NÚMEROS COMPLEXOS

GABARITO COMENTADO

1)

a. $i^k = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \; mód \; 4 \\ i, & k \equiv 1 \; mód \; 4 \\ -1, & k \equiv 2 \; mód \; 4 \\ -i, & k \equiv 3 \; mód \; 4 \end{cases}$

b. $2i$

c. $-2i$

d. $(2i)^{100} + (-2i)^{100} = 2^{100} + 2^{100} = 2^{101}$

e. $\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right)^{1010} = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^{1010} = (-1)^{1010} = 1$

2) (**Letra A**) Analisando as afirmativas:

I. (**Verdadeira**) Sejam a, b reais. Logo:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = a \\ z_1 - z_2 = b \end{cases} \Rightarrow z_1 = \frac{a+b}{2}; z_2 = \frac{a-b}{2}$$

Portanto, como z_1 e z_2 são soma e diferença de reais, ambos são reais.

II. (**Falsa**) Como contraexemplo, seja $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Veja que $z_1 \cdot z_2 = -i^2 = 1 \in \mathbb{R}$ e $\frac{z_1}{z_2} = -1 \in \mathbb{R}$ mas z_1 e z_2 não são reais.

III. (**Falsa**) Como contraexemplo, seja $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Veja que $z_1 + z_2 = 0 \in \mathbb{R}$ e $z_1 \cdot z_2 = -i^2 = 1 \in \mathbb{R}$, mas z_1 e z_2 não são reais.

3) (**Letra B**) Desenvolvendo a equação, temos:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1 + i \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x+iy} = 1 + i \Leftrightarrow \frac{1}{x+iy} = 2 + i$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \text{ e } y = -\frac{1}{5}$$

Logo, $5x + 15y = 5 \cdot \frac{2}{5} + 15 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \boxed{-1}$.

4) Em Complexos, encontrar as raízes quadradas de um complexo z é encontrar as soluções x da equação $x^2 = z$. Diferentemente dos reais, em que temos restrição de sinal, em Complexos teremos as duas soluções como possibilidade. Assim, as raízes de $3 + 4i$ são os números $a + bi$ tais que:

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 3 + 4i$$

Logo:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (2,1) \text{ ou } (a, b) = (-2, -1)$$

Sendo assim, as raízes de $3 + 4i$ são $2 + i$ e $-2 - i$.

5)

a. $z = cis\ 0$

b. $z = \sqrt{2}\ cis\,\frac{\pi}{4}$

c. $z = cis\,\frac{\pi}{3}$

d. $z = cis\ \pi$

e. $z = cis\,\frac{5\pi}{3}$

f. $z = cis\,\frac{\pi}{2}$

g. $z = cis\,\frac{3\pi}{2}$

h. $z = cis\,\frac{3\pi}{4}$

i. $z = 5\ cis\ \theta$, com $\theta = \arctan\frac{4}{3}$

j. $z = 2\cos\frac{\theta}{2}\ cis\,\frac{\theta}{2}$

k. $z = -2i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\ cis\,\frac{\theta}{2}$

6) Veja que $\omega = cis\,\frac{2\pi}{3}$. Logo:

a. $\omega^2 = cis\,\frac{4\pi}{3}$ e $\omega^3 = 1$. Sendo assim, as potências de ω se repetem de 3 em 3. Assim:

$$\omega^n = \begin{cases} \omega, & n \equiv 1\ mód\ 3 \\ \omega^2, & n \equiv 2\ mód\ 3 \\ 1, & n \equiv 0\ mód\ 3 \end{cases}$$

b. Se $\omega^3 = 1$, então $\omega^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$. Como $\omega \neq 1$, então $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

7) Veja que $\omega = cis\,\frac{\pi}{3}$. Logo:

a. $\omega^2 = cis\,\frac{2\pi}{3}$, $\omega^3 = cis\,\frac{3\pi}{3}$, $\omega^4 = cis\,\frac{4\pi}{3}$, $\omega^5 = cis\,\frac{5\pi}{3}$ e $\omega^6 = 1$. Sendo assim, as potências de ω se repetem de 6 em 6. Assim:

$$\omega^n = \begin{cases} \omega, & n \equiv 1 \text{ mód } 3 \\ \omega^2, & n \equiv 2 \text{ mód } 3 \\ \omega^3, & n \equiv 3 \text{ mód } 3 \\ \omega^4, & n \equiv 4 \text{ mód } 3 \\ \omega^5, & n \equiv 5 \text{ mód } 3 \\ 1, & n \equiv 0 \text{ mód } 3 \end{cases}$$

b. Se $\omega^6 = 1$, então $\omega^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) = 0$. Como $\omega \neq 1$, então $\omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$.

8) (**Letra D**) As raízes n-ésimas de um complexo são tais que seus argumentos dividem o plano complexo em n partes iguais. Sendo assim, a soma vetorial destas n raízes é igual a zero. Portanto:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

9)

a. $x = 2\, cis \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0{,}1{,}2$
b. $x = 2\, cis \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), k = 0{,}1{,}2$
c. $x = \pm 1$ ou $x = \pm i$
d. $x = 3\, cis \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6}\right), k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$
e. Fazendo $x^3 = y$, temos $y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = cis \frac{2\pi}{3}$ ou $y = cis \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $x^3 = cis \frac{2\pi}{3}$ ou $x^3 = cis \frac{4\pi}{3}$, o que nos dá:

$x = cis \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)$ ou $x = cis \left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

10)(**Letra C**) Faça $x = z - 1 + i$ e então $x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ou $x = \pm i$. Assim:

$$z - 1 + i = 1 \Leftrightarrow \boxed{z = 2 - i}$$
$$z - 1 + i = -1 \Leftrightarrow \boxed{z = -i}$$
$$z - 1 + i = i \Leftrightarrow \boxed{z = 1}$$
$$z - 1 + i = -i \Leftrightarrow \boxed{z = 1 - 2i}$$

Analisando as opções, perceba que é incorreto afirmar que o conjugado da solução de maior argumento é 1+2i, pois a solução de maior argumento é $z = 2 - i$.

11)(**Letra B**) Veja que:

$$\left(\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54} = \left(cis\frac{\pi}{5}\right)^{54} = cis\frac{54\pi}{5} = cis\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} = -a + bi$$

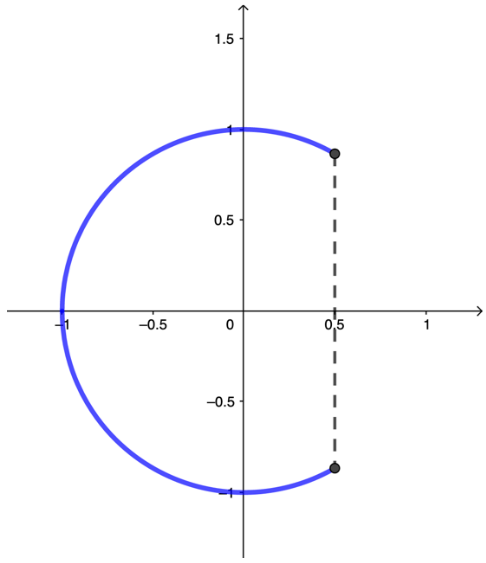
pois $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$ e $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$, uma vez que $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$.

12)(**Letra D**) Usando as informações do problema, temos:

I. $Re\left(x + i - \frac{1}{2}i\right) \leq Im\left(x + i - \frac{1}{2}i\right) \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

II. $|(-1+2i)\cdot(x+yi)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Assim, no plano complexo, as soluções que satisfazem estas condições são os complexos que estão sobre a circunferência unitária centrada na origem, cujas partes reais são menores ou iguais a ½.



Portanto, o complexo de menor argumento será aquele cuja abcissa é $x = \frac{1}{2}$ e ordenada positiva, ou seja, $z = cis\frac{\pi}{3}$.

13)(**Letra B**) É muito legal você enxergar módulos como tamanhos, distâncias. Veja que $|\alpha|$ e $|\beta|$ podem ser interpretados como o módulo de dois vetores unitários α e β, tais que o módulo do vetor diferença $\alpha - \beta$ é $\sqrt{2}$. Isso sugere imediatamente Pitágoras! Se dois catetos de um triângulo retângulo são iguais a 1, a hipotenusa mede $\sqrt{2}$. Logo, os vetores α e β são perpendiculares, e isto pode ser escrito assim: $\alpha = \pm i\beta$. Portanto, $\alpha^2 + \beta^2 = (i\beta)^2 + \beta^2 = -\beta^2 + \beta^2 = 0$.

Uma outra ideia muito útil em problemas envolvendo números complexos é o fato de que $z\cdot\bar{z} = |z|^2$. Neste problema, podemos usar da seguinte maneira:

$$|\alpha| = |\beta| = 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha\cdot\bar{\alpha} = \beta\cdot\bar{\beta} = 1$$

Agora:

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})=2$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\bar{\alpha}+\beta\cdot\bar{\beta}+\alpha\cdot\bar{\beta}+\bar{\alpha}\cdot\beta=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot\bar{\beta}+\bar{\alpha}\cdot\beta=0$$

Repare que esta última igualdade é condição de perpendicularidade entre os complexos α e β, pois se $\alpha=r_1cis\theta_1$ e $\beta=r_2cis\theta_2$, a igualdade acima é equivalente a:

$$(\cos\theta_1+i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2-i\,\text{sen}\,\theta_2)+(\cos\theta_2+i\,\text{sen}\,\theta_2)(\cos\theta_1-i\,\text{sen}\,\theta_1)=0$$

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=0 \Leftrightarrow |\theta_1-\theta_2|=\frac{\pi}{2}$$

Logo, podemos escrever $\alpha=\pm i\beta$ e a solução segue como a anterior.

14)(**Letra C**) Veja que:

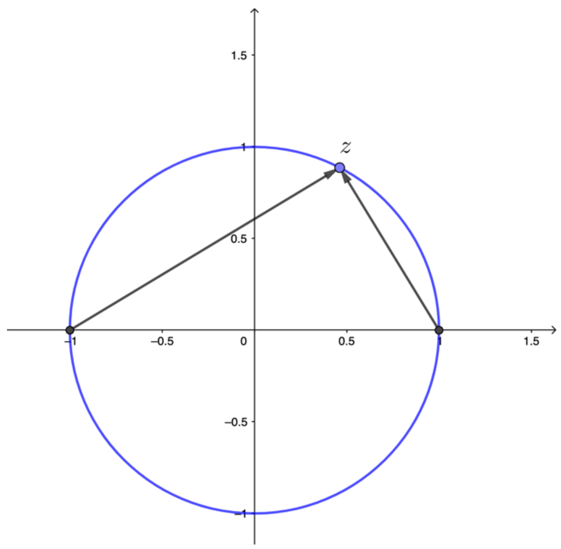
$$\left|\left(1-2\sqrt{2}i\right)^{12}\right|=|(1-2\sqrt{2}i)|^{12}=\left(\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\right)^{12}=3^{12}=m$$

Portanto, temos:

$$2x=\log_{3^{12}}(27\cdot 3^{12})=\log_{3^{12}}27+\log_{3^{12}}3^{12}=\frac{1}{12}\log_3 27+1=\frac{1}{12}\cdot 3+1=\frac{5}{4}$$

$$\boxed{x=\frac{5}{8}}$$

15)(**Letra A**) Uma forma legal de atacar esse problema é olhar geometricamente para $z-1$ e $z+1$, pensando nos vetores que ligam z e -1 e a 1:



Veja que o fato de os argumentos de $z-1$ e $z+1$ serem $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ nos faz perceber que os vetores $z-1$ e $z+1$ são perpendiculares, de maneira que z pertence a uma circunferência com diâmetro de extremos -1 e 1, portanto com raio igual a 1. Logo, $|z|$ é a distância de z ao centro (origem), que é o próprio raio da circunferência; então $|z|=1$.

16)(**Letra C**) Veja que os vetores OB e OA são perpendiculares, portanto $OB = OA\ cis\frac{\pi}{2}$. Como $OA = 2\ cis\frac{\pi}{6}$, então:

$$OB = 2\ cis\frac{\pi}{6}\cdot cis\frac{\pi}{2} = 2\ cis\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}i$$

17)

a. Os números complexos $z = x+yi$ que satisfazem $Re(z) = Im(z)$ estão sobre a reta $y = x$. Como o conjugado de um complexo é o simétrico do complexo em relação ao eixo real, a imagem da transformação de todos os complexos $x+yi$ serão os complexos $x-yi$ que estarão sobre a reta $y=-x$.

b. Se $\frac{z-1}{z+1}$ é imaginário puro, para $z \neq -1$, podemos escrever considerando $z = x+yi$:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+yi-1}{x+yi+1} = \frac{(x-1+yi)(x+1-yi)}{(x+1)^2-y^2} = \frac{x^2+y^2-1+2yi}{(x+1)^2-y^2}$$

Se este número é imaginário puro, então $x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ com $(x,y)\neq(-1{,}0)$. No plano, são os complexos representados pela circunferência centrada na origem e de raio 1, com exceção do ponto $(-1{,}0)$.

c. Para que i, z e 1 formem um triângulo equilátero, precisamos garantir que:

$$|z-i| = |z-1| = |1-i|$$

Como $|1-i| = \sqrt{2}$, então sendo $z = x+yi$ teremos:

$$|z-i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-i|^2 = 2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 2$$

$$|z-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2$$

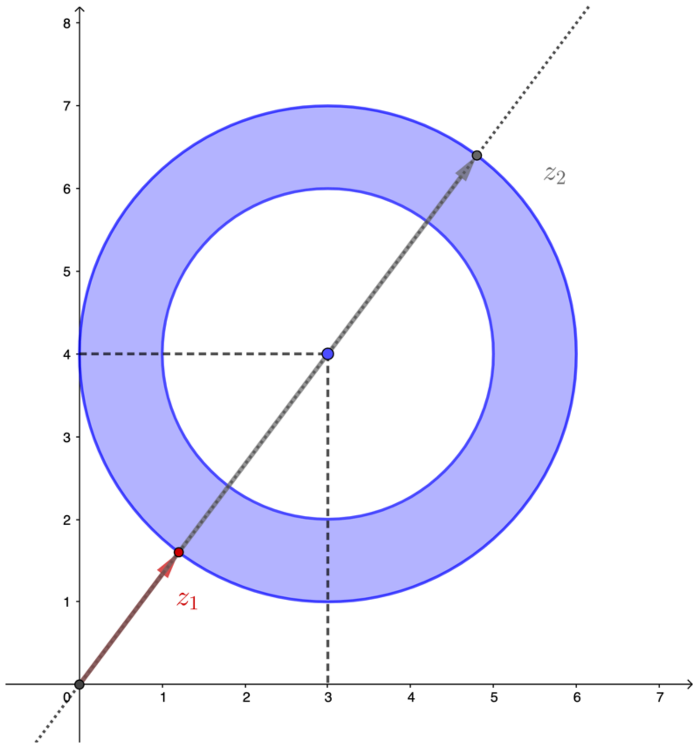
Subtraindo as igualdades, teremos $2x-2y=0 \Leftrightarrow y = x$. Logo:

$$x^2+(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, os complexos z serão:

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i \text{ e } z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i$$

18)(**Letra A**) No plano complexo, $|z - z_0| = r$ representa uma circunferência de raio r centrada em z_0. Assim, a região $2 \leq |z - 3 - 4i| \leq 3$ representa a coroa circular delimitada pelas circunferências $|z - (3 + 4i)| = 2$ e $|z - (3 + 4i)| = 3$.



Veja que z_1 é o complexo de menor módulo do conjunto A (está mais próximo da origem) e z_2 é o complexo de maior módulo do conjunto A (está mais afastado da origem). Como o centro da circunferência é o ponto (3,4), distante 5 unidades de comprimento da origem, e o raio da circunferência mais externa é 3, então $|z_1| = 5 - 3 = 2$ e $|z_2| = 5 + 3 = 8$. Usando semelhança, $Re(z_1) = \frac{3}{5}|z_1| = \frac{6}{5}$ e $Im(z_1) = \frac{4}{5}|z_1| = \frac{8}{5}$; $Re(z_2) = \frac{3}{5}|z_2| = \frac{24}{5}$ e $Im(z_2) = \frac{4}{5}|z_2| = \frac{32}{5}$. Desta maneira:

$$z_1 = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i \to -z_1 = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$$

$$z_2 = \frac{24}{5} + \frac{32}{5}i \to \overline{z_2} = \frac{24}{5} - \frac{32}{5}i$$

Logo, $-z_1 \cdot \overline{z_2} = -\frac{2}{5}(3 + 4i) \cdot \frac{8}{5}(3 - 4i) = -\frac{16}{25} \cdot (3^2 + 4^2) = \boxed{-16}$.

19)(**Letra A**) Queremos olhar para:

$$\left|\frac{-1}{z^4+3z^2+2}\right| = \frac{1}{|(z^2+1)(z^2+2)|} = \frac{1}{|z^2+1||z^2+2|} = \frac{1}{|z+i||z-i||z+\sqrt{2}i||z-\sqrt{2}i|}$$

"Sair no braço" fazendo as contas dessa expressão é um trabalho muito chato. Vamos tentar dar significado geométrico para essa conta.

O fato de $|z|=2$ significa dizer que z é um complexo que pertence à circunferência centrada na origem de raio 2. Veja que $|z+i|$, $|z-i|$, $|z+\sqrt{2}i|$ e $|z-\sqrt{2}i|$ são os módulos dos vetores que representam a soma de z e $i, -i, \sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$, respectivamente.

Não é difícil perceber que, para um dado complexo fixo z_0 e z sobre a circunferência centrada na origem, o módulo de $z+z_0$ será máximo quando z e z_0 estiverem alinhados (basta pensar no módulo do vetor soma via Lei dos Cossenos). Assim, olhe para os casos em que $|z|=2$ e z está sobre o eixo imaginário, local onde também estão $i, -i, \sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$, isto é, olhe para $z=\pm 2i$. Logo:

$$\frac{1}{|z+i||z-i||z+\sqrt{2}i||z-\sqrt{2}i|} = \frac{1}{|3i||i||(2+\sqrt{2})i||(2-\sqrt{2})i|} = \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Como o denominador está sendo maximizado, então podemos afirmar que:

$$\boxed{\left|\frac{-1}{z^4+3z^2+2}\right| \leq \frac{1}{6}}$$

20)(**Letra E**) <u>1ª Solução (Fazendo as contas)</u>:

Seja $z=x+yi$. Da equação do problema, temos:

$$|x+yi-1| = 2|x+yi+1| \Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2 = 4|(x+1)+yi|^2$$

$$(x-1)^2+y^2 = 4[(x+1)^2+y^2] \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 4x^2+8x+4+4y^2$$

$$3x^2+3y^2+10x+3=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}+y^2 = \frac{25}{9}-1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9}$$

Esta equação representa uma circunferência de centro $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ e raio $\frac{}{3}$.

<u>2ª Solução (Interpretação Geométrica)</u>:

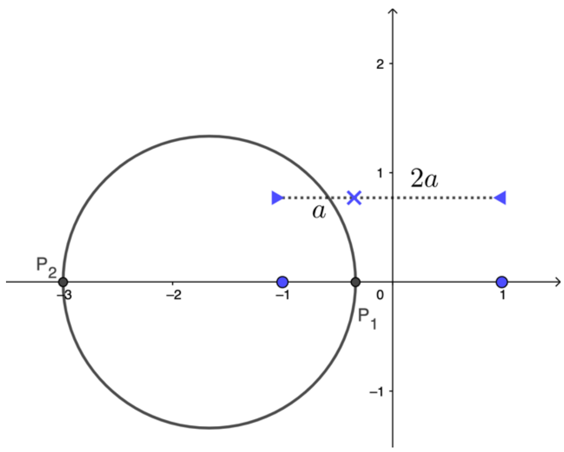
A equação pode ser reescrita assim:

$$\frac{|z-1|}{|z+1|}=2$$

Lembre-se de que $|z-1|$ e $|z+1|$ são as distâncias de um complexo z aos reais 1 e -1, respectivamente. Portanto, z é tal que a razão entre tais distâncias é fixa igual a 2, o que nos leva a concluir que z está num *Círculo de Apolônio* associado aos reais 1 e -1 e com razão $k=2$. Sabemos que o raio do *Círculo de Apolônio* é dado por:

$$r=\frac{kl}{|k^2-1|}$$

em que l é a distância entre os pontos fixos. Assim, neste caso, $r=\frac{2\cdot 2}{|2^2-1|}=\frac{4}{3}$. Como a distância de z a 1 é o dobro da distância de z a -1, os pontos do círculo alinhados com 1 e -1 serão:



$$2a+a=2\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$$

Como o raio é igual a $\frac{4}{3}$, o centro do círculo terá abcissa $1-2a-r=1-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}$. Assim, o centro é $\left(-\frac{5}{3},0\right)$.

21)(**Letra A**) <u>1ª Solução (Fazendo as contas)</u>:

Sendo $z=x+yi$, podemos reescrever o sistema como:

$$\begin{cases}|x+yi-2|=|x+yi+4|\\|x+yi-3|+|x+yi+3|=10\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=(x+4)^2+y^2 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $(x-2)^2=(x+4)^2 \Leftrightarrow x-2=\pm(x+4) \Leftrightarrow x=-1$. Da segunda equação, obtemos:

$$\sqrt{y^2+16}+\sqrt{y^2+4}=10$$

Faça $\sqrt{y^2+4}=t$, então $\sqrt{y^2+16}=\sqrt{t^2+12}$ e daí:

$$\sqrt{t^2+12}=10-t \Leftrightarrow t^2+12=100-20t+t^2 \Leftrightarrow t=\frac{22}{5}$$

Portanto, $\sqrt{y^2+4}=\frac{22}{5} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{484}{25}-4}=\pm\frac{\sqrt{384}}{5} \Leftrightarrow y=\pm\frac{8\sqrt{6}}{5}$.

Os complexos que satisfazem o sistema serão $-1+\frac{8\sqrt{6}}{5}i$ e $-1-\frac{8\sqrt{6}}{5}i$.

<u>2ª Solução (Interpretação geométrica)</u>:

A equação $|z-z_1|=|z-z_2|$ representa no plano complexo a mediatriz do segmento de extremos em z_1 e z_2. Já a equação $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ representa a elipse de focos z_1 e z_2 e eixo maior $2a$.

Assim, as equações dadas se reduzem a:

- $|z-2|=|z+4| \rightarrow$ Mediatriz do segmento de extremos em $x=2$ e $x=-4 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

- $|z-3|+|z+3|=10 \rightarrow$ Elipse de focos 3 e -3 3 e eixo maior 10 $\Rightarrow \begin{cases} 2c=6 \\ 2a=10 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ a=5 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow$ Equação: $\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$

Portanto, fazendo $x=-1$ na equação da elipse: $\frac{1}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow y^2=16\cdot\frac{24}{25} \Leftrightarrow$

$$\boxed{y=\pm\frac{8\sqrt{6}}{5}}$$