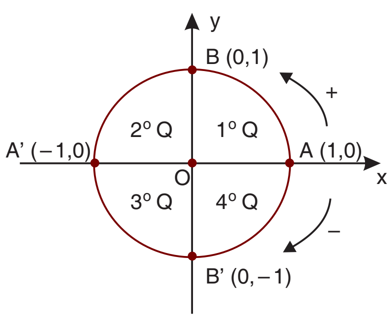
Funções Trigonométricas

1 -Círculo Trigonométrico

Definição: É uma circunferência orientada de raio unitário centrada na origem do sistema cartesiano.



Observações:

- O círculo trigonométrico é composto por 4 quadrantes ordenados no sentido anti-horário.
- No círculo trigonométrico, os arcos correspondentes aos ângulos centrais positivos são medidos no sentido anti-horário a partir do eixo x.
- Cada quadrante fornece um arco de 90° ou (π/2) rad.
- As projeções ortogonais dos arcos sobre os eixos cartesianos y e x serão representações, respectivamente, para o seno e cosseno de um ângulo central relativo a um respectivo arco.

1.1 - Arcos Congruentes

Arcos Congruentes são os que possuem mesma extremidade.

Exemplo:

(π/6)rad e (13π/6)rad

Arcos congruentes fornecem ângulos centrais que possuem os mesmos valores em relação a todas as razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente, etc).

Para obter um arco congruente a outro que não pertence à primeira volta positiva no círculo trigonométrico, basta dividir o ângulo (se este for dado em graus) por 360. O resto da divisão representará o arco congruente.

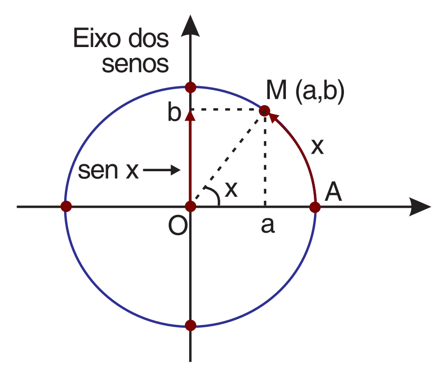
Exemplo:

1700°: Arco Congruente = 1700/360 = 4

e o resto = 260°, que é o arco congruente a 1700°.

1.2 - Seno de um Arco na Circunferência Trigonométrica

É dado pela projeção ortogonal do ponto M relativo à extremidade do arco até o eixo y.



sen(x) = b

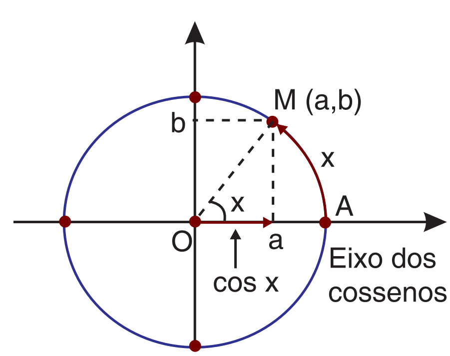
Conclusões importantes:

sen(α) = sen(180° − α)

sen(α) = − sen(− α)

1.3 - Cosseno de um Arco na Circunferência Trigonométrica

É dado pela projeção ortogonal do ponto M relativo à extremidade do arco até o eixo x.



cos (x) = a

Observações importantes:

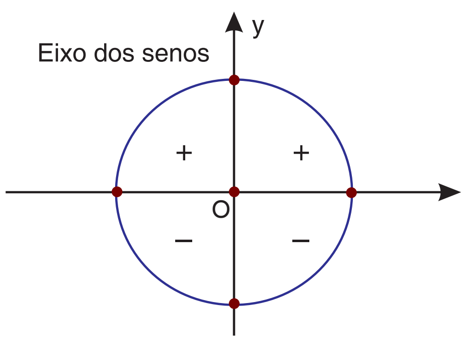
cos (α) = − cos (180° − α)

cos (α) = cos (− α)

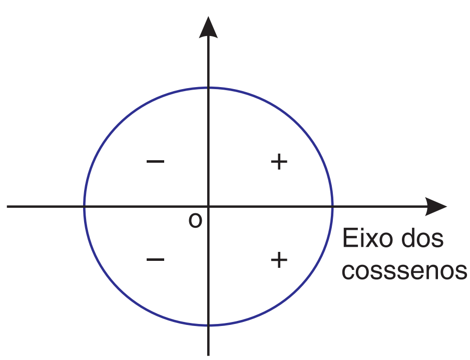
1.4 - Sinais para o Seno e o Cosseno

Como os arcos são projetados sobre os eixos coordenados, valores positivos e negativos aparecerão para o seno e para o cosseno.

Como o seno é medido no eixo y, ângulos de 1º e 2º quadrantes fornecem seno positivo, enquanto no 3º e 4º quadrantes o seno será negativo.



O cosseno é medido no eixo x, logo, para o 1º e 4º quadrantes, o cosseno será positivo. No 2º e 3º quadrantes, o cosseno será negativo.



Observações:

- Como o seno e o cosseno são medidos dentro do círculo trigonométrico, que é de raio unitário, eles possuem o intervalo de variação de – 1 a 1.

$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

- Como as projeções dos arcos no círculo trigonométrico fornecem triângulos retângulos de catetos iguais ao seno e ao cosseno do respectivo ângulo, e como o raio unitário representa a hipotenusa desse triângulo, segue que:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (Relação Fundamental)

- Além dos ângulos notáveis do triângulo retângulo (30°,45° e 60°) é importante sabermos seno e cosseno de alguns outros ângulos. Segue para os demais ângulos de 0°, 90°,180°,270° e 360° fornecidos em radianos na tabela a seguir, os valores para o seno e o cosseno.

Arco x (rad)	Extremidade	Abscissa = cos x	Ordenada = sen x
0	A (1,0)	1	0
$\pi/2$	B (0,1)	0	1
π	C (– 1,0)	– 1	0
$3\pi/2$	D (0, – 1)	0	– 1
2π	A (1,0)	1	0

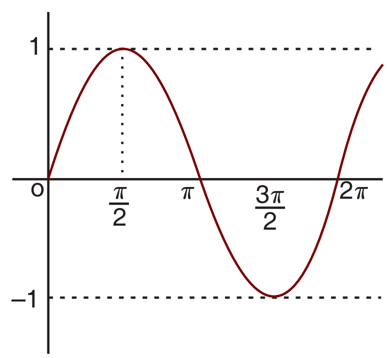
2 - Funções Trigonométricas

Existem situações na vida real que são periódicas (que têm repetição) como por exemplo o movimento de um pêndulo simples, ou de um corpo preso a uma mola oscilando. Esses tipos de situações são representados por funções trigonométricas do tipo senóides ou cossenóides.

Função seno

Um gráfico muito importante é o gráfico da função sen x.

$F(x) = \text{sen}\ x$

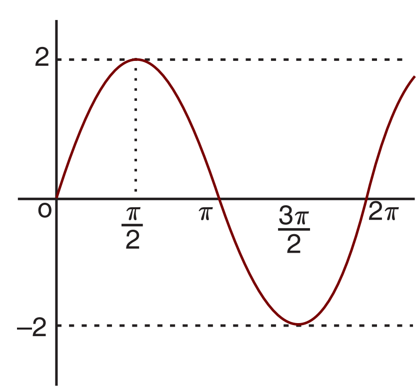


Amplitude: 1
Imagem: [–1,1]
Período: 2π
Valor de equilíbrio: 0

Agora vamos fazer algumas alterações na função seno e vamos ver o que ocorre com seu gráfico.

Gráfico I

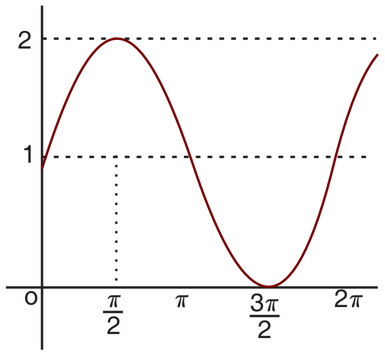
$F(x) = 2\ \text{sen}\ (x)$



Amplitude: 2
Imagem: [–2,2]
Período: 2π
Valor de equilíbrio: 0
Verifique que a amplitude é o número que multiplica o sen x.

Gráfico II

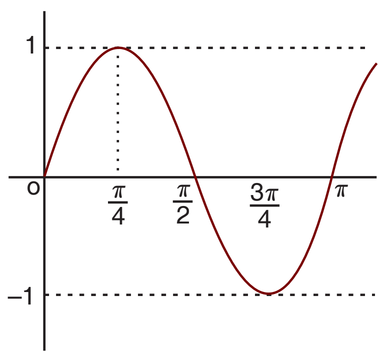
F(x) = sen (x)+1



Amplitude: 1
Imagem: [0,2]
Período: 2π
Valor de equilíbrio: 1
Verifique que o valor de equilíbrio é o número que estamos somando ao sen x.

Gráfico III

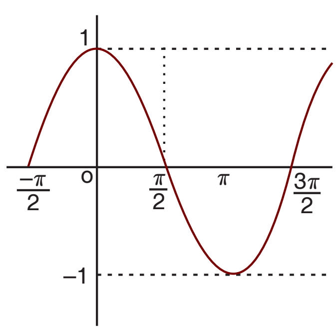
F(x) = sen (2x)



Amplitude: 1
Imagem: [–1,1]
Período: π
Ponto de equilíbrio: 0
Verifique que o período foi alterado, pois: período de $\text{sen}\,(kx) = \frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$

Gráfico IV

F(x) = sen (x+ π/2)



Amplitude: 1
Imagem: [–1,1]
Período: 2π
Ponto de equilíbrio: 0
Verifique que o gráfico foi transladado de $\pi/2$ para a esquerda. Caso tivéssemos sen(x – π/2), o gráfico teria sido transladado de $\pi/2$ para a direita.

Observação: A função cossenoide se comporta como a senoide com uma diferença: No ângulo 0 o seno é 0, e o cosseno é 1.

Exemplo: Um bloco preso a uma mola oscila de acordo com a função F(t)= 3 sen(2t) + 4, sendo F(t) a posição do bloco no tempo t minutos após o início da oscilação. Determine:

A) Qual a posição inicial do bloco? A posição inicial é quando t=0, ou seja:
F(0) = 3 sen (0) + 4 = 4, logo a posição inicial é 4.

B) Entre quais posições o bloco fica oscilando? Vimos pelo gráfico I que a amplitude é o valor que está multiplicando a função seno, que, no caso, é 3. Como a posição inicial é 4, se somarmos 3 a essa posição e subtrairmos 3, temos a oscilação, que, portanto, será de 1 a 7.

C) Qual o período de oscilação? Temos pelo gráfico III que o período de sen(kx) é $\frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$ e que, nesse caso, k = 2. Logo, o período de oscilação é $\frac{2\pi}{2} = \pi$.