13}{9} = 715$
b) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3} =$
$= \binom{10}{4} = 210$

51. Pela propriedade P2, da soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal, temos:

$$\sum_{i=0}^{10}\binom{20+i}{20} = \binom{31}{p} \Rightarrow \binom{31}{21} = \binom{31}{p}$$

$\therefore\ p = 21$ ou $p + 21 = 31 \Rightarrow p = 21$ ou $p = 10$

Observando que para $p = 21$ e $p = 10$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que S = {21, 10}.

52. a) $\binom{8}{0} + \binom{9}{1} + \binom{10}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{4} = \binom{13}{4}$

b) $\binom{7}{0} + \binom{8}{1} + \binom{9}{2} + \binom{10}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5} + \binom{13}{6} = \binom{14}{6}$

53. Pela propriedade (P.3), da soma dos elementos de uma transversal do triângulo de Pascal, temos:

$$\sum_{i=0}^{7}\binom{19+i}{i} = \binom{27}{p} \Rightarrow \binom{27}{7} = \binom{27}{p}$$

$\therefore\ p = 7$ ou $p + 7 = 27 \Rightarrow p = 7$ ou $p = 20$

Observando que para $p = 7$ e $p = 20$ existem os binomiais que compõem a equação, concluímos que S = {7, 20}.

Exercícios contextualizados

54. O maior número possível de folhas de respostas distintas pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

1º teste	2º teste	3º teste	4º teste	5º teste	6º teste	7º teste	8º teste
4	4	4	4	4	4	4	4

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8 = 65.536$

Como são possíveis 65.536 cartões com respostas diferentes e foram entregues 65.537 cartões, concluímos que há pelo menos dois cartões com as mesmas respostas.

55. O número possível de senhas pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

9	8	7	6	5

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$

Para obter o tempo máximo, devemos considerar que a senha só foi descoberta na última tentativa. Assim, considerando que cada tentativa durou 5 segundos, temos:

$5 \cdot 15.120 = 75.600$

Como em 1 hora há 3.600 segundos, fazemos:

$75.600 : 3.600 = 21$

Alternativa **c**.

56. a)

De A para B	De B para C
2	3

$2 \cdot 3 = 6$

Logo, há 6 caminhos possíveis.

b)

De A para B	De B para C	e	De C para B (excluindo o caminho usado na ida)	De B para A (excluindo o caminho usado na ida)
2	3		2	1

Assim, o total de sequencias possíveis é dado por:

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

57. O número de sequências possíveis de cidades, nas condições enunciadas, é 5! = 120. Como cada sequência possui apenas uma simétrica, que deve ser descartada, o número de sequências que devem ser examinadas é 60. Assim:

1 min 30 s corresponde a 90 segundos

$60 \cdot 90 = 5.400$

5.400 segundos correspondem a 90 minutos

Alternativa **b**.

58.

cetáceos	primatas	roedores
2	20	33

Logo, o número de conjuntos distintos que podem ser formados é dado por: $2 \cdot 20 \cdot 33 = 1.320$

Alternativa **a**.

59. Como o vigarista decorou a sequência de algarismos, falta, para completar a senha, a sequência de letras. Sabendo que a 1ª, a 2ª e a 3ª letras da sequência de letras estão, respectivamente, no 1º, 2º e 3º retângulos, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra
5	5	5

Logo, o total de senhas que o vigarista pôde obter é dado por: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Alternativa **b**.

60.

Barras

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10} = 59.049$

Logo, o número máximo de itens que podem ser identificados por esse sistema é 59.049.

61.

1º alg.	2º alg.	3º alg.	1ª letra	2ª letra
10	10	10	26	26

Logo, o maior número possível de clientes do banco é dado por:

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 10^3 \cdot 26^2 = 676.000$

Alternativa **c**.

62. Para cada uma das 30 quadrículas há duas, e apenas duas possibilidades: ou ela será assinalada com um X ou não. Assim, o total de possibilidades é dado pelo produto:

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{30\ \text{fatores}} = 2^{30}$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos:

$2^{30} = 1.073.741.824$

63.

1ª ponte	2ª ponte	3ª ponte	4ª ponte	5ª ponte	6ª ponte	7ª ponte	8ª ponte
4	3	3	3	3	3	3	3

Logo, o número de fragmentos diferentes que podem ser obtidos é dado por:

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3^7 = 8.748$

64. Códigos formados por 1 sinal ou Códigos formados por 2 sinais ou Códigos formados por 3 sinais ou Códigos formados por 4 sinais

Códigos formados por 1 sinal		Códigos formados por 2 sinais		Códigos formados por 3 sinais		Códigos formados por 4 sinais
$\square$	ou	1º | 2º	ou	1º | 2º | 3º	ou	1º | 2º | 3º | 4º
2		$2 \cdot 2 = 4$		$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Com 1 sinal podem ser representadas 2 letras, com até 2 sinais podem ser representadas 6 letras ($2 + 4$), com até 3 sinais podem ser representadas 14 letras ($2 + 4 + 8$), e com até 4 sinais podem ser representadas 30 letras ($2 + 4 + 8 + 16$).
Como o alfabeto possui 26 letras, a representação de uma letra tem no máximo 4 sinais.

65. Cada ponto pode se destacar ou não; logo, para cada ponto há duas possibilidades. Porém, o retângulo em que nenhum ponto se destaca não representa caractere. Portanto, o número de caracteres é $2^6 - 1$, ou seja, 63.
Alternativa **d**.

66. **I)** Sendo t o total de resultados possíveis da prova, temos:

1º colocado	2º colocado	3º colocado
9	8	7

$t = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

II) Sendo k o número de resultados possíveis em que não se classifica nenhum brasileiro, temos:

1º colocado	2º colocado	3º colocado
5	4	3

$k = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

III) A diferença $t - k$ é o número de resultados possíveis com pelo menos um brasileiro classificado:
$t - k = 504 - 60 = 444$
Logo, são possíveis 444 resultados com pelo menos um brasileiro entre os três primeiros colocados.

67. **a)**

$$\underbrace{\square}_{68} \cdot \underbrace{\square}_{67} \cdot \underbrace{\square}_{66} \cdot \underbrace{\square}_{65} \cdot \underbrace{\square}_{64} \cdot \underbrace{\square}_{63} = 78.806.407.680$$

Logo, Jéssica pode formar 78.806.407.680 senhas diferentes.

b)

$$\underbrace{\square}_{36} \cdot \underbrace{\square}_{36} \cdot \underbrace{\square}_{36} \cdot \underbrace{\square}_{36} \cdot \underbrace{\square}_{36} \cdot \underbrace{\square}_{36} = 2.176.782.336$$

Logo, Fernanda pode formar 2.176.782.336 senhas diferentes.

c) O total de senhas que Jéssica pode formar usando apenas letras e números (sem repetição), é dado por:

$$\underbrace{\square}_{36} \cdot \underbrace{\square}_{35} \cdot \underbrace{\square}_{34} \cdot \underbrace{\square}_{33} \cdot \underbrace{\square}_{32} \cdot \underbrace{\square}_{31} = 1.402.410.240$$

Assim, a quantidade de senhas que Jéssica pode formar usando pelo menos 1 caractere especial, é dado por:
$78.806.407.680 - 1.402.410.240 = 77.403.997.440$
Portanto, entre as senhas que Jéssica pode formar, há 1.402.410.240 senhas "mais fortes" que as de Fernanda.

68. **a)** Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo	4º algarismo
26	26	26	9	10	10	10

Assim:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 158.184.000$
Logo, podemos ter 158.184.000 placas, nas condições enunciadas.

b) Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

I) Total de placas possíveis:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo	4º algarismo
26	26	26	10	10	10	10

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$

II) Total de placas com as duas primeiras letras iguais:

1ª letra	2ª letra	3ª letra	1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo	4º algarismo
26	1	26	10	10	10	10

$26 \cdot 1 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4$
Logo, no conjunto de todas as placas distintas possíveis, a porcentagem daquelas que têm as duas primeiras letras iguais é dada por: $\dfrac{26^2 \cdot 10^4}{26^3 \cdot 10^4} = \dfrac{1}{26} \approx 3{,}846\%$

69. Sendo S o conjunto das pessoas da amostra que tiveram variação acentuada na pressão sistólica e D o conjunto das pessoas da amostra que tiveram variação acentuada na pressão diastólica, temos:
$n(S \cup D) = n(S) + n(D) - n(S \cap D) \Rightarrow 30 = 18 + 20 - n(S \cap D)$
$\therefore\ n(S \cap D) = 8$
Logo, 8 pacientes tiveram a classificação *SD*.

70. **a)** Sendo n o número de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, temos:

1º colocado	2º colocado	3º colocado
15	14	13

$n = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2.730$

b) Sendo k o número de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, sendo o carro da equipe A o primeiro colocado, temos:

1º colocado (carro da equipe A)	2º colocado	3º colocado
1	14	13

$k = 1 \cdot 14 \cdot 13 = 182$

c) Sendo p o número de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, sendo o carro da equipe A o segundo colocado, temos:

1º colocado	2º colocado (carro da equipe A)	3º colocado
14	1	13

$p = 14 \cdot 1 \cdot 13 = 182$

d) O número q de maneiras diferentes de ocorrer a distribuição da pontuação, sendo o carro da equipe A o primeiro ou o segundo colocado, é a soma dos resultados obtidos nos itens **b** e **c**:
$q = 182 + 182 = 364$

71. Se a altura da grade equivale ao comprimento de x tubos, então o número de filas horizontais é $x + 1$. Assim, temos $(x + 1)y$ tubos formando as fileiras horizontais.
Se a largura da grade equivale ao comprimento de y tubos, então o número de filas verticais é $y + 1$. Assim, temos $(y + 1)x$ tubos formando as fileiras verticais.
Logo, o total de tubos que formam a grade nas condições enunciadas é dado por:
$(x + 1)y + (y + 1)x = 2xy + x + y$
Alternativa **d**.

72. Como no jogo de dominó não há duas pedras iguais, devemos considerar que não importa a ordem dos pontos nas casas. Por isso, a pedra formada pelos pontos 1 e 2 é a mesma formada pelos pontos 2 e 1. Assim, podemos fixar a pontuação de uma das casas e determinar as possibilidades da outra casa:

1	0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6
1 ·	7 = 7

ou

2	0, 2, 3, 4, 5 ou 6
1 ·	6 = 6

ou

3	0, 3, 4, 5 ou 6
1 ·	5 = 5

ou

4	0, 4, 5 ou 6
1 ·	4 = 4

Assim, o total de possibilidades é dado por:

7 + 6 + 5 + 4 = 22

73. Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

3	1		
1 ·	1 ·	8 ·	7 = 56

ou

6	2		
1 ·	1 ·	8 ·	7 = 56

ou

9	3		
1 ·	1 ·	8 ·	7 = 56

Logo, o total de números nas condições enunciadas é 56 + 56 + 56, ou seja, 168.

Alternativa **e**.

74. Indicando por P a página que contém propaganda e aplicando o princípio fundamental da contagem, temos:

Páginas

P		P		P		P		P		P	

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

ou

P			P		P		P		P		P

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

ou

P		P			P		P		P		P

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

ou

P		P		P			P		P		P

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

ou

P		P		P		P			P		P

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

ou

P		P		P		P		P			P

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

ou

	P		P		P		P		P		P

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

Logo, o número de sequências diferentes de páginas com que o diagramador pode realizar a distribuição é 7 · 720, ou seja, 5.040.

75. Os números menores que 62.417, que podem ser formados nas condições enunciadas, começam por 1 ou 2 ou 4 ou 61 ou 621. O próximo número, na sequência crescente, é 62.417. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

1, 2 ou 4				
dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
3 ·	4 ·	3 ·	2 ·	1 = 72

ou

6	1	centenas	dezenas	unidades
1 ·	1 ·	3 ·	2 ·	1 = 6

ou

6	2	1	dezenas	unidades
1 ·	1 ·	1 ·	2 ·	1 = 2

Logo, o total de números menores que 62.417 que podemos formar, nas condições enunciadas, é 72 + 6 + 2, ou seja, 80. Concluímos, então, que na sequência crescente dos números formados, nessas condições, o número 62.417 ocupa a 81ª posição.

Alternativa **d**.

76. De acordo com o enunciado, temos:

- $L = 5$;
- a demanda é determinada por:
  $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$
  60 minutos de ligações solicitadas a cada hora correspondem a 1 hora de ligações solicitadas a cada hora

Logo, $d = 1$

Assim:

$$c = \frac{\dfrac{1^5}{5!}}{1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1^2}{2!} + \dfrac{1^3}{3!} + \dfrac{1^4}{4!} + \dfrac{1^5}{5!}} \Rightarrow c \approx 0{,}3\%$$

77. O número de maneiras diferentes de serem ocupados os postos é igual ao número de sequências de n elementos distintos que podem ser formadas com p elementos distintos, ou seja: $A_{p,\,n}$.

Alternativa **c**.

78. O total n de números que podem ser formados nas condições estabelecidas é dado por:

ímpar	ímpar	ímpar	par	par	par

$\underbrace{\text{ímpar ímpar ímpar}}_{A_{5,3}} \; \underbrace{\text{par par par}}_{A_{5,3}}$

$n = A_{5,3} \cdot A_{5,3} = (A_{5,3})^2$
Alternativa **c**.

79. O total n de sequências que podem ser formadas nas condições estabelecidas é dado por:

vogal	vogal	vogal	consoante	consoante	consoante	consoante

$\underbrace{\text{vogal vogal vogal}}_{A_{5,3}} \; \underbrace{\text{consoante consoante consoante consoante}}_{A_{6,4}}$

ou

consoante	consoante	consoante	consoante	vogal	vogal	vogal

$\underbrace{\text{consoante consoante consoante consoante}}_{A_{6,4}} \; \underbrace{\text{vogal vogal vogal}}_{A_{5,3}}$

$n = A_{5,3} \cdot A_{6,4} + A_{6,4} \cdot A_{5,3} = 2 \cdot A_{5,3} \cdot A_{6,4}$
Alternativa **a**.

80. O total n de sequências que podem ser formadas nas condições estabelecidas é dado por:

1ª etiqueta	2ª etiqueta	5	4ª etiqueta	5ª etiqueta	6ª etiqueta

$A_{99,5}$

ou

1ª etiqueta	2ª etiqueta	3ª etiqueta	5	5ª etiqueta	6ª etiqueta

$A_{99,5}$

$n = A_{99,5} + A_{99,5} = 2 \cdot A_{99,5}$
Alternativa **c**.

81. Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$\underbrace{\overbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\square}^{5\text{ letras}}}_{A_{26,5}} \cdot \underbrace{\overbrace{\square\,\square\,\dots\,\square\,\square}^{(p\,-\,5)\text{ algarismos}}}_{A_{10,\,p-5}}$$

Alternativa **b**.

82.
- O número de resultados possíveis é o número de sequências de três elementos distintos escolhidos entre 8 elementos distintos, ou seja, $A_{8,3}$.
- O número de resultados possíveis contendo três jamaicanos cada um é o número de sequências de três elementos distintos escolhidos entre 4 elementos distintos, ou seja, $A_{4,3}$.
- Indicando por J um atleta jamaicano e por ~J um atleta não jamaicano, podemos calcular o número de resultados possíveis contendo exatamente dois jamaicanos cada um, da seguinte maneira:

1º	2º	3º
J	J	~J

$A_{4,2} \cdot 4$

ou

1º	2º	3º
J	~J	J

$4 \cdot A_{4,2}$

ou

1º	2º	3º
~J	J	J

$4 \cdot A_{4,2}$

Logo, o total de resultados possíveis, nessas condições, é $4A_{4,2} + 4A_{4,2} + 4A_{4,2}$, ou seja, $12A_{4,2}$.
Alternativa **d**.

83. O total n de sequências é igual ao produto do número de permutações dos cinco primeiros carros pelo número de permutações dos 15 seguintes:
$n = P_5 \cdot P_{15} = 5! \cdot 15!$
Alternativa **e**.

84. **I)** O total de sequências em que as pessoas poderiam se sentar, sem restrições, é 6!

II) Indicando as moças por M e os rapazes por R, o número de sequências em que as duas moças estariam juntas pode ser calculado considerando cada um dos pares de moças (M_1, M_2) e (M_2, M_1) um único elemento a ser permutado com os rapazes R_1, R_2, R_3 e R_4.

Para cada par de moças esse número é 5!; logo, para os dois pares o resultado é $2 \cdot 5!$.

A diferença entre os resultados obtidos em I e II, isto é, $6! - 2 \cdot 5!$, é o número de sequências em que as pessoas podem se sentar de modo que as moças não fiquem juntas.

Alternativa **a**.

85. **a)** Fixando o algarismo 1 na primeira posição, sobram 5 algarismos para serem distribuídos nas posições posteriores:

1					

$P_5 = 5! = 120$

Logo, podemos formar 120 números.

b) Fixando o algarismo 2 na última posição, sobram 5 algarismos para serem distribuídos nas posições anteriores:

					2

$P_5 = 5! = 120$

Logo, podemos formar 120 números.

c) Fixando o algarismo 1 na primeira posição à esquerda e o algarismo 2 na última, sobram 4 algarismos para serem distribuídos nas posições intermediárias:

1					2

$P_4 = 4! = 24$

Logo, podemos formar 24 números.

d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira casa à esquerda: 1, 3 ou 5. Para cada algarismo ímpar fixado na primeira posição, sobram cinco algarismos para serem distribuídos nas posições posteriores:

1, 3 ou 5

3 P_5

$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$

Assim, há 360 números que começam por algarismo ímpar.

e) Há três possibilidades para o preenchimento da última casa à direita: 2, 4 ou 6. Para cada algarismo par fixado na última posição, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições anteriores:

2, 4 ou 6

P_5 3

$P_5 \cdot 3 = 5! \cdot 3 = 120 \cdot 3 = 360$

Assim, há 360 números que terminam por algarismo par.

f) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição à esquerda e três possibilidades para a última. Fixados um algarismo ímpar na primeira posição e um algarismo par na última, sobram quatro algarismos para serem distribuídos nas posições intermediárias:

1, 3 ou 5

2, 4 ou 6

3 P_4 3

$3 \cdot P_4 \cdot 3 = 3 \cdot 4! \cdot 3 = 3 \cdot 24 \cdot 3 = 216$

Há, portanto, 216 números que começam por algarismo ímpar e terminam por algarismo par.

g) Considerando o bloco 245 um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos quatro elementos 245, 1, 3 e 6 é dado por:

$P_4 = 4! = 24$

Logo, existem 24 números nas condições estabelecidas.

h) Nesse caso, um bloco composto de 2, 4, 5 pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: 245, 254, 425, 452, 524 e 542.

Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_4 = 4! = 24$ números, conforme vimos no item **g**. Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 24 = 144$ números.

Ou seja, o total de números naturais diferentes que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:

$P_3 \cdot P_4 = 3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$

i) Para cada número formado com 1 à esquerda do 2, podemos associar um único número com o 2 à esquerda do 1, bastando, para isso, permutar apenas os algarismos 1 e 2; por exemplo:

- associa-se o número 123.456 ao número 213.456;
- associa-se o número 561.432 ao número 562.431.

Assim, deduzimos que a quantidade n de números que apresentam o 1 antes do 2 é igual à quantidade de números que apresentam o 2 antes do 1. Como o total de números naturais de seis algarismos distintos que podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é P_6, concluímos que:

$n = \frac{P_6}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$

86. **a)** Fixando o algarismo 3 na casa das unidades, sobram $n - 1$ algarismos para serem distribuídos nas casas restantes:

	...	centenas	dezenas	3

P_{n-1}

Logo, o total de números que podem ser formados nas condições estabelecidas é dado por:

$P_{n-1} = (n - 1)!$

b) Para a casa das unidades há $n - 1$ possibilidades. Fixada uma delas, sobram $n - 1$ algarismos para serem distribuídos nas casas restantes:

	...	centenas	dezenas	unidades

P_{n-1} $n - 1$

Logo, o total de números que podem ser formados nas condições estabelecidas é dado por:

$(n - 1) \cdot P_{n-1} = (n - 1) \cdot (n - 1)!$

Outro modo

Do total de números que podem ser formados com os n algarismos, subtraímos o total de números que terminam por 3:

$n! - (n - 1)! = n(n - 1)! - (n - 1)! = (n - 1) \cdot (n - 1)!$

87. a) $P_{n+4} = (n + 4)!$

b)

mulheres P_n			homens P_4			

ou

homens P_4				mulheres P_n		

Logo, o número de sequências diferentes em que as pessoas podem ocupar as cadeiras de modo que os homens fiquem juntos e as mulheres fiquem juntas é dado por:

$P_n \cdot P_4 + P_4 \cdot P_n = 48 \cdot n!$

c) Fixada uma ordem para os homens, que devem estar juntos, podemos considerá-los um único elemento a ser permutado com as n mulheres. Assim, para que os homens fiquem juntos, na ordem prefixada, o número de sequências em que as pessoas podem ocupar as cadeiras é dado por P_{n+1}. Como os homens podem ficar juntos em P_4 sequências diferentes, concluímos que o número de sequências em que as pessoas podem ocupar as cadeiras, estando os homens juntos em qualquer ordem, é dado por:

$P_4 \cdot P_{n+1} = 4!(n + 1)! = 24(n + 1)!$

88. Fixando uma vogal na primeira posição, restam $n - 1$ letras para serem distribuídas nas posições posteriores:

vogal				
3	P_{n-1}			

Logo:

$3 \cdot P_{n-1} = 2.160 \Rightarrow 3(n - 1)! = 2.160$

$\therefore (n - 1)! = 720 \Rightarrow n = 7$

89. a) $P_5 = 5! = 120$

b) Inicialmente vamos considerar os números cujo algarismo da casa das dezenas de milhar seja igual a 1 ou 2:

1 ou 2				
2	P_4			

Agora fixamos o algarismo 3 na casa das dezenas de milhar e consideramos que o algarismo da casa das unidades de milhar pode ser 1 ou 2:

3	1 ou 2			
1	2	P_3		

Depois, considerando os algarismos 3 e 4 nas casas das dezenas de milhar e unidades de milhar, respectivamente, o algarismo das centenas só pode ser 1:

3	4	1		
1	1	1	P_2	

Logo, o total n de números menores que 34.215 que podem ser formados é dado por:

$n = 2 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + P_2 = 2 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2! = 62$

c) No item **b**, mostramos que, entre os 120 números que podem ser formados, existem exatamente 62 menores que 34.215. Logo, colocados em ordem crescente os 120 números, o número 34.215 ocupará a 63ª posição.

90. Os números naturais de cinco algarismos distintos e menores que 75.913, que podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, são aqueles que começam por 1 ou 3 ou 5 ou 71 ou 73 ou 751 ou 753. O próximo número, na sequência crescente, é 75.913. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

dezenas de milhar (1, 3 ou 5)	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades	
3 ·	4 ·	3 ·	2 ·	1	= 72

7	unidades de milhar (1 ou 3)	centenas	dezenas	unidades	
1 ·	2 ·	3 ·	2 ·	1	= 12

7	5	centenas (1 ou 3)	dezenas	unidades	
1 ·	1 ·	2 ·	2 ·	1	= 4

Logo, o total de números menores que 75.913 que podemos formar, nas condições enunciadas, é 72 + 12 + 4, ou seja, 88. Concluímos, então, que na sequência crescente dos números formados, nas condições enunciadas, o número 75.913 ocupa a 89ª posição.

Alternativa **e**.

91. a) $P_9^{(4)} = \dfrac{9!}{4!} = 15.120$

b) $P_8^{(3,\,2,\,2)} = \dfrac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1.680$

92. a) $P_8^{(3,\,2)} = \dfrac{8!}{3! \cdot 2!} = 3.360$

b)

R							
1	$P_7^{(3)}$						

Logo, o número de anagramas que começam por R é dado por:

$P_7^{(3)} = \dfrac{7!}{3!} = 840$

c) As consoantes são R, M e D. Como há repetição da letra R, separamos em dois casos:

- anagramas que começam por R: no item **b** vimos que são 840;

- anagramas que começam por M ou D:

M ou D

$$\underbrace{\square}_{2}\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square}_{P_7^{(3,\,2)}}$$

Logo, o número de anagramas que começam por consoante é dado por:

$840 + 2 \cdot P_7^{(3,\,2)} = 840 + 2 \cdot \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} =$

$= 840 + 2 \cdot 420 = 1.680$

d)

$$\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square}_{P_7^{(2,\,2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

Logo, o número de anagramas que terminam por A é dado por:

$P_7^{(2,\,2)} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2!} = 1.260$

e) As vogais são A e U. Como há repetição da letra A, separamos em dois casos:

- anagramas que terminam por A: no item **d** vimos que são 1.260;
- anagramas que terminam em U:

$$\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square}_{P_7^{(3,\,2)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

Logo, o número de anagramas que terminam em vogal é dado por:

$1.260 + P_7^{(3,\,2)} = 1.260 + \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 1.260 + 420 = 1.680$

f) Vamos analisar cada caso possível de anagramas que satisfazem a condição dada:

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{P_6^{(2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

$$\underbrace{\boxed{R}}_{1}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{P_6^{(3)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

$$\underbrace{\boxed{D}}_{1}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{P_6^{(2,\,2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

$$\underbrace{\boxed{D}}_{1}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{P_6^{(3,\,2)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

$$\underbrace{\boxed{M}}_{1}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{P_6^{(2,\,2)}}\underbrace{\boxed{A}}_{1}$$

$$\underbrace{\boxed{M}}_{1}\underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{P_6^{(3,\,2)}}\underbrace{\boxed{U}}_{1}$$

Concluímos, então, que o total de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é dado por:

$P_6^{(2)} + P_6^{(3)} + 2 \cdot P_6^{(2,\,2)} + 2 \cdot P_6^{(3,\,2)} =$

$= \dfrac{6!}{2!} + \dfrac{6!}{3!} + 2 \cdot \dfrac{6!}{2! \cdot 2!} + 2 \cdot \dfrac{6!}{3! \cdot 2!} =$

$= 360 + 120 + 360 + 120 = 960$

g) Considerando o bloco MD um único elemento a ser permutado com as demais letras, o número de permutações dos 7 elementos MD, A, R, A, U, R e A é dado por:

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

h) Nesse caso, um bloco composto de M e D pode ter $P_2 = 2! = 2$ formas diferentes: MD e DM.

Para cada uma delas, podemos formar

$P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ anagramas, conforme vimos no item **g**. Logo, com os dois blocos podemos formar $2 \cdot 420 = 840$ anagramas. Ou seja, o total de anagramas que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por:

$2 \cdot P_7^{(3,\,2)} = 2 \cdot 420 = 840$

93. **I)** O total de anagramas da palavra AMIGA é $P_5^{(2)} = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

II) Para calcular o número de anagramas da palavra AMIGA, em que aparece o grupo AA, consideramos esse grupo um único elemento a ser permutado com os elementos M, I, G. Assim, obtemos $P_4 = 4! = 24$.

A diferença entre os resultados obtidos em I e II é o número de anagramas nos quais não aparece o grupo AA: $60 - 24 = 36$

Alternativa **a**.

94. O número n de *bytes*, nas condições estabelecidas, é o total de permutações dos oito elementos: 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ou seja:

$n = P_8^{(3,\,5)} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

95. Indicando por A, B e C as barras de larguras 1,5 mm, 0,5 mm e 0,25 mm, respectivamente, o total de preços diferentes que podem ser representados por esse sistema de códigos é o número de permutações dos 9 elementos A, A, A, A, B, B, B, C e C, ou seja:

$P_9^{(4,\,3,\,2)} = \dfrac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1.260$

96. Para ir do ponto *A* ao ponto *B*, o cursor deve deslocar-se 11 unidades para a direita e 4 unidades para cima. Assim, o número n de sequências diferentes de digitações das teclas $\boxed{\rightarrow}$ e $\boxed{\uparrow}$ que levam o cursor de *A* a *B* é o número de permutações dos 15 elementos:

$\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow$, e $\uparrow$, ou seja:

$P_{15}^{(11,\,4)} = \dfrac{15!}{11! \cdot 4!} = 1.365$

97. Sendo, respectivamente, m, p, b, s e g o número de maçãs, peras, bananas, pêssegos e mangas que o paciente deve consumir em um dia, devemos ter:

$m + p + b + s + g = 3$

Repetindo o raciocínio do exercício técnico 22, temos que o número de soluções dessa equação é o número de permutações dos elementos $|||{+}{+}{+}{+}$, ou seja, o número de permutações de 7 elementos com 3 elementos iguais ao símbolo $|$ e quatro elementos iguais ao símbolo $+$. Assim, temos:

$P_7^{(3,\,4)} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

Logo, o paciente pode escolher três tipos de fruta de 35 maneiras diferentes.

98. No sorteio dos times para a formação do grupo A não importa a ordem dos times sorteados; logo, esse grupo é uma combinação de 4 times escolhidos entre os 12.

No sorteio dos dois times do grupo A, para a realização do jogo de abertura, importa a ordem dos sorteados; logo, esses dois times representam um arranjo simples de 2 times escolhidos entre os 12.

Alternativa **a**.

99. **a)** Como no cubo não há três vértices colineares distintos, o número de triângulos é dado por:

$$C_{8,\,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

b) Ao vértice V_1 devemos juntar outros dois vértices distintos quaisquer entre os 7 restantes.

Logo, o número de triângulos que podemos formar nessas condições é dado por:

$$C_{7,\,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$$

c) Entre os triângulos do item **a**, o número de triângulos contidos em cada face do cubo é $C_{4,\,3}$. Como o cubo tem 6 faces, concluímos que o número de triângulos é dado por:

$$6 \cdot C_{4,\,3} = 6 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 24$$

100. $C_{60,\,6} = \dfrac{60!}{6! \cdot 54!} = \dfrac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= 50.063.860$

101.
- Há um símbolo que identifica cada uma das seguintes cores: preto, branco, azul, amarelo e vermelho, totalizando 5 cores;
- Em suas tonalidades normais, as três cores primárias podem ser combinadas duas a duas, formando três cores secundárias, obtendo mais 3 cores;
- Podemos, ainda, clarear ou escurecer cada uma das seis cores primárias ou secundárias, formando 12 cores.

Logo, o total de cores que podem ser representadas, de acordo com as informações do enunciado, é $5 + 3 + 12 = 20$.

Alternativa **c**.

102. **a)** Como dois conjuntos quaisquer de duas dessas moedas representam valores monetários diferentes, o número de valores monetários diferentes que podem ser obtidos com duas moedas é dado por $C_{5,\,2} = 10$.

b) $C_{5,\,2} + C_{5,\,3} + C_{5,\,4} + C_{5,\,5} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$

Logo, com duas ou mais moedas, podem ser obtidos 26 valores monetários diferentes.

103. Sendo n o número de times, temos:

$$C_{n,\,2} = 55 \Rightarrow \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 55$$

$$\therefore \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n^2 - n - 110 = 0$$

$\therefore n = 11$ ou $n = -10$ (não convém)

Assim, concluímos que exatamente 11 times participam do campeonato.

104. Sendo $m_1, m_2, m_3, m_4, ..., m_{10}$ as dez matérias das quais m_1 e m_2 são obrigatórias, o número de escolhas contendo m_1, m_2 e mais quatro matérias escolhidas entre as oito restantes é $C_{8,\,4} = 70$.

Logo, a escolha pode ser feita de 70 maneiras diferentes.

105. O número de possibilidades distintas para a formação do grupo é dado por:

$C_{8,\,3} \cdot C_{2,\,2} = 56 \cdot 1 = 56$

Alternativa **a**.

106. $C_{6,\,3} \cdot C_{6,\,2} = 20 \cdot 15 = 300$

Assim, o grupo pode ter exatamente 300 formações diferentes.

107. O número de possibilidades distintas para a formação da comissão é dado por:

$C_{6,\,3} \cdot C_{8,\,5} = 20 \cdot 56 = 1.120$

Alternativa **d**.

108. $C_{6,\,3} \cdot C_{4,\,2} \cdot C_{8,\,5} = 20 \cdot 6 \cdot 56 = 6.720$

Logo, podem ser formadas exatamente 6.720 provas diferentes.

109. $C_{9,\,3} \cdot C_{6,\,3} = 84 \cdot 20 = 1.680$

Assim, podem resultar dessa pintura exatamente 1.680 figuras diferentes.

Alternativa **b**.

110.
I) O número total de equipes formadas por 5 pessoas quaisquer entre os 12 empregados é dado por $C_{12,\,5} = 792$.

II) O número de equipes formadas por 5 homens entre os 12 empregados é dado por $C_{5,\,5} = 1$.

III) O número de equipes formadas por 5 mulheres entre os 12 empregados é dado por $C_{7,\,5} = 21$.

A diferença entre o resultado obtido no item I e a soma dos resultados obtidos nos itens II e III é o total de equipes que o diretor poderá formar de maneira que cada uma contenha pelo menos um homem e pelo menos uma mulher:

$792 - (1 + 21) = 770$

Alternativa **a**.

111. A comissão pode ser formada por, no máximo, 2 suspeitos. Logo, o número n de comissões que podem ser formadas é dado por:

$n = C_{6,\,1} \cdot C_{4,\,4} + C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,3} = 6 \cdot 1 + 15 \cdot 4 = 66$

112. Sejam:
- t o total de comissões de quatro pessoas que podem ser formadas pelas dez pessoas, isto é:
  $t = C_{10,\,4} = 210$
- k o número de comissões de quatro pessoas que podem ser formadas com os cinco homens, isto é:
  $k = C_{5,\,4} = 5$
- n o número de comissões, entre o total t, que contenham pelo menos uma mulher em cada uma.
  Temos, então:
  $n = t - k = 210 - 5 = 205$

Logo, podem ser formadas exatamente 205 comissões de acordo com as condições estabelecidas.

113. $\underbrace{\boxed{\text{Caixa A}}}_{C_{7,\,5}}\underbrace{\boxed{\text{Caixa B}}}_{C_{2,\,2}}$

$C_{7,\,5} \cdot C_{2,\,2} = 21 \cdot 1 = 21$

Logo, o total de maneiras como as bolas podem ser distribuídas nas duas caixas é 21.

114. $\underbrace{\boxed{\text{Gaveta A}}}_{C_{10,\,5}}\underbrace{\boxed{\text{Gaveta B}}}_{C_{5,\,3}}\underbrace{\boxed{\text{Gaveta C}}}_{C_{2,\,2}}$

$C_{10,\,5} \cdot C_{5,\,3} \cdot C_{2,\,2} = 2.520$

Logo, os documentos podem ser distribuídos nas gavetas de 2.520 maneiras diferentes.

115. Para que a soma de três números naturais seja ímpar, devemos ter apenas um número ímpar ou os três números ímpares.

$\underbrace{\boxed{\text{1 ímpar}}}_{C_{10,\,1}}\underbrace{\boxed{\text{2 pares}}}_{C_{10,\,2}}$

ou

$\underbrace{\boxed{\text{3 ímpares}}}_{C_{10,\,3}}$

Assim, o número de maneiras diferentes de escolher 3 números naturais, de 1 a 20, de modo que a soma deles seja ímpar é dado por:

$C_{10,\,1} \cdot C_{10,\,2} + C_{10,\,3} = 10 \cdot 45 + 120 = 570$

Alternativa **c**.

116. $\underbrace{\boxed{\text{1ª coluna}}}_{C_{6,\,2}}\underbrace{\boxed{\text{2ª coluna}}}_{C_{4,\,2}}\underbrace{\boxed{\text{3ª coluna}}}_{C_{2,\,2}}$

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que o número n de modos de pintar os quadrinhos, de acordo com a condição estabelecida, é dado por:

$n = C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,2} \cdot C_{2,\,2} = 15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$

117. Total de jogos do campeonato: $2 \cdot C_{20,\,2} = 380$

Total de jogos do campeonato entre times paulistas: $2 \cdot C_{6,\,2} = 30$

Logo, o percentual de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é dado por:

$$\frac{30}{380} \approx 7{,}9\%$$

Alternativa **b**.

118. Indicando por n o número de amigas, devemos ter $C_{n,\,2} \geqslant 25$, ou seja:

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} \geqslant 25 \Rightarrow n^2 - n - 50 \geqslant 0$$

$\therefore\ n \leqslant -6{,}6$ ou $n \geqslant 7{,}6$

O menor número natural n que satisfaz essa condição é 8; logo, o menor número possível de amigas que Maira poderá convidar é 8.

119. O montante M resgatado é dado por:

$M = 1.000 \cdot (1 + 0{,}01)^{100}$

Pelo binômio de Newton:

$$(1 + 0{,}01)^{100} > \binom{100}{0} \cdot 1^{100} \cdot (0{,}01)^0 + \binom{100}{1} \cdot 1^{99} \cdot (0{,}01)^1 + $$
$$+ \binom{100}{2} \cdot 1^{98} \cdot (0{,}01)^2 \Rightarrow (1 + 0{,}01)^{100} > 2{,}495$$

Logo:

$M > 1.000 \cdot 2{,}495 \Rightarrow M > 2.495$

Concluímos, então, que o montante resgatado é suficiente para a compra, à vista, de um computador no valor de R$ 2.490,00.

Pré-requisitos para o capítulo 9

1. **a)** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

2. **a)** Um elemento pertence a A ou a B se, e somente se, pertence à união de A e B. Como essa união possui 9 elementos, concluímos que a resposta a esse item é 9.

b) Um elemento pertence a A e a B se, e somente se, pertence à intersecção de A e B. Como essa intersecção possui 3 elementos, concluímos que a resposta a esse item é 3.

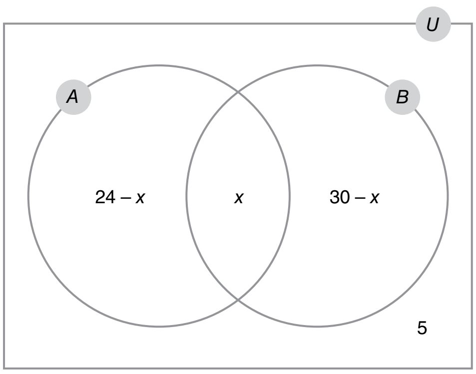
c) O elemento escolhido deve pertencer à intersecção de A e B. Logo, a resposta a esse item é 3.

d) O elemento escolhido deve pertencer à intersecção de A e B. Logo, a resposta a esse item é 3.

3. Ao adicionar o número de elementos de A ao número de elementos de B, adicionamos duas vezes a quantidade de elementos da intersecção de A e B. Por isso, para o cálculo de $n(A \cup B)$ devemos subtrair da soma $n(A) + n(B)$ o número $n(A \cap B)$.

Alternativa **d**.

4. Indicando por U o conjunto dos alunos entrevistados, por A o conjunto desses alunos que leem jornal e por B o conjunto desses alunos que leem revista, temos que o número x desses alunos que leem jornal e revista pode ser obtido pelo esquema:



Logo: $24 - x + x + 30 - x + 5 = 41 \Rightarrow x = 18$

Assim, 18 dos alunos entrevistados leem jornal e revista.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. A correspondência entre as letras da frase cifrada e as letras da frase decifrada é:

D Y D Q F H P F R Q W U D R V J D X O H V H V

↓ ↓

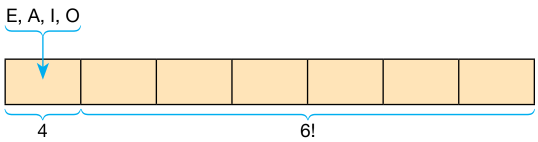
A V A N C E M C O N T R A O S G A U L E S E S

Logo, a frase decifrada é: AVANCEM CONTRA OS GAULESES.

Análise da resolução

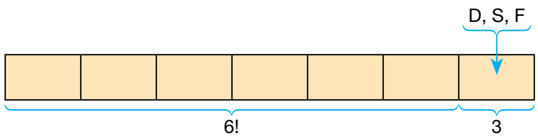
COMENTÁRIO: Há um erro na resolução, pois há anagramas que começam por vogal e terminam por consoantes: por exemplo, ADEFIOS. Assim, na soma 2.880 + 2.160, cada um desses anagramas foi computado duas vezes.

Resolução correta:
Sendo V o conjunto de anagramas da palavra DESAFIO que começam por vogal e T o conjunto dos anagramas da palavra DESAFIO que terminam por consoante, temos:
$n(V \cup T) = n(V) + n(T) - n(V \cap T)$
Ou seja, para obter o número de anagramas que começam por vogal ou terminam por consoante devemos adicionar o número de anagramas que começam por vogal ao número de anagramas que terminam por consoante e, desse total, subtrair o número de anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.
Calculando o número de elementos de V, anagramas que começam por vogal:



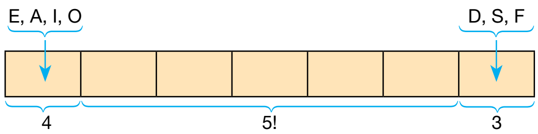
Logo, $n(V) = 4 \cdot 6! = 4 \cdot 720 = 2.880$

Calculando o número de elementos de T, anagramas que terminam por consoante:



Logo, $n(T) = 6! \cdot 3 = 2.160$

Calculando o número de elementos de $V \cap T$, anagramas que começam por vogal e terminam por consoante:



Logo, $n(V \cap T) = 4 \cdot 5! \cdot 3 = 1.440$
Concluímos, então:
$n(V \cup T) = n(V) + n(T) - n(V \cap T) \Rightarrow n(V \cup T) = 2.880 + 2.160 - 1.440 = 3.600$
Ou seja, o número de anagramas da palavra DESAFIO que começam por vogal ou terminam por consoante é 3.600.