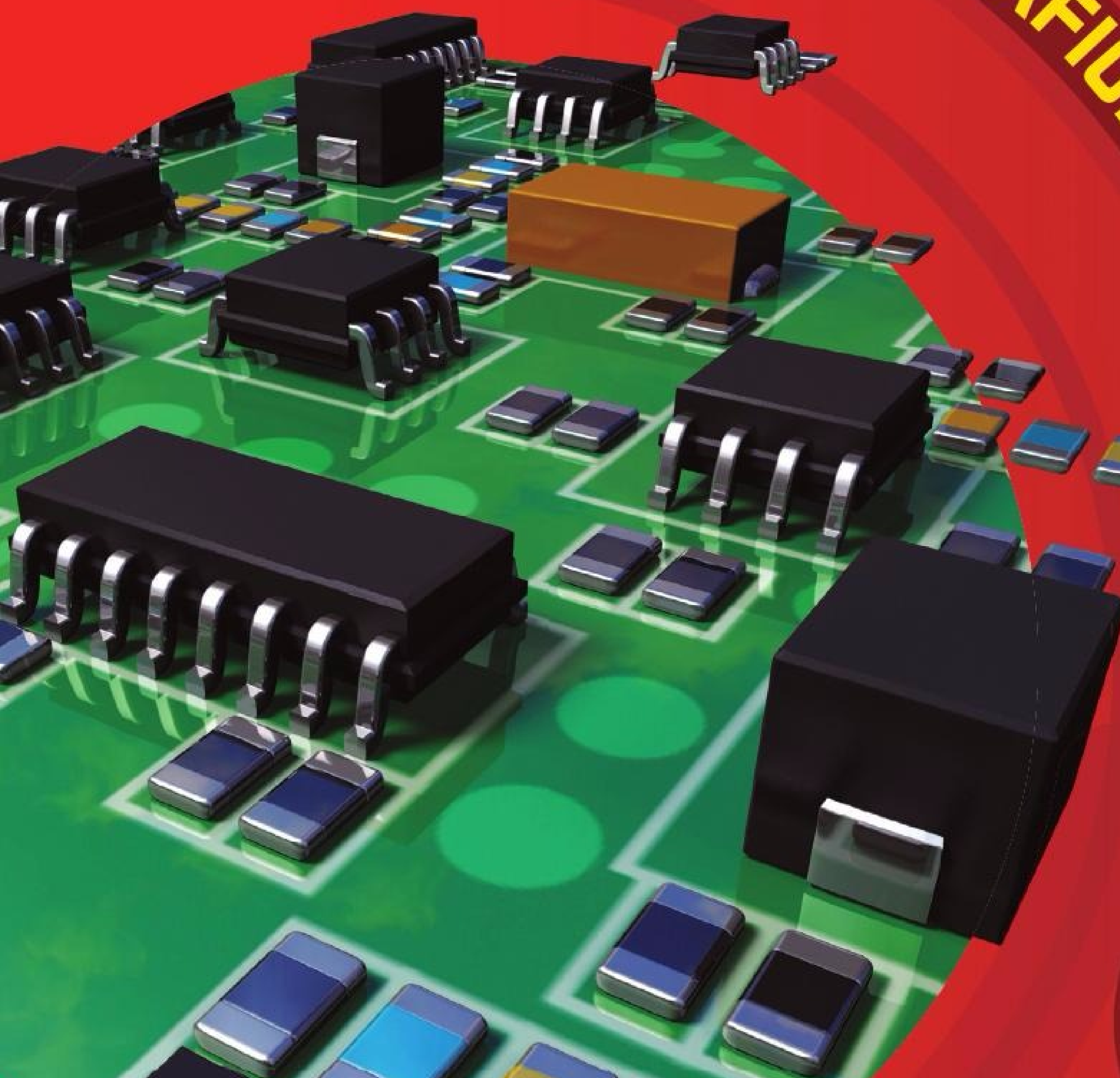
IRACEMA e DULCE

MATEMÁTICA

IDEIAS E DESAFIOS



COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
9º ANO

MANUAL DO PROFESSOR

9

Editora Saraiva

ISBN 978-85-02-62822-9

COMPONENTE
CURRICULAR
MATEMÁTICA
9º ANO

MATEMÁTICA
IDEIAS E DESAFIOS

Iracema Mori
Bacharel e licenciada em Matemática pela USP.
Professora e assessora de Matemática.

Dulce Satiko Onaga
Licenciada em Matemática pela USP.
Professora e assessora de Matemática.
Membro do Centro de Educação Matemática.

Manual do professor

9

18ª edição – 2015
São Paulo

Editora Saraiva

Matemática: Ideias e Desafios — 9º ano (Ensino Fundamental)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mori, Iracema
Matemática : ideias e desafios, 9º ano /
Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. –– 18. ed. ––
São Paulo : Saraiva, 2015.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia
ISBN 978–85–02–62821–2 (aluno)
ISBN 978–85–02–62822–9 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Onaga,
Dulce Satiko. II. Título.

15–03919 CDD–372.7

ISBN 978-85-02-63384-1
(PDF Professor)

ISBN 978-85-02-63383-4
(PDF Aluno)

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Gerente editorial	M. Esther Nejm
Editor responsável	Viviane Carpegiani
Editores	Julio Cesar Augustus de Paula Santos, Marcela Maris, Maria Ângela de Camargo
Assistente editorial	Eduardo Oliveira Guaitoli, Rani Oliveira e Souza
Coordenador de revisão	Camila Christi Gazzani
Revisores	Ana Marson, Kátia Lopes Godoi, Lilian Miyoko Kumai, Maíra Cammarano
Coordenador de iconografia	Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica	Cristiano Rogério Vieira
Licenciamento de textos	Érica Brambila, Carolina Carmini
Gerente de artes	Ricardo Borges
Coordenador de artes	Aderson Assis Oliveira
Design	Josiane Batista de Oliveira
Capa	Sergio Cândido com foto de Jonathan R. Smith/Flickr RF/Getty Images
Diagramação	Lisandro Paim Cardoso, Tarumã Editoração Gráfica,
Ilustrações	BIS, Célia Kofuji, Francisco Vilachã, Hagaquezart Estúdio, Hélio Senatore, Lettera Studio, Nik Neves, Sonia Vaz, Vagner de Faria, Zapt Editorial
Cartografia	Mario Yoshida, Selma Caparroz
Assistentes de produção de arte	Jacqueline Ortolan
Tratamento de imagens	Emerson de Lima
Produtor gráfico	Robson Cacau Alves
Impressão e acabamento	

077.248.018.001

Editora Saraiva

SAC 0800-0117875
De 2ª a 6ª, das 8h30 às 19h30
www.editorasaraiva.com.br/contato

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909

Caro estudante,

"Como aprender Matemática?"

Essa é uma pergunta que você já deve ter feito a muitas pessoas e também a si mesmo.

Sabemos que não existe um caminho único ou melhor para o aprendizado. Para quase tudo que se aprende ao longo da vida é preciso dedicação e persistência. E isso vale também para a Matemática.

Aprender é vivenciar e adquirir experiências, é enfrentar desafios, descobrir coisas novas, buscar conhecimento, querer. Esta coleção se propõe a auxiliá-lo para que seja bem-sucedido nesse aprendizado.

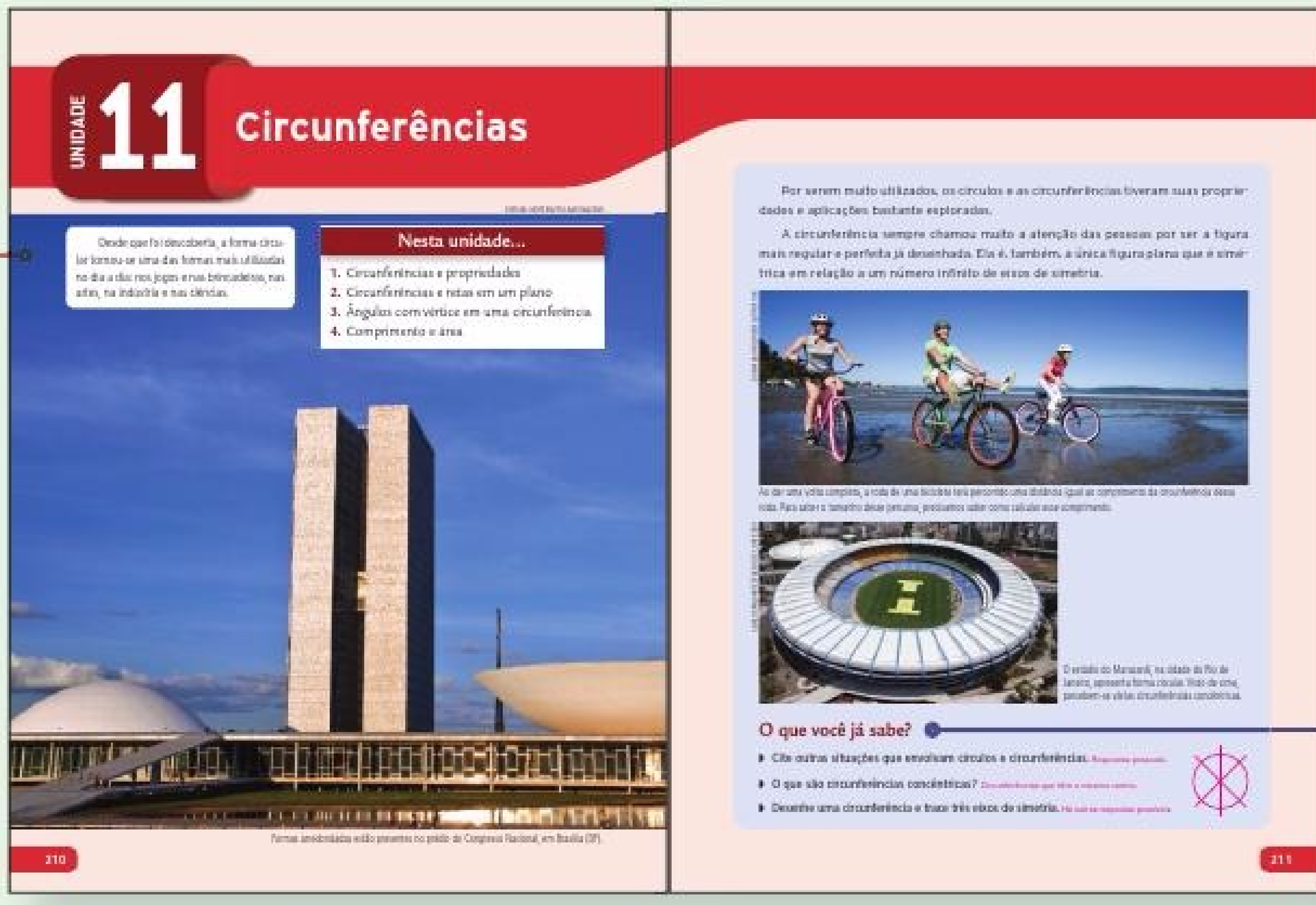
Você é nosso convidado especial nessa tarefa, que esperamos que seja prazerosa. Nesta coleção, algumas abordagens foram feitas por meio da História da Matemática e outras, a partir de situações-problema do cotidiano ou da observação de fenômenos que ocorrem na natureza. Você notará também que a Matemática é uma ciência dinâmica e em constante evolução.

Diante dos desafios que esta coleção lhe propõe, você será instigado a resolvê-los e a desenvolver ideias e conceitos, ampliando seus conhecimentos de maneira estimulante e participativa. Além disso, terá a oportunidade de explorar as conexões da Matemática com a realidade e analisar aplicações em outras áreas do conhecimento.

Nosso esforço conjunto envolvendo autores, professores e alunos terá valido a pena se você desempenhar com perseverança o papel que lhe cabe na construção de seu próprio conhecimento. É isso que lhe proporcionará segurança no aprendizado da Matemática.

As autoras

Conheça seu livro

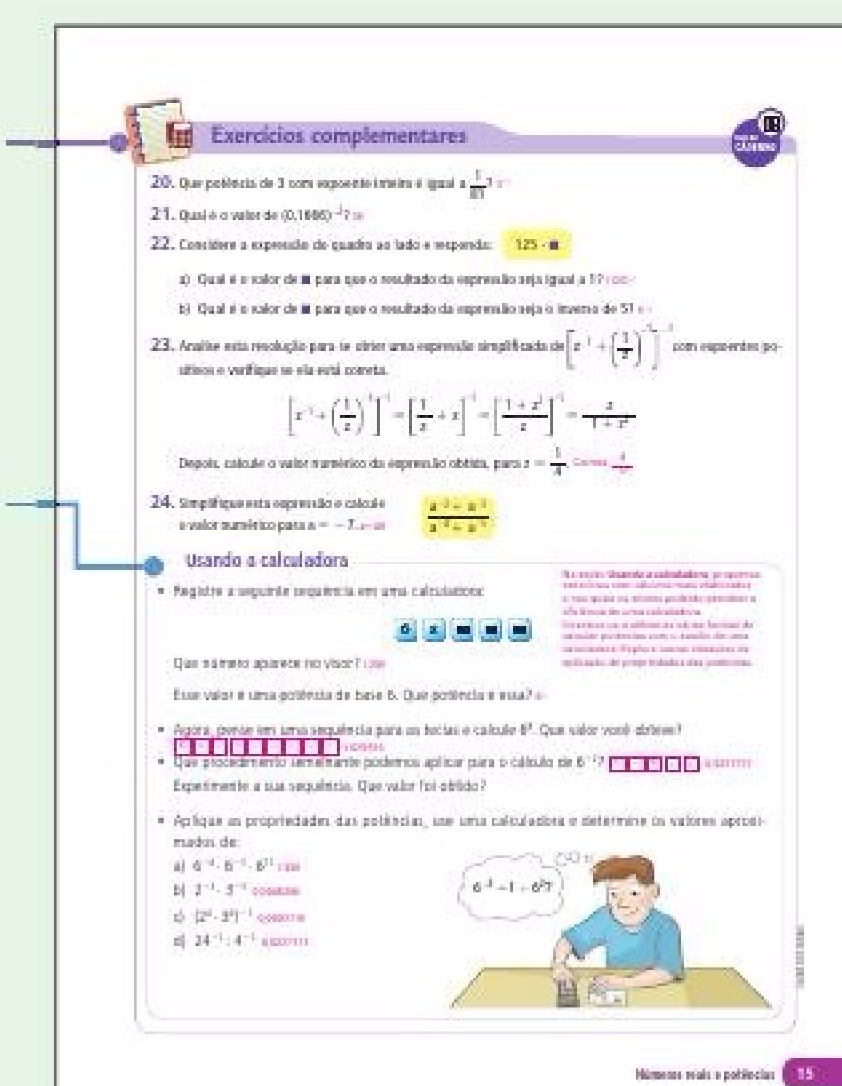


O que você já sabe?

Apresenta questões que propiciam o resgate de conhecimentos prévios a respeito dos conteúdos que serão tratados na unidade.

Abertura da unidade

Imagens e textos introduzem os assuntos da unidade.



Exercícios complementares

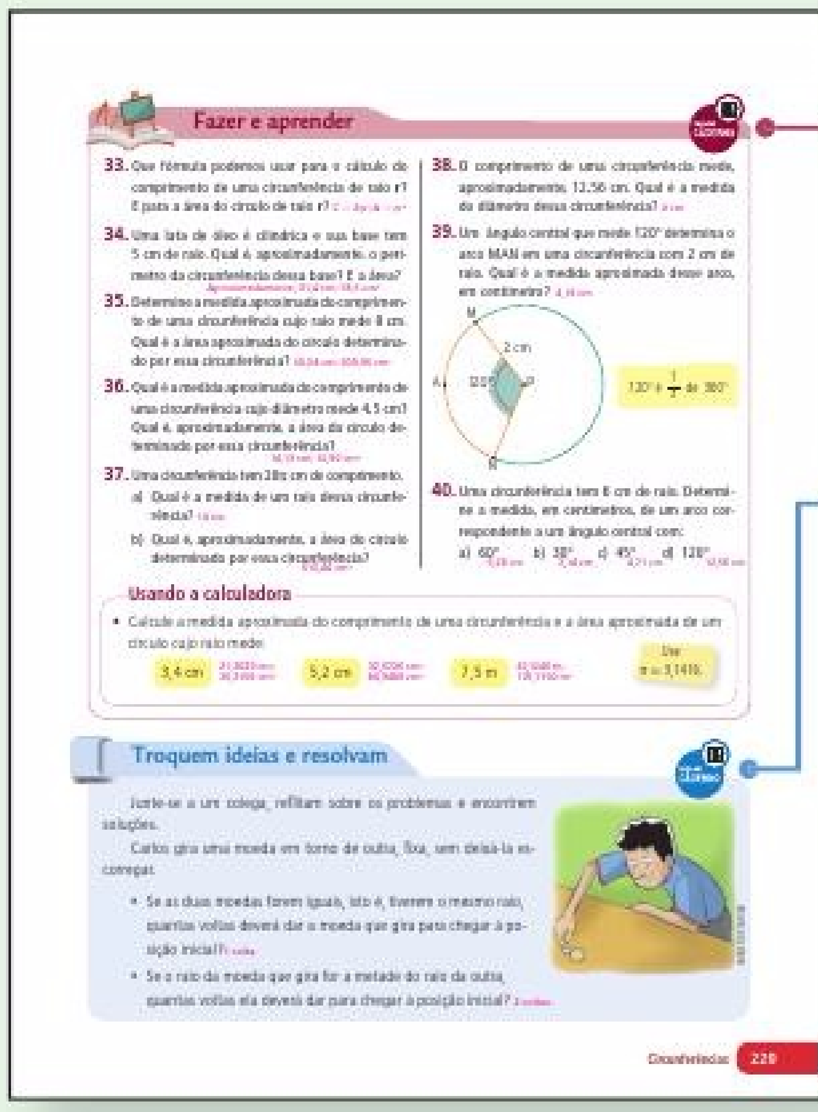
Essa seção contém atividades e problemas que ampliam o estudo dos temas explorados. Poderá ser feita em sala de aula ou em casa, individualmente ou em grupo.

Usando a calculadora

A calculadora é utilizada como ferramenta de apoio para a resolução de atividades que envolvem problemas significativos.

Para refletir e responder

Os conceitos matemáticos são abordados em situações-problema com temas do dia a dia e que servem de partida para o desenvolvimento dos conteúdos.

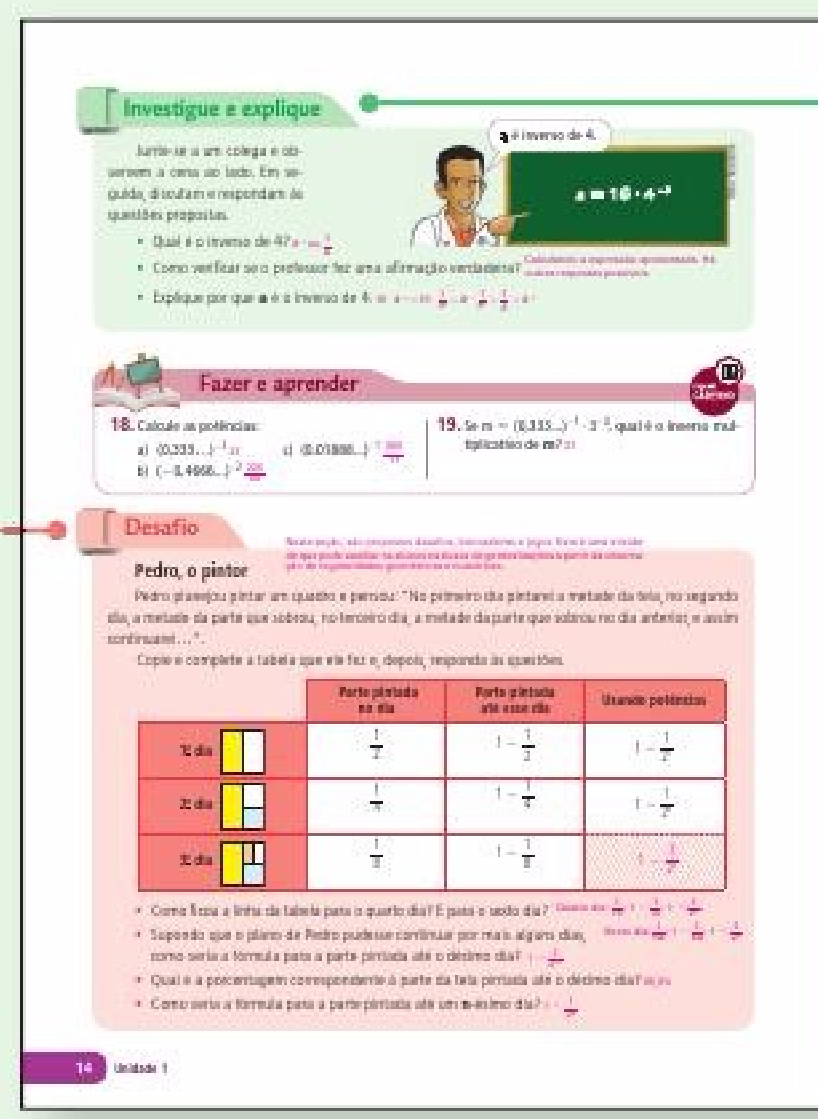


Fazer e aprender

Nessa seção, são propostos exercícios de fixação e de aplicação da teoria estudada, apresentados em ordem crescente de dificuldade.

Troquem ideias e resolvam

Essa seção aparece intercalada ao desenvolvimento dos conteúdos. Nela são propostas atividades de caráter dinâmico e de socialização, pois possibilitam uma discussão em grupo e a troca de conhecimentos e descobertas entre os alunos.

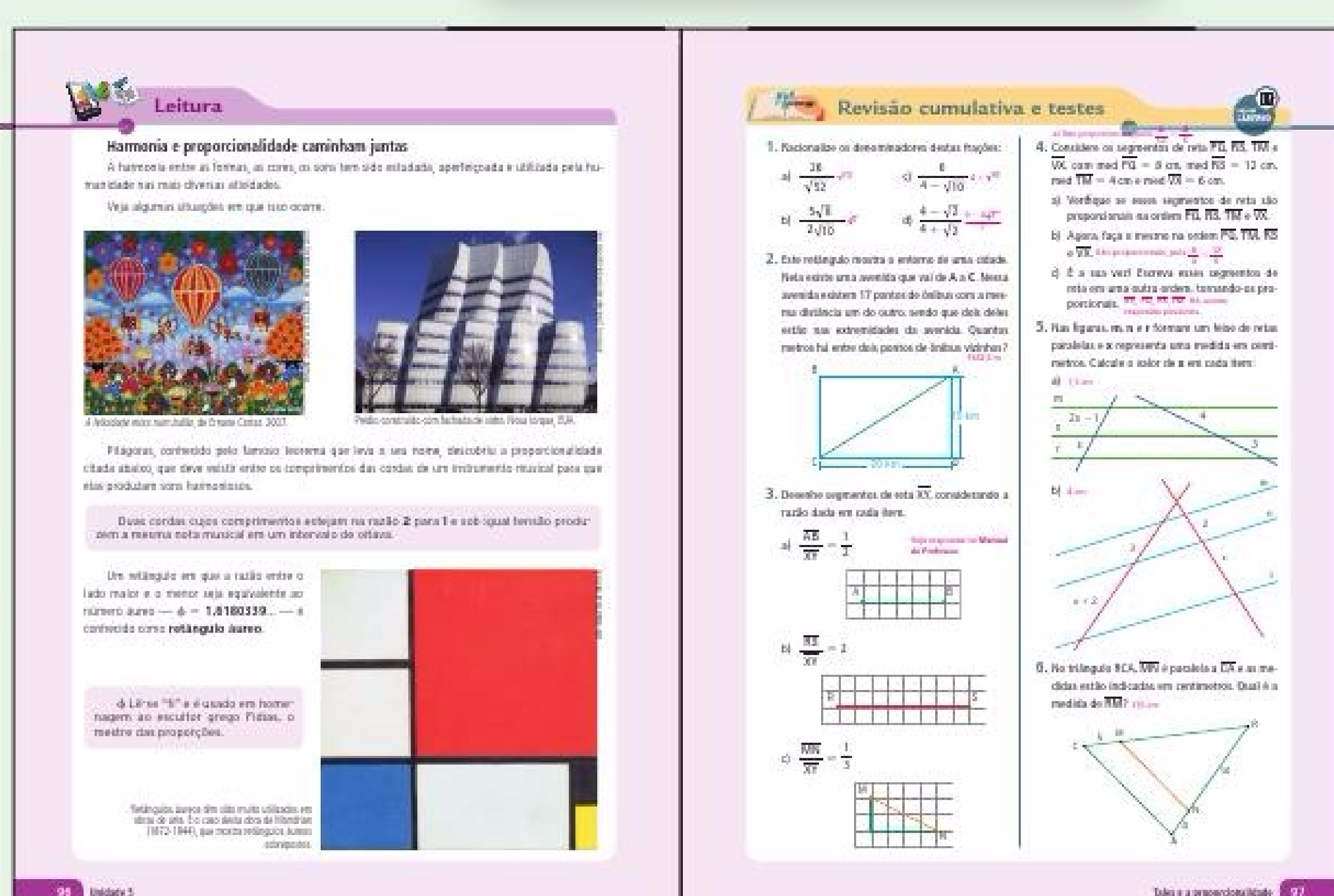


Investigue e explique

O principal objetivo dessa seção é explorar situações de natureza investigativa e abrir espaço para a formulação de conjecturas a respeito do tema que se está investigando.

Desafio

Nessa seção você encontra atividades de cálculo mental e estimativas, problemas não convencionais desafiadores, brincadeiras e jogos.



Leitura

Assuntos de diferentes áreas do conhecimento, temas importantes para a formação cidadã e informações históricas da Matemática são tratados nas leituras disponíveis ao final das unidades.

Revisão cumulativa e testes

Ao final de todas as unidades, atividades são propostas como uma oportunidade de autoavaliação da aprendizagem desenvolvida até o momento.

Sumário

UNIDADE 1 Números reais e potências

UNIDADE 2 Radiciação: propriedades

UNIDADE 3 Equações de 2º grau

UNIDADE 4 Equações de 2º grau e formas redutíveis

UNIDADE 5 Tales e a proporcionalidade

UNIDADE 6 Semelhança e proporcionalidade

UNIDADE 7 Semelhança e medidas

UNIDADE 8 Estatística e probabilidade

UNIDADE 9 Funções

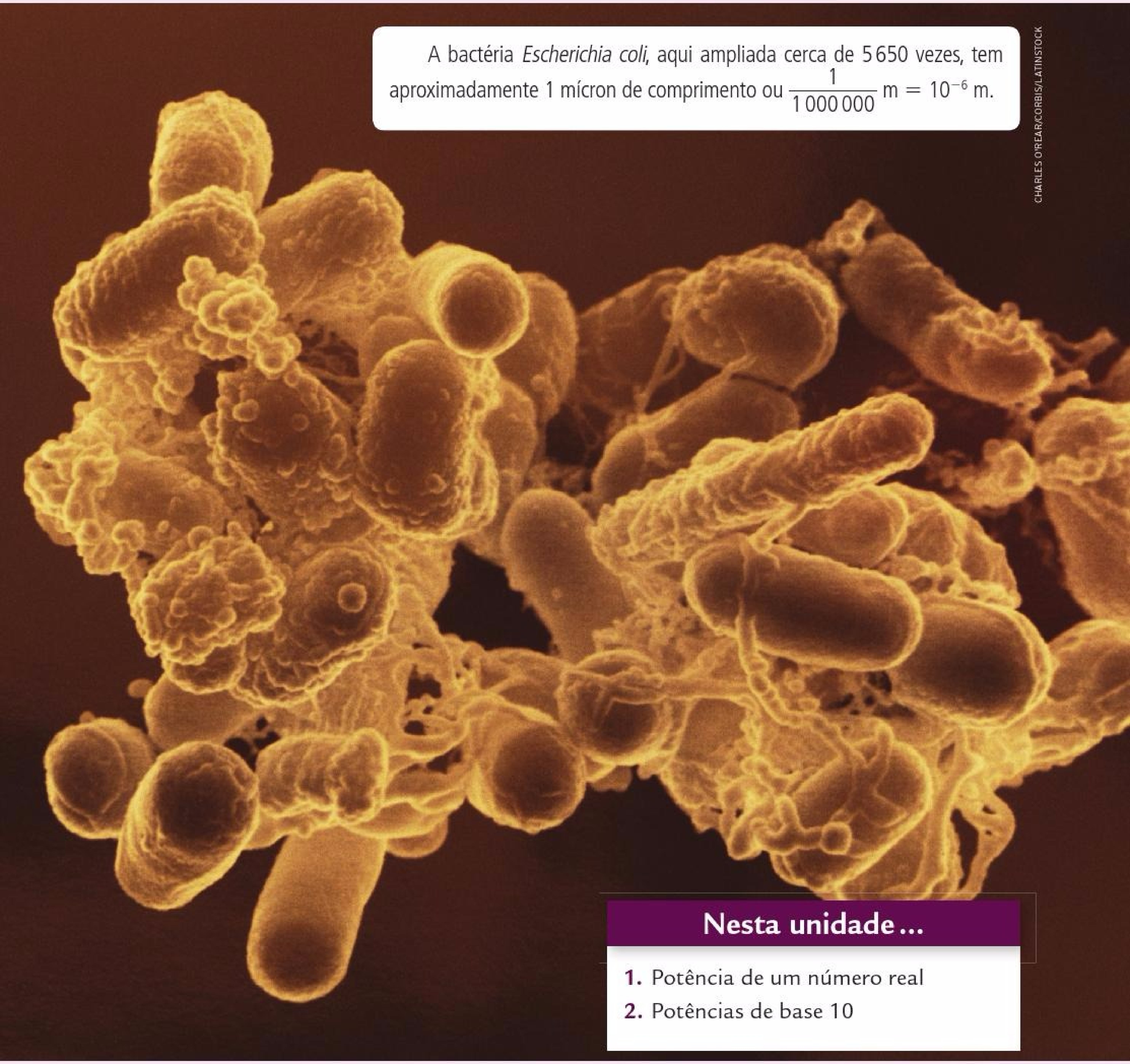
UNIDADE 10 Função de 2º grau

UNIDADE 11 Circunferências

UNIDADE 12 Relações trigonométricas

UNIDADE 1

Números reais e potências

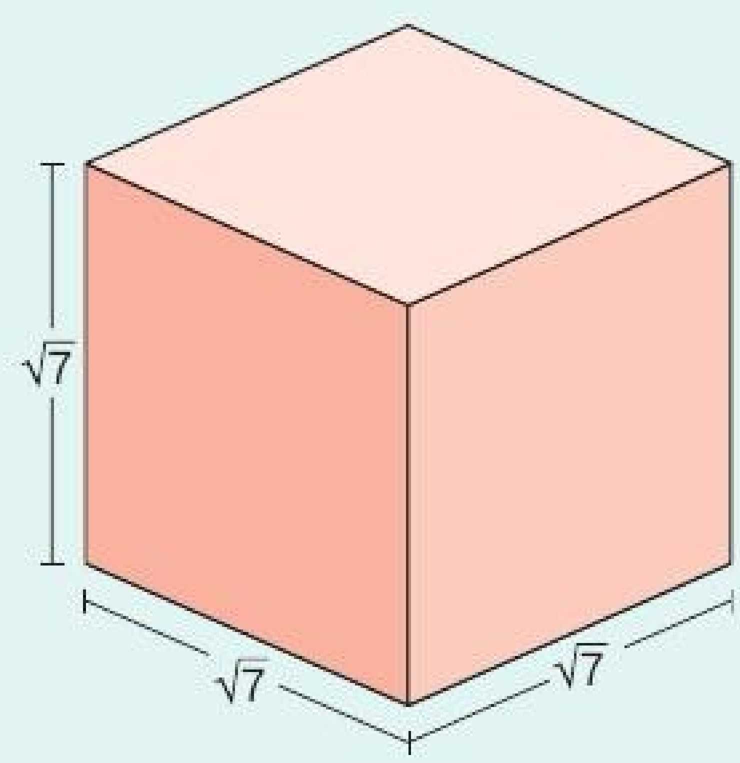


CHARLES O'REAR/CORBIS/LATINSTOCK

A bactéria *Escherichia coli*, aqui ampliada cerca de 5 650 vezes, tem aproximadamente 1 mícron de comprimento ou $\frac{1}{1\,000\,000}$ m $= 10^{-6}$ m.

Nesta unidade...

Potências podem ser vistas como abreviações de escritas de produtos com fatores iguais. Já estudamos situações que envolvem potências em que as bases são números racionais e os expoentes, números inteiros. Vamos estender nosso estudo para as situações que envolvem potências de bases reais. Por exemplo, o cálculo do volume de uma caixa cúbica com aresta que mede $\sqrt{7}$ cm.



Medidas indicadas em cm.

Volume de um cubo = medida da aresta · medida da aresta · medida da aresta

Volume da caixa cúbica = $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$ cm^3

Observe que neste produto os fatores são todos iguais. Abreviamos escritas desse tipo usando potências:

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = (\sqrt{7})^3$$

Lê-se: "o cubo da raiz quadrada de sete" ou "raiz quadrada de 7 ao cubo".

$$(\sqrt{7})^3 \cong 18{,}52$$

Veja outros exemplos de potências:

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ $\quad \pi^2 = \pi \cdot \pi \cong 9{,}86$ $\quad \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5} = -\frac{243}{32}$

O que você já sabe?

- Nosso corpo é formado por cerca de 10 000 000 000 de células. Como abreviar a escrita desse número? 10^{10}. Há outras respostas possíveis.
- Calcule o volume de um cubo cuja aresta mede 0,8 cm. 0,512 cm^3
- Se **a** representa um número real, o que representa a expressão $\mathbf{a}^{10}$? Produto de 10 fatores iguais a **a**.
- Qual é o valor de $(-1{,}5)^3$? E de $(-1{,}5)^4$? −3,375; 5,0625

1 Potência de um número real

Potência com expoente inteiro positivo

As potências têm larga aplicação em inúmeros campos, como Astronomia, Biologia, Química, Física, Economia e Estatística. Elas permitem expressar tanto os "números grandes", como as distâncias no Universo, quanto as dimensões das pequeníssimas partículas que compõem, por exemplo, as bactérias *Escherichia coli*, apresentadas na página de abertura desta unidade.

Para refletir e responder

Popularmente conhecido como "estrela d'alva" ou "estrela do pastor", o planeta Vênus é um dos mais brilhantes astros que vemos. Ele está a uma distância média do Sol de 108 000 000 km.

RUSSELL KORD /ALAMY/LATINSTOCK

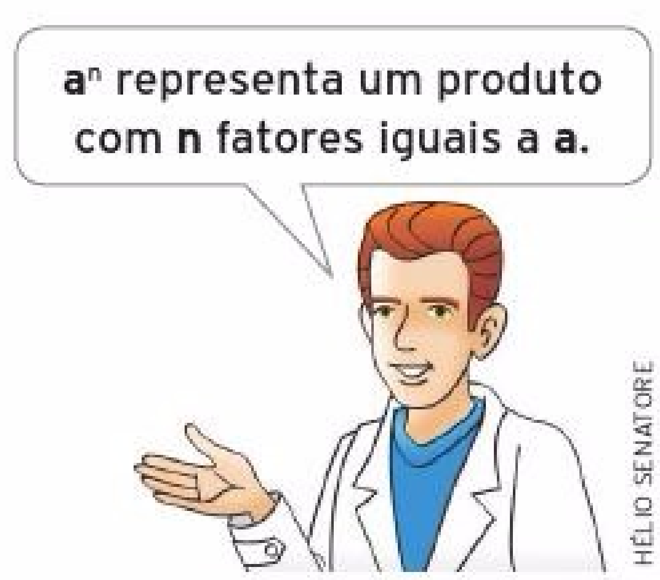
Resposta possível: $108 \cdot 10^6$ km.

- Como podemos escrever essa distância usando potência?

De modo geral:

Se **a** representa um número real e **n** representa um número inteiro maior que 1, então:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}}$$



HÉLIO SENATORE

Vamos combinar:
$a^0 = 1$ (com **a** diferente de zero.)
$a^1 = a$

Na seção **Fazer e aprender** são propostos exercícios de fixação, de aplicação da teoria aprendida no texto e problemas dispostos em ordem crescente de complexidade.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Forme pares copiando uma potência e seu valor: $(-13)^3 = -2197$; $\left(\frac{23}{40}\right)^1 = \frac{23}{40}$; $(-0,9)^4 = 0,6561$; $\left(\frac{23}{40}\right)^2 = \frac{529}{1600}$; $0,1^5 = 0,00001$; $(-1532)^0 = 1$.

Potências:	$(-13)^3$	$\left(\frac{23}{40}\right)^1$	$(-0,9)^4$	$\left(\frac{23}{40}\right)^2$	$0,1^5$	$(-1\,532)^0$
Valores:	1	$\frac{529}{1\,600}$	$-2\,197$	$\frac{23}{40}$	0,6561	0,00001

2. Determine o valor desta expressão: -8

$$0^{50} - 10^1 + 1^{100} + 10^0$$

3. Se $a = -\frac{11}{5}$, então qual é o valor de a^3? $-\frac{1331}{125}$

4. Que potência é maior: $(-15)^2$ ou -15^2? $(-15)^2$

5. Qual é o valor da soma do cubo de $-\frac{3}{4}$ com o quadrado de $-\frac{5}{8}$? $-\frac{1}{32}$

6. Daniel escreveu os números: 243, 729 e $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ usando potências de base 3. Apenas uma está correta. Destaque-a e corrija as demais.

a) $243 = 3^5$

b) $729 = 3$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = -3$

Correta: a
Corrigindo: b) $729 = 3^6$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3^0$

7. Calcule o valor das expressões:

a) $(3^2 \cdot 4^2 : 6^2 - 2^2)^3 \cdot 12^5 + 1^{10}$ 1

b) $[(5^2 - 5 \cdot 2^2)^2 \cdot 5 - 5 : (2 \cdot 3^3 - 2^3 \cdot 5 - 13)^{10}]^2$ 14400

8. Determine o valor numérico da expressão **$b^2 - 4ac$**, para $a = 5$, $b = -9$ e $c = 4$. 1

9. Para obter a fração $\frac{1}{125}$, a que expoente deve ser elevado $\frac{1}{5}$? 3

10. Determine o valor do cubo de -13. $-2\,197$

11. Esta sequência tem pelo menos um padrão. Há outras respostas possíveis.

$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{81}$	...

a) Qual é um dos padrões dessa sequência?

b) Determine o 7º termo dessa sequência, mantendo o padrão encontrado no item **a.** $\frac{1}{2187}$

a) Cada termo, a partir de $-\frac{1}{9}$, é o termo anterior multiplicado por $-\frac{1}{3}$.

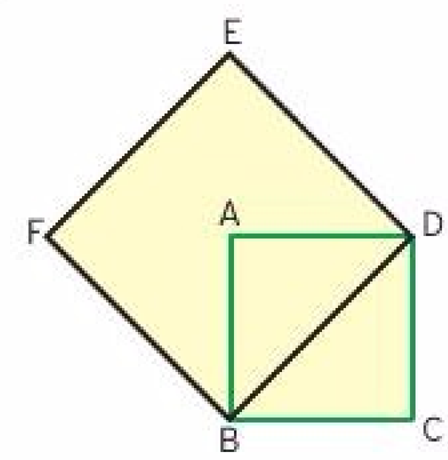
12. O volume de um cubo é 512 cm^3.

a) Calcule a medida da aresta desse cubo. 8 cm.

b) Determine a soma das áreas de todas as suas faces, ou seja, a **área total** da superfície. 384 cm^2.

c) Agora, invente um problema que possa ser resolvido utilizando as informações dos itens anteriores. Resposta pessoal.

13. Na figura, a diagonal $\overline{BD}$ do quadrado ABCD é lado do quadrado EFBD.



- Calcule a área do quadrado EFBD, sabendo que a área do quadrado ABCD é igual a 8 cm^2. 16 cm^2.

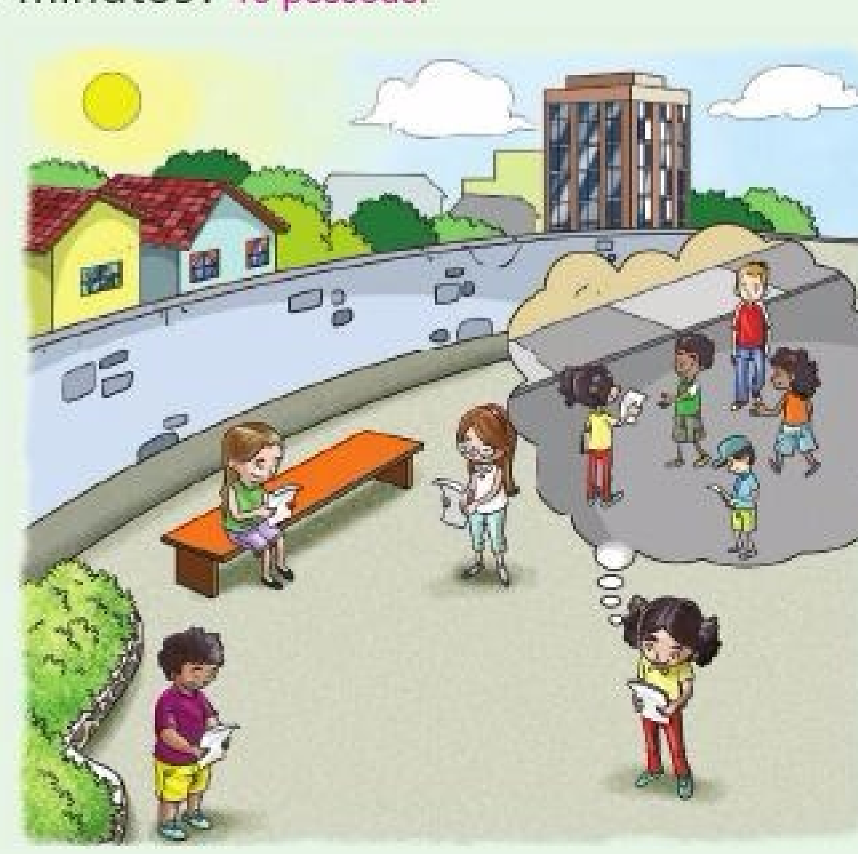
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a dois colegas, leiam o texto abaixo e reflitam sobre ele. A seguir, discutam e respondam às questões propostas.

Às 8 horas de certo dia, na cidade de Fortaleza, quatro amigos receberam uma notícia de grande interesse para todos. Cada um comunicou essa notícia a outras quatro pessoas, que, por sua vez, transmitiram a outras quatro. Isso foi feito a cada 15 minutos, e cada pessoa recebeu o recado uma só vez.

- Quantas pessoas receberam essa notícia às 8 horas e 15 minutos? 16 pessoas.
- Quantas pessoas receberam essa notícia às 8 horas e 30 minutos? 64 pessoas.
- Quantas pessoas receberam essa notícia às 8 horas e 45 minutos? 256 pessoas.
- Considerando a quantidade de pessoas que receberam a notícia a cada 15 minutos e começando às 8 horas, que sequência de números se tem? Que padrão existe nessa sequência? 4, 16, 64, 256. São potências de 4. Há outras respostas possíveis.
- Se o processo continuou até às 9 horas, quantas pessoas receberam essa notícia? 1 364 pessoas.



HAGAQUEZART ESTÚDIO

Potência com expoente inteiro negativo

Para refletir e responder

Observe a sequência de números apresentada pelo professor e responda.

- Que padrão existe entre os números dessa sequência? Cada número, a partir do segundo, é o resultado da divisão do anterior por 2. Há outras respostas possíveis. Ao acrescentar outros números nessa sequência mantendo o padrão, o número zero fará parte dela? Não. E qual será o 7º termo dessa sequência? $\frac{1}{2}$

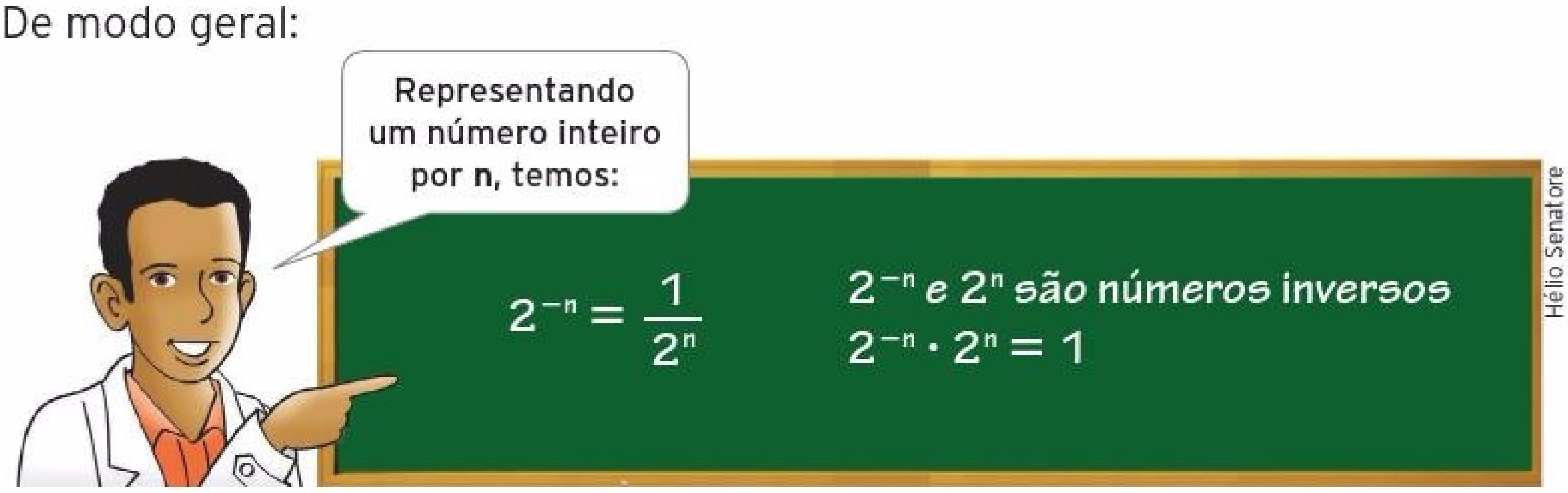
Potências com expoente inteiro negativo já foram exploradas, mas vamos relembrar.

Na sequência de números apresentada acima, cada termo a partir do segundo é o anterior dividido por 2. No quadro abaixo, relacionamos cada termo dessa sequência a uma potência de 2.

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$

: 2   : 2   : 2   : 2   : 2   : 2   : 2   : 2

De modo geral:



> Se **a** representa um número real diferente de zero e **n** representa um número inteiro, então $\mathbf{a}^{-n} = \frac{1}{\mathbf{a}^n}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

14. Calcule o valor de:

a) 10^{-1} 0,1

b) $(-6)^{-4}$ $\frac{1}{1296}$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}$ -243

d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-6}$ $\frac{64}{729}$

e) $(-0{,}7)^{-1}$ $-\frac{10}{7}$

f) $(-0{,}2)^{-3}$ -125

15. Escreva estes números sob a forma de potência com expoente inteiro negativo. Vamos combinar que, quando os denominadores forem expressões literais, elas serão diferentes de zero.

a) $\frac{1}{10^3}$ 10^{-3}

b) $-\frac{1}{16^5}$ -16^{-5}

c) $\left(\frac{7}{16}\right)^1$ $\left(\frac{16}{7}\right)^{-1}$

d) $(0{,}1)^2$ 10^{-2}

e) $\frac{1}{a^{10}}$ a^{-10}

f) $\left(\frac{1}{xy}\right)^6$ $x^{-6}y^{-6}$

16. Considere $x = \frac{1}{10}$ e $y = \frac{1}{5}$ e calcule a soma $x^{-1} + y^{-1}$. 15

17. Copie esta tabela e complete-a calculando as potências:

x	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}
2									
$\frac{1}{2}$						$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$			
-1									

16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 4, 8, 16; 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e respondam às questões propostas.

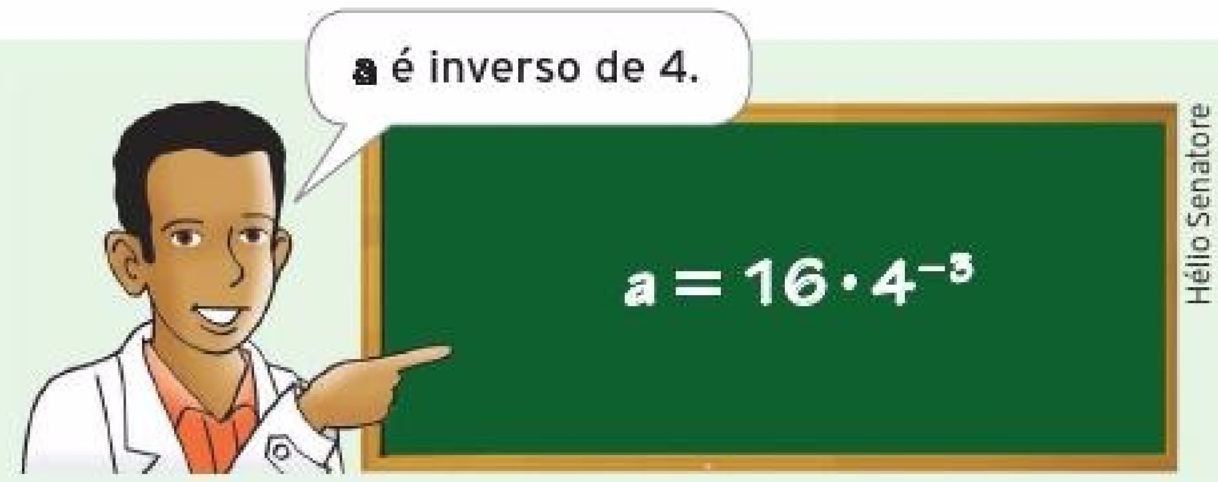
- Qual é o período da dízima periódica que é a base? 5
- Escreva, em poucas palavras, como calcular o valor dessa potência. Em seguida, troque o caderno com um colega, cada um segue o plano descrito pelo outro e calcula o valor dessa expressão.

Calcule uma fração geratriz e, em seguida, utilize o inverso multiplicativo da fração encontrada e calcule a potência. Há outras respostas possíveis.

$(0{,}1555...)^{-2} = \left(\frac{7}{45}\right)^{-2} = \left(\frac{45}{7}\right)^2 = \frac{2025}{49} = 41\frac{16}{49}$

Investigue e explique

Junte-se a um colega e observem a cena ao lado. Em seguida, discutam e respondam às questões propostas.



- Qual é o inverso de 4? 4^{-1} ou $\frac{1}{4}$
- Como verificar se o professor fez uma afirmação verdadeira? Calculando a expressão apresentada. Há outras respostas possíveis.
- Explique por que **a** é o inverso de 4. $16 \cdot 4^{-3} = 16 \cdot \frac{1}{4^3} = 4^2 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4} = 4^{-1}$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

18. Calcule as potências:

a) $(0{,}333\ldots)^{-3}$ 27

b) $(-0{,}4666\ldots)^{-2}$ $\frac{225}{49}$

c) $(0{,}01888\ldots)^{-1}$ $\frac{900}{17}$

19. Se $m = (0{,}333\ldots)^{-1} \cdot 3^{-4}$, qual é o inverso multiplicativo de **m**? 27

Desafio

Nesta seção, são propostos desafios, brincadeiras e jogos. Esta é uma atividade que pode auxiliar os alunos na busca de generalizações a partir da observação de regularidades geométricas e numéricas.

Pedro, o pintor

Pedro planejou pintar um quadro e pensou: "No primeiro dia pintarei a metade da tela, no segundo dia, a metade da parte que sobrou, no terceiro dia, a metade da parte que sobrou no dia anterior, e assim continuarei…".

Copie e complete a tabela que ele fez e, depois, responda às questões.

	Parte pintada no dia	Parte pintada até esse dia	Usando potências
1º dia	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2^1}$
2º dia	$\frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{2^2}$
3º dia	$\frac{1}{8}$	$1 - \frac{1}{8}$	$1 - \frac{1}{2^3}$

- Como ficou a linha da tabela para o quarto dia? E para o sexto dia? Quarto dia: $\frac{1}{16}$; $1 - \frac{1}{16}$; $1 - \frac{1}{2^4}$. Sexto dia: $\frac{1}{64}$; $1 - \frac{1}{64}$; $1 - \frac{1}{2^6}$
- Supondo que o plano de Pedro pudesse continuar por mais alguns dias, como seria a fórmula para a parte pintada até o décimo dia? $1 - \frac{1}{2^{10}}$
- Qual é a porcentagem correspondente à parte da tela pintada até o décimo dia? 99,9%
- Como seria a fórmula para a parte pintada até um **n**-ésimo dia? $1 - \frac{1}{2^n}$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

20. Que potência de 3 com expoente inteiro é igual a $\frac{1}{81}$? 3^{-4}

21. Qual é o valor de $(0{,}1666)^{-2}$? 36

22. Considere a expressão do quadro ao lado e responda: $125 \cdot ■$

a) Qual é o valor de ■ para que o resultado da expressão seja igual a 1? $(125)^{-1}$

b) Qual é o valor de ■ para que o resultado da expressão seja o inverso de 5? 5^{-4}

23. Analise esta resolução para se obter uma expressão simplificada de $\left[z^{-1} + \left(\frac{1}{z}\right)^{-1}\right]^{-1}$ com expoentes positivos e verifique se ela está correta.

$$\left[z^{-1} + \left(\frac{1}{z}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{z} + z\right]^{-1} = \left[\frac{1 + z^2}{z}\right]^{-1} = \frac{z}{1 + z^2}$$

Depois, calcule o valor numérico da expressão obtida, para $z = \frac{1}{4}$. Correta. $\frac{4}{17}$

24. Simplifique esta expressão e calcule o valor numérico para $a = -7$. a^2; 49

$$\frac{a^{-2} + a^{-3}}{a^{-4} + a^{-5}}$$

Usando a calculadora

Na seção **Usando a calculadora**, propomos exercícios com cálculos mais elaborados e nos quais os alunos poderão perceber a eficiência de uma calculadora. Incentive-os a utilizar as várias formas de calcular potências com o auxílio de uma calculadora. Explore outras situações de aplicação de propriedades das potências.

- Registre a seguinte sequência em uma calculadora:

  6 x = = =

  Que número aparece no visor? 1296

  Esse valor é uma potência de base 6. Que potência é essa? 6^4

- Agora, pense em uma sequência para as teclas e calcule 6^8. Que valor você obteve?
  6 × = = = = = = = ; 1679616
- Que procedimento semelhante podemos aplicar para o cálculo de 6^{-2}? 1 ÷ 6 = = ; 0,0277777
  Experimente a sua sequência. Que valor foi obtido?

- Aplique as propriedades das potências, use uma calculadora e determine os valores aproximados de:

  a) $6^{-4} \cdot 6^{-3} \cdot 6^{11}$ 1296

  b) $2^{-3} \cdot 3^{-3}$ 0,0046296

  c) $(2^4 \cdot 3^4)^{-1}$ 0,0007716

  d) $24^{-2} : 4^{-2}$ 0,0277777

VAGNER DE FARIAS

Propriedades das potências

Para as potências cujas bases são números reais diferentes de zero e os expoentes são números inteiros, valem as mesmas propriedades das potências de números racionais com expoentes inteiros.

Multiplicação de potências com bases iguais

O produto de potências com bases iguais é uma potência com a mesma base e com expoente igual à soma dos expoentes dos fatores. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplos:

- $4^{-5} \cdot 4^7 \cdot 4 = 4^{-5+7+1} = 4^3$
- $(-0{,}5)^{-4} \cdot (-0{,}5)^{-5} = (-0{,}5)^{-4+(-5)} = (-0{,}5)^{-4-5} = (-0{,}5)^{-9}$

Divisão de potências com bases iguais

O quociente de duas potências com bases iguais é uma potência com a mesma base e com expoente igual à diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor. $a^m : a^n = a^{m-n}$

Exemplo: $(+1{,}3)^6 : (+1{,}3)^4 = (+1{,}3)^{6-4} = (+1{,}3)^2$

Potência de potência

Em uma potência de potência, a base é outra potência.

Uma potência de potência pode ser escrita na forma de uma única potência, conservando-se a base e multiplicando-se os expoentes. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

- $(6^{-5})^{-2} = 6^{-5 \cdot (-2)} = 6^{10}$
- $\left[\left(-\frac{3}{7}\right)^4\right]^6 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{4 \cdot 6} = \left(-\frac{3}{7}\right)^{24}$

Potência de um produto indicado

Um produto de dois ou mais números reais elevado a um expoente é igual ao produto de cada um desses números elevado a esse expoente. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplos:

- $(4 \cdot 5 \cdot 7)^{-3} = 4^{-3} \cdot 5^{-3} \cdot 7^{-3}$
- $\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4$

Potência de um quociente indicado

Um quociente de dois números reais elevado a um expoente é igual ao quociente de cada um desses números elevado a esse expoente. $(a : b)^n = a^n : b^n$

Exemplos:

- $(3 : 5)^{-2} = 3^{-2} : 5^{-2}$
- $\left(-\frac{5}{6} : \frac{2}{7}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^3$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

25. Calcule $(5 + 3)^2$ e $5^2 + 3^2$ e compare os resultados: eles são iguais ou diferentes? 64; 34. São diferentes.

26. Verifique se a igualdade $(a + b)^n = a^n + b^n$ é verdadeira ou falsa:

a) para $n = 1$. Verdadeira.

b) para quaisquer valores de **a** e de **b**. Falsa, se $n \neq 1$.

27. Se **a** é um número real diferente de zero e **m** é um número inteiro, qual é o valor de $a^m : a^m$? 1

28. Transforme cada potência em um produto de potências de bases iguais: Há outras respostas possíveis.

a) 10^{n-2} $10^n \cdot 10^{-2}$

b) 8^{-n+6} $8^{-n} \cdot 8^6$

29. Analise cada uma das igualdades e indique as que estão corretas. Reescreva as incorretas, de modo que sejam verdadeiras. Corretas: **a** e **c** b) $0{,}2^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^6$ d) $m^{-4} : m^4 = m^{-8}$

a) $5^2 : 5^{-6} = (5 : 5^{-3})^2$

b) $0{,}2^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^5$

c) $a^{-6} = (a^{-3})^2$

d) $m^{-4} : m^4 = 1$

30. Transforme estas expressões em um produto de potências: Há outras respostas possíveis.

a) $\left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3\right]^n$ $\left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{3n}$

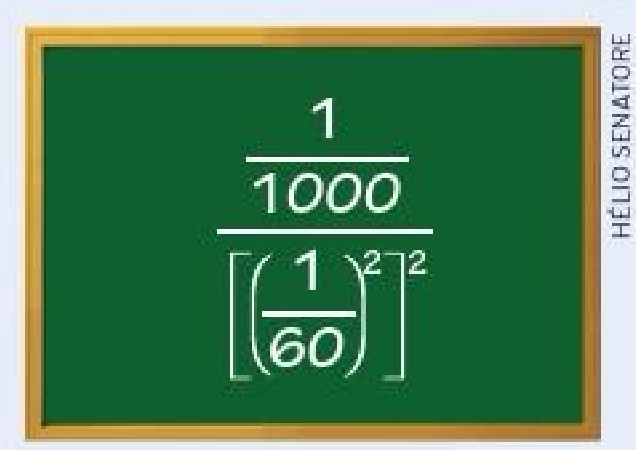
b) $(a^3 \cdot b^2 \cdot c)^{-3}$ $a^{-9} \cdot b^{-6} \cdot c^{-3}$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e resolvam a questão apresentada a seguir.

A aplicação de propriedades das potências facilita o cálculo de algumas expressões, como esta ao lado.



- Qual é o valor dessa expressão? 12 960

Pista: $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

31. Transforme $\frac{3^{-8}}{15^{-8}}$ em uma potência de base 5. 5^8

32. O quociente entre dois números é 14. Qual é o valor do quociente de seus quadrados? 196

33. Utilize as propriedades das potências e transforme as expressões em uma só potência:

a) $[(13^8 \cdot 13^3) : 13^{13} : 13^6] \cdot 13^2$ 13^{-6}

b) $\frac{12^7 \cdot 12^9}{12^{14}} : 12^4$ 12^{-2}

c) $\frac{23^{11} \cdot 23 \cdot 23^{-5}}{23^8} \cdot 23^{-1}$ 23^{-2}

d) $\frac{(a^3)^{-5}}{a^{-14}} : a^{-3}$ a^2

34. Utilize as propriedades das potências e calcule o valor de cada uma destas expressões:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 : 3^{-4}$ $\frac{5}{9}$

b) $\frac{(10^5)^3 \cdot (10^{-4})^3 + 10^{-5} : (10^{-2})^4}{10^2}$ 20

c) $\left[\left(\frac{1}{300}\right)^2\right]^3 : 90^4$ $3^{-14} \cdot 10^{-16}$

d) $\frac{21^{n-3} \cdot 3^{3-n}}{7^{n-1}}$ $\frac{1}{49}$

2 Potências de base 10

Procure explorar outras situações que envolvam as aplicações de potências de base 10 presentes no cotidiano dos alunos. Incentive pesquisas em livros de Geografia, Ciências, revistas, jornais e enciclopédias.

Simplificando a escrita numérica

Para refletir e responder

A Terra é aproximadamente uma imensa esfera. Sabe-se que sua massa é cerca de 5 980 sextilhões de quilogramas.

O número 5 980 sextilhões é igual a 598 seguidos de 22 zeros.

5 980 sextilhões

5 980 000 000 000 000 000 000 000

NASA IMAGES/ALAMY/LATINSTOCK

Fotografia do planeta Terra visto do espaço.

- Como você escreveria a massa da Terra usando potências? Resposta possível: $598 \cdot 10^{22}$ kg.

É possível reduzir a escrita de números que têm muitos dígitos iguais a zero utilizando **potências de base 10**. Veja o exemplo abaixo.

A massa de um próton é aproximadamente

0,000000000000000000000000000167 quilogramas.

O número 167 que aparece na informação acima é precedido por 29 zeros.

0,000000000000000000000000000167

$167 \cdot 0,000000000000000000000000000001$

$\mathbf{167 \cdot 10^{-29}}$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

35. A velocidade da luz é aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s. Como é a escrita desse número utilizando todos os dígitos? 300 000 000 m/s.

36. Dentre os 46 cromossomos humanos, os maiores têm cerca de 0,005 mm de comprimento e os menores medem aproximadamente 0,001 mm. Escreva esses números usando potências de 10. $5 \cdot 10^{-3}$ mm; $1 \cdot 10^{-3}$ mm ou 10^{-3} mm Há outras respostas possíveis.

37. Observe a coluna correspondente a números deste quadro e anote as escritas, na forma de potência de 10, que correspondem aos números dados:

	Números	Potências de 10			
a)	dez bilhões	10^{10}	10^6	10^9	$0,1 \cdot 10^{11}$
b)	14 400 000	$1,44 \cdot 10^4$	$144 \cdot 10^5$	$14,4 \cdot 10^6$	$1\,440 \cdot 10^5$
c)	dois milionésimos	$2 \cdot 10^{-5}$	$20 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$
d)	0,00000014	$14 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$14 \cdot 10^{-8}$	$14 \cdot 10^7$

a) 10^{10}; $0,1 \cdot 10^{11}$ b) $144 \cdot 10^5$; $14,4 \cdot 10^6$ c) $0,2 \cdot 10^{-7}$; $2 \cdot 10^{-6}$ d) $14 \cdot 10^{-7}$; $1,4 \cdot 10^{-8}$

38. Escreva os números que aparecem nas frases usando potências de base 10. Há outras respostas possíveis.

a) O Brasil tem, aproximadamente, 191 milhões de habitantes. $191 \cdot 10^6$ habitantes.

b) A espessura de uma folha de papel é de, aproximadamente, 0,002 mm. $2 \cdot 10^{-3}$ mm

c) Um micrômetro é igual a 0,000001 metro. 10^{-6} m.

39. Um raio de um átomo mede, aproximadamente, 0,00000000005 mm. Represente a medida aproximada de um diâmetro desse átomo usando uma potência de base 10. 10^{-10} mm

40. Leia o diálogo a seguir.

Uma galáxia próxima da Via Láctea é Andrômeda, que está aproximadamente a dois milhões e duzentos mil anos-luz da Terra.

- Escreva essa distância usando uma potência de base 10. $22 \cdot 10^5$ anos-luz. Há outras respostas possíveis.

41. Escreva, com todos os dígitos, o resultado de $3{,}42 \cdot 10^{-4}$. 0,000342

42. Calcule estes produtos e dê o resultado usando potências de base 10.

a) $45\,000\,000 \cdot 4\,000\,000$ $18 \cdot 10^{13}$

b) $0{,}000016 \cdot 0{,}00005$

$8 \cdot 10^{-10}$. Há outras respostas possíveis.

43. As igualdades abaixo representam números naturais na forma decomposta em potências de 10. Copie-as substituindo cada ■ por um algarismo, de modo que elas sejam verdadeiras:

a) $1■3■6 = 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6$ 8; 5

b) $61\,208\,000 = 6 \cdot 10^{■} + 1 \cdot 10^6 + ■ \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^{■}$ 7; 2; 3

c) $0{,}6■9■ = 6 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$ 5; 6

d) $0{,}00008032 = 8 \cdot 10^{■} + ■ \cdot 10^{-7} + 2 \cdot 10^{■}$

−5; 3; −8

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

A capacidade de um recipiente é de $0{,}00145 \cdot 10^6$ mL.

- Quantos recipientes iguais a esse serão necessários para acondicionar 145 litros de um líquido? 100 recipientes.

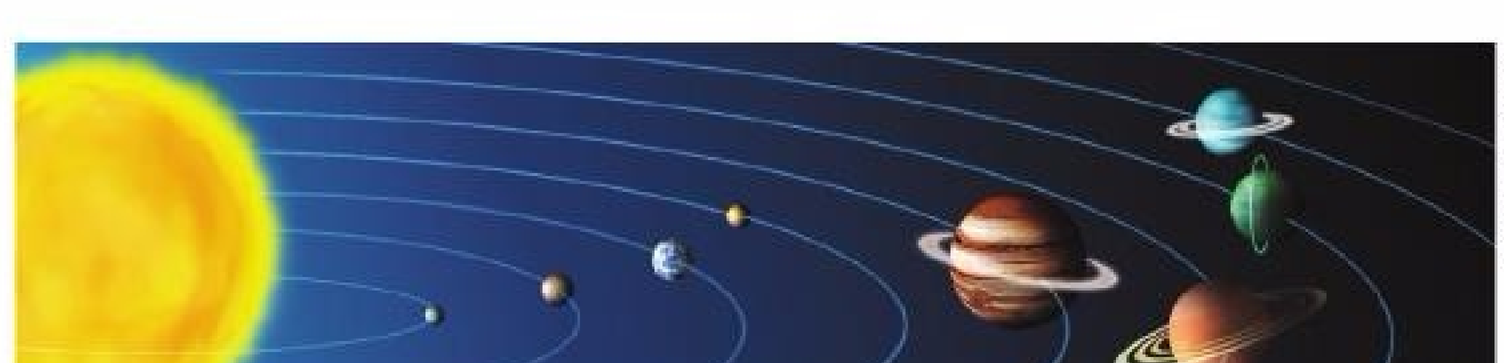
Notação científica

Procure certificar-se de que os alunos compreenderam a notação científica. Dê exemplos de sua aplicação em outros campos e disciplinas. Incentive pesquisas, em livros de Geografia, Ciências, revistas, jornais e enciclopédias, de situações que sejam convenientes para a utilização dessa notação.

Físicos, químicos, biólogos, engenheiros, astrônomos e outros cientistas utilizam números com muitos zeros. Esses números podem ser escritos de várias maneiras, usando potências de base 10.

Exemplo:

A distância do Sol à Terra, por exemplo, é de, aproximadamente, 150 000 000 km e pode ser indicada por **$150 \cdot 10^6$ km** ou **$15 \cdot 10^7$ km** ou **$1{,}5 \cdot 10^8$ km** ou **$0{,}15 \cdot 10^9$ km**.



Representação esquemática com tamanhos e distâncias fora de escala.

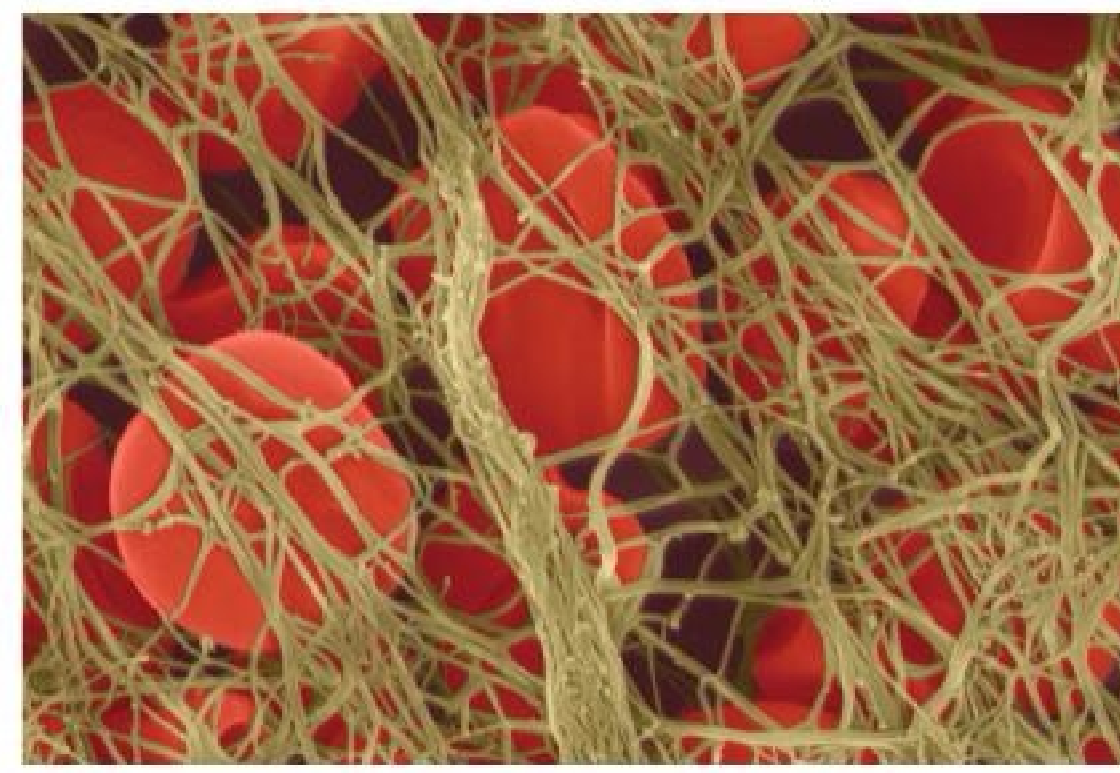
Para facilitar os cálculos e a comunicação em trabalhos científicos, os números com muitos zeros são escritos em uma forma padrão chamada de **notação científica**.

Nesse exemplo, $\mathbf{1,5 \cdot 10^8}$ é a notação científica para representar 150 000 000.

Outro exemplo:

Sabe-se que o sangue dos seres humanos é composto de plasma e vários tipos de célula. Os dois tipos mais importantes são: as hemácias, ou glóbulos vermelhos, e os leucócitos, ou glóbulos brancos.

O diâmetro das hemácias é aproximadamente 0,007 mm ou $7 \cdot 10^{-3}$ mm ou $0,7 \cdot 10^{-2}$ mm. E o diâmetro do leucócito maior alcança 0,012 mm ou $12 \cdot 10^{-3}$ mm ou $1,2 \cdot 10^{-2}$ mm.



DENNIS KUNKEL MICROSCOPY, INC./VISUALS UNLIMITED, INC./ GLOW IMAGES

Micrografia de hemácias presas em uma rede de fibrina, vistas em microscópio eletrônico.

$7 \cdot 10^{-3}$ mm é a notação científica para 0,007 mm e $1,2 \cdot 10^{-2}$ mm, para 0,012 mm.

Um número escrito em notação científica é o produto de um número entre 1 e 10 (incluindo 1 e excluindo 10) por uma potência de base 10.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

44. Escreva estes números usando notação científica:

a) 7500000000 $7,5 \cdot 10^9$ b) 0,0000192 $1,92 \cdot 10^{-5}$

45. Escreva, com todos os algarismos, os números cujas notações científicas são:

a) $1,06 \cdot 10^8$ 106000000 b) $5,024 \cdot 10^{-6}$ 0,000005024

46. Uma dimensão de um vírus é de, aproximadamente, 0,0008 mm. Escreva esse número usando a notação científica. $8 \cdot 10^{-4}$ mm

47. A área total da Chapada dos Guimarães, parque criado em 1989 no Mato Grosso, é de 33 mil hectares. Se **1 hectare (1 ha)** equivale a **10 000 m²**, escreva, usando notação científica, a área desse parque em metros quadrados. $3,3 \cdot 10^8$ m²

48. Uma unidade de medida de comprimento para as distâncias do Universo é o ano-luz. Ela corresponde à distância percorrida pela luz durante um ano. Considerando-se que a luz se desloca no vácuo a cerca de 300 mil quilômetros por segundo, 1 ano-luz equivale a aproximadamente 9 trilhões e 460 bilhões de quilômetros.

Escreva usando a notação científica:

a) a velocidade da luz em quilômetros por segundo e em metros por segundo; $3 \cdot 10^5$ km/s; $3 \cdot 10^8$ m/s

b) o valor do ano-luz em quilômetros e em metros. $9,46 \cdot 10^{12}$ km; $9,46 \cdot 10^{15}$ m

49. A sonda Messenger, da Nasa, partiu em direção a Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol, em agosto de 2004 e entrou em órbita 6 anos depois. Na tabela a seguir, observe alguns dados do nosso planeta e de Mercúrio.

Informações dos planetas Terra e Mercúrio

	Terra	Mercúrio
Diâmetro (km)	12 756	4 878
Distância média do Sol (km)	146 600 000	57 910 000
Temperatura média na superfície (°C)	15	179

Fonte: <http://www.if.ufrgs.br>. Acesso em: 11 mar. 2015.

a) Escreva em notação científica o diâmetro e a distância média do Sol dos planetas Terra e Mercúrio. $1,2756 \cdot 10^4$ km; $4,878 \cdot 10^3$ km; $1,466 \cdot 10^8$ km; $5,791 \cdot 10^7$ km.

b) Calcule a diferença de temperatura média na superfície desses planetas. 164 °C

50. Leia o texto a seguir.

> A população projetada para o Brasil em março de 2015 era de 203 981 294 habitantes de acordo com o IBGE. E o estado mais populoso era São Paulo com 44 310 341 habitantes, seguido de Minas Gerais, com 20 830 021 habitantes.
>
> *Fonte: <http://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 11 mar. 2015.*

a) Arredonde os números dados para a unidade de milhão mais próxima. 204 milhões; 44 milhões e 21 milhões.

b) Escreva os valores arredondados em notação científica. $2,04 \cdot 10^8$; $4,4 \cdot 10^7$; $2,1 \cdot 10^7$

c) Qual era, aproximadamente, o porcentual da população do estado de São Paulo no total da população brasileira? 21,6%

d) Qual era, aproximadamente, o porcentual da população do estado de Minas Gerais no total da população brasileira? 10,3%

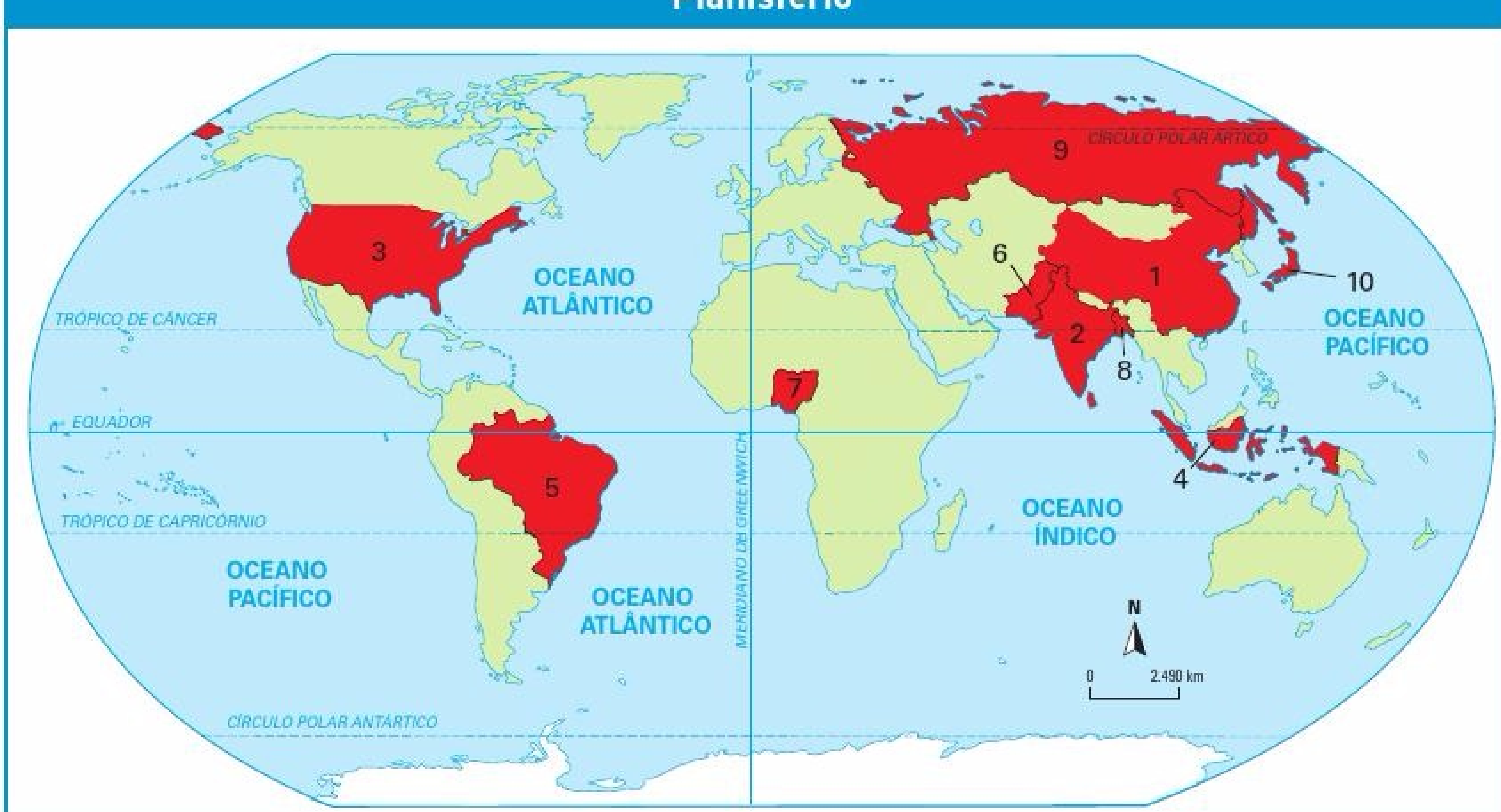
Usando a calculadora

Observe nesta tabela a população de alguns países do mundo em 2014, em milhões de habitantes.

Países	China (1)	Índia (2)	EUA (3)	Indonésia (4)	Brasil (5)	Paquistão (6)	Nigéria (7)	Bangladesh (8)	Rússia (9)	Japão (10)
População (em milhões de habitantes)	1 394	1 267	322,6	252,8	202,0	185,1	178,5	158,5	142,9	127,0

Fonte: <http://www.ibge.gov.br/paisesat/main-frameset.php>. Acesso em: 8 mar. 2015.

Planisfério



Fonte: Leda Ísola; Vera Caldini. Atlas geográfico Saraiva. São Paulo: Saraiva, 2004.

- Utilize as informações dadas e construa uma tabela como esta: Veja resposta no final do livro.

População de alguns países do mundo em 2014

País	População (em milhões de habitantes)	Notação científica
China	1394	$1{,}394 \cdot 10^9$
Índia	1267	

- Agora, responda às questões:
  a) Qual é, aproximadamente, a razão entre a população chinesa e a população indiana? 1,1
  b) Qual é, aproximadamente, a razão entre a população brasileira e a população norte-americana? 0,63
  c) A população chinesa é, aproximadamente, quantas vezes a população brasileira? 6,9 vezes.

Na seção **Exercícios complementares** são propostos exercícios de revisão e aprofundamento sobre conteúdos já estudados. Além disso, em alguns deles os alunos têm a oportunidade de ampliar seus conhecimentos.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

51. O ser humano já construiu máquinas incríveis que desenvolvem grandes velocidades.

MALCOLM FIFE/GETTY IMAGES

Concorde: avião comercial de passageiros. Sua velocidade de cruzeiro atinge cerca de 2 179 km/h.

PAUL SLADE/PARIS MATCH/GETTY IMAGES

X-15: avião propulsionado por um motor foguete. Sua velocidade atinge, aproximadamente, 7 297 km/h.

JHP ATTRACTIONS/ALAMY/LATINSTOCK

Orion: nave capaz de levar 4 tripulantes à Estação Espacial Internacional. Sua velocidade ao entrar na atmosfera terrestre pode atingir 32 000 km/h.

- **Indique a velocidade de cada um desses meios de transporte em metros por hora usando notação científica.** $2{,}179 \cdot 10^6$; $7{,}297 \cdot 10^6$ e $3{,}2 \cdot 10^7$.

Desafio

Quadrado mágico

Copie e complete um quadrado mágico como este de acordo com a regra: os produtos nas colunas, linhas e diagonais são iguais. Incentive os alunos a inventar e trocar entre si outros quadrados e cubos mágicos como esses. É uma forma divertida de revisar e fixar as propriedades de potências.

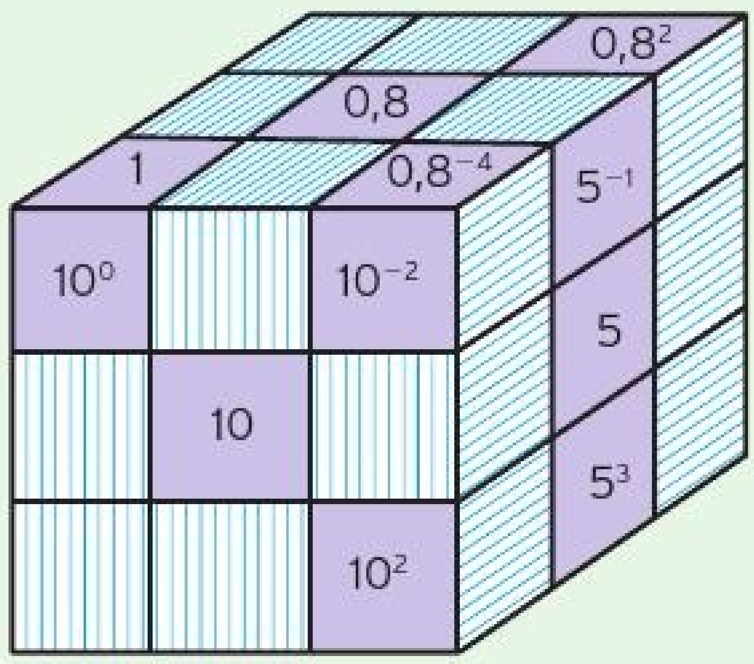
6^0	6^5	6^{-2}
6^{-1}	6	6^3
6^4	6^{-3}	6^2

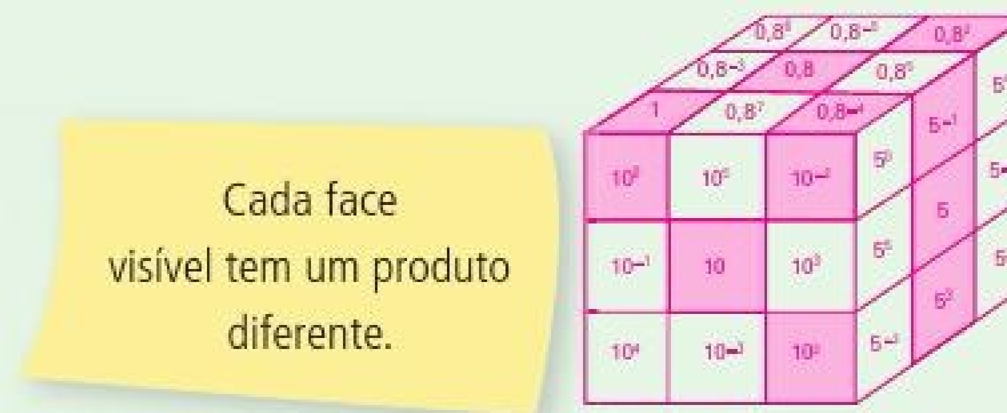
O produto mágico é $6^0 \cdot 6 \cdot 6^2 = 6^3 = 216$.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e observem o cubo representado abaixo. Em seguida, investiguem, reflitam e façam o que se pede.





Cada face visível do cubo é um quadrado mágico, e o produto mágico é diferente nessas três faces.

- Copie o cubo e complete suas faces.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

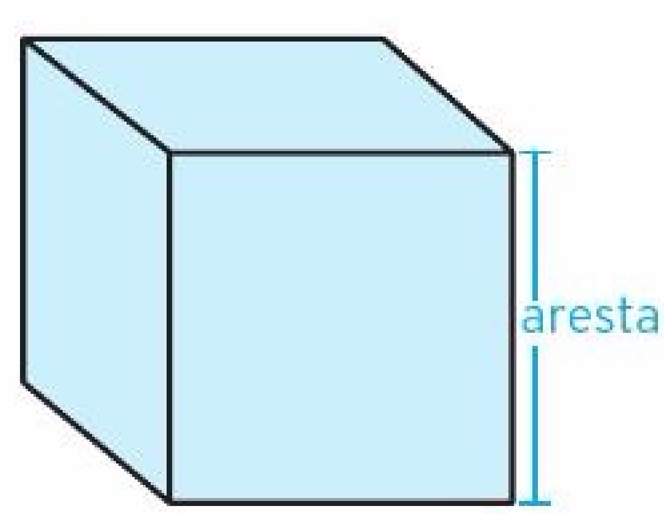
52. Qual é o valor de **n** na igualdade $2^n \cdot 2^{-2} = 2^{-6}$? -4

Pista: Se $10^x = 10^{-5}$, como as bases são iguais, os expoentes também são iguais, ou seja, x é igual a -5. Além disso, lembre-se de outras propriedades das potências de bases iguais.

53. Determine o valor de **x** na igualdade $5^8 \cdot 5^x = 5^9$. 1

54. Para que valor de **x** o quociente de 13^x por 13^9 é igual a 13^{10}? 19

55. O volume de uma caixa cúbica é 12 cm³. Qual é o volume de outra caixa cúbica cujas arestas medem o triplo da medida das arestas da caixa anterior? 324 cm³.



Usando a calculadora

A massa de um elétron é aproximadamente $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ gramas e a de um próton é aproximadamente $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gramas.

- Qual dessas massas é a maior? A massa do próton.
- Aproximadamente, qual é a razão entre a massa do próton e a massa do elétron, nessa ordem? 1833

As potências e as medidas na informática

Verifique se os alunos conhecem as unidades de informação de um computador: *bits, bytes, kilobytes, megabytes* e *gigabytes*. Crie outras situações que envolvam sistema de numeração binário e potenciação.

A menor unidade de informação com que os computadores trabalham é o ***bit***, também chamado unidade elementar da informação. Um *bit* é um sinal eletrônico que só pode ter dois "estados": 0 (desligado) e 1 (ligado).


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Os computadores pessoais, conhecidos pela sigla PC (*Personal Computer*), do início da década de 1980, entendiam linguagens cujas "palavras" (formadas por 0 e 1) tinham 8 *bits*.

Cada palavra de 8 *bits* é chamada de *byte* (que se lê "baite") e é considerada uma unidade muito pequena.

Exemplo:

0 0 1 1 0 1 0 1 é um *byte* e essa palavra corresponde ao número 5, ou seja, quando se pressiona a tecla 5 no computador, ele registra esse sequência de zeros e 1.

A memória de um computador e sua área de armazenamento de dados são medidas, também, em unidades múltiplas do *byte*. São elas:

1 kilobyte = 1 kB ou 1 k = 1024 *bytes* = 2^{10} *bytes*

1 megabyte = 1 MB ou 1 M = 1024 *kilobytes* = 2^{10} *kilobytes*

1 gigabyte = 1 GB ou 1 G = 1024 *megabytes* = 2^{10} *megabytes*

Bit é uma contração das palavras ***binary digit***.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

56. Escreva, em forma de potência de base 2, quantos *bytes* têm um *megabyte* e um *gigabyte*. 2^{20} *bytes* e 2^{30} *bytes*.

57. Quantos *kilobytes* de memória tem um computador com 2 *gigabytes*? 2^{21} *kilobytes*.

58. Um disco rígido é um dispositivo de um computador no qual ficam armazenadas cópias de aplicativos, de arquivos e de documentos. Sua capacidade consiste na quantidade de informações que pode conter.

a) Quantos *bytes* pode armazenar um disco de 20 *gigabytes*? $5 \cdot 2^{32}$ *bytes*.

b) Quantos *gigabytes* pode armazenar um disco de 2 048 *megabytes*? 2 *gigabytes*.

59. Até 2005, a capacidade dos discos rígidos dos computadores pessoais era medida em *megabytes*. A evolução da informática é tão grande que novos múltiplos do *byte* surgiram, além do *kilobyte*, *megabyte* e *gigabyte*. Esses múltiplos são o *terabyte*, o *petabyte*, o *exabyte*, o *zettabyte* e o *yottabyte*. Veja resposta no final do livro.

Observe abaixo as relações entre as unidades de informação. Escreva, em forma de potência de base 2, quantos *bytes* tem cada uma das unidades.

Nome	Abreviação	"Tamanho"
1 *terabyte*	1 T	1024 *gigabytes*
1 *petabyte*	1 P	1024 *terabytes*
1 *exabyte*	1 E	1024 *petabytes*
1 *zettabyte*	1 Z	1024 *exabytes*
1 *yottabyte*	1 Y	1024 *zettabytes*

Fonte: <http://informatica.hsw.uol.com.br/bits-bytes.htm>. Acesso em: 3 jun. 2015.

Grande ou pequeno? Depende…

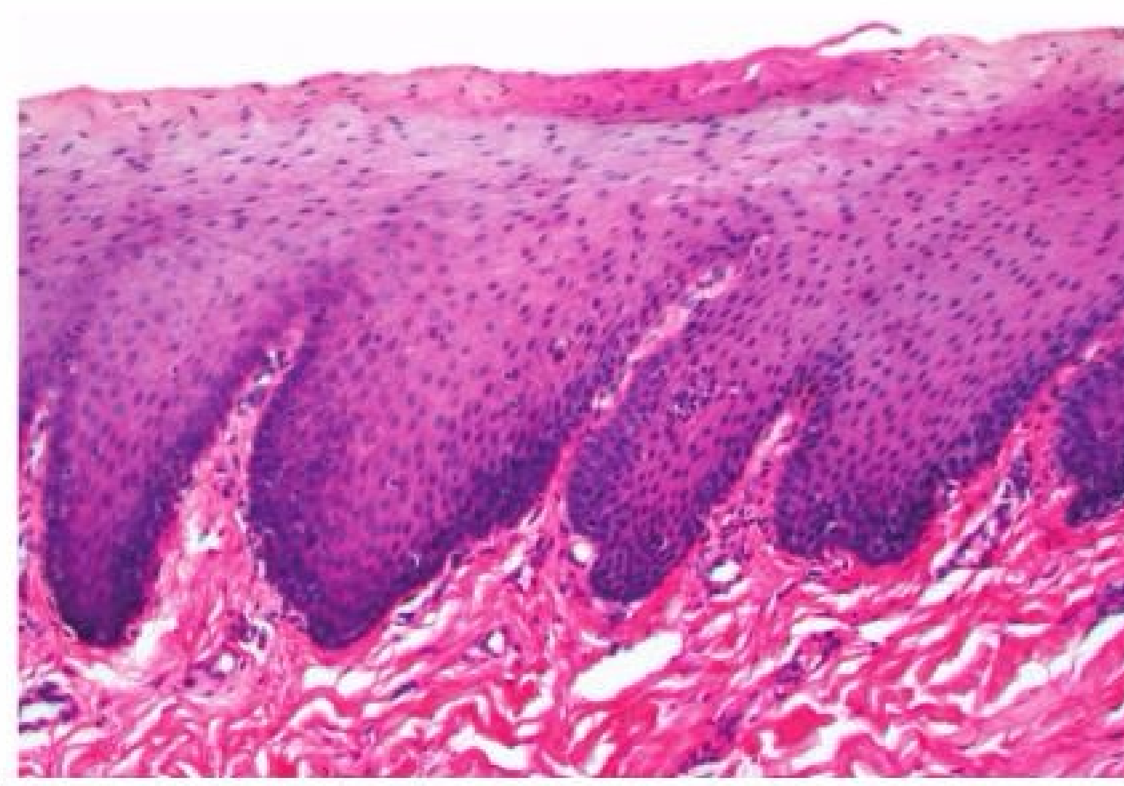
Para um astronauta navegando pelo Universo, o objeto de sua observação poderia estar **a centenas de milhões de quilômetros** de distância.

Em relação ao Universo, a Lua, por exemplo, parece ser apenas um ponto e o ser humano, algo menor ainda: um "quase nada". Mas em relação a um grão de areia, as dimensões humanas se apresentam enormes.

WORLD PERSPECTIVES/GETTY IMAGES

Um ser humano pisou na Lua pela primeira vez em 20 de julho de 1969.

Agora veja esta micrografia. Nela, as células da pele humana, ampliadas muitas e muitas vezes, podem parecer grandes. Mas, a olho nu, sua dimensão não passa de aproximadamente **um décimo de milímetro** ou de **um milionésimo de metro**.



DR. DAVID PHILLIPS/GETTY IMAGES

Micrografia da pele humana.

Utilizando potências de 10 para expressar grandes distâncias ou pequenas dimensões, verificamos que:

- Conforme os expoentes aumentam (10^1, 10^2, 10^3, 10^4, …), penetramos em mundos cada vez maiores e mais distantes: planetas, estrelas, galáxias…
- Conforme os expoentes diminuem (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, …), as potências nos revelam mundos cada vez menores: moléculas, átomos, elétrons.

No livro *Matemática e imaginação*, o autor norte-americano Edward Kasner apresentou um número muito grande, denominado **googol**, que pode ser representado por 1 seguido de 100 zeros.

$$1\ \textit{googol} = 10^{100}$$

Para ter uma ideia da grandeza de 1 *googol*, lembramos que a distância da Terra ao Sol é, aproximadamente, $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Portanto, para percorrer uma distância de 1 *googol* km é necessária, aproximadamente, uma vez e meia a distância da Terra ao Sol, multiplicada por 10^{92}, ou seja, uma vez e meia a distância da Terra ao Sol seguida de 92 zeros.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Um questionário é formado por três perguntas. Para cada uma delas a resposta pode ser Sim (S) ou Não (N). Assim, as respostas de um questionário apresentam uma sequência de três letras, como, por exemplo, SNN.

VAGNER DE FARIAS

a) Quantas e quais sequências desse tipo podem ser formadas? 8; SSS, SSN, SNS, SNN, NSS, NSN, NNS, NNN

b) Utilize potências para escrever o número de sequências obtidas. 2^3

c) Um outro questionário é formado por 20 perguntas em que cada resposta é Sim (S) ou Não (N). Uma pessoa que respondeu ao questionário apresentou esta sequência:

SSNNNSNNSSSNSSNNNSSN.

Quantas sequências desse tipo podem ser formadas? 2^{20}

2. Calcule as potências a seguir:

a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$ $-\frac{125}{216}$

b) -1^{100} -1

c) $(12)^{-2}$ $\frac{1}{144}$

d) $(0{,}003)^2$ 0,000009

3. Cristina resolveu fazer uma experiência poupando dinheiro durante sete meses. No primeiro mês guardou R$ 3,00 e, em cada mês seguinte, o triplo da quantia guardada no mês anterior. Qual a quantia que Cristina juntou em 7 meses? R$ 3279,00.

4. Qual é o quociente de 27,01 por 10^3? Escreva esse resultado com todas as ordens decimais. 0,02701

5. Escreva com todos os dígitos o resultado de $13{,}59 \cdot 10^{-4}$. 0,001359

6. Calcule as operações indicadas e escreva a resposta usando potências de base 10. Há outras respostas possíveis.

a) $7\,800\,000\,000\,000 \cdot 5\,000\,000\,000$ $39 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,387 : 0{,}000\,000\,003$ $129 \cdot 10^{-9}$

c) $800\,000\,000\,000^2$ $64 \cdot 10^{22}$

d) $0{,}000\,000\,002^{-4}$ $625 \cdot 10^{32}$

7. Calcule o valor da expressão: $\frac{10^6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^8 \cdot 10^{-12}}{10^7 \cdot 10^{-9}}$. 1

8. A distância da Terra ao planeta Netuno é aproximadamente 4 308 000 000 km. Escreva esse número usando a notação científica. $4{,}308 \cdot 10^9$ km

9. Copie as igualdades substituindo cada ■ por um número que as torne verdadeiras:

a) $2^{■} = 128$ 7

b) $(0{,}2)^{■} = 0{,}0016$ 4

c) $3^{■} = 2187$ 7

d) $10^{■} = 0{,}001$ -3

10. Na igualdade $5^{3n} \cdot 25 = \frac{1}{625}$, **n** é um número inteiro. Calcule o valor de **n**. -2

11. Um tipo de célula animal tem a capacidade de se dividir, a cada segundo, em quatro novas células iguais à primeira. Uma dessas células foi colocada em um frasco, em condições ambientais para que ela continue vivendo. O número de células que o frasco conterá, após 5 segundos do início da divisão da primeira célula, supondo que nenhuma delas morra nesse período, é: d

a) 21

b) 1 024

c) 1 025

d) 1 365

12. O diâmetro de um alfinete é de aproximadamente: a

a) $2 \cdot 10^{-3}$ cm
c) $2 \cdot 10^{1}$ cm
b) $2 \cdot 10^{0}$ cm
d) $2 \cdot 10^{2}$ cm

13. (Fuvest-SP) O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é: b

a) 0,0264
d) 0,2568
b) 0,0336
e) 0,6256
c) 0,1056

14. (Cesgranrio-RJ) O telescópio *Hubble* captou a imagem de um anel de matéria escura num aglomerado de galáxias situado a cinco bilhões de anos-luz da Terra. Se um ano-luz equivale a 9,5 trilhões de quilômetros, a distância, em trilhões de km, entre a Terra e esse aglomerado de galáxias é: e

a) $4{,}75 \cdot 10^{7}$
d) $4{,}55 \cdot 10^{10}$
b) $4{,}55 \cdot 10^{9}$
e) $4{,}75 \cdot 10^{22}$
c) $4{,}75 \cdot 10^{9}$

15. (UECE) O valor de $\dfrac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 + 2^{-2}}$ é: b

a) $-\dfrac{15}{17}$
c) $-\dfrac{15}{16}$
b) $-\dfrac{16}{17}$
d) $-\dfrac{17}{16}$

16. O resultado de $(2^{-2})^3 + 2^{-3}$ é o quadrado de: d

a) 72
c) $\dfrac{3}{64}$
b) $\dfrac{1}{8}$
d) $\dfrac{3}{8}$

17. Uma das menores distâncias em que o planeta Marte esteve em relação à Terra foi aproximadamente 55,76 milhões de quilômetros. Uma notação científica dessa medida é: c

a) $5576 \cdot 10^{-2}$ km
c) $5{,}576 \cdot 10^{7}$ km
b) $55{,}76 \cdot 10^{6}$ km
d) $0{,}5576 \cdot 10^{7}$ km

18. O número inteiro que se deve adicionar ao binômio $x^2 - 14x$ para que resulte um trinômio quadrado perfeito é: d

a) 7
c) 28
b) 14
d) 49

19. A velocidade da luz é aproximadamente $3 \cdot 10^{9}$ m/s. A distância percorrida pela luz em 1 hora é de: b

a) $90 \cdot 10^{8}$ m
b) $18 \cdot 10^{9}$ m
c) $180 \cdot 10^{9}$ m
d) Nenhuma das alternativas.

1 h equivale a 3 600 s.

20. A capacidade de um recipiente é de $0{,}00092 \cdot 10^{5}$ mL. Essa capacidade em litros corresponde a: d

a) 0,0092 L
b) 92 L
c) 9,2 L
d) $9{,}2 \cdot 10^{-2}$ L

21. A medida 100 *kilobyte* ou 100 kB corresponde a: d

a) 2^{10} *bytes*
c) $10 \cdot 2^{10}$ *bytes*
b) 20 *bytes*
d) $100 \cdot 2^{10}$ *bytes*

22. (Cesgranrio-RJ)

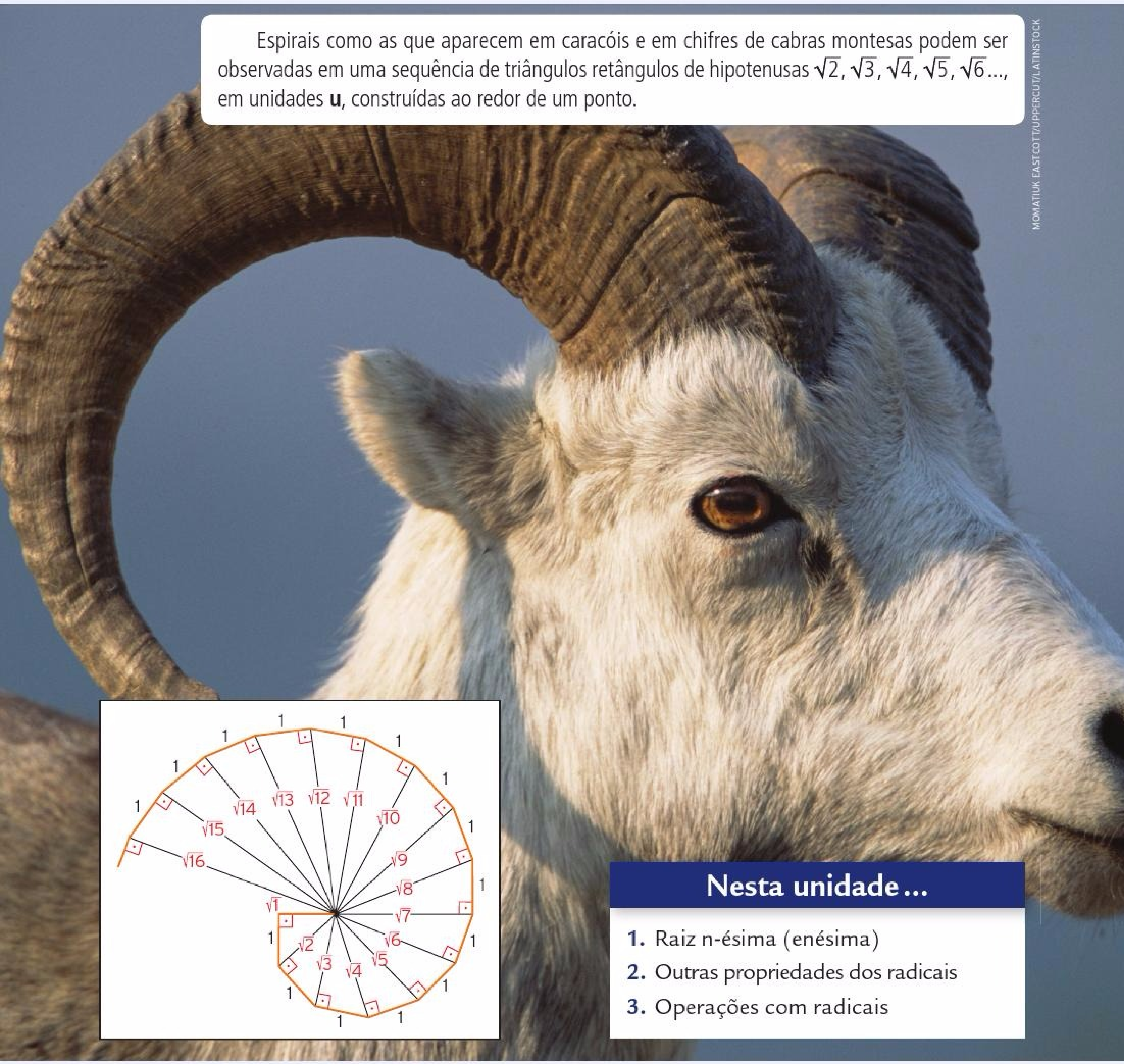
Fonte: Jornal O Globo, maio de 2007.

Se 1024 *megabytes* correspondem a 1 *gigabyte*, quantos *kilobytes* correspondem a 2 *gigabytes*? e

a) 2^{10} b) 2^{11} c) 2^{16} d) 2^{20} e) 2^{21}

UNIDADE 2 Radiciação: propriedades

Espirais como as que aparecem em caracóis e em chifres de cabras montesas podem ser observadas em uma sequência de triângulos retângulos de hipotenusas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$..., em unidades **u**, construídas ao redor de um ponto.



MOMATIUK EASTCOTT/UPPERCUT/LATINSTOCK

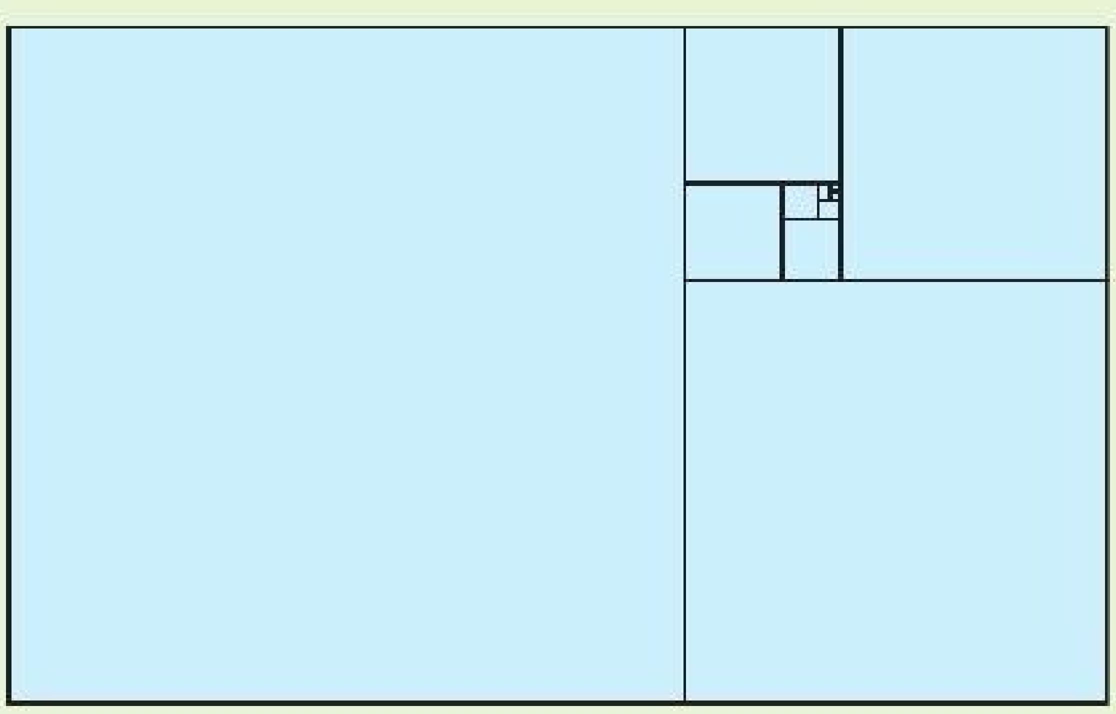
Nesta unidade...

1. Raiz n-ésima (enésima)
2. Outras propriedades dos radicais
3. Operações com radicais

Aplicações de números reais representados em forma de radical podem ser encontradas em figuras geométricas, como a espiral, e em construções como esta do Partenon.

A fachada do Partenon, em Atenas, na Grécia, foi construída segundo a razão áurea.


CAROLYN CLARKE/ALAMY/LATINSTOCK



Os gregos antigos consideravam harmoniosos os retângulos em que a razão entre as medidas de seus lados fosse igual ao número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Retângulos como esses foram chamados **retângulos áureos** ou **retângulos de ouro** e o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ foi denominado **número áureo** ou **razão áurea**.

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número real composto de uma parte na forma de radical.

O que você já sabe?

- Use uma calculadora e obtenha um valor aproximado para $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Compare o valor calculado com o resultado de dois colegas. Todos encontraram o mesmo resultado?
  1,62. Há outras respostas possíveis. Resposta pessoal.
- Na sequência de triângulos retângulos que formam a espiral apresentada na página anterior, qual é a medida da hipotenusa do triângulo cujos lados medem 1 unidade? Esse número é um número real na forma de radical? $\sqrt{2}$. Sim.
- Que outras situações podem ser representadas por números reais na forma de radical?
  A medida do lado de um quadrado com área igual a 10 m². Há outras respostas possíveis.

1 Raiz n-ésima (enésima)

Potenciação e radiciação: operações inversas

Para refletir e responder

HÉLIO SENATORE

ALAMY/OTHER IMAGES

- Quantos metros tem cada aresta desse cubo? 4 m.

Considerando **a** a medida de uma aresta do cubo, $\mathbf{a^3}$ representa o volume desse cubo:

$$a^3 = 64$$

a é um número real que, elevado ao cubo, resulta em 64.

Como: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ —— $4^3 = 64$ —— $a = 4$. Cada aresta mede 4 m.

Dizemos que **4** é a **raiz cúbica** de **64**.

Representamos a **raiz cúbica de 64** por $\sqrt[3]{64}$.

$$\sqrt[3]{64} = 4 \text{ porque } 4^3 = 64$$

$\sqrt{\ }$ —— é o **radical**   **3** —— é o **índice**

64 —— é o **radicando**   **4** —— é a **raiz**

Note que a radiciação é a operação inversa da potenciação. Extraindo a raiz cúbica de um número e elevando o resultado ao cubo voltamos a ter o número inicial.

De modo geral:

Se **a** é um número **real positivo** e **n** é um número inteiro **maior que 1**, então $\sqrt[n]{a}$ é o número **b**, real positivo, tal que $\mathbf{b^n = a}$.

Se **a** é um número **real negativo** e **n** é um número **ímpar maior que 1**, então $\sqrt[n]{a}$ é o número **b**, real negativo, tal que $\mathbf{b^n = a}$.

Lê-se: "raiz enésima de **a**".

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ porque } b^n = a$$

Se **a = 0** e **n** é um número natural **maior que 1**, então $\sqrt[n]{a} = 0$.

A raiz de índice **n** de um número elevado a **n** é o próprio número.

Além disso:

Se **n** é um número par maior que 1 e **a** é um número real positivo ou nulo, então $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Se **n** é um número ímpar maior que 1 e **a** é um número real, então $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Exemplos:

- $\sqrt[4]{16} = 2$, porque $2^4 = 16$
- $\sqrt[10]{0} = 0$
- $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
- $\sqrt[3]{-0{,}125} = -0{,}5$, porque $(-0{,}5)^3 = -0{,}125$
- $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
- $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$

Observação: Se o índice **n** for um número par e o radicando for um número negativo, a raiz enésima desse número não será um número real porque todo número real negativo elevado a expoente par resulta em um número positivo.

O número $\sqrt[4]{-256}$ não é um número real porque não existe um número real que elevado à quarta potência resulte em -256.

Vamos combinar:
Quando o índice do radical for par e o radicando for uma expressão algébrica, ela representará números reais positivos.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. É possível calcular raízes de alguns números reais por meio de tentativas. Então, calcule:

a) $\sqrt{49}$ 7   b) $\sqrt[3]{125}$ 5   c) $\sqrt[5]{32}$ 2

- Escolha um dos itens resolvidos e conte aos colegas como foi encontrada a raiz. Resposta pessoal.

2. O número $\sqrt[4]{-81}$ é um número real? Justifique.
Não, porque não existe um número real que elevado à quarta potência resulte em -81.

3. Copie as igualdades substituindo cada ■ por um número que as torne verdadeiras.

a) $\sqrt[6]{■} = 3$, pois $3^6 = ■$ 729

b) $\sqrt[11]{■} = -1$, pois $(-1)^{11} = ■$ -1

c) $\sqrt{324} = ■$, pois $■^2 = 324$ 18

d) $\sqrt[3]{-216} = ■$, pois $■^3 = -216$ -6

4. Calcule:

a) $\sqrt{16}$ e $\sqrt{64}$ 4, 8   b) $\sqrt{16 + 64}$ $\sqrt{80}$

- Agora, responda: $\sqrt{16} + \sqrt{64} = \sqrt{16 + 64}$? Não.

5. Considere as expressões que estão nestes quadros:

(A) $\sqrt{9}$ (B) $\sqrt{25}$ (C) $\left(\sqrt{9} + \sqrt{25}\right)^2$

a) Calcule o valor de cada expressão. A: 3 ; B: 5 ; C: 64

b) A igualdade $(\sqrt{9} + \sqrt{25})^2 = (\sqrt{9})^2 + (\sqrt{25})^2$ é verdadeira? Não.

Potência com expoentes fracionários

Muitas das criações do ser humano são produto da observação de **regularidades**, ou **padrões**, de fenômenos que ocorrem na natureza. Algumas propriedades que estudamos também resultam da ocorrência de regularidades que surgem em relações matemáticas, como nesta sequência de cálculos:

$$(4^3)^2 = 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3} = 4^6$$

$$(4^2)^2 = 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2} = 4^4$$

$$(4^1)^2 = 4^1 \cdot 4^1 = 4^{1+1} = 4^2$$

$$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4^1 = 4$$

Como $(\sqrt{4})^2 = 4$ e $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$, do padrão observado resulta uma forma conveniente de indicar a **raiz quadrada** de 4.

$$\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$$

O expoente $\frac{1}{2}$ representa $\sqrt{}$.

Os **radicais** podem ser representados por **potências com expoente fracionário** e as potências com expoentes fracionários podem ser escritas na forma de radicais.

$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$, em que **n** é um número inteiro maior que 1.

Exemplos:

- $6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$
- $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$
- $(-3)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-3)^3}$

Para potências com expoentes fracionários valem as mesmas propriedades já vistas para expoentes inteiros. Veja nesta tabela quais são essas propriedades:

	Exemplo (numérico)	Exemplo (algébrico)
Multiplicação (bases iguais)	$5^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} = 5^{\frac{1}{7} + \frac{2}{7}} = 5^{\frac{3}{7}}$	$a^{\frac{1}{2}} \cdot a = a^{\frac{1}{2} + 1} = a^{\frac{3}{2}}$
Divisão (bases iguais)	$4^{\frac{1}{2}} : 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}}$	$m^2 : m^{\frac{3}{4}} = m^{2 - \frac{3}{4}} = m^{\frac{5}{4}}$
Potência de potência	$\left(10^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{5}} = 10^{-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}} = 10^{-\frac{3}{20}}$	$\left(b^{-\frac{2}{5}}\right)^3 = b^{-\frac{2}{5} \cdot 3} = b^{-\frac{6}{5}}$
Potência de um produto	$(2 \cdot 5)^{-\frac{3}{5}} = 2^{-\frac{3}{5}} \cdot 5^{-\frac{3}{5}}$	$(a \cdot b)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$
Potência de um quociente	$\left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{11^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{2}{3}}}$	$(m : n)^{\frac{1}{8}} = m^{\frac{1}{8}} : n^{\frac{1}{8}}$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

6. Escreva estes números como potências com expoentes fracionários:

a) $\sqrt[3]{5^2}$ $5^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[n]{6^3}$ $6^{\frac{3}{n}}$

c) $\sqrt[3]{9^{-1}}$ $9^{-\frac{1}{3}}$

d) $\sqrt{x + 10}$ $(x + 10)^{\frac{1}{2}}$

7. Represente estas potências usando radicais:

a) $11^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{11}$

b) $7^{\frac{n}{2}}$ $\sqrt{7^n}$

c) $5^{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{5^2}$ ou $\sqrt[3]{25}$

8. Calcule o valor das expressões:

a) $3 \cdot \sqrt[3]{-27} + \sqrt[6]{1} - 2 \cdot \sqrt{9}$ -14

b) $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5}$ 7

9. Copie esta tabela e complete-a, calculando os valores numéricos das expressões indicadas.

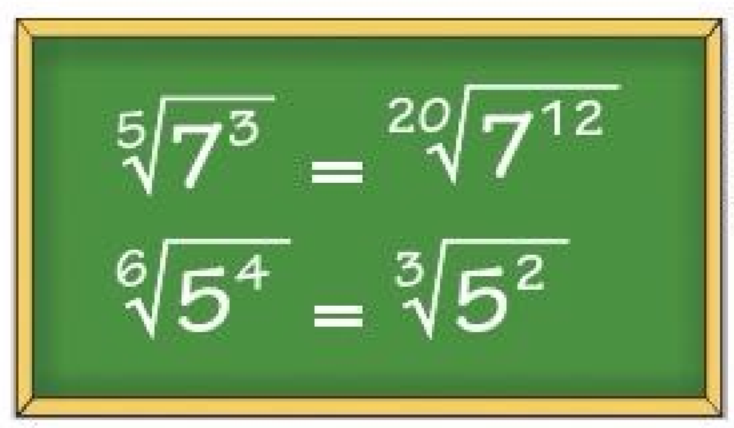
a	b	c	$b^2 - 4ac$	$\sqrt{b^2 - 4ac}$
3	−2	−1	16	4
9	−6	1	0	0
1	−7	15	−11	Não é um número real.

2 Outras propriedades dos radicais

Radicais equivalentes

Para refletir e responder

Observe as igualdades escritas no quadro abaixo.



HÉLIO SENATORE

- Essas igualdades são verdadeiras? Sim.

Utilizando expoentes fracionários e as propriedades das frações pode-se verificar a validade das igualdades apresentadas no quadro de giz.

$$\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}} = 7^{\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}} = 7^{\frac{12}{20}} = \sqrt[20]{7^{12}} \text{ ——— } \boldsymbol{\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[20]{7^{12}}}$$

$$\sqrt[6]{5^4} = 5^{\frac{4}{6}} = 5^{\frac{4:2}{6:2}} = 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \text{ ——— } \boldsymbol{\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}}$$

Os radicais $\sqrt[5]{7^3}$ e $\sqrt[20]{7^{12}}$ são radicais equivalentes, assim como $\sqrt[6]{5^4}$ e $\sqrt[3]{5^2}$.

As propriedades a seguir são válidas respeitando as condições de existência dos radicais.

1ª propriedade

Multiplicando o índice de um radical e o expoente do radicando por um mesmo número inteiro positivo, obtém-se um radical equivalente ao primeiro.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}},\ p > 0$$

Dividindo o índice de um radical e o expoente do radicando por um divisor comum a eles, obtém-se um radical equivalente ao primeiro.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}},\ p > 0$$

Exemplo:

Simplifique o radical $\sqrt[6]{(x^2 - 7)^3}$.

3 é fator comum ao índice do radical e ao expoente do radicando e, por essa razão, dividimos ambos por 3.

$$\sqrt[6]{(x^2 - 7)^3} = \sqrt[6:3]{(x^2 - 7)^{3:3}} = \sqrt[2]{(x^2 - 7)^1} = \sqrt[2]{(x^2 - 7)}$$

Outras propriedades

Valem também estas igualdades a seguir. Vamos verificar cada uma delas.

$$\sqrt[3]{7 \cdot 12} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{12} \qquad \sqrt{12 : 35} = \sqrt{12} : \sqrt{35} \qquad \sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$$

HÉLIO SENATORE

- Para a igualdade $\sqrt[3]{7 \cdot 12} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{12}$, usamos a propriedade da potência de um produto indicado.

$$\sqrt[3]{7 \cdot 12} = (7 \cdot 12)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{12} \text{ ——— } \sqrt[3]{7 \cdot 12} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{12}$$

2ª propriedade

A raiz de um produto de dois fatores é igual ao produto das raízes dos fatores.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

- Para a igualdade $\sqrt{12 : 35} = \sqrt{12} : \sqrt{35}$, aplicamos a propriedade da potência de um quociente indicado.

$$\sqrt{12 : 35} = (12 : 35)^{\frac{1}{2}} = 12^{\frac{1}{2}} : 35^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12} : \sqrt{35} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35}} \text{ ——— } \sqrt{12 : 35} = \sqrt{12} : \sqrt{35}$$

3ª propriedade

A raiz de um quociente entre dois termos é igual ao quociente das raízes desses termos.

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- E, para a igualdade $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$, usamos expoentes fracionários e as propriedades das frações.

$$\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3} \text{ ——— } \sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$$

4ª propriedade

A raiz de uma raiz de um número é igual a uma raiz cujo índice é o produto dos índices dessas raízes e de mesmo radicando inicial.

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Essas propriedades são utilizadas para simplificar expressões numéricas e algébricas que envolvem radicais. Exemplo:

Calcule o valor de $\sqrt[3]{125\,000}$.

Podemos escrever 125 000 como o produto $125 \cdot 1000$ e $\sqrt[3]{125 \cdot 1000}$ como um produto de radicais.

$$\sqrt[3]{125\,000} = \sqrt[3]{125 \cdot 1000} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{1000} = 5 \cdot 10 = \mathbf{50}$$

O valor de $\sqrt[3]{125\,000}$ é 50.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Indique um radical de índice 6 equivalente a $\sqrt[3]{a^2}$. $\sqrt[6]{a^4}$

11. Utilize as propriedades dos radicais e simplifique:

a) $\sqrt[12]{15^{18}}$ $\sqrt{15^3}$ b) $\sqrt[10]{(xy^3)^8}$ $\sqrt[5]{(xy^3)^4}$ c) $\sqrt[10]{3^6 \cdot 5^2}$ $\sqrt[5]{3^3 \cdot 5}$

12. Escreva estas raízes como um produto ou um quociente de radicais:

a) $\sqrt[4]{15 \cdot 12}$ $\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[4]{12}$ b) $\sqrt[4]{(a-b)\cdot(2a+b)}$ $\sqrt[4]{a-b} \cdot \sqrt[4]{2a+b}$ c) $\sqrt[4]{\dfrac{5}{8}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{8}}$

13. Quais destas expressões resultam em números inteiros? Anote sua resposta: a: 9; c: 10

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ b) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{125}$ c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt[4]{625}}$

14. Transforme em um produto de radicais e determine o valor de:

a) $\sqrt{6400}$ 80   b) $\sqrt{12\,100}$ 110   c) $\sqrt{90\,000}$ 300   d) $\sqrt{144a^2b^4}$ $12ab^2$

15. Aplique as propriedades dos radicais e calcule o valor de $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}027}{216}}$. $\dfrac{1}{20}$

Usando a calculadora

- Calcule os valores aproximados destas raízes:

$\sqrt{30}$ 5,4772255 $\sqrt{\sqrt{108}}$ 3,2237098 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{250}}}$ 1,9940796

- Qual desses números é o maior? $\sqrt{30}$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e respondam.

O volume de um cubo é $512a^3$ cm³.

- Determinem a medida da aresta desse cubo. $8a$ cm
- Calculem a soma das áreas de todas as suas faces. $384a^2$ cm²

Cálculo com expressões que envolvem radicais

Existem poucas aplicações deste tema no dia a dia dos alunos. Por isso, sugerimos que não dedique muito tempo a atividades que envolvam cálculos trabalhosos.

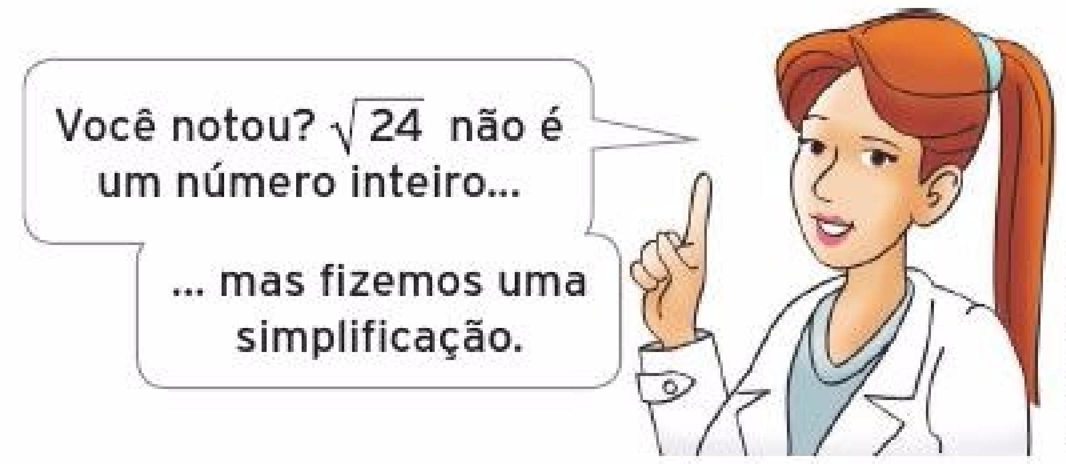
Aplicando as propriedades dos radicais, podemos extrair do radicando os fatores que têm raízes exatas. Com esse procedimento, é possível simplificar expressões numéricas e algébricas que envolvem radicais.

Exemplos:

- De que outra maneira podemos escrever $\sqrt{24}$?

Podemos simplificar $\sqrt{24}$ fatorando o radicando e aplicando as propriedades dos radicais.

$$\sqrt{24} = \underbrace{\sqrt{2^2 \cdot 6}}_{\text{raiz de um produto}} = \underbrace{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6}}_{\text{produto de raízes}} = 2\sqrt{6} \quad \text{(1ª propriedade)}$$



O radical $\mathbf{2\sqrt{6}}$ é uma forma simplificada de $\mathbf{\sqrt{24}}$.

- Simplifique $\sqrt{\dfrac{343}{625}}$.

Simplificamos $\sqrt{\dfrac{343}{625}}$ transformando o radical em um quociente de radicais e fatorando os radicandos dos termos da fração:

$$\sqrt{\frac{343}{625}} = \frac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{5^4}} = \frac{\sqrt{7^2 \cdot 7}}{\sqrt{5^2 \cdot 5^2}} = \frac{\sqrt{7^2} \cdot \sqrt{7}}{\underbrace{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2}}_{\text{Produto de radicais}}} = \frac{7\sqrt{7}}{25}$$

Uma forma simplificada de $\sqrt{\dfrac{343}{625}}$ é $\dfrac{7\sqrt{7}}{25}$.

- Simplifique a fração $\dfrac{5 + \sqrt{75}}{5}$ e calcule um valor aproximado com duas ordens decimais.

Simplificamos os radicandos e colocamos em evidência o fator comum:

$$\frac{5 + \sqrt{75}}{5} = \frac{5 + \sqrt{5^2 \cdot 3}}{5} = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{5} = \frac{5 \cdot (1 + \sqrt{3})}{5} = 1 + \sqrt{3} \cong 1 + 1{,}73 = \mathbf{2{,}73}$$

Uma forma simplificada de $\dfrac{5 + \sqrt{75}}{5}$ é $(1 + \sqrt{3})$, que é aproximadamente 2,73.

- Simplifique a expressão algébrica $\sqrt{y^2 + 8y + 16}$.

Simplificamos $\sqrt{y^2 + 8y + 16}$ fatorando o radicando.

$y^2 + 8y + 16$ é um trinômio quadrado perfeito: $y^2 + 8y + 16 = (y + 4)^2$

$\sqrt{y^2 + 8y + 16} = \sqrt{(y + 4)^2} = \mathbf{y + 4}$, para $y + 4 \geqslant 0$, ou seja, $y \geqslant -4$.

Simplificando $\sqrt{y^2 + 8y + 16}$, obtemos $y + 4$, com $y \geqslant -4$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

16. Simplifique estes radicais:

a) $\sqrt{125}$ $5\sqrt{5}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{20}$ $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{224}}{4}$ $\dfrac{\sqrt[5]{7}}{2}$

d) $\sqrt[3]{2376}$ $6\sqrt[3]{11}$

17. Decomponha os coeficientes das expressões algébricas e simplifique os radicais:

a) $\sqrt{8a^3b^6c^9}$ $2ab^3c^4\sqrt{2ac}$

b) $\sqrt[4]{160a^4m^8}$ $2am^2\sqrt[4]{10}$

c) $\sqrt[3]{0{,}216ay^4}$ $0{,}6y\sqrt[3]{ay}$

18. Simplifique as frações:

a) $\dfrac{4 + \sqrt{128}}{4}$ $1 + 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{12\sqrt{3} - \sqrt{288}}{12}$ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{54} - 6}{12}$ $\dfrac{\sqrt[3]{2} - 2}{4}$

19. Simplifique as expressões:

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$ $x + 3$

b) $\sqrt{169x^2 + 104xy + 16y^2}$ $13x + 4y$

20. Considere $A = \sqrt[3]{y^2 - 6y + 9}$ e $B = \sqrt[3]{(y - 3)^5}$ e determine $A : B$. $\dfrac{1}{y - 3}$

3 Operações com radicais

Soma algébrica

Para refletir e responder

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

- Siga a sugestão de Marco e resolva o desafio proposto pela professora.

$-8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \sqrt{3}$
$(-8 + 4 - 5) = \sqrt{3}(-9) = -9\sqrt{3}$

O desafio proposto pela professora envolve uma soma algébrica. Seguindo a sugestão de Marco encontramos uma resposta.

$$-8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (-8 + 4 - 5) \cdot \sqrt{3} = -9\sqrt{3}$$

Portanto, $-9\sqrt{3}$ é o resultado de $-8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$.

No cálculo da soma algébrica acima foram adicionados os radicais semelhantes, que são radicais com índices iguais e radicandos iguais. Exemplos:

- $-5\sqrt{7}$ e $10\sqrt{7}$
- $4\sqrt[3]{5}$ e $6\sqrt[3]{5}$

Existem expressões nas quais simplificamos os radicais antes de calcularmos a soma algébrica.

Exemplos:

- Calcule $\left(-5\sqrt{8} + \frac{2}{15}\sqrt{50}\right)$.

$$-5\sqrt{8} + \frac{2}{15}\sqrt{50} = -5\sqrt{\underbrace{2^3}_{2^2 \cdot 2}} + \frac{2}{15}\sqrt{2 \cdot 5^2} = -5 \cdot 2\sqrt{2} + \frac{2}{15} \cdot 5 \cdot \sqrt{2} =$$

$$= -10\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{(-30 + 2)}{3} \cdot \sqrt{2} = \mathbf{-\frac{28}{3}\sqrt{2}}$$

- Simplifique a soma algébrica: $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 15\sqrt{7} + 10\sqrt{7}$.

Uma soma algébrica de radicais é simplificada reduzindo a um só termo os radicais semelhantes.

Então, separamos os termos em grupos: aqueles que têm $\sqrt[3]{2}$ e os que têm $\sqrt{7}$.

$$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}-15\sqrt{7}+10\sqrt{7}=\left(-\frac{3}{5}+1\right)\cdot\sqrt[3]{2}+(-15+10)\cdot\sqrt{7}=\mathbf{\frac{2}{5}\sqrt[3]{2}-5\sqrt{7}}$$

Como $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{7}$ não são radicais semelhantes, a soma algébrica $\frac{2}{5}\sqrt[3]{2}-5\sqrt{7}$ fica indicada.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

21. Simplifique estas somas algébricas:

a) $\frac{7}{3}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}-\frac{5}{4}\sqrt[3]{2}$ $\frac{-11\sqrt[3]{2}}{12}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

22. Reduza os termos destas somas algébricas:

a) $6\sqrt{45}-12\sqrt{48}+6\sqrt{108}-10\sqrt{20}$ $-12\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

b) $\sqrt[4]{96}+\sqrt[4]{486}-2\sqrt[4]{6}+9\sqrt[4]{243}$ $3\sqrt[4]{6}+27\sqrt[4]{3}$

23. Simplifique as expressões e reduza os termos das somas algébricas: a) $-16\sqrt{a}+87\sqrt{b}$

a) $\sqrt{4a}-\sqrt{81b}-6\sqrt{9a}+8\sqrt{144b}$ b) $\frac{x}{6}\sqrt{y}-\frac{89}{10}\sqrt{x}$

b) $\sqrt{\frac{x^2y}{4}}-x\sqrt{\frac{y}{9}}+\sqrt{\frac{x}{100}}-\sqrt{81x}$, com $x \geqslant 0$

24. Considere $a=\sqrt{9m}$, $b=2\sqrt{100m}$, $c=-8\sqrt{36m}$ e calcule:

a) $a+b+c$ $-25\sqrt{m}$

b) $a-b+c$ $-65\sqrt{m}$

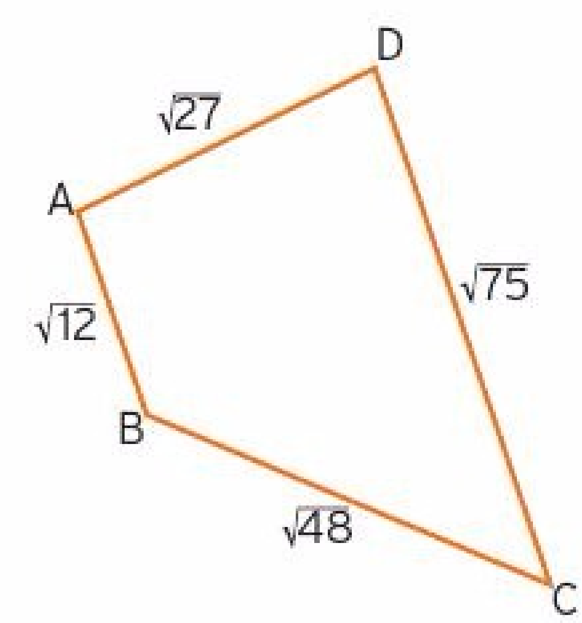
c) $(a+b)-c$ $71\sqrt{m}$

25. Determine o valor desta expressão:

$$3\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}-(2\sqrt[6]{49}+\sqrt[9]{343})$$

$10\sqrt[3]{7}$

26. As medidas do quadrilátero ABCD, indicadas na figura, são dadas em centímetros. Qual é o perímetro desse quadrilátero? $14\sqrt{3}$ cm

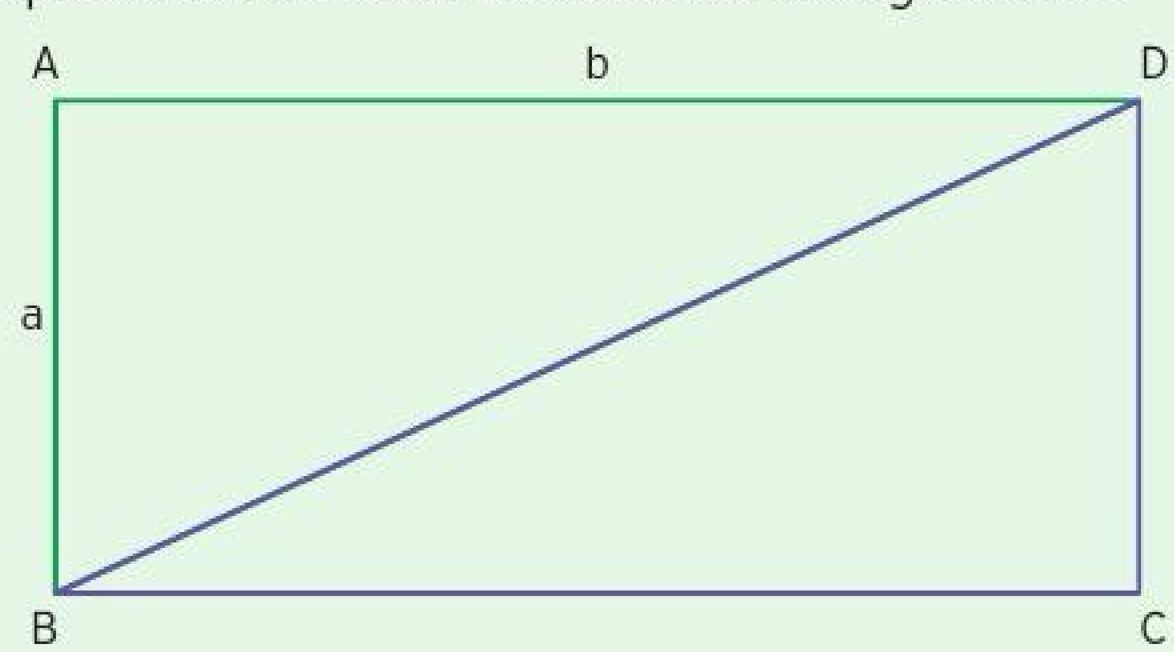


Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e observem a figura representada abaixo. Em seguida, investiguem e respondam às questões.

Nesta figura, **a** e **b** representam medidas dos lados do retângulo ABCD.



- Que expressão algébrica representa a medida da diagonal $\overline{BD}$? $\sqrt{a^2+b^2}$
- $\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}=\mathbf{a+b}$? Explique o porquê. Não, porque $\sqrt{a^2+b^2}$, medida da diagonal $\overline{BD}$, segundo a propriedade dos triângulos, é menor que $a+b$, soma das medidas dos lados do retângulo. Há outras respostas possíveis.

Multiplicação

Para refletir e responder

Leia a pergunta do quadro.

Qual é o resultado da multiplicação de $\sqrt[6]{18}$ por $\sqrt[6]{10}$?

- Junte-se a um colega e respondam à pergunta. $\sqrt[6]{180}$

Existe uma propriedade dos radicais que permite calcular esse produto. Então, vamos relembrar?

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Pela propriedade dos radicais sabemos que:

$\sqrt[6]{18 \cdot 10} = \sqrt[6]{18} \cdot \sqrt[6]{10}$, ou seja, $\sqrt[6]{18} \cdot \sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{18 \cdot 10} = \sqrt[6]{180}$

O produto $\sqrt[6]{18} \cdot \sqrt[6]{10}$ é um radical de mesmo índice 6 e o radicando é o produto $18 \cdot 10$.

Multiplicamos radicais com índices iguais conservando o índice do radical e multiplicando os radicandos.

De modo geral, respeitando as condições de existência dos radicais, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{\mathbf{a}} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

Exemplos:

- $\sqrt[4]{a^2 \cdot x^3} \cdot \sqrt[4]{a^6 \cdot x^2} = \sqrt[4]{a^2 \cdot x^3 \cdot a^6 \cdot x^2} = \sqrt[4]{a^8 \cdot x^5} = \sqrt[4]{a^8 \cdot x^4 \cdot x} = a^2 \cdot x \cdot \sqrt[4]{x}$
- $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{90} = 7 \cdot 2\sqrt{5 \cdot 90} = 14\sqrt{450} = 14\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 210\sqrt{2}$

Veja exemplos:

- Calcule $\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[10]{7^7}$.

Começamos transformando $\sqrt[5]{7}$ e $\sqrt[10]{7^7}$ em radicais com índices iguais.

Escolhemos um índice comum a 5 e 10. Esse índice pode ser o m.m.c. (5, 10), que é 10.

Dividimos 10 pelo índice do radicando e multiplicamos o quociente pelo expoente do radical:

m.m.c. (5, 10) = 10 e $\sqrt[5]{7} = \sqrt[10]{7^{2 \cdot 1}} = \sqrt[10]{7^2}$

$\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[10]{7^7} = \sqrt[10]{7^2} \cdot \sqrt[10]{7^7} = \sqrt[10]{7^{2+7}} = \sqrt[10]{7^9}$

$\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[10]{7^7} = \sqrt[10]{7^9}$

Multiplicamos radicais com índices diferentes reduzindo-os, inicialmente, a radicais com índices iguais e, em seguida, multiplicando os radicais obtidos.

- $\sqrt[4]{13} \cdot \sqrt{13} = \sqrt[4]{13} \cdot \sqrt[4]{13^2} = \sqrt[4]{13^3}$
- $\sqrt[3]{5 \cdot x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{5^4 \cdot x^4} \cdot \sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{5^4 \cdot x^4 \cdot x^9} = \sqrt[12]{625 \cdot x^{12} \cdot x} = x\sqrt[12]{625x}$

Note que para os radicais também vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Exemplos:

- Determine o produto de $\sqrt{5}$ por $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$.

Multiplicamos $\sqrt{5}$ pelas parcelas $\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$ e adicionamos os resultados obtidos.

$$\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \mathbf{5 + \sqrt{10}}$$

- Calcule o produto $\left(\sqrt{7} - 5\right) \cdot \left(\sqrt{7} + 3\right)$.

Aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$\left(\sqrt{7} - 5\right) \cdot \left(\sqrt{7} + 3\right) = \sqrt{49} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 15 =$$

$$= 7 + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 15 = \underbrace{\mathbf{-8 - 2\sqrt{7}}}_{\text{É o produto.}}$$

Divisão

Para refletir e responder

Observe o retângulo CDEF.

Nele, a área é indicada por $\sqrt{102}$ cm² e o comprimento por $\sqrt{17}$ cm.

- Qual é a medida da largura do retângulo? $\sqrt{6}$ cm.

Assim como foi feito na multiplicação, vamos usar a propriedade que permite expressar um radical no qual o radicando é um quociente indicado:

$\sqrt{102 : 17} = \sqrt{102} : \sqrt{17}$, ou seja, $\sqrt{102} : \sqrt{17} = \sqrt{102 : 17} = \sqrt{6}$

O quociente $\sqrt{102} : \sqrt{17}$ é um radical de índice 2 e o radicando é o quociente 102 : 17.

A medida da largura do retângulo CDEF é $\sqrt{6}$ cm.

Dividimos radicais com índices iguais conservando o índice do radical e dividindo os radicandos.

De modo geral, respeitando as condições de existência dos radicais, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{\mathbf{a}} : \sqrt[n]{\mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a : b}}$$

Da mesma forma que na multiplicação, quando os radicais têm índices diferentes, reduzimos esses radicais ao mesmo índice e efetuamos a divisão, como no caso anterior.

Veja alguns exemplos:

- $\dfrac{\sqrt[4]{216}}{\sqrt[4]{36}} = \sqrt[4]{\dfrac{216}{36}} = \sqrt[4]{6}$
- $\sqrt{20} : \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{20^2} : \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{400 : 8} = \sqrt[4]{50}$
- $\sqrt[3]{x^8} : \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^8 : x^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Calcule estes produtos e simplifique os resultados quando possível:

a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{12}{5}} \cdot \sqrt{\dfrac{45}{4}}$ $3\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{5} \cdot 7\sqrt{6}$ $7\sqrt[4]{180}$

c) $\sqrt[5]{ay} \cdot \sqrt[10]{a^8y^3} \cdot \sqrt{y}$ ay

28. Determine os quocientes, simplificando o resultado quando possível:

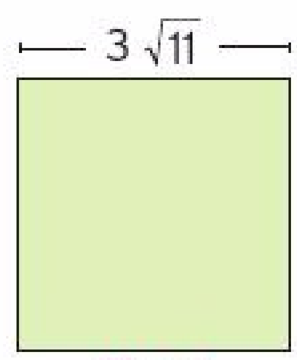
a) $\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{15}}$ $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{a^2 - b^2} : \sqrt[6]{a + b}$ $\sqrt[6]{a - b}$

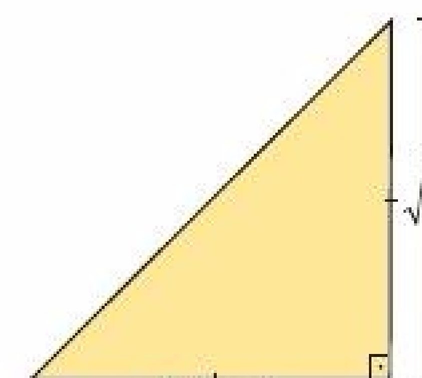
c) $\sqrt[5]{343} : \sqrt{7}$ $\sqrt[10]{7}$

29. Nas figuras a seguir as medidas estão indicadas em centímetros. Calcule a área de cada uma delas.

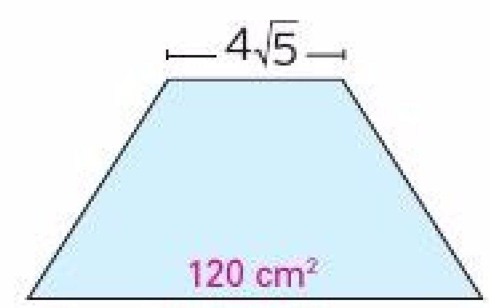
a) quadrado



b) triângulo isósceles



c) trapézio: a base maior é o dobro da base menor e a altura é igual à base menor



30. Determine estes produtos:

a) $\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3})$ $3\sqrt{3} - 3$

b) $\sqrt{13} \cdot (1 - 2\sqrt{13})$ $\sqrt{13} - 26$

c) $(\sqrt{8} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{6})$ $10 - 6\sqrt{3}$

d) $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$ $5 + \sqrt{6}$

Introdução de fatores no radicando

Em algumas situações de simplificação de radicais é conveniente introduzir fatores no radicando. Vamos estudar como proceder nesses casos. Observe alguns exemplos.

- $5\sqrt{2}$ é a forma simplificada de outro radical de mesmo índice. Qual é esse radical?

Usamos as propriedades e o produto de radicais:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} =$$
$$= \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

Colocamos o fator externo 5 no radicando.

$5\sqrt{2}$ é uma forma simplificada de $\sqrt{50}$.

- Transforme $\sqrt{3\sqrt[3]{5x}}$ em um só radical.

Introduzimos o fator **3** no radical de índice 3 e efetuamos os cálculos:

$\sqrt{3\sqrt[3]{5x}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5x}} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 5x} = \boldsymbol{\sqrt[6]{135x}}$

$\sqrt{3\sqrt[3]{5x}}$ é igual a $\sqrt[6]{135x}$.

Potências com radicais

Vamos explorar esse assunto examinando os exemplos.

- Cálculo de $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$.

$\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$ é um produto de quatro fatores iguais a $\sqrt[3]{5}$.

$\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^4}$.

Assim, $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = \sqrt[3]{5^4}$.

- Cálculo de $\left(\sqrt{x+5}\right)^3$.

$\left(\sqrt{x+5}\right)^3 = \sqrt{(x+5)^3} = \sqrt{(x+5)^2 \cdot (x+5)} = (x+5) \cdot \sqrt{x+5}$

De modo geral, podemos escrever:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

31. Introduza os fatores no radical e simplifique o resultado quando possível.

a) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{32}$ $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

b) $\frac{7}{10}\sqrt[3]{\frac{100}{343}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

c) $(a+b)\sqrt{\frac{a}{a^2-b^2}}$ $\sqrt{\frac{a(a+b)}{a-b}}$

32. Reduza a um só radical e simplifique o resultado quando possível.

a) $\sqrt{9\sqrt{8}}$ $3\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt{7\sqrt[3]{7}}$ $\sqrt[3]{49}$

c) $\sqrt[4]{\frac{m}{n}\sqrt[5]{\frac{n}{m}}}$ $\sqrt[5]{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}}$ $\sqrt[8]{a^7}$

33. Calcule o produto $\sqrt{a\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt[3]{b\sqrt{a}}$. $\sqrt[3]{a^2b^2}$

34. Calcule as potências e simplifique o resultado quando possível:

a) $\left(\sqrt[8]{9}\right)^5$ $3\sqrt[4]{3}$

b) $\left(\sqrt[5]{4}\right)^3$ $2\sqrt[5]{2}$

c) $\left(-3\sqrt{2}\right)^5$ $-972\sqrt{2}$

35. Calcule o valor da expressão:

$$y = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 1$$ -68

36. Dados $x = 12\sqrt{3}$ e $y = -5\sqrt{6}$, calcule:

a) $x^2 + y^2$ 582

b) $x^2 - y^2$ 282

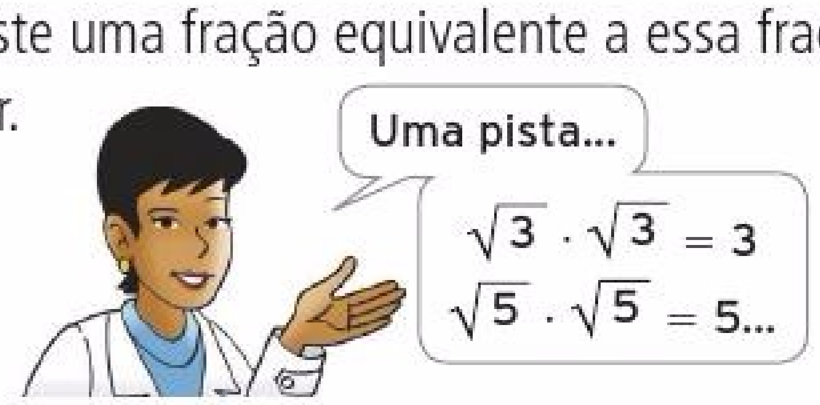
Racionalização de denominadores

Para refletir e responder

Certifique-se de que os alunos conseguem identificar os fatores racionalizantes dos radicais e compreender a conveniência da racionalização dos denominadores das frações.

O denominador da fração que está no quadro é um radical.

Mas existe uma fração equivalente a essa fração sem radical no denominador.



ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

- Como podemos encontrar essa fração?

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por um mesmo número, de modo que o denominador da fração equivalente seja um número racional. Há outras respostas possíveis.

Para transformar o denominador da fração em número racional, basta multiplicar o numerador e o denominador por um número real conveniente.

No caso da fração apresentada acima, como $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$, multiplicamos os termos de $\frac{5}{\sqrt{6}}$ por $\sqrt{6}$:

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \qquad \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

O denominador da fração é um número racional.

Chamamos de **racionalização de denominadores** o processo que transforma uma expressão fracionária com radicais no denominador em outra expressão fracionária equivalente, com um número racional no denominador.

$\boldsymbol{\sqrt{6}}$ é o fator racionalizante mais simples de $\boldsymbol{\sqrt{6}}$.

$\boldsymbol{\sqrt{6^3}}$ também é um fator racionalizante de $\sqrt{6}$ $\qquad \sqrt{6} \cdot \sqrt{6^3} = \sqrt{6^4} = 6^2 = 36$.

Da mesma forma, $\sqrt{6^5}$, $\sqrt{6^7}$, $\sqrt{6^9}$... são fatores racionalizantes de $\sqrt{6}$.

Veja alguns exemplos:

- Racionalize o denominador de $\frac{15}{\sqrt[3]{3}}$.

Multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{15}{\sqrt[3]{3}}$ por $\sqrt[3]{3^2}$, que é o fator racionalizante mais simples de $\boldsymbol{\sqrt[3]{3}}$.

$$\frac{15}{\sqrt[3]{3}} = \frac{15}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{15 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{15 \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[3]{9}}{3} = 5\sqrt[3]{9}$$

- Racionalize o denominador de $\frac{62}{6 + \sqrt{5}}$.

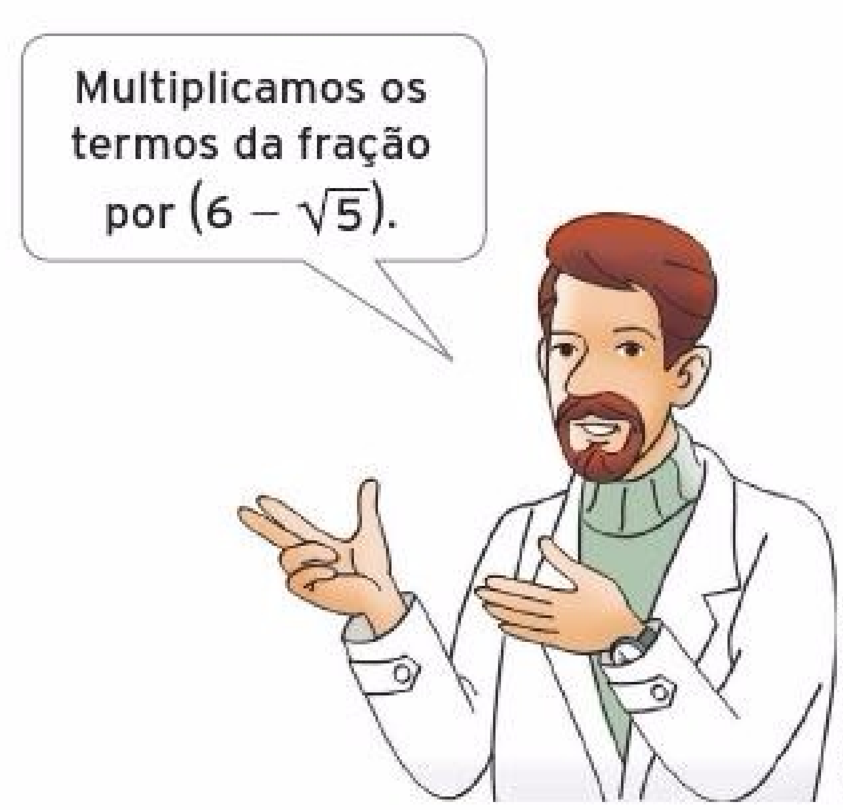
Observe que o produto $(6 + \sqrt{5}) \cdot (6 - \sqrt{5})$ é um produto notável cujo resultado é uma diferença de dois quadrados e é um número racional.

$$\left(6 - \sqrt{5}\right) \cdot \left(6 + \sqrt{5}\right) = 6^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 36 - 5 = 31$$

$\boldsymbol{(6 - \sqrt{5})}$ é fator racionalizante de $\boldsymbol{(6 + \sqrt{5})}$.

$$\frac{62}{6 + \sqrt{5}} = \frac{62}{6 + \sqrt{5}} \cdot \frac{6 - \sqrt{5}}{6 - \sqrt{5}} = \frac{\cancel{62}^{\,2} \cdot \left(6 - \sqrt{5}\right)}{\cancel{31}_{\,1}} =$$

$$= 2 \cdot \left(6 - \sqrt{5}\right) = \mathbf{12 - 2\sqrt{5}}$$



HÉLIO SENATORE

- Obtenha uma fração equivalente a $\frac{35}{4\sqrt{7}}$ cujo denominador seja racional.

Multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{35}{4\sqrt{7}}$ por $\sqrt{7}$.

$$\frac{35}{4\sqrt{7}} = \frac{35}{4\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{35 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot \sqrt{7^2}} = \frac{35 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot 7} = \frac{35\sqrt{7}}{28} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{4}}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

37. Racionalize os denominadores destas frações:

a) $\dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ $3\sqrt{5}$

b) $\dfrac{25a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ $25\sqrt{ab}$

c) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{3}}$ $4\sqrt[4]{27}$

d) $\dfrac{48}{\sqrt[3]{6}}$ $8\sqrt[3]{36}$

38. Racionalize estas frações:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\dfrac{35}{3\sqrt[5]{25}}$ $\dfrac{7\sqrt[5]{125}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{8\sqrt{a}}$ $\dfrac{\sqrt{5a}}{8a}$

39. Racionalize os denominadores destas frações:

a) $\dfrac{8}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$ $\sqrt{11}+\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{\sqrt{14}+\sqrt{7}}$ $3-2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ $3+\sqrt{2}$

40. A professora de Pedro pediu aos alunos que descrevessem uma racionalização para o denominador de $\dfrac{6}{2-\sqrt{5}}$.

a) Analise as respostas dadas por alguns alunos e verifique quem descreveu um procedimento correto: Pedro

- Alice: Multiplico os termos da fração por 6.
- Pedro: Multiplico o numerador e o denominador por $2+\sqrt{5}$.
- Bia: Multiplico o numerador e o denominador por $2-\sqrt{5}$.

b) Qual destas expressões é equivalente à fração dada pela professora de Pedro? $-(12+6\sqrt{5})$

$12+6\sqrt{5}$ $\quad -(12+6\sqrt{5})$ $\quad 12-6\sqrt{5}$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Escolhendo um número

Escolha um número que, adicionado à expressão ao lado, tenha como resultado um número inteiro, diferente de zero.

$$\frac{(2+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}$$

$-\sqrt{3}$. Há outras respostas possíveis.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

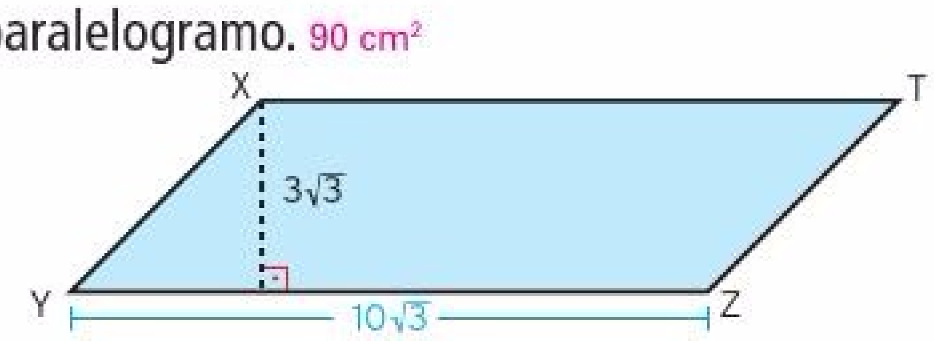
41. Racionalize os denominadores destas frações:

a) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

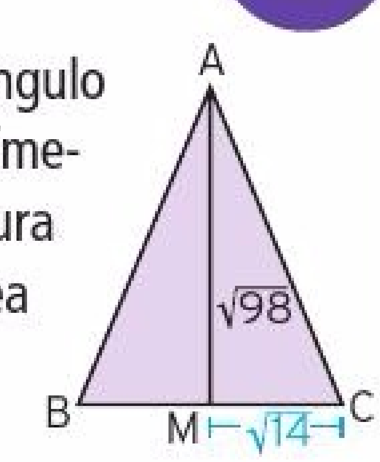
b) $\dfrac{a^2-m}{\sqrt{m}-a}$ $-\sqrt{m}-a$

c) $\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$ $a-\sqrt{a^2-1}$

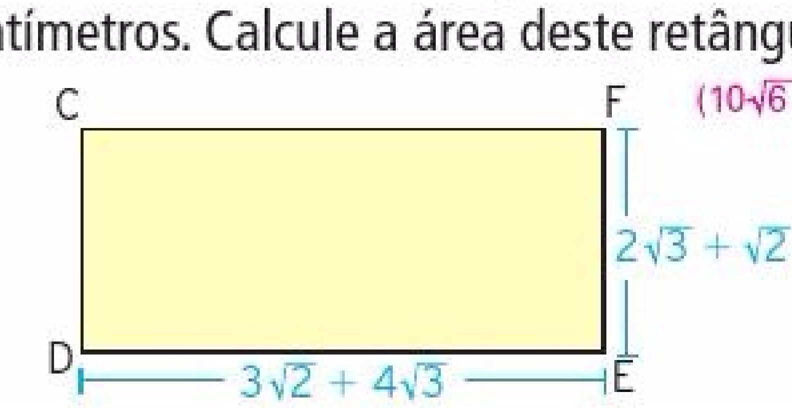
42. No paralelogramo XYZT, as medidas indicadas são dadas em centímetros. Calcule a área desse paralelogramo. 90 cm²



43. As medidas dadas no triângulo isósceles ABC estão em centímetros. Sabendo que $\overline{AM}$ é a altura relativa à base, calcule a área deste triângulo. $14\sqrt{7}$ cm²



44. As medidas dadas no retângulo CDEF estão em centímetros. Calcule a área deste retângulo. $(10\sqrt{6}+30)$ cm²



Leitura

O símbolo $\sqrt{}$

Muitas palavras e expressões que utilizamos no dia a dia podem assumir significados diferentes. É o caso da palavra **raiz**.

"A **raiz** daquela árvore se espalha pelo terreno."

"A **raiz** do dente está danificada."

"Fulano está buscando sua **raiz**."

"A **raiz** cúbica de 125 é 5."

Em Matemática, o termo **raiz** foi utilizado da forma ao lado por Leonardo de Pisa, em 1220, para representar a **raiz quadrada de um número positivo ou nulo**.

Trata-se de uma variação da letra **R**, escrita em gótico. Essa letra é a inicial da palavra latina *radix*, que significa "raiz".

O símbolo $\sqrt{}$, que usamos hoje, pode ser uma modificação dessa letra ou até mesmo uma invenção arbitrária. Ele apareceu pela primeira vez na Alemanha, em 1525, no livro de álgebra *Die Cross*, de autoria de Christoph Rudolff. No início ele não utilizou índices para indicar se era raiz quadrada, cúbica ou quarta.

Atualmente, em Matemática, a palavra **radical** se refere a **raiz**.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. O sangue humano é composto, em sua maior parte, de glóbulos vermelhos. O diâmetro de cada um desses glóbulos é de aproximadamente 0,0008 cm. Expresse esse número em notação científica. $8 \cdot 10^{-4}$ cm

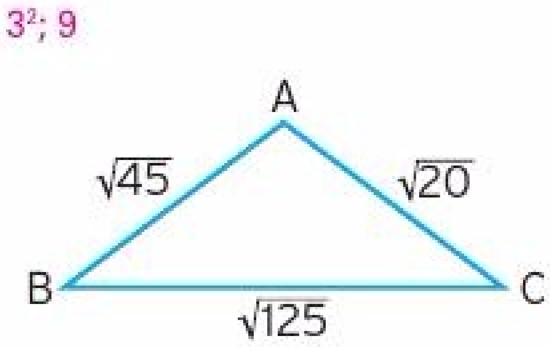
2. Considere $\dfrac{1}{a+b} = -8$ e calcule o valor da expressão algébrica $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}$. $-\frac{1}{8}$

3. Determine o valor de **n** na igualdade:
$11^n \cdot 11^{-2} = 11^{-6}$. -4

4. Calcule este produto:
$$\sqrt{13+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{13-4\sqrt{3}}.$$ 11

5. Escreva na forma de potência de base 3 e calcule a potência $243^{\frac{2}{5}}$. 3^2; 9

6. As medidas dos lados do triângulo ABC indicadas na figura estão em centímetros.



Qual é o perímetro desse triângulo? $10\sqrt{5}$ cm

7. Um mícron é um milionésimo de um metro e o diâmetro médio de um fio de cabelo tem cerca de 100 mícrons. Essa medida equivale a: a

a) 10^{-1} mm
b) 1 mm
c) 10 mm
d) 10^2 mm

8. O quociente $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$ é igual a: d

a) $\sqrt{a}$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$
c) $\sqrt[4]{a^3}$
d) $\sqrt[4]{a}$

9. Cada aresta de um tanque em forma de cubo mede $2\sqrt[3]{2}$ m. Quantos litros de água são necessários para encher 75% da capacidade desse tanque? b

a) 8 000 litros.
b) 12 000 litros.
c) 16 000 litros.
d) 24 000 litros.

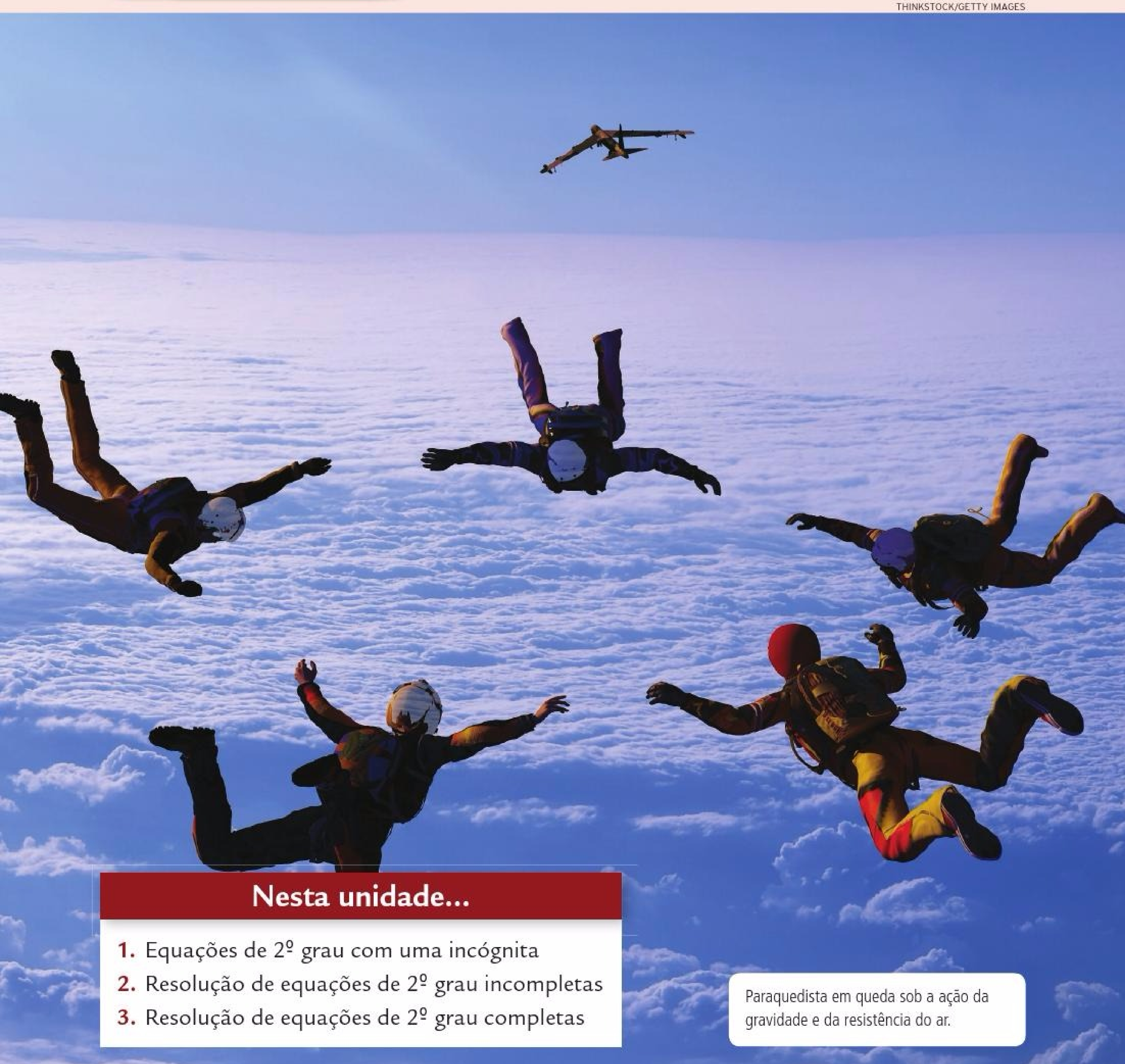
10. Se **x** representa a raiz quadrada do número expresso por $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2$, então o valor de **x** é: a

a) 168
b) 428
c) 3 528
d) 28 224

UNIDADE 3

Equações de 2º grau

THINKSTOCK/GETTY IMAGES



Nesta unidade...

1. Equações de 2º grau com uma incógnita
2. Resolução de equações de 2º grau incompletas
3. Resolução de equações de 2º grau completas

Paraquedista em queda sob a ação da gravidade e da resistência do ar.

Você já explorou situações que envolvem equações de **1º grau** como esta a seguir.

Laura planeja comprar um *tablet* que está à venda por R$ 940,00 em uma loja. Quantos reais ela tem?

HIYA IMAGES/CORBIS/LATINSTOCK

Para comprar o *tablet* tenho de juntar 320 reais ao que tenho e ainda dobrar essa quantia.

Podemos calcular a quantia que Laura tem resolvendo uma equação.

x —— quantia que Laura tem

$x + 320$ —— quantia que Laura tem adicionada de 320 reais

$2 \cdot (x + 320)$ —— dobro da quantia anterior

Equação: $2 \cdot (x + 320) = 940$

A equação acima é uma equação de **1º grau** com uma incógnita.

Na situação da imagem da página anterior, podemos calcular a distância **e**, em metro, percorrida no tempo **t**, em segundo, pelo paraquedista, em queda livre no início desse movimento, antes da abertura do paraquedas. Essa distância pode ser calculada pela equação $e = 4{,}9t^2$.

Ao atribuirmos alguns valores para **e**, obtemos as equações:

Para **e** = 1 m	Para **e** = 10 m	Para **e** = 4,9 m
$1 = 4{,}9t^2$	$10 = 4{,}9t^2$	$4{,}9 = 4{,}9t^2$
ou	ou	ou
$4{,}9t^2 - 1 = 0$	$4{,}9t^2 - 10 = 0$	$4{,}9t^2 - 4{,}9 = 0$

O que você já sabe?

- Quantos reais tem Laura? R$ 150,00
- Como foi encontrada a resposta da questão anterior? Resolvendo a equação $2 \cdot (x + 320) = 940$. Há outras respostas possíveis.
- Utilize a equação $e = 4{,}9t^2$ e calcule quantos metros o paraquedista terá percorrido em queda livre 5 segundos após o início do salto. 122,5 m
- Que equação se obtém quando se atribui a **e** o valor de 30 metros? Em sua opinião, que tipo de equação é essa? $4{,}9t^2 - 30 = 0$. Há outras respostas possíveis. Resposta pessoal.

1 Equações de 2º grau com uma incógnita

O que é uma equação de 2º grau com uma incógnita?

Para refletir e responder

Leia o que dizem o professor e os alunos e responda às questões.

- Que fórmula pode ser escrita para o número de diagonais de um polígono convexo qualquer? $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{n^2}}{2} - \frac{\mathbf{3n}}{2}$ ou $\mathbf{d} = \frac{n(n-3)}{2}$.

O número de diagonais de um polígono convexo pode ser calculado pela fórmula $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{n^2}}{2} - \frac{3\mathbf{n}}{2}$.

Nessa fórmula, se atribuirmos, por exemplo, o valor **9** a **d**, temos a equação $n^2 - 3n - 18 = 0$, que é uma equação de 2º grau do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com $a \neq 0$.

$$9 = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$$

$$18 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

Equação de 2º grau com uma incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma:
$$ax^2 + bx + c = 0$$

As letras **a**, **b** e **c** representam números reais, e $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é a **forma reduzida** de uma equação de 2º grau, e ax^2, bx e c são os **termos** da equação.

Vamos combinar:
Neste texto, as letras **a** e **b** representam, respectivamente, os coeficientes dos termos de grau 2 (x^2, y^2, t^2, ...) e de grau 1 (x, y, t, ...), e **c**, o termo independente de **x**.

Exemplos:

- $12x^2 - 8x = 0$ ou $12x^2 - 8x + 0 = 0$
  x é a incógnita.
  $a = 12$, $b = -8$ e $c = 0$.
- $t^2 - 81 = 0$ ou $t^2 + 0t - 81 = 0$
  t é a incógnita.
  $a = 1$, $b = 0$ e $c = -81$.

Equações incompletas

Observe estas equações.

$x^2 - 25 = 0$ $\quad$ $8x^2 + 6x = 0$ $\quad$ $-2x^2 = 0$

Em $x^2 - 25 = 0$ não aparece o termo em **x**.

$x^2 - 25 = 0$
$x^2 + 0x - 25 = 0$ — $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.

Em $8x^2 + 6x = 0$ não aparece o termo independente de **x**.

$8x^2 + 6x = 0$
$8x^2 + 6x + 0 = 0$ — $a = 8$, $b = 6$ e $c = 0$.

Em $-2x^2 = 0$ não aparecem o termo em **x** e o termo independente de **x**.

$-2x^2 = 0$
$-2x^2 + 0x + 0 = 0$ — $a = -2$, $b = 0$ e $c = 0$.

Note que elas não têm todos os termos e, por isso, são chamadas de equações incompletas de 2º grau.

As **equações incompletas de 2º grau** são aquelas que têm, na forma reduzida, $b = 0$ ou $c = 0$ ou, ainda, $b = 0$ e $c = 0$. Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, as equações são **completas**.

Exemplo:

Para que valores reais de **k** a equação $(4k - 12)x^2 + 6x - 1 = 0$ é uma equação de 2º grau com uma incógnita?

O coeficiente de x^2 na equação dada é $(4k - 12)$. Essa equação será de 2º grau com uma incógnita se esse coeficiente for diferente de zero.

Determinamos para que valores reais de **k** esse coeficiente é igual a zero, resolvendo a equação $4k - 12 = 0$.

$$4k - 12 = 0 \text{ —— } 4k = 12 \text{ —— } k = \frac{12}{4} \text{ —— } k = 3$$

O coeficiente de x^2 é igual a zero para $k = 3$.

Então, o coeficiente de x^2 será diferente de zero para $k \neq 3$.

A equação apresentada será de 2º grau para $k \neq 3$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Escreva uma equação incompleta de 2º grau, com incógnita **x**, em que o coeficiente de **x** e o termo independente de **x** sejam iguais a zero. $9x^2 = 0$. Há outras respostas possíveis.

2. Observe a equação do quadro e responda às questões:

$$-3t^2 - 26t + 9 = 0$$

a) Qual é a incógnita dessa equação? t

b) Qual é o grau dessa equação? 2

c) Quais são os valores de **a**, **b** e **c**? -3, -26 e 9.

3. Dentre as equações a seguir, anote apenas as que são de 2º grau com uma incógnita. b, c, d.

a) $\frac{x}{2} - 3x - 1 = 0$

b) $-21 + x^2 + 4x = 0$

c) $\frac{3x^2}{4} = 0$

d) $\frac{y}{3} - \frac{2y^2}{4} = 0$

4. As equações a seguir são de 2º grau com uma incógnita. Identifique os valores de **a**, **b** e **c** em cada uma delas.

a) $5x - 8x^2 = 0$ $a = -8$, $b = 5$, $c = 0$.

b) $1 - 4m^2 = 0$ $a = -4$, $b = 0$, $c = 1$.

c) $\frac{x}{12} - x^2 + \frac{1}{2} = 0$ $a = -1$, $b = \frac{1}{12}$, $c = \frac{1}{2}$.

d) $-\frac{3t^2}{5} + \frac{t}{2} = 0$ $a = -\frac{3}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e encontrem soluções.

Considerem a equação $\mathbf{(2m - 18)x^2 + 6x - 1 = 0}$.

- Para que valores reais de **m** ela é uma equação de 2º grau com uma incógnita? $m \neq 9$
- Escolham dois valores reais de **m** para os quais a equação é uma equação de 2º grau com uma incógnita e anotem essas expressões. $m = 0$: $-18x^2 + 6x - 1 = 0$; $m = 10$: $2x^2 + 6x - 1 = 0$. Há outras respostas possíveis.

2 Resolução de equações de 2º grau incompletas

Incentive os alunos a resolver equações de 2º grau incompletas, utilizando fatoração quando c = 0 e aplicando o conceito de raiz quadrada com b = 0.

Resolvendo equações de 2º grau incompletas

Para refletir e responder

O produto de um número inteiro pelo seu consecutivo é dez vezes o número menor.

- Quais são esses números? 0 e 1 ou 9 e 10.

Nessa situação, equacionando o problema, obtemos uma equação de 2º grau com uma incógnita. Observe:

x —— número menor; **x** é um número inteiro.

x + 1 —— consecutivo de **x**.

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

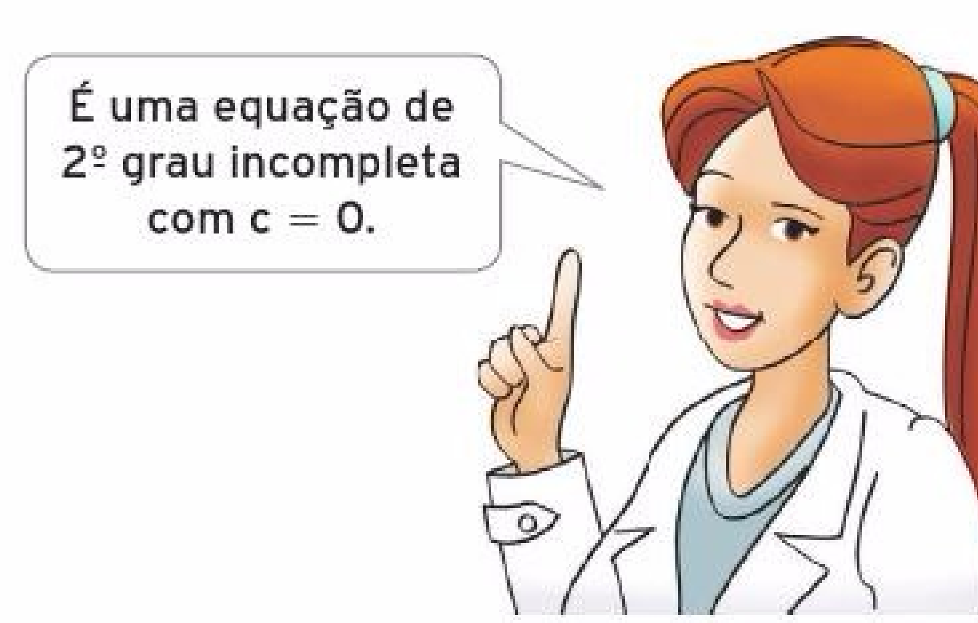
$$\underbrace{\text{O produto de um número pelo seu consecutivo}}_{x \cdot (x + 1)} \ \underbrace{\text{é}}_{=} \ \underbrace{\text{dez vezes o número menor.}}_{10 \cdot x}$$

$$x \cdot (x + 1) = 10 \cdot x$$

$$x^2 + x = 10x$$

$$x^2 + x - 10x = 0$$

$$x^2 - 9x = 0$$



Resolvemos essa equação fatorando $\mathbf{x^2 - 9x}$ e obtendo um produto de dois fatores igual a zero:

$$x^2 - 9x = 0 \text{ —— } x \cdot (x - 9) = 0$$

Como o produto é zero, um dos fatores deve ser igual a zero:

$$x \cdot (x - 9) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 9 = 0 \text{ —— } x = 9 \end{cases}$$

0 e 9 são números inteiros.

Verificamos se $x = 0$ e $x = 9$ são raízes da equação $x^2 - 9x = 0$, atribuindo esses valores a **x** e verificando se as sentenças obtidas são verdadeiras.

$x = 0$ — $0^2 - 9 \cdot 0 = 0$ — $0 - 0 = 0$ (sentença verdadeira) — **0** é **raiz** da equação.

$x = 9$ — $9^2 - 9 \cdot 9 = 0$ — $81 - 81 = 0$ (sentença verdadeira) — **9** é **raiz** da equação.

Para $x = 0$, seu consecutivo é $x + 1 = 0 + 1 = 1$.

Para $x = 9$, seu consecutivo é $x + 1 = 9 + 1 = 10$.

Os números **0** e **1** ou **9** e **10** são soluções do problema.

A equação $\mathbf{x^2 - 9x = 0}$ é do tipo $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$, com $a \neq 0$ e $c = 0$. Em equações desse tipo, uma das raízes é sempre **zero**.

Existem equações de 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Exemplos:

- $2x^2 - 242 = 0$

Resolve-se essa equação isolando $\mathbf{x^2}$ em um dos membros da equação:

$$2x^2 - 242 = 0 \text{ — } 2x^2 = 242 \text{ — } x^2 = \frac{242}{2} \text{ — } \boxed{x^2 = 121}$$

$$x^2 = 121 \begin{cases} x = -\sqrt{121} \text{ — } \boxed{x = -11} \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{121} \text{ — } \boxed{x = 11} \end{cases}$$

Na prática:

$\mathbf{x^2} = 121$ — $\mathbf{x} = \pm\sqrt{121}$
$\mathbf{x} = \pm 11$

Verificação:

$x = -11$ — $2 \cdot (-11)^2 - 242 = 0$ — $242 - 242 = 0$ (sentença verdadeira) — **−11 é raiz**.

$x = 11$ — $2 \cdot 11^2 - 242 = 0$ — $242 - 242 = 0$ (sentença verdadeira) — **11 é raiz**.

- $4x^2 + 64 = 0$

4 é fator comum a $4x^2$ e 64. Então, simplificamos os termos da equação dividindo-os por 4:

$$x^2 + 16 = 0 \text{ — } x^2 = -16 \text{ — } \boxed{x = \pm\sqrt{-16}}$$

Como $\sqrt{-16}$ não é um número real, a equação dada não tem raiz no conjunto dos números reais.

Vamos combinar:
Quando não houver referências sobre a incógnita, vamos considerar que ela representa um número real.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

5. Quais números abaixo são raízes da equação $x^2 + 7x + 12 = 0$? -4 e -3

a) 3

b) -4

c) 0

d) -3

6. Resolva estas equações de 2º grau em que **x** representa um número real:

a) $9t - 18t^2 = 0$ $0; \frac{1}{2}$

b) $-6x^2 + 54 = 0$ $-3; 3$

c) $3x^2 - 36 = 0$ $-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}$

d) $18x^2 + 2 = 0$ Não tem raiz real.

7. Determine as soluções destas equações:

a) $\dfrac{8m}{15} = \dfrac{m^2}{10}$ $0; \frac{16}{3}$

b) $\dfrac{2x}{9} - \dfrac{7x^2}{6} = 0$ $0; \frac{4}{21}$

8. Para que valor de **a** o número 4 será raiz da equação $x^2 - (3a - 8)x + 19a - 13 = 0$? -5

9. Determine o valor de **m** na equação de 2º grau $\dfrac{x^2}{2} - 4mx - 10m = 0$, de modo que -2 seja solução dessa equação. 1

10. Resolva a equação:

$$\frac{(x + 1) \cdot (1 - x)}{6} + \frac{2x \cdot (x - 4)}{9} = \frac{1}{6}$$

0; 16

11. Responda às questões seguintes considerando a equação do quadro abaixo.

$$(4x - 1)^2 - 2x(9x - 4) = -3(x^2 + 1)$$

a) Alice disse que essa é uma equação de 2º grau incompleta. Ela está correta? Explique por quê. Sim. Desenvolvendo os produtos e reduzindo os termos semelhantes obtém-se $x^2 + 4 = 0$.

Pista: desenvolva os produtos indicados e escreva a equação na forma reduzida.

b) Quais são as raízes dessa equação? A equação não tem raízes reais.

12. Resolva estas equações em que **x** representa um número real:

a) $(x + 5)^2 + (2x - 1)^2 = 26$ $-\frac{6}{5}; 0$

b) $(x - 1)^2 + (2x + 1) \cdot (2x - 1) = 0$ $0; \frac{2}{5}$

c) $x \cdot (9x - 8) = (x - 4)^2$ $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$

d) $(3x + 1)^2 + 17 = 6x + 1$ Não tem raiz real.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e encontrem uma solução.

Em uma fábrica, o refeitório é retangular e tem, no comprimento, 15 m a mais que na largura.

A cozinha é quadrangular e seu comprimento é o dobro da largura do refeitório.

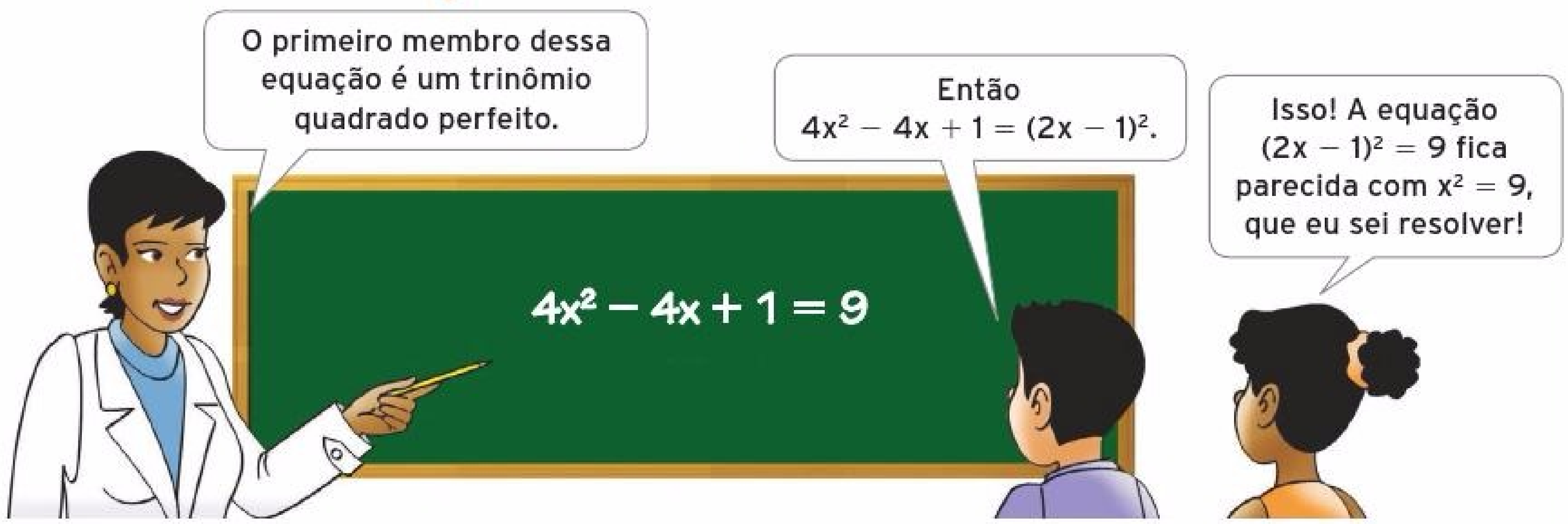
Os dois ambientes têm áreas iguais.

- Quais são as medidas dos lados do refeitório? 20 m; 5 m.
- Qual é a área de cada ambiente? 100 m^2.
- Qual é o perímetro da cada um deles? Refeitório: 50 m; cozinha: 40 m.

3 Resolução de equações de 2º grau completas

Resolvendo equações por meio de fatoração

Para refletir e responder



ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

- Explique um procedimento para determinar as raízes dessa equação.
  Escrevemos $2x - 1 = -3$ e $2x - 1 = 3$ e calculamos o valor de **x**.

Podemos resolver equações de 2º grau completas usando fatoração.

$4x^2 - 4x + 1$ é um trinômio quadrado perfeito —— $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

$4x^2 - 4x + 1 = 9$ —— $(2x - 1)^2 = 9$

$$(2x - 1)^2 = 9 \begin{cases} 2x - 1 = -\sqrt{9} \text{ —— } 2x - 1 = -3 \text{ —— } 2x = -2 \text{ —— } \boxed{x = -1} \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = \sqrt{9} \text{ —— } 2x - 1 = 3 \text{ —— } 2x = 4 \text{ —— } \boxed{x = 2} \end{cases}$$

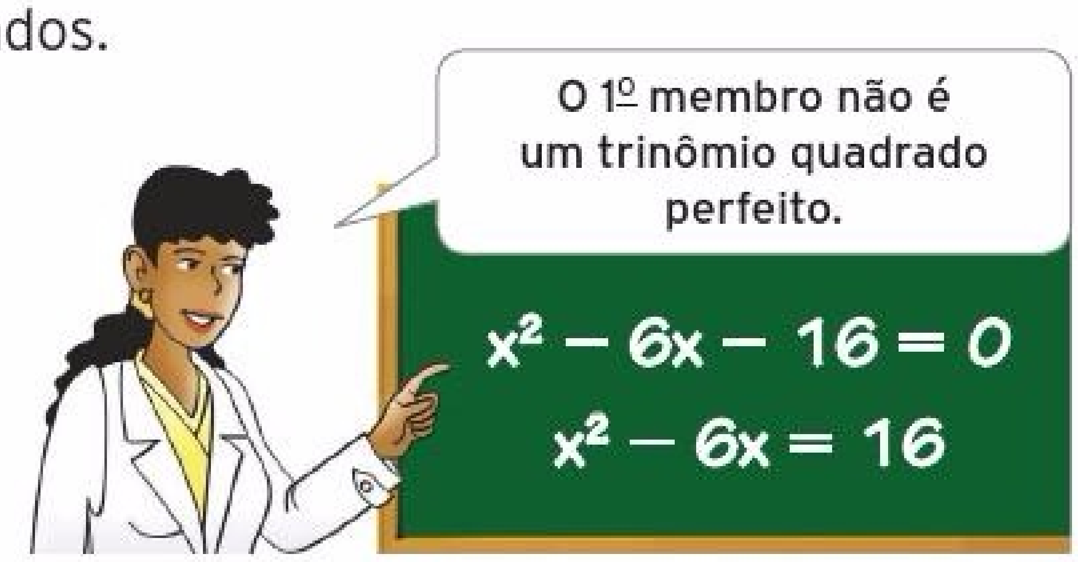
As soluções da equação $4x^2 - 4x + 1 = 9$ são -1 e 2.

Resolvendo equações por completamento de quadrados

Explore outras atividades que envolvam a resolução das equações de 2º grau por complementação de quadrados. Esse tipo de atividade poderá auxiliar os alunos na compreensão da fórmula de Bhaskara, resgatando o processo histórico de sua dedução. Veja o texto a seguir.

Existe mais de um procedimento para determinar as raízes de uma equação de 2º grau completa. Um deles se baseia em completar quadrados.

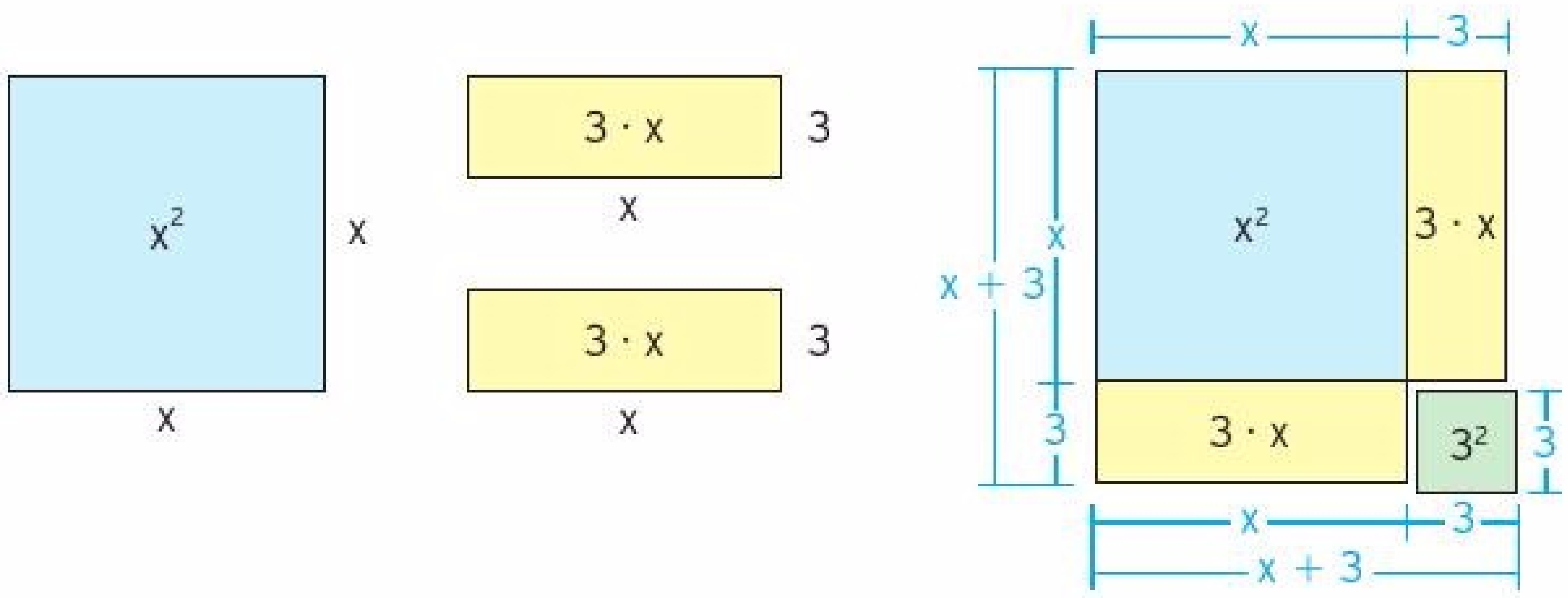
O método consiste em obter uma equação equivalente na qual o 1º membro seja um trinômio quadrado perfeito.



- Isola-se o termo independente de **x** no 2º membro.

- $\mathbf{x^2}$ é um dos quadrados perfeitos do trinômio a ser obtido.
- O coeficiente de **x** é -6, que é igual a $-2 \cdot 3$.

Então, o outro termo que é quadrado perfeito é 3^2. Acrescentamos 3^2 aos dois membros da equação. Veja uma representação geométrica desse procedimento:



Algebricamente

$$\underbrace{x^2 - 6x + 3^2}_{(x-3)^2} = 16 + 3^2$$

$$(x - 3)^2 = 25$$

$$(x-3)^2 = 25 \begin{cases} x - 3 = -5 \text{ ——— } x = -2 \\ \text{ou} \\ x - 3 = 5 \text{ ——— } x = 8 \end{cases}$$

As soluções da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ são -2 e 8.

As figuras serviram apenas para ilustrar, pois, como **x** é um número real, **x** pode assumir valores negativos. Note também que nesse procedimento o coeficiente de x^2 precisa ser igual a 1.

Fazer e aprender

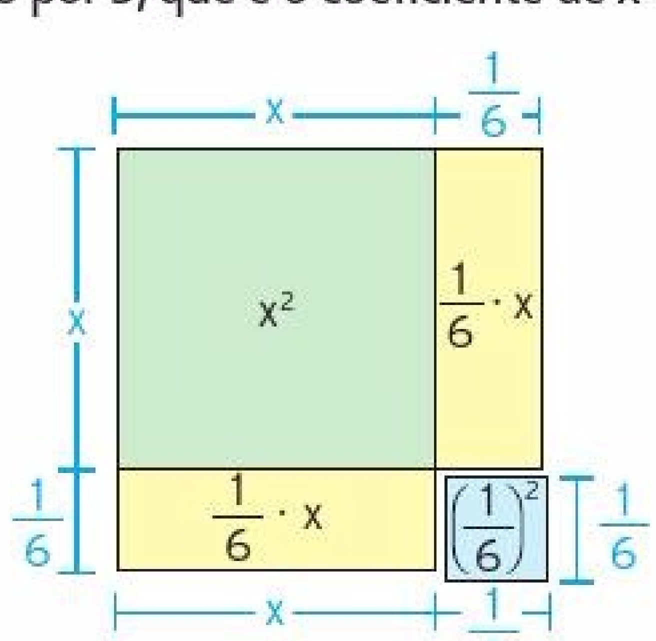
FAÇA NO CADERNO

13. Determine as raízes destas equações:

a) $(x + 3)^2 = 49$ $-10; 4$

b) $(5x - 4)^2 = 9$ $\frac{1}{5}; \frac{7}{5}$

14. Nesta atividade, a resolução da equação $3x^2 + x - 2 = 0$ já foi iniciada dividindo todos os termos da equação por 3, que é o coeficiente de x^2. Prossiga desenvolvendo os cálculos e encontre as raízes dessa equação.



$$x^2 + \underbrace{\frac{1}{3}x}_{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot x} = \frac{2}{3} \text{ ——— } x^2 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$-1; \frac{2}{3}$

15. Nas equações, **x** representa um número real. Determine as raízes dessas equações, usando o processo de completar quadrados.

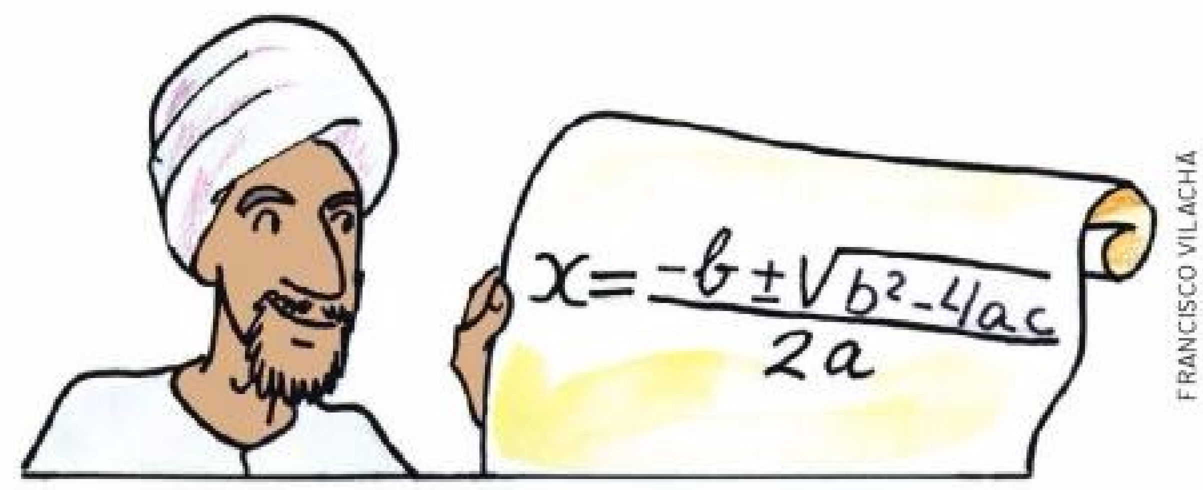
a) $x^2 - 4x - 96 = 0$ $-8; 12$

b) $x^2 - 2x - 48 = 0$ $-6; 8$

c) $x^2 + x - 20 = 0$ $-5; 4$

d) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $1; 2$

Fórmula de Bhaskara e resolução de equações de 2º grau



No século XII, Bhaskara, um importante matemático da Índia, destacou-se por seus vários escritos sobre aritmética, álgebra e outros assuntos. Dentre esses escritos, encontra-se a fórmula de Bhaskara, que é uma **generalização da resolução** de equações de 2º grau com uma incógnita.

Acompanhe um procedimento para determinar a fórmula de Bhaskara no qual foi utilizado o método do completamento de quadrados. As áreas de quadrados e retângulos aparecem apenas como esquema auxiliar.

Nesse procedimento, é possível verificar que o processo de obtenção de um trinômio quadrado perfeito pode ser aplicado a qualquer equação completa de 2º grau com uma incógnita.

Considere a equação:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com $\mathbf{a \neq 0}$ e $\mathbf{x}$ representando um número real.

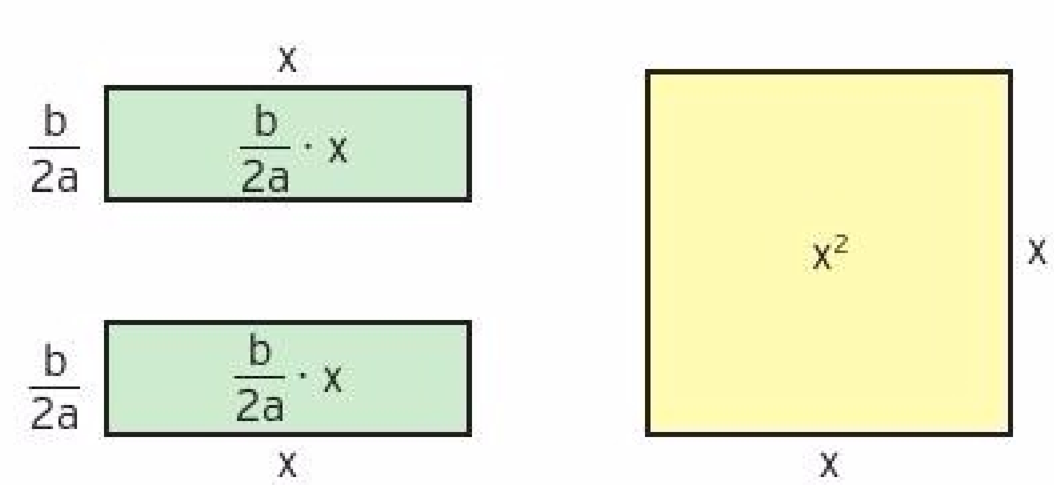
Dividimos todos os termos da equação por **a**:

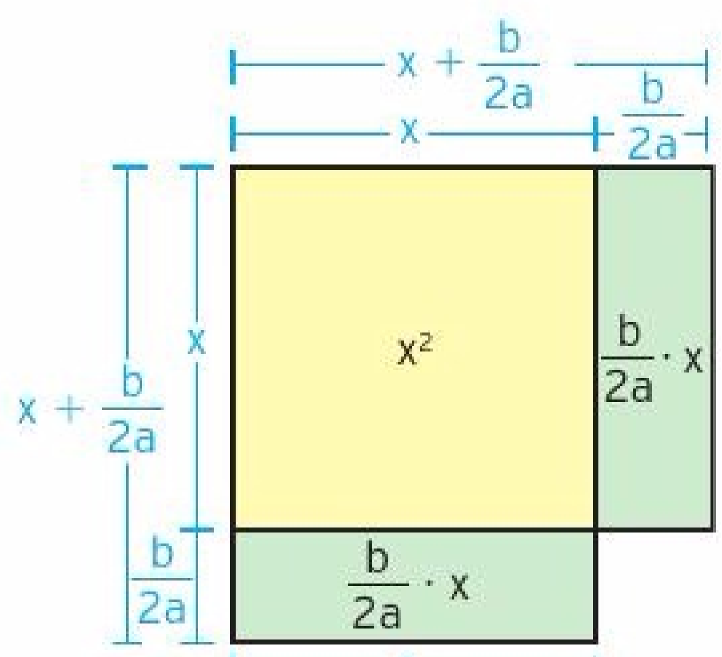
$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \longrightarrow x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}x}_{2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x} = -\frac{c}{a}$$

Isolamos $-\frac{c}{a}$ no 2º membro.

Como $\frac{b}{a}x = 2 \cdot \frac{b}{2a}x$, vamos compor um quadrado com as figuras, acrescentando aquela que for necessária para completar um quadrado.



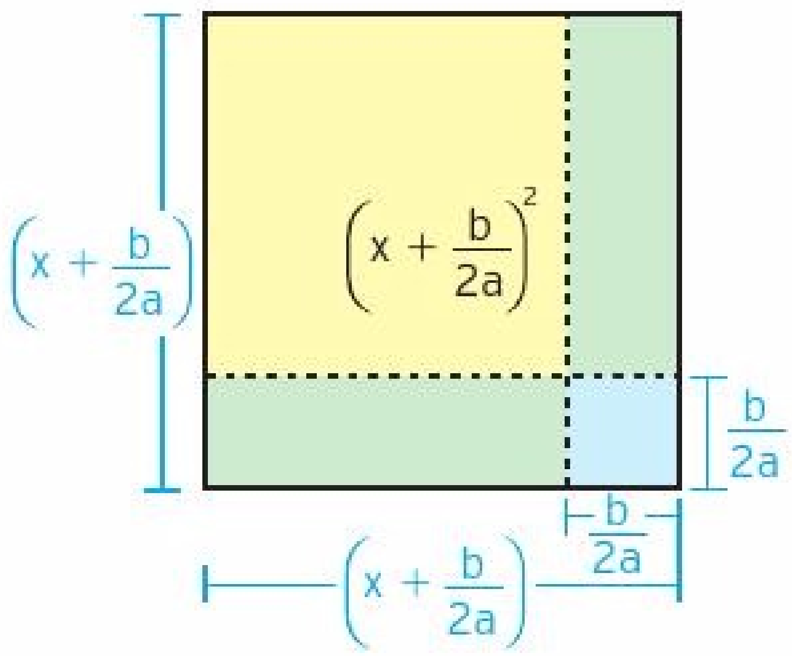


$$\text{área} = x^2 + \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b}{2a} \cdot x$$

$$\text{área} = x^2 + \cancel{2}^{1} \cdot \frac{b}{\cancel{2}_{1}a}x$$

$$\text{área} = \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x}_{-\frac{c}{a}} \longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

O quadrado de lado $\frac{b}{2a}$ completa o quadrado maior. Portanto, adicionamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aos dois membros da equação. Dessa forma, obtemos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro:



$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{Trinômio quadrado perfeito}} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Fatoramos o primeiro membro dessa equação: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Assim, teremos para **x**:

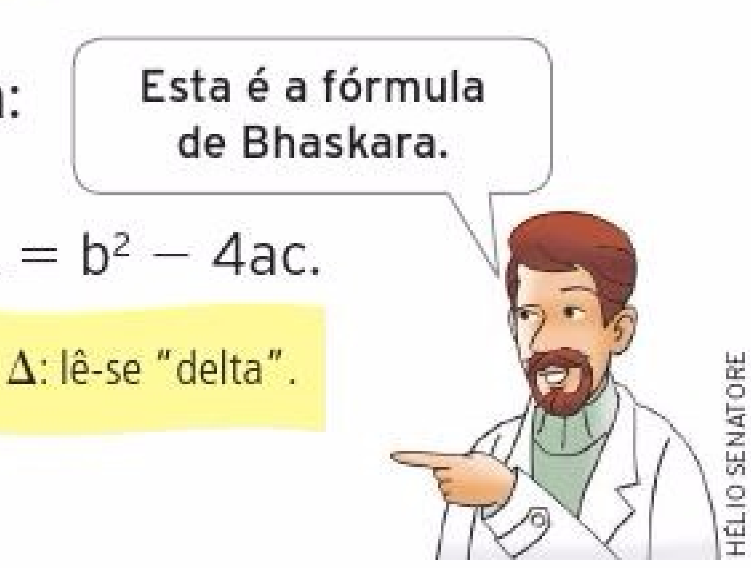
$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em geral, os valores para **x** são indicados em uma só fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ou $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.



Δ: lê-se "delta".

A expressão $\mathbf{b^2 - 4ac}$, representada por Δ, é chamada de **discriminante da equação**.

Discriminante e o número de raízes

As raízes reais de uma equação de 2º grau dependem do sinal de Δ.

- Se Δ for um **número real positivo** ou igual a **zero**, $\sqrt{\Delta}$ também será um número real positivo ou igual a zero. Portanto, a equação **terá raízes reais**.
- Se Δ for um **número real negativo**, $\sqrt{\Delta}$ não será um número real. Nesse caso, a equação **não terá raízes reais**.

De modo geral, observamos que na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ para:

$\Delta > 0$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A equação tem **duas raízes reais diferentes**.

$\Delta = 0$

$$x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b - 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

A equação tem **duas raízes reais iguais** (ou uma única raiz real).

$\Delta < 0$ — $\sqrt{\Delta}$ não é um número real para valores negativos de Δ.

A equação **não possui raiz real**.

Exemplos:

- Determinação das raízes da equação $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Nessa equação, temos: $a = 1$, $b = 5$ e $c = -6$. Veja a resolução.

Discriminante

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24$

$\Delta = 49$

$\Delta > 0$ — A equação tem duas raízes reais diferentes.

Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{2} \text{ — } x = \frac{2}{2} \text{ — } x = 1$$

ou

$$x = \frac{-5 - 7}{2} \text{ — } x = -\frac{12}{12} \text{ — } x = -6$$

As raízes da equação são -6 e 1.

- Resolução da equação $\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Eliminamos os denominadores, reduzindo os termos a um denominador comum:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0 \text{ — } \frac{1 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4 \cdot 1}{8} = \frac{0 \cdot 8}{8} \text{ — } x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ — } a = 1;\ b = 4;\ c = 4.$$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$ — $\Delta = 0$

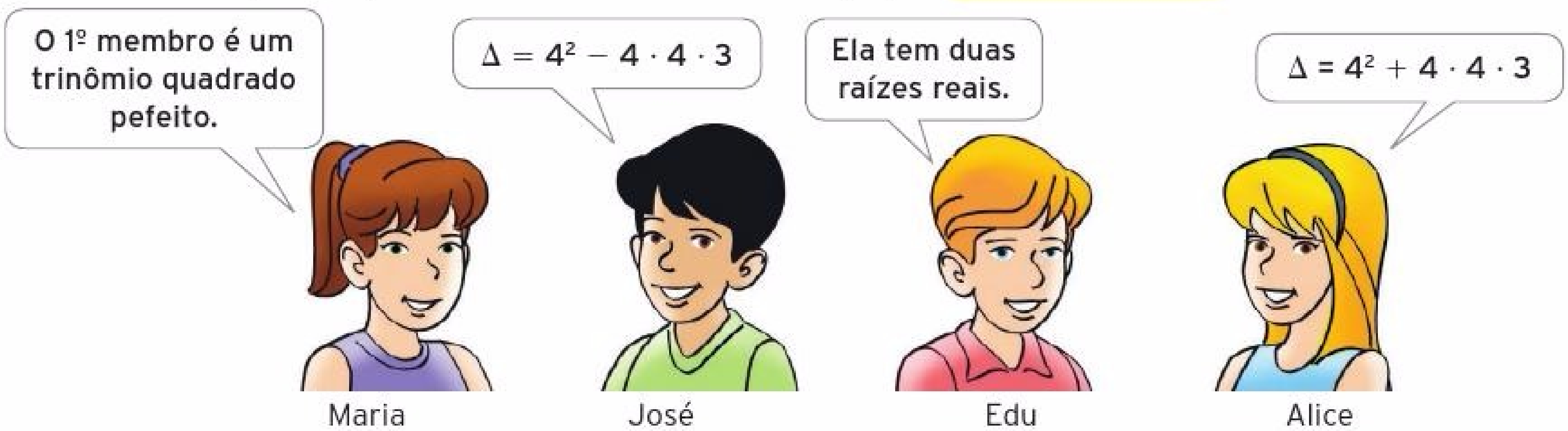
A equação tem duas raízes reais iguais: $x = \frac{-b}{2a}$ — $x = \frac{-4}{2 \cdot 1}$ — $x = -2$

-2 é a solução da equação dada.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

16. Preste atenção ao que estes alunos dizem sobre a equação $4x^2 + 4x - 3 = 0$:



ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

a) Quem está certo? Edu e Alice.

b) Quais são os valores de **a**, **b** e **c**? $a = 4$, $b = 4$ e $c = -3$

17. Das equações seguintes, anote apenas aquelas que têm raízes reais: a, c

a) $x^2 + x - 20 = 0$

b) $5x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

18. Nestas equações, a letra **x** pode representar um número real. Determine os números por ela representados quando esse fato ocorre.

a) $x^2 + 3x - 28 = 0$ $-7; 4$

b) $-x^2 + 9x - 20 = 0$ $4; 5$

c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$ **x** não representa um número real.

d) $16x^2 - 8x + 1 = 0$ $\frac{1}{4}$

e) $-5x^2 - 7x + 6 = 0$ $-2; \frac{3}{5}$

f) $-x^2 + 4x - 2 = 0$ $2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}$

19. Observe esta equação: Respostas pessoais.

$$(x - 1)^2 + x(3x - 10) = 8$$

a) Faça uma descrição das etapas, de modo resumido, de como resolver essa equação.

b) Troque suas anotações com um colega. Cada um resolve o exercício seguindo as etapas indicadas por ele.

c) Para finalizar, confiram se ambos encontraram as mesmas raízes.

20. Considere a equação $(m^2 - 16) \cdot x^2 - 2x - 1 = 0$ e responda:

a) Para que valores de **m** ela é uma equação de 2º grau? Para $m \neq -4$ e $m \neq 4$.

b) Atribua a **m** o valor zero. A equação resultante tem raízes reais? Não.

21. Escreva estas equações na forma reduzida e resolva-as:

a) $12 - 4x(1 - x) = x^2 - 2x - 7$ Não possui raízes reais.

b) $x(x - 2) = 2(x + 6)$ $-2; 6$

c) $(4x - 3)(4x + 3) - 8x(x - 2) = -17$ -1

d) $(3 - 2x)^2 - 4(6 - x) + 3x = -9$ $-\frac{3}{4}; 2$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

A fórmula de Bhaskara e as equações incompletas

Observe as equações incompletas nos quadros ao lado:

$x^2 - 5x = 0$ $0; 5$

$4x^2 + 3x = 0$ $0; -\frac{3}{4}$

$-3x^2 + 75 = 0$ $-5; 5$

- Utilize a fórmula de Bhaskara para resolvê-las.
- Confira as soluções encontradas, fatorando a expressão que está no primeiro membro dessas equações e resolvendo-as.
- Responda: A fórmula de Bhaskara também pode ser usada para as equações incompletas?
Sim, ela também vale para as equações incompletas.

Leitura

Um pouco de história

Imagine-se no topo de um edifício bem alto apreciando a paisagem à sua volta. De repente, dois objetos soltam-se de sua mão e caem no espaço...

HÉLIO SENATORE

ALAMY/LATINSTOCK

A famosa Torre de Pisa, na Itália.

Bem, não foi assim que aconteceu, mas conta-se que no início do século XVII, o físico, matemático e astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642) soltou do alto da Torre de Pisa, no mesmo instante, dois objetos de massas diferentes. Nesse experimento ele deduziu que, desprezando-se os efeitos da resistência do ar, os objetos chegariam ao solo ao mesmo tempo, por causa da ação da gravidade que a Terra exerce sobre os corpos.

Galileo Galilei expressou a lei da queda livre por meio da fórmula: $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\,\mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^2$. Nela, quando atribuímos a **s** um valor, temos uma equação de 2º grau em **t**.

Anos depois, o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727), baseado nessa lei, escreveu a lei da gravitação universal.

STOCK MONTAGE/GETTY IMAGES

Galileo Galilei.

CORBIS/LATINSTOCK

Isaac Newton.

É possível perceber que resolver equações em álgebra é tão importante quanto calcular com números em aritmética. Em algumas situações, podemos solucionar um problema por meio de equações de 1º grau, e em outras são as equações de 2º grau com uma variável que traduzem as condições do problema.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Considere $A = \dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$ e

$B = \left(\dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x}\right)^{-1}$.

Determine o valor de $A \cdot B$ para $x = 3$ e $y = -2$. -6

2. Qual é a área de um triângulo equilátero cujo perímetro é $54\sqrt{2}$ cm e a altura relativa a um dos lados mede $4\sqrt{6}$ cm? $72\sqrt{3}$ cm²

3. O número 15,145 é racional. Escreva dois números irracionais, um menor e outro maior que esse número. $\sqrt{12}$ e 5π. Há outras respostas possíveis.

4. A letra **n** representa um número inteiro. A diferença entre os quadrados desse número e de seu sucessor será sempre um número par ou ímpar? Ímpar.

5. Calcule os valores das expressões:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{8}}$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\sqrt{9 + 3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{9 - 3\sqrt{3}}$ $3\sqrt{6}$

6. Responda às questões a seguir observando esta equação: $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

a) Copie e complete esta frase: "Ela é uma equação de ■ grau." (1º, 2º, 3º). 3º

b) Anote uma equação equivalente a essa equação. ii

i. $x^3 + 4x^2 - 3x = 1$

ii. $x(x^2 - 4x + 3) = 0$

iii. $x^3 + 4x^2 = -3x$

c) Essa equação tem três raízes reais. Quais são elas? 0, 1 e 3

7. O valor de $\left[\left(\sqrt{11}\right)^{\frac{2}{5}}\right]^{\frac{3}{2}} : 11^{\frac{3}{10}}$ é: b

a) $\sqrt[10]{11^3}$

b) 1

c) $\sqrt[10]{11}$

d) 11

8. (Saresp) A parte decimal da representação de um número segue o padrão de regularidade indicado:

0,12112111211112... Este número é: d

a) racional não inteiro.

b) inteiro negativo.

c) irracional negativo.

d) irracional positivo.

9. A expressão $\sqrt{77 + \sqrt{10 + \sqrt{14 + 22}}}$ é igual a: a

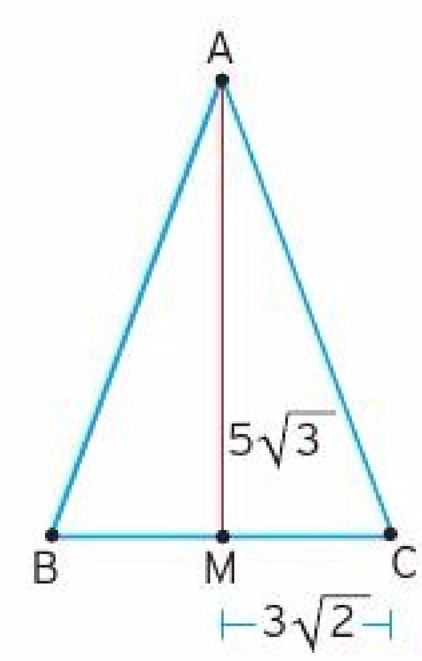
a) 9

b) 7

c) 6

d) 1

10. As medidas do triângulo isósceles ABC, indicadas na figura, são dadas em centímetros.



Se $\overline{AM}$ é a mediana relativa à base, então a área desse triângulo será: c

a) $3\sqrt{6}$ cm²

b) $5\sqrt{6}$ cm²

c) $15\sqrt{6}$ cm²

d) $30\sqrt{6}$ cm²

11. As raízes das equações de 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, são: c

a) $-\dfrac{a}{b}$ e 0

b) $\dfrac{a}{b}$ e 0

c) $-\dfrac{b}{a}$ e 0

d) $\dfrac{b}{a}$ e 0

12. As raízes da equação $(x - 2)(x + 4)(x + \sqrt{2})(2x - 1) = 0$ são: b

a) $-\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}, 2, 4$

b) $-4, -\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}, 2$

c) $-4, -2, \dfrac{1}{2}, \sqrt{2}$

d) $-4, -2, -\dfrac{1}{2}, \sqrt{2}$

UNIDADE 4

Equações de 2º grau e formas redutíveis

CAROL KOHEN/CULTURA RM/EASYPIX BRASIL

Os modelos de comportamento do avião para vencer o peso e a resistência do ar envolvem equações de 2º grau. Nesta unidade, será ampliado o conhecimento sobre as equações explorando-se particularidades e aplicações das equações de 2º grau com uma incógnita.

Nesta unidade...

1. Equações de 2º grau: relações particulares
2. Aplicações da equação de 2º grau
3. Explorando outras equações

Leia o que dizem estes jovens sobre as equações apresentadas pela professora.

Se **m** for igual a 9 a equação apresentada pela professora não será uma equação de 2º grau. Por quê?

A segunda equação não é de 2º grau, mas é possível resolvê-la recorrendo-se a uma equação de 2º grau.

O que você já sabe?

- Na primeira equação, atribuindo a **m** o valor 9, que tipo de equação se obtém? Equação de 1º grau.
- Ainda nessa equação, atribuindo a **m** o valor 8, que equação se obtém? Qual é o discriminante dessa equação? $x^2 + 4x - 2 = 0$. Há outras respostas possíveis; 24.
- Como a equação de 2º grau pode auxiliar na resolução da segunda equação apresentada pela professora? Colocando **x** em evidência no primeiro membro da equação.
- Quais são as raízes da segunda equação? −5, 0 e 5.
- O que ocorre com uma equação de 2º grau quando o discriminante é um número real negativo? A equação não terá raízes reais.

1 Equações de 2º grau: relações particulares

Relações entre raízes e coeficientes

Soma e produto de raízes

Para refletir e responder

No quadro abaixo foram apresentadas três equações de 2º grau com suas respectivas raízes.

	Equação	Raízes
A	$x^2 - 7x + 10 = 0$	2 e 5
B	$x^2 + x - 12 = 0$	-4 e 3
C	$x^2 - 100 = 0$	-10 e 10

- Em cada equação, qual é a soma e o produto de suas raízes? Compare os resultados obtidos com os coeficientes das respectivas equações e verifique se existe algum padrão.

A: soma: 7, produto: 10; B: soma: -1; produto -12 ; C: soma: 0, produto: -100. A soma é o oposto de **b** e o produto é igual a **c**.

Em equações de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, as raízes, quando são números reais, estão relacionadas aos coeficientes **a**, **b** e **c**. Vamos verificar quais são essas relações adicionando e multiplicando as expressões para a obtenção das raízes: $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- **Soma das raízes:**

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}b}{\underset{1}{\cancel{2}}a} = -\frac{b}{a} \text{ —— } \boxed{S = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}}$$

- **Produto das raízes:**

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{4a}}c}{\underset{a}{\cancel{4a^2}}} = \frac{c}{a} \text{ —— } \boxed{P = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$$

Veja alguns exemplos:

- Na equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ com raízes 2 e 5:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7 = 2 + 5 \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10 = 2 \cdot 5$$

- Na equação $x^2 - 100 = 0$ com raízes -10 e 10:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0 = -10 + 10 \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-100}{1} = -100 = -10 \cdot 10$$

De modo geral:

> Em uma equação de 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, quando existem raízes reais, a soma e o produto dessas raízes estão relacionados com os coeficientes, ou seja:
>
> A **soma** das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o **produto** é $\frac{c}{a}$.

Equação de 2º grau expressa em função da soma e do produto das raízes

Usando as relações justificadas anteriormente, é possível escrever uma **equação de 2º grau** com uma incógnita em função da soma (S) e do produto (P) quando existem as raízes.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

Dividimos todos os termos da equação por **a**.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Escrevemos $+\frac{b}{a} = -\left(-\frac{b}{a}\right)$.

$$x^2 - \underbrace{\left(-\frac{b}{a}\right)}_{S}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{P} = 0 \longrightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exemplos:

- Escreva uma equação de 2º grau, na incógnita **x**, que tenha como soluções os números -9 e 6.

Utilizamos a fórmula: $x^2 - Sx + P = 0$

HÉLIO SENATORE

$S = -9 + 6 = -3$

$P = (-9) \cdot 6 = -54$

Portanto:

$$x^2 - (-3)x + (-54) = 0 \longrightarrow \boxed{x^2 + 3x - 54 = 0}$$

A equação $x^2 + 3x - 54 = 0$ tem como soluções os números -9 e 6.

- A soma de dois números é $-\frac{2}{5}$ e o produto é $-\frac{3}{5}$. Quais são esses números?

Os números que procuramos são as raízes de uma equação de 2º grau na forma $x^2 - Sx + P = 0$.

$S = -\frac{2}{5}$ e $P = -\frac{3}{5}$ —— $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0$ —— $\frac{5x^2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0$ —— $5x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) = 4 + 60$ —— $\Delta = 64$

a = 5; b = 2; c = −3.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-2 \pm 8}{10}$$

$x = \frac{-2 + 8}{10} = \frac{6}{10}$ —— $x = \frac{3}{5}$

ou

$x = \frac{-2 - 8}{10} = \frac{-10}{10}$ —— $x = -1$

Os números são -1 e $\frac{3}{5}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. As equações apresentadas a seguir têm raízes reais. Calcule a soma e o produto das raízes de cada uma delas sem determiná-las.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ S = −3 e P = −4

b) $x^2 - 15x = 0$ S = 15 e P = 0

c) $2x^2 - x - 1 = 0$ $S = \frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 18x - 7 = 0$ $S = 2$ e $P = -\frac{7}{9}$

2. Escreva uma equação de 2º grau que tenha a soma e o produto das raízes iguais a:

Há outras respostas possíveis.

a) $S = -5$ e $P = -50$ $x^2 + 5x - 50 = 0$

b) $S = 0$ e $P = -64$ $x^2 - 64 = 0$

c) $S = -\frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{3}$ $6x^2 + 3x - 2 = 0$

3. Escreva equações de 2º grau com uma incógnita que tenham como soluções os números:

a) 4 e $\frac{1}{4}$.

b) $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{5}{3}$.

c) -8 e 8.

d) $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$.

e) $-3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$.

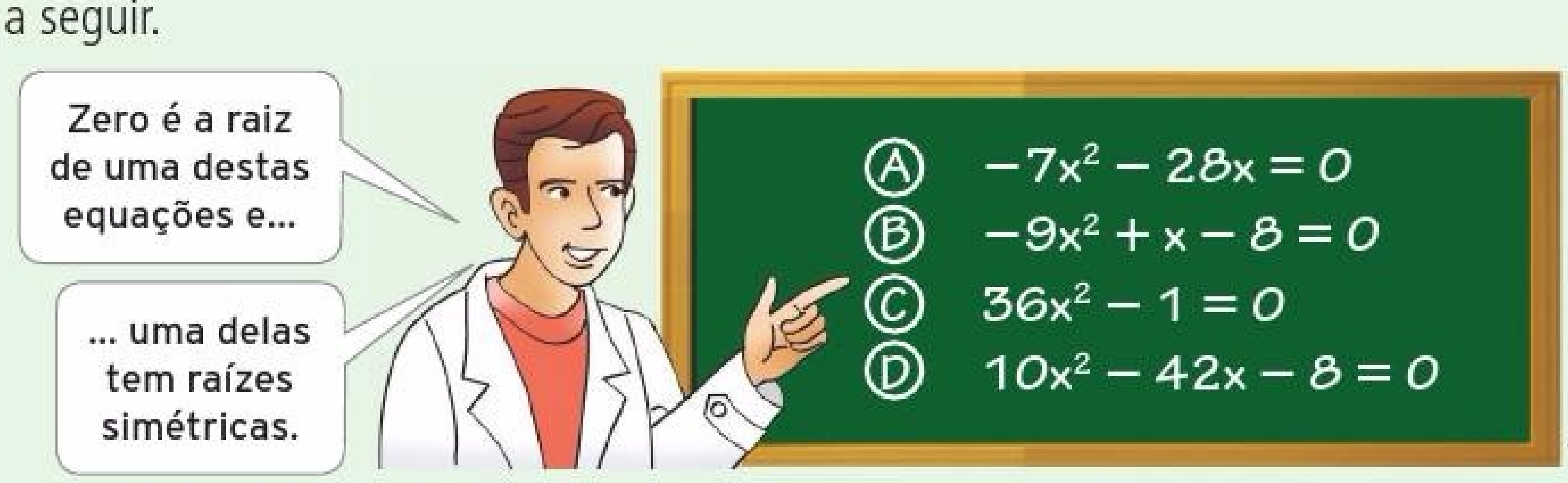
f) $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$.

3. a) $x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0$; b) $x^2 + 2x + \frac{5}{9} = 0$; c) $x^2 - 64 = 0$; d) $x^2 + \frac{13}{6}x + 1 = 0$; e) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 30 = 0$; f) $x^2 - 4x + 1 = 0$. Há outras respostas possíveis.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega e observem a cena abaixo. Em seguida, investiguem e respondam às questões a seguir.



HÉLIO SENATORE

- Se uma das raízes é zero, o que ocorre com o produto das raízes da equação? É zero.
- João disse: "Se as raízes são simétricas, a soma delas é zero". Ele está correto? Sim.
- Quais são as equações comentadas pelo professor? Ⓐ; Ⓒ

2 Aplicações de equação de 2º grau

Forma fatorada de trinômios de 2º grau

Vamos explorar este assunto por meio de exemplos. Veja alguns casos a seguir.

Trinômio do tipo $x^2 + bx + c$

- Fatoração do trinômio $x^2 - 7x + 12$.

Note que em $x^2 - 7x + 12$ temos $a = 1$. Fatoramos esse trinômio determinando dois números cuja soma seja -7 e cujo produto seja 12. Nesse caso, podemos calcular mentalmente esses números: eles são -4 e -3.

Assim, temos:

$$\mathbf{x^2 - 7x + 12 = \overbrace{(x - 4) \cdot (x - 3)}^{\text{forma fatorada}}}$$

Essa forma fatorada também pode ser obtida a partir da determinação das raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$. Veja:

$$\Delta = 1 \text{ — } x = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \text{ — } x^2 - 7x + 12 = (x - 4) \cdot (x - 3)$$

E, se representarmos por $\mathbf{x_1}$ a raiz **4** e por $\mathbf{x_2}$ a raiz **3**, a forma fatorada será indicada por:

$$\mathbf{x^2 - 7x + 12 = (x - 4) \cdot (x - 3) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

- Fatoramos o trinômio $x^2 - 16x + 64$ determinando as raízes da equação $x^2 - 16x + 64 = 0$.

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 0 \text{ — } x = \frac{16 \pm 0}{2} = 8 \text{ — } x_1 = x_2 = 8$$

Portanto, uma forma fatorada do trinômio é:

$$x^2 - 16x + 64 = (x - 8) \cdot (x - 8) = (x - 8)^2$$

- Fatoração do trinômio $x^2 + 4x + 5$.

Resolvendo a equação $x^2 + 4x + 5 = 0$ obtemos:

$\Delta = 16 - 20 = -4$ — $\Delta < 0$ — Não existe raiz real.

$x^2 + 4x + 5$ não pode ser fatorado no conjunto dos números reais.

De modo geral, é possível mostrar que, para um trinômio do tipo $\mathbf{x^2 + bx + c}$, com $a = 1$, se a equação $\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$ tiver:

✓ $\Delta > 0$, ela terá raízes reais $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, e uma forma fatorada desse trinômio será:

$$\boxed{x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

✓ $\Delta = 0$, $\mathbf{x_1 = x_2}$, e uma forma fatorada desse trinômio será:

$$\mathbf{x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_1)} \text{ —— } \boxed{x^2 + bx + c = (x - x_1)^2}$$

✓ $\Delta < 0$, o trinômio $x^2 + bx + c$ não poderá ser fatorado no conjunto dos números reais.

Trinômio do tipo $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

No trinômio $\mathbf{5x^2 - 7x - 6}$ o coeficiente de x^2 é 5, ou seja, $a \neq 1$. Veja como fatoramos trinômios desse tipo.

Primeiro colocamos 5 em evidência: $5x^2 - 7x - 6 = 5 \cdot \underbrace{\left(x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}\right)}_{\text{Trinômio do tipo } x^2 + bx + c}$

Como as raízes da equação $x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{6}{5} = 0$ são $-\frac{3}{5}$ e 2, uma forma fatorada desse trinômio é:

$$5x^2 - 7x - 6 = 5 \cdot \left(x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}\right) = 5\underbrace{\left(x + \frac{3}{5}\right) \cdot (x - 2)}_{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

$$\mathbf{5x^2 - 7x - 6 = 5\left(x + \frac{3}{5}\right) \cdot (x - 2)}$$

De modo geral, é possível mostrar que, para trinômios do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c}$, com $a \neq 0$, se a equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ tiver:

✓ $\Delta > 0$, ela terá duas raízes reais, $\mathbf{x_1 \neq x_2}$ —— $\mathbf{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$.

✓ $\Delta = 0$, ela terá duas raízes reais, $\mathbf{x_1 = x_2}$ —— $\mathbf{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2}$.

✓ $\Delta < 0$, ela não terá raiz real —— $ax^2 + bx + c$ não poderá ser fatorado no conjunto dos números reais.

5. $2x^2 + 11x + 14$ pode ser fatorado porque é um trinômio de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c$ e $2x^2 + 11x + 14 = 0$ tem duas raízes. $\frac{x^2}{2} - 5x + 18$ não pode ser fatorado porque $\frac{x^2}{2} - 5x + 18 = 0$ não tem raiz real.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

4. Considere o trinômio $x^2 - 18x + 72$ e responda às questões:

a) Sim, porque é um trinômio de 2º grau e $x^2 - 18x + 72 = 0$ tem duas raízes reais.

a) Esse trinômio pode ser fatorado? Por quê?

b) Se for possível fatorá-lo, qual será uma forma fatorada desse trinômio? $(x - 12) \cdot (x - 6)$

5. Os trinômios dos quadros a seguir podem ser fatorados? Justifique sua resposta.

$2x^2 + 11x + 14$ $\qquad$ $\frac{x^2}{2} - 5x + 18$

6. Fatore estes trinômios de 2º grau quando possível:

a) $x^2 + 16x + 63$
$(x + 9) \cdot (x + 7)$

b) $x^2 + 3x - 88$
$(x + 11) \cdot (x - 8)$

c) $x^2 - 6x + 12$
Não é possível fatorá-lo no conjunto dos números reais.

d) $x^2 - 18x + 81$
$(x - 9)^2$

e) $-x^2 + 19x - 60$
$-(x - 4) \cdot (x - 15)$

f) $-3x^2 - 4x + 15$
$-3 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot (x + 3)$

Troquem ideias e resolvam

Junte-se a um colega, reflitam, troquem ideias e resolvam o problema abaixo.

O binômio $(x - 5)$ é fator comum de duas das expressões abaixo.

(A) $x^2 + 3x - 40$ $\qquad$ (B) $2x^2 - 11x + 5$ $\qquad$ (C) $x^2 + 12x + 36$

- Identifique quais são essas expressões. A e B

Resolução de problemas

Vimos que as equações são de grande auxílio em resolução de problemas. Agora que sabemos como resolver equações de 2º grau com uma incógnita, vamos explorar alguns problemas cuja resolução envolve equações desse tipo.

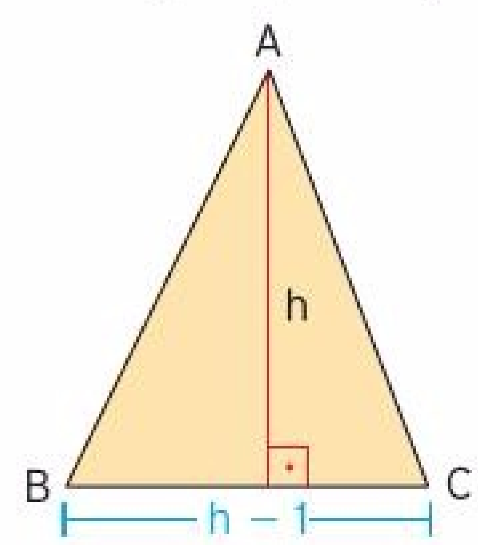
Aceitar ou não as raízes como soluções depende da situação-problema, pois é ela quem determina a natureza das soluções do problema em questão.

Uma raiz negativa não é a solução para a medida da altura de uma estrutura de telhado.

Exemplo:

Em um triângulo ABC, a medida da altura relativa à base $\overline{BC}$ excede a medida de $\overline{BC}$ em 1 cm. Esse triângulo tem 15 cm² de área. Qual é a medida dessa altura?

Indicando a medida da altura do triângulo por h, a medida da base será $(h - 1)$.



$$\underbrace{\text{área de um triângulo}}_{15} = \underbrace{\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}}_{\frac{(h-1)\cdot h}{2}}$$

Reduzimos os termos da equação a um denominador comum, eliminando-o e reduzindo os termos:

$$h^2 - h - 30 = 0$$

São raízes dessa equação: $h = 6$ e $h = -5$.

Verificação: Uma vez encontradas as raízes da equação, verificamos se elas satisfazem as condições do problema e se podem ser aceitas como soluções:

- **h** representa a medida da altura $\overline{AH}$ —— $h > 0$
  Portanto, a raiz -5 não é conveniente.
- Para: $\mathbf{h = 6}$, $h > 0$ —— med $\overline{BC} = h - 1 = 6 - 1 = 5 > 0$

  e a área do $\triangle ABC = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ m².

O triângulo ABC tem 6 cm de altura.

Fazer e aprender

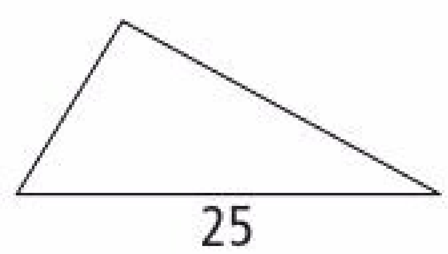
FAÇA NO CADERNO

7. O produto de dois números inteiros negativos e consecutivos é 306. Determine esses números. -18 e -17.

8. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 7 cm a mais que o outro e a hipotenusa mede 8 cm a mais que o cateto menor. Quanto mede a hipotenusa? 13 cm

9. Leia com atenção este problema: Respostas pessoais.

A hipotenusa de um triângulo mede 25 cm. Um dos catetos é 5 cm maior que o outro.



Qual é a área desse triângulo?

a) Descreva, indicando as etapas, de modo resumido, como resolver esse problema.

b) Troque suas anotações com um colega. Cada um resolve o problema seguindo as etapas indicadas pelo outro.

c) Para finalizar, confiram se ambos encontraram a mesma solução para o problema.

10. O triplo de um número menos o quadrado dele é -54. Que número é esse? -6 ou 9.

11. Um número positivo excede em uma unidade o triplo de outro. Se o produto deles é 200, quais são esses números? 8 e 25.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

De volta ao problema dos apertos de mãos

Na festa de fim de ano da empresa em que Jorge trabalha, as pessoas foram chegando e cumprimentando-se com um aperto de mão. Cada pessoa cumprimentou a outra uma só vez. Foram contados 78 apertos de mão.

VAGNER DE FARIAS

- Quantas pessoas estavam na festa? 13 pessoas.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

12. Para que valores de **x** a expressão $\frac{5(2x-1)}{6} - \frac{x(x+1)}{4}$ será igual a $\frac{x-5}{12}$? $\frac{1}{3}$ ou 5.

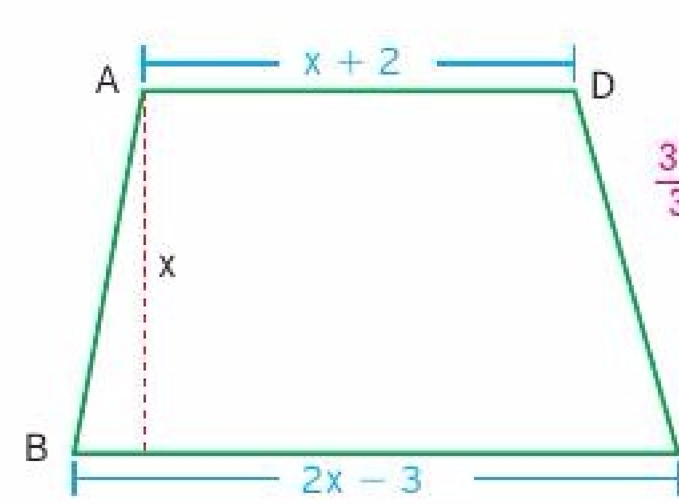
13. Existe um número positivo para o qual a expressão $(x-2)^2 + x - 4$ é igual a 40. Determine esse número. 8

14. Resolva estas equações em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{8x^2}{5} - \frac{x-4}{2} = -\frac{3x}{2} + \frac{19}{10}$ $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}$

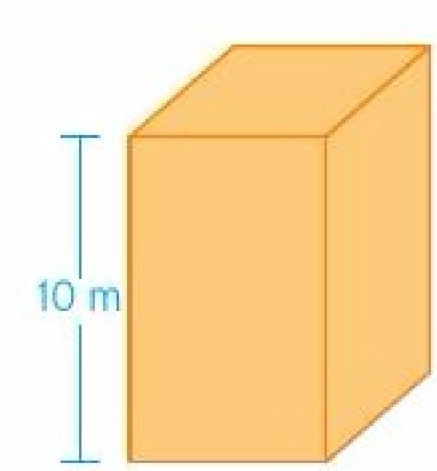
b) $\frac{(4x-3)(4x+3)}{24} - \frac{2x^2+1}{3} = \frac{x(x-5)}{6} + x$ Não há raízes em $\mathbb{R}$.

15. No trapézio ABCD a área é 100 cm². Quais são as medidas das bases em centímetros?



$\frac{31}{3}$ cm; $\frac{41}{3}$ cm.

16. Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo de base quadrada e tem 9 000 m³ de volume. Calcule a medida da aresta da base dessa caixa. 30 m



3 Explorando outras equações

Equações biquadradas

Para refletir e responder

As equações a seguir apresentam um padrão.

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ $\quad$ $9y^4 + 7y^2 - 2 = 0$ $\quad$ $5m^4 + 4m^2 = 0$

- Que padrão essas equações apresentam? Como fica a equação com incógnita **x** se x^2 for substituído por **t**? Todas estão na forma reduzida. Nas duas primeiras, as incógnitas têm apenas expoentes 4, 2 e zero. Na última, apenas expoentes 4 e 2. Há outras respostas possíveis. $t^2 - 6t + 8 = 0$.

O maior expoente da incógnita em cada equação apresentada na situação acima é: x^4, $9y^4$ e $5m^4$. Elas são equações incompletas de 4º grau e não têm termos em que as incógnitas são elevadas ao cubo e ao expoente 1.

A partir de equações desse tipo é possível escrever equações de 2º grau por meio do que chamamos de **mudança de variável**.

Veja um exemplo:

HÉLIO SENATORE

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

Representamos x^2 por **t**.

Como $x^4 = (x^2)^2$, representando x^2 por t, x^4 pode ser substituído por t^2.

Dessa forma, teremos uma equação de 2º grau com incógnita **t**, que já sabemos resolver:

$$\underbrace{x^4}_{t^2} - 6\underbrace{x^2}_{t} + 8 = 0 \;—\; \mathbf{t^2 - 6t + 8 = 0}$$

$a = 1$; $b = -6$; $c = 8$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$$

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} t = \dfrac{8}{2} = 4 \\ \text{ou} \\ t = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Resolvendo a equação com incógnita **t**, obtivemos dois valores positivos. Para cada valor obtido para **t** calculamos dois valores para **x**:

$t = x^2$ ou $x^2 = t$

$$t = 4 \;—\; x^2 = 4 \;—\; x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases} \qquad t = 2 \;—\; x^2 = 2 \;—\; x = \pm\sqrt{2} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

-2, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ e 2 são as raízes da equação $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

De modo geral:

Equações do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, são chamadas de **equações biquadradas**, pois para resolvê-las recorremos duas vezes a equações de 2º grau com uma incógnita.

É possível mostrar que uma equação biquadrada tem no máximo quatro raízes reais.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

17. Observe a equação $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$.

a) Qual é a equação de 2º grau que se obtém ao substituir x^2 por t? $4t^2 - 9t + 2 = 0.$

b) Resolva a equação obtida no item anterior. $\frac{1}{4}$ ou 2.

c) Quais são as raízes da equação $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$? $-\sqrt{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ ou $\sqrt{2}$.

18. Resolva as equações biquadradas:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $-3; -1; 1; 3$

b) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ $-2; 2$

c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ $-3; 3$

d) $x^4 - 12x^2 = 0$ $-2\sqrt{3}; 0; 2\sqrt{3}$

e) $9x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ $-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $5x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ Não tem raiz real.

19. Considere a equação $(y^2 - 4)^2 + 2 \cdot (y^2 + 5)^2 = 66$.

a) Escreva essa equação na forma reduzida. $3y^4 + 12y^2 = 0$ ou $y^4 + 4y^2 = 0$

b) Determine as soluções dessa equação. 0

20. Resolva as equações:

a) $(x^2 - 3) \cdot (x^2 + 4) + 12 = 7 \cdot (x^2 + 2) + 2$ $-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$

b) $(2x^2 - 3)^2 - 23 = (x + 1) \cdot (x - 5) + 4x \cdot (1 - 2x)$ $-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}$

Troquem ideias e resolvam

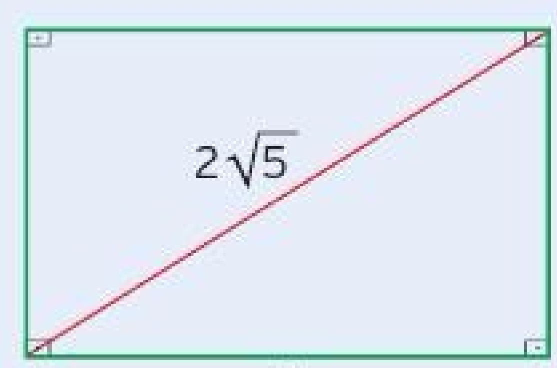
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Calcule as medidas do comprimento e da largura deste retângulo.

Comprimento: 4 cm; largura: 2 cm.

Medidas indicadas em cm.



Equações irracionais

Procure criar situações em que os alunos percebam a necessidade da verificação das raízes de uma equação irracional, pois o processo de resolução envolve uma potenciação que nem sempre produz uma equação equivalente à equação original.

Nas três equações do quadro abaixo, a incógnita aparece no radicando. Observe.

$$1 - \sqrt{x} = 2x \qquad \sqrt{x} + 1 = 2x \qquad \sqrt{2y - 1} = 3$$

Equações como essas são chamadas de **equações irracionais**.

Veremos como resolver equações como essas nos exemplos a seguir.

- Resolução da equação $\sqrt{2y - 1} = 3$.

Inicia-se elevando cada membro ao quadrado, por exemplo. Com esse procedimento, elimina-se a raiz quadrada.

$$\sqrt{2y - 1} = 3 \text{ —— } \left(\sqrt{2y - 1}\right)^2 = 3^2 \text{ —— } 2y - 1 = 9 \text{ —— } 2y = 10 \text{ —— } \mathbf{y = 5}$$

Uma vez calculado o valor de **y**, é preciso verificar se esse valor é solução da equação inicial.

$y = 5$ $\sqrt{2y - 1} = 3$ —— $\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 3$ —— $\sqrt{10 - 1} = 3$ —— $\sqrt{9} = 3$ (sentença verdadeira)

A verificação é necessária porque, quando elevamos os dois membros da equação ao quadrado, a equação resultante nem sempre tem raízes que sejam soluções da equação inicial.

- Resolução das equações $\sqrt{x} + 1 = 2x$ e $1 - \sqrt{x} = 2x$.

$\sqrt{x} + 1 = 2x$ — $\sqrt{x} = 2x - 1$ | $1 - \sqrt{x} = 2x$ — $-\sqrt{x} = 2x - 1$

Elevamos ao quadrado os dois membros de cada equação:

$(\sqrt{x})^2 = (2x - 1)^2$ — $x = 4x^2 - 4x + 1$ | $(-\sqrt{x})^2 = (2x - 1)^2$ — $x = 4x^2 - 4x + 1$

$\mathbf{4x^2 - 5x + 1 = 0}$ | $\mathbf{4x^2 - 5x + 1 = 0}$

As duas equações originais resultaram em uma mesma equação de 2º grau. Resolvendo essas equações obtemos as raízes: $\mathbf{\frac{1}{4}}$ e **1**.

Atribuímos esses valores a **x** em cada uma das equações iniciais.

$\sqrt{x} + 1 = 2x$ $\quad x = 1$ — $\sqrt{1} + 1 = 2 \cdot 1$ — $2 = 2$ (sentença verdadeira)

$x = \frac{1}{4}$ — $\sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4}$ — $\frac{3}{2} = \frac{2}{4}$ (sentença falsa)

$1 - \sqrt{x} = 2x$ $\quad x = 1$ — $1 - \sqrt{1} = 2 \cdot 1$ — $0 = 2$ (sentença falsa)

$x = \frac{1}{4}$ — $1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (sentença verdadeira)

Portanto, dos dois valores determinados para **x**, cada um deles é raiz de apenas uma das equações e não é raiz da outra. Dizemos que $\frac{1}{4}$ é uma raiz estranha à equação $\sqrt{x} + 1 = 2x$ e que 1 é uma raiz estranha à equação $1 - \sqrt{x} = 2x$.

Fazer e aprendre

FAÇA NO CADERNO

21. Resolva a equação $\sqrt{x - 13} = 2$. 17

22. Resolva estas equações irracionais:

a) $\sqrt{9x + 22} - 4 = x$ $-2; 3$

b) $x + 3 = 4 - \sqrt{5x + 1}$ 0

23. Para quais valores de **x** as expressões $\sqrt{2x^2 + 1}$ e $(1 - x)$ são iguais? 0 ou -2

24. Quais são as raízes da equação irracional $\sqrt{8x - 15} - x = 0$? 3; 5

25. Siga as etapas indicadas e resolva a equação $2 - \sqrt{3x} = \sqrt{7x + 4}$.

a) Eleve ambos os membros da equação ao quadrado. $4 - 4\sqrt{3x} + 3x = 7x + 4$

b) Isole o termo $-4\sqrt{3x}$ em um dos membros e reduza os termos semelhantes se for preciso. Depois, compare o resultado encontrado com o de um colega. $-4\sqrt{3x} = 4x$

c) Eleve novamente ao quadrado os dois membros da equação resultante. $x^2 - 3x = 0$

d) Prossiga até encontrar as raízes da equação inicial. 0

26. Determine as raízes destas equações irracionais:

a) $\sqrt{6x + 25} = 5 - \sqrt{x}$ 0

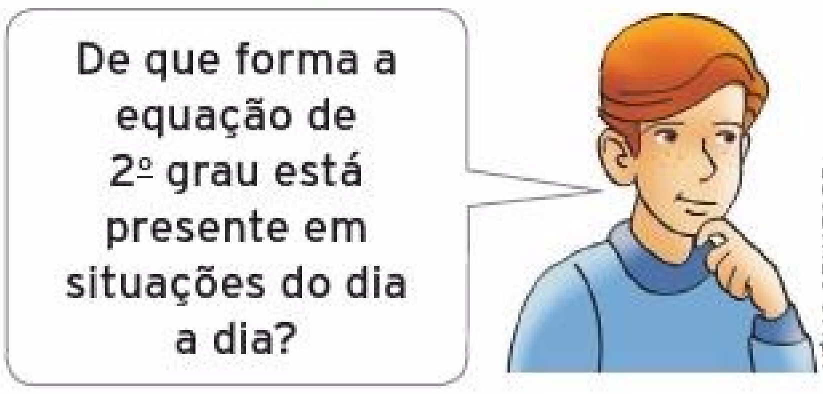
b) $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{3x - 11} + 1$ 20

27. Determine os valores de **x** para os quais a expressão $\sqrt{21 - 4\sqrt{3x - 6}}$ é igual a 3. 5

Leitura

A equação de 2º grau e o dia a dia

Apesar de a seção **Leitura** ser opcional, avalie a possibilidade de inserir a que segue no seu plano pedagógico. O tema procura envolver os alunos em situações do dia a dia deles, motivando-os na procura de soluções.



HÉLIO SENATORE

Você também já se fez essa pergunta?

As equações de 2º grau estão presentes, por exemplo, em situações que envolvem a compra de um produto em que o consumidor tem de decidir pelo pagamento do preço à vista ou pelo seu parcelamento.

Imaginemos que uma pessoa esteja interessada em comprar uma bicicleta. Então percorre lojas, faz um levantamento de preços, procura ofertas nos jornais e, de repente, se depara com um anúncio como este ao lado.

INGRAM/OTHER IMAGES

Qual é a taxa mensal de juro?

Veja como é feito o cálculo no qual **x** representa a taxa mensal de juro.

	Dívida	Pagamento	Débito ou nova dívida
No ato da compra	400	184	$400 - 184 = 216$
No ato do pagamento da 1ª parcela mensal	$216 + 216x$	150	$(216 + 216x) - 150 = 216x + 66$

A dívida no ato do pagamento das parcelas é igual ao débito mais a taxa de juro **x** sobre o débito.

No ato do pagamento da segunda parcela mensal de R$ 150,00, a dívida corresponderá a:

$$\underbrace{(216x + 66)}_{\text{débito}} + \underbrace{(216x + 66)x}_{\text{crédito}} = 216x^2 + 282x + 66$$

O débito no ato desse pagamento será igual a zero, ou seja, ao pagar a segunda parcela a pessoa já terá quitado sua dívida.

$(216x^2 + 282x + 66) - 150 = 0$ —— $216x^2 + 282x - 84 = 0$.

Determinamos a taxa mensal de juro resolvendo a equação de 2º grau:

$216x^2 + 282x - 84 = 0$ —— $36x^2 + 47x - 14 = 0$. ← Dividimos todos os termos da equação por 6.

As raízes dessa equação são: **0,25** ou $\mathbf{-1{,}\overline{5}}$.

Como **x** representa uma taxa de juro, a solução $x = -1{,}\overline{5}$ não é conveniente.

A taxa mensal de juro desse financiamento é de $0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$.

O financiamento dessa bicicleta, de acordo com o plano proposto, só será conveniente se a pessoa puder aplicar seu dinheiro com rendimento maior que 25% ao mês. Se aplicações renderem 25% ao mês, então a compra à vista será equivalente à financiada. Se renderem menos que 25% ao mês, então não é financeiramente vantajoso comprar a prazo. A pessoa deverá comprar dessa forma somente se for necessário.

Agora que você já sabe resolver equações de 2º grau, ajude sua família a tomar decisões em algumas compras de bens de consumo.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. A letra **n** representa um número inteiro. A diferença entre os quadrados desse número e de seu sucessor será sempre um número par ou ímpar? Ímpar.

2. Quais são os valores reais de **x** para os quais o valor numérico do trinômio $x^2 + x - 90$ é igual a zero? -10 ou 9.

3. Qual é a forma reduzida da expressão algébrica a seguir?

$$\left(\frac{2x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x - y}{2}\right)^2$$ 2xy

4. Racionalize os denominadores destas frações:

a) $\dfrac{22}{\sqrt{13} + \sqrt{2}}$ $2\sqrt{13} - 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}}$ $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab}$

5. Quais das expressões seguintes são trinômios quadrados perfeitos? b, d

a) $x^2 + y^2 + xy$

b) $x^2 - 2xy + y^2$

c) $a^2 - a - 6$

d) $4a^2 - 4ab + b^2$

6. Para que valor de **m** a equação a seguir terá raízes iguais? $\frac{1}{4}$

$$x^2 + (2m - 1)x + m^2$$

7. Fatore os trinômios de 2º grau:

a) $x^2 - 2x - 8$ $(x - 4)(x + 2)$

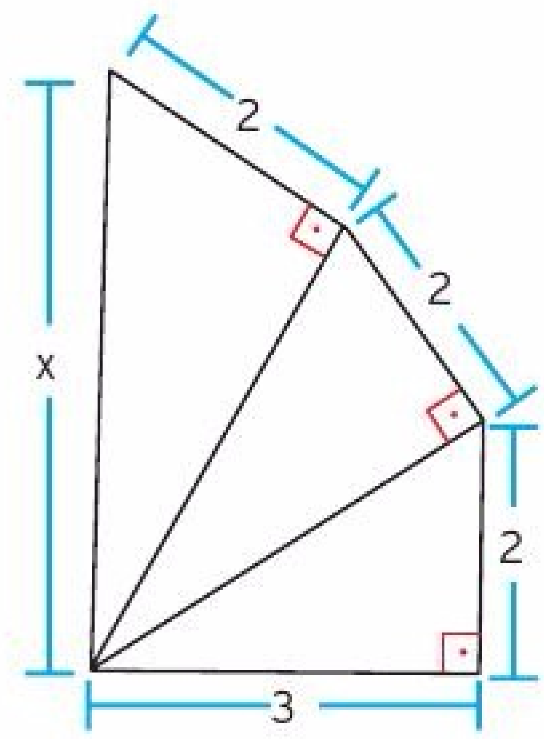
b) $a^2 + 4a + 3$ $(a + 1)(a + 3)$

c) $y^2 - 8y + 15$ $(y - 3)(y - 5)$

8. Calcule o valor numérico da expressão $\dfrac{(3x - y)(3x + y)}{4} - \dfrac{3x^2 + y^2}{2}$ sabendo que $x^2 - y^2$ é igual a 100. 75

Pista: encontre a forma reduzida da expressão apresentada.

9. Na figura abaixo, as medidas estão indicadas em centímetro. Calcule a medida **x**. $\sqrt{21}$ cm



10. A equação $\sqrt{x + \sqrt{x - 1}} = \sqrt{2x - 3}$ possui duas raízes reais. Qual é o produto dessas raízes? 10

11. A equação $\sqrt{x^2 - 3x - 3} + 9 = 2x$ tem: c

a) duas raízes positivas.

b) duas raízes negativas.

c) nenhuma raiz.

d) apenas uma raiz positiva.

12. A equação $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$:

a) tem quatro raízes reais e diferentes.

b) não tem raízes reais.

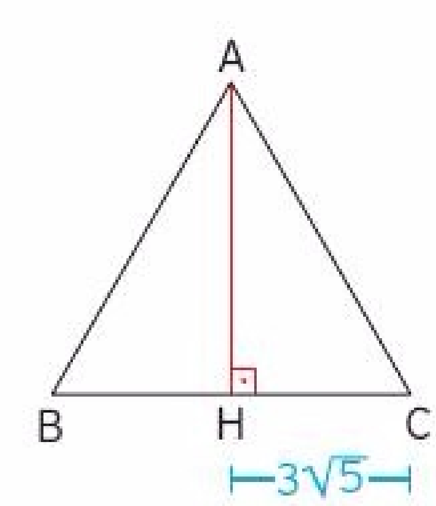
c) tem duas raízes reais.

d) tem uma raiz real.

13. Determine a soma das raízes da equação abaixo. $\frac{3}{4}$

$$(x + 5)(x - 4) + (2x - 1)^2 =$$
$$= (x - 3)(x + 3) - 10$$

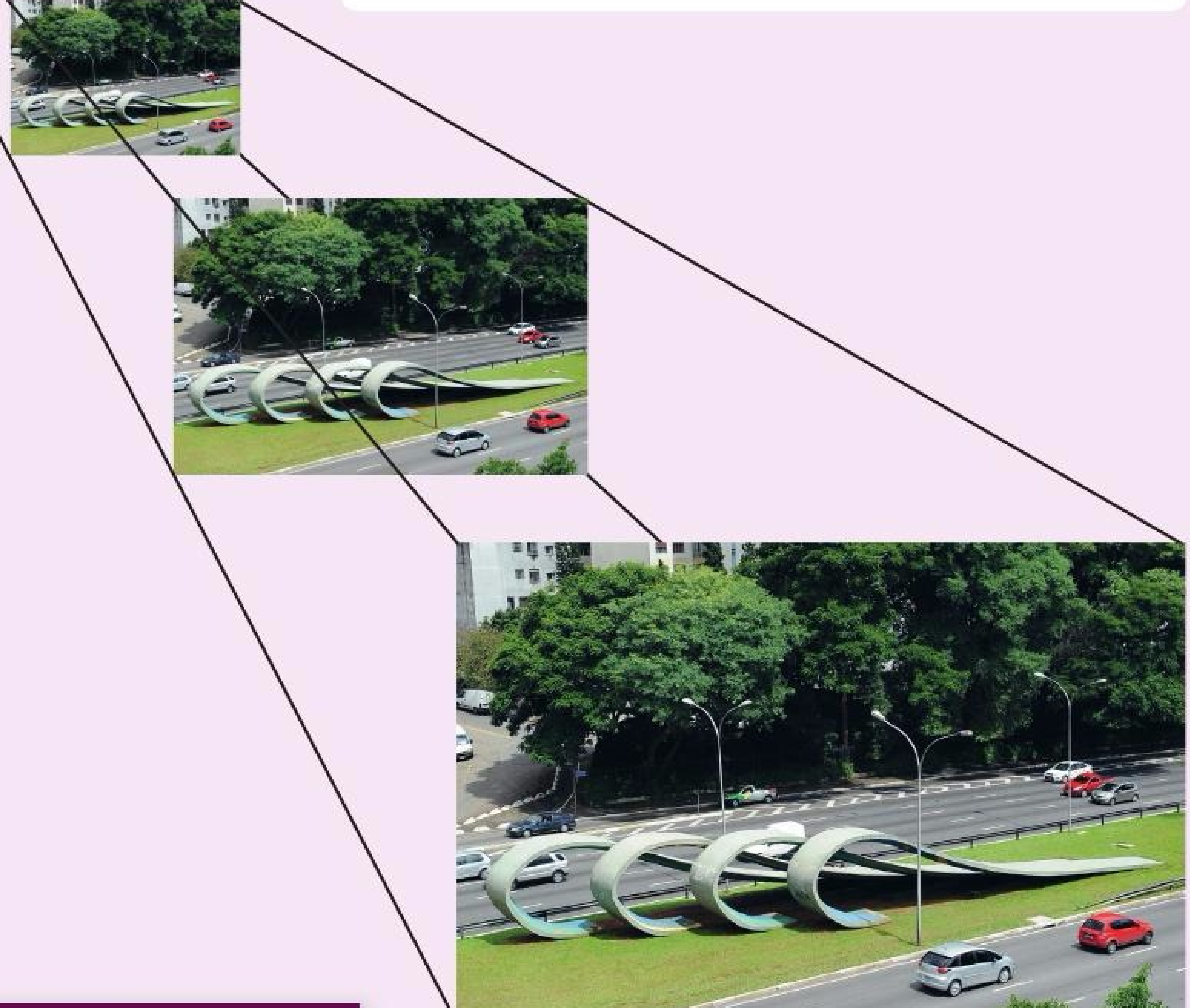
14. Na figura apresentada abaixo, o triângulo ABC é equilátero e a medida dada está indicada em centímetros. Qual é a área do triângulo ABC? $45\sqrt{3}$ cm.



UNIDADE 5

Tales e a proporcionalidade

A proporcionalidade está presente não só entre as três fotografias apresentadas, mas também no cotidiano das pessoas. Esse assunto será desenvolvido nesta unidade.



FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Monumento aos 80 Anos da Imigração Japonesa, de Tomie Ohtake, na Avenida 23 de Maio (SP).

Nesta unidade...

1. Proporcionalidade
2. Proporcionalidade entre segmentos de reta
3. Tales e retas paralelas
4. Aplicações do teorema de Tales

Tales de Mileto

Conta-se que o filósofo e matemático grego Tales de Mileto (624-548 a.C.) conseguiu calcular a medida aproximada da altura das pirâmides do Egito sem medi-las diretamente. Para isso, ele comparou os comprimentos de duas sombras: a da pirâmide e a de uma estaca de comprimento conhecido, colocada perpendicularmente ao solo, e aplicou a ideia de proporcionalidade.


MAURITIUS/LATINSTOCK

A ideia de proporcionalidade envolve a razão entre números e a proporção entre eles, assuntos já explorados anteriormente.

Por exemplo, se um grupo de pessoas é composto de 20 moças e 10 rapazes, dizemos que a razão entre o número de moças e o de rapazes é $\frac{20}{10}$ ou $\frac{2}{1}$. Nessa situação, diz-se que para cada 2 moças existe 1 rapaz.

O que você já sabe?

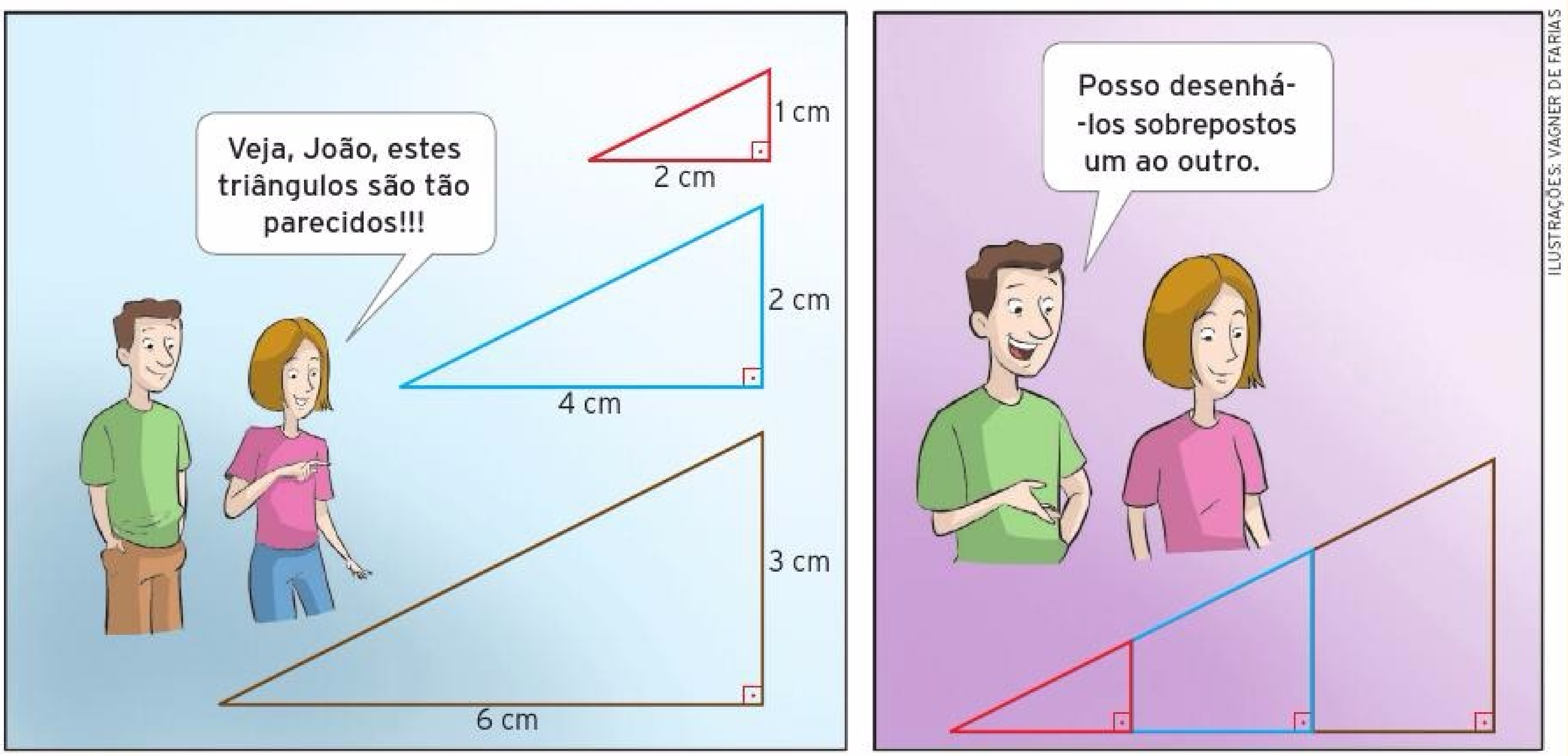
- Pense nas ideias de Tales e considere que, em determinado instante, uma estaca de 20 cm projeta uma sombra de 10 cm. Se nesse instante uma árvore projeta uma sombra de 150 cm, que altura ela tem? 300 cm ou 3 m.
- No exemplo apresentado no texto, é correto dizer que a razão entre o número de moças e o de rapazes é "1 para 2" ou "2 para 1"? 2 para 1.
- Você se lembra o que é uma proporção? Resposta possível: Uma igualdade entre duas razões.

1 Proporcionalidade

A ideia de proporcionalidade

Para refletir e responder

Observe os triângulos apresentados abaixo.



- Que padrão você observa entre esses triângulos?

Resposta possível: As medidas dos catetos aumentam proporcionalmente. Por exemplo, se uma dobra, a outra também dobra.

Comparando as medidas dos lados desses triângulos, observa-se que elas variam em uma proporcionalidade direta: se uma delas dobra, a outra dobra; se uma delas triplica, a outra triplica.

Outro exemplo:

Observe os dados sobre os treinos de um ciclista nesta tabela.

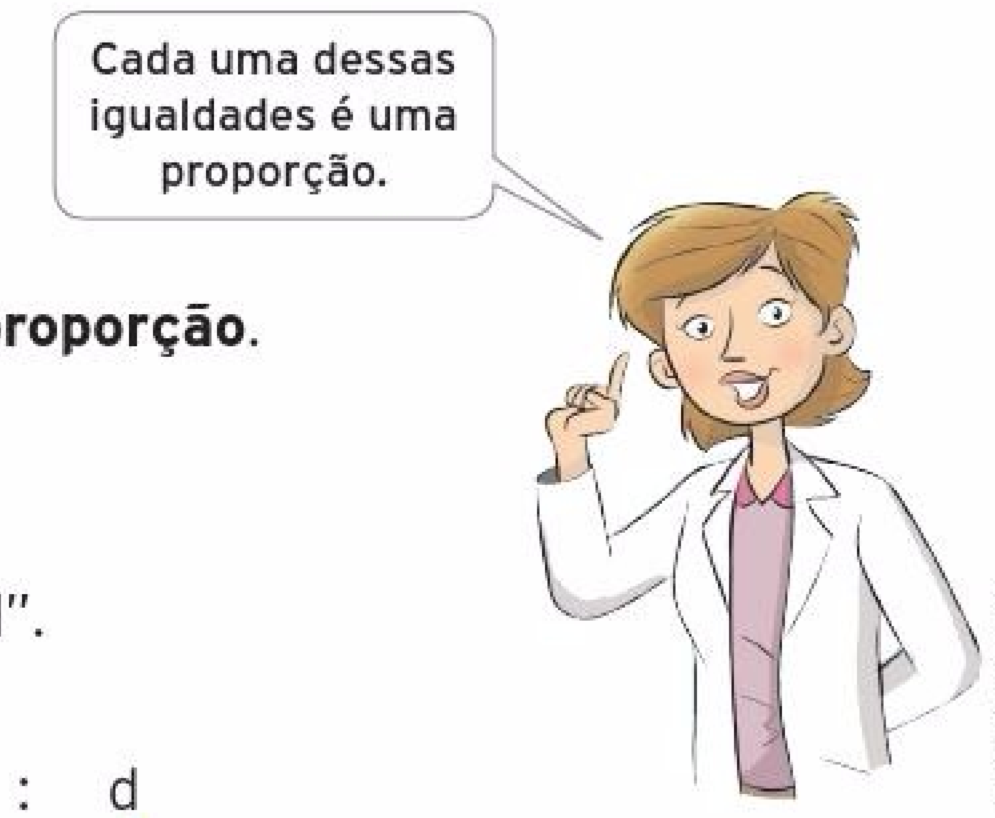
Percurso (km)	Tempo (h)
8	2
16	4
80	20

As razões $\frac{\text{percurso}}{\text{tempo}}$ calculadas para os valores da tabela são sempre iguais a 4. Veja:

$$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{80}{20} = 4$$

Então, podemos escrever igualdades envolvendo essas razões:

$$\frac{8}{2} = \frac{80}{20} \qquad \frac{16}{4} = \frac{8}{2}$$



Uma igualdade entre duas razões forma uma **proporção**.

Indicamos $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ ou **a : b** = **c : d**.

Lê-se: "**a** está para **b**, assim como **c** está para **d**".

$$\underbrace{a : \underbrace{b = c}_{\text{meios}} : d}_{\text{extremos}}$$

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Em uma criação de coelhos e patos, a razão entre o número de coelhos e o total de animais é de 13 : 20.

a) Qual é o significado dessa razão? Em cada grupo de 20 animais, 13 são coelhos.

b) Há mais coelhos ou patos? Mais coelhos.

c) Se há 200 animais, quantos são os patos? 70 patos.

2. Na proporção $\frac{x - 3}{4} = \frac{2x - 5}{5}$, **x** representa um número racional. Qual é o valor de $\mathbf{x}^2$? $\frac{25}{9}$

3. Em um grupo de 60 pessoas, 30 preferem jogar futebol. As demais preferem nadar ou jogar basquete.

a) É correto dizer que 50% do grupo prefere nadar ou jogar basquete? Sim.

b) A razão entre o número de pessoas que preferem jogar basquete e o número das que preferem nadar, nessa ordem, é de 2 : 1. Quantas pessoas preferem jogar basquete? 20 pessoas.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, leiam, reflitam e resolvam.

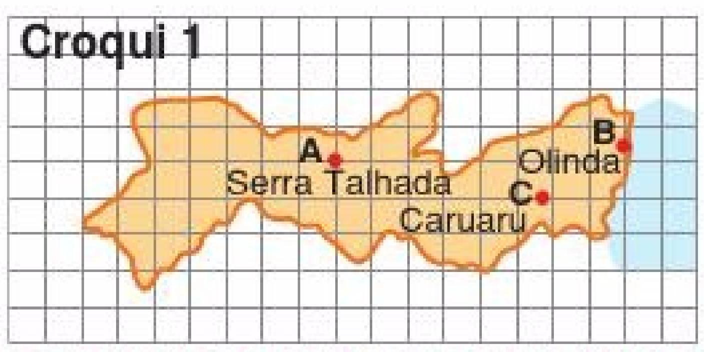
A prova de Matemática do último bimestre será composta de 45 questões. De cada 10 questões, João deverá acertar no mínimo 6 para passar de ano. João irá para o próximo ano letivo se ele acertar:

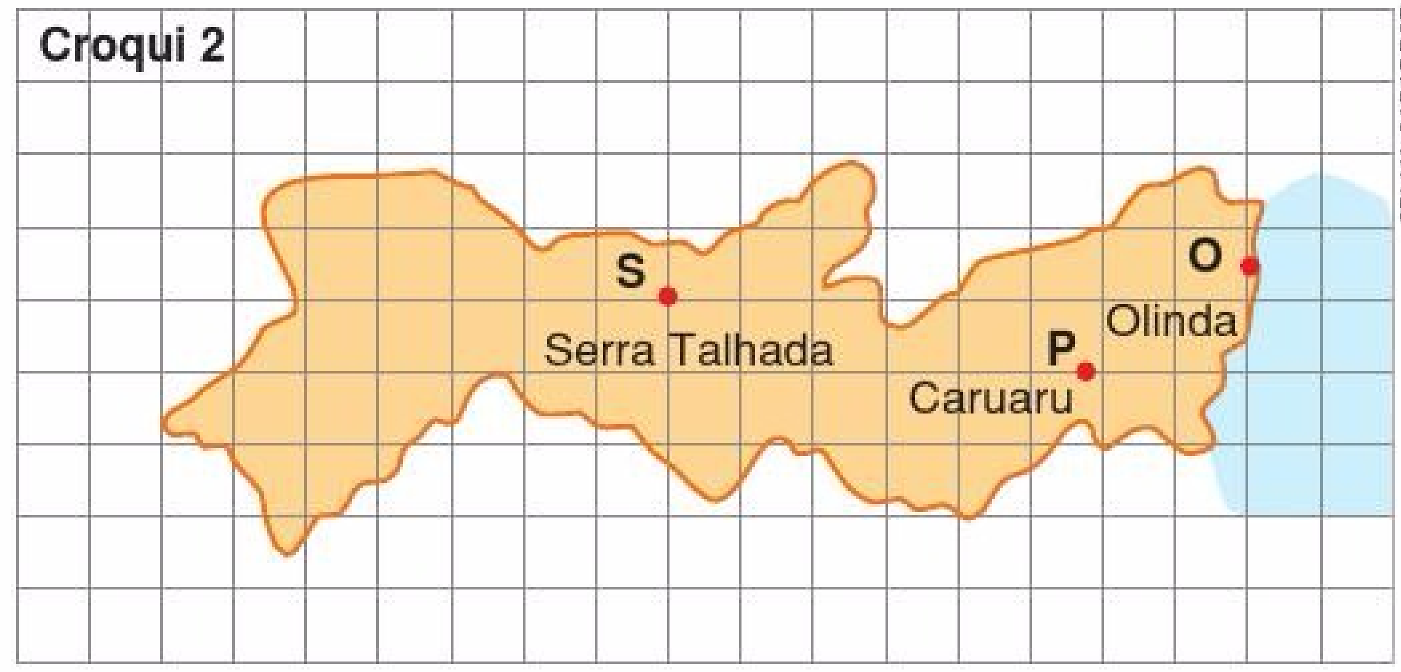
a) 15 questões? Não.
b) 26 questões? Não.
c) 35 questões? Sim.

Razões entre segmentos de reta

Para refletir e responder

Observe estes croquis. Eles mostram o estado de Pernambuco e as cidades de Olinda, Serra Talhada e Caruaru.





SELMA CAPARROZ

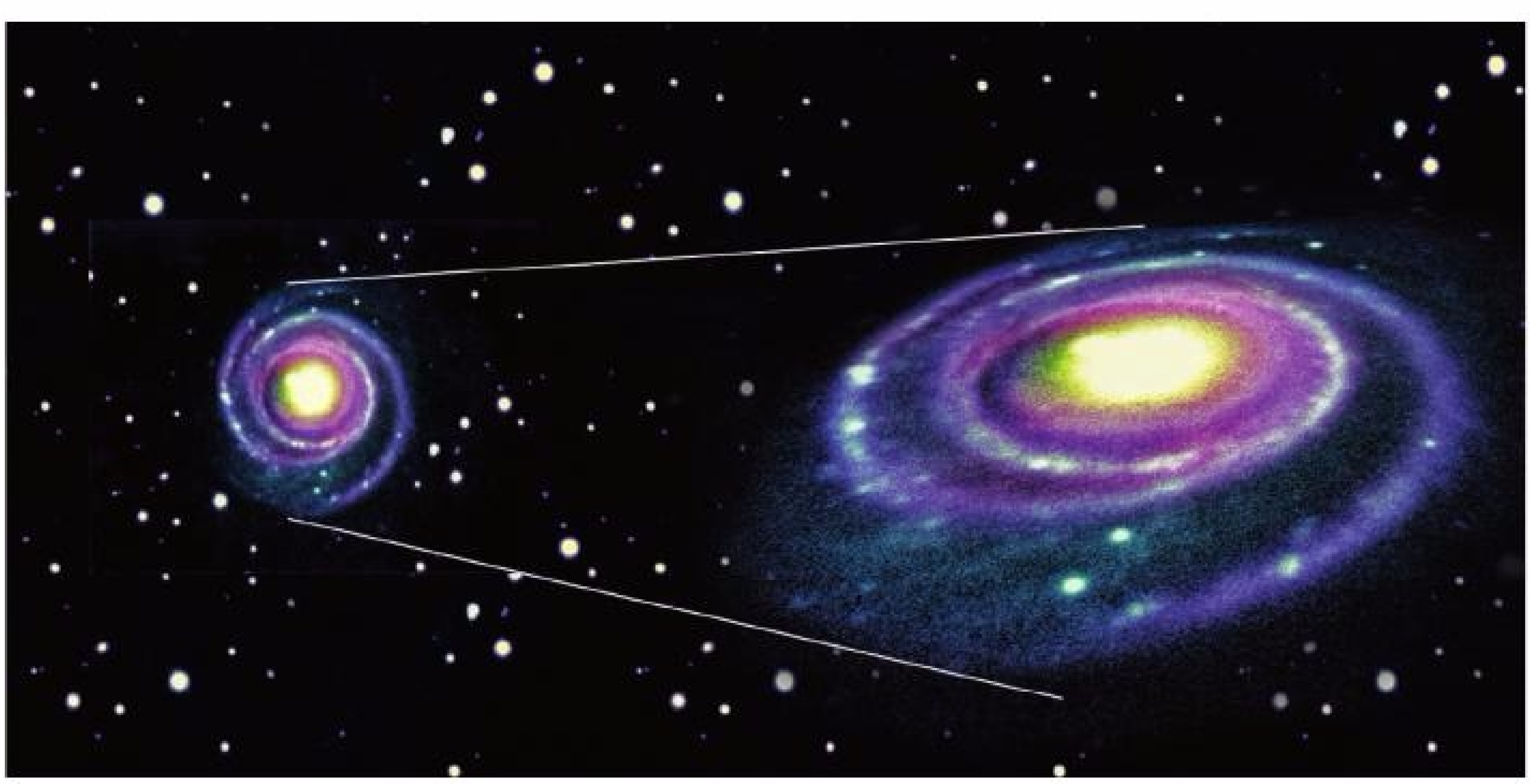
Caso os alunos desconheçam o que é um croqui, explique a eles que croqui é o termo empregado para designar o esboço de um mapa em que não há uma preocupação rigorosa com a formalização cartográfica.

- Que valor aproximado tem as razões $\dfrac{\text{med } \overline{AB}}{\text{med } \overline{SO}}$ e $\dfrac{\text{med } \overline{AC}}{\text{med } \overline{SP}}$? Sem medir os segmentos, você consegue determinar a razão $\dfrac{\text{med } \overline{BC}}{\text{med } \overline{OP}}$? O que se pode afirmar sobre essas razões?

$\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$; $\frac{1,5}{3}$ ou $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. Espera-se que os alunos percebam que essas razões são iguais.

A ideia de proporcionalidade está presente em outras ciências além da Matemática. Ela é aplicada em Geografia, desenho, na construção civil e na Astronomia.

Em Astronomia, por exemplo, situações que dependem de cálculo de distâncias inacessíveis, como entre estrelas e planetas, envolvem razões e proporções entre segmentos de reta.



SLP

O Sistema Solar é um dos braços em espiral da Via Láctea.

Representação esquemática da Via Láctea, vista sob dois prismas diferentes.

Os croquis apresentados na situação acima têm tamanhos diferentes, mas **formas iguais**: o croqui 2 é uma **ampliação** do croqui 1.

No croqui 1, a distância entre Serra Talhada e Olinda é de aproximadamente 2 cm; e, no croqui 2, a distância entre essas cidades foi **duplicada**: é de aproximadamente 4 cm. Portanto, a **razão** entre essas distâncias é, aproximadamente, $\frac{1}{2}$.

A razão $\frac{1}{2}$ se verifica também entre as distâncias Serra Talhada e Caruaru do croqui 1 para o croqui 2.

$$\frac{\text{med } \overline{AC}}{\text{med } \overline{SP}} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$$

Imaginando segmentos de reta com extremidades nos pontos que indicam a localização dessas cidades, dizemos que:

- a razão entre os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{SO}$, nessa ordem, é a razão entre med $\overline{AB}$ e med $\overline{SO}$, na mesma unidade;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SO}} = \frac{1}{2}$$

- a razão entre os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{SP}$, nessa ordem, é a razão entre med $\overline{AC}$ e med $\overline{SP}$, na mesma unidade.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{SP}} = \frac{1}{2}$$

Razão entre **dois segmentos de reta** é a razão entre as suas medidas, tomadas na mesma unidade.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

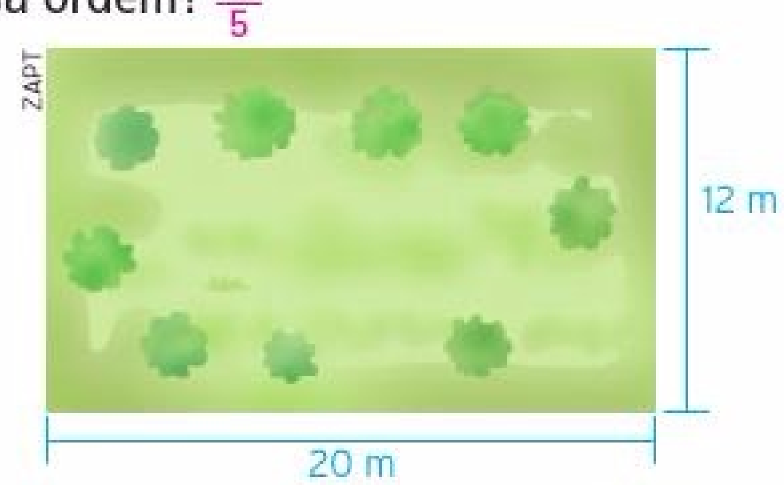
4. Escreva, à sua maneira, o que se entende por razão entre dois segmentos de reta. Resposta pessoal.

5. Determine a razão entre os segmentos de reta $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, nessa ordem, considerando:

a) med $\overline{MN}$ = 36 cm e $\overline{PQ}$ = 6 cm 6

b) med $\overline{MN}$ = 8 cm e med $\overline{PQ}$ = $3\sqrt{2}$ cm $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

6. Seu José tem um terreno retangular com 12 m de largura e 20 m de comprimento. Qual é a razão entre a largura e o comprimento do terreno, nessa ordem? $\frac{3}{5}$



7. Calcule a razão entre os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem, considerando as medidas:

Lembre-se: medidas tomadas na mesma unidade!

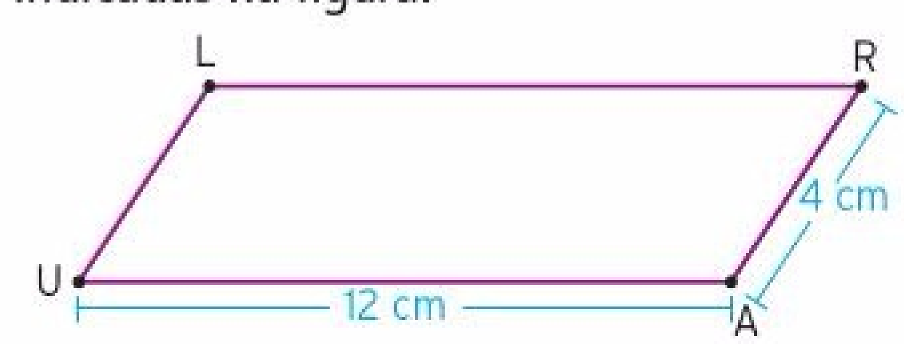
a) med $\overline{AB}$ = 45 cm e med $\overline{CD}$ = 72 cm $\frac{5}{8}$

b) med $\overline{AB}$ = 2,7 dm e med $\overline{CD}$ = 1,8 dm $\frac{3}{2}$

c) med $\overline{AB}$ = $5\sqrt{6}$ m e med $\overline{CD}$ = 50 dm $\sqrt{6}$

d) med $\overline{AB}$ = 1 km e med $\overline{CD}$ = 200 000 cm $\frac{1}{2}$

8. LUAR é um paralelogramo. Observe as medidas indicadas na figura:



a) Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{LR}$ e $\overline{AR}$, nessa ordem? $\frac{3}{1}$ ou 3

b) Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{AR}$ e $\overline{LR}$, nessa ordem? $\frac{1}{3}$

c) Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{LU}$ e $\overline{AR}$, nessa ordem? 1

d) Como LUAR é um paralelogramo, os lados paralelos são congruentes entre si, ou seja, $\overline{LU} \equiv \overline{AR}$ e $\overline{UA} \equiv \overline{LR}$. O que ocorre com a razão entre dois segmentos de reta congruentes? É sempre igual a 1.

9. Nesta figura, M é o ponto médio de $\overline{LP}$.

Determine as razões entre os segmentos de reta:

a) $\overline{LP}$ e $\overline{LM}$, nessa ordem; 2

b) $\overline{LP}$ e $\overline{MP}$, nessa ordem; 2

c) $\overline{LM}$ e $\overline{MP}$, nessa ordem. 1

2 Proporcionalidade entre segmentos de reta

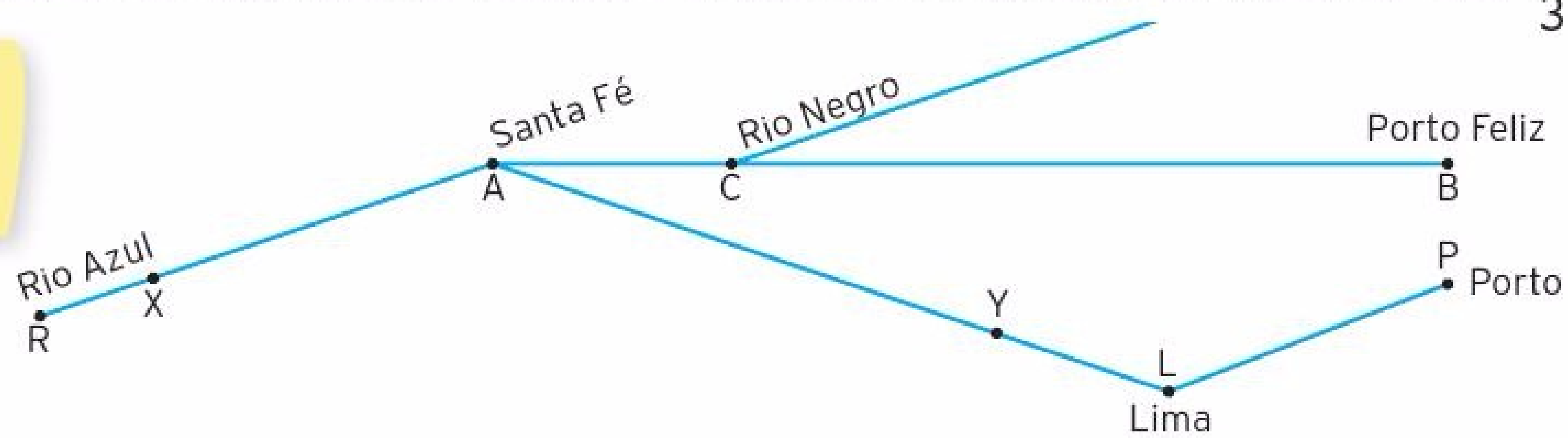
Proporção entre segmentos de reta

Vamos explorar esse assunto examinando um exemplo. Veja:

O esquema a seguir apresenta rotas de avião entre algumas cidades.

Na rota que sai de Santa Fé (**A**) e vai até Porto Feliz (**B**), passando por Rio Negro (**C**), a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, nessa ordem, é de **1 para 3**, ou seja, $\frac{1}{3}$.

Meça com a régua.



Nessa situação, os pares de segmentos de reta que estão na razão $\frac{1}{3}$ são:

$\overline{AC}$ e $\overline{CB}$

$$\frac{\text{med } \overline{AC}}{\text{med } \overline{CB}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{3}$$

$\overline{RX}$ e $\overline{XA}$

$$\frac{\text{med } \overline{RX}}{\text{med } \overline{XA}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\overline{RX}}{\overline{XA}} = \frac{1}{3}$$

$\overline{YL}$ e $\overline{AY}$

$$\frac{\text{med } \overline{YL}}{\text{med } \overline{AY}} = \frac{1{,}5}{4{,}5} = \frac{\cancel{15}^{1}}{\cancel{45}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\overline{YL}}{\overline{AY}} = \frac{1}{3}$$

Algumas proporções que envolvem essas razões são:

Proporção

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{RX}}{\overline{XA}} \qquad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Os segmentos de reta $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{RX}$ e $\overline{XA}$ são **proporcionais**, nessa ordem, na **razão 1 : 3** ou na **razão $\mathbf{\frac{1}{3}}$**.

$$\frac{\overline{RX}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{YL}}{\overline{AY}} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1{,}5}{4{,}5}$$

Os segmentos de reta $\overline{RX}$, $\overline{XA}$, $\overline{YL}$ e $\overline{AY}$ são **proporcionais**, nessa ordem, na **razão 1 : 3** ou na **razão $\mathbf{\frac{1}{3}}$**.

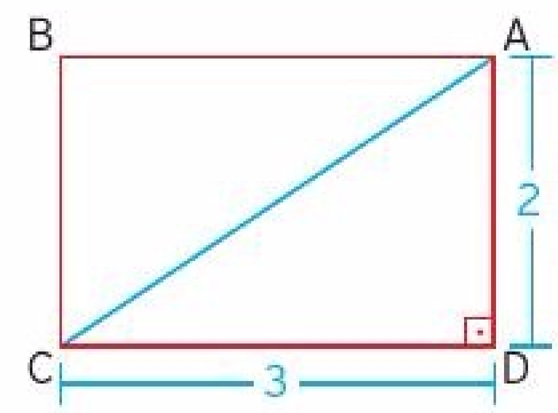
Quatro segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ de medidas **a**, **b**, **c** e **d**, respectivamente, tomadas na mesma unidade, são proporcionais, nessa ordem, quando:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \qquad \frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{CD}}} = \frac{\overline{\mathbf{EF}}}{\overline{\mathbf{GH}}}$$

Números irracionais e razões entre segmentos de reta

A razão entre dois segmentos de reta é sempre um número real positivo, pois é o quociente entre duas medidas tomadas na mesma unidade. Em algumas situações, obtemos um número real irracional.

Por exemplo, na figura abaixo, calculando a medida da diagonal $\overline{AC}$ pelo teorema de Pitágoras, temos:



Medidas indicadas em cm.

med $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

med $\overline{AC} = \sqrt{13}$ cm

E temos:

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\sqrt{13}\ \cancel{cm}}{3\ \cancel{cm}} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$ Número irracional.

Nesse caso, mesmo que se considere uma unidade menor do que o centímetro para medir $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$, med $\overline{AC}$ não será um número racional, será sempre irracional.

Os segmentos de reta $\overline{\mathbf{AC}}$ e $\overline{\mathbf{CD}}$ são **incomensuráveis**, pois a razão entre eles é um número irracional.

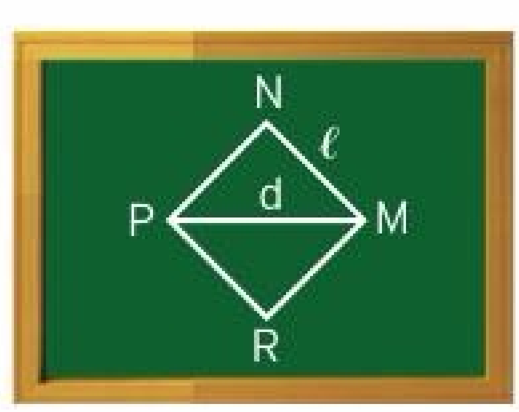
Ainda na mesma figura: $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \dfrac{3\ \cancel{cm}}{2\ \cancel{cm}} = \dfrac{3}{2}$ Número racional.

$\overline{\mathbf{CD}}$ e $\overline{\mathbf{DA}}$ são segmentos de reta **comensuráveis**, pois a razão entre eles é um número racional.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. A professora de Juliana desenhou um quadrado e pediu aos alunos que escrevessem uma propriedade envolvendo **d** e **ℓ**, que representam medidas na mesma unidade.



a) Anote o nome dos alunos que fizeram uma afirmação correta.

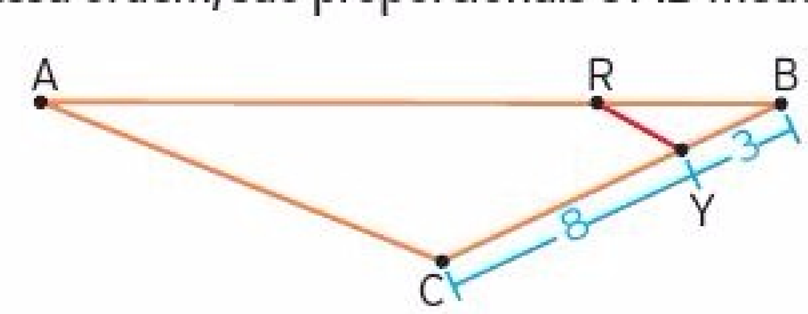
- Carlos: "$d^2 = 2\ell^2$". Carlos, João e Edu.
- João: "$d = \ell\sqrt{2}$".
- Laura: "$\overline{MP}$ e $\overline{MN}$ são segmentos de reta comensuráveis".
- Edu: "$\overline{MP}$ e $\overline{MN}$ são segmentos de reta incomensuráveis".

b) Descreva, indicando as etapas de modo resumido, uma forma de determinar a razão entre **d** e **ℓ**. Aplique e relação de Pitágoras e determine a razão $\dfrac{d}{\ell}$.

c) Troque suas anotações com um colega. Cada um resolve o exercício seguindo as etapas indicadas pelo colega.

d) Para finalizar, confiram se ambos encontraram a mesma resposta. Itens **b**, **c** e **d**: respostas pessoais.

11. Na figura, as medidas estão indicadas em centímetros. Os segmentos de reta $\overline{BR}$, $\overline{RA}$, $\overline{BY}$ e $\overline{YC}$, nessa ordem, são proporcionais e $\overline{AB}$ mede 22 cm.



a) Qual é a medida de $\overline{BR}$? 6 cm

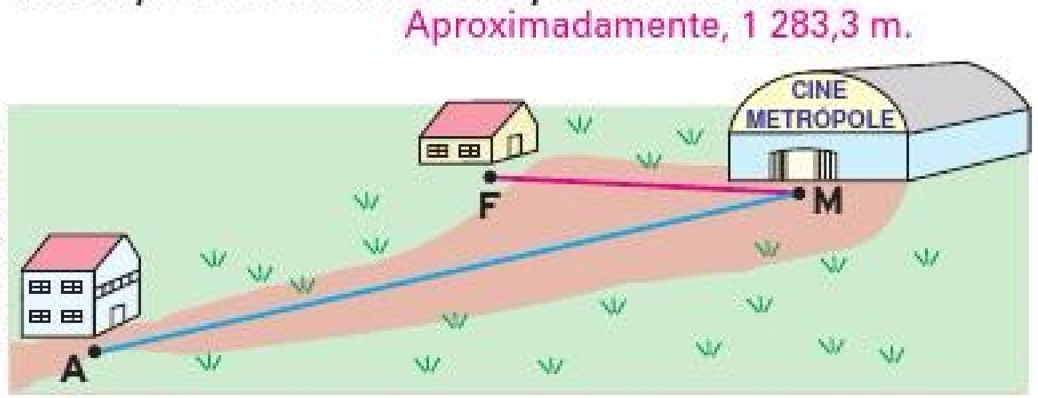
b) A que distância do ponto A está o ponto R? 16 cm

12. Os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{PD}$, $\overline{QE}$ são proporcionais, nessa ordem. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{QE}$ medem 21 cm, 24 cm e 3,6 dm, respectivamente. Determine a medida de $\overline{PD}$, em centímetros. 31,5 cm

Lembre-se: as medidas devem estar na mesma unidade.

13. Fábio e Anita moram próximos ao Cine Metrópole. Medindo em linha reta, a casa de Fábio (F) está a 550 m desse cinema. A razão entre as distâncias de F a M e de A a M, nessa ordem, é de 3 para 7. Qual é a distância entre a casa de Anita, assinalada com A, e o cinema?
Aproximadamente, 1 283,3 m.

FRANCISCO VILACHA



14. Faça uma tabela como esta. As medidas que nela constam são de retângulos desenhados por Alice.

Medida (cm)		Perímetro (cm)	Área (cm²)
Comprimento (cm)	Largura (cm)		
3	2	10	6
6	4	20	24
7,5	5	25	37,5

a) Calcule as razões $\frac{\text{perímetro}}{\text{largura}}$ para os retângulos construídos. Essas razões formam proporções? Se a resposta for afirmativa, escreva duas delas. Sim; $\frac{10}{2} = \frac{20}{4}$; $\frac{10}{2} = \frac{25}{5}$. Há outras respostas possíveis.

b) É possível formar proporções com as razões $\frac{\text{área}}{\text{largura}}$? Por quê? Não, porque elas são iguais.

Desafio

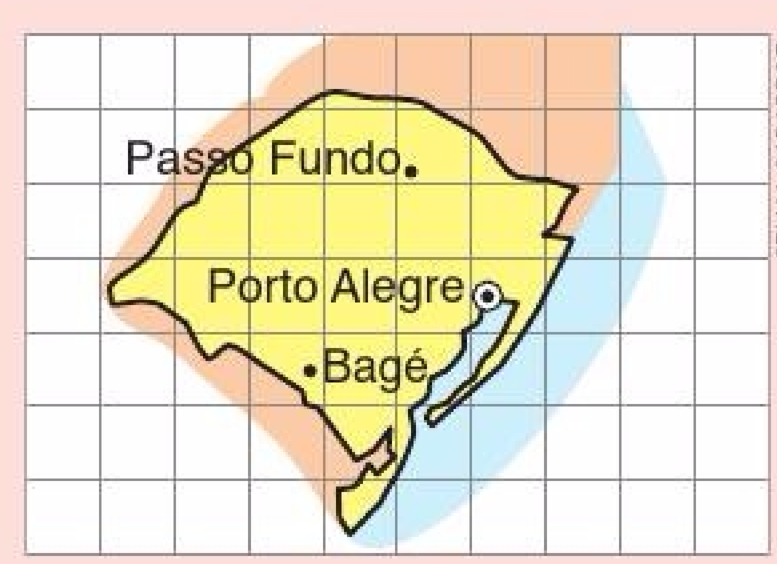
Se julgar oportuno, trabalhe novamente o conceito de escala. Incentive os alunos a observar e desenhar locais próximos a eles e depois comparar com outras mais distantes.

Ampliando mapas

Mapear o planeta em que vivemos é uma das preocupações mais antigas da humanidade.

A escala utilizada na produção de mapas é fundamental para indicar de forma precisa a localização de pontos geográficos terrestres representados.

Este é um croqui do estado do Rio Grande do Sul, com a sua capital e as cidades de Passo Fundo e Bagé destacadas.



SELMA CAPARROZ

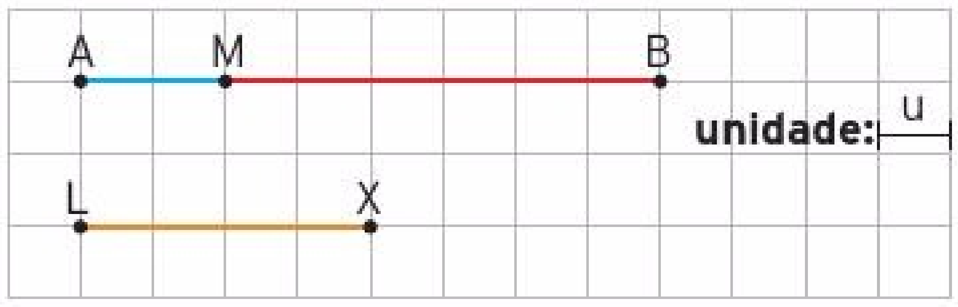
- Escolha uma razão e amplie esse croqui em um papel quadriculado. Resposta pessoal.
- No croqui dado, a distância entre Bagé e a capital do Rio Grande do Sul é de 1,3 cm. Qual é a distância entre essas cidades no croqui que foi desenhado? Resposta pessoal.
- No croqui dado, a distância entre Passo Fundo e Bagé é de 1,5 cm. Qual é a distância entre essas cidades no croqui que foi desenhado? Resposta pessoal.
- Se no croqui que foi desenhado tivesse uma cidade a 2,4 cm de Porto Alegre, qual seria essa distância no croqui dado? Resposta pessoal.
- Escolha o mapa de um estado ou de uma região do Brasil. Destaque algumas cidades e, em papel quadriculado, amplie ou reduza esse croqui. Resposta pessoal.

Certifique-se de que os alunos compreenderam os conceitos de razão e proporcionalidade entre segmentos de reta, pois eles serão fundamentais para o estudo da semelhança entre figuras. Não há necessidade de esgotar o assunto neste momento, pois ele será retomado ao longo das próximas unidades.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

15. Copie o desenho dos segmentos de reta $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ e $\overline{LX}$ em um papel quadriculado.



a) Considere o lado de um quadradinho como unidade de medida. Qual é a medida de cada segmento de reta? med $\overline{AM}$ = 2 u; med $\overline{MB}$ = 6 u; med $\overline{LX}$ = 4 u

b) Desenhe um segmento de reta XR, de modo que $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{LX}$ e $\overline{XR}$ sejam proporcionais, nessa ordem. Qual é a medida de $\overline{XR}$? 12 u

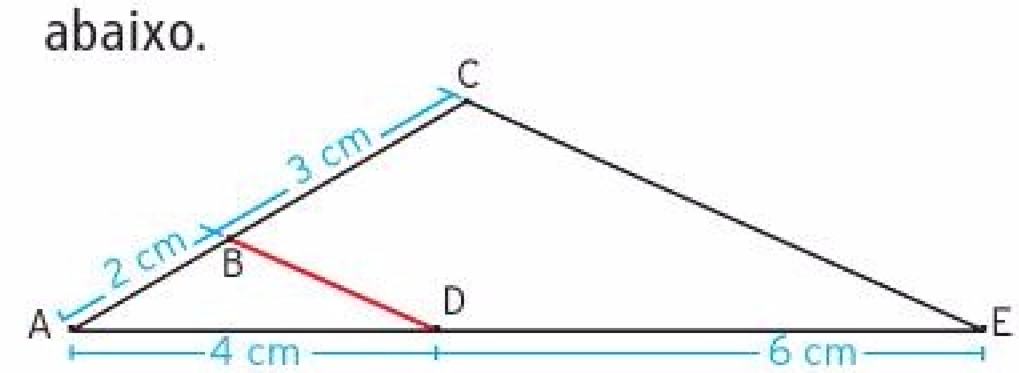
16. Na figura a seguir, os pontos **M**, **N** e **P** dividem $\overline{AB}$ em quatro segmentos de reta congruentes.

a) Identifique dois pares de segmentos de reta cuja razão seja $\frac{1}{2}$. $\overline{AM}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AN}$ e $\overline{AB}$.

b) Identifique dois pares de segmentos de reta cuja razão seja 1. $\overline{MN}$ e $\overline{PB}$; $\overline{AN}$ e $\overline{NB}$.

c) Identifique dois pares de segmentos de reta cuja razão seja $\frac{2}{3}$. $\overline{AN}$ e $\overline{AP}$; $\overline{MP}$ e $\overline{MB}$. Há outras respostas possíveis.

17. Observe os segmentos de reta indicados abaixo.



a) O que ocorre com os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, nessa ordem? São proporcionais.

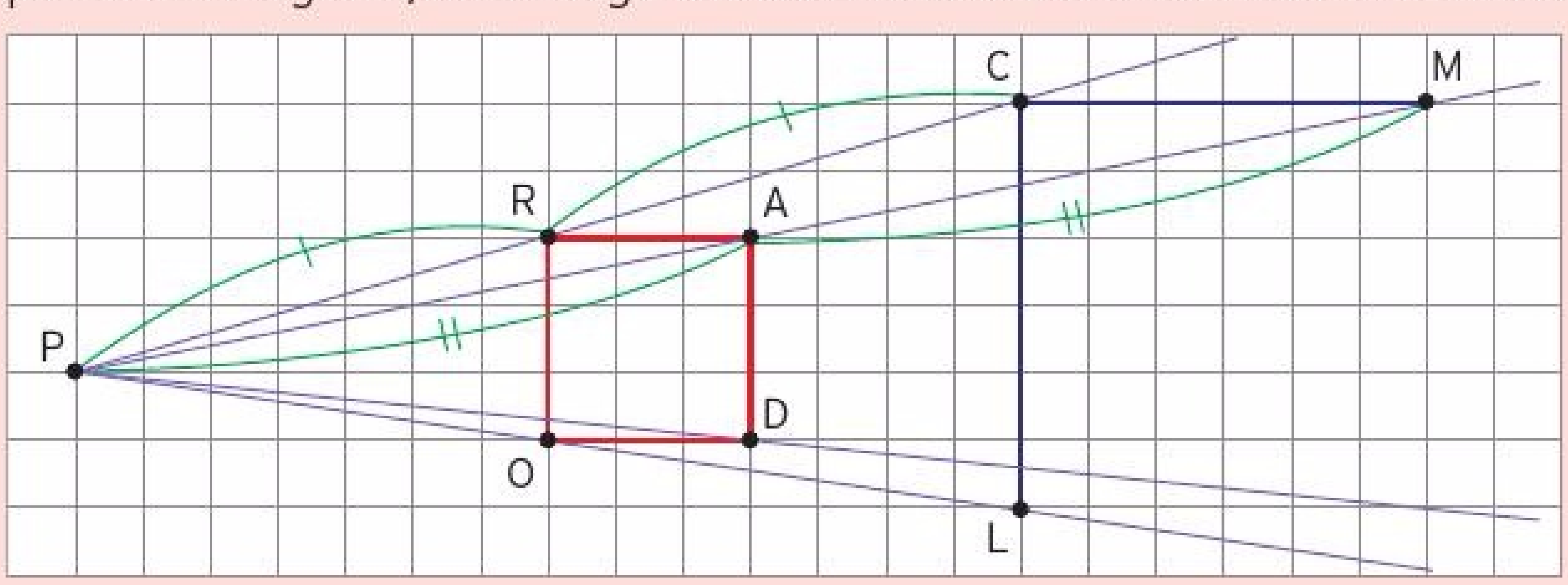
b) O ponto **B** divide o segmento de reta $\overline{AC}$ na razão de 2 para 3. O que se pode afirmar sobre o ponto **D** em relação ao segmento de reta $\overline{AE}$? Divide $\overline{AE}$ na razão $\frac{2}{3}$.

c) Meça os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{E}C$. O que se pode afirmar sobre $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$? São paralelos.

Desafio

Usando um foco para ampliar

Alice desenhou o quadrado RODA, traçou semirretas e marcou alguns pontos. Em seguida, mediu algumas distâncias e descobriu fatos interessantes.



Alice marcou os pontos **C**, **M** e **L** de modo que: med $\overline{PC}$ = 2 · med $\overline{PR}$; med $\overline{PM}$ = 2 · med $\overline{PA}$; med $\overline{PL}$ = 2 · med $\overline{PO}$. Agora, responda:

- Qual é a razão entre os segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{RA}$, nessa ordem? 2
- Os segmentos de reta $\overline{CM}$, $\overline{RA}$, $\overline{CL}$ e $\overline{RO}$, nessa ordem, são proporcionais? Sim.
- Como marcar um ponto **E** na semirreta $\overrightarrow{PD}$ de modo que CLEM seja uma ampliação de RODA? $\overline{DE} \equiv \overline{PD}$
- Como obter um quadrado maior do que CLEM que seja uma ampliação utilizando as semirretas já traçadas? med $\overline{PC}$ > 2 · med $\overline{PR}$.

3 Tales e retas paralelas

Feixe de retas paralelas

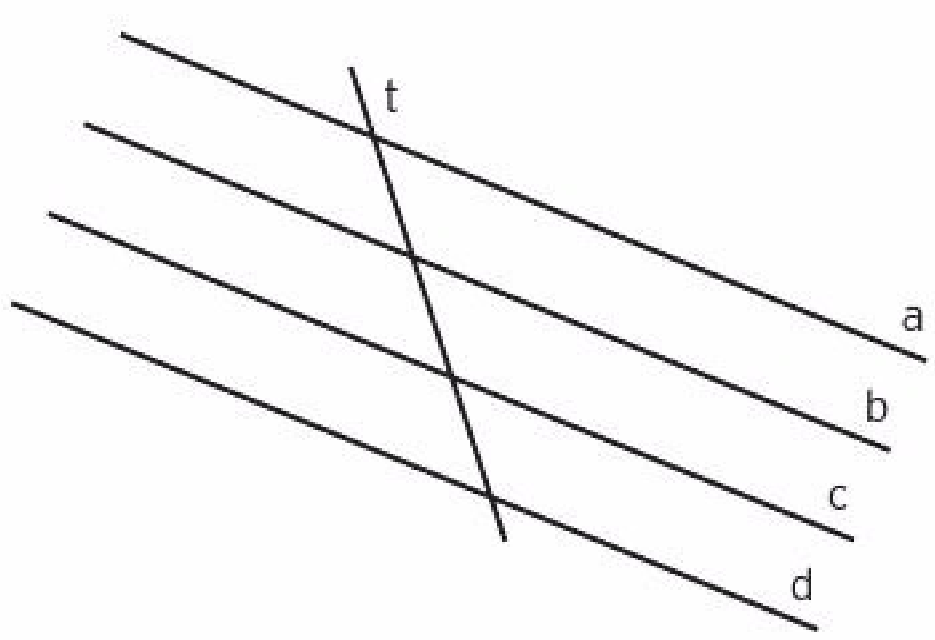
Certifique-se de que os alunos conseguem observar e compreender a proporcionalidade existente entre os segmentos de reta determinados por um feixe de retas paralelas sobre uma reta transversal. Esse fato é fundamental no estudo da semelhança de figuras. Faça-os perceber a aplicação da Álgebra na resolução dos problemas propostos.

Além de viajar pelo Egito, **Tales de Mileto** viajou, também, pela Babilônia, onde aprendeu muito sobre Astronomia. Suas descobertas e a forma como organizou e transmitiu seus conhecimentos foram de fundamental importância para o desenvolvimento das ciências.

As propriedades das retas paralelas cortadas por transversais, por exemplo, estão presentes em muitos dos estudos e das descobertas feitas por Tales. Os resultados de seus trabalhos têm múltiplas aplicações e por isso vamos aprender um pouco sobre eles iniciando pela análise sobre feixes de retas paralelas.

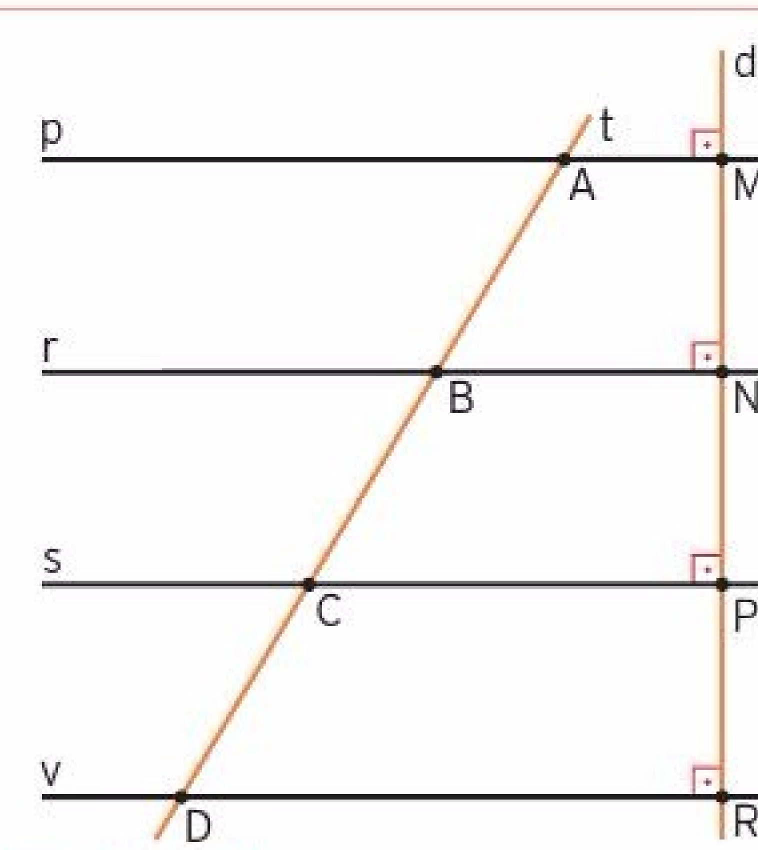
Na figura, temos quatro retas **a**, **b**, **c** e **d**, paralelas entre si. Elas formam um **feixe de retas paralelas**.

Ainda nessa figura, a reta **t** intercepta todas as retas do feixe de retas paralelas.



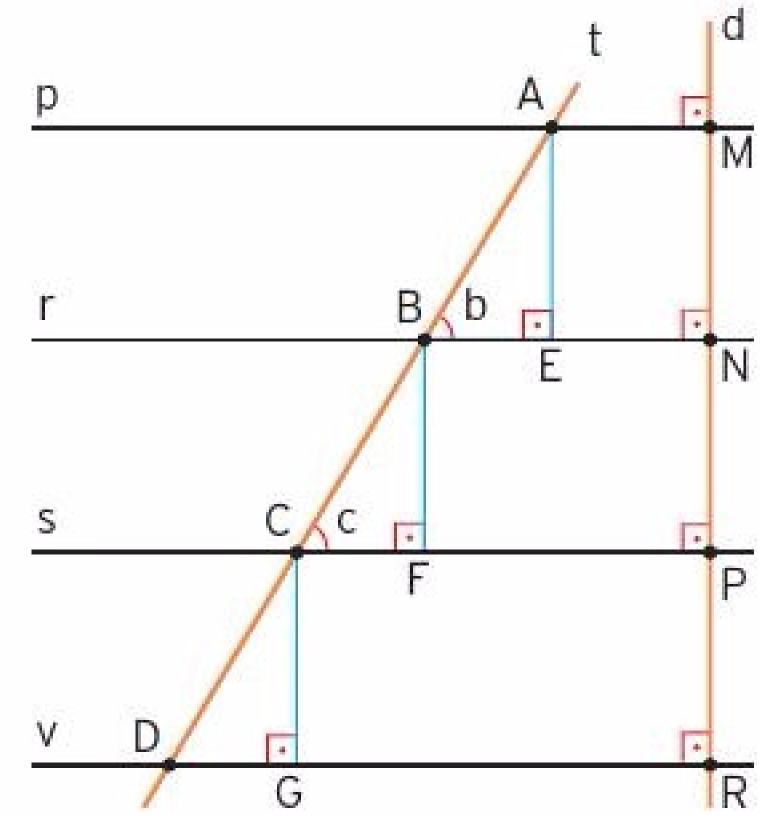
Para refletir e responder

Na figura ao lado foram destacados os pontos **M**, **N**, **P** e **R** em uma reta **d** transversal a um feixe de retas paralelas, perpendicular a elas e de modo que med $\overline{MN}$ = med $\overline{NP}$ = med $\overline{PR}$. Nessa situação, as retas **p**, **r**, **s** e **v** estão igualmente espaçadas entre si.



- Compare os comprimentos dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. O que se pode afirmar sobre eles? Eles têm medidas iguais.

Na figura ao lado temos um feixe de retas paralelas igualmente espaçadas e uma reta **t**, qualquer, transversal às retas do feixe.



Vamos demonstrar que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes.

distâncias iguais ———— $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$ (L)

$\hat{E} \equiv \hat{F}$ (retos) (A)

p // r, transversal **t** ———— b = c (correspondentes) (A_o)

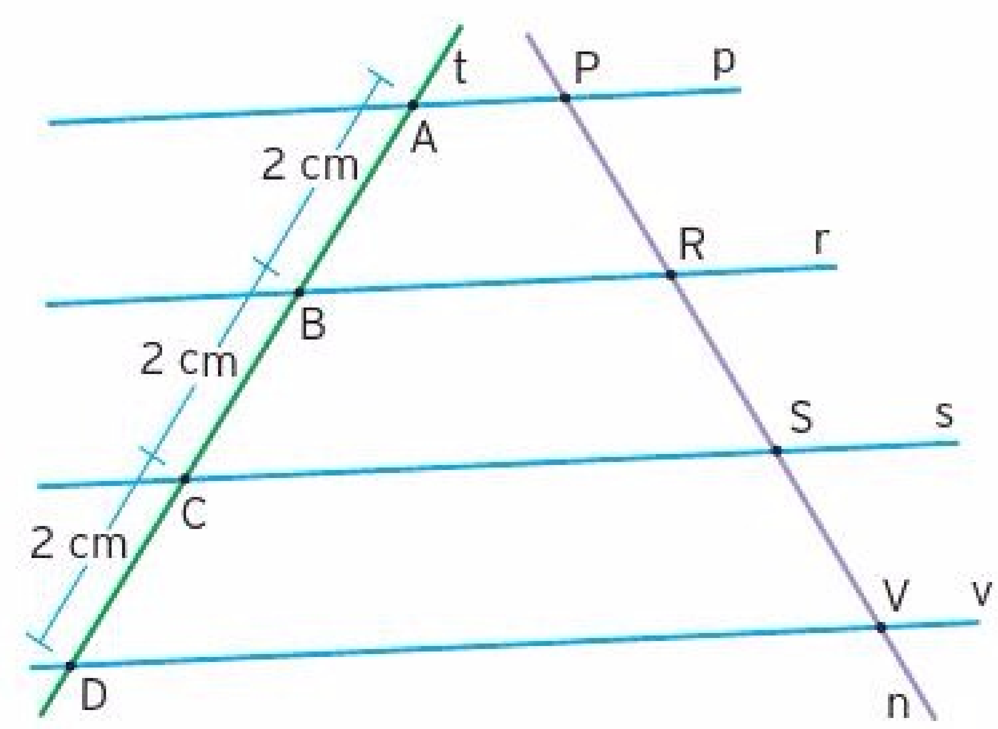
Temos $\triangle ABE \equiv \triangle BCF$ ———— $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$

Do mesmo modo, demonstra-se que $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.

Propriedade

Um feixe de retas paralelas igualmente espaçadas determina sobre uma transversal qualquer segmentos de reta congruentes.

Este feixe de retas paralelas determina sobre a transversal **t** segmentos de reta congruentes.

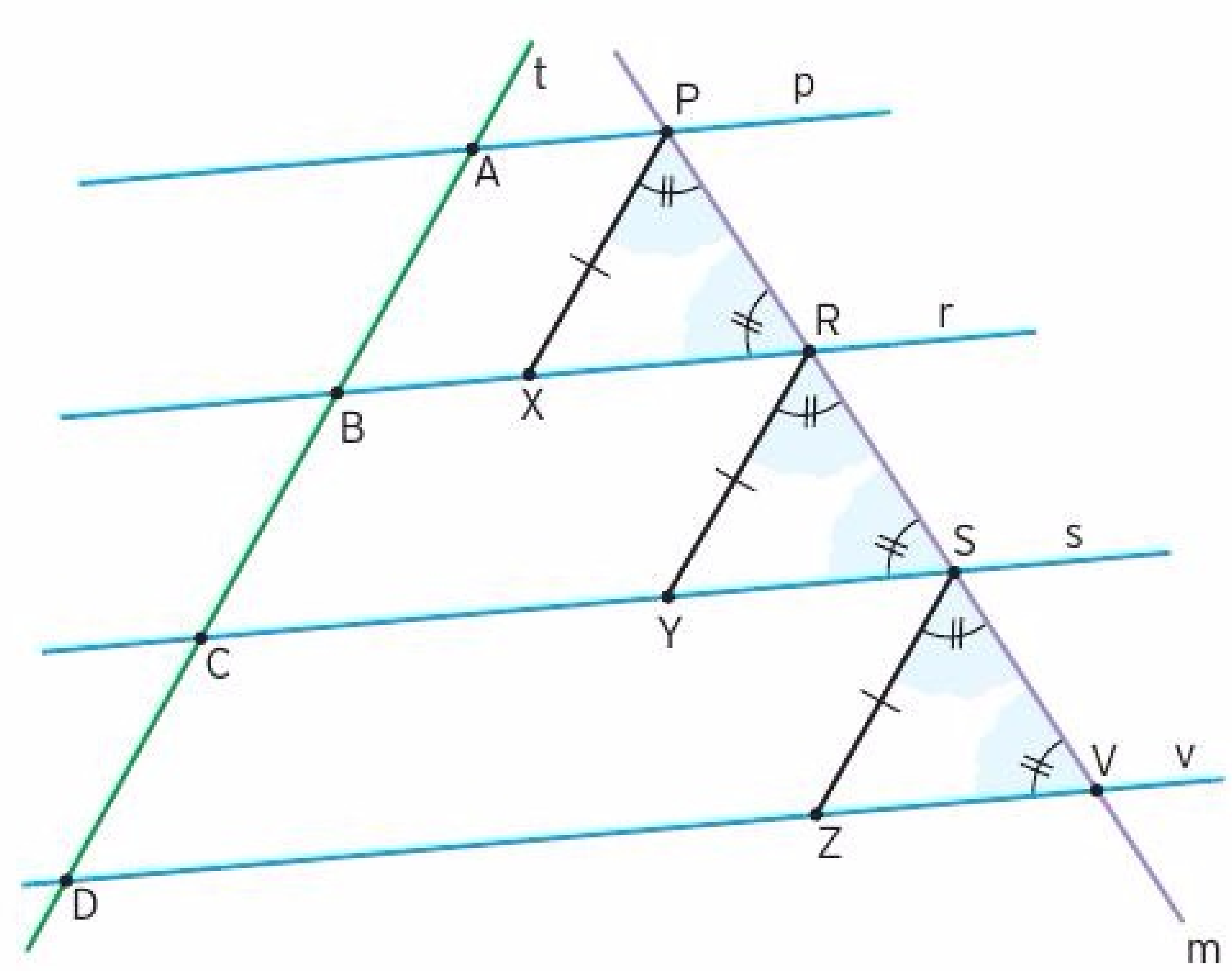


É possível demonstrar que na situação acima as retas paralelas são igualmente espaçadas e que os segmentos de reta determinados nas demais transversais também serão congruentes.

Vamos demonstrar esse fato para os segmentos de reta $\overline{PR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SV}$ traçando $\overline{PX}$ // t, $\overline{RY}$ // t e $\overline{SZ}$ // t, e sabendo que $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$.

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AP} \ // \ \overleftrightarrow{BX} \\ \overleftrightarrow{AB} \ // \ \overline{PX}\end{array}\right]$ PABX é um paralelogramo $\rightarrow$ $\overline{AB} \equiv \overline{PX}$

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{BR} \ // \ \overleftrightarrow{CY} \\ \overleftrightarrow{BC} \ // \ \overline{RY}\end{array}\right]$ RBCY é um paralelogramo $\rightarrow$ $\overline{BC} \equiv \overline{RY}$



Observando os triângulos PXR e RYS, como $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, temos:

$$\left.\begin{array}{lr} \overline{PX} \equiv \overline{RY} & \text{(L)} \\ X\hat{P}R \equiv Y\hat{R}S \text{ (correspondentes)} & \text{(A)} \\ P\hat{R}X \equiv R\hat{S}Y \text{ (correspondentes)} & (A_o) \end{array}\right] \quad \underbrace{\triangle PXR \equiv \triangle RYS}_{\displaystyle \overline{PR} \equiv \overline{RS}}$$

Do mesmo modo, demonstra-se que:

$$\triangle RYS \equiv \triangle SZV \text{ ——— } \overline{RS} \equiv \overline{SV}$$

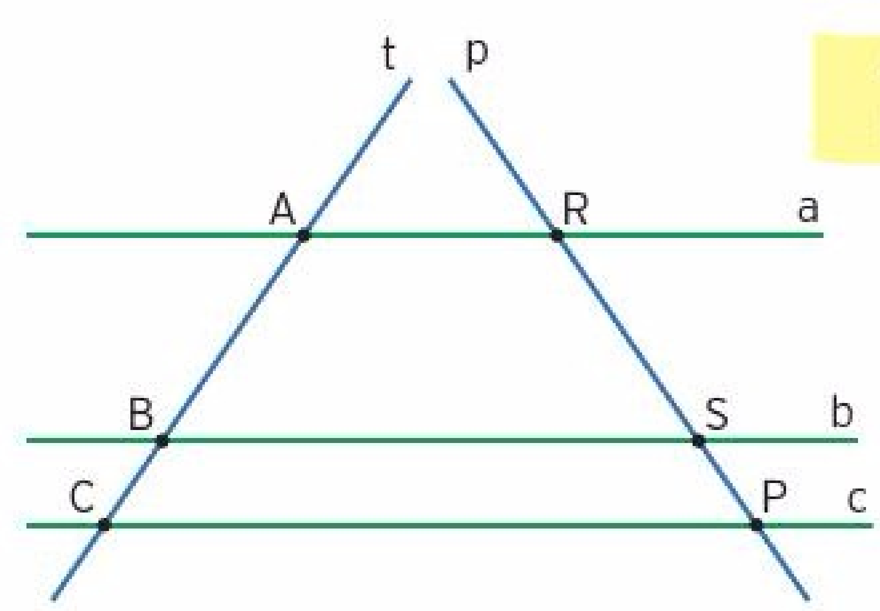
Portanto, $\overline{PR} \equiv \overline{RS} \equiv \overline{SV}$.

É possível demonstrar a propriedade:

> Um feixe de retas paralelas que determina segmentos de reta congruentes sobre uma reta transversal determinará segmentos de reta congruentes em qualquer outra reta transversal a esse feixe.

Teorema de Tales

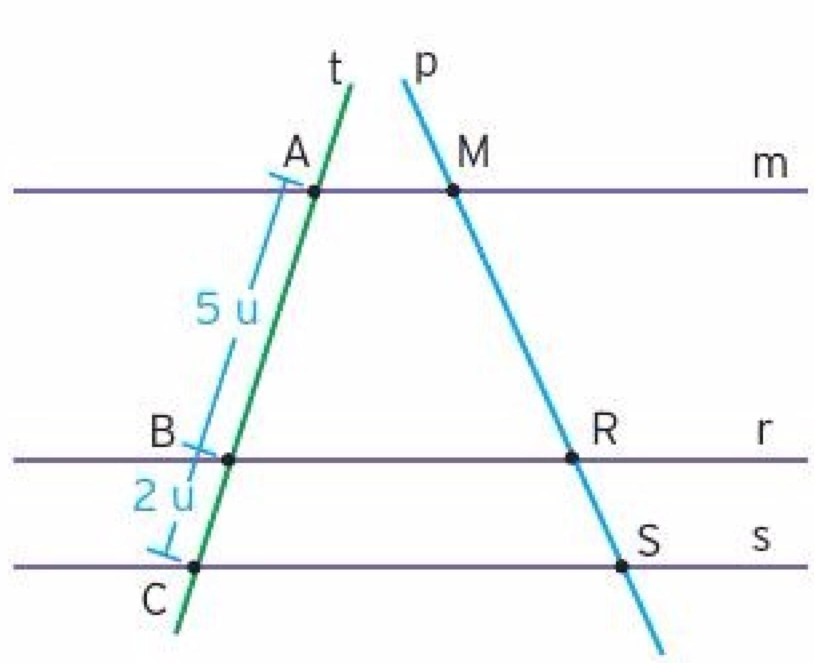
Observe a dúvida dos alunos.



a // b
b // c

Vamos demonstrar que, em casos como esse, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$ são segmentos de reta proporcionais, nessa ordem, ou seja, $\dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = \dfrac{\mathbf{RS}}{\mathbf{SP}}$.

Nesta figura, **m**, **r** e **s** formam um feixe de retas paralelas e **t** e **p** são retas transversais. Vamos supor que, medindo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em uma unidade **u**, tenhamos med $\overline{AB} = 5$ u e med $\overline{BC} = 2$ u. Assim, a razão entre esses segmentos de reta é $\dfrac{5}{2}$.

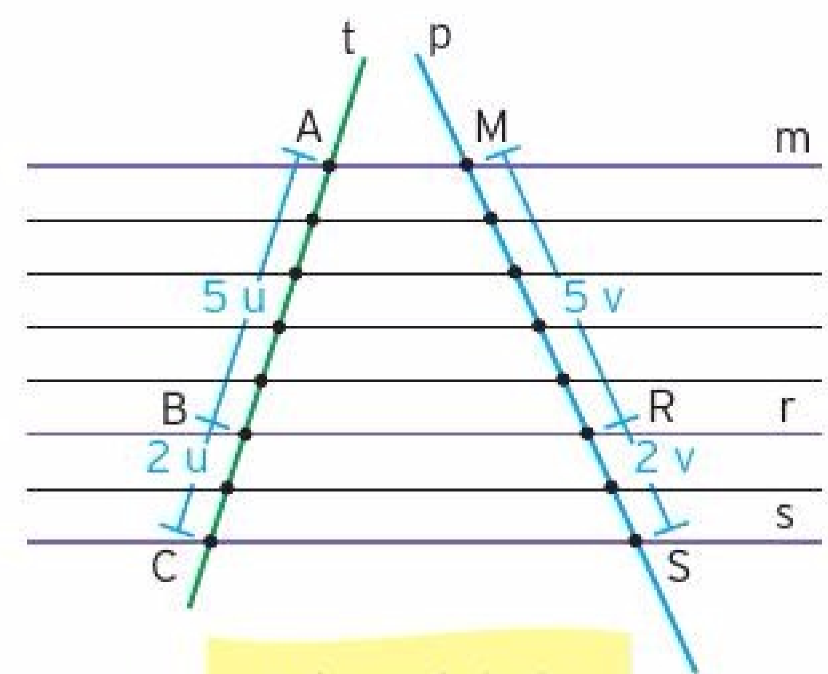


u é a unidade de medida na reta **t**.

Vamos demonstrar que nessa situação devemos ter também $\frac{\overline{MR}}{\overline{RS}} = \frac{5}{2}$.

Para isso, dividimos $\overline{AB}$ em 5 partes e $\overline{BC}$ em 2 partes de medida **u**.

Pelos pontos obtidos traçamos retas paralelas a **m**, que dividem $\overline{MR}$ em 5 partes e $\overline{RS}$ em 2, correspondentes às partes em que foram divididos os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.



v é a unidade de medida na reta **p**.

Como os segmentos de reta resultantes da divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, os segmentos de reta correspondentes em **p** também são congruentes pela propriedade já demonstrada. Portanto, considerando **v** a medida de cada uma dessas partes, temos med $\overline{MR} = 5\ \mathbf{v}$ e med $\overline{RS} = 2\ \mathbf{v}$.

Calculamos as razões entre esses segmentos de reta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{5\ \mathbf{u}}{2\ \mathbf{u}} = \dfrac{5}{2} \\[2em] \dfrac{\overline{MR}}{\overline{RS}} = \dfrac{5\ \mathbf{v}}{2\ \mathbf{v}} = \dfrac{5}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \dfrac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \dfrac{\overline{\mathbf{MR}}}{\overline{\mathbf{RS}}}$$

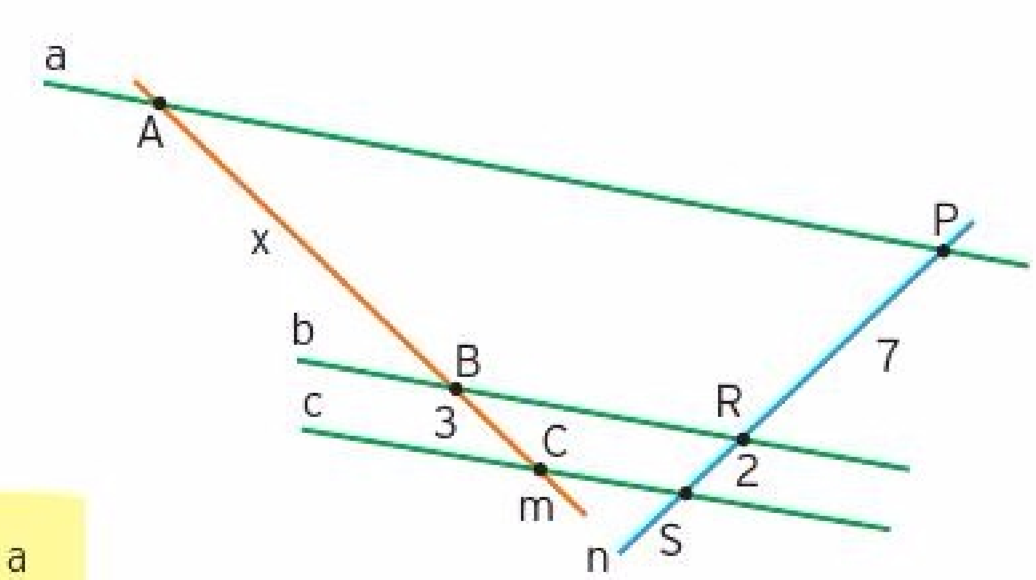
Se achar necessário, comente com os alunos que em níveis escolares mais avançados demonstra-se o teorema de Tales em casos de segmentos de reta incomensuráveis.

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MR}$ e $\overline{RS}$, nessa ordem, são segmentos de reta **proporcionais**.

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos de reta proporcionais.

Exemplo:

As retas **a**, **b** e **c** desta figura formam um feixe de retas paralelas e as medidas estão indicadas em centímetros. Vamos calcular a medida de $\overline{AB}$.



As retas **a**, **b** e **c** são paralelas entre si. Assim, pelo teorema de Tales podemos escrever:

x representa a medida de $\overline{AB}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{RS}} \longrightarrow \frac{x}{3} = \frac{7}{2} \longrightarrow 2 \cdot x = 3 \cdot 7$$

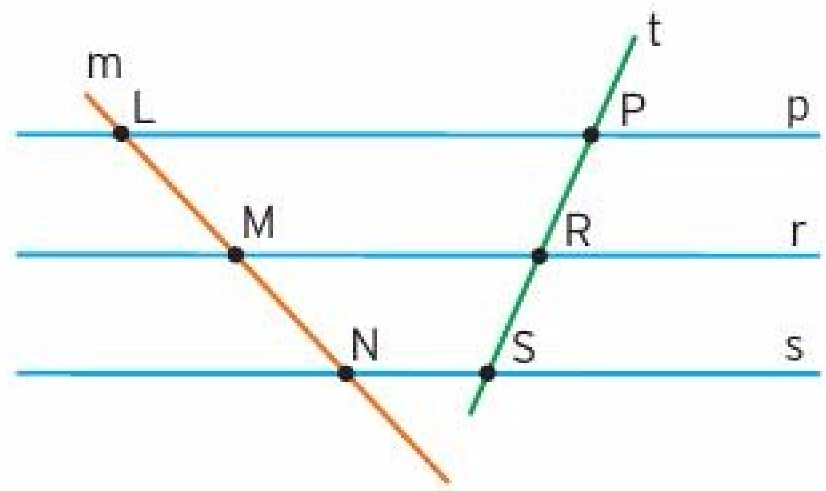
$$x = \frac{21}{2} = 10{,}5 \longrightarrow \mathbf{x = 10{,}5\ cm}$$

A medida de $\overline{AB}$ é 10,5 cm.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

18. Na figura, **p**, **r** e **s** formam um feixe de retas paralelas. Observe os segmentos de reta e copie as igualdades substituindo o ■ por um segmento de reta, de modo a obter proporções:



a) $\dfrac{\overline{LM}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{PR}}{■}$ $\overline{RS}$

b) $\dfrac{\overline{LN}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{PS}}{■}$ $\overline{PR}$

c) $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{RS}} = \dfrac{\overline{LN}}{■}$ $\overline{MN}$

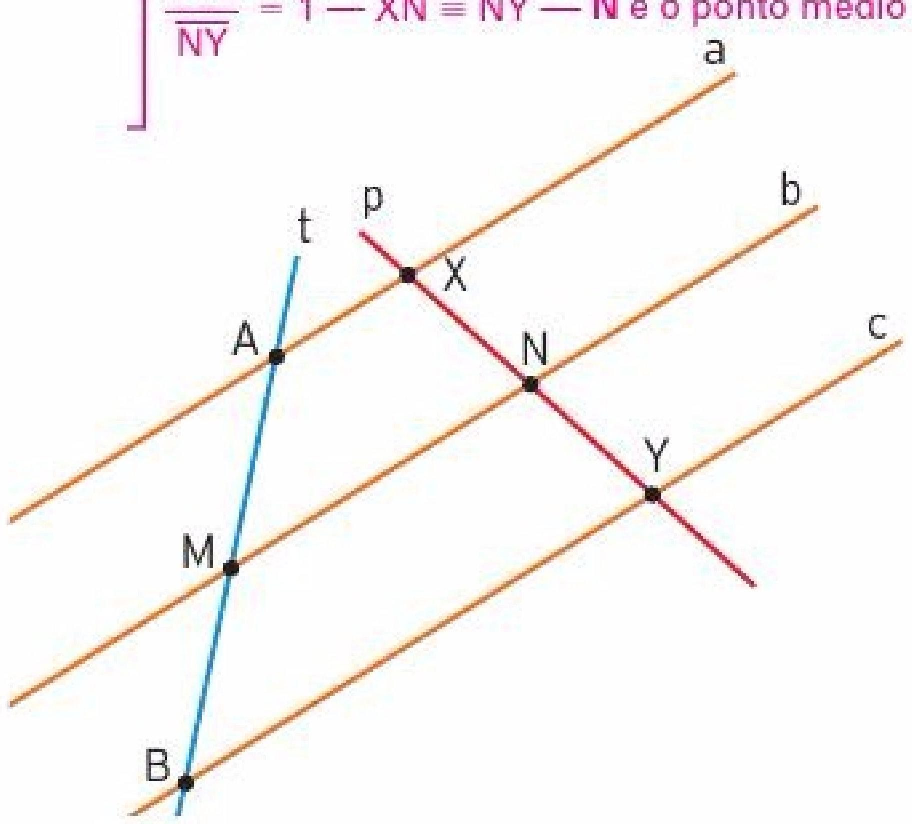
Use o teorema de Tales.

19. As retas **a**, **b** e **c** formam um feixe de retas paralelas e **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$.

$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{XN}}{\overline{NY}}$ (Teorema de Tales)

$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$

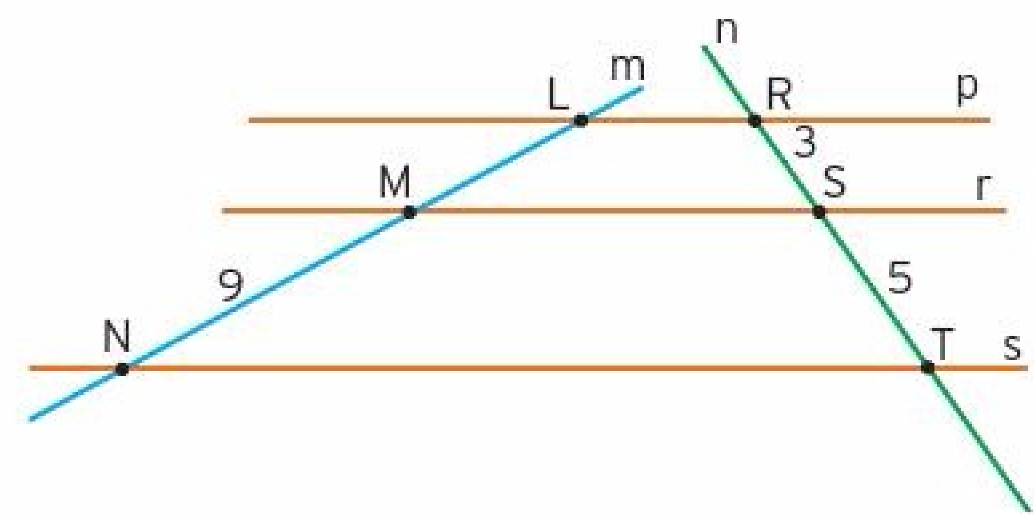
$\dfrac{\overline{XN}}{\overline{NY}} = 1$ — $\overline{XN} \equiv \overline{NY}$ — **N** é o ponto médio de $\overline{XY}$.



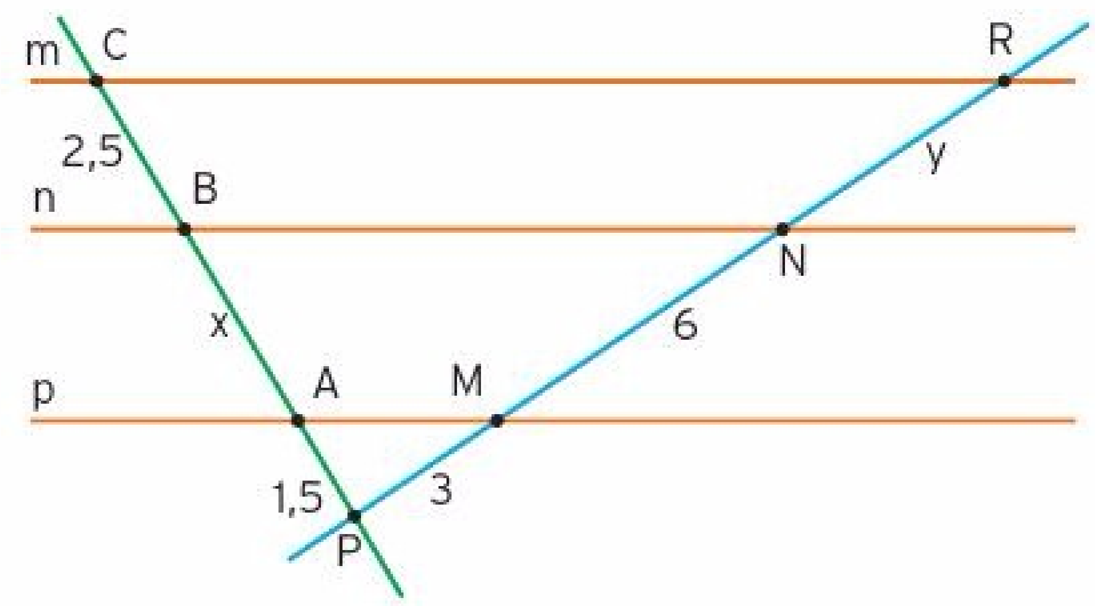
a) Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$? $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = 1$

b) Mostre que **N** é o ponto médio de $\overline{XY}$.

20. As retas **p**, **r** e **s** da figura a seguir formam um feixe de retas paralelas e as medidas estão indicadas em centímetros. Qual é a medida de $\overline{LM}$? 5,4 cm



21. Na figura, **m**, **n** e **p** formam um feixe de retas paralelas. As medidas estão indicadas em centímetros.

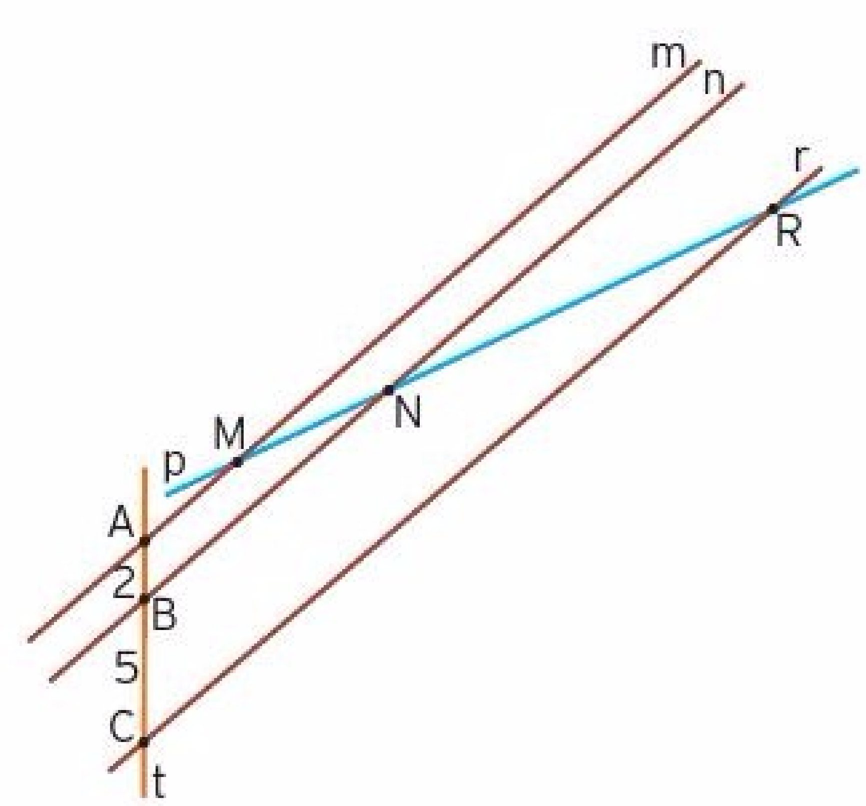


a) O que ocorre com os segmentos de reta $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$, nessa ordem? São proporcionais.

b) Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$, nessa ordem? $\frac{1}{2}$

c) Quais são os valores de **x** e de **y**? 3 cm; 5 cm.

22. Na figura, **m**, **n** e **r** formam um feixe de retas paralelas, as medidas estão indicadas em centímetros e a medida de $\overline{MR}$ é 21 cm.



a) Qual é a medida de $\overline{MN}$? 6 cm

b) Qual é a medida de $\overline{NR}$? 15 cm

Divisão de segmentos de reta em partes proporcionais

A divisão de um segmento de reta em partes proporcionais é uma situação comum em Desenho Geométrico.

Existem muitas aplicações do teorema de Tales, daí a importância de verificar se os alunos o compreenderam. Este tema é mais uma das aplicações práticas presentes no dia a dia de muitas pessoas. Por essa razão, é possível que eles se sintam motivados a explorá-lo.

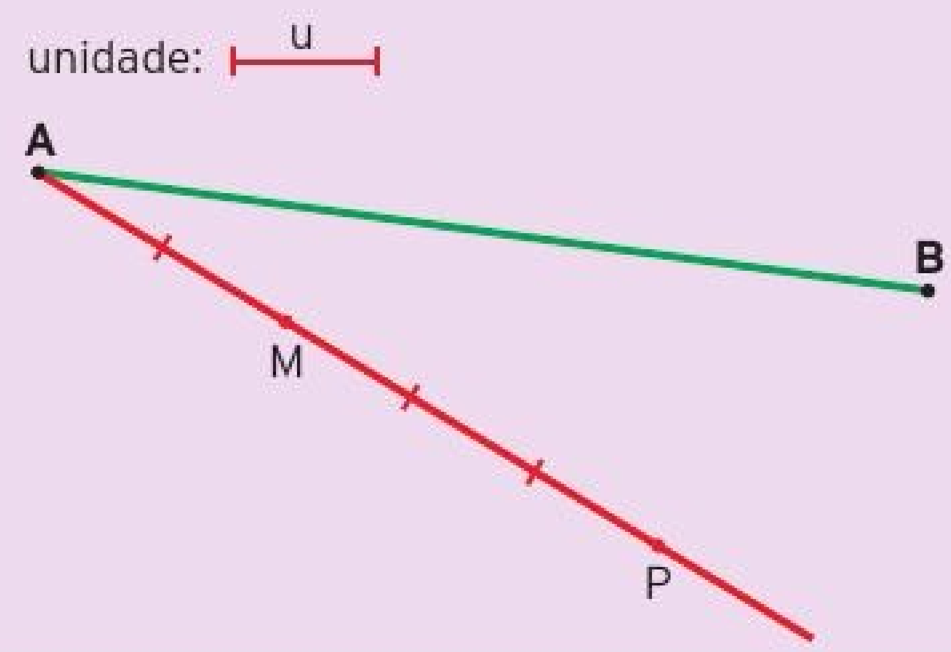
Veja um exemplo:

Desenhar um segmento de reta como AB e em seguida dividi-lo em partes proporcionais a 2 e 3.

Uma das maneiras de resolver esse problema envolve o teorema de Tales:

1º) Traçamos uma semirreta de origem **A** e que não contenha $\overline{AB}$.

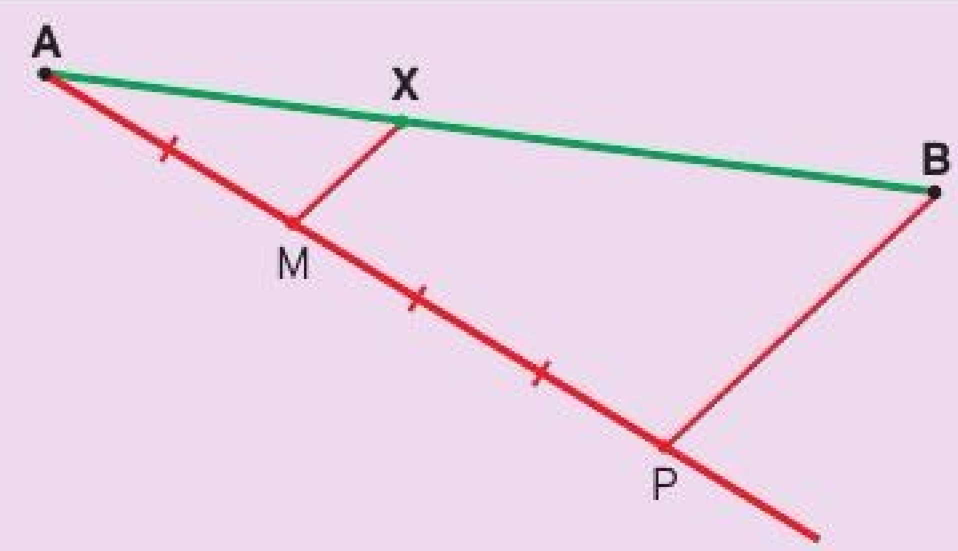
2º) Sobre a semirreta traçada, destacamos $\overline{AM}$ com 2 u e $\overline{MP}$ com 3 u.



3º) Destacamos $\overline{PB}$ e, pelo ponto **M**, traçamos uma reta paralela a $\overline{PB}$.

Pelo teorema de Tales, o ponto **X** divide $\overline{AB}$ em partes proporcionais a 2 e 3.

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{2}{3}$$



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

23. Desenhe um segmento de reta $\overline{MN}$ com 7 cm.

a) Divida-o em partes proporcionais a 3 e 5. Veja resposta no final do livro.

b) Identifique dois segmentos de reta cuja razão entre eles seja $\frac{7}{3}$. $\frac{\overline{MN}}{\overline{MA}} = \frac{7}{3}$

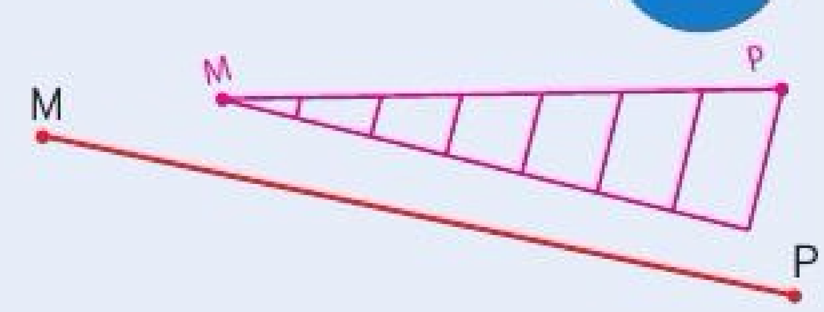
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

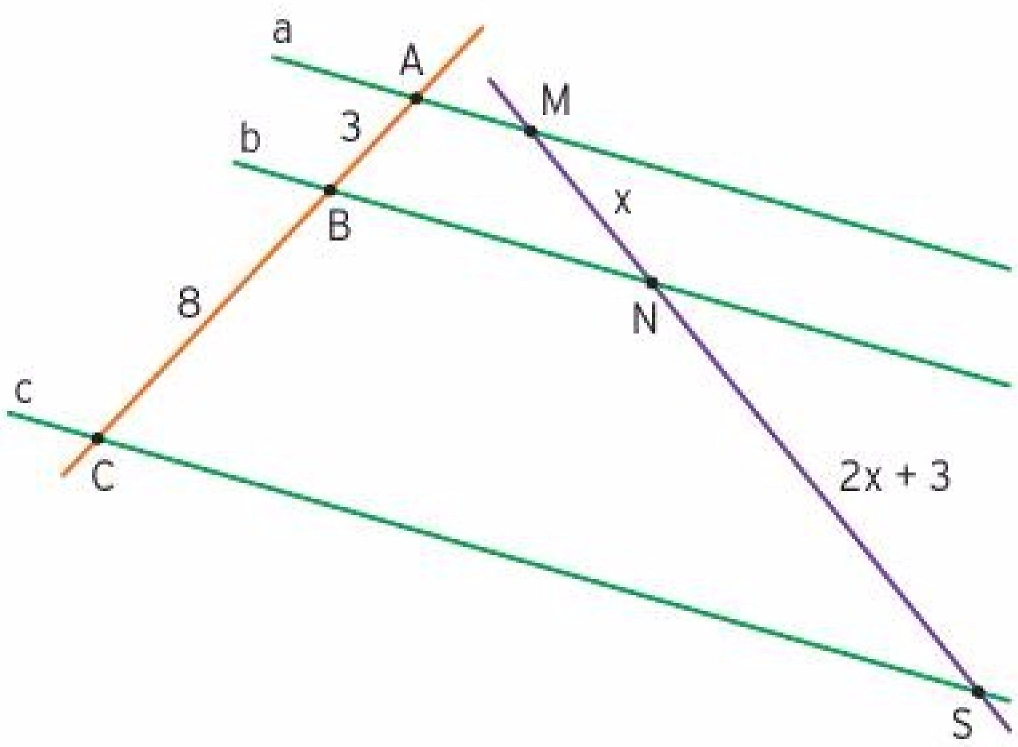
Desenhem um segmento de reta como o da figura.

Dividam-no em 7 partes iguais.

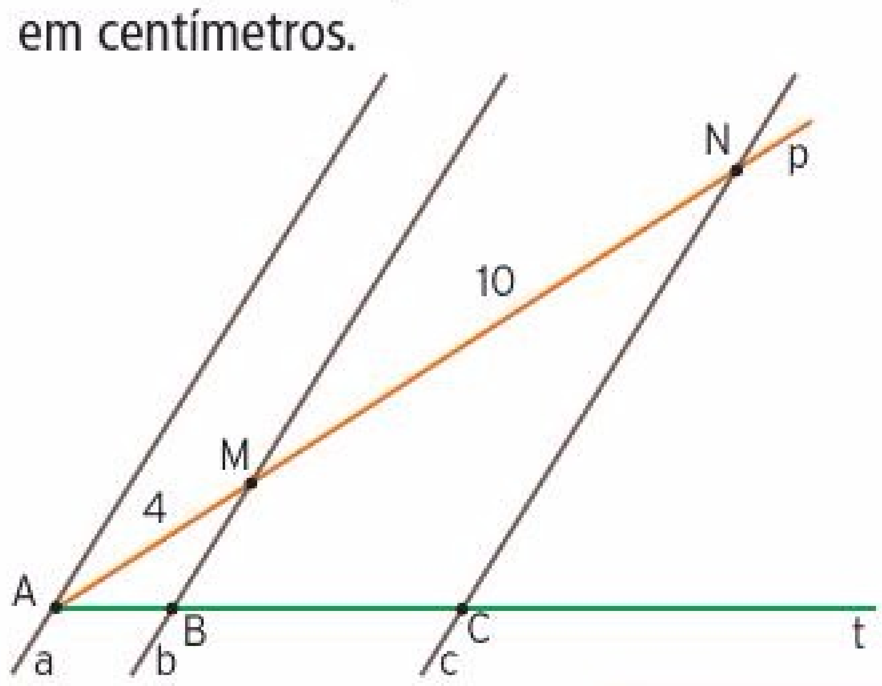


Fazer e aprender

24. Na figura, **a**, **b** e **c** são retas paralelas. Determine as medidas de $\overline{MN}$ e $\overline{NS}$ (as medidas estão indicadas em centímetros). 4,5 cm; 12 cm.



25. As retas **a**, **b** e **c** desta figura formam um feixe de retas paralelas, e as medidas indicadas estão em centímetros.



med $\overline{AB} = 2x - 3$
med $\overline{BC} = 4x - 5$

a) Qual é o valor de **x**? 2,5 cm

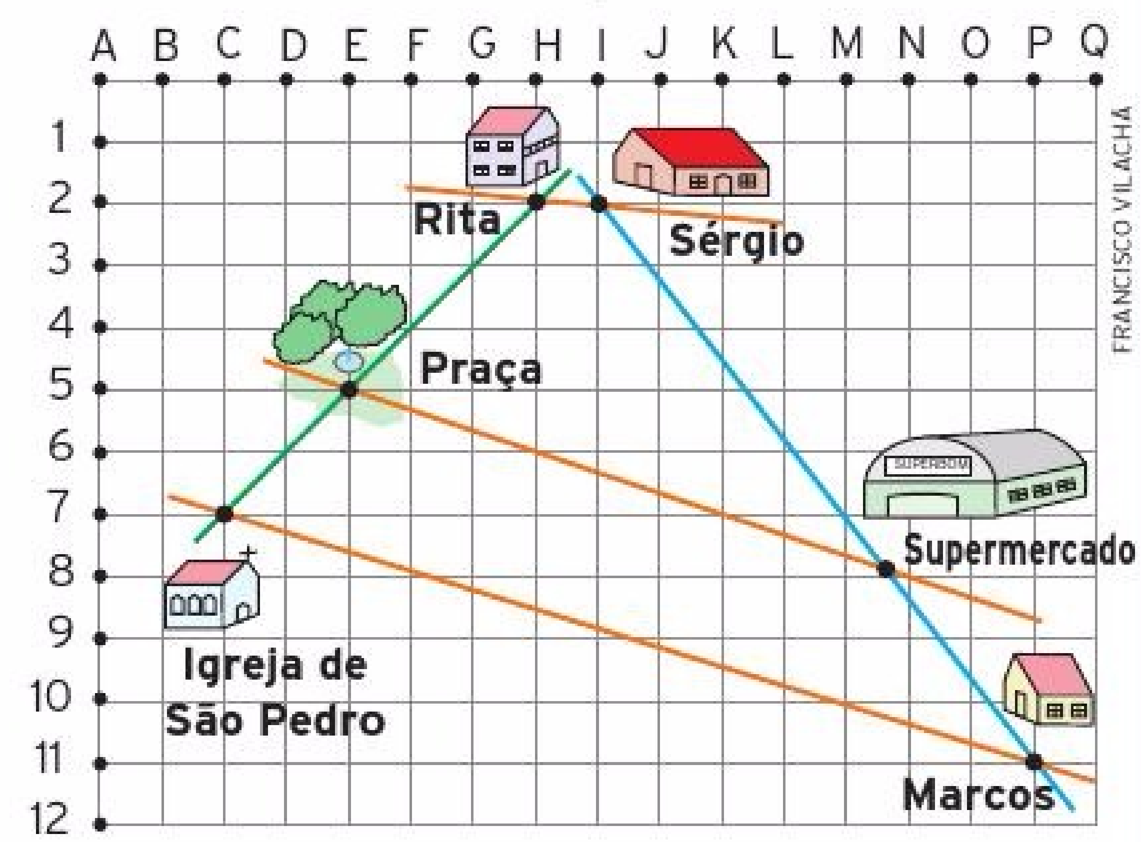
b) Quais são as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$? 2 cm; 5 cm.

c) Qual é a medida de $\overline{AC}$? 7 cm

d) Qual é o valor de $\frac{\overline{AN}}{\overline{MN}}$? E de $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$? $\frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}$.

e) O que se pode afirmar sobre os segmentos de reta $\overline{AN}$, $\overline{MN}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, nessa ordem?
$\overline{AN}$, $\overline{MN}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, nessa ordem, são proporcionais.

26. O esquema representa uma página do guia da cidade onde Rita mora. Ela, Sérgio e Marcos estão no 9º ano e estudam na mesma classe. Quando aprenderam o teorema de Tales, eles resolveram aplicá-lo no guia. Rita informou aos amigos que a distância da praça até a igreja de São Pedro é de 4 km. Sérgio acrescentou que a distância entre sua casa e a de Marcos é de 15 km e de sua casa até o supermercado, de 9 km.



a) A que distância da praça fica a casa de Rita? 6 km

b) A que distância da casa de Rita fica a igreja de São Pedro? 10 km

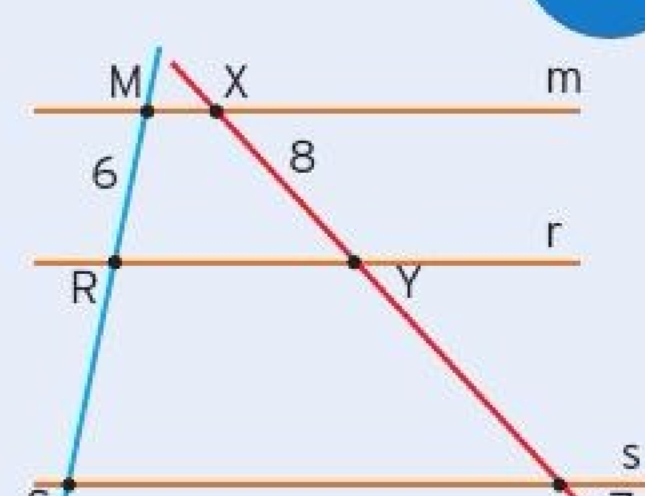
c) A que distância da casa de Marcos fica o supermercado? 6 km

d) Identifique a casa de cada um deles, a praça e a igreja de São Pedro, usando pares ordenados formados pela letra e pelo número mais próximos.
Casa de Rita: (H, 2); casa de Sérgio: (I, 2); casa de Marcos: (P, 11); praça: (E,5); igreja de São Pedro: (C, 7).

Troquem ideias e resolvam

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

Na figura, **m**, **r** e **s** formam um feixe de retas paralelas e o segmento de reta $\overline{MS}$ mede 15 cm. Quais são as medidas dos segmentos de reta $\overline{XZ}$ e $\overline{YZ}$? 20 cm; 12 cm.



4 Aplicações do teorema de Tales

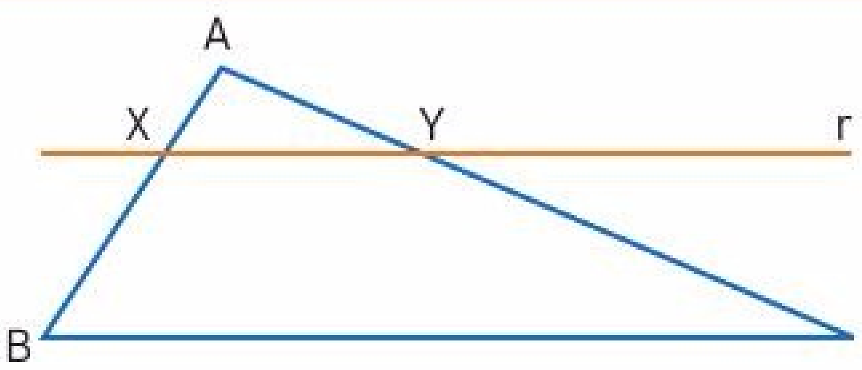
O teorema de Tales e os triângulos

As inúmeras aplicações do teorema de Tales, tanto em problemas teóricos como naqueles relacionados ao dia a dia, mostram a importância de estudá-lo com mais profundidade.

Uma das aplicações se vê em situações de determinação de distâncias sem medições diretas.

Para refletir e responder

Na representação ao lado, a reta **r** é paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC e intercepta os outros lados do $\triangle ABC$.



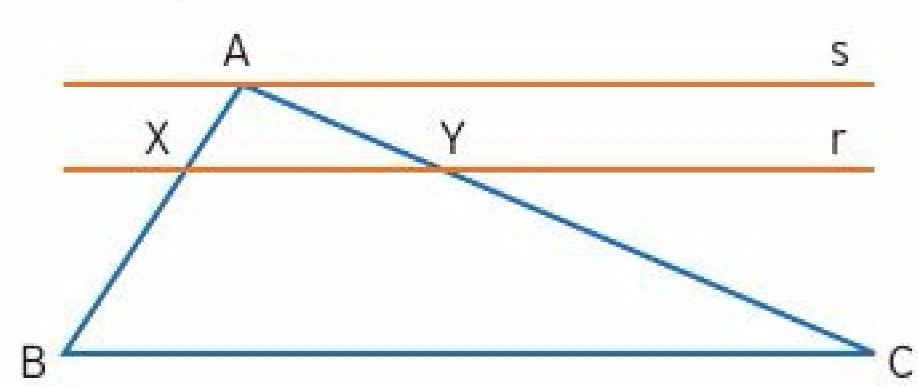
- Considere med $\overline{AX} = 2{,}5$ cm, med $\overline{XB} = 3$ cm e med $\overline{YC} = 4{,}8$ cm. Descreva, indicando as etapas, de modo resumido, como determinar a medida de $\overline{AY}$. Não precisa calcular.

Resposta pessoal.

Na situação acima a distância de **A** a **Y** pode ser calculada traçando-se uma reta paralela a $\overline{XY}$ e que passa pelo ponto **A**, vértice do triângulo **ABC**. Em seguida, aplica-se o teorema de Tales.

$\overline{BC}$, **r** e **s** ——— feixe de retas paralelas

$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ ——— retas transversais

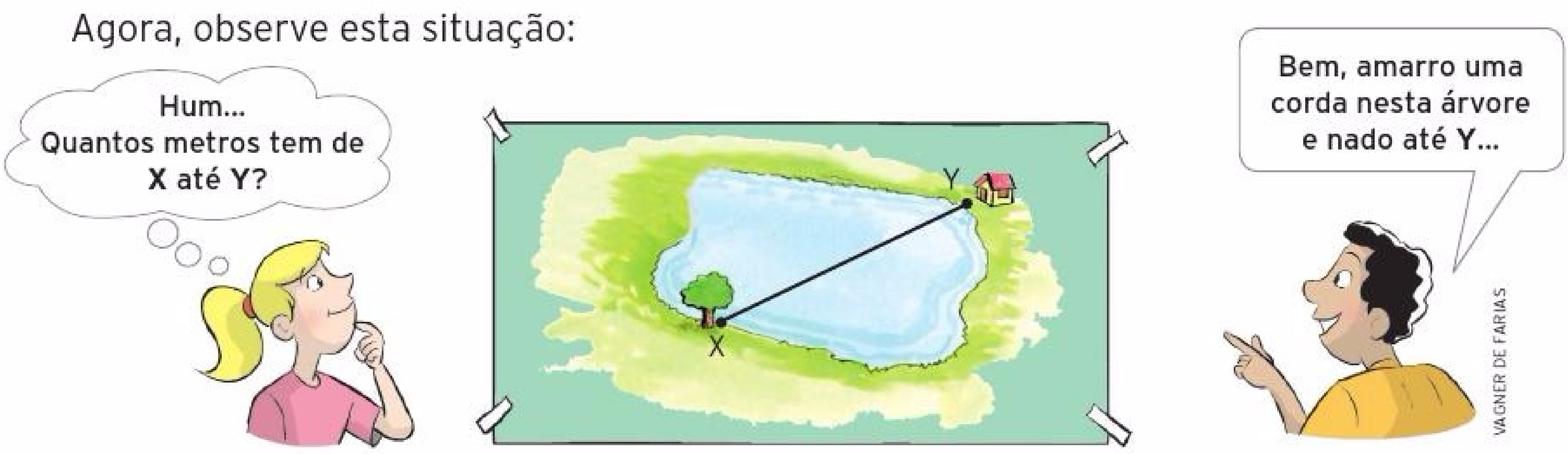


Pelo teorema de Tales, $\overline{AX}$, $\overline{XB}$, $\overline{AY}$ e $\overline{YC}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais: $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}$.

$$\frac{2{,}5}{3} = \frac{\text{med } \overline{AY}}{4{,}8} \text{ ——— med } \overline{AY} = \frac{2{,}5 \cdot 4{,}8}{3} \text{ ——— } \textbf{med } \overline{\textbf{AY}} \textbf{ = 4 cm}$$

A reta **r** pode ser traçada paralela a qualquer outro lado do triângulo ABC de modo a interceptar os lados ao qual não é paralela em pontos distintos. Nessa situação, os segmentos de reta determinados serão sempre proporcionais.

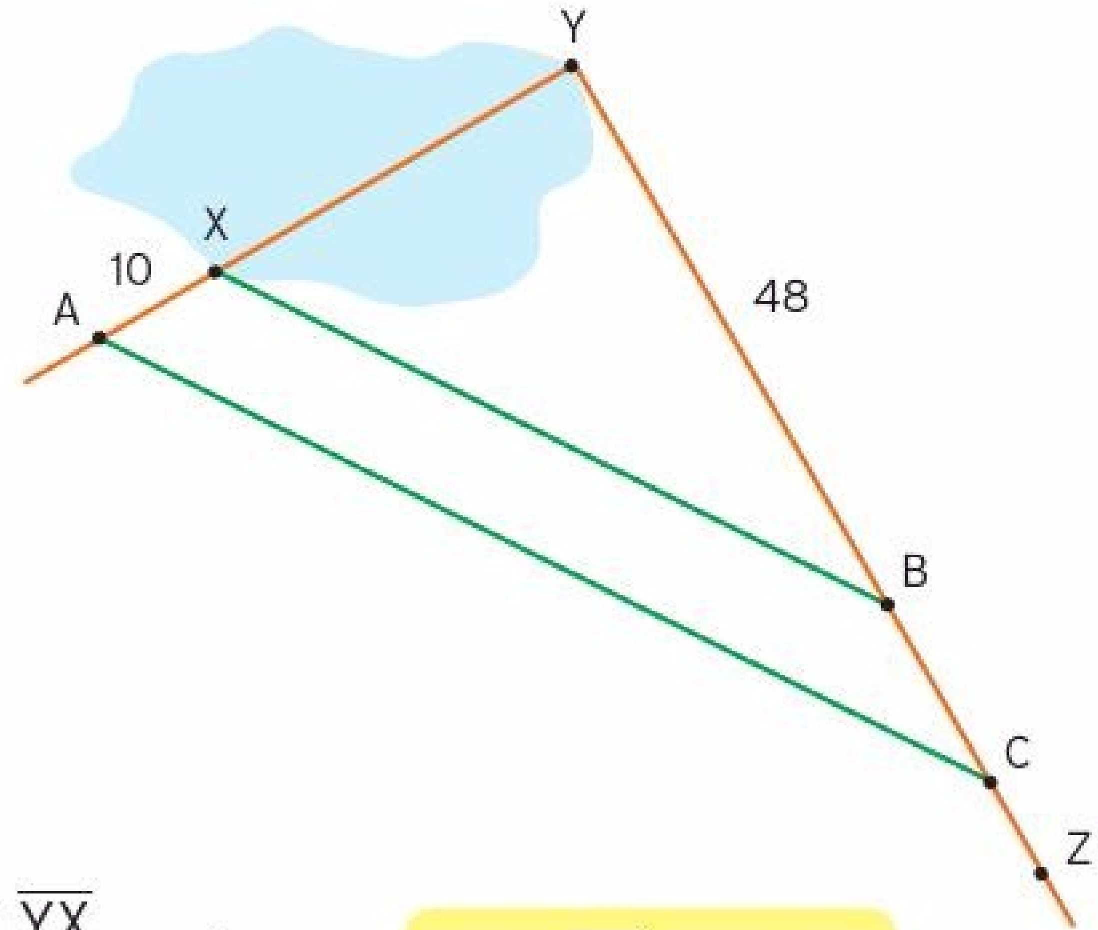
Agora, observe esta situação:



Será que existe alguma forma de obter a resposta sem ter de atravessar o lago de **X** até **Y**?

Essa situação também pode ser resolvida aplicando o teorema de Tales.

Traçamos as semirretas $\overrightarrow{YX}$ e $\overrightarrow{YZ}$ como sendo transversais. Em seguida, marcamos dois pontos, **A** em $\overrightarrow{YX}$ e **B** em $\overrightarrow{YZ}$, de modo que, por exemplo: med $\overline{YB}$ = 48 m e med $\overline{XA}$ = 10 m.



Desenhamos $\overline{XB}$ e traçamos $\overline{AC}$ paralela a $\overline{XB}$.

Para terminar, medimos $\overline{BC}$ e aplicamos o teorema de Tales. Se med $\overline{BC}$ for 12 m, temos:

$$\frac{\overline{YX}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{BC}} \;\text{———}\; \frac{\text{med } \overline{YX}}{10} = \frac{48}{12} \;\text{———}\; \frac{\text{med } \overline{YX}}{10} = 4 \;\text{———}\; \boxed{\text{med } \overline{YX} = 40 \text{ m}}$$

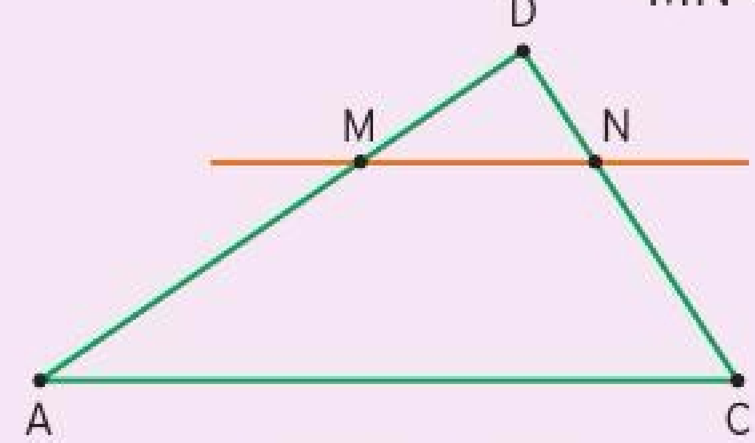
Portanto, de **X** até **Y** temos 40 m.

Para um triângulo qualquer é possível demonstrar:

Teorema de Tales nos triângulos

Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo e que encontra os outros dois lados em dois pontos determina, sobre esses lados, segmentos de reta proporcionais.

$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{AC}$



$$\frac{\overline{DM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NC}}$$

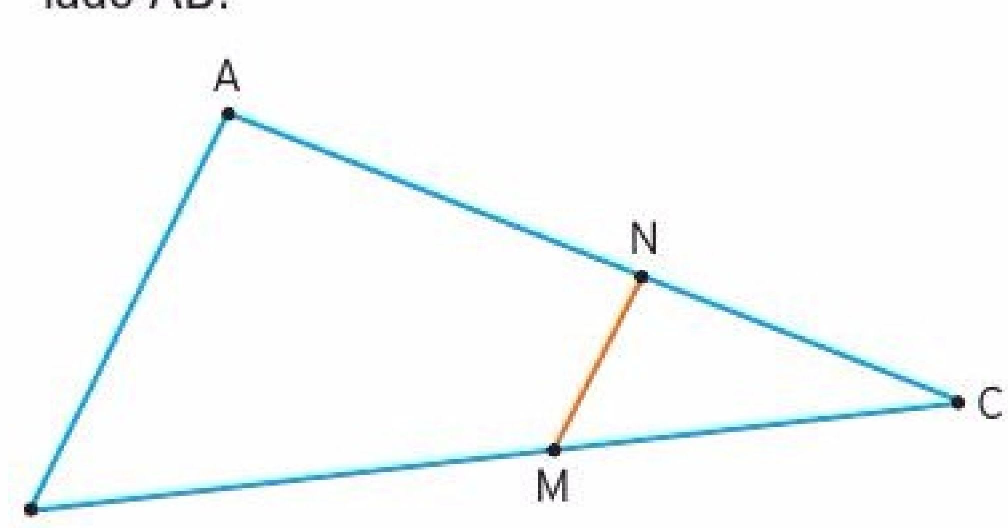
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Em que condições podemos utilizar o teorema de Tales em um triângulo? Quando se tem uma reta paralela a um dos lados do triângulo e que intercepta os outros dois.

28. Na situação do lago apresentada no texto, se med $\overline{BC}$ for 15 m, quanto medirá a distância de **X** a **Y**? 32 m

29. No triângulo ABC, a seguir, $\overline{MN}$ é paralela ao lado $\overline{AB}$.



a) Copie as igualdades substituindo o ■ por um segmento de reta, de modo que as sentenças se tornem verdadeiras:

$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{■}{\overline{MC}}$ $\overline{BM}$ $\qquad$ $\frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \frac{■}{■}$ $\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}$

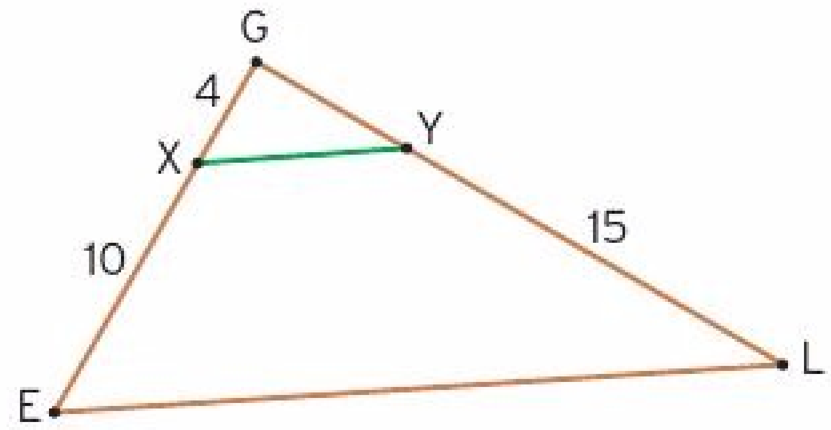
$\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \frac{■}{■}$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}$ $\qquad$ $\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} = \frac{■}{■}$ $\frac{\overline{NC}}{\overline{AC}}$

b) Substitua o ■ por números.

Se $\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{10}{8}$, então $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{■}{■}$. $\frac{10}{8}$ ou $\frac{5}{4}$

Se $\frac{\overline{AC}}{\overline{NC}} = \frac{9}{4}$, então $\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}} = \frac{■}{■}$. $\frac{9}{4}$

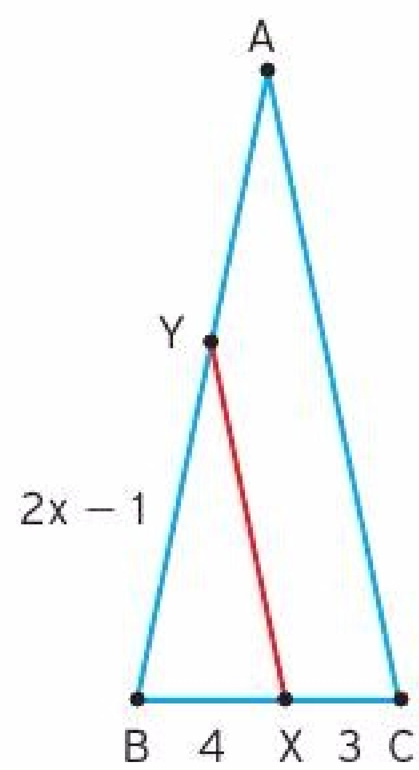
30. No triângulo ELG, $\overline{XY}$ é paralelo a $\overline{EL}$ e as medidas estão indicadas em centímetros. Determine a medida do segmento de reta $\overline{GY}$. 6 cm



31. Desenhe um segmento de reta com 11 cm. Depois, divida esse segmento em duas partes proporcionais, utilizando dois esquadros, de modo que a razão entre elas seja de 3 para 4.
Veja resposta no final do livro.

32. No triângulo ABC, $\overline{XY}$ é paralelo a $\overline{CA}$ e as medidas indicadas estão em centímetros. A expressão **3x** representa a medida de $\overline{AB}$.

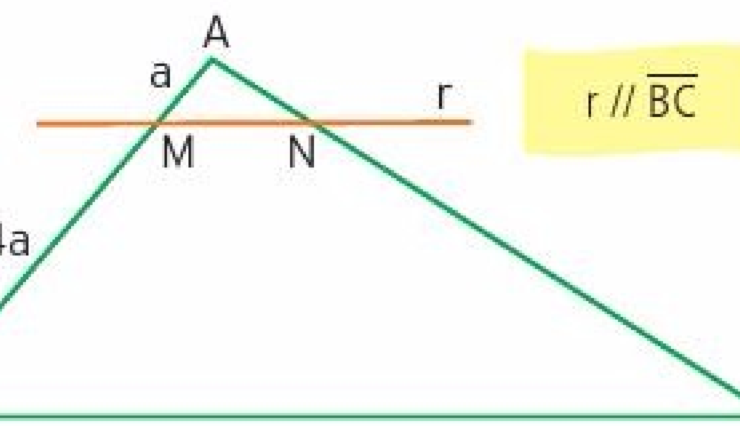
a) Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{XC}$, nessa ordem? $\frac{7}{3}$



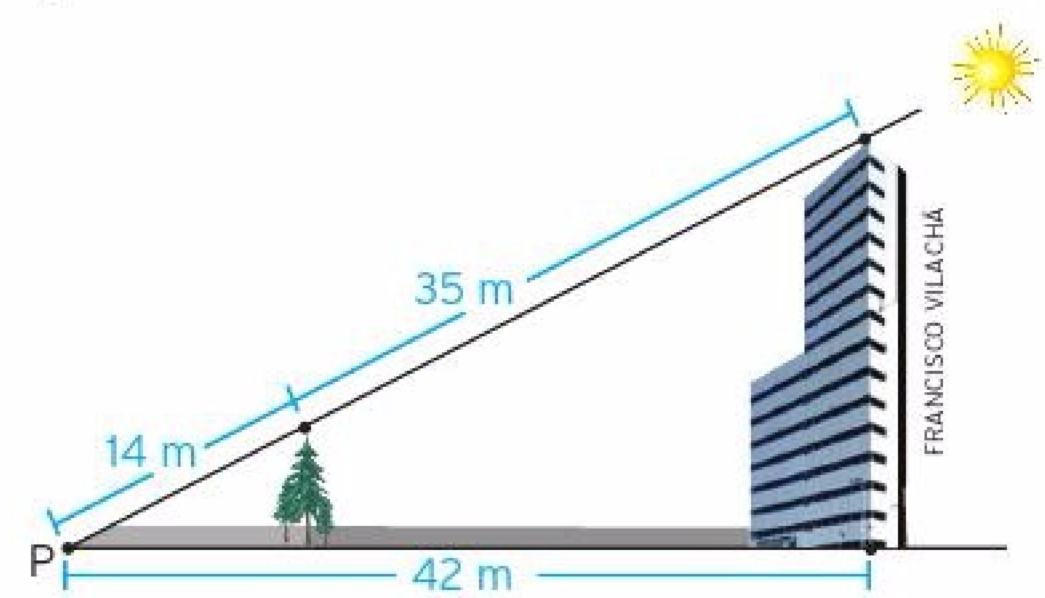
b) Qual é o valor de **x**? 3,5 cm

c) Quais são as medidas dos segmentos de reta $\overline{BY}$ e $\overline{YA}$? 6 cm; 4,5 cm

33. No triângulo ABC, considere med $\overline{AC} = 90$ m. Quanto mede $\overline{AN}$? 18 m



34. Em determinada hora do dia, a sombra de um edifício e a de uma árvore apresentam-se como mostra a figura: ambas chegam até o ponto **P**. A que distância do edifício está a árvore? 30 m

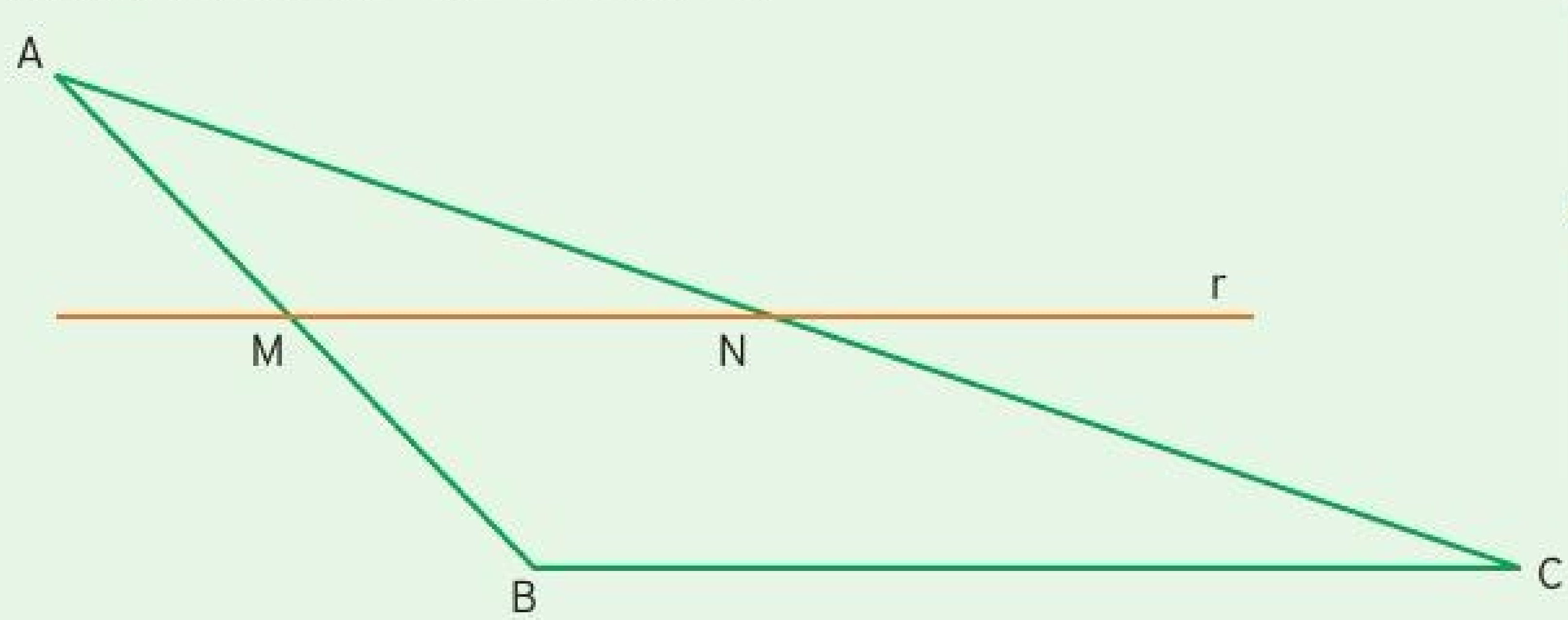


Investigue e explique

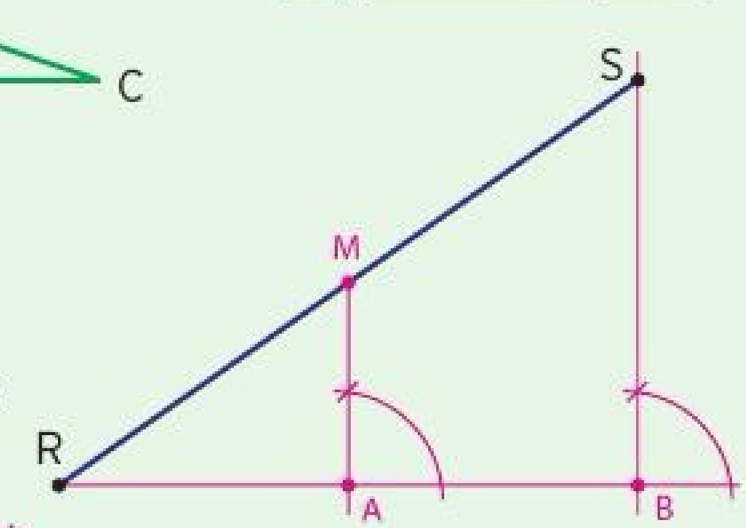
FAÇA NO CADERNO

Tales e o ponto médio de um segmento de reta

Na figura, a reta **r** é paralela a $\overline{BC}$.



- O que se pode afirmar sobre o ponto **N** em relação a $\overline{AC}$?
  N é o ponto médio de $\overline{AC}$.
- Desenhe no caderno um segmento de reta como $\overline{RS}$.
  Use régua e compasso, aplique o que observou na figura acima e determine o ponto médio do segmento de reta desenhado.



• Traçamos uma semirreta com origem em **R**, não contida em $\overleftrightarrow{RS}$. / • Marcamos **A** e **B** tais que med $\overline{RA}$ = med $\overline{AB}$. / • Traçamos a reta $\overleftrightarrow{BS}$. / • Traçamos por **A** uma reta paralela a $\overleftrightarrow{BS}$. / • O ponto médio de $\overline{RS}$ está na interseção dessa paralela com $\overline{RS}$.

Leitura

Harmonia e proporcionalidade caminham juntas

A harmonia entre as formas, as cores, os sons tem sido estudada, aperfeiçoada e utilizada pela humanidade nas mais diversas atividades.

Veja algumas situações em que isso ocorre.


ERNANE CORTAT. A FELICIDADE MORA NUM BALÃO, 2007.

A felicidade mora num balão, de Ernane Cortat. 2007.


JOHN GOLLINGS/ARCAID/CORBIS/LATINSTOCK

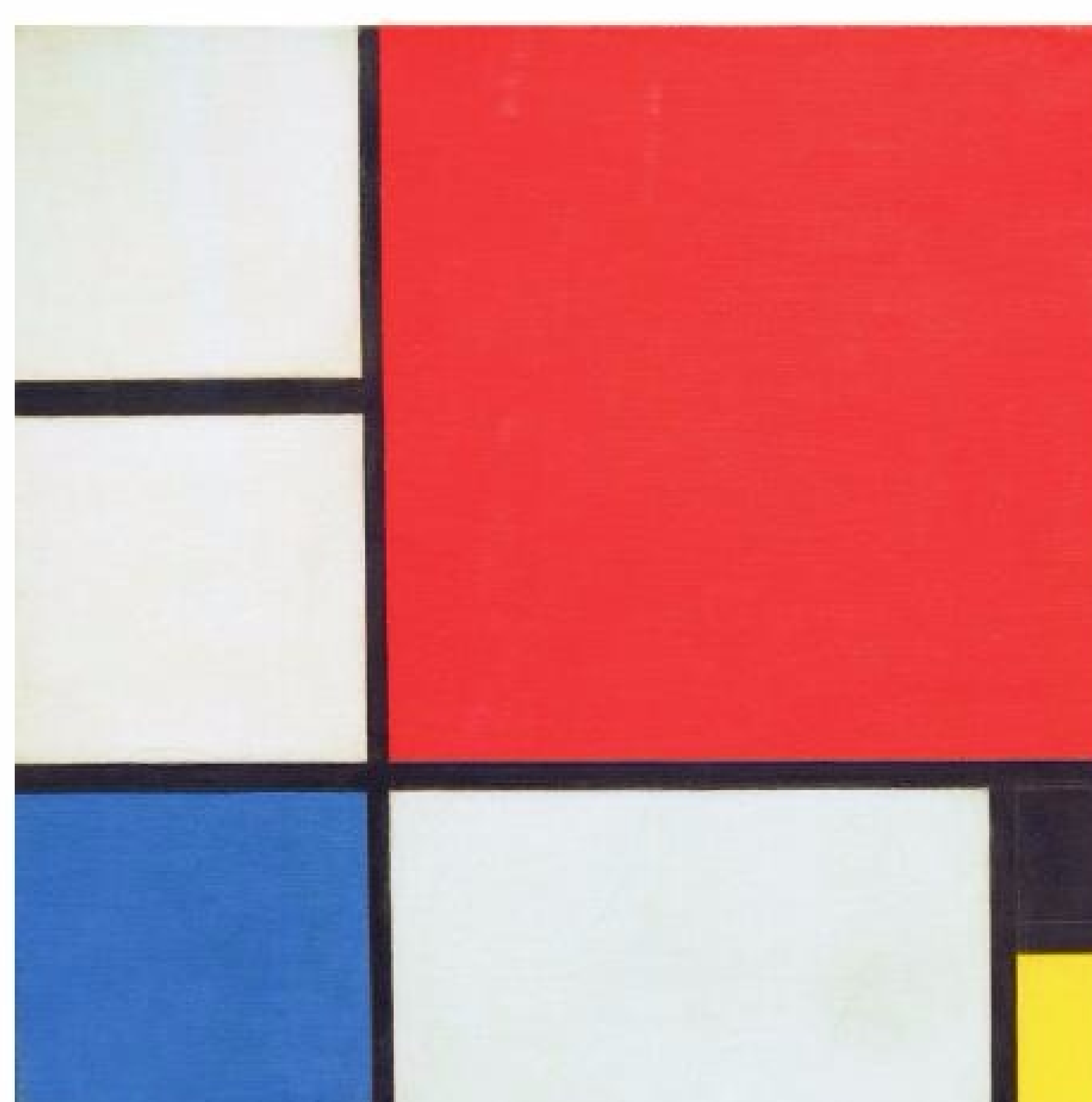
Prédio construído com fachada de vidro. Nova Iorque, EUA.

Pitágoras, conhecido pelo famoso teorema que leva o seu nome, descobriu a proporcionalidade citada abaixo, que deve existir entre os comprimentos das cordas de um instrumento musical para que elas produzam sons harmoniosos.

> Duas cordas cujos comprimentos estejam na razão **2** para **1** e sob igual tensão produzem a mesma nota musical em um intervalo de oitava.

Um retângulo em que a razão entre o lado maior e o menor seja equivalente ao número áureo — ϕ = **1,6180339**... — é conhecido como **retângulo áureo**.

> ϕ Lê-se "fi" e é usado em homenagem ao escultor grego Fidias, o mestre das proporções.


AKG-IMAGES/LATINSTOCK

Retângulos áureos têm sido muito utilizados em obras de arte. É o caso desta obra de Mondrian (1872-1944), que mostra retângulos áureos sobrepostos.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Racionalize os denominadores destas frações:

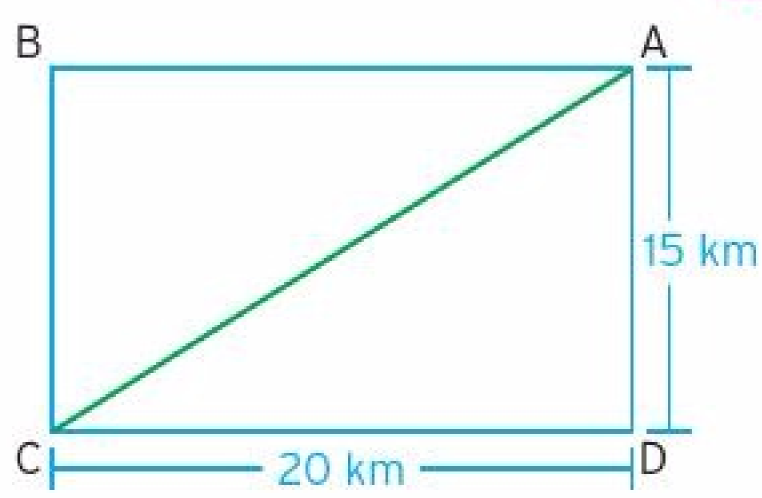
a) $\dfrac{26}{\sqrt{52}}$ $\sqrt{13}$

b) $\dfrac{5\sqrt{8}}{2\sqrt{10}}$ $\sqrt{5}$

c) $\dfrac{6}{4-\sqrt{10}}$ $4+\sqrt{10}$

d) $\dfrac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ $\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}$

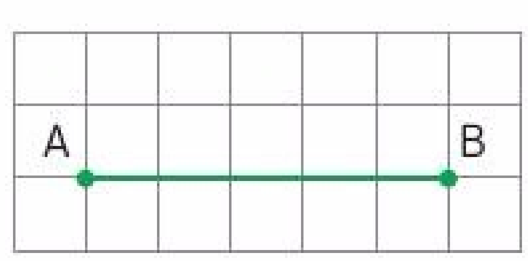
2. Este retângulo mostra o entorno de uma cidade. Nela existe uma avenida que vai de **A** a **C**. Nessa avenida existem 17 pontos de ônibus com a mesma distância um do outro, sendo que dois deles estão nas extremidades da avenida. Quantos metros há entre dois pontos de ônibus vizinhos? 1562,5 m



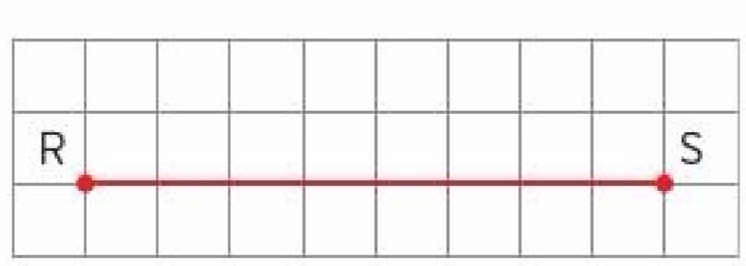
3. Desenhe segmentos de reta $\overline{XY}$, considerando a razão dada em cada item.

a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \dfrac{1}{2}$

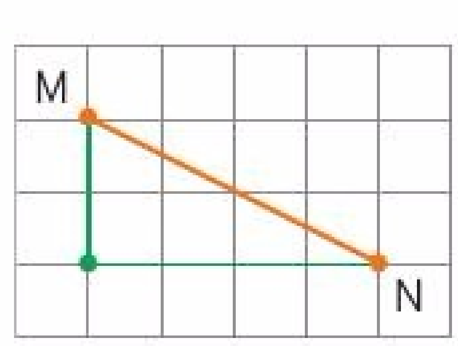
Veja respostas no **Manual do Professor.**



b) $\dfrac{\overline{RS}}{\overline{XY}} = 2$



c) $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{XY}} = \dfrac{1}{3}$



a) São proporcionais, pois $\frac{8}{12} = \frac{4}{6}$.

4. Considere os segmentos de reta $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{TM}$ e $\overline{VX}$, com med $\overline{PQ} = 8$ cm, med $\overline{RS} = 12$ cm, med $\overline{TM} = 4$ cm e med $\overline{VX} = 6$ cm.

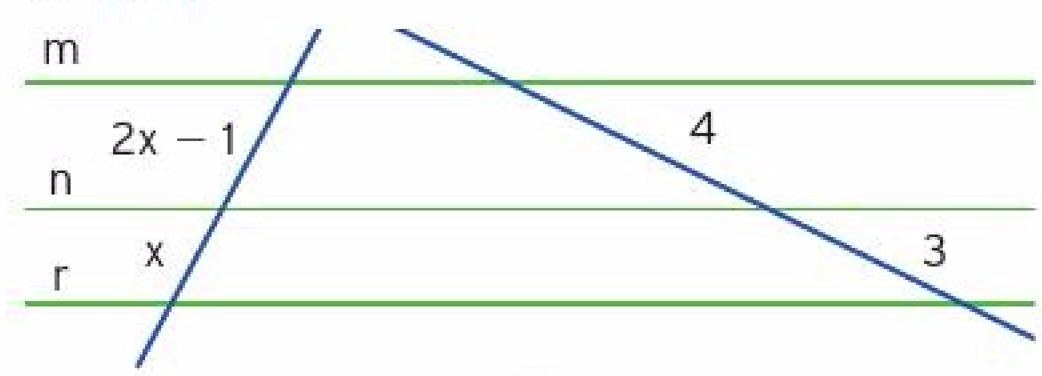
a) Verifique se esses segmentos de reta são proporcionais na ordem $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{TM}$ e $\overline{VX}$.

b) Agora, faça o mesmo na ordem $\overline{PQ}$, $\overline{TM}$, $\overline{RS}$ e $\overline{VX}$. São proporcionais, pois $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$.

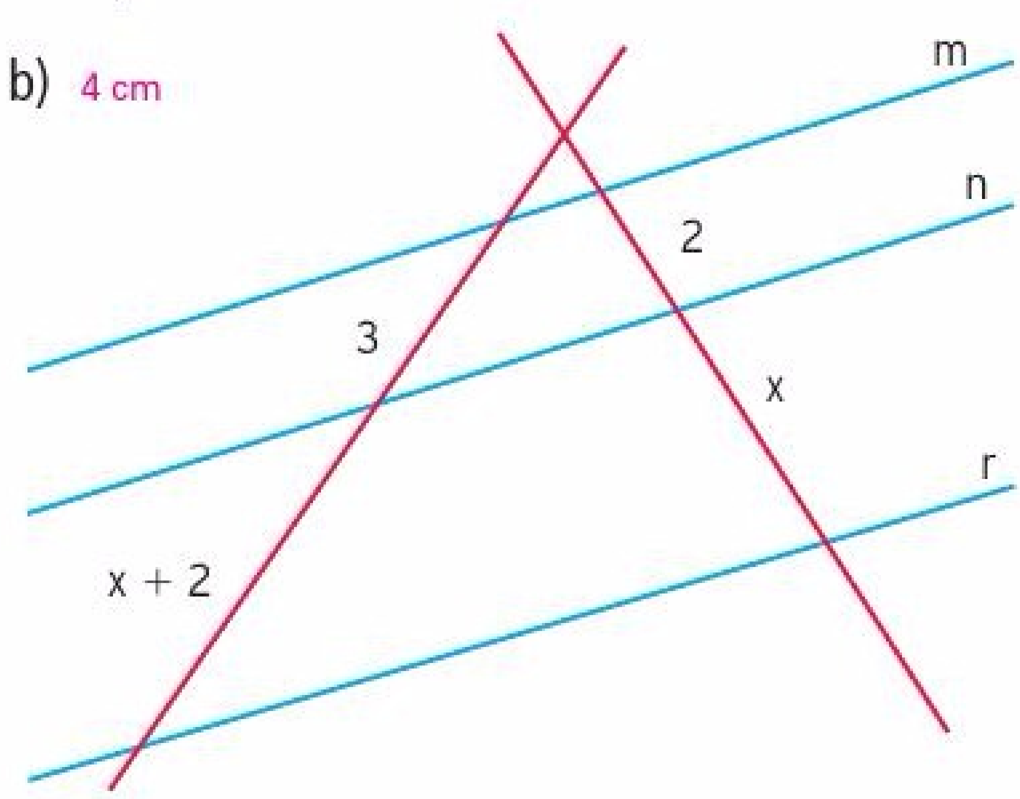
c) É a sua vez! Escreva esses segmentos de reta em uma outra ordem, tornando-os proporcionais. $\overline{RS}$, $\overline{PQ}$, $\overline{VX}$, $\overline{TM}$. Há outras respostas possíveis.

5. Nas figuras, **m**, **n** e **r** formam um feixe de retas paralelas e **x** representa uma medida em centímetros. Calcule o valor de **x** em cada item:

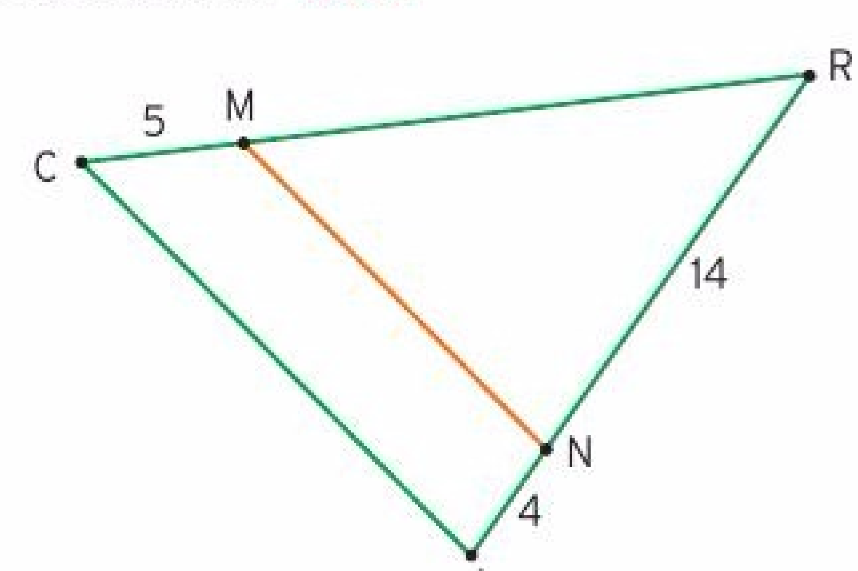
a) 1,5 cm



b) 4 cm



6. No triângulo RCA, $\overline{MN}$ é paralela a $\overline{CA}$ e as medidas estão indicadas em centímetros. Qual é a medida de $\overline{RM}$? 17,5 cm

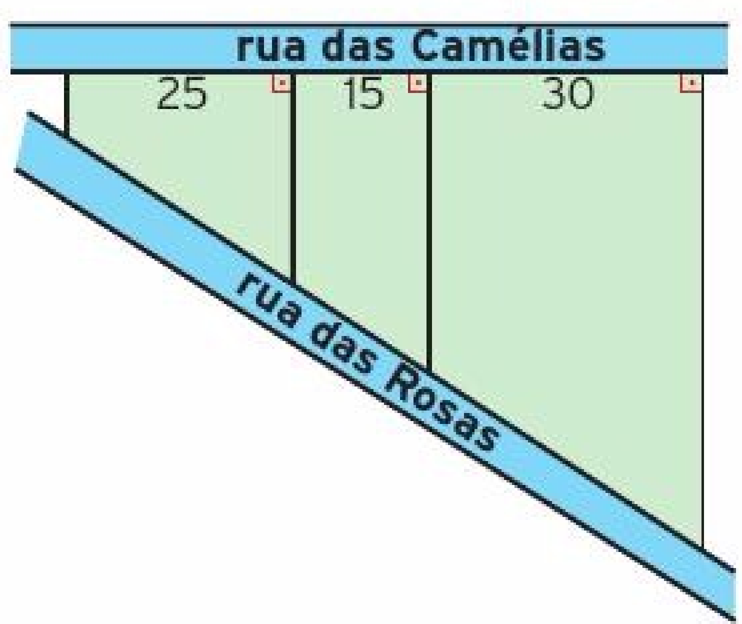


7. Resolva estas equações:

a) $(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) - x(4x - 3) =$
$= -6(x - 3)$ $\frac{7}{3}$

b) $\frac{x(x+1)}{4} - \frac{5(2x-1)}{6} = \frac{x-5}{12}$ 1; 5

8. Três lotes em forma de trapézios retângulos têm frente para a rua das Camélias e para a rua das Rosas, como mostra a figura. As medidas das frentes dos lotes para a rua das Camélias são 25 m, 15 m e 30 m. Calcule as medidas da frente de cada lote para a rua das Rosas, sabendo que a soma das medidas das frentes desses lotes para essa rua é 84 m. 30 m, 18 m e 36 m.



9. Considere o retângulo dado na figura.

Medidas indicadas em m.

a) Qual é a razão entre o comprimento e a largura, nessa ordem? $\frac{5}{3}$

b) Qual é a razão entre a diagonal e o comprimento, nessa ordem? $\frac{\sqrt{34}}{5}$

c) Identifique um par de segmentos de reta que sejam incomensuráveis. $\overline{PM}$ e $\overline{PR}$.
Há outras respostas possíveis.

10. Efetue as operações:

a) $\sqrt[5]{40} \cdot \sqrt[5]{12}$ $2\sqrt[5]{15}$

b) $\sqrt[3]{18} : \sqrt{9}$ $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

c) $(5 + \sqrt{32})(5 - \sqrt{32})$ -7

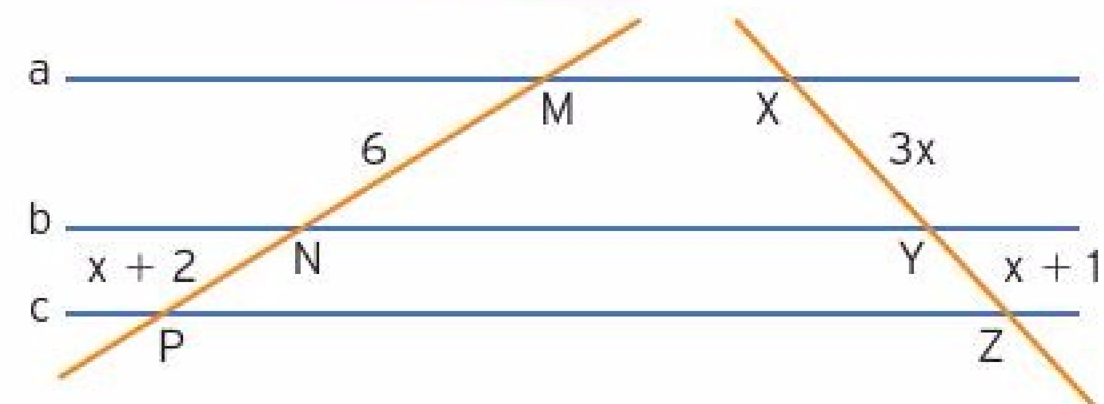
d) $\sqrt[3]{10\sqrt{448}}$ $2\sqrt[6]{700}$

11. O perímetro de um terreno retangular é de 352 m e a razão entre o comprimento e a largura, nessa ordem, é de 15 : 7. Quais são as dimensões desse terreno? 120 m por 56 m.

12. Na figura, **x** representa uma medida em centímetros e **a**, **b** e **c** formam um feixe de retas paralelas. Determine as medidas aproximadas de $\overline{NP}$, $\overline{XY}$ e $\overline{YZ}$.

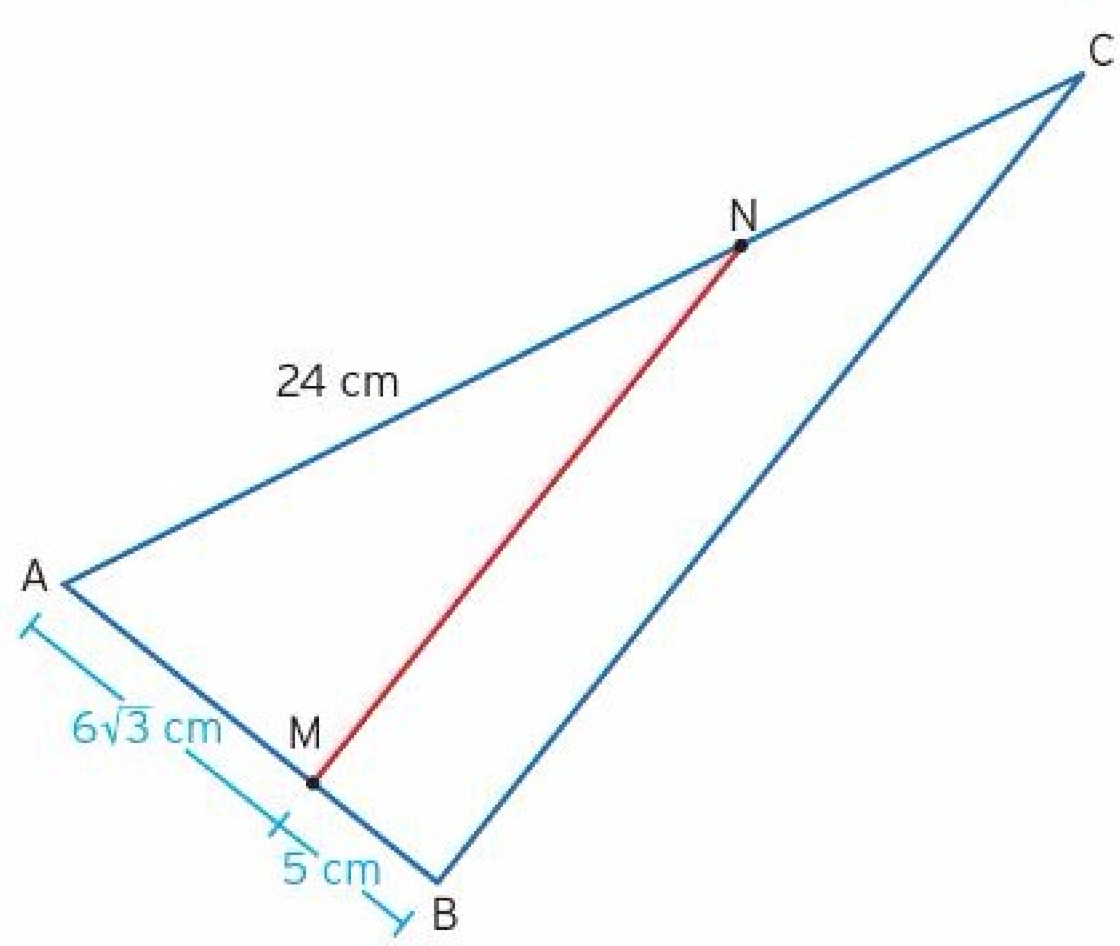
Use: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$

med $\overline{NP} \cong 3{,}4$ cm; med $\overline{XY} \cong 4{,}2$ cm; med $\overline{YZ} \cong 2{,}4$ cm.



13. Juntando a quantia que Paulo e João têm obtém-se R$ 857,00. Se Paulo gastar R$ 57,00, ficará com o triplo da quantia de João. Qual é a quantia que cada um deles tem? Paulo: R$ 657,00; João: R$ 200,00.

14. No triângulo ABC, a seguir, $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Nessas condições podemos afirmar que $\overline{NC}$ mede: b



a) $20\sqrt{3}$ cm

b) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

d) $5\sqrt{3}$ cm

15. (Saresp-SP) Efetuando $(x^2 - 3x) \cdot (2x - 1)$, obtemos: a

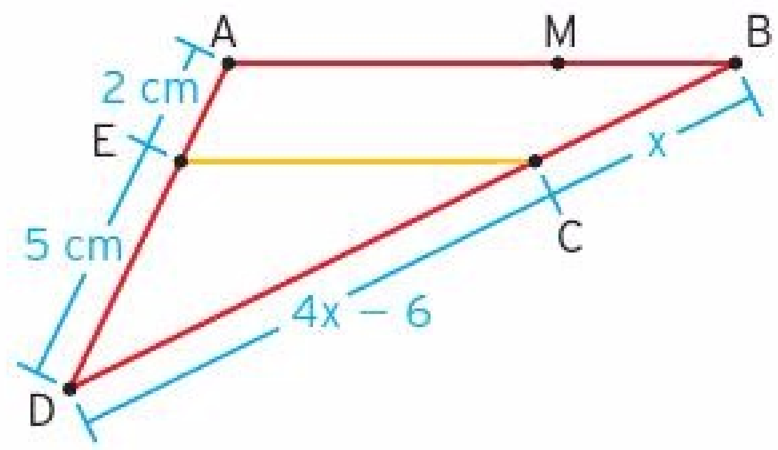
a) $2x^3 - 7x^2 + 3x$

b) $2x^3 - 7x^2 - 3x$

c) $2x^3 - 3x^2 + 3x$

d) $2x^3 - 2x^2 - 3x$

16. Na figura, a letra **x** representa uma medida em centímetros.



a) Se $\overline{AE}$, $\overline{ED}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais, quais são as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$? 4, 10

b) Se $\overline{BM}$, $\overline{MA}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais e med $\overline{AB}$ = = 10,4 cm, a que distância de **A** está o ponto **M**? Aproximadamente 7,43 cm.

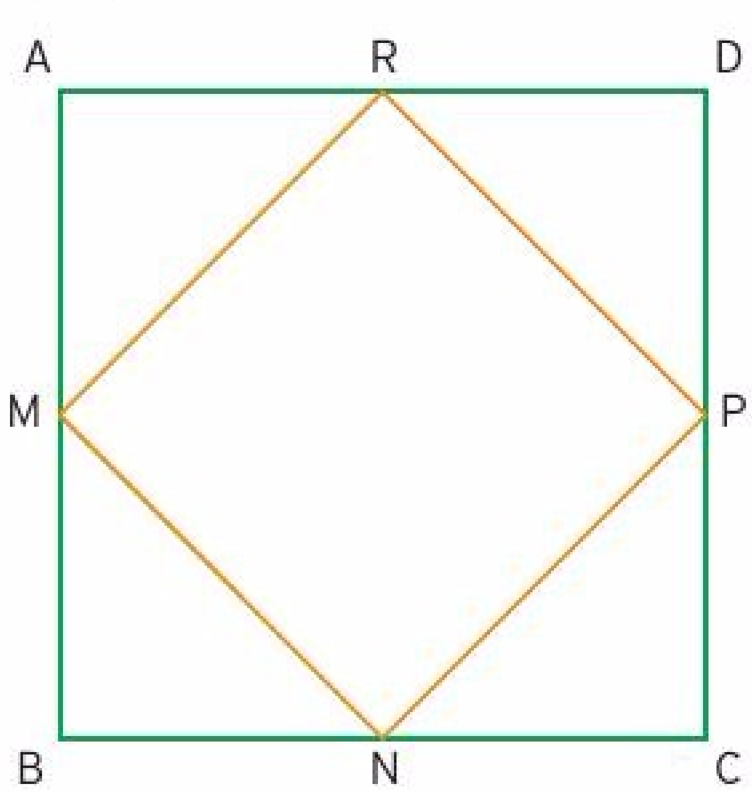
17. A expressão $\dfrac{12x^2 - 6x}{2x}$ é equivalente a: a

a) $3 \cdot (2x - 1)$ b) 3 c) $2x - 1$ d) $3x - 1$

18. Ao redor de uma praça circular com 640 metros de raio serão colocados 20 bancos, de modo que as distâncias, entre dois bancos vizinhos, a serem percorridas na calçada circular sejam sempre iguais. É correto afirmar que essa distância deverá ser, aproximadamente, igual a: b

a) 110 m
b) 201 m
c) 101 m
d) 210 m

19. No quadrado ABCD cada lado mede 6 cm e os pontos **M**, **N**, **P** e **R** são pontos médios de seus lados.



O perímetro de MNPR é: d

a) $2\sqrt{3}$ cm
b) $3\sqrt{2}$ cm
c) $6\sqrt{2}$ cm
d) $12\sqrt{2}$ cm

20. (Saresp-SP) Considere estas expressões:

$$A = 2a + 4ba$$

$$B = 2a$$

O resultado da divisão de **A** por **B** é: c

a) 4ba
b) $4a + 4ab + b$
c) $1 + 2b$
d) 2

21. (Saresp-SP) Considere esta sequência:

2, 6, 10, 14, 18, 22, ..., n, ...

O número que vem imediatamente depois de **n** pode ser representado por: b

a) $n + 1$
b) $n + 4$
c) 23
d) $4n - 2$

22. (FGV-SP) Simplificando a fração $\dfrac{m^2 + m}{5m^2 + 10m + 5}$ obtém-se: b

a) $\dfrac{1}{11}$
b) $\dfrac{m}{5(m + 1)}$
c) $\dfrac{m}{5(m - 1)}$
d) $\dfrac{m + 1}{5m}$

23. (Saresp-SP) O produto de 12 por 8000 é 96000. c

a) 9 600
b) 960
c) 96
d) 9,6

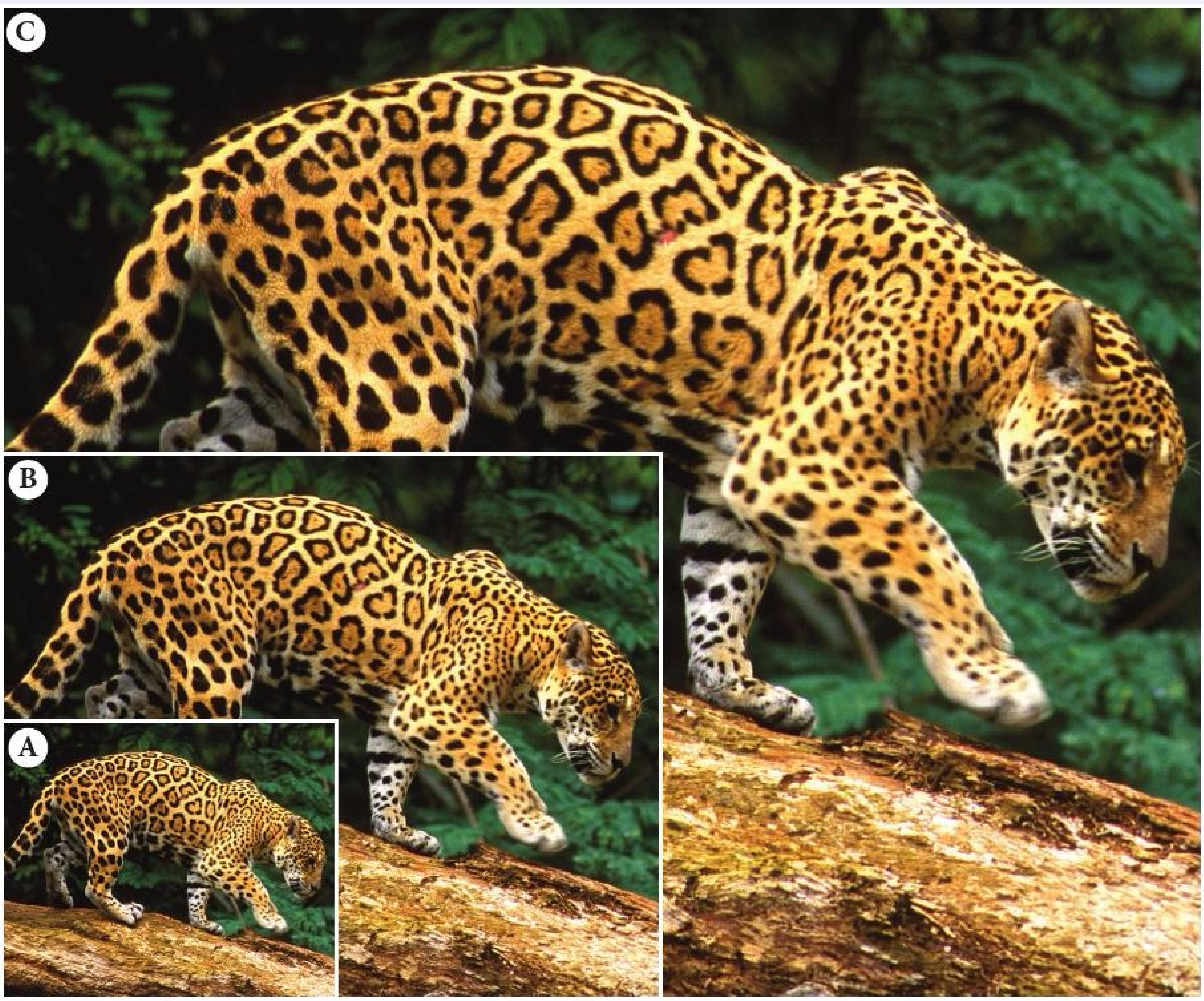
24. (Saresp-SP) A tabela abaixo mostra o número de horas que Lúcia assiste à televisão em relação ao número de dias. c

Número de horas (h)	3	6	15	18
Número de dias (d)	1,0	2,0	5,0	6,0

Indica-se por **h** o número de horas, e por **d** o número de dias. A sentença algébrica que relaciona, de forma correta, as duas grandezas é:

a) $d = h - 2$
b) $d = h \cdot 3$
c) $h : 3 = d$
d) $h - 3 = d$

UNIDADE 6 Semelhança e proporcionalidade



RICARDO AZOURY/OLHAR IMAGEM

Onça-pintada.

Nesta unidade...

1. Figuras semelhantes
2. Polígonos semelhantes
3. Os triângulos e a semelhança

Tomando a fotografia **B** como referência, a fotografia **A** é uma **redução** dela e a fotografia **C** é uma **ampliação**.

Observe fotografias suas, de sua família e de amigos. Observe também mapas, desenhos, miniaturas e embalagens em tamanhos diferentes.

Normalmente, os brinquedos são miniaturas feitas com base em objetos reais. Em geral, eles têm formas iguais aos objetos reais e dimensões diferentes, mas para que sejam miniaturas fiéis é preciso que haja proporcionalidade entre as medidas das miniaturas e as do objeto real.

Miniatura de uma cozinha.

Fotografia revelada em tamanhos diferentes.

Uma fotografia é a reprodução de uma imagem real.Costuma-se reproduzir fotografias em tamanhos diferentes, como se vê acima. Nessa situação há proporcionalidade entre as dimensões correspondentes entre as duas imagens.

O que você já sabe?

- Compare uma fotografia com outra que seja uma ampliação dela. Em sua opinião, elas são semelhantes? Por quê? Resposta pessoal.
- Consulte um dicionário: o que significa semelhante? Do latim *similare*, significa "parecer-se com, ter a mesma aparência".

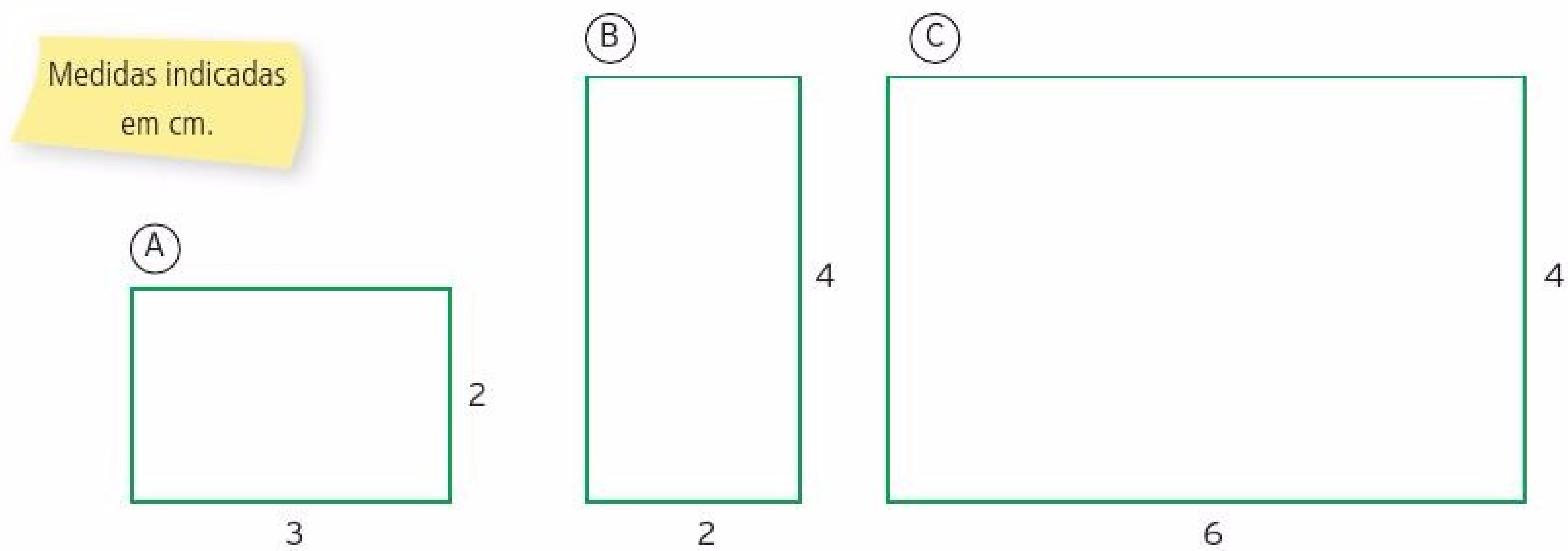
1 Figuras semelhantes

O estudo dos conceitos relacionados à semelhança é fundamental, pois são inúmeras as suas aplicações no cotidiano e nas demais ciências. Esse é um tema que motivará os alunos e que poderá ser integrado às disciplinas de Desenho, Arte e Geografia.

Semelhança em Geometria

Para refletir e responder

Observe as dimensões dos retângulos e responda às questões:



- Comparando (A) com (B): a largura em (B) é o dobro da largura em (A). O mesmo ocorre com o comprimento? Não.
- Comparando (A) com (C): a largura em (C) é o dobro da largura em (A). O mesmo ocorre com o comprimento? Sim.
- O retângulo (A) é semelhante a um dos retângulos observados nos itens anteriores. Em sua opinião, esse retângulo é (B) ou (C)? C

De acordo com o dicionário...

> **Semelhante** vem do latim *similare*, que significa que é da mesma espécie, qualidade, natureza ou forma, em relação a outro ser ou coisa; similar; que é muito parecido, idêntico ou análogo.
>
> (*Dicionário eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, jan. 2011.)

Embora no dicionário o significado seja esse, em Geometria, para que duas figuras geométricas sejam **semelhantes** é preciso que elas sejam mais do que "parecidas", elas devem ter **formas iguais** e **dimensões proporcionais**.

Figuras semelhantes estão presentes em várias situações do nosso dia a dia, e esta é uma das razões para conhecermos e aprofundarmos o estudo sobre esse conceito.

Vamos iniciar explorando o significado matemático da expressão **ser semelhante a**.

Veja alguns exemplos:

- As maquetes são utilizadas para visualizar, com o maior realismo possível, o resultado final de uma obra que será construída.

As dimensões que aparecem em uma maquete são proporcionais às dimensões da obra quando realizada.

Em geral, uma maquete é semelhante à obra que ela representa.

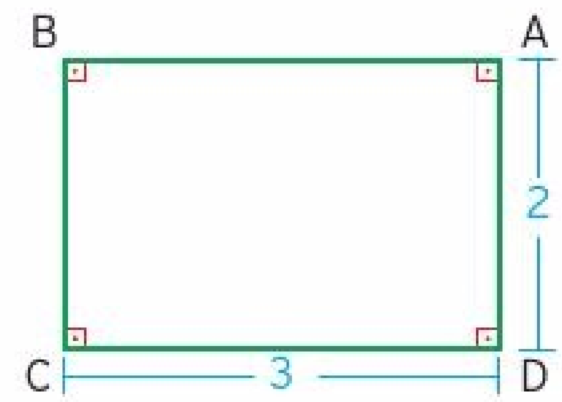
CELSO ÁVILA/XPRESSBRASIL/FOLHAPRESS

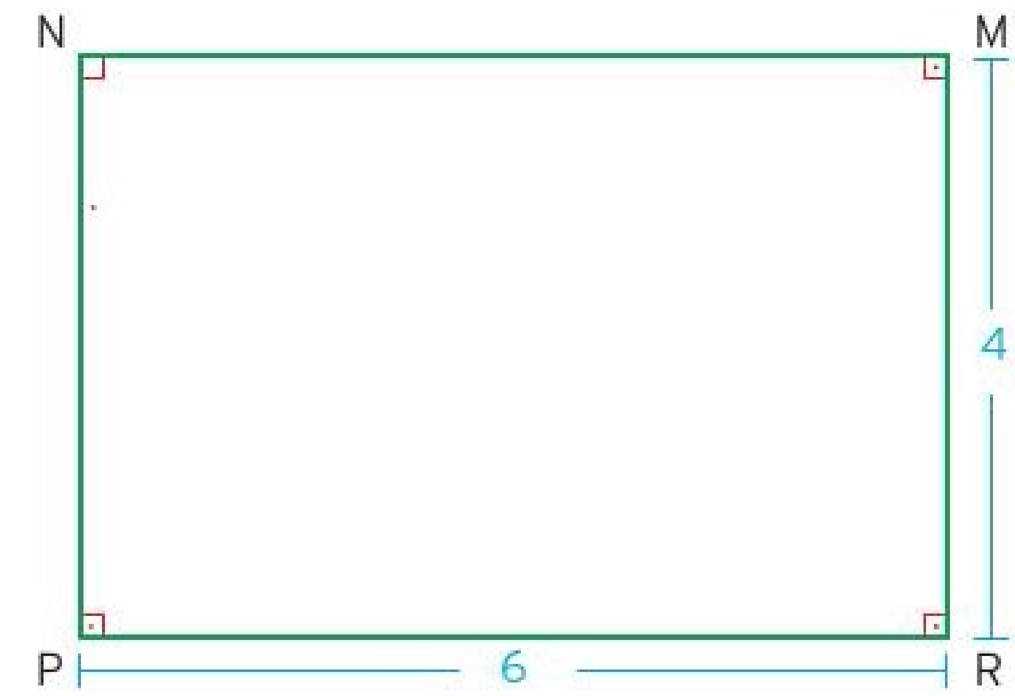
Maquete do Complexo Esportivo do Maracanã, no Rio de Janeiro.

CARLOS MAGNO/ESTADÃO CONTEÚDO

Complexo Esportivo do Maracanã, no Rio de Janeiro.

- Todos os retângulos apresentados na situação da página anterior têm formas iguais, mas não são todos semelhantes entre si, pois nem sempre há proporcionalidade entre os lados correspondentes. Compare dois dos retângulos que foram apresentados:





✓ todos os ângulos são retos, ou seja, os ângulos correspondentes são congruentes;

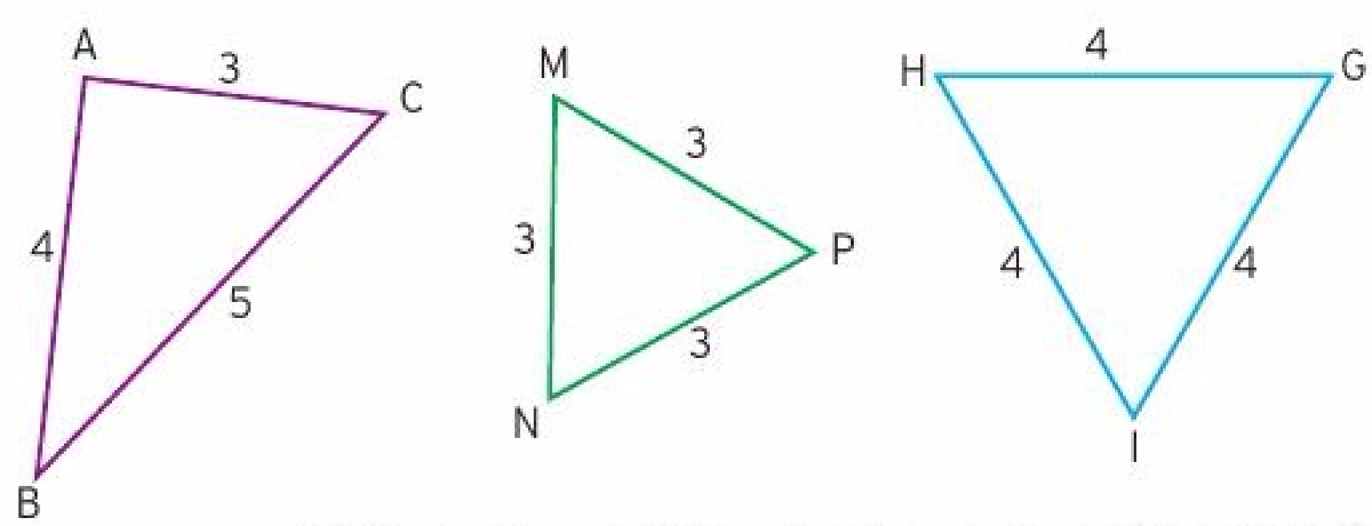
✓ os lados correspondentes são proporcionais:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{\overline{AD}}{\overline{MR}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ Portanto: $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{MR}}$

Em Geometria, os retângulos ABCD e MNPR são figuras semelhantes.

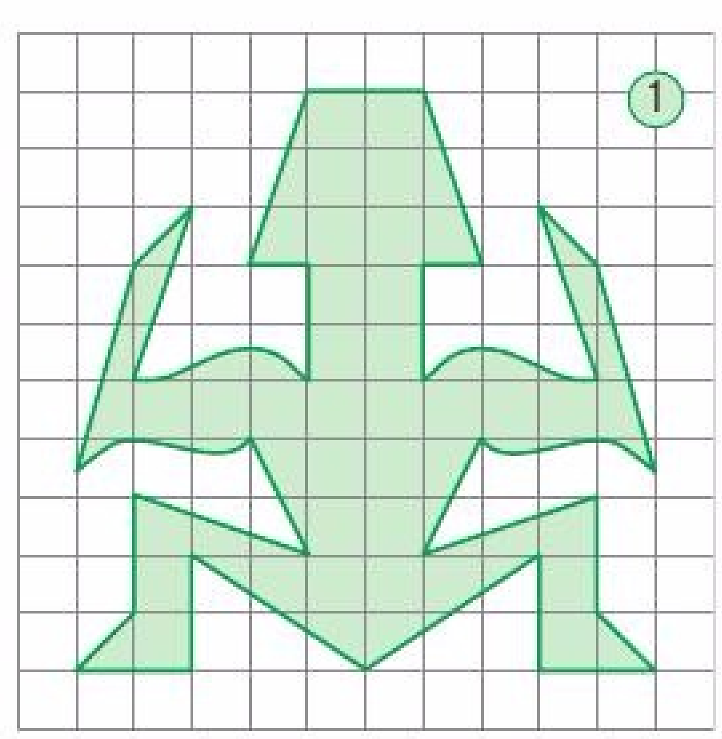
- Nestas figuras desenhadas por Carla, as medidas estão indicadas em centímetros.

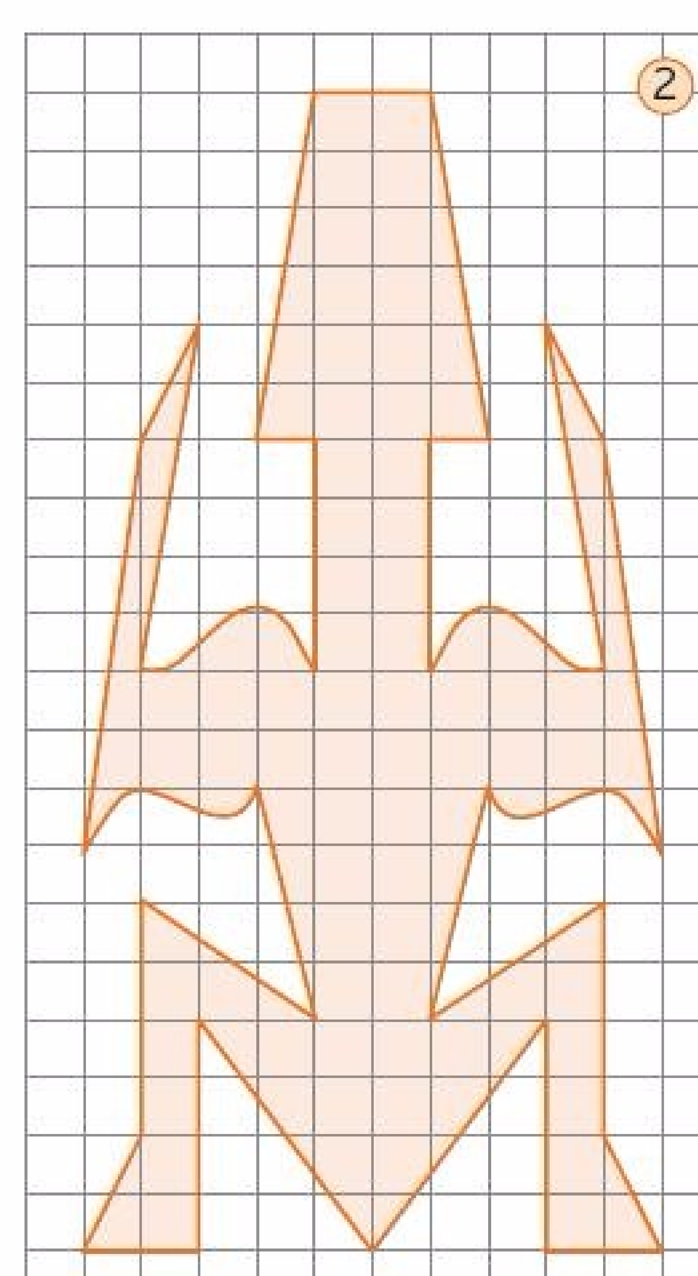


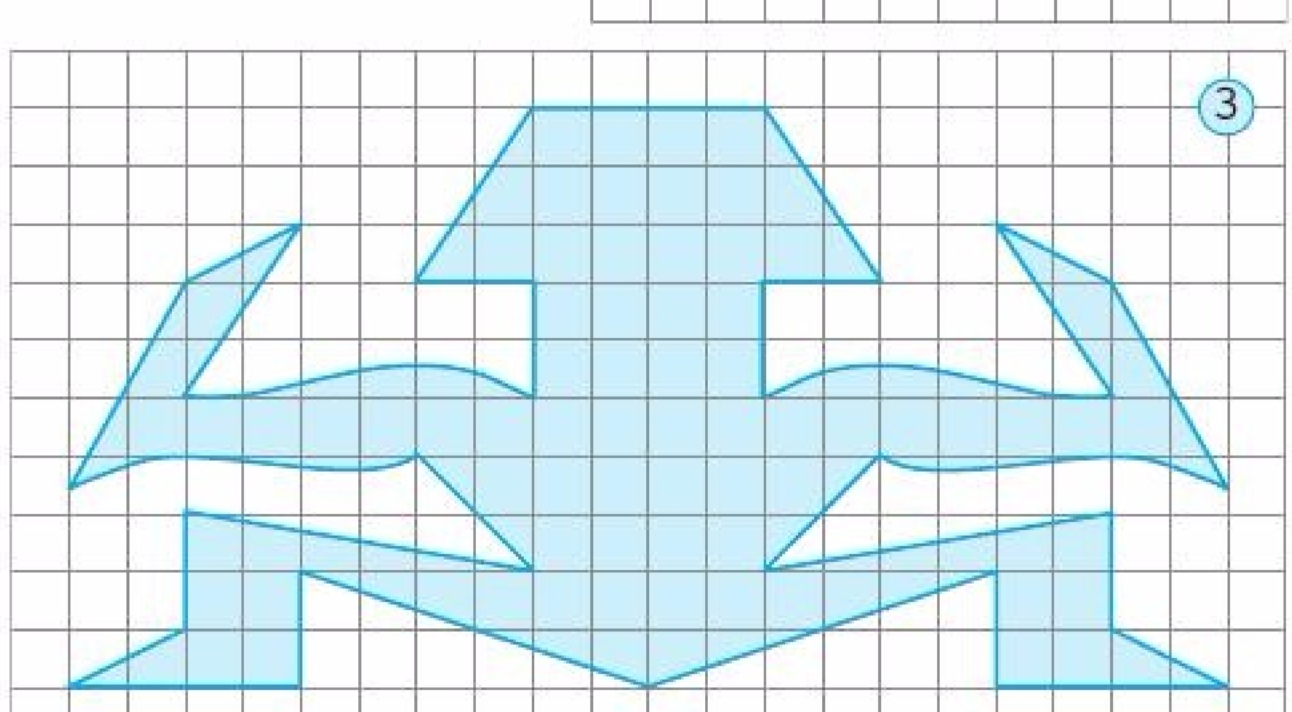
$\triangle$MNP e $\triangle$HIG são semelhantes e $\triangle$MNP e $\triangle$ABC não são semelhantes.

Atividades desenvolvidas pelos alunos em papel quadriculado são interessantes neste momento. Então, se julgar conveniente, distribua papel quadriculado e peça que realizem a atividade proposta.

Em seguida vamos explorar algumas figuras representadas sobre malhas quadriculadas.







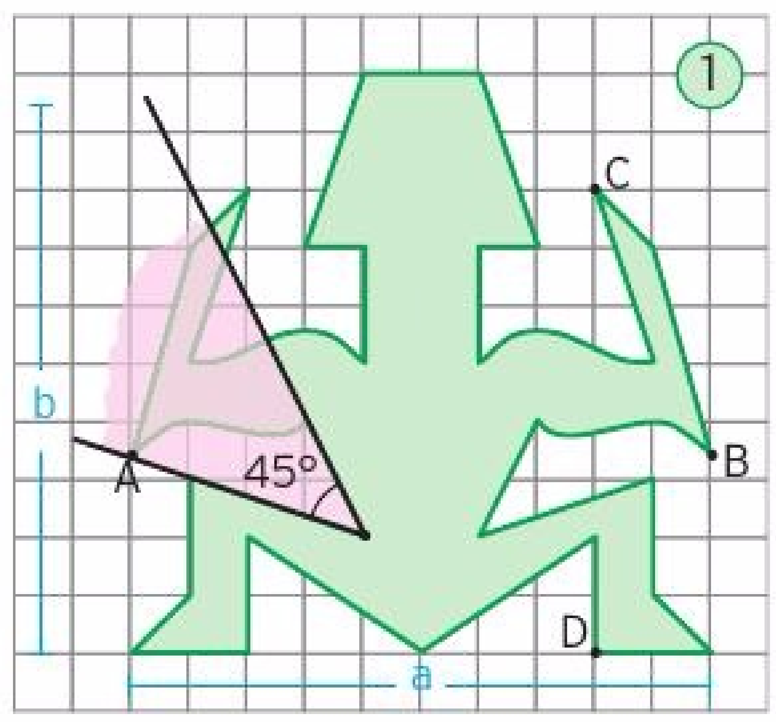
Carla disse que essas figuras não são semelhantes e ela está certa.

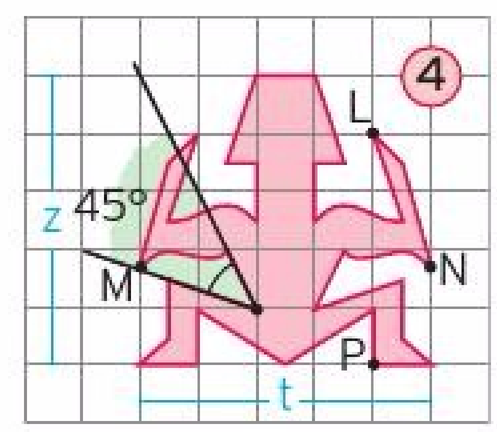
As figuras desenhadas por ela são parecidas, mas não são semelhantes:

✓ a figura ② é parecida com a ①. Ela tem o dobro da altura da figura ①, mas as demais dimensões correspondentes não foram duplicadas;

✓ a figura ③ é parecida com a ①. Ela tem o dobro da largura da figura ①, mas as demais dimensões correspondentes não foram duplicadas.

Voltando às figuras da situação anterior, vamos desenhar mais uma: a figura ④.





Nas figuras ① e ④, os pontos **A** e **M** são correspondentes, assim como **B** e **N**. Do mesmo modo, os pontos **C** e **L** são correspondentes, assim como **D** e **P**. Vamos comparar med $\overline{AB}$ com med $\overline{MN}$ e med $\overline{CD}$ com med $\overline{LP}$.

med $\overline{AB} = 4$ cm med $\overline{CD} = 3{,}2$ cm

med $\overline{MN} = 2$ cm med $\overline{LP} = 1{,}6$ cm

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dfrac{4}{2} = 2$ $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{LP}} = \dfrac{3{,}2}{1{,}6} = 2$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{LP}}$$

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{LP}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais.

A razão entre a distância entre dois pontos em uma figura e a distância entre seus correspondentes na outra é sempre a mesma. No caso desse exemplo, a razão é de **2 para 1** ou **2**.

Os ângulos que existem na figura ① têm a mesma medida dos ângulos correspondentes na figura ④. Observe os ângulos de 45° que foram assinalados.

Dizemos que as figuras ① e ④ são figuras semelhantes.

Duas figuras geométricas que têm dimensões correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes são **semelhantes**.

Chamamos a razão entre duas dimensões correspondentes, tomadas na mesma unidade, de **razão de semelhança**.

Fazer e aprender

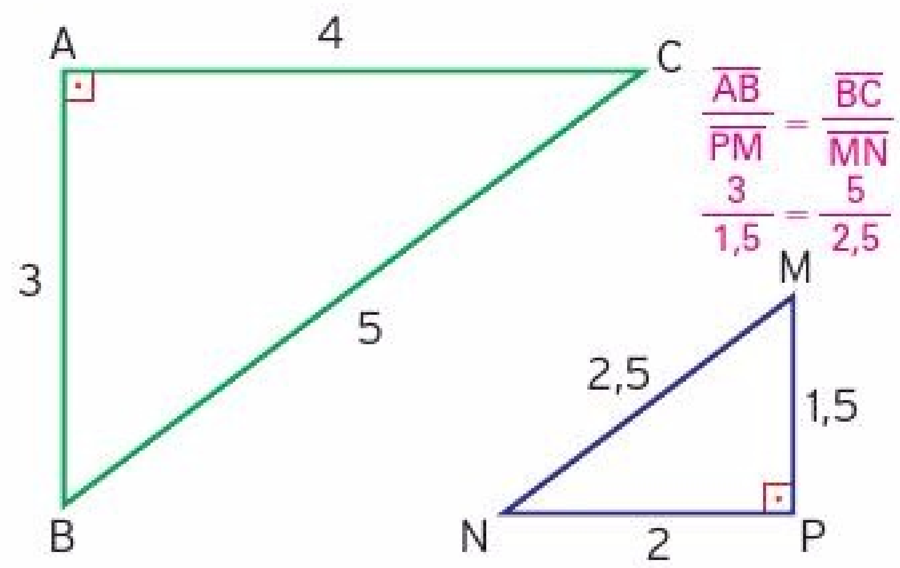
FAÇA NO CADERNO

1. Descreva duas situações nas quais utilizamos a **semelhança** no dia a dia. Resposta pessoal.

2. O que se entende por "figuras semelhantes" em Geometria? Explique usando suas palavras. Resposta pessoal.

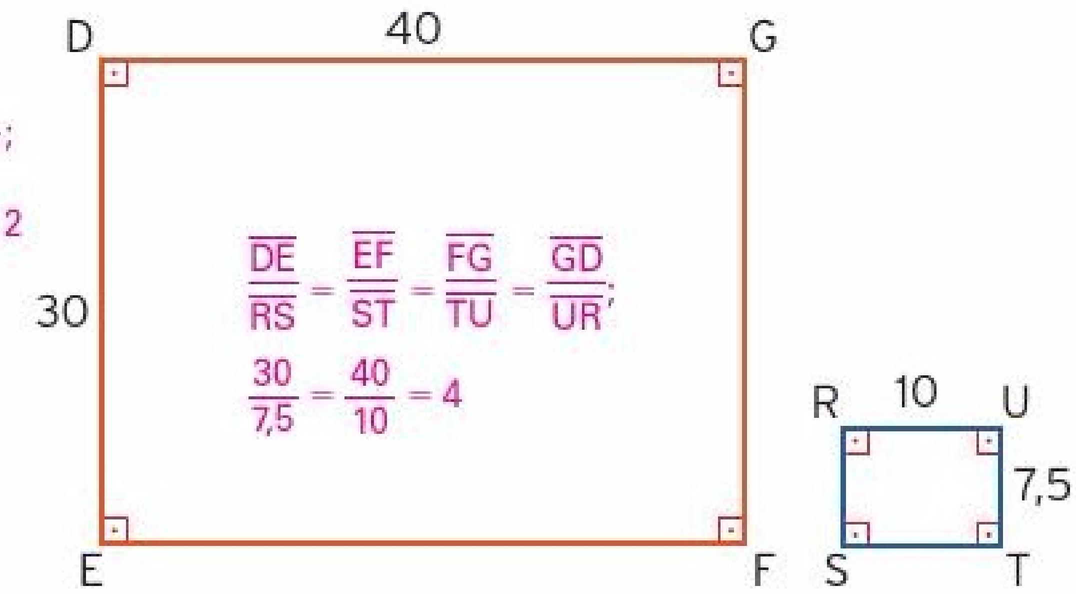
3. Em cada item abaixo as figuras são semelhantes. Dê as razões entre os lados proporcionais:

a)



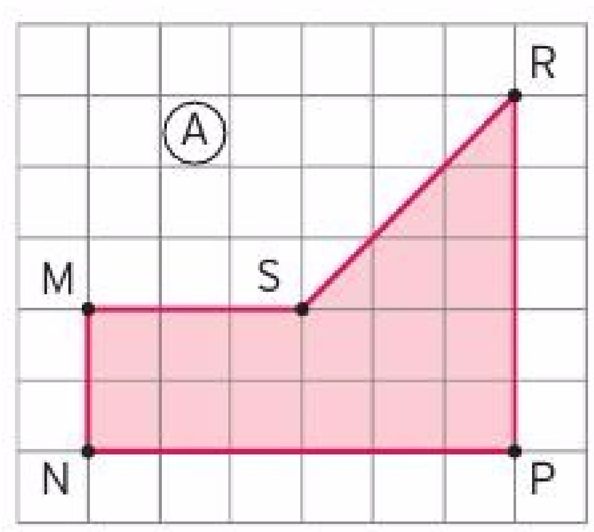
$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{NP}}$; $\frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = 2$

b)



$\frac{\overline{DE}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{TU}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{UR}}$; $\frac{30}{7,5} = \frac{40}{10} = 4$

4. Responda a estas questões utilizando papel quadriculado.



Espera-se que o aluno reproduza o desenho apresentado utilizando uma malha com quadrados de 1 cm de lado.

a) A partir da figura Ⓐ, obtenha uma figura Ⓑ duplicando as medidas de todos os segmentos de reta destacados na figura Ⓐ e mantendo a medida dos ângulos.

b) A figura obtida é semelhante à figura original? Por quê? Sim; porque os segmentos de reta correspondentes são, respectivamente, proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes.

Desafio

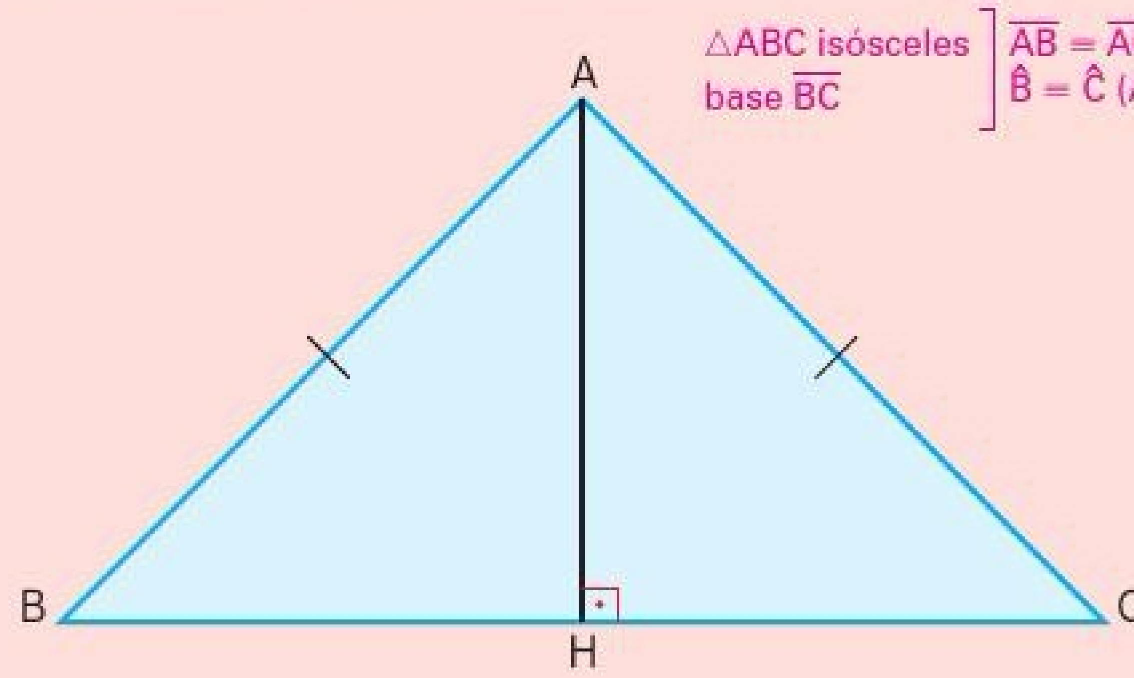
FAÇA NO CADERNO

Triângulos semelhantes

O triângulo da figura é isósceles e $\overline{AH}$ é a altura relativa à base desse triângulo.

$\triangle ABC$ isósceles, base $\overline{BC}$ $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \text{ (L)} \\ \hat{B} = \hat{C} \text{ (A)} \end{array} \right.$

$\overline{AH}$ altura relativa a $\overline{BC}$;
$\overline{AH}$ mediana relativa a $\overline{BC}$;
H ponto médio de $\overline{BC}$
$\overline{BH} = \overline{HC}$ (L)
$\triangle ABH = \triangle AHC$ (LAL)



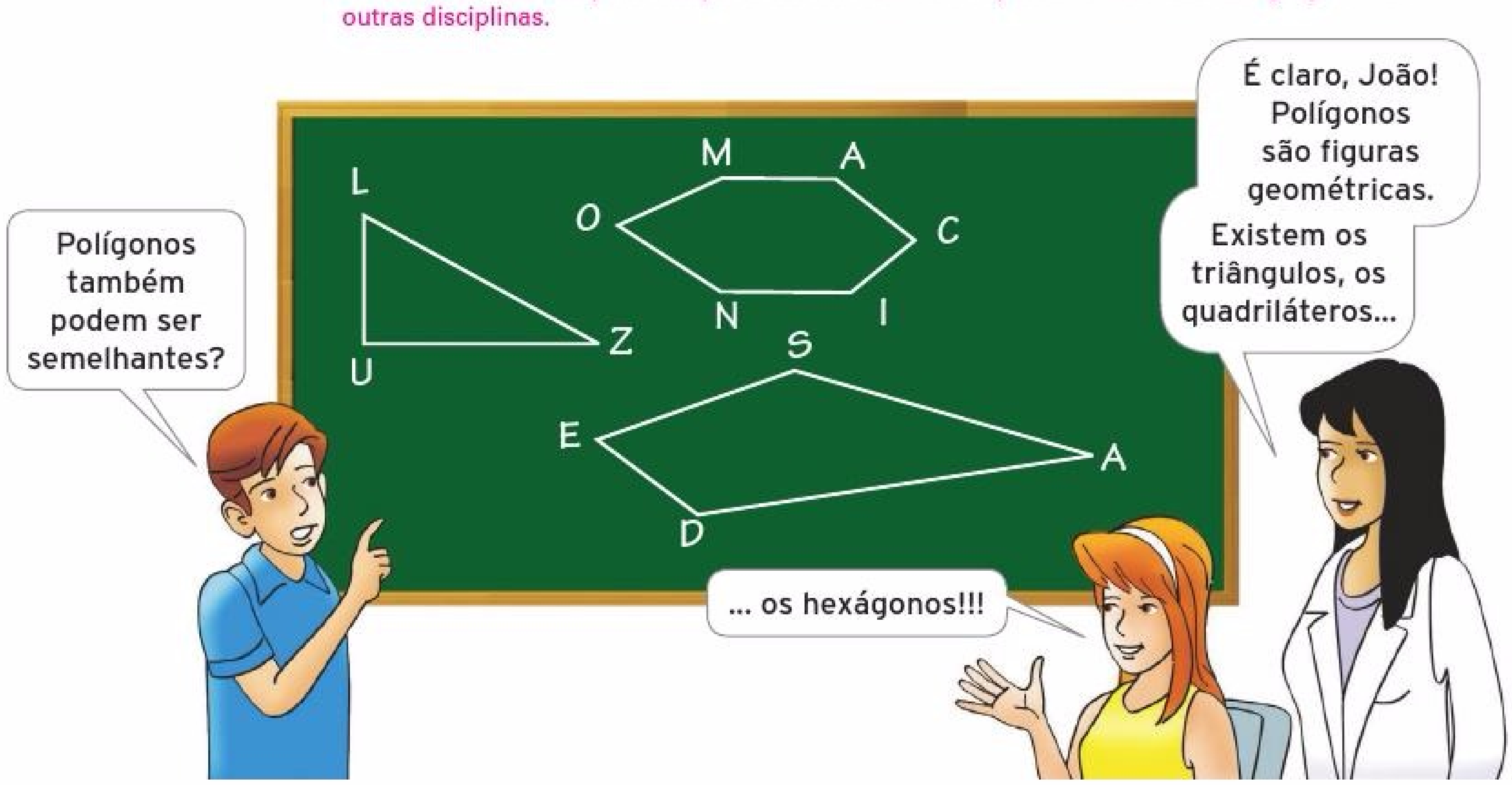
a) Mostre que $\triangle ABH$ e $\triangle AHC$ são congruentes.

b) O $\triangle ABH$ e o $\triangle AHC$ são figuras semelhantes? Por quê? Sim; porque os segmentos de reta correspondentes são, respectivamente, proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes.

2 Polígonos semelhantes

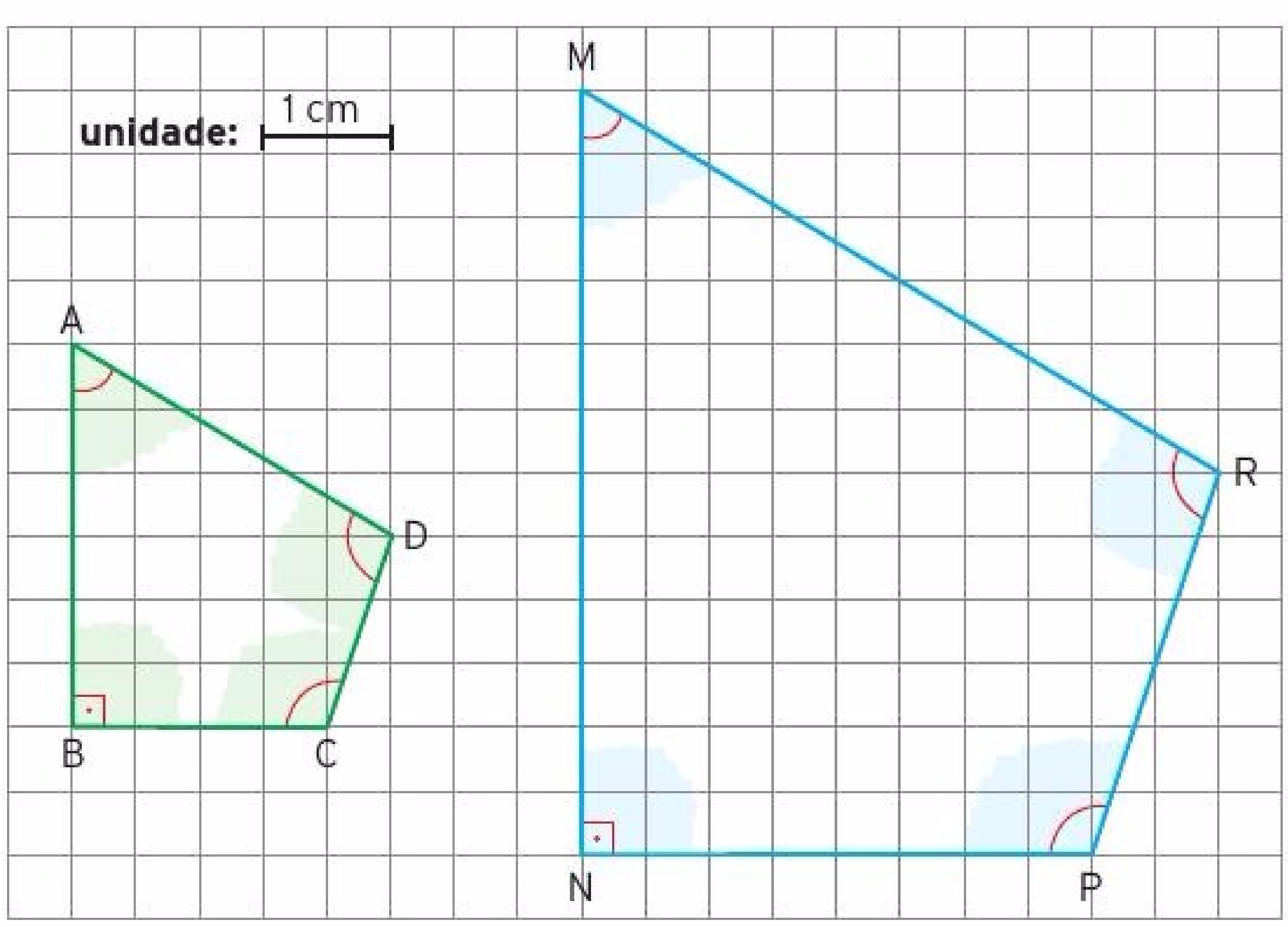
O importante papel da semelhança e de suas aplicações no cotidiano e no estudo das demais ciências aponta para a necessidade de aprofundamento desse tema em relação aos polígonos. Procure saber qual é o nível de interesse dos alunos para adequá-lo ao seu trabalho. É possível fazer uma integração com outras disciplinas.

Identificando semelhança entre polígonos



Para refletir e responder

Meça os lados e os ângulos destes quadriláteros.



ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

- Verifique se a afirmação da garota está correta. Sim.
- $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são lados correspondentes. Encontre outro par de lados correspondentes. $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$. Há outras respostas possíveis.
- $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ e o par de lados encontrados no item anterior são proporcionais? Resposta pessoal.
- Esses quadriláteros são figuras semelhantes? Sim.

Observando os quadriláteros apresentados na situação anterior, temos:

- ângulos correspondentes congruentes:

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{med } \hat{A} = 60° \\ \text{med } \hat{M} = 60° \end{matrix}}_{\hat{A} \equiv \hat{M}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \text{med } \hat{B} = 90° \\ \text{med } \hat{N} = 90° \end{matrix}}_{\hat{B} \equiv \hat{N}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \text{med } \hat{C} = 110° \\ \text{med } \hat{P} = 110° \end{matrix}}_{\hat{C} \equiv \hat{P}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} \text{med } \hat{D} = 100° \\ \text{med } \hat{R} = 100° \end{matrix}}_{\hat{D} \equiv \hat{R}}$$

- lados correspondentes proporcionais:

$$\frac{\text{med } \overline{AB}}{\text{med } \overline{MN}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ——— } \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\text{med } \overline{CD}}{\text{med } \overline{PR}} = \frac{1,6}{3,2} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \text{ ——— } \frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{med } \overline{BC}}{\text{med } \overline{NP}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ ——— } \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\text{med } \overline{DA}}{\text{med } \overline{RM}} = \frac{2,9}{5,8} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2} \text{ ——— } \frac{\overline{DA}}{\overline{RM}} = \frac{1}{2}$$

Portanto: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{RM}}$.

ABCD e **MNPR** têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

$\sim$
Indica semelhança.

ABCD e **MNPR** são quadriláteros semelhantes. Indica-se: ABCD $\sim$ MNPR.

A **razão de semelhança** de ABCD para MNPR é $\mathbf{\frac{1}{2}}$ e de MNPR para ABCD é $\mathbf{\frac{2}{1}}$ ou **2**.

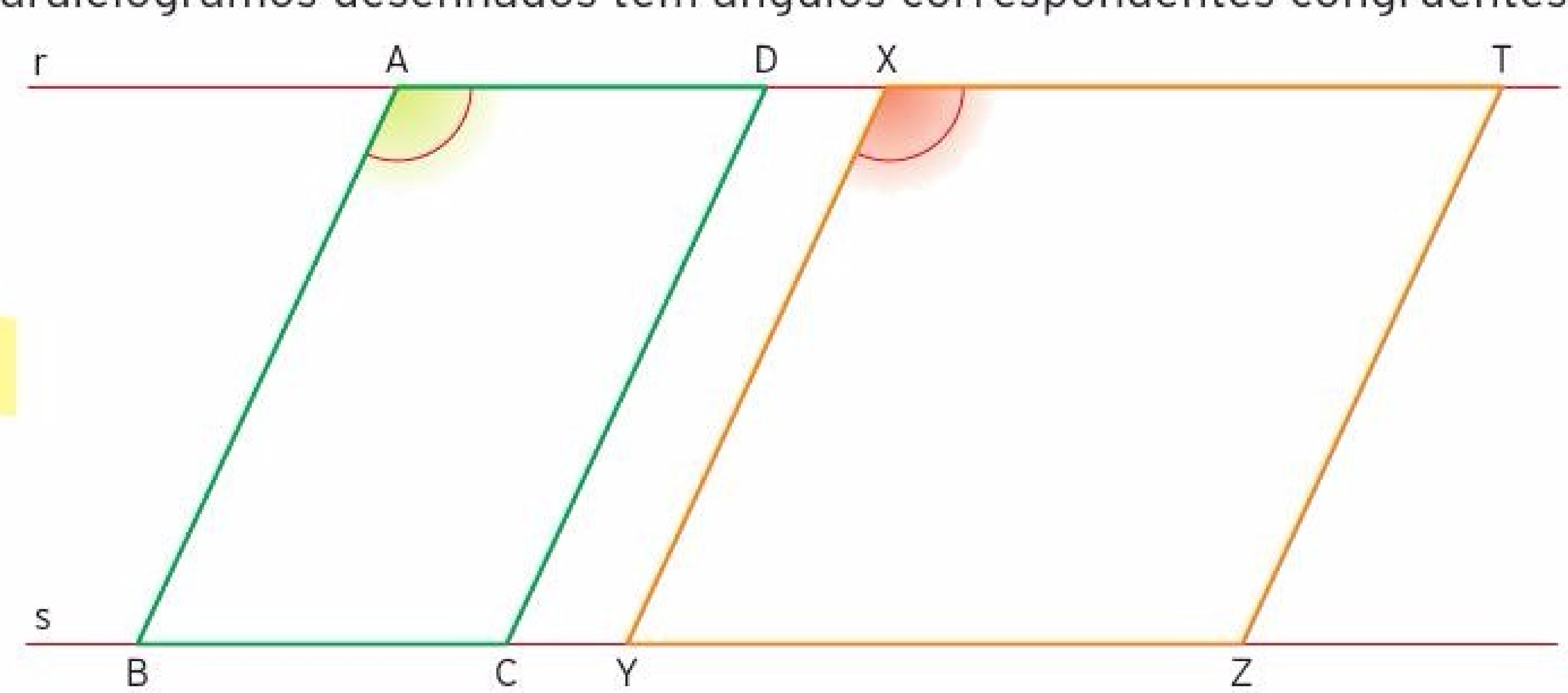
Quando dois polígonos são semelhantes, os **lados correspondentes** são também chamados **lados homólogos**. Nos polígonos apresentados na situação anterior, $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são lados homólogos.

Em muitas situações, dois polígonos têm elementos correspondentes congruentes ou proporcionais mas não são semelhantes.

Exemplos:

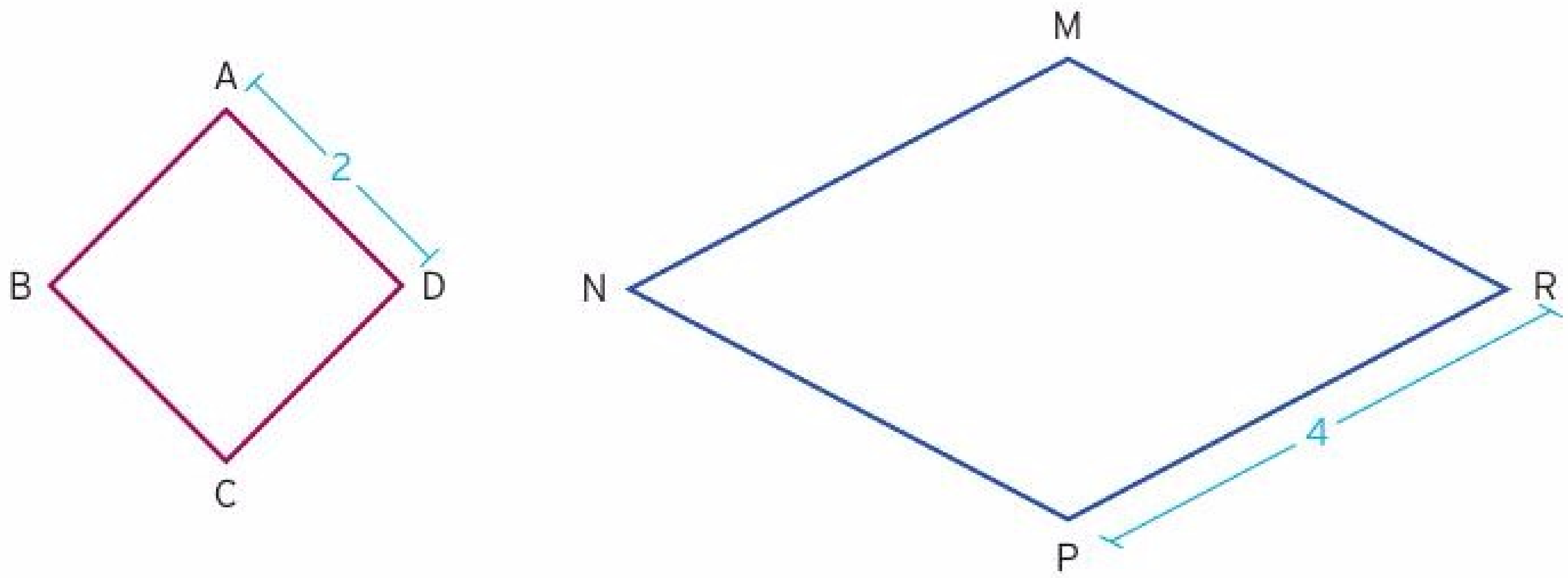
- Os paralelogramos desenhados têm ângulos correspondentes congruentes.

r // s



Analisando os paralelogramos apresentados, percebemos que os lados correspondentes não são proporcionais. Eles **não** são figuras semelhantes.

• O quadrado ABCD e o losango MNPR desenhados a seguir têm lados correspondentes proporcionais.



Medidas indicadas em cm.

Mas os ângulos correspondentes não são congruentes. O quadrado ABCD e o losango MNPR **não** são semelhantes.

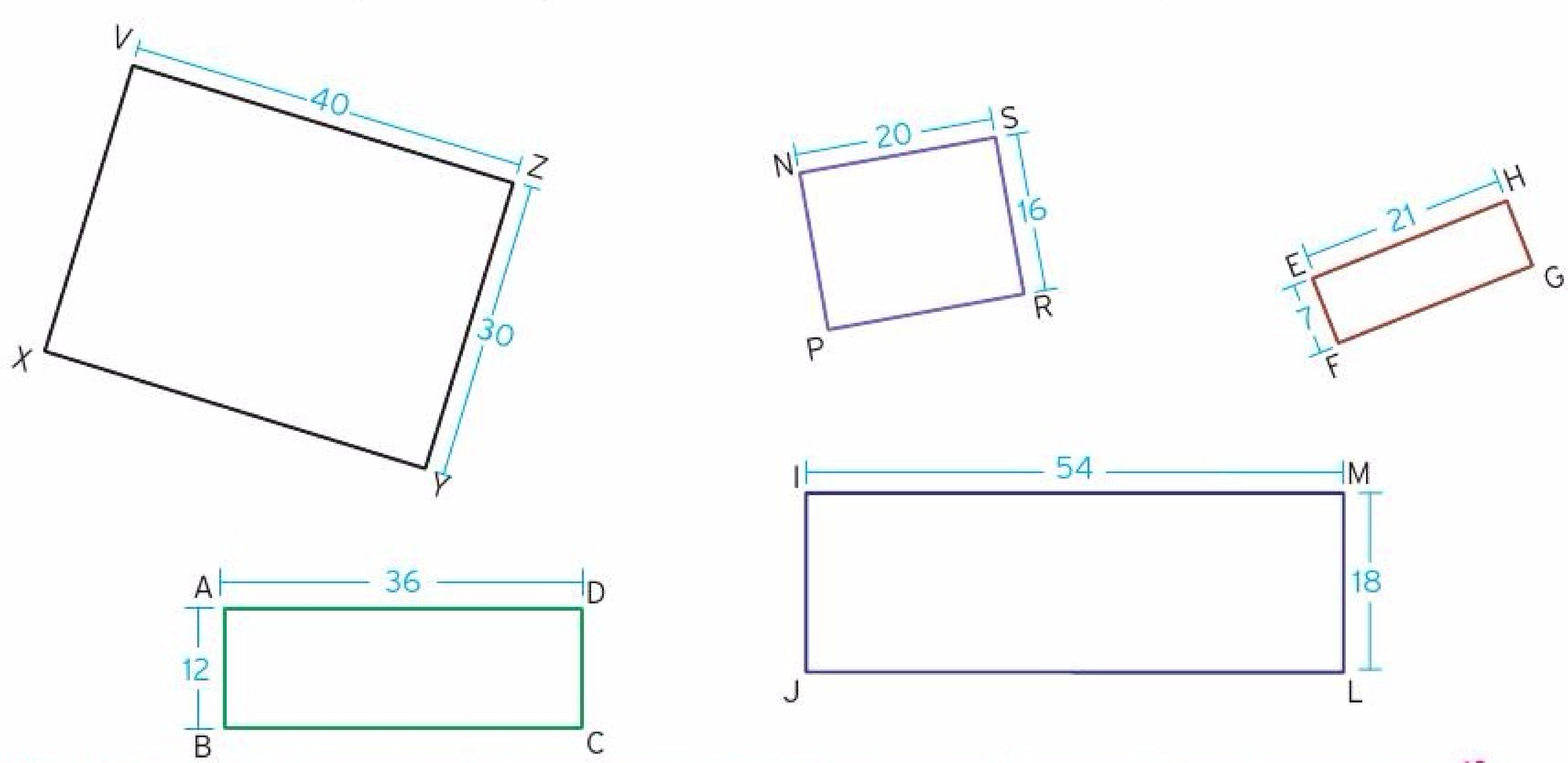
Dois **polígonos convexos** são **semelhantes** quando têm:
- ângulos correspondentes congruentes;
- lados correspondentes, respectivamente, proporcionais.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

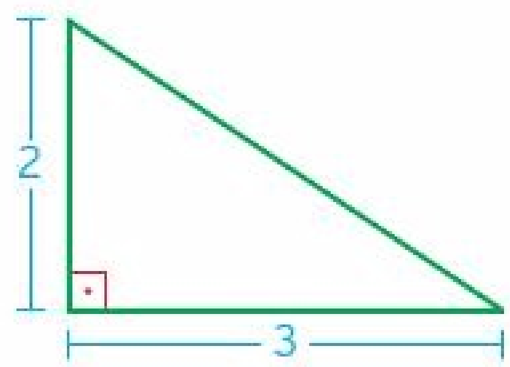
5. Dois polígonos que têm ângulos correspondentes congruentes são sempre semelhantes? Não.

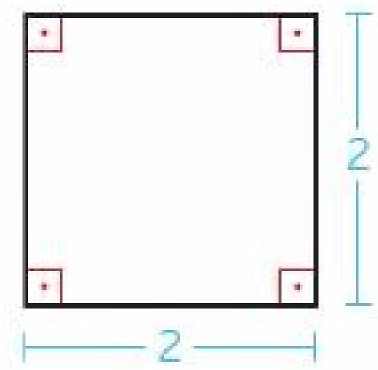
6. Nas figuras, as medidas dadas estão indicadas em centímetros. Identifique os pares de retângulos semelhantes. Justifique a sua resposta e determine a razão de semelhança.



ABCD ~ EFGH — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados correspondentes respectivamente proporcionais; $\frac{12}{7}$.
ABCD ~ IJLM — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados correspondentes respectivamente proporcionais; $\frac{2}{3}$.
EFGH ~ IJLM — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados homólogos proporcionais; $\frac{7}{18}$.

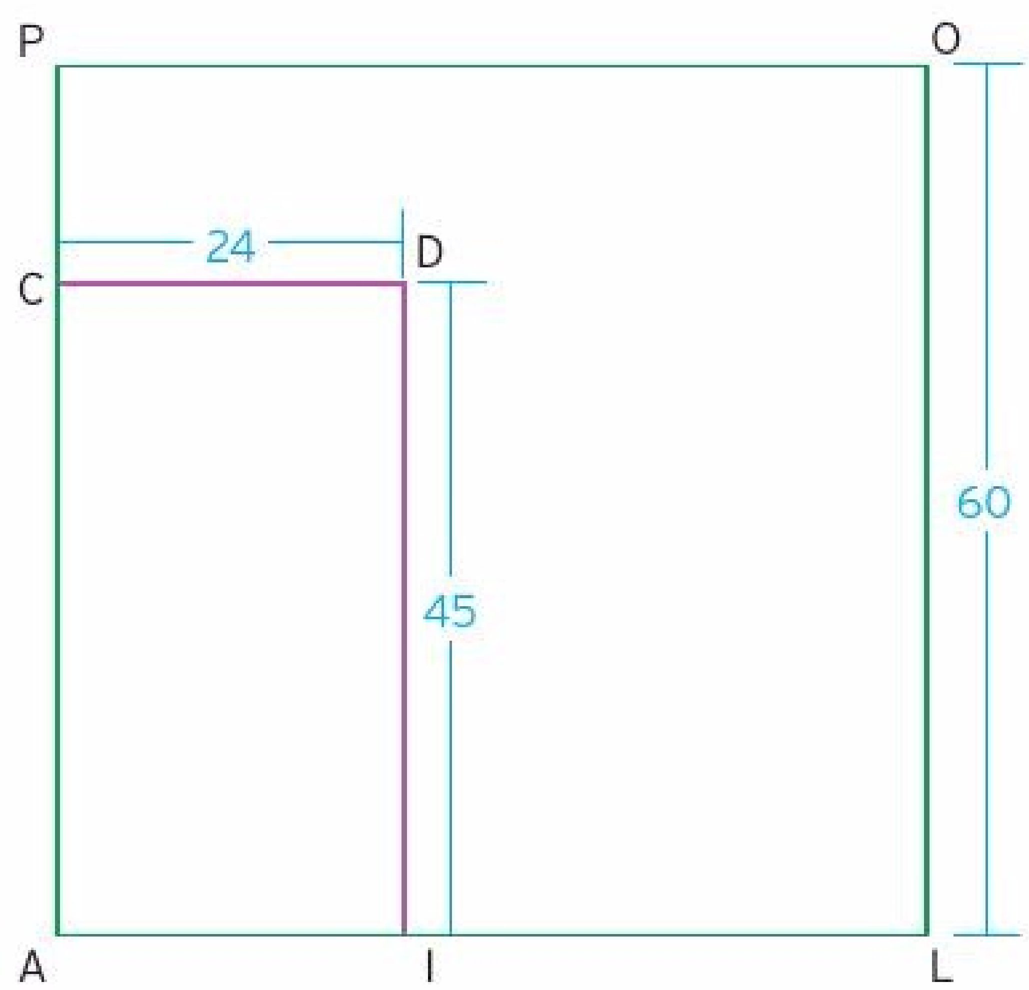
7. Desenhe três polígonos, cada um deles semelhante a um dos polígonos seguintes: Resposta pessoal.





Medidas indicadas em cm.

8. Os retângulos da figura representada abaixo foram desenhados de modo a serem semelhantes.



a) Se med $\overline{LO}$ é 60 cm e med $\overline{ID}$ é 45 cm, qual é a razão de semelhança utilizada? $\frac{4}{3}$ ou $\frac{3}{4}$

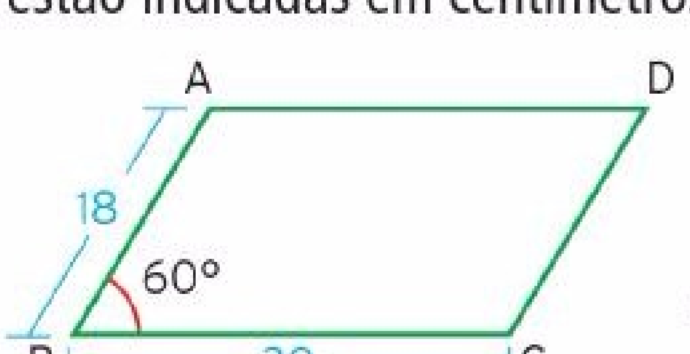
b) Qual é a medida de $\overline{OP}$? 32 cm

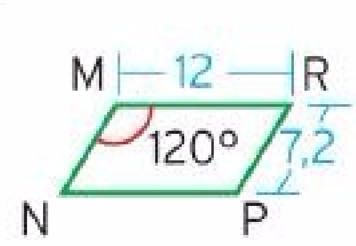
c) Qual é o perímetro de PALO? E de CAID? 184 cm; 138 cm

d) Qual é a razão entre os perímetros de PALO e CAID, nessa ordem? $\frac{4}{3}$

e) Copie essa figura e desenhe outro retângulo semelhante a esse, de modo que um dos vértices seja **A**. Resposta pessoal.

9. Observe os paralelogramos desenhados e responda às questões. Considere que as medidas estão indicadas em centímetros:



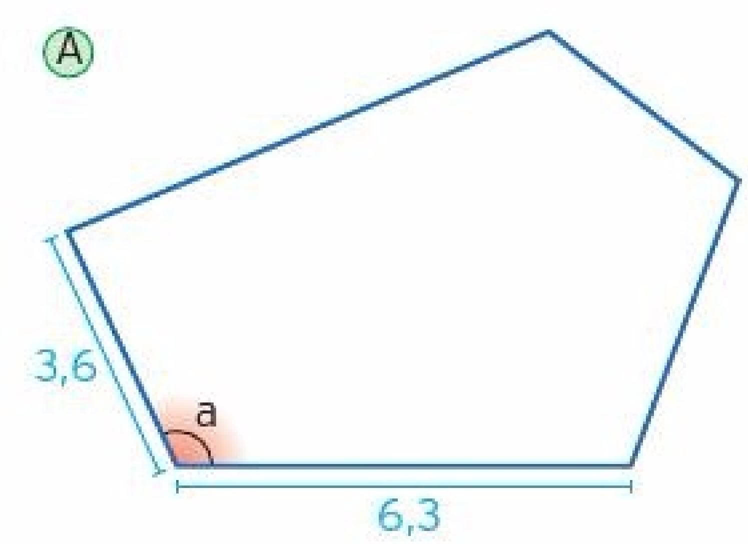


a) Quais as medidas dos demais lados em cada paralelogramo? med $\overline{DA}$ = 30 cm; med $\overline{CD}$ = 18 cm; med $\overline{MN}$ = 7,2 cm; med $\overline{NP}$ = 12 cm.

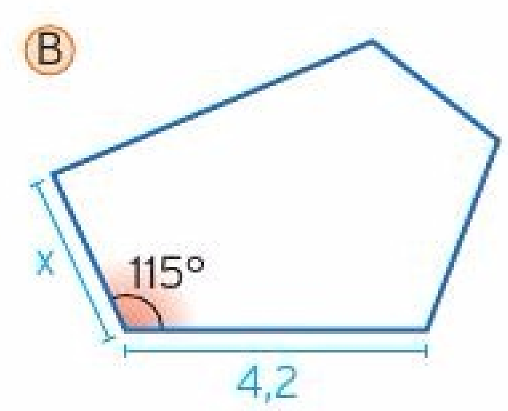
b) Quais são as medidas dos demais ângulos em cada paralelogramo? med $\hat{D}$ = 60°; med $\hat{A}$ = med $\hat{C}$ = 120°; med $\hat{P}$ = 120°; med $\hat{N}$ = med $\hat{R}$ = 60°.

c) ABCD e MNPR são semelhantes? Por quê? Sim; porque os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são, respectivamente, proporcionais.

10. Os pentágonos dados são semelhantes.



Medidas indicadas em cm.



a) Qual é a razão de semelhança entre esses pentágonos na ordem de A para B? $\frac{3}{2}$

b) Calcule, em centímetros, a medida **x** indicada na figura B. 2,4 cm

c) Calcule, em graus, a medida a indicada na figura A. 115°

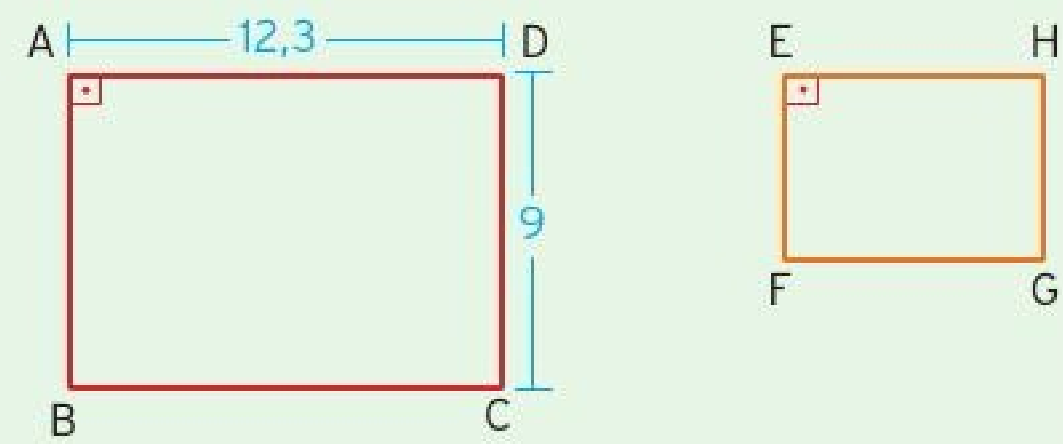
d) Qual é a razão de semelhança entre os perímetros do pentágono A para o pentágono B? $\frac{3}{2}$

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, leiam, reflitam e resolvam.

Os retângulos ABCD e EFGH representados ao lado são semelhantes e as medidas do comprimento e da largura de ABCD são, respectivamente, 12,3 cm e 9 cm.



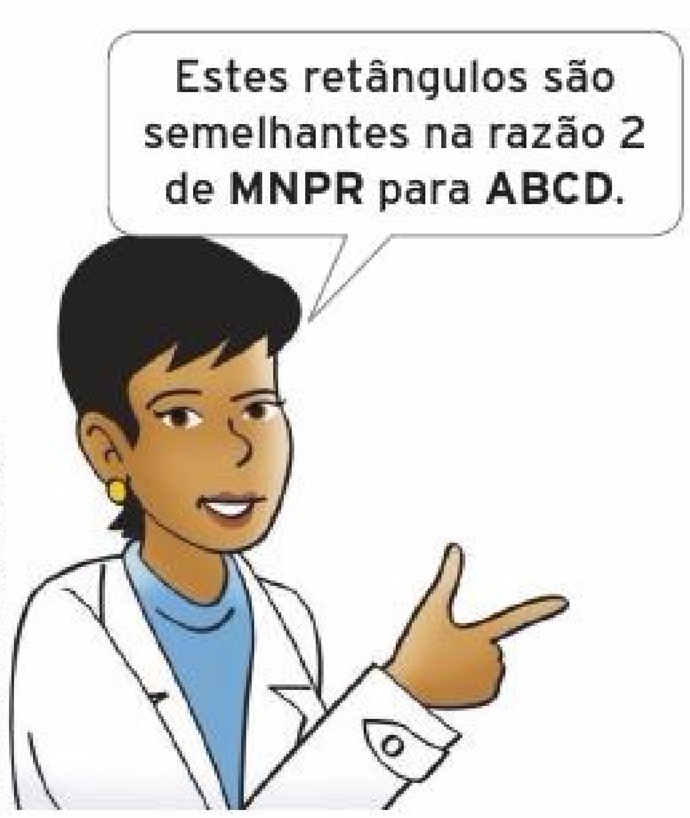
- Se a razão de semelhança do retângulo ABCD para o retângulo EFGH é $\frac{5}{3}$, quais são as medidas dos lados correspondentes em EFGH? 7,38 cm; 5,4 cm.

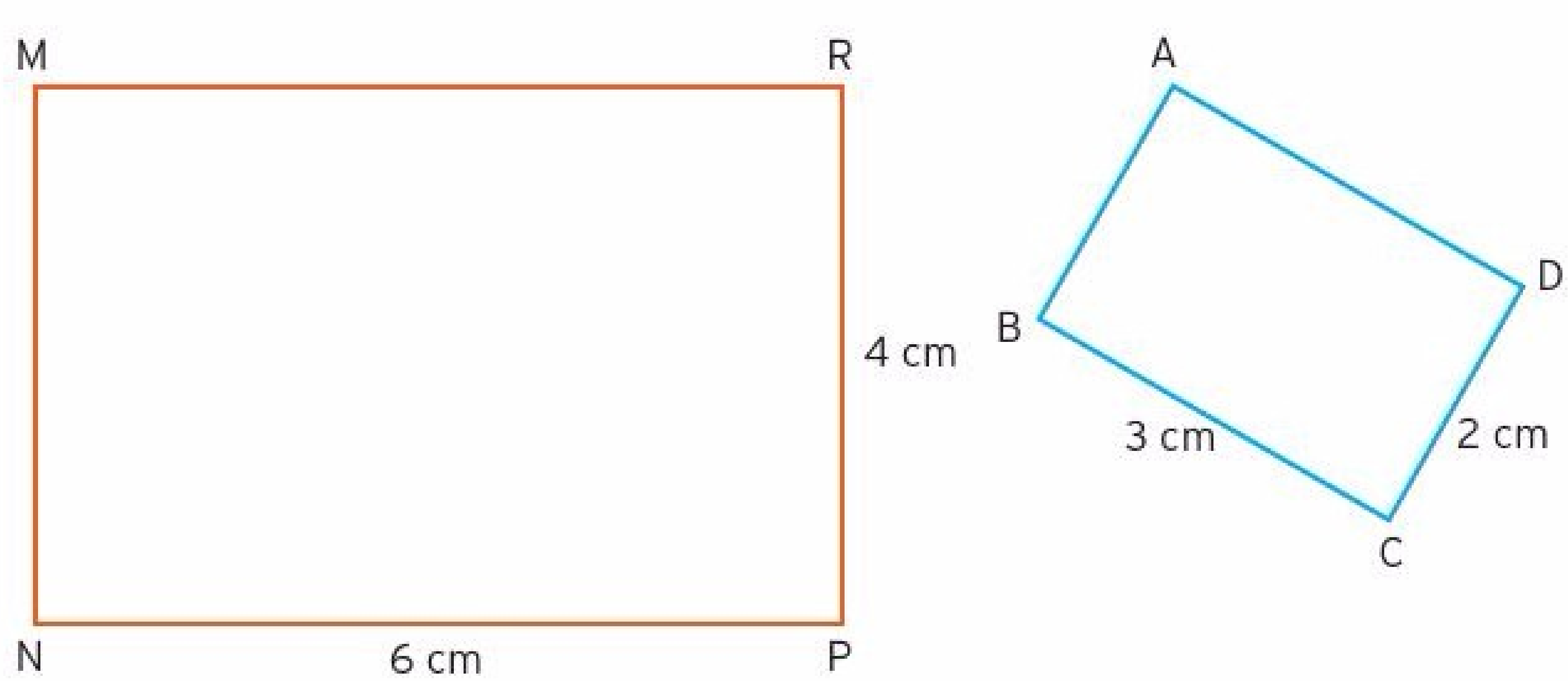
Polígonos semelhantes e perímetro

A propriedade citada a seguir pode ser demonstrada para dois polígonos semelhantes quaisquer.

Quando dois polígonos são semelhantes, os perímetros desses polígonos são proporcionais na mesma razão que entre dois lados correspondentes quaisquer.

Exemplo:





ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

perímetro MNPR: 20 cm
perímetro ABCD: 10 cm

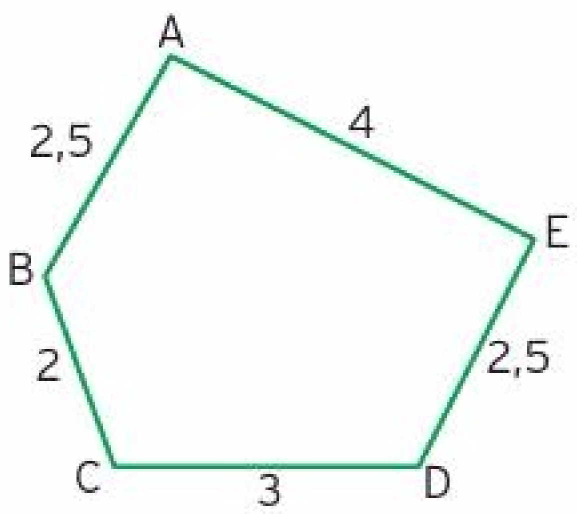
$$\frac{\text{perímetro MNPR}}{\text{perímetro ABCD}} = \frac{20}{10} = 2$$

Portanto, a razão entre os perímetros desses retângulos semelhantes é igual à razão de semelhança entre eles ou, ainda, igual à razão entre dois lados correspondentes quaisquer.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

11. Um pentágono MNPR é semelhante ao pentágono ABCDE da figura na razão $\frac{5}{2}$, nessa ordem. Qual é o perímetro do pentágono MNPR? 35 cm



Medidas indicadas em cm.

12. Um dos lados de um polígono mede 5 cm e seu perímetro mede 75 cm. Qual é o perímetro de um polígono semelhante a esse, cujo lado correspondente ao lado dado mede 14 cm? 210 cm

13. Dois polígonos, Ⓟ e Ⓡ, são semelhantes e os perímetros medem 250 cm e 200 cm, respectivamente. Se um dos lados do polígono Ⓟ mede 18,2 cm, qual é a medida do lado homólogo a esse no polígono Ⓡ? 14,56 cm

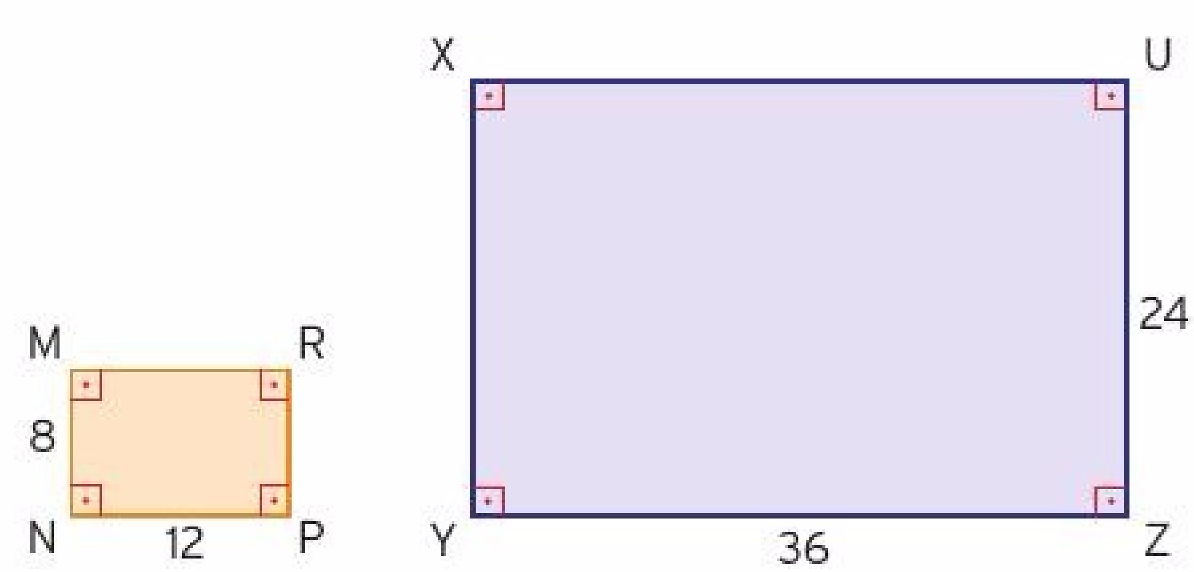
Polígonos semelhantes e área

Assim como no caso de perímetros, as áreas de polígonos semelhantes estão relacionadas.

É possível mostrar que a **razão entre as áreas** de dois polígonos semelhantes, quaisquer, **é o quadrado da razão de semelhança** entre os lados homólogos entre eles.

Exemplo:

Os retângulos da figura são semelhantes e as medidas estão indicadas em centímetros.



Determinamos a razão de semelhança entre os retângulos dados calculando a razão entre as medidas de dois lados correspondentes. A razão de semelhança é $\frac{1}{3}$.

$$\frac{\text{med } \overline{PR}}{\text{med } \overline{ZU}} = \frac{8}{24} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

Vamos calcular a razão entre a área de MNPR e de XYZU, nesta ordem:

área de MNPR: $12 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$

área de XYZU: $36 \cdot 24 = 864 \text{ cm}^2$

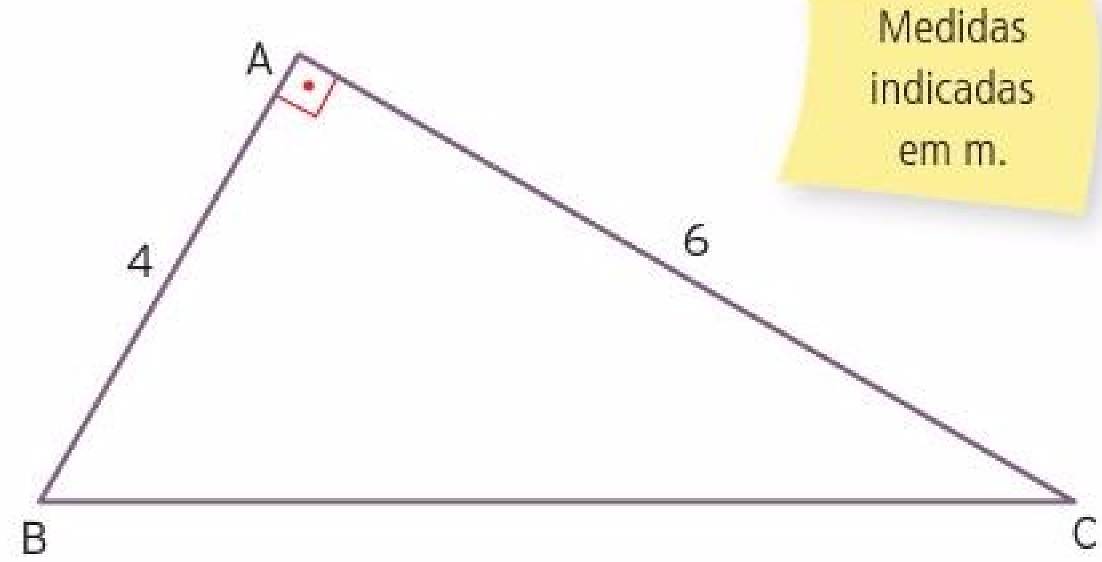
$$\frac{\text{área MNPR}}{\text{área XYZU}} = \frac{96}{864} = \frac{1}{9} = \left(\mathbf{\frac{1}{3}}\right)^2$$

Note que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança entre os retângulos.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

14. Um triângulo MNP é semelhante ao triângulo da figura na razão $\frac{2}{5}$ e as medidas dos seus lados são maiores do que as do $\triangle ABC$.



Medidas indicadas em m.

a) Qual a razão entre as áreas do $\triangle ABC$ e $\triangle MNP$, nessa ordem? $\frac{4}{25}$

b) Qual é a área do $\triangle MNP$? 75 m^2.

15. Desenhe dois retângulos semelhantes.

a) Determine a razão de semelhança entre esses dois retângulos. Resposta pessoal.

b) Determine a razão entre as áreas desses retângulos. Resposta pessoal.

c) A razão entre as áreas desses retângulos é igual à razão entre dois lados quaisquer? Não.

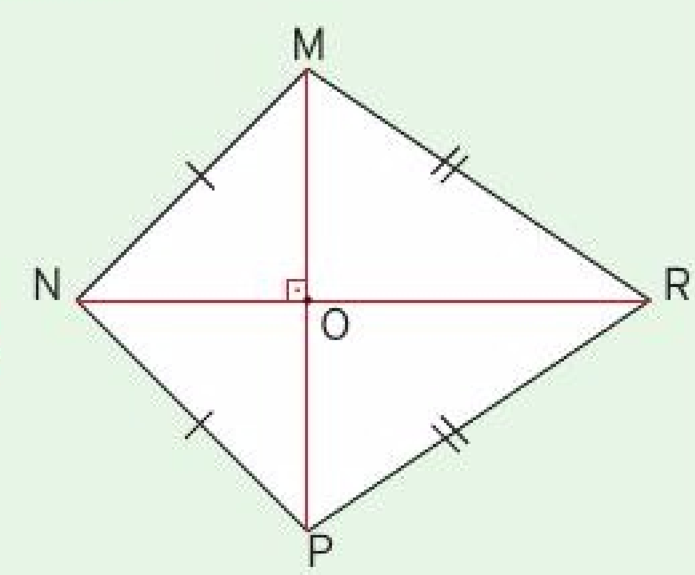
d) Que relação existe entre as razões citadas no item anterior?
A razão das áreas é o quadrado da razão entre dois lados correspondentes.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, leiam, investiguem, reflitam e respondam às questões.

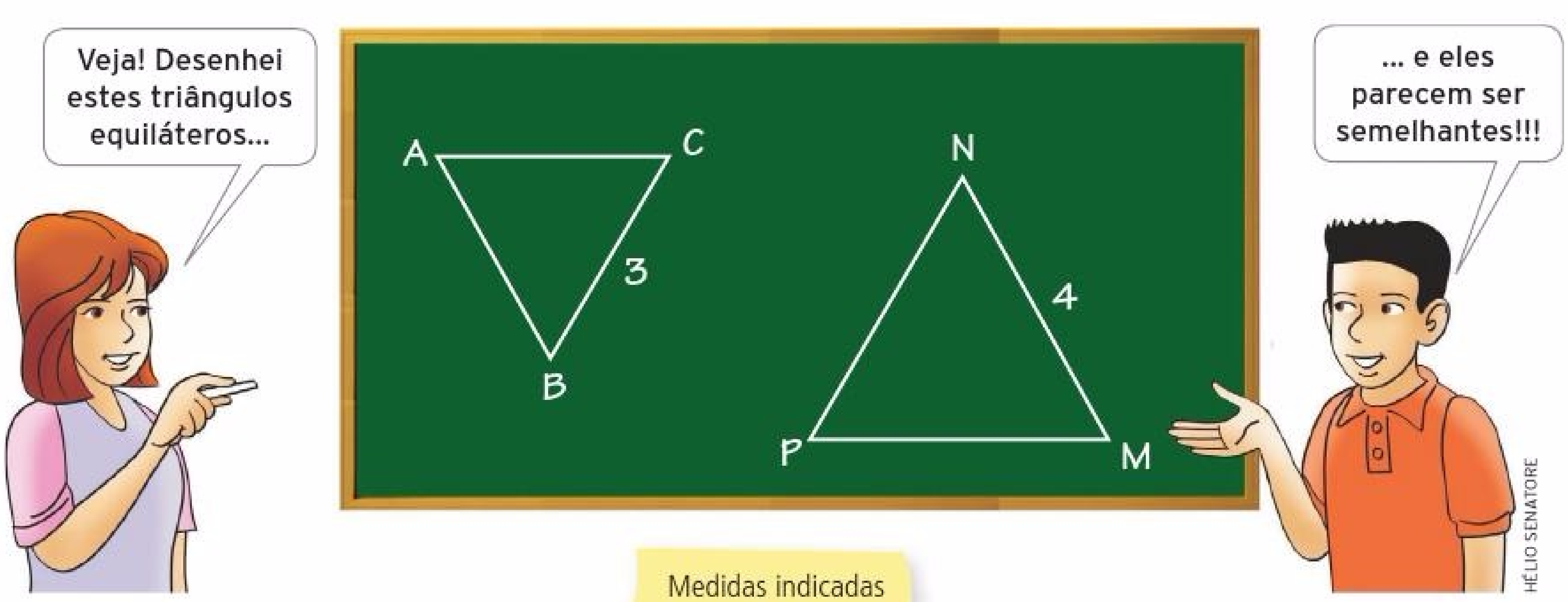
Este é o desenho de uma pipa que João construiu. A pipa construída é semelhante ao desenho na razão 3 : 1, nessa ordem.



- A pipa construída lembra um losango? Não.
- É possível saber as medidas dos lados da pipa que João construiu? Não.
- Imagine que, no desenho, a medida do lado menor da pipa é 10 cm. Quanto deve medir o lado maior da pipa construída? 30 cm.

Triângulos equiláteros, quadrados e a semelhança

Observe esta cena:



Medidas indicadas em cm.

Os triângulos ABC e MNP são semelhantes. Veja:

- $\triangle ABC$ e $\triangle MNP$ são equiláteros e, por isso, todos os ângulos medem 60°. Isso significa que os ângulos correspondentes são congruentes.

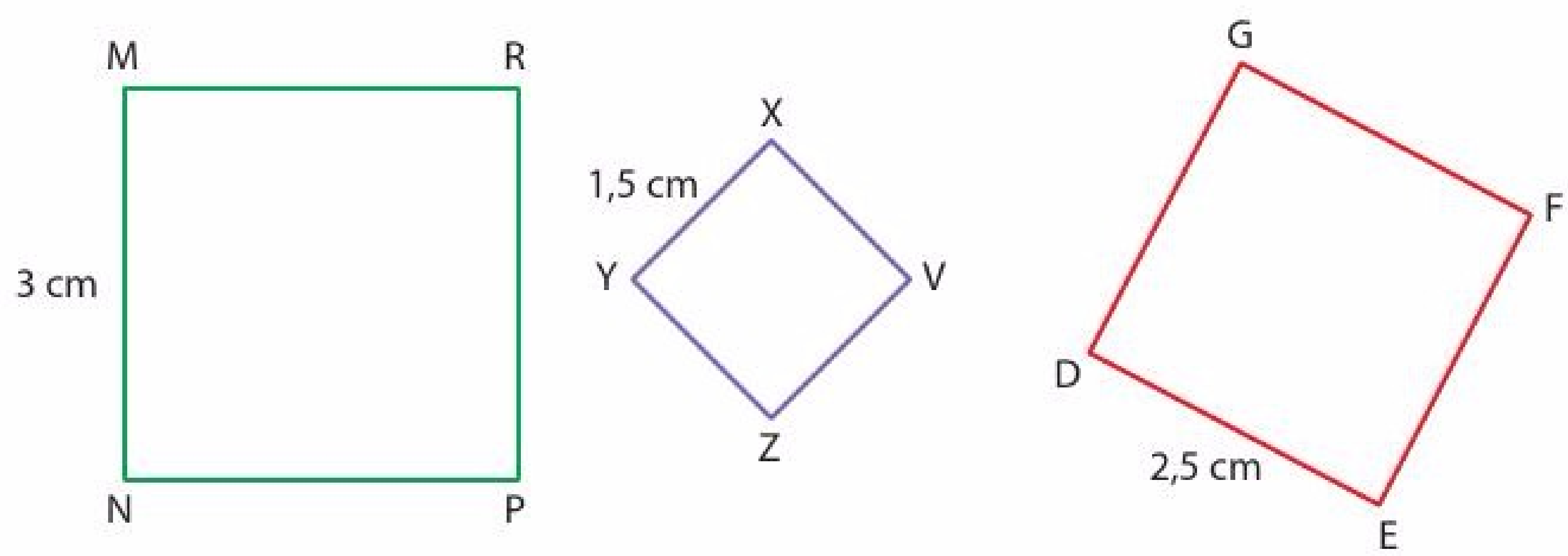
$$\hat{A} \equiv \hat{M} \qquad \hat{B} \equiv \hat{N} \qquad \hat{C} \equiv \hat{P}$$

- os lados correspondentes são proporcionais na razão $\frac{3}{4}$.

$$\frac{\overline{AB}}{MN} = \frac{\overline{BC}}{NP} = \frac{\overline{CA}}{PM} = \frac{3}{4} \text{ —— } \triangle ABC \sim \triangle MNP \text{ na razão } \frac{3}{4}.$$

De modo geral: dois triângulos equiláteros quaisquer são sempre semelhantes.

O mesmo acontece com os quadrados, ou seja, dois quadrados quaisquer são sempre semelhantes. Exemplo:



MNPR ~ XYZV na razão $\frac{3}{1,5} = 2$

MNPR ~ DEFG na razão $\frac{3}{2,5} = \frac{6}{5}$

XYZV ~ DEFG na razão $\frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$

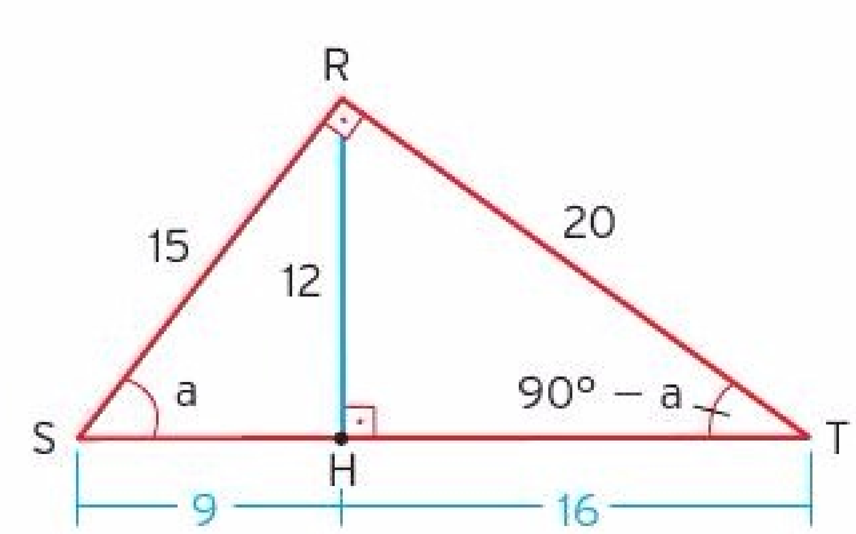
É possível demonstrar que:

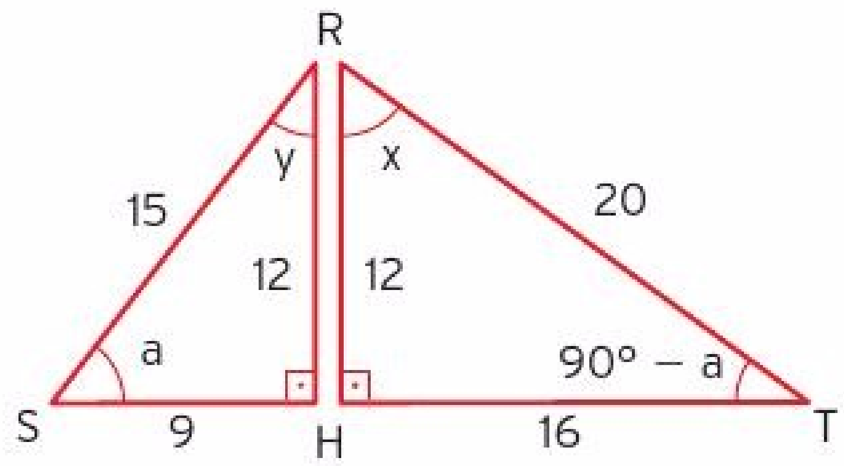
> Dois polígonos regulares quaisquer com o mesmo número de lados são sempre semelhantes.

Existem muitos problemas que envolvem semelhança entre polígonos e equações. Veja um exemplo:

Na figura, temos os triângulos RSH e TRH. Vamos:

- mostrar que $\triangle RSH \sim \triangle TRH$;
- identificar os lados correspondentes;
- calcular a razão de semelhança.





Separamos $\triangle RSH$ e $\triangle TRH$:

No $\triangle RSH$ —— $90° + a + y = 180°$ —— $y = 90° - a$

No $\triangle TRH$ —— $90° + 90° - a + x = 180°$ —— $x = a$

Portanto, $\triangle RSH$ e $\triangle TRH$ têm ângulos correspondentes congruentes.

9 é a medida do lado oposto ao ângulo de medida (90° − a).

12 é a medida do lado oposto ao ângulo de medida (90° − a) em $\triangle TRH$.

$$\frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$$

Medidas dos lados do $\triangle RSH$ em ordem crescente.

Simplificando as razões, verificamos que os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{12}_{\,4}} = \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,4}} = \frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{20}_{\,4}} \text{ —— } \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$\triangle RSH \sim \triangle TRH$, na razão $\frac{3}{4}$, e os lados correspondentes são $\overline{RS}$ e $\overline{TR}$, $\overline{SH}$ e $\overline{RH}$, $\overline{RH}$ e $\overline{TH}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

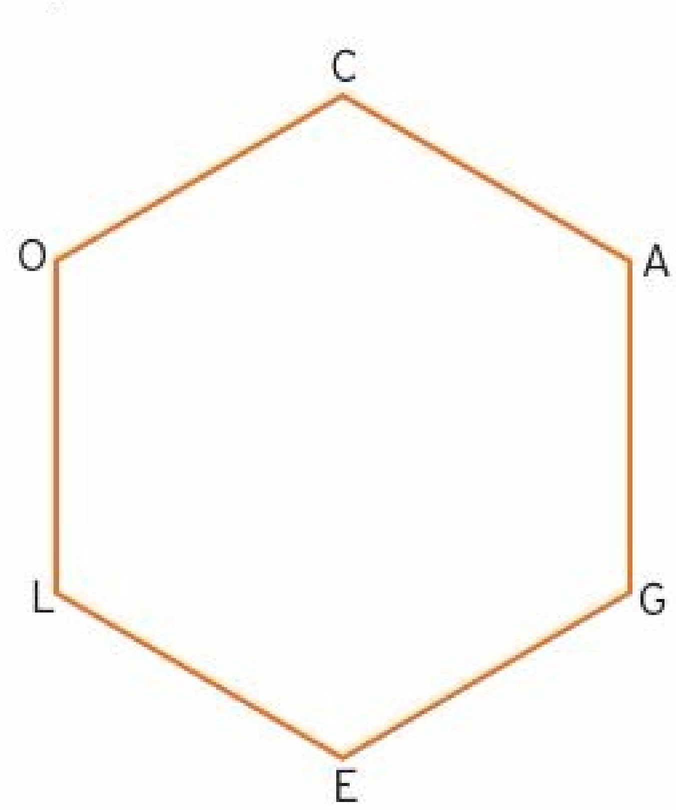
16. Responda às questões:

a) Dois pentágonos regulares quaisquer são sempre semelhantes? Sim.

b) Dois retângulos quaisquer são sempre semelhantes? Não.

c) Dois hexágonos regulares quaisquer são sempre semelhantes? Sim.

17. COLEGA é um hexágono regular cujos lados medem 2,4 cm.

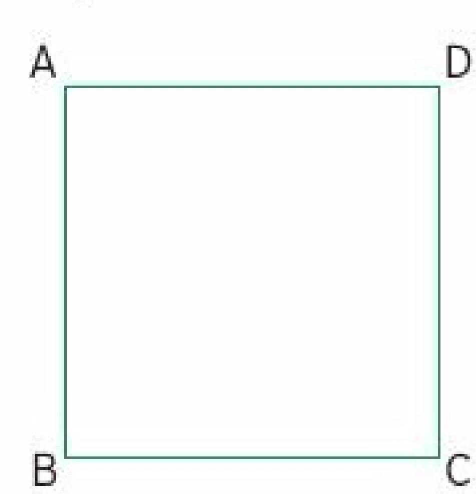


a) Desenhe um hexágono semelhante a esse, e maior que ele, de modo que a razão de semelhança seja $\frac{2}{5}$. Lados 6 cm.

b) Qual é o perímetro de COLEGA? E do hexágono desenhado? 14,4 cm; 36 cm.

c) Qual é a razão entre o perímetro de COLEGA e do hexágono desenhado nessa ordem? $\frac{2}{5}$

18. Considere o quadrado ABCD representado abaixo.



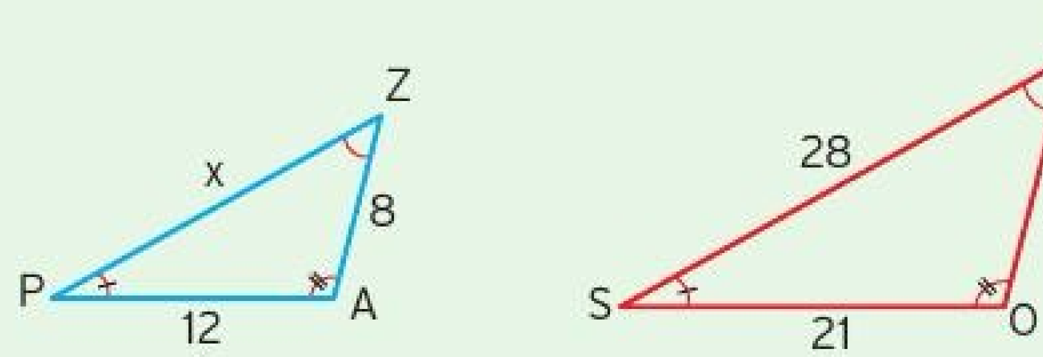
a) Qualquer quadrado que você desenhar será semelhante ao quadrado ABCD? Sim.

b) Escolha duas razões de semelhança diferentes e construa um quadrado menor que o quadrado ABCD e outro quadrado maior que ABCD. Resposta pessoal.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões.
Os triângulos PAZ e SOM são semelhantes.



Medidas indicadas em cm.

a) A razão de semelhança entre os triângulos PAZ e SOM é $\frac{8}{28}$? Explique. Não, porque AZ e SM não são lados homólogos.

b) O lado homólogo a $\overline{PA}$ é $\overline{SM}$ ou $\overline{SO}$? $\overline{SO}$

c) Qual é a razão de semelhança entre os triângulos PAZ e SOM? $\frac{12}{21}$ ou $\frac{4}{7}$.

d) Qual é o valor de **x**? E de **y**? 16 cm; 14 cm.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

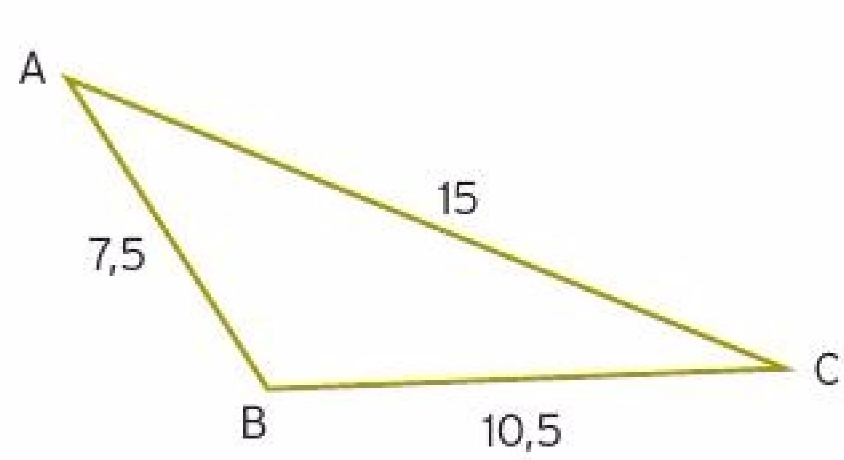
19. A razão entre os lados de dois decágonos regulares A e B, nessa ordem, é $\frac{4}{7}$.

a) O perímetro de A é menor, igual ou maior que o perímetro de B? Menor.

b) Se os lados de A medirem 3,6 cm, qual será a medida dos lados de B? 6,3 cm

c) Se o perímetro de B for 114,45 cm, qual será o perímetro de A? 65,4 cm

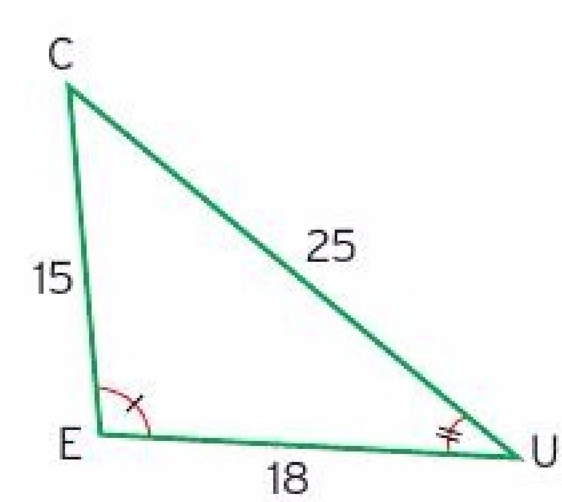
20. Um triângulo MNP é semelhante ao △ABC da figura na razão $\frac{7}{3}$, nessa ordem.

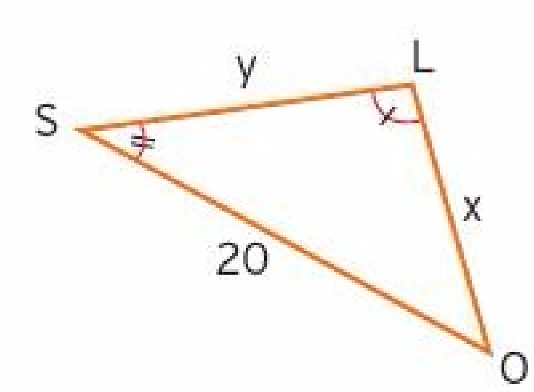


a) Qual é o perímetro do △MNP? 77 cm

b) Qual é a medida do lado maior do △MNP? 35 cm

21. Estes triângulos são semelhantes. As medidas estão indicadas em centímetros.





a) Qual é a razão de semelhança do triângulo maior para o menor? $\frac{5}{4}$

b) Qual é o valor de **x**? E de **y**? 12 cm; 14,4 cm.

c) Qual é o perímetro de CEU? E de SOL? 58 cm; 46,4 cm.

d) Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos CEU e SOL, nessa ordem? $\frac{5}{4}$

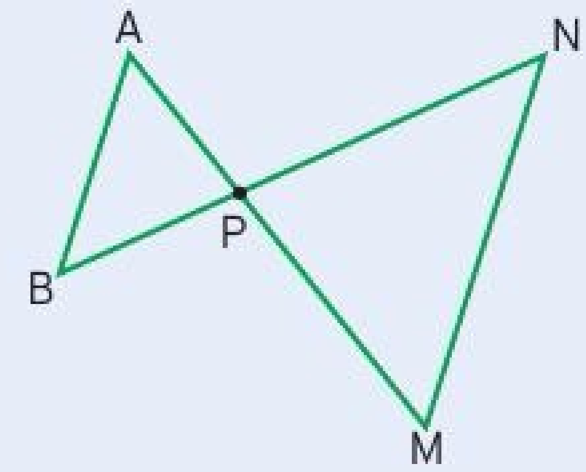
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre a questão e encontrem uma solução.

Nesta figura, $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PM}}$.

- Mostrem que $\triangle ABP \sim \triangle MNP$.



$\overline{AB} \parallel \overline{MN}$

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \parallel \overline{MN} \\ \overline{AM} \text{ transversal}\end{array}\right] \hat{A} = \hat{M}$ (alternos internos)

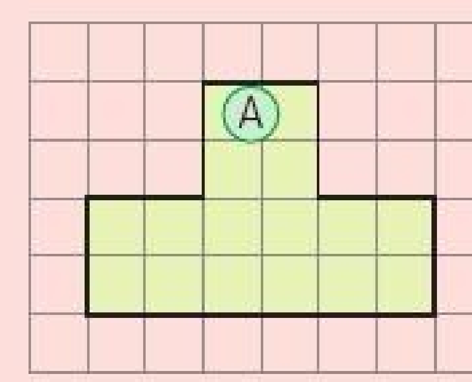
$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \parallel \overline{MN} \\ \overline{BN} \text{ transversal}\end{array}\right] \begin{array}{l}\hat{B} = \hat{N} \text{ (alternos internos)} \\ B\hat{P}A = N\hat{P}M \text{ (o.p.v.)}\end{array}$

Portanto, $\triangle ABP \sim \triangle MNP$, pois têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

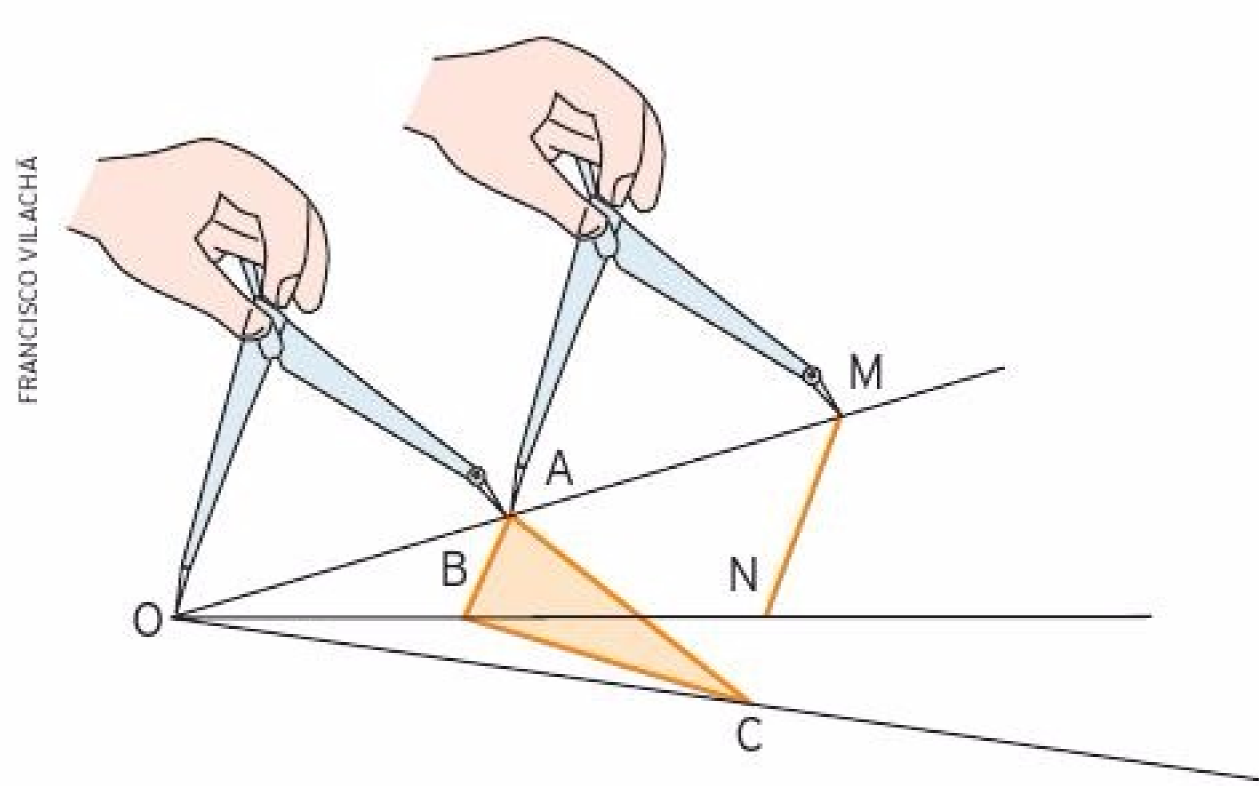
Construindo figuras semelhantes



- Desenhe peças iguais à figura (A), recorte-as e componha uma figura semelhante a ela.
- Compare a sua solução com a de seus colegas. Veja resposta no final do livro.

O que é homotetia?

Observe como podemos obter um triângulo MNR semelhante a um triângulo ABC considerando-se um ponto **O**.

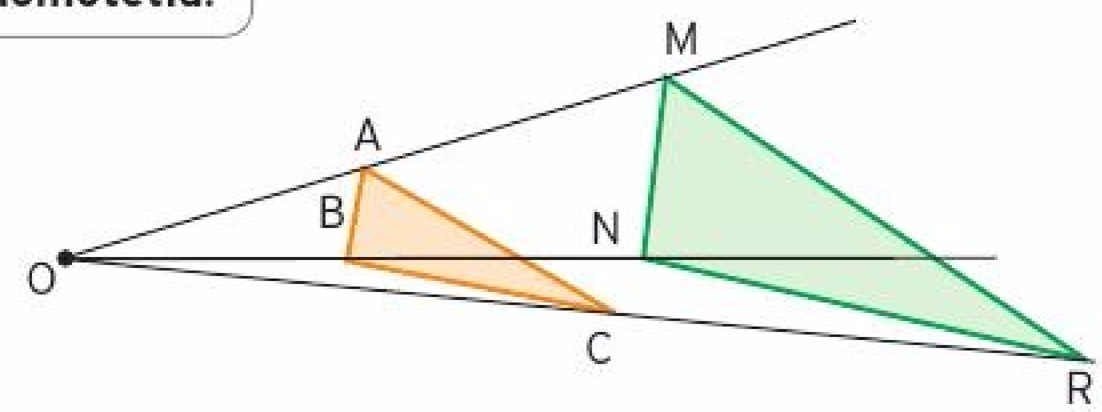


Traçam-se as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ a partir do ponto **O**.

O segmento de reta $\overline{MN}$ foi obtido a partir de $\overline{AB}$ de modo que med $\overline{OM} = 2 \cdot$ med $\overline{OA}$ e med $\overline{ON} = 2 \cdot$ med $\overline{OB}$.

Da mesma forma obtém-se o ponto **R** sobre $\overrightarrow{OC}$ e tem-se o triângulo MNR.

VAGNER DE FARIAS



$\triangle$ABC e $\triangle$MNR são semelhantes.

O triângulo MNR foi obtido a partir do $\triangle$ABC por meio de uma **homotetia de centro O** e **razão 2**. Nessa homotetia, $\overline{MN}$ é a imagem de $\overline{AB}$, $\overline{NR}$ é a imagem de $\overline{BC}$ e $\overline{RM}$ é a imagem de $\overline{CA}$. Além disso, $\triangle$MNR e $\triangle$ABC são semelhantes na razão 2 : 1, nessa ordem.

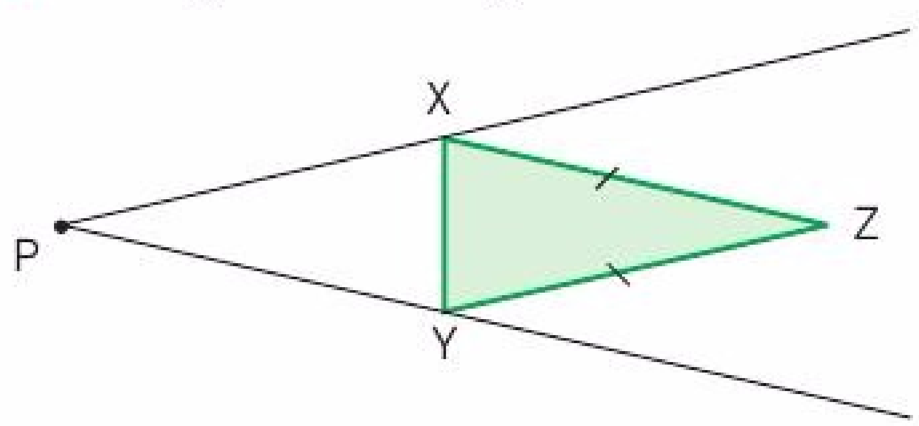
Note que $\overline{MN}$ e $\overline{AB}$ são segmentos de retas paralelas. Temos também: $\overline{NR} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{RM} \parallel \overline{CA}$.

Além disso, observe que é possível ampliar ou reduzir uma figura por meio de uma homotetia.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

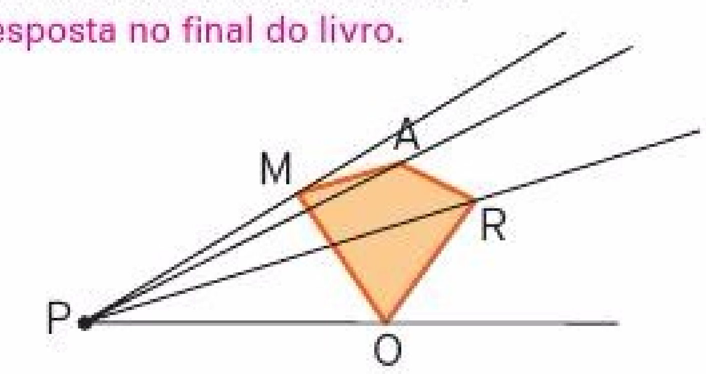
22. O triângulo XYZ da figura é isósceles.



a) Copie essa figura e realize uma homotetia de centro **P** e razão 3. Veja resposta no final do livro.

b) Em relação aos lados, que tipo de triângulo é o triângulo obtido no item **a**? Isósceles.

23. Amplie o quadrilátero AMOR da figura utilizando uma homotetia de razão 2.
Veja resposta no final do livro.



Não há necessidade de esgotar, nesse momento, o assunto estudado. Assim, se desejar, proponha a resolução de apenas algumas atividades. Os alunos poderão resolver as demais durante os bimestres seguintes.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

24. Um pentágono ABCDE é semelhante a outro pentágono MNPQR e a razão de semelhança entre eles, nessa ordem, é $\frac{7}{3}$. Se o lado $\overline{BC}$ correspondente ao lado $\overline{NP}$ mede 9,1 cm, qual é a medida de $\overline{NP}$? 3,9 cm.

25. Dois losangos, M e P, são semelhantes e a razão de semelhança de M para P é $\frac{1}{4}$. Se a medida de um dos lados do losango M é 18 cm, determine o perímetro do losango P. 288 cm.

26. Os lados dos quadrados M e N medem 9 cm e 11 cm, respectivamente. Representando por **r** a razão de M para N e por **t** a razão da área de M para N, responda:

a) Qual é o valor de **r**? $\frac{9}{11}$

b) Qual é o valor de **t**? $\frac{81}{121}$

27. Os triângulos SOL e LUA são semelhantes e $\overline{SO}$ e $\overline{LU}$ são lados correspondentes. Sabendo que esses lados medem $\sqrt{28}$ cm e $\sqrt{63}$ cm, respectivamente, determine a razão de semelhança dos triângulos, nessa ordem. $\frac{2}{3}$

28. Os lados de um triângulo medem 12 cm, 8 cm e 14 cm. Calcule as medidas dos lados de um triângulo semelhante a esse, sabendo que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo triângulo, nessa ordem, é $\frac{2}{5}$. 30 cm, 20 cm e 35 cm.

29. Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede 30 cm e o seu perímetro mede 90 cm. Calcule o perímetro de um triângulo MNP semelhante ao triângulo ABC, sabendo que o lado $\overline{MN}$, correspondente ao lado $\overline{AB}$, mede 18 cm. 54 cm

30. Os lados de um triângulo medem 3,6 cm, 5 cm e 6,4 cm. Calcule as medidas dos lados de um triângulo semelhante a esse, cujo perímetro mede 60 cm. 14,4 cm; 20 cm; 25,6 cm.

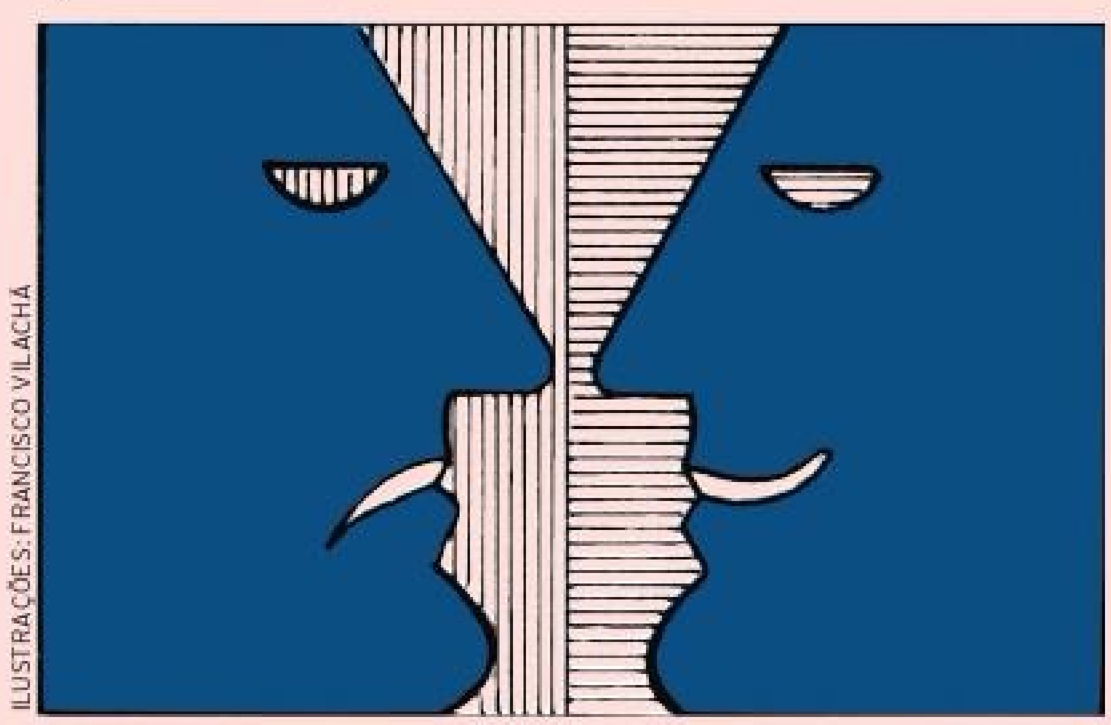
Desafio

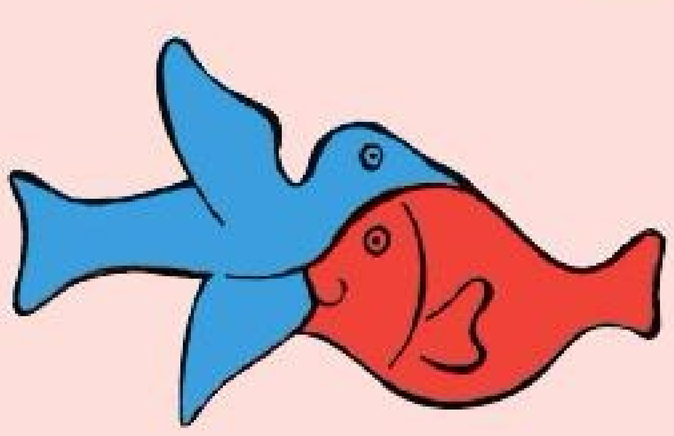
FAÇA NO CADERNO

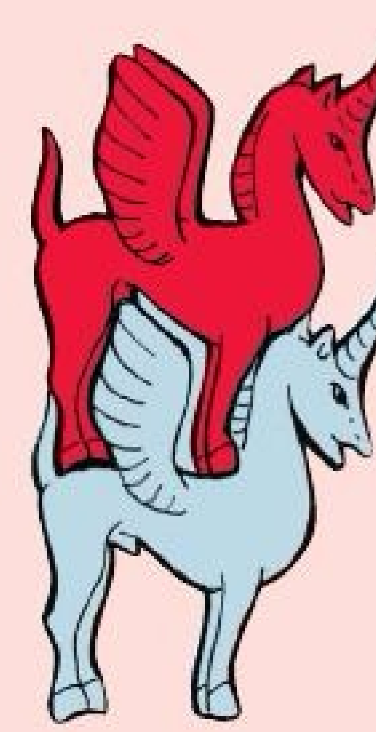
Figuras semelhantes por homotetia

- Escolha uma destas figuras ou outra de sua preferência e copie-a em uma folha de papel. Use papel de seda para copiar o desenho.

ILUSTRAÇÕES: FRANCISCO VILACHA







- Escolha um ponto para o centro de homotetia e considere a razão de ampliação igual a 3. Mãos à obra! Desenhe figuras semelhantes! Resposta pessoal.

3 Os triângulos e a semelhança

O teorema fundamental da semelhança de triângulos

Sabemos que dois polígonos são semelhantes quando, e somente quando:

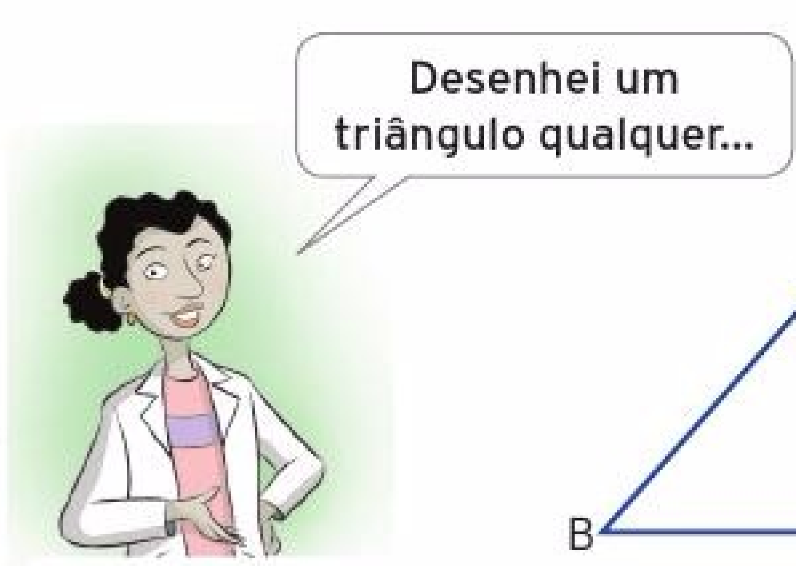
- os ângulos correspondentes são congruentes;
- os lados correspondentes são, respectivamente, proporcionais.

A importância do conceito de semelhança entre triângulos e de suas aplicações no cotidiano e nas demais ciências nos leva a aprofundar o estudo desse tema. Procure saber qual é o nível de interesse dos alunos para ajustá-lo ao seu trabalho. É possível fazer uma integração com outras disciplinas.

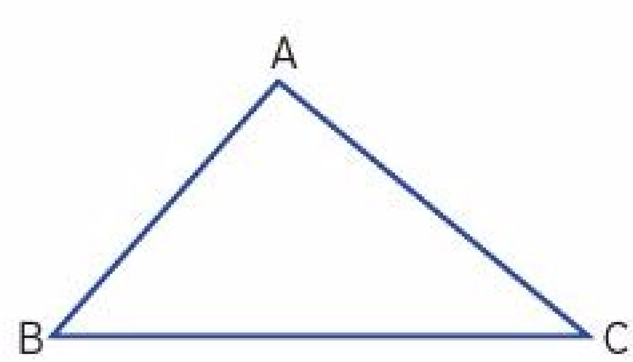
$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{M} \quad \hat{B} \equiv \hat{N} \quad \hat{C} \equiv \hat{P} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{PM}} \end{cases}$$

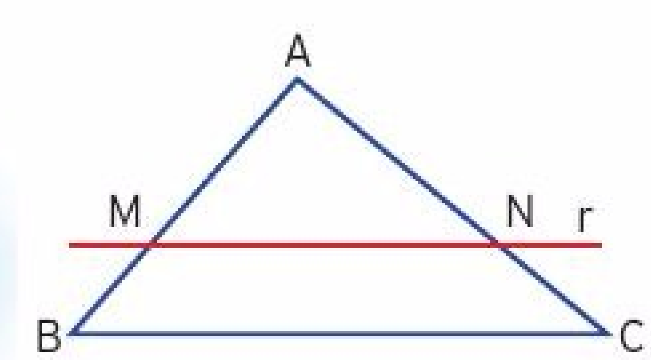
No entanto, para a semelhança entre dois triângulos existem propriedades especiais. Uma delas é conhecida como o teorema fundamental da semelhança de triângulos.

Leia com atenção:



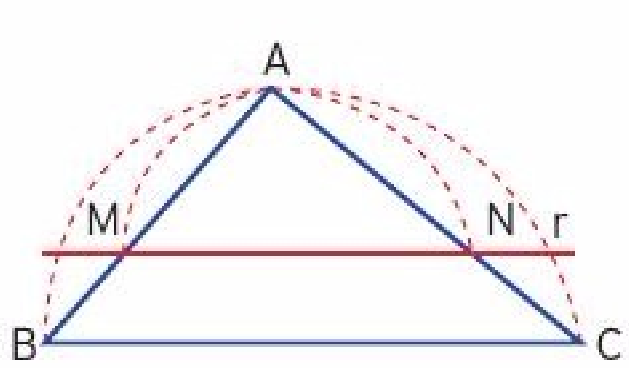
ILUSTRAÇÕES: VAGNER DE FARIAS





Nessa situação, a reta **r** intercepta os outros dois lados nos pontos **M** e **N**, formando $\triangle AMN$.

É possível demonstrar que $\triangle ABC$ e $\triangle AMN$ têm ângulos congruentes e lados correspondentes respectivamente proporcionais, ou seja, $\triangle AMN$ é semelhante ao $\triangle ABC$.



$r \,//\, \overline{BC}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{M},\ \hat{C} \equiv \hat{N},\ \hat{A} \equiv \hat{A} \\ \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{CA}} \end{array}\right\} \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

> Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo qualquer e que intercepta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

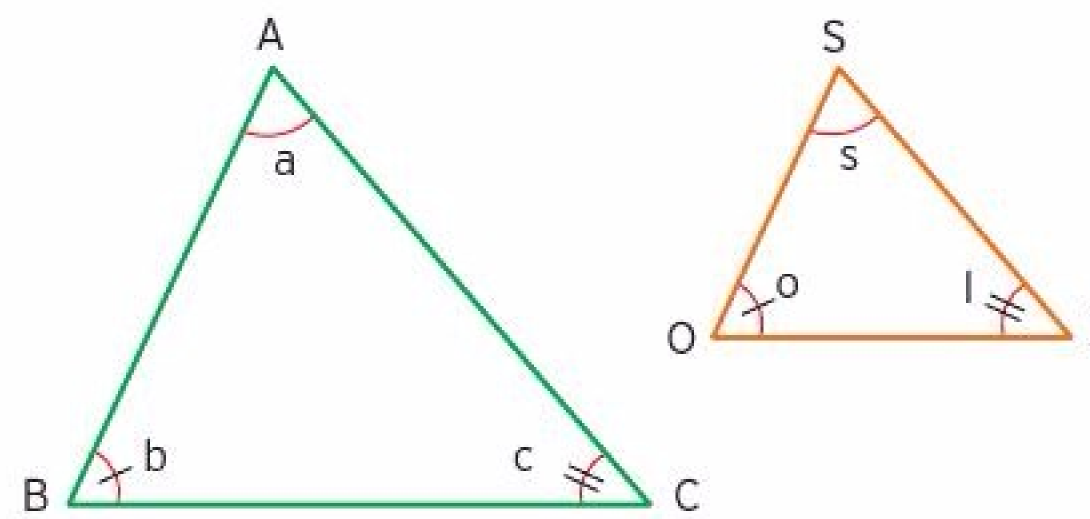
Casos de semelhança entre triângulos

Em situações nas quais temos dois triângulos parecidos, nem sempre é necessário verificar se todos os ângulos são congruentes entre si e se todos os lados correspondentes são respectivamente proporcionais para poder concluir que os triângulos são semelhantes. É suficiente verificar apenas algumas dessas condições. Vamos saber quais são, conhecendo os casos de semelhança entre triângulos.

1º caso:

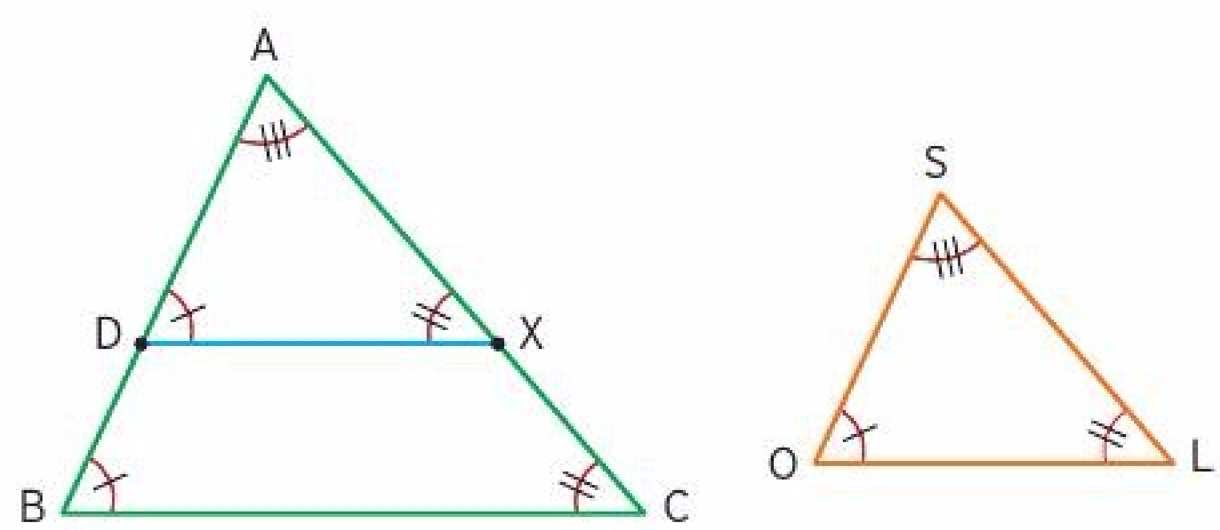
Vamos demonstrar que dois triângulos quaisquer que tenham dois ângulos respectivamente congruentes são semelhantes.

Na figura, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{O}$ são congruentes entre si, assim como $\hat{C}$ e $\hat{L}$.



Vamos demonstrar que $\triangle ABC \sim \triangle SOL$.

Destacamos um ponto **D** no segmento de reta AB de modo que $\overline{AD}$ seja congruente a $\overline{SO}$. Pelo ponto **D** traçamos uma paralela a $\overline{BC}$.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{DX} \;//\; \overline{BC} \\ \text{transversais } \overleftrightarrow{AB} \text{ e } \overleftrightarrow{AC}\end{array}\right\rangle \hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{X} \equiv \hat{C}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{D} \equiv \hat{B} \\ \hat{B} \equiv \hat{O}\end{array}\right\rangle \hat{D} \equiv \hat{O} \qquad \left.\begin{array}{r}\hat{X} \equiv \hat{C} \\ \hat{C} \equiv \hat{L}\end{array}\right\rangle \hat{X} \equiv \hat{L}$$

Como $\overline{AD} \equiv \overline{SO}$, temos $\triangle ADX \equiv \triangle SOL$ pelo caso LAA_o.

No $\triangle ABC$, temos:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ —— } \overleftrightarrow{DX} \;//\; \overleftrightarrow{BC} \text{ —— } \triangle ADX \sim \triangle ABC \text{ (Teorema fundamental)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\triangle ADX \sim \triangle ABC \\ \triangle ADX \equiv \triangle SOL\end{array}\right\rangle \triangle ABC \sim \triangle SOL$$

1º caso de semelhança entre triângulos

Dois triângulos quaisquer que tenham dois ângulos correspondentes congruentes são semelhantes.

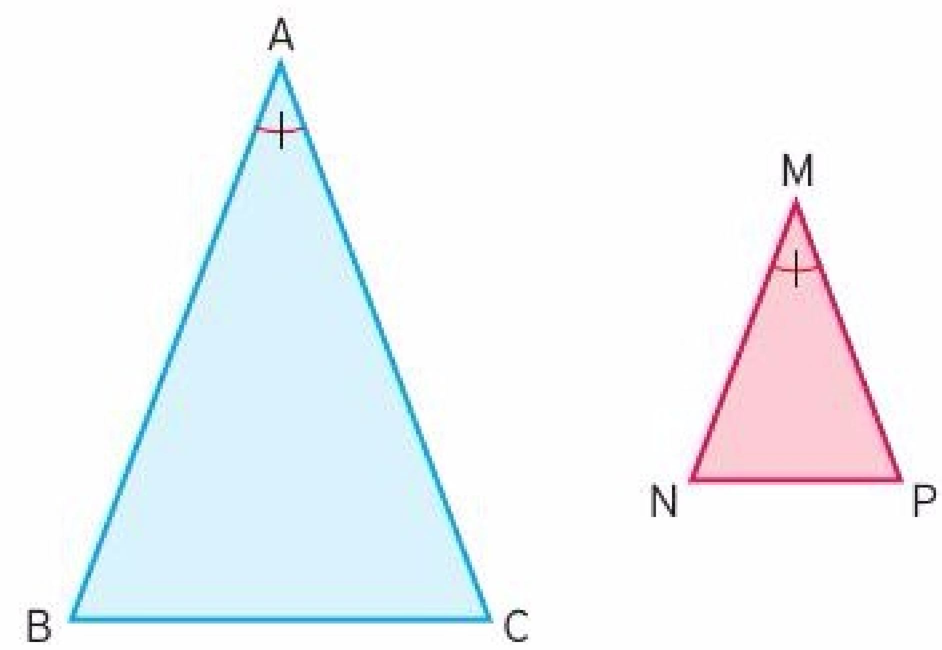
É possível demonstrar que:

2º caso de semelhança entre triângulos

Dois triângulos quaisquer que tenham lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

3º caso de semelhança entre triângulos

Dois triângulos quaisquer, que tenham dois lados correspondentes respectivamente proporcionais e os ângulos compreendidos por eles congruentes, são semelhantes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}},\ \hat{A} \equiv \hat{M}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

Em particular, triângulos congruentes são semelhantes.

Fazer e aprender

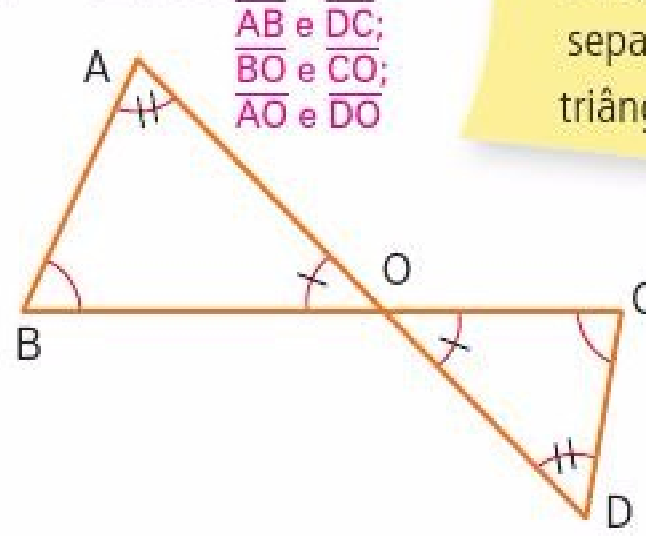
FAÇA NO CADERNO

31. Nas figuras, os pares de triângulos são semelhantes. Indique os lados correspondentes ou homólogos em cada item.

Se quiser, separe os triângulos.

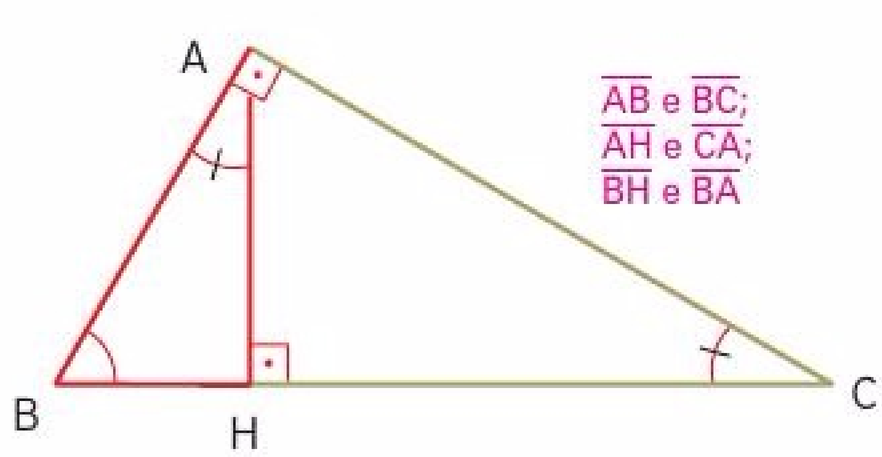
a) $\triangle ABO \sim \triangle DCO$

$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$; $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$; $\overline{AO}$ e $\overline{DO}$

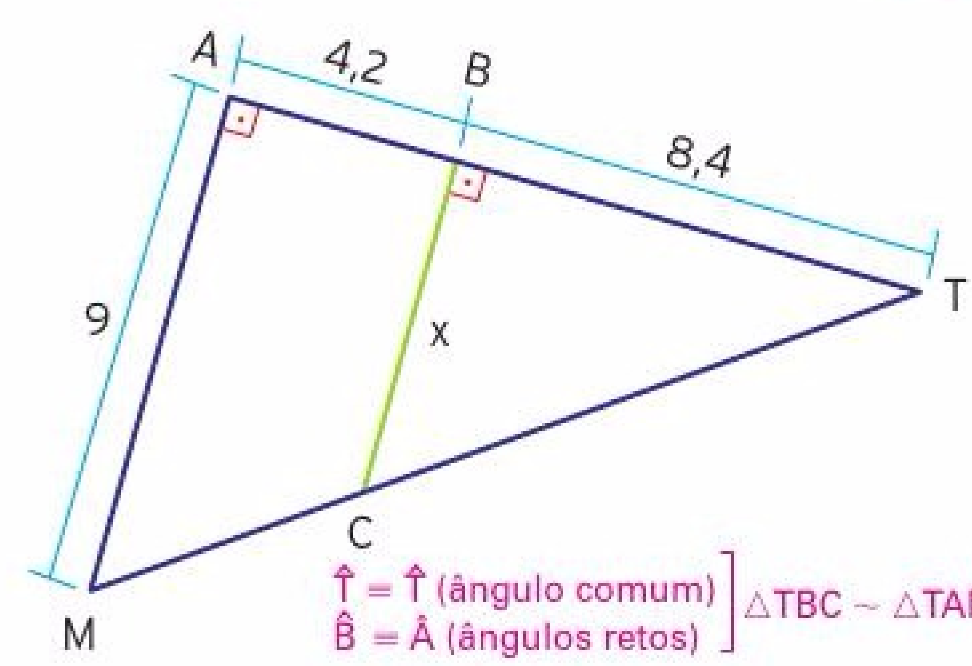


b) $\triangle HBA \sim \triangle ABC$

$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AH}$ e $\overline{CA}$; $\overline{BH}$ e $\overline{BA}$



32. Na figura a seguir, AMT é um triângulo retângulo e as medidas estão indicadas em centímetros. Qual é o valor de **x**? 6 cm.



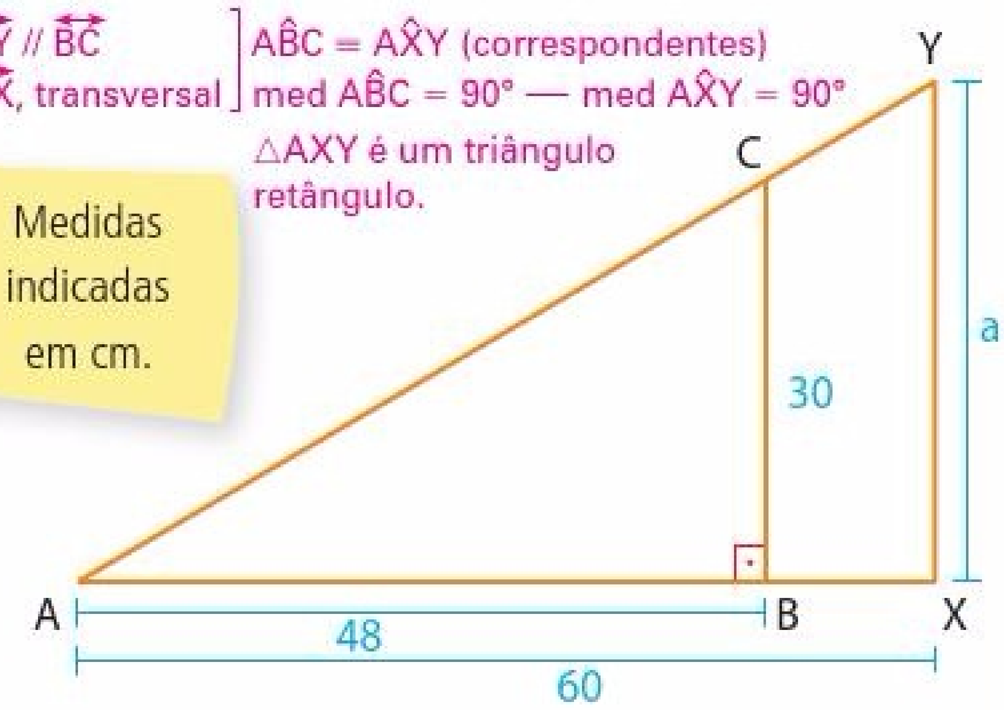
$\hat{T} = \hat{T}$ (ângulo comum); $\hat{B} = \hat{A}$ (ângulos retos) $\Big]$ $\triangle TBC \sim \triangle TAM$

33. Na figura, $\overline{XY} \,//\, \overline{BC}$ e $\triangle ABC$ é retângulo em **B**.

a) $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AX}$, transversal $\Big]$ $A\hat{B}C = A\hat{X}Y$ (correspondentes) med $A\hat{B}C = 90° —$ med $A\hat{X}Y = 90°$

$\triangle AXY$ é um triângulo retângulo.

Medidas indicadas em cm.



a) O $\triangle AXY$ é retângulo? Por quê?

b) Qual é o valor de **a**? 37,5 cm.

Leitura

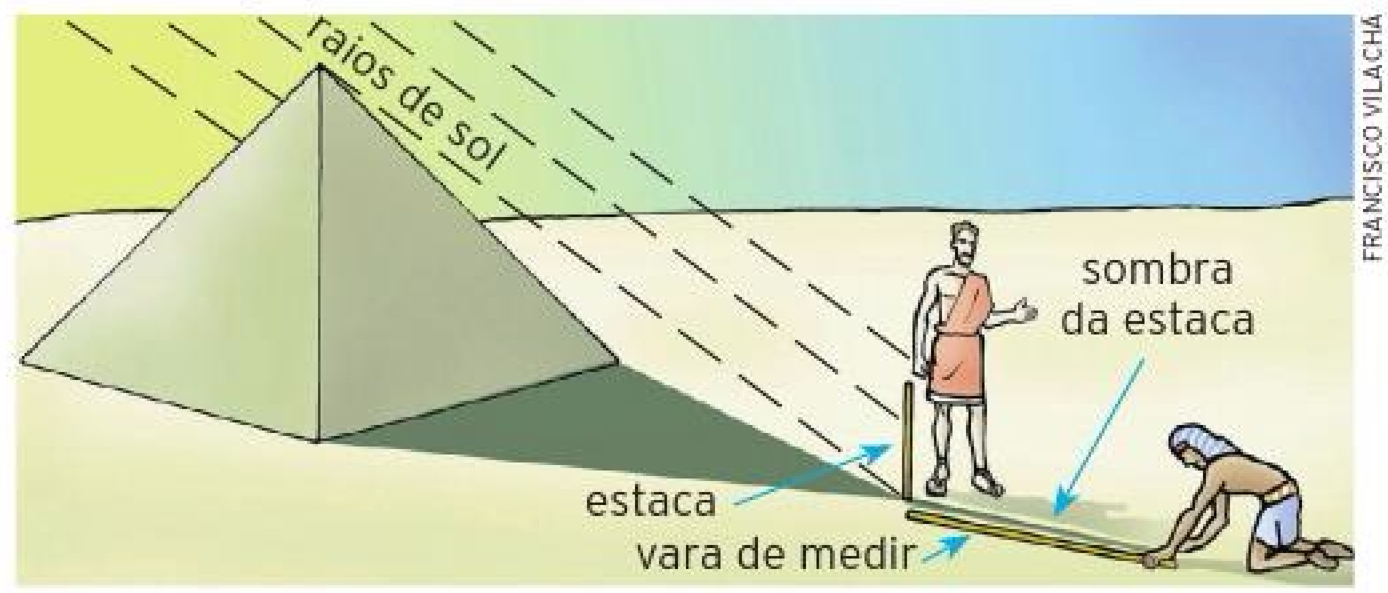
A **Leitura** é opcional, mas estude a possibilidade de explorar a que segue. Os alunos se interessam pela História da Matemática e pelas aplicações de semelhança no cotidiano. Isso poderá auxiliar na compreensão dos conceitos e propriedades referentes a esse tema. É possível integrá-lo às disciplinas de Desenho, Arte, Geografia e Educação Física.

Cálculo de alturas e distâncias inacessíveis

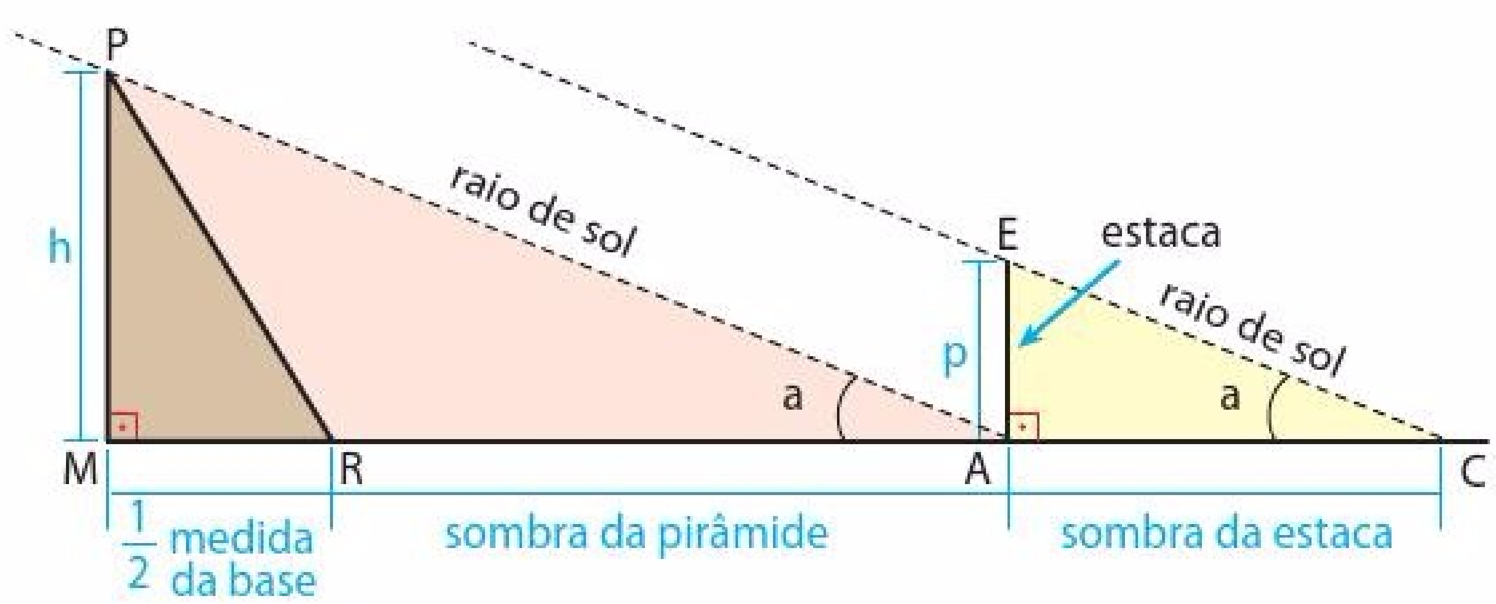
Tales de Mileto foi um filósofo e matemático grego que viveu entre o final do século VII a.C. e a primeira metade do século VI a.C. Parte de seus trabalhos se concentram no estudo da proporcionalidade entre figuras geométricas.

E certa ocasião, viajando pelo Egito, ao ver as grandes pirâmides, resolveu um problema: "Como calcular a altura de uma pirâmide sem medi-la diretamente?".

Pelas suas observações, ele descobriu que a sombra de uma estaca qualquer, fincada perpendicularmente ao solo, era proporcional à sombra projetada por uma pirâmide no mesmo instante.



Veja a representação em um esquema no qual **p** é um valor conhecido e as medidas das sombras também.



A base da pirâmide é um quadrado cujo lado pode ser medido.

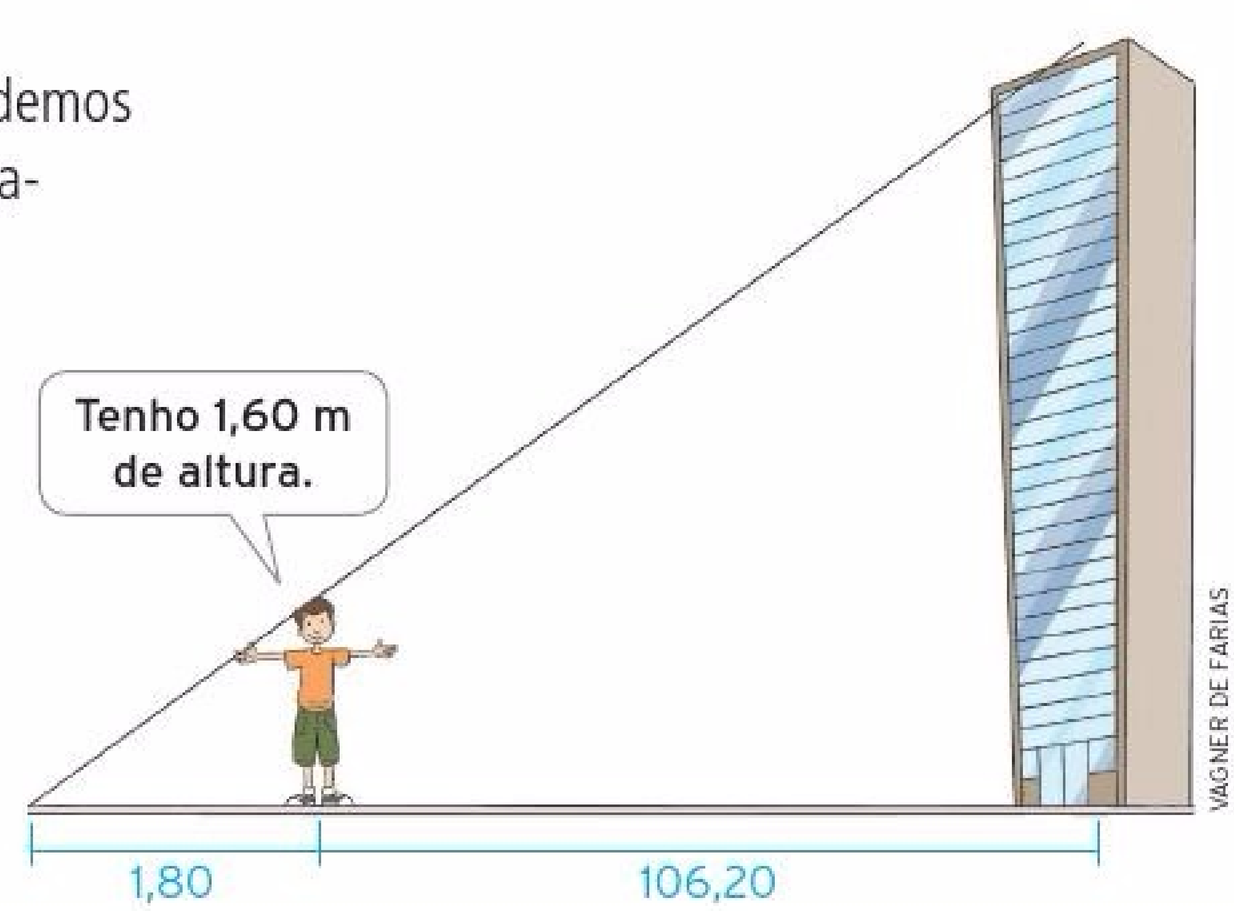
$$\frac{h}{p} = \frac{\left(\frac{1}{2} \text{ da medida da base}\right) + \left(\text{medida da sombra da pirâmide}\right)}{\text{(medida da sombra da estaca)}}$$

Tales obteve dois triângulos semelhantes, △PMA e △EAC, e pôde calcular a altura da pirâmide por meio da expressão acima.

Usando o mesmo raciocínio de Tales, podemos calcular várias distâncias, sem medi-las diretamente. Faça uma experiência calculando a altura deste prédio.

Medidas indicadas em m.

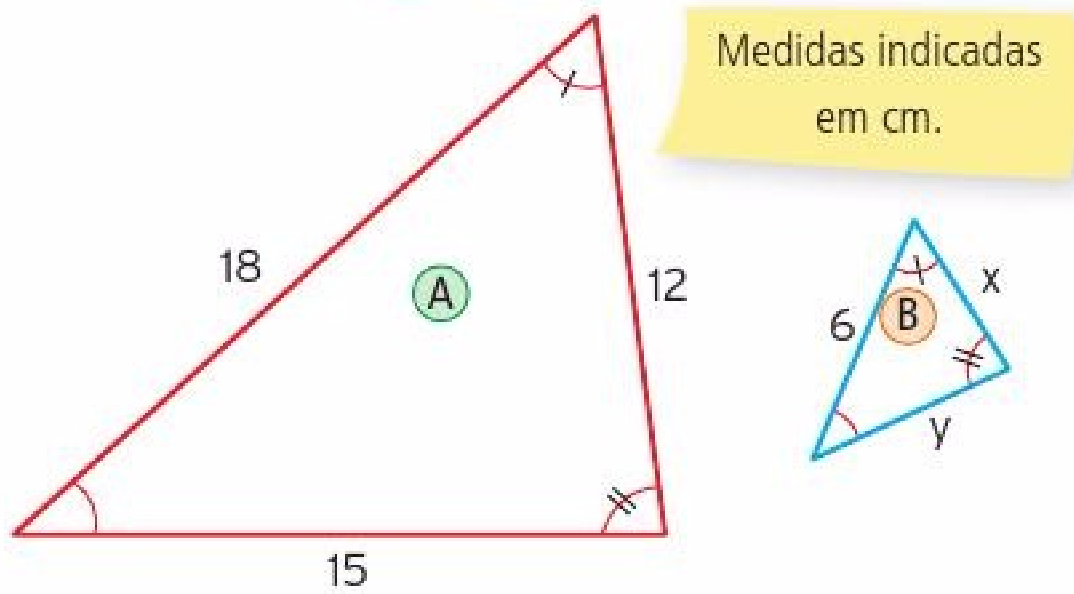
96 m



Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Os triângulos Ⓐ e Ⓑ são semelhantes.



a) Qual é a razão de semelhança entre os triângulos A e B, nessa ordem? 3

b) Qual é o valor de **x**? E de **y**? 4 cm; 5 cm.

c) Qual é o perímetro do triângulo Ⓐ? E do triângulo Ⓑ? 45 cm; 15 cm.

d) Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos Ⓐ e Ⓑ, nessa ordem? $\frac{3}{1}$ ou 3

2. Um átomo é a menor partícula que ainda caracteriza um elemento químico. Ele é constituído por partículas extremamente pequenas e tem um diâmetro de cerca de 0,00000001 centímetro. Represente essa medida utilizando notação científica. 10^{-8} cm

3. Responda a estas questões, considerando as expressões algébricas:

Ⓐ $x^2 - 3x + 9$

Ⓑ $4x^2 - 4x + 1$

Ⓒ $x^2 + 10x + 25$

Ⓓ $x^2 - 8x - 16$

a) Quais delas são trinômios quadrados perfeitos? B; C

b) Fatore os trinômios quadrados perfeitos identificados no item **a.** Ⓑ: $(2x - 1)^2$; Ⓒ: $(x + 5)^2$

4. Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1 - 2^{-3}}{3 \cdot 2^{-2} + 2^{-4}} \quad \frac{14}{13}$$

5. Simplifique esta expressão algébrica:

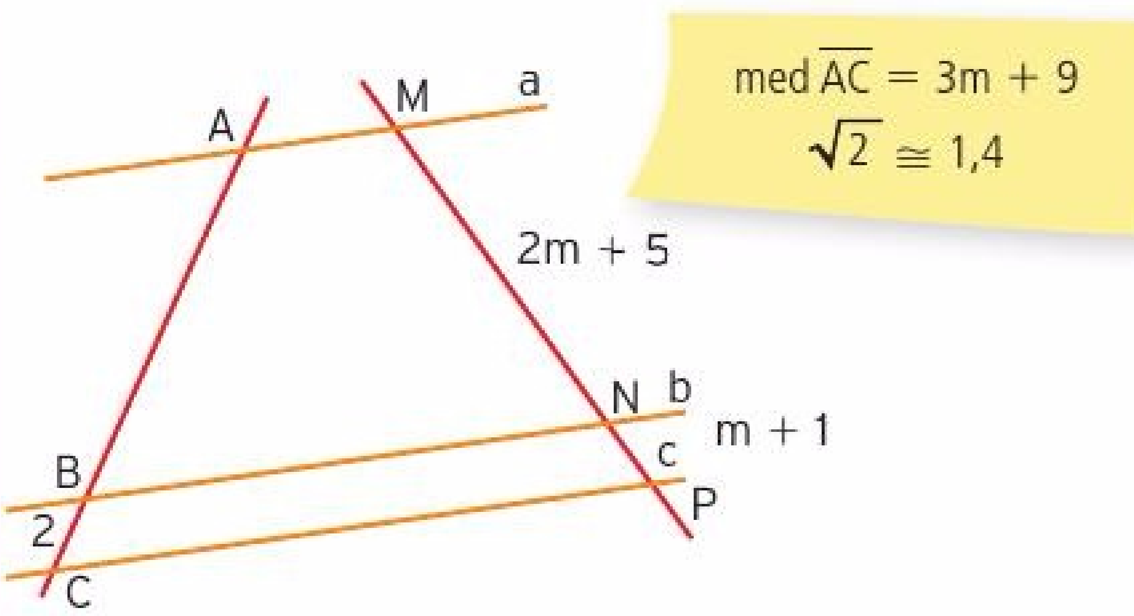
$$\frac{9x^3 - 81x^5}{6x^2 + 18x^3} \quad \frac{3x - 9x^2}{2}$$

6. Resolva estas equações:

a) $18x^2 - 3x(x - 5) + 35 = 5(x + 7)$ $0, -\frac{2}{3}$

b) $2(x - 1)(x + 1) - (x - 2)^2 = -1$ $-5{,}1$

7. Na figura, as retas **a**, **b** e **c** formam um feixe de retas paralelas e **m** representa uma medida em metro.



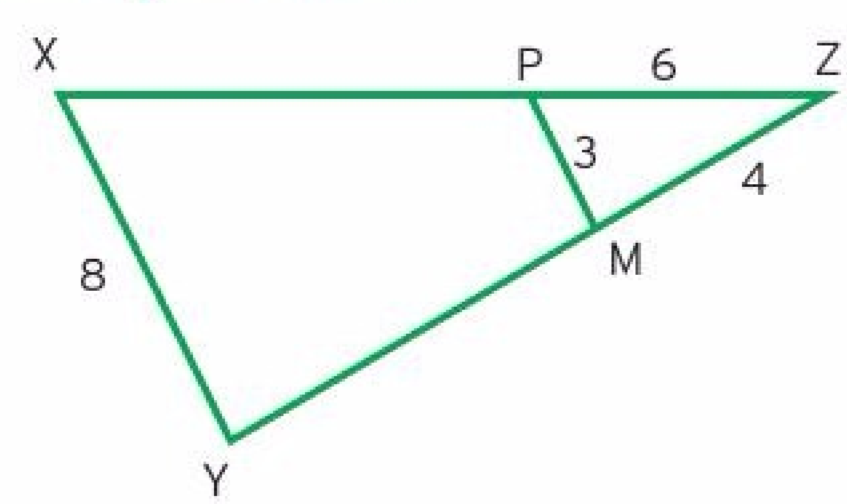
a) Qual é o valor de m? $-1 + \sqrt{2}$

b) Qual é a medida aproximada de $\overline{MN}$? 5,8 m

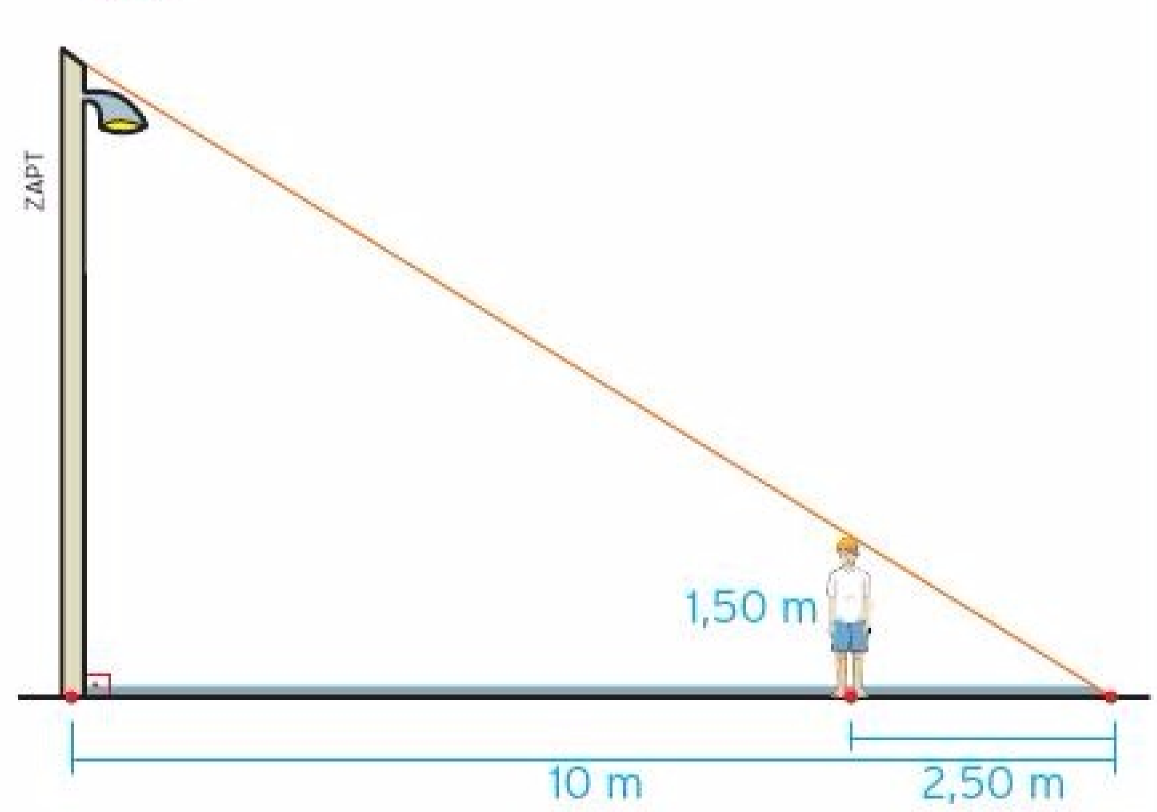
8. Na figura $\overline{PM} \parallel \overline{XY}$. As medidas estão indicadas em centímetros.

a) O que podemos afirmar sobre $\triangle ZPM$ e $\triangle ZXY$? $\triangle ZPM \sim \triangle ZXY$

b) Quais são as medidas de $\overline{ZX}$ e de $\overline{ZY}$? 16 cm; $\frac{32}{3}$ cm $\cong$ 10,7 cm.



9. Em um certo instante do dia, a sombra de um menino com 1,50 m de altura, projetada no solo, mede 2,50 m e a sombra de um poste, próximo a ele, tem 10 m de comprimento. Qual é a altura desse poste? 6 m.



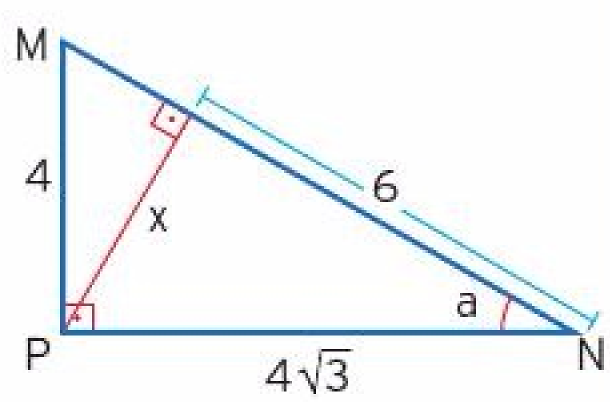
10. Certo dia, Pedro viu um balão. Um amigo ao seu lado disse que ele já estava a 2 000 m de altitude. Nesse momento, Pedro se encontrava em um ponto **P**, a certa distância do Morro da Piedade, que tem 600 m de altura e está a 5 km do ponto **M**. A que distância do pé do morro estava Pedro?

Aproximadamente a 2 143 m ou 2,1 km do pé do morro.

11. É possível modificar a expressão $x^2 - x + 25$ acrescentando um monômio e obter um trinômio quadrado perfeito. Esse monômio é: b

a) $-x$ b) $-9x$ c) $-9x^2$ d) $9x$

12. O triângulo MPN na figura é retângulo em **P** e as medidas estão indicadas em centímetros. O valor de **x** é: a



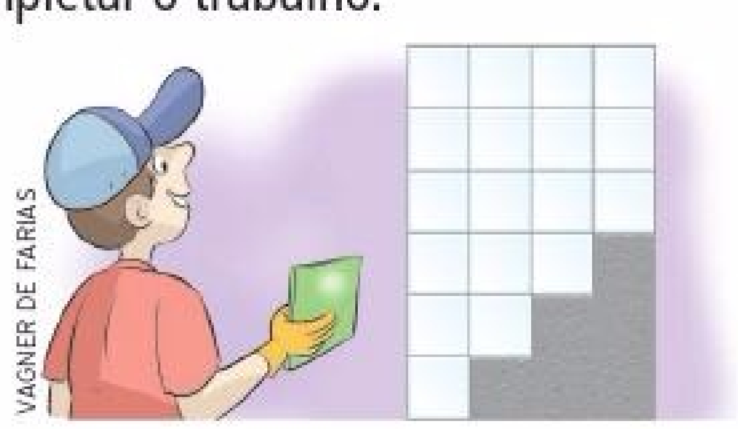
a) $2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) $8\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

13. (Saresp-SP) Pedro, o pedreiro, estava azulejando uma parede e os azulejos acabaram. Veja como a parede ficou antes que Pedro pudesse completar o trabalho.



Para completar esse trabalho com o mesmo tipo de azulejo, Pedro ainda teve de recobrir: c

a) 50% dessa parede. c) 25% dessa parede.

b) 45% dessa parede. d) 20% dessa parede.

14. A equação $(2x - 1)^2 - 3(x + 1)(x - 1) = 2$ tem duas raízes reais diferentes. A soma e o produto das raízes dessa equação, nessa ordem, são: b

a) 2 e 4 b) 4 e 2 c) -4 e 2 d) -8 e 4

15. (Saresp-SP) Simplificando a expressão $(\sqrt{32} + x\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$, obtemos o resultado: d

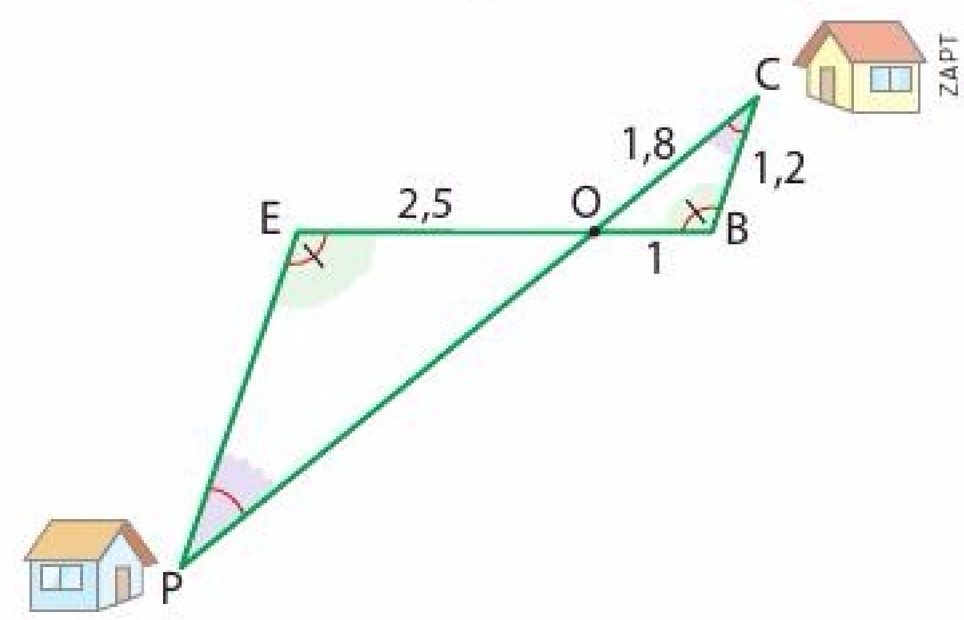
a) 2 b) 8 c) 10 d) 14

16. (Saresp-SP) Simplificando a expressão $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$, em que $x \neq \pm 3$, obtém-se: b

a) $\dfrac{3}{x - 9}$ c) $\dfrac{x}{3}$

b) $\dfrac{x}{x - 3}$ d) $-\dfrac{x}{3}$

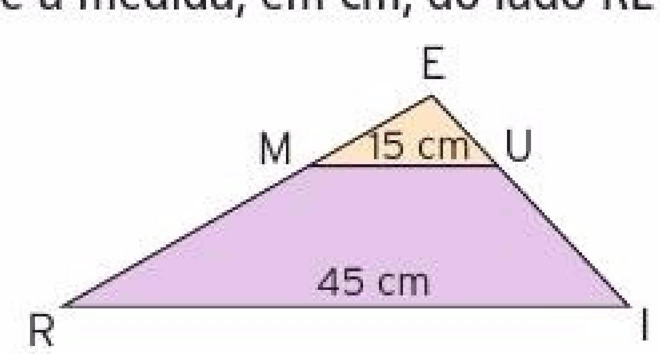
17. Nesta figura, $\overline{PE}$ e $\overline{CB}$ estão sobre retas paralelas e as medidas estão indicadas em quilômetros. Uma casa está localizada no ponto **P** e outra, em **C**.



É correto afirmar que a distância entre as duas casas é de: d

a) 4,50 km b) 45 km c) 63 km d) 6,3 km

18. (Saresp-SP) Os triângulos MEU e REI são semelhantes, com $\overline{UM} // \overline{RI}$. O lado $\overline{ME}$ mede 12 cm. Qual é a medida, em cm, do lado $\overline{RE}$? d



a) 15 b) 20 c) 24 d) 36

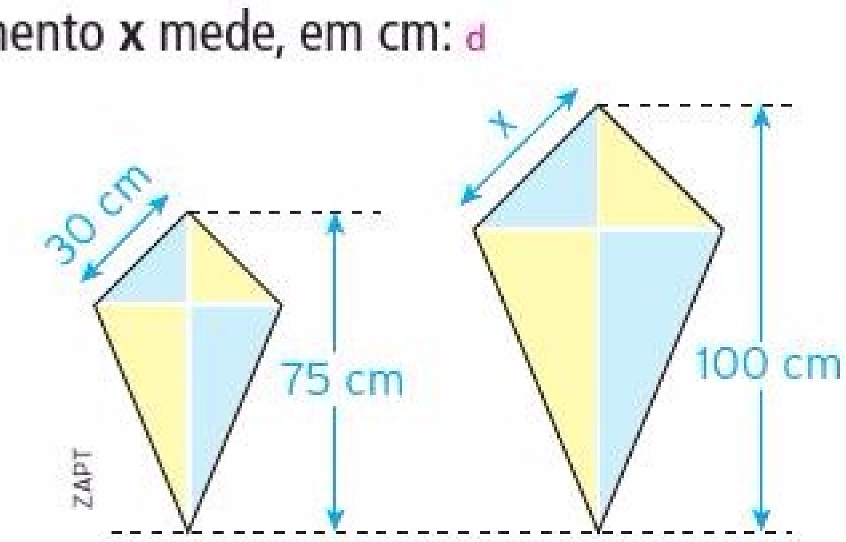
19. (Saresp-SP) A figura mostra duas pipas semelhantes, mas de tamanhos diferentes. Considerando as medidas conhecidas das duas pipas, o comprimento **x** mede, em cm: d

a) 20

b) 25

c) 35

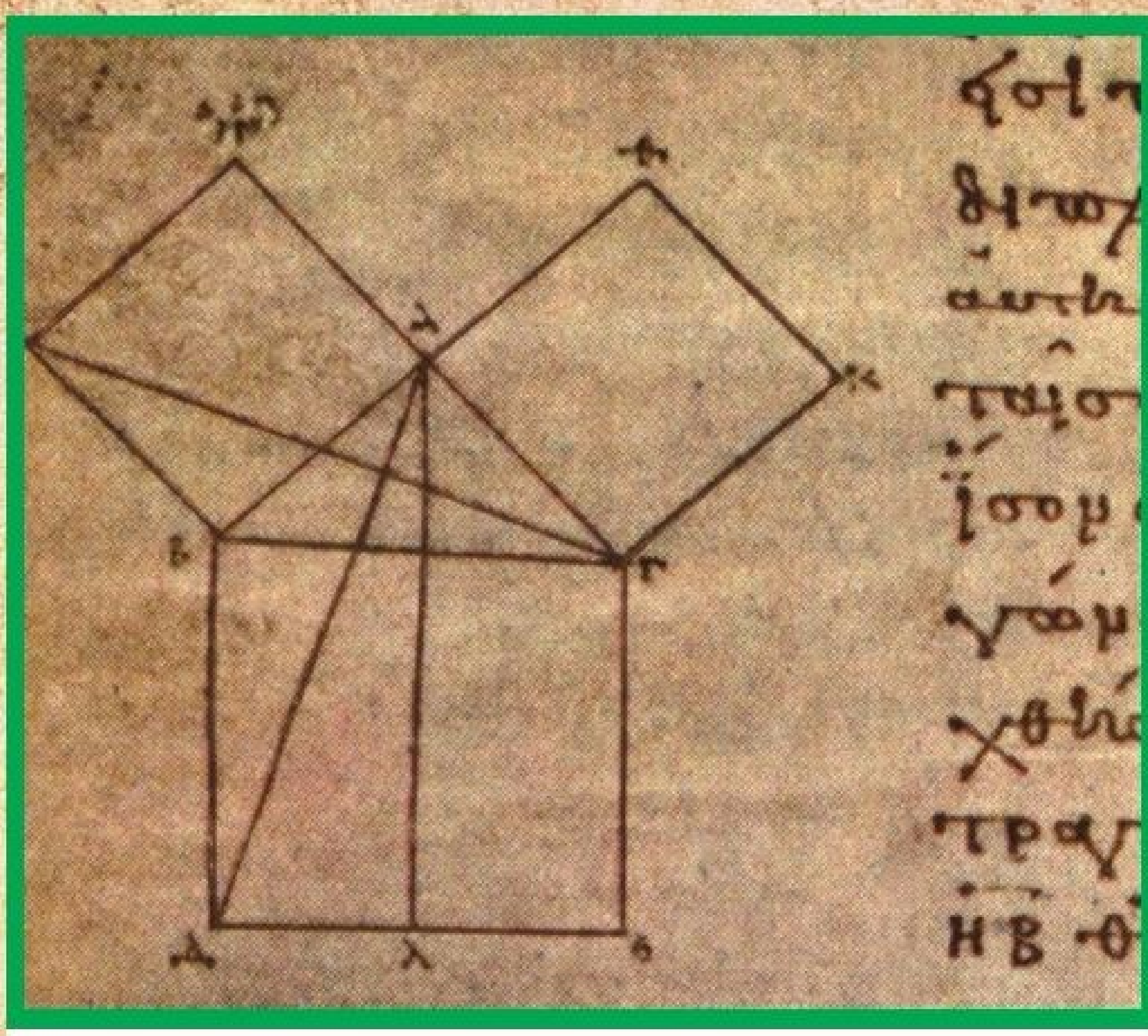
d) 40



UNIDADE 7

Semelhança e medidas

AUTOR DESCONHECIDO. TEOREMA DE PITÁGORAS. C. 800

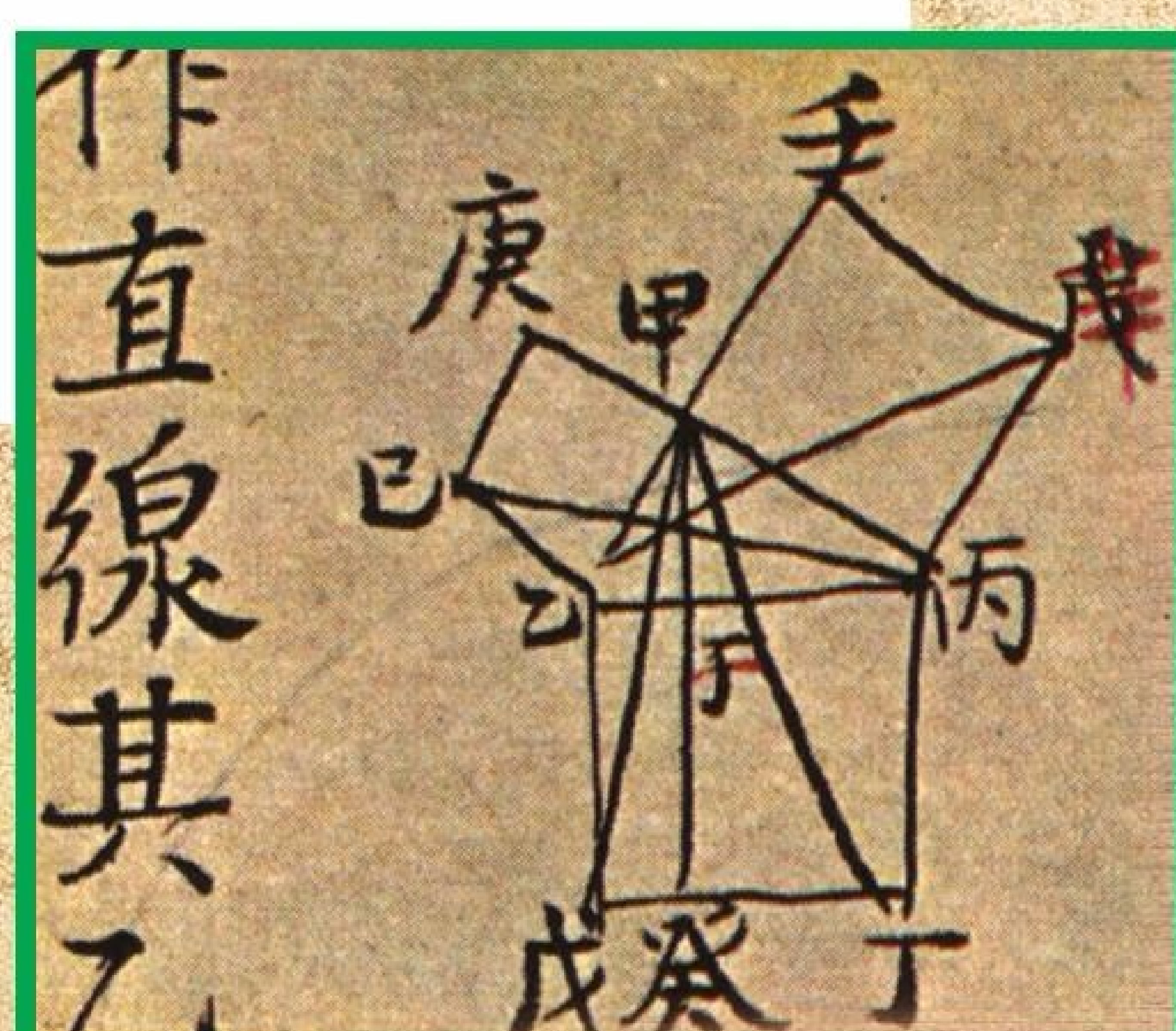


Grego, por volta de 600

Importantes relações entre as medidas dos lados de triângulos, em particular de triângulos retângulos, e de seus elementos resultam da aplicação dos conhecimentos desenvolvidos sobre semelhança entre triângulos. Esse é o assunto que será estudado nesta unidade. Tais relações são conhecidas como **relações métricas nos triângulos retângulos**.

Veja nesta página exemplos de demonstrações do teorema de Pitágoras.

AUTOR DESCONHECIDO. TEOREMA DE PITÁGORAS, 1607.



Chinês, 1607

Nesta unidade...

1. Relações métricas nos triângulos retângulos
2. Quadrados, triângulos e o teorema de Pitágoras

Observe as cenas.

ILUSTRAÇÕES: VAGNER DE FARIAS

Com cordas com nós podemos formar triângulos. Observe as medidas dos lados de alguns deles:

Corda	Medida dos lados
com **13** nós	**3**, **4** e **5** unidades
com **25** nós	**6**, **8** e **10** unidades
com **49** nós	**12**, **16** e **20** unidades

Pitágoras demonstrou que triângulos como esses têm sempre um ângulo reto.

O que você já sabe?

- Providencie um pedaço de barbante de cerca de 1,80 m. Em uma das pontas dê o primeiro nó e faça outros a cada 10 cm, até obter 13 nós. Estique-o e forme triângulos. Coloque o décimo terceiro nó sobreposto ao primeiro. Em que situação poderá obter um triângulo retângulo?
  Quando formar um triângulo com lados 3 u, 4 u e 5 u (u: unidade de medida de comprimento).
- Em um triângulo retângulo formado por uma corda de 49 nós, conforme apresentado no texto, qual é a medida da hipotenusa? E dos catetos? 20 u; 12 u e 16.

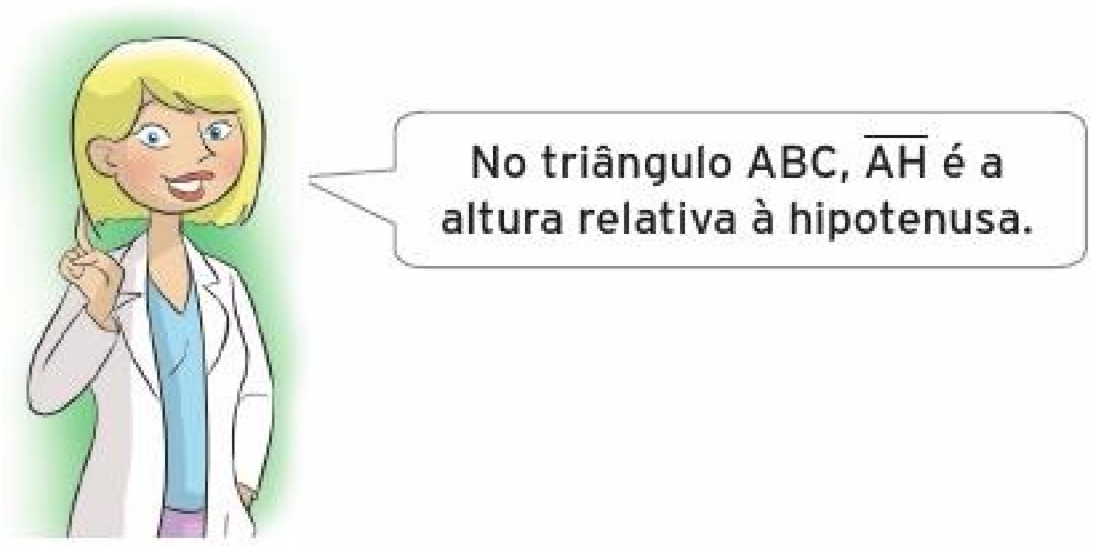
1 Relações métricas nos triângulos retângulos

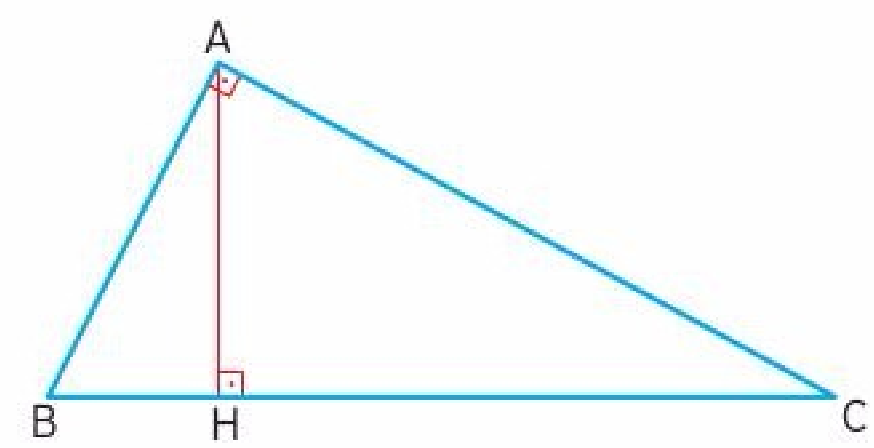
A importância do conceito de semelhança e de suas aplicações em situações de medição no cotidiano e no estudo das demais ciências faz com que seja necessário que os alunos conheçam as propriedades resultantes desse conceito.

Semelhanças em um triângulo retângulo

Para refletir e responder

Leia a fala da professora e as informações abaixo sobre o triângulo ilustrado.



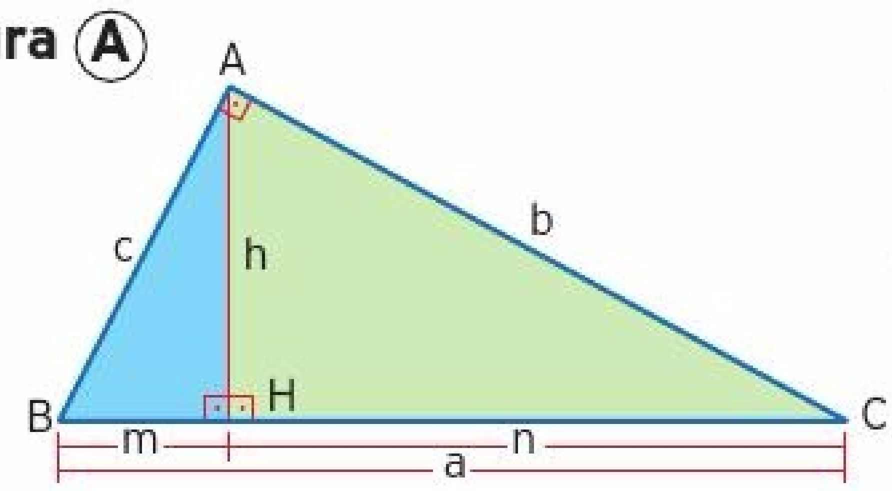


Na figura acima,a altura relativa a $\overline{BC}$ é o segmento de reta perpendicular a $\overline{BC}$ traçado pelo ponto **A**. Como **A** é extremidade de $\overline{AB}$, $\overline{BH}$ é chamada de **projeção ortogonal** de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$. Da mesma forma, $\overline{CH}$ é a **projeção ortogonal** de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

- Identifique na figura dois pares de triângulos semelhantes. ΔABC e ΔHBA; ΔABH e ΔHAC. Há outras respostas possíveis.

A altura relativa à hipotenusa do triângulo ABC na figura acima divide-o em dois outros triângulos: $\triangle$HBA e $\triangle$HAC. Temos, assim, três triângulos.

Figura (A)



ILUSTRAÇÕES: VAGNER DE FARIAS

Ainda no $\triangle$ABC:

$\overline{BC}$ é hipotenusa e med $\overline{BC} = a$;

$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são catetos, med $\overline{AB} = c$ e med $\overline{AC} = b$;

$\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa e med $\overline{AH} = h$;

$\overline{BH}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa e med $\overline{BH} = m$;

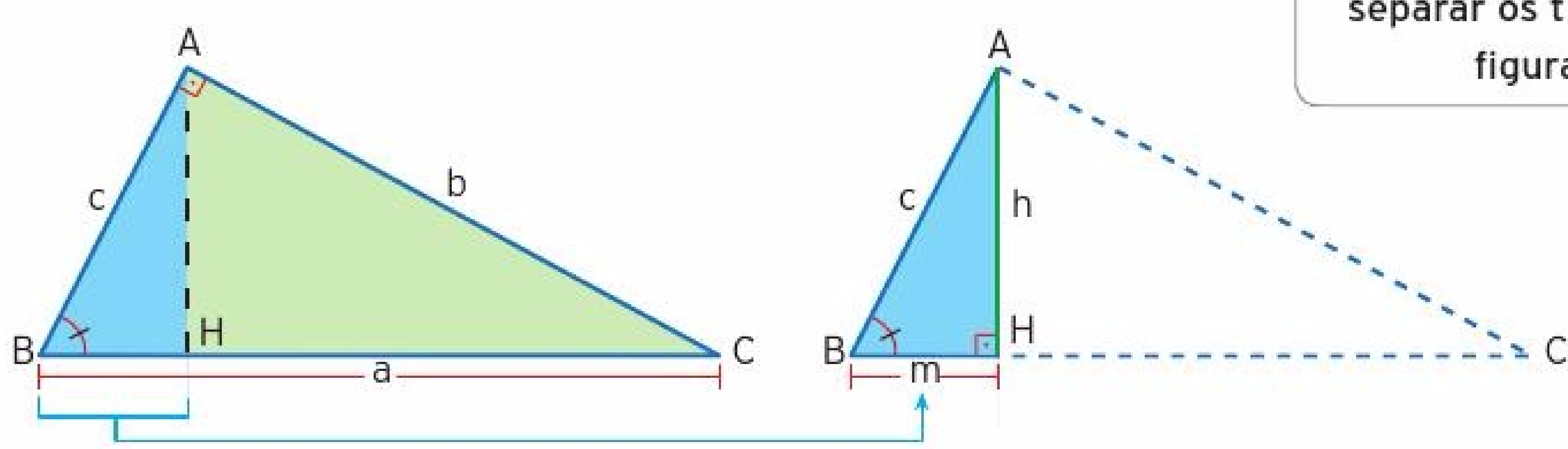
$\overline{HC}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa e med $\overline{HC} = n$.

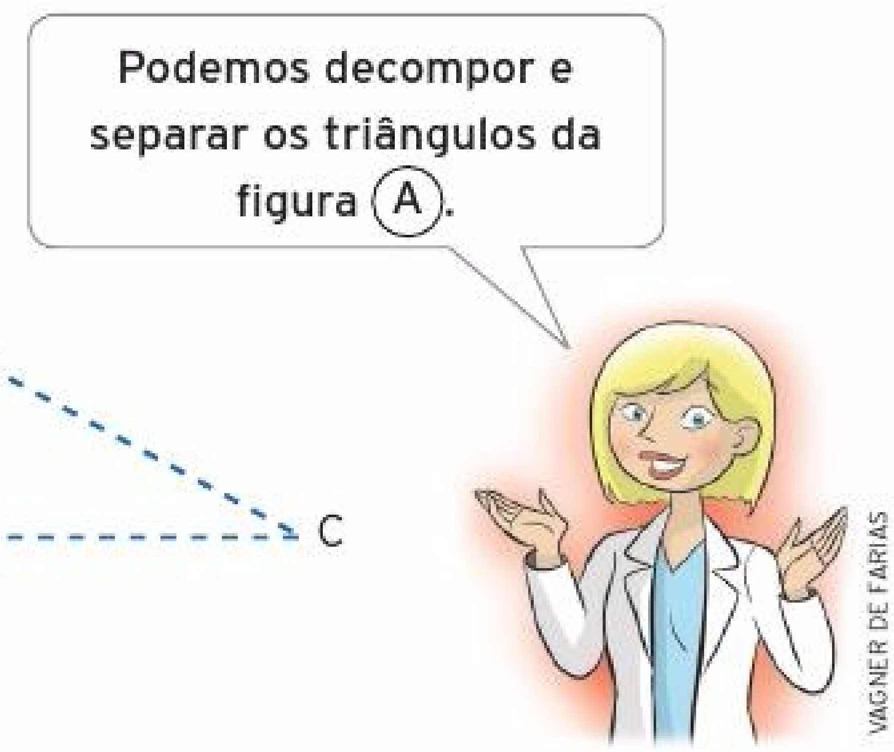
A seguir será demonstrada a validade de algumas relações entre as medidas dos lados e dos elementos desses triângulos.

1ª demonstração: vamos demonstrar as relações: $\mathbf{b \cdot c = a \cdot h}$ e $\mathbf{c^2 = a \cdot m}$.

Essas relações são justificadas pela semelhança entre dois triângulos $\triangle ABC \sim \triangle HBA$:

Figura (B)





Como são semelhantes, os $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$ têm lados correspondentes proporcionais.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \equiv \hat{B} \text{ (ângulo comum)} \\ \hat{A} \equiv \hat{H} \text{ (ângulos retos)}\end{array}\right] \text{—} \triangle ABC \sim \triangle HBA$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \text{—} \left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \text{———} \boxed{b \cdot c = a \cdot h} \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \text{———} \boxed{c^2 = a \cdot m}\end{array}\right.$$

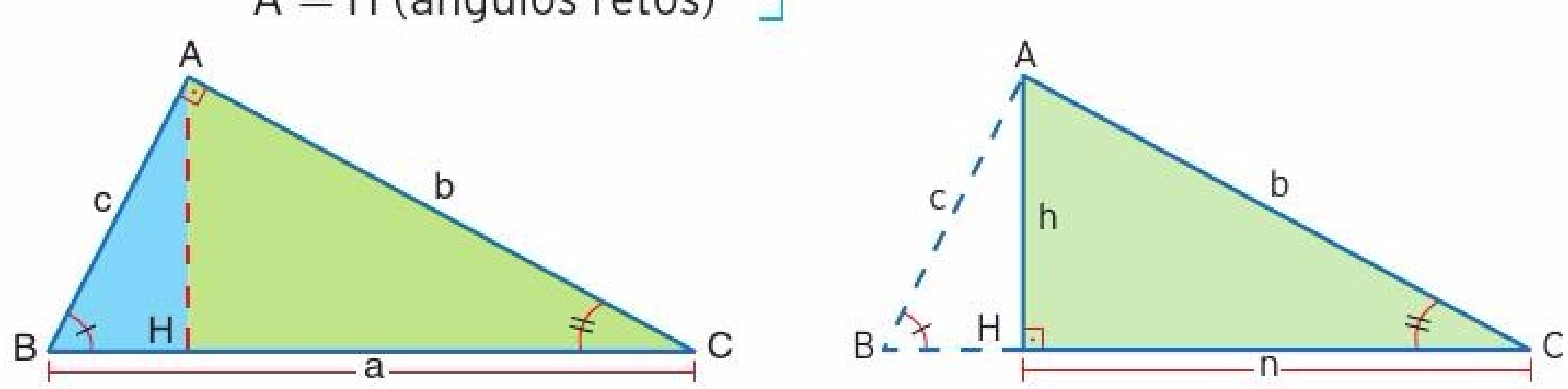
Note que lados correspondentes são opostos a ângulos correspondentes congruentes.

2ª demonstração: vamos demonstrar a relação: $\mathbf{b^2 = a \cdot n}$.

Nesta situação, também, primeiro mostramos que $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ decompondo e separando os triângulos da figura (A):

Figura (C)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{C} \equiv \hat{C} \text{ (ângulo comum)} \\ \hat{A} \equiv \hat{H} \text{ (ângulos retos)}\end{array}\right] \text{—} \triangle ABC \sim \triangle HAC$$



Portanto, os $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$ têm lados correspondentes proporcionais:

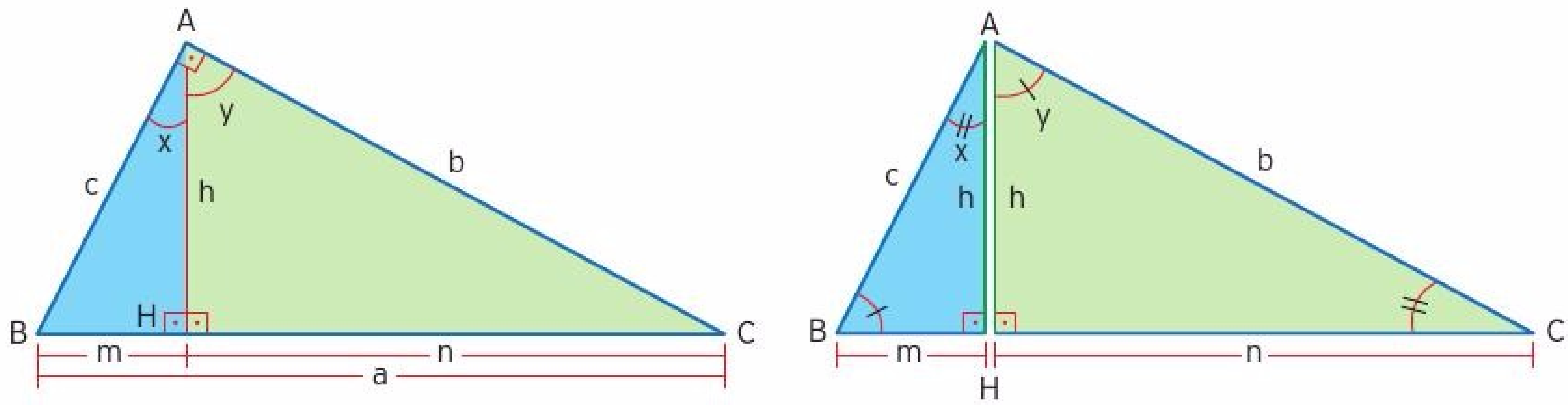
medidas dos lados do $\triangle ABC$

medidas dos lados do $\triangle HAC$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \text{—} \left[\frac{a}{b} = \frac{b}{n}\right. \text{———} \boxed{b^2 = a \cdot n}$$

3ª demonstração: vamos demonstrar que $\mathbf{h^2 = m \cdot n}$.

Figura (D)



$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ retângulo} \\ \text{med } \hat{A} = 90°\end{array}\right] \text{—} \ x + y = 90° \ \text{—} \ y = 90° - x \ \text{—} \ \text{med } C\hat{A}H = 90° - x$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle BHA \text{ retângulo} \\ \text{med } B\hat{H}A = 90°\end{array}\right] \text{—} \ \text{med } \hat{B} = 90° - x$$

Portanto: med $\hat{B}$ = med $C\hat{A}H$.

$$\left.\begin{array}{l}B\hat{H}A \equiv A\hat{H}C \text{ (ângulos retos)} \\ \hat{B} \equiv C\hat{A}H\end{array}\right] \text{—} \ \triangle HBA \sim \triangle HAC$$

Como os triângulos são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \ \text{—} \ \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \ \text{—} \ h \cdot h = m \cdot n \ \text{—} \ \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

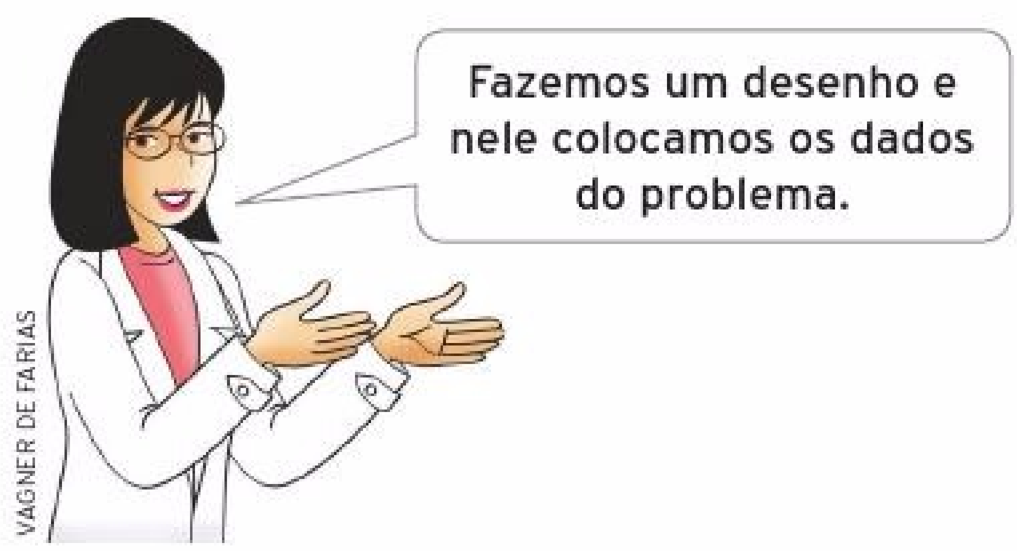
Em resumo, temos as seguintes **relações métricas em um triângulo retângulo** em que a hipotenusa mede **a**, e os catetos medem **b** e **c**.

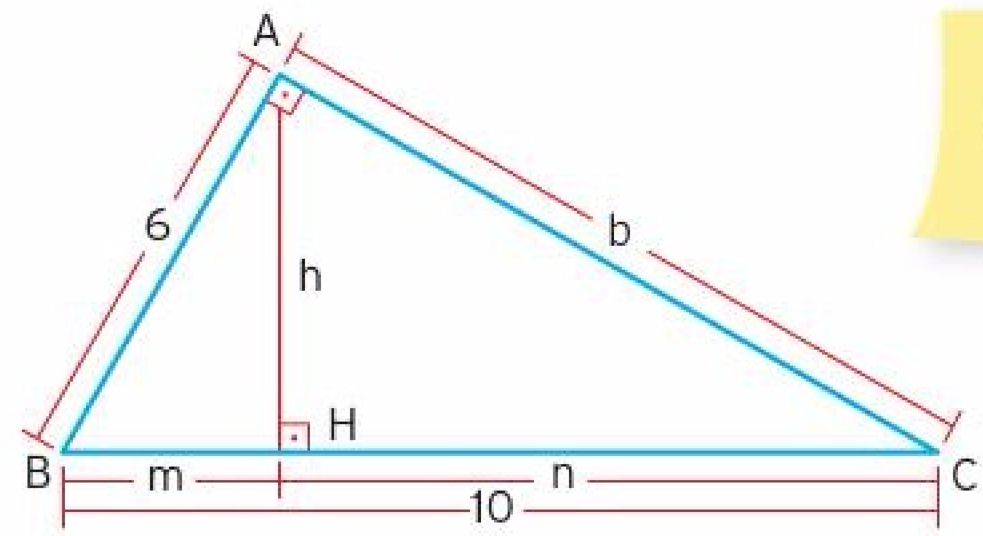
$\mathbf{b^2 = a \cdot n}$ $\mathbf{c^2 = a \cdot m}$	O quadrado da medida de um cateto é o produto das medidas da hipotenusa e da projeção ortogonal desse cateto sobre a hipotenusa.
$\mathbf{b \cdot c = a \cdot h}$	O produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela.
$\mathbf{h^2 = m \cdot n}$	O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

As relações métricas e a resolução de problemas

Vamos explorar esse assunto resolvendo dois problemas.

1º problema: A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm e um dos catetos mede 6 cm. Qual é a medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa? Quanto mede a altura relativa à hipotenusa nesse triângulo?





Medidas indicadas em cm.

Primeiro calculamos **m**:

$$\left.\begin{array}{l} a = \text{med } \overline{BC} = 10 \\ c = \text{med } \overline{AB} = 6 \end{array}\right] \text{—— } c^2 = a \cdot m \text{ —— } 6^2 = 10 \cdot m \text{ —— } 36 = 10\,m$$

$$\mathbf{m = 3{,}6\ cm}$$

Em seguida, calculamos **h**:

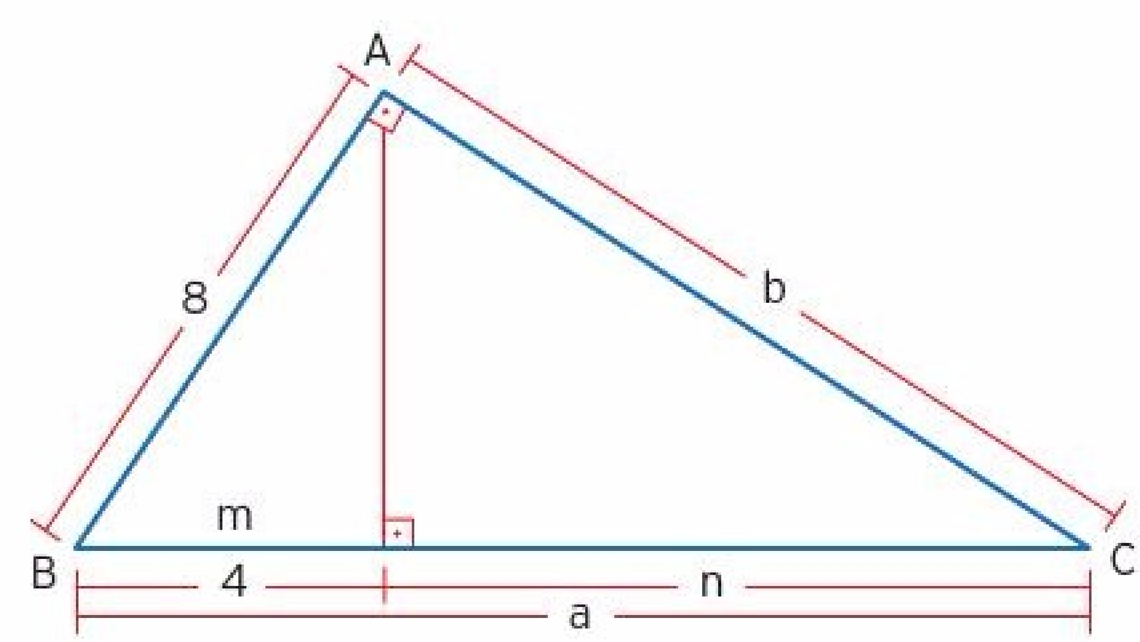
$a = m + n$ —— $10 = 3{,}6 + n$ —— $\mathbf{n = 6{,}4\ cm}$

$h^2 = m \cdot n$ —— $h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 = 23{,}04$ —— $h = \sqrt{23{,}04}$ cm —— $\mathbf{h = 4{,}8\ cm}$

A projeção do cateto sobre a hipotenusa mede 3,6 cm, e a altura relativa à hipotenusa mede 4,8 cm.

2º problema: A figura mostra um triângulo retângulo ABC. Calcule a medida da hipotenusa e a do outro cateto.

Medidas indicadas em cm.



- Cálculo de **a**:

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a \cdot m \\ c = 8 \text{ cm} \\ m = 4 \text{ cm} \end{array}\right] \text{—— } 8^2 = a \cdot 4 \text{ —— } 64 = 4 \cdot a \text{ —— } \mathbf{a = 16\ cm}$$

- Cálculo de **b**:

$$\left.\begin{array}{l} a = 16 \text{ cm} \\ m = 4 \text{ cm} \end{array}\right] \text{—— } m + n = a \text{ —— } 4 + n = 16 \text{ —— } n = 12 \text{ cm}$$

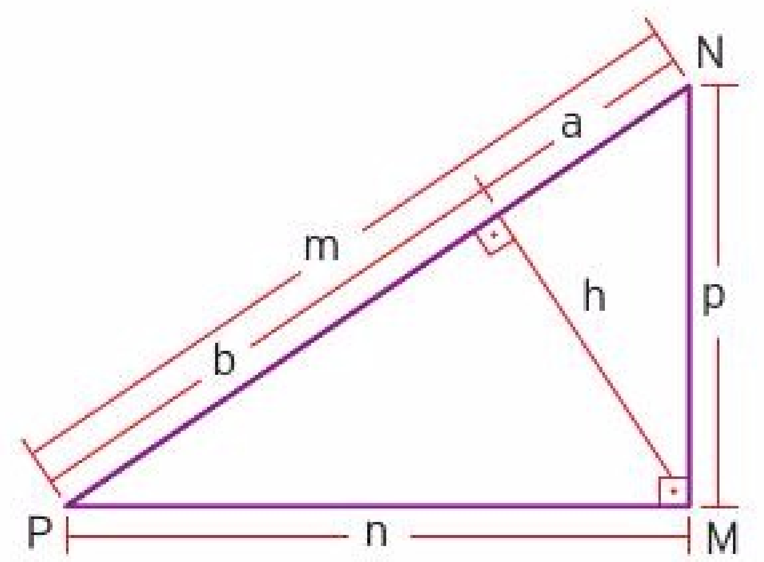
$b^2 = a \cdot n$ $\quad$ $b^2 = 16 \cdot 12$ —— $b = \sqrt{16 \cdot 12}$ —— $\mathbf{b = 8\sqrt{3}\ cm}$

Portanto, a hipotenusa mede 16 cm e o outro cateto, $8\sqrt{3}$ cm.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. O triângulo MNP da figura é retângulo e **a**, **b**, **p**, **m**, **n** e **h** representam medidas.



Anote as relações métricas que existem entre essas medidas. a; b; d; e.

a) $p^2 = m \cdot a$

b) $h^2 = a \cdot b$

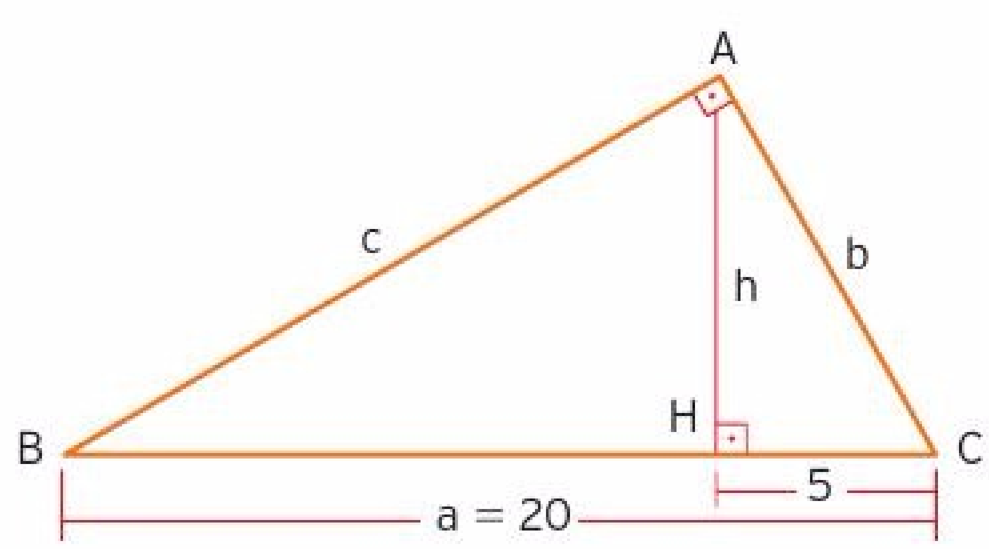
c) $m^2 = a + b$

d) $n^2 = m \cdot b$

e) $m^2 = p^2 + n^2$

f) $a \cdot h = b \cdot p$

2. No triângulo retângulo ABC, a hipotenusa mede 20 cm e a projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa mede 5 cm.

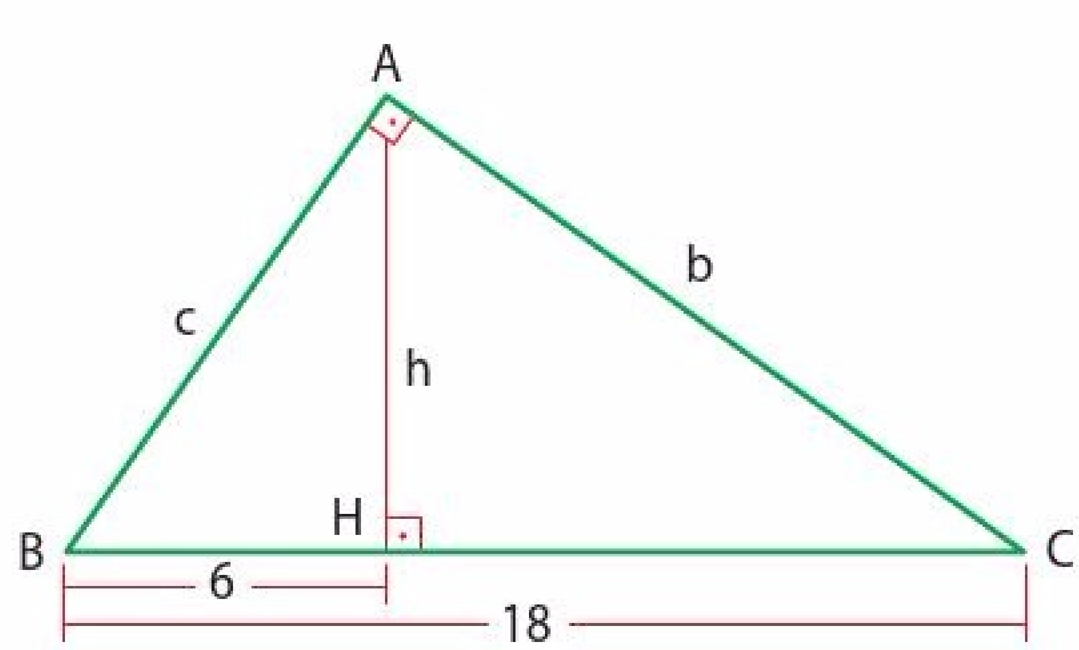


a) Escreva uma relação métrica entre **a**, **b** e med $\overline{HC}$. $b^2 = 5a$

b) Quanto mede $\overline{AC}$? 10 cm

c) Qual é o valor de **h**? $5\sqrt{3}$ cm

3. No triângulo retângulo ABC, as medidas estão indicadas em centímetros.

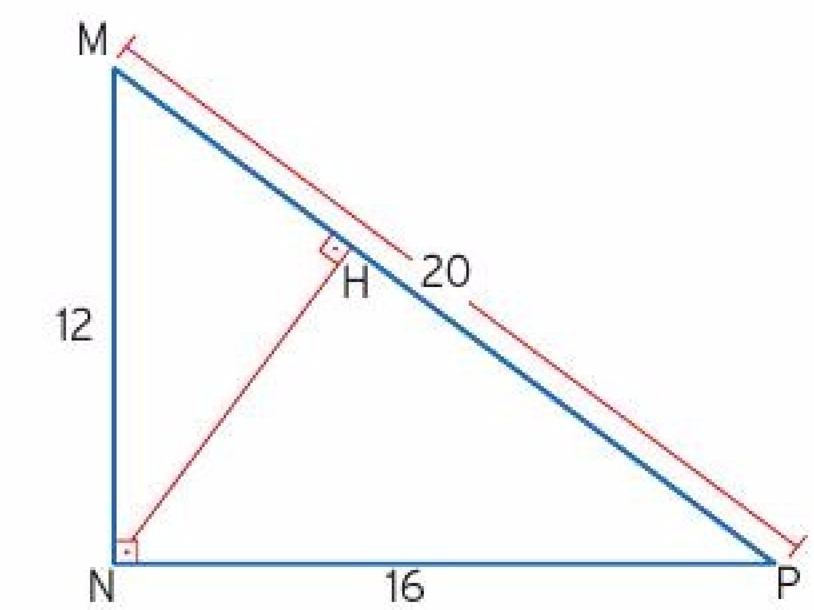


a) Descreva, indicando as etapas de modo resumido, como encontrar a medida do cateto $\overline{AB}$. Resposta pessoal.

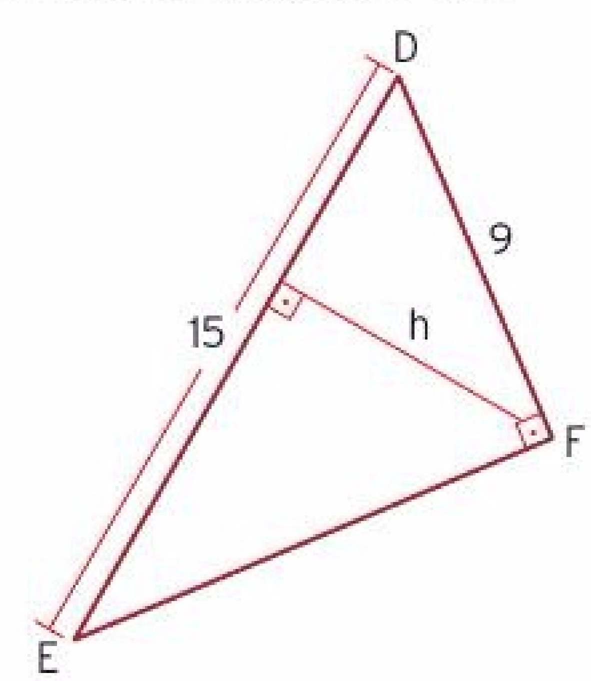
b) Troque suas anotações com um colega. Cada um encontra a medida do cateto $\overline{AB}$ seguindo as etapas indicadas pelo colega. Resposta pessoal.

c) Para finalizar, confiram se ambos encontraram a mesma medida para $\overline{AB}$. $6\sqrt{3}$ cm

4. No triângulo retângulo MNP, as medidas estão indicadas em centímetros. Calcule a medida da altura relativa à hipotenusa. 9,6 cm



5. No triângulo retângulo DEF, a hipotenusa mede 15 cm, e o cateto $\overline{DF}$ mede 9 cm.

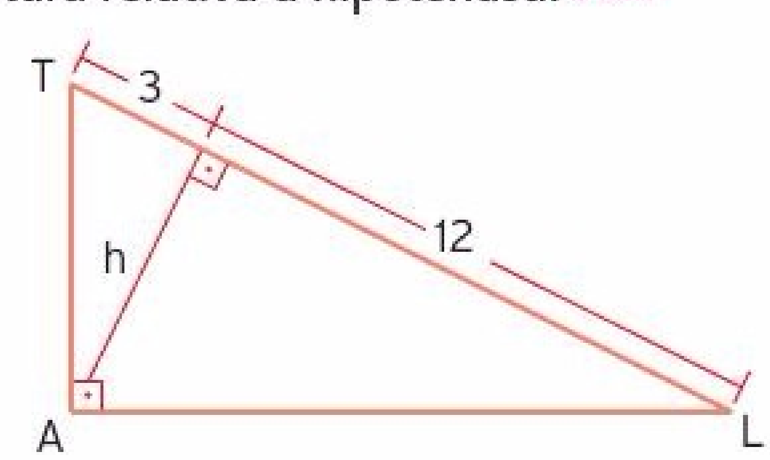


Determine:

a) as medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa; 5,4 cm e 9,6 cm

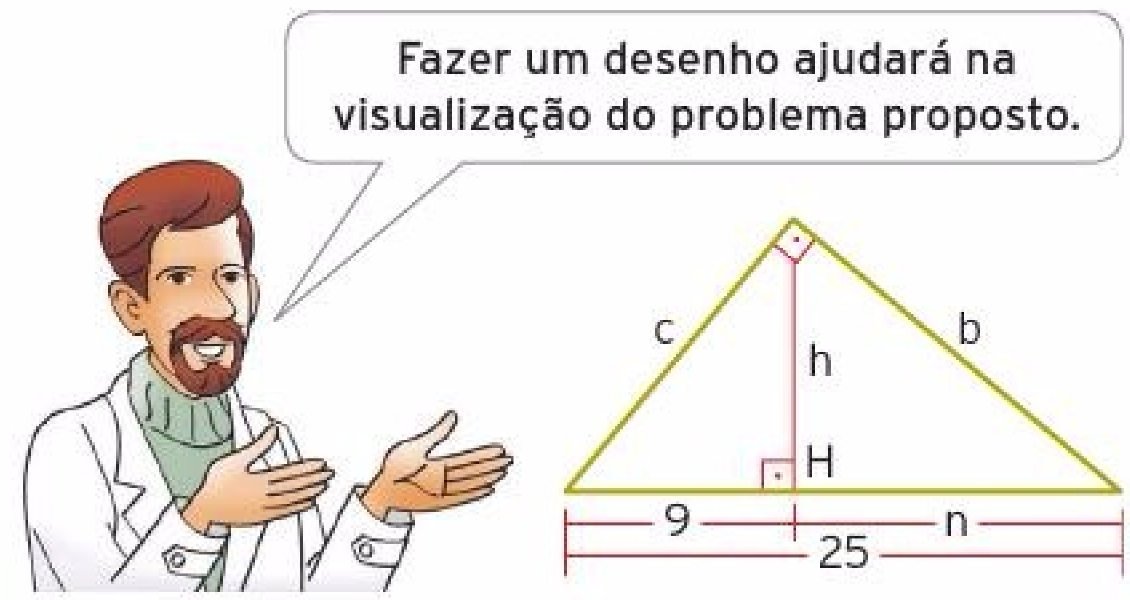
b) a medida da altura relativa à hipotenusa. 7,2 cm

6. Neste triângulo retângulo em **A**, as medidas indicadas estão em centímetros. Calcule a medida da altura relativa à hipotenusa. 6 cm



7. Em um triângulo retângulo as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 36 m e 64 m. Qual é a medida da altura relativa à hipotenusa desse triângulo? 48 m

8. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 25 cm, e a medida da projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa mede 9 cm. Calcule as medidas dos catetos e da altura relativa à hipotenusa.
c = 15 cm; b = 20 cm; h = 12 cm.



O teorema de Pitágoras

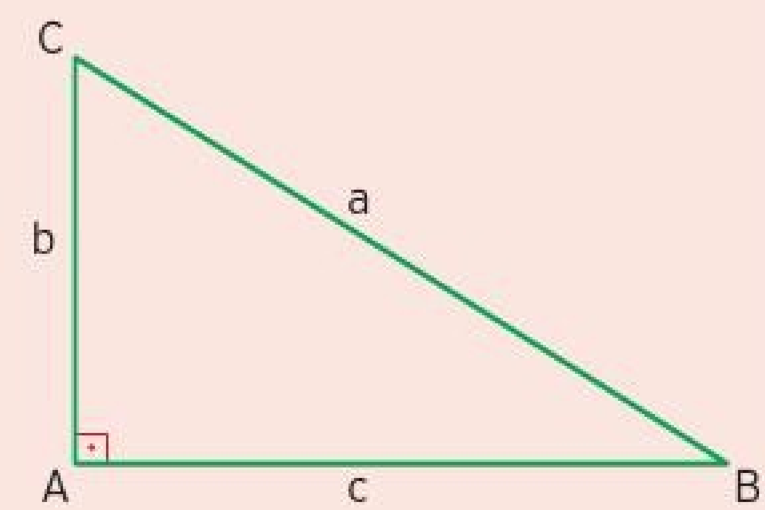
Procure saber qual é o nível de conhecimento que os alunos têm sobre Pitágoras e o teorema por ele demonstrado. Por suas aplicações no cotidiano e no estudo das demais ciências, é necessário que eles compreendam a importância desse teorema.

Sem dúvida, o teorema de Pitágoras é um dos mais famosos da Geometria.

Para os triângulos retângulos vale o teorema:

Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

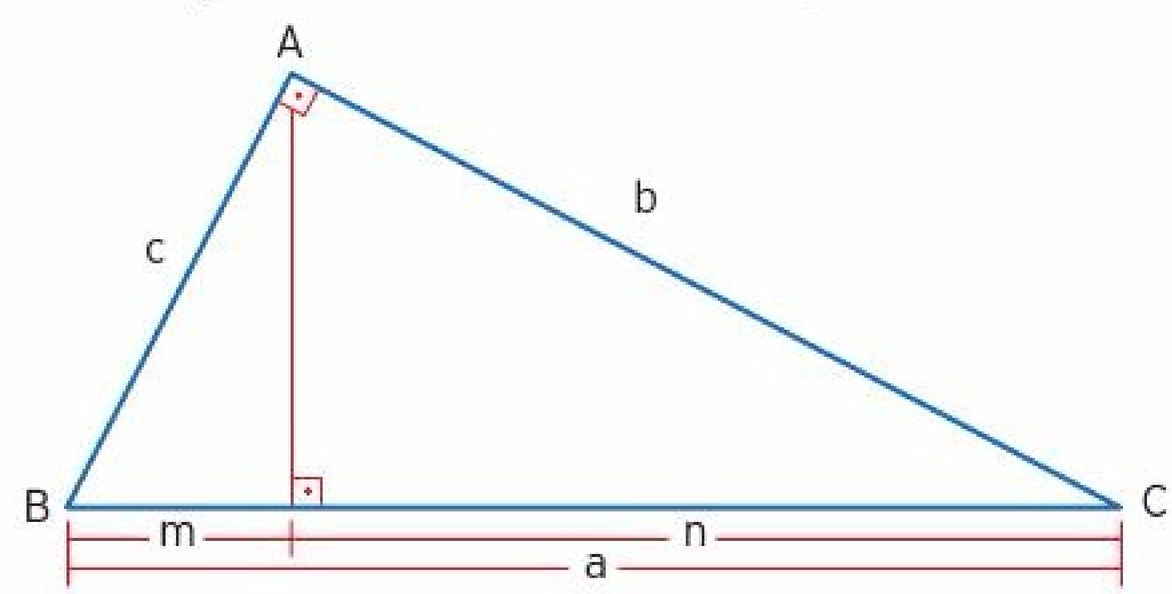


$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Acompanhe uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando as relações métricas já estudadas:

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

$$\mathbf{b^2 = a \cdot n}$$
$$\mathbf{c^2 = a \cdot m}$$



Adicionamos membro a membro as duas igualdades:

$$\begin{array}{r} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \\ \hline b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \end{array}$$

a é fator comum

$$b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(n + m)}_{a}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

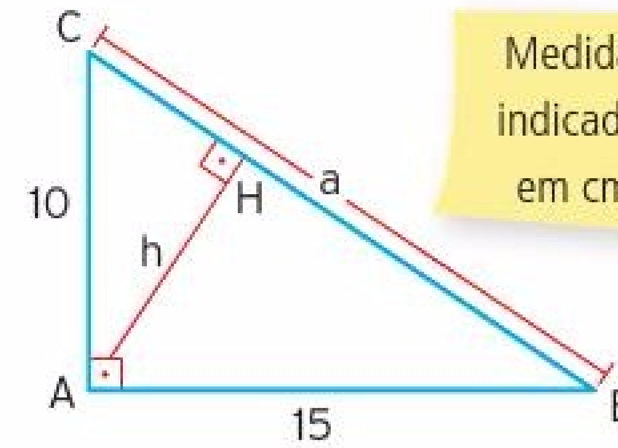
$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2} \text{ ou } \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

É possível demonstrar também o recíproco do teorema de Pitágoras:

Se em um triângulo as medidas dos seus lados são tais que o quadrado da medida do lado maior é a soma dos quadrados das medidas dos outros dois, então esse triângulo é um triângulo retângulo.

Veja estes exemplos:

- Na figura, o triângulo ABC é retângulo em **A**. Vamos determinar a medida da hipotenusa e a da altura relativa à hipotenusa desse triângulo.



Medidas indicadas em cm.

✓ Cálculo de **a**:

$\triangle ABC$ retângulo —— $a^2 = b^2 + c^2$ —— $a^2 = 10^2 + 15^2$ —— $a^2 = 325$

$a = \sqrt{325}$ —— $a = \sqrt{5^2 \cdot 13}$ —— $\boxed{a = 5\sqrt{13}\text{ cm}}$

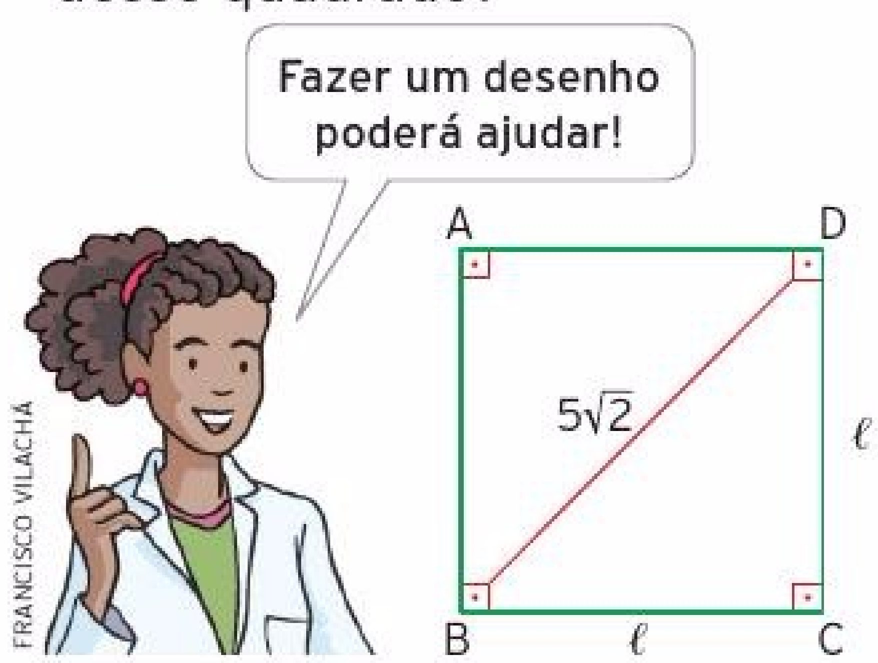
✓ Cálculo de **h**:

$\triangle ABC$ retângulo —— $b \cdot c = a \cdot h$ —— $150 = 5\sqrt{13} \cdot h$ —— $\boxed{h = \dfrac{30\sqrt{13}}{13}\text{ cm}}$

b = 10 cm
c = 15 cm

Portanto, a hipotenusa mede $5\sqrt{13}$ cm, e a altura, $\dfrac{30\sqrt{13}}{13}$ cm.

- A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm. Vamos calcular a medida de cada lado desse quadrado?



FRANCISCO VILACHÃ

$\triangle BCD$ é retângulo —— $(\text{med}\,\overline{BD})^2 = (\text{med}\,\overline{BC})^2 + (\text{med}\,\overline{CD})^2$

$(5\sqrt{2})^2 = \ell^2 + \ell^2$ —— $\ell^2 = 25$ —— $\boldsymbol{\ell = 5}$ **cm**

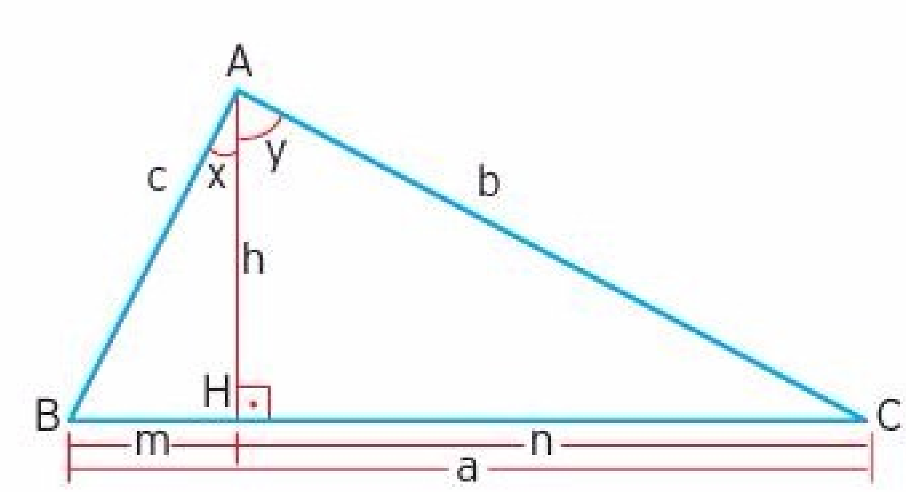
Portanto, cada lado desse quadrado mede 5 cm.

- No triângulo ABC, $m = \dfrac{25}{13}$ cm; $n = \dfrac{144}{13}$ cm e $h = \dfrac{60}{13}$ cm.

Vamos verificar que o triângulo ABC é um triângulo retângulo, aplicando o recíproco do teorema de Pitágoras.

Os triângulos AHB e AHC são retângulos, pois o segmento $\overline{AH}$ é a altura do triângulo ABC.

Aplicando o teorema de Pitágoras nesses dois triângulos, podemos calcular os quadrados das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.



$c^2 = \left(\dfrac{25}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{60}{13}\right)^2 = \dfrac{625}{169} + \dfrac{3\,600}{169} = 25$

$b^2 = \left(\dfrac{144}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{60}{13}\right)^2 = \dfrac{20\,736}{169} + \dfrac{3\,600}{169} = 144$

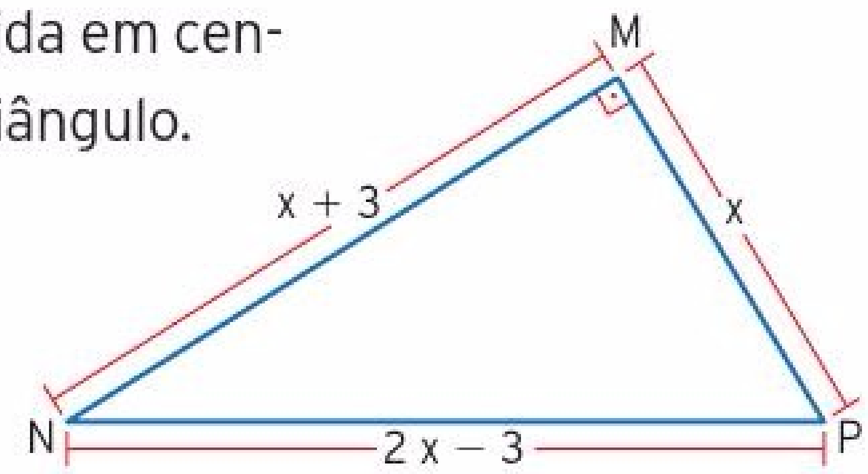
$b^2 + c^2 = 144 + 25 = 169$

Como $a = m + n$, então $a = \dfrac{25}{13} + \dfrac{144}{13} = 13$.

Logo, $a^2 = 169$.

Podemos observar que o quadrado da medida do lado maior é a soma dos quadrados das medidas dos outros dois: $169 = 25 + 144$. Logo, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, o triângulo ABC é retângulo.

- Na figura, △MNP é retângulo, e **x** representa uma medida em centímetros. Vamos determinar as medidas dos lados desse triângulo.



$$\triangle MNP \text{ retângulo} — (2x - 3)^2 = x^2 + (x + 3)^2$$
$$4x^2 - 12x + 9 - x^2 - x^2 - 6x - 9 = 0$$
$$x^2 - 9x = 0 — x \cdot (x - 9) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 9 = 0 — \mathbf{x = 9} \end{array} \right.$$

Como **x** representa medida de lado, devemos ter $x > 0$, portanto **x = 9 cm**.

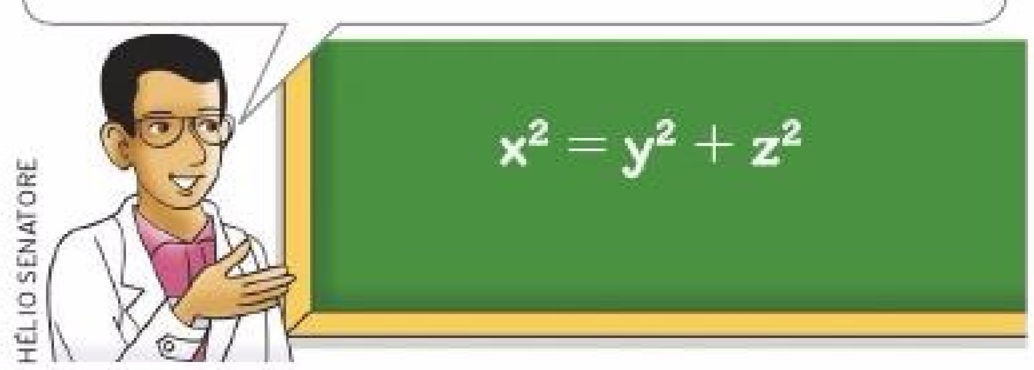
Os lados desse triângulo medem 9 cm, 12 cm e 15 cm.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

9. O professor escreveu esta igualdade na lousa.

As letras representam as medidas dos lados de um triângulo, na mesma unidade.

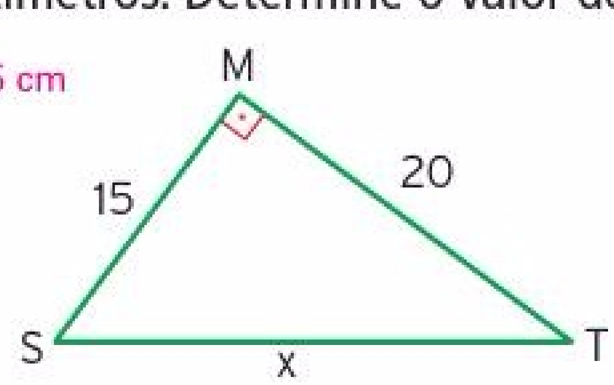


Sílvia concluiu que o triângulo é retângulo e que a hipotenusa e os catetos medem, respectivamente, **x** unidades, **y** unidades e **z** unidades. A conclusão de Sílvia está correta? Justifique sua resposta. Sim, por causa do recíproco do teorema de Pitágoras.

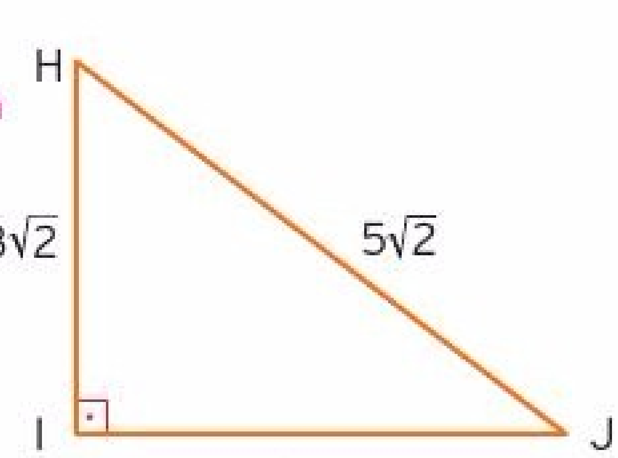
10. Em um triângulo, os lados medem 15 cm, 12 cm e 10 cm. Esse triângulo é retângulo? Por quê?
Não, pois $15^2 \neq 12^2 + 10^2$

11. As medidas indicadas nestas figuras estão em centímetros. Determine o valor de **x**.

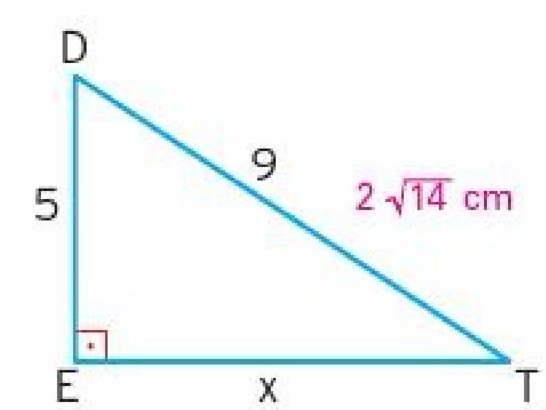
a) 25 cm



b) $4\sqrt{2}$ cm



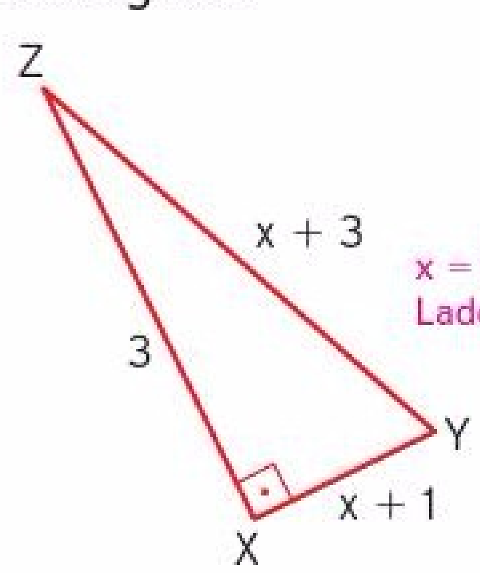
c)



$2\sqrt{14}$ cm

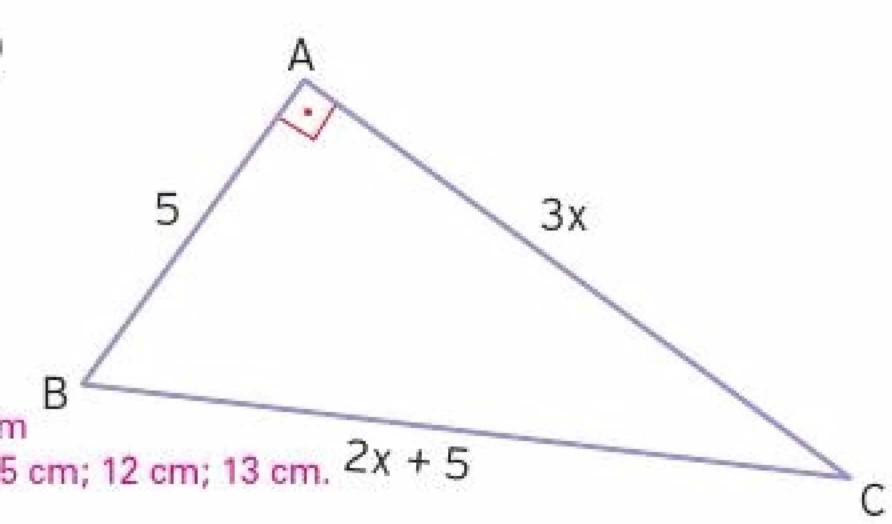
12. Nestas figuras, **x** representa uma medida em centímetros. Determine as medidas dos lados dos triângulos:

a)



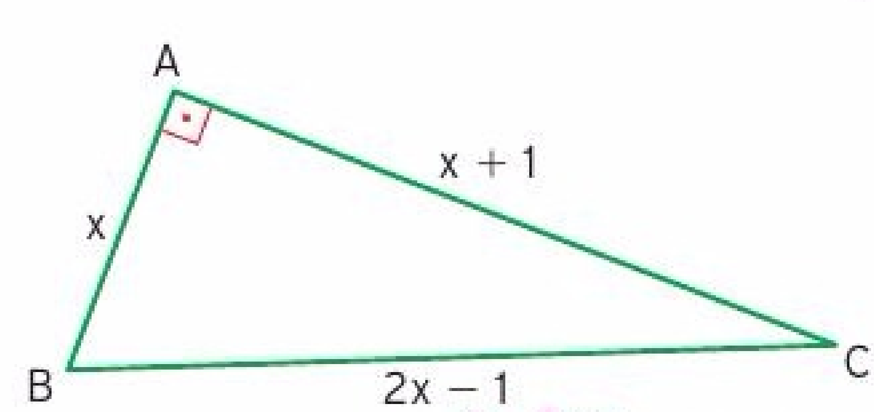
x = 0,25 cm
Lados: 3 cm; 1,25 cm; 3,25 cm.

b)



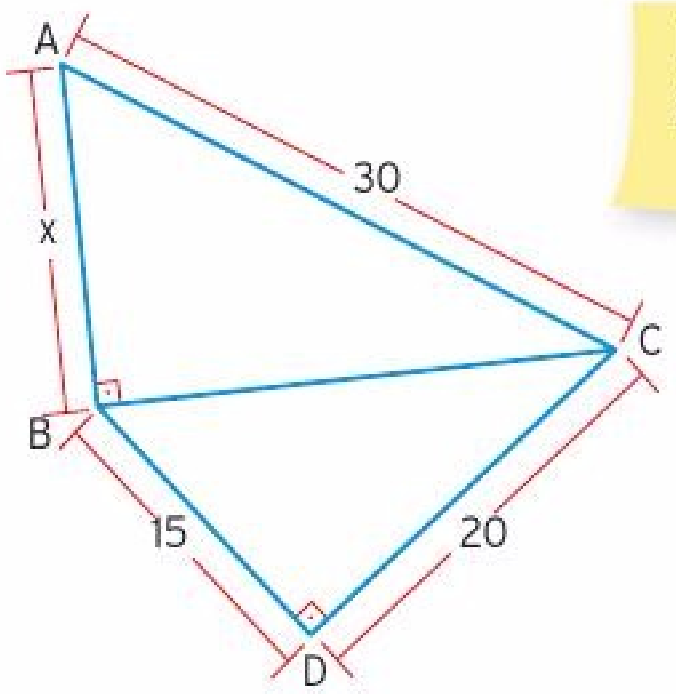
x = 4 cm
Lados: 5 cm; 12 cm; 13 cm.

c)



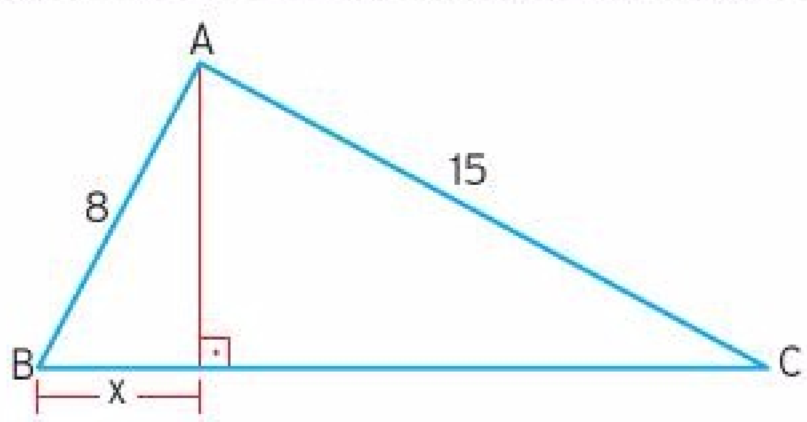
x = 3 cm
Lados: 3 cm; 4 cm; 5 cm.

13. Observe a figura e calcule o valor de **x**. $5\sqrt{11}$ cm



Medidas indicadas em cm.

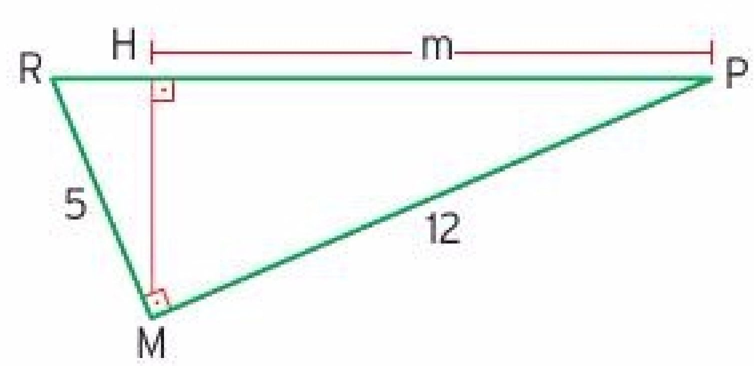
14. Na figura, as medidas dadas estão indicadas em centímetros, e ABC é um triângulo retângulo em **A**.



a) Qual é o valor de **x**? $\frac{64}{17}$ cm

b) Quanto mede a altura relativa à hipotenusa? $\frac{120}{17}$ cm

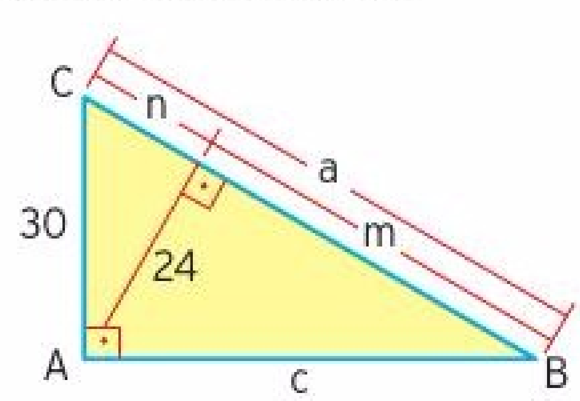
15. O $\triangle$MPR é retângulo em **M**, e as medidas indicadas estão em centímetros.



a) Calcule o perímetro desse triângulo. 30 cm

b) Determine o valor de **m**. $\frac{144}{13}$ cm

16. No triângulo retângulo BAC, as medidas estão indicadas em centímetros.



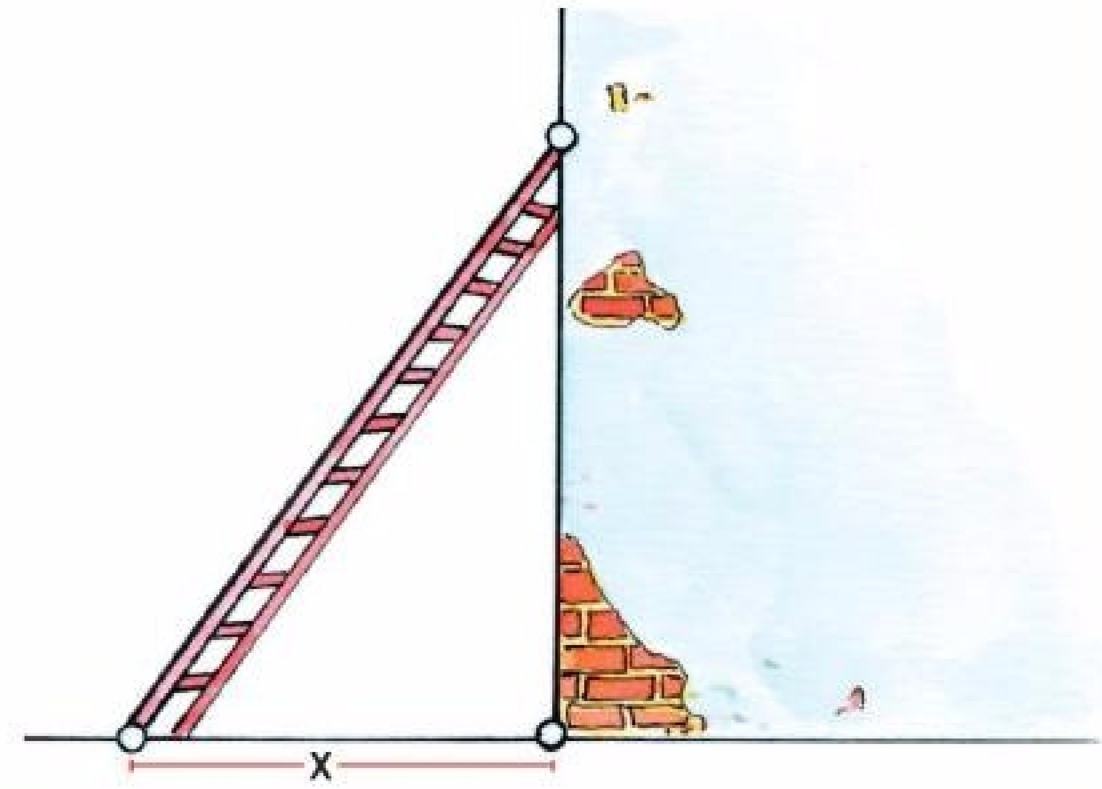
a) Determine os valores de **m** e **n**. 32 cm e 18 cm

b) Qual é o perímetro desse triângulo? 120 cm

c) Qual é a área desse triângulo? 600 cm²

17. Em um triângulo retângulo, as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 24 cm. Qual é a área desse triângulo? 180 cm²

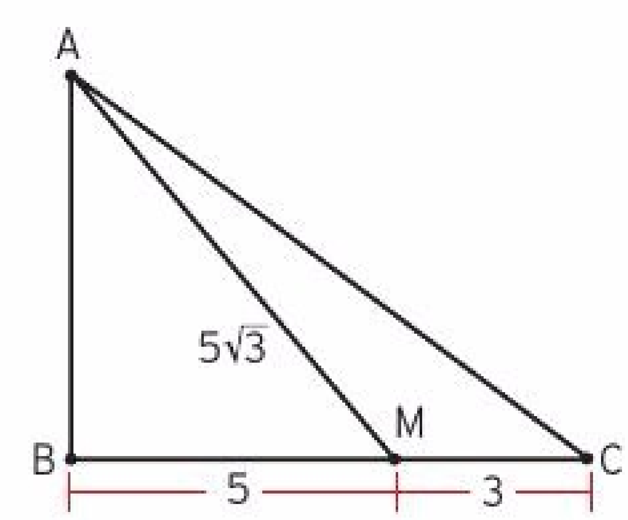
18. Uma escada de 17 m de comprimento está apoiada em uma parede a 15 m do chão. Qual é a distância, no nível do chão, da escada à parede? 8 m



19. Antônio precisa de uma tábua para fazer um reforço diagonal em uma porteira de 1,5 m de altura por 2 m de comprimento. Qual é o comprimento da tábua de que ele precisa? 2,5 m

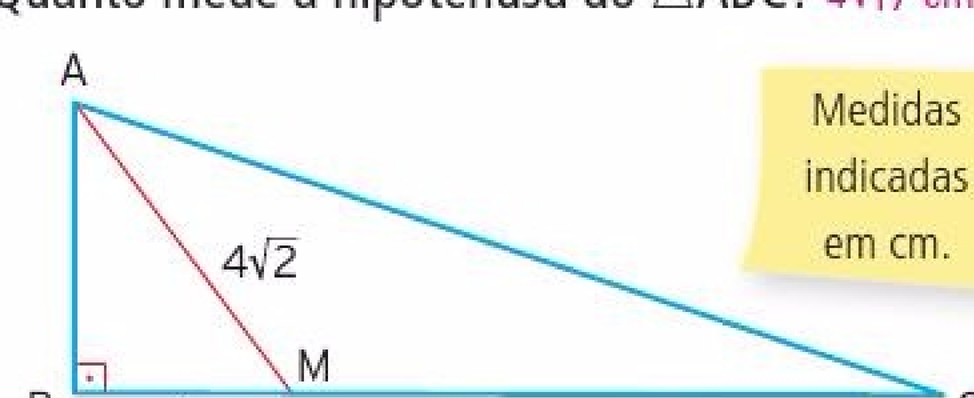
ILUSTRAÇÕES: FRANCISCO VILACHÃ

20. Na figura, $\triangle$ABM é um triângulo retângulo em **B** e as medidas indicadas estão em centímetros. Calcule a medida de $\overline{AC}$. $\sqrt{114}$ cm



21. Na figura, o ponto **M** divide o segmento de reta $\overline{BC}$ na razão $\frac{1}{3}$, sendo med $\overline{BM}$ < med $\overline{MC}$.

Quanto mede a hipotenusa do $\triangle$ABC? $4\sqrt{17}$ cm



Medidas indicadas em cm.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

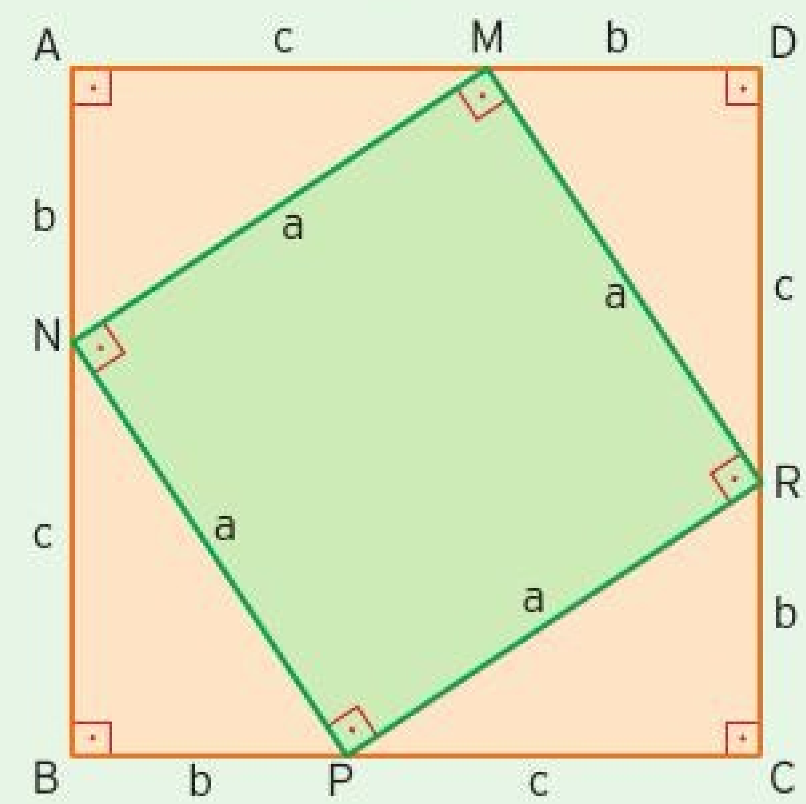
Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões.

Acompanhem e completem uma demonstração do teorema de Pitágoras envolvendo áreas de quadrados.

Primeiro foram desenhados dois quadrados com lados de medida **b + c**:

Na figura 1, MNPR é um quadrado com lados de medida **a** e as demais figuras são triângulos retângulos congruentes com lados de medidas **a**, **b** e **c**.

Figura 1

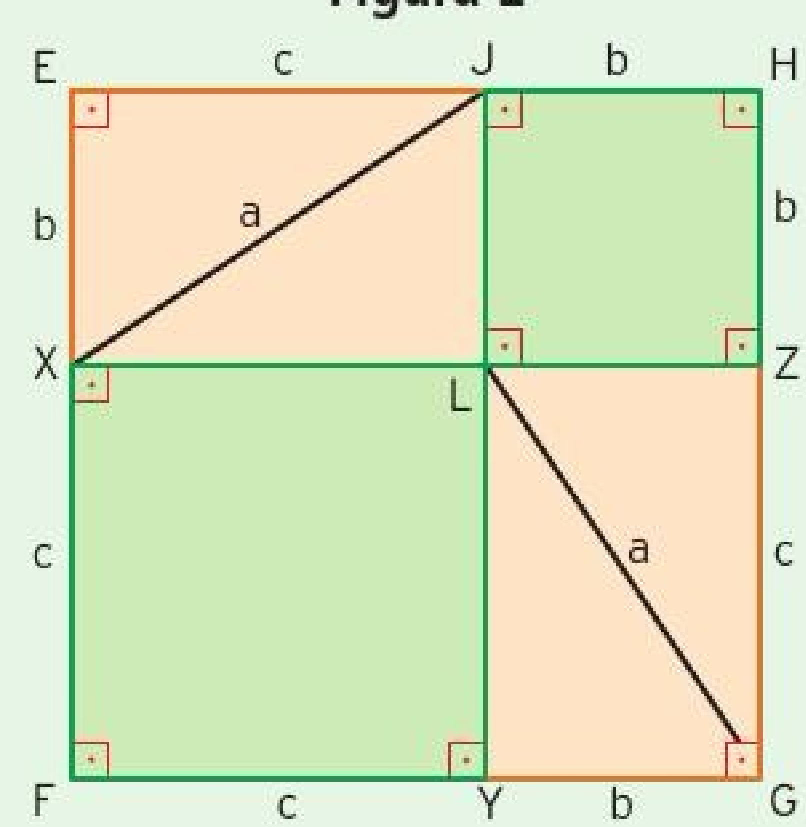


- Verifique se é válida a igualdade:

área ABCD = área MNPR + 4 · área ANM. Verdadeira.

Na figura 2, XFYL e HJLZ são quadrados com lados de medidas **c** e **b**, respectivamente; já EXLJ e LYGZ são retângulos congruentes com lados de medidas **b** e **c**.

Figura 2



Área ABCD $= a^2 + \frac{4bc}{2}$

Área ABCD $= a^2 + 2bc$

$\triangle$AMN é um triângulo retângulo: $a^2 = b^2 + c^2$

Área ABCD $= b^2 + c^2 + 2bc$

Área EDGH $= b^2 + c^2 + 2bc$

Área ABCD = Área EDGH

Área EFGH = área HJLZ + área FYL + 2 · área EXLJ.

- Que relação existe entre as áreas EFGH e as áreas das figuras que compõem EFGH?

Agora, mostre que os quadrados ABCD e EFGH têm áreas iguais e que:

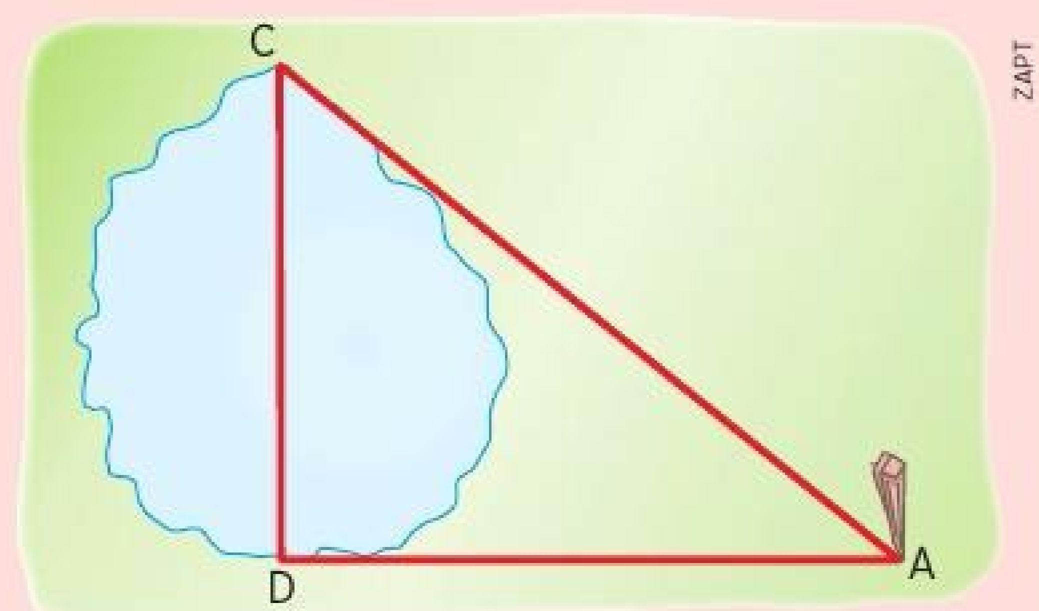
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Desafio

"Não vale atravessar o lago!"

Foi com esse aviso que Pedro distribuiu este desenho e desafiou os amigos.

Observe, na imagem ao lado, o desenho que ele distribuiu e leia as informações que deu:

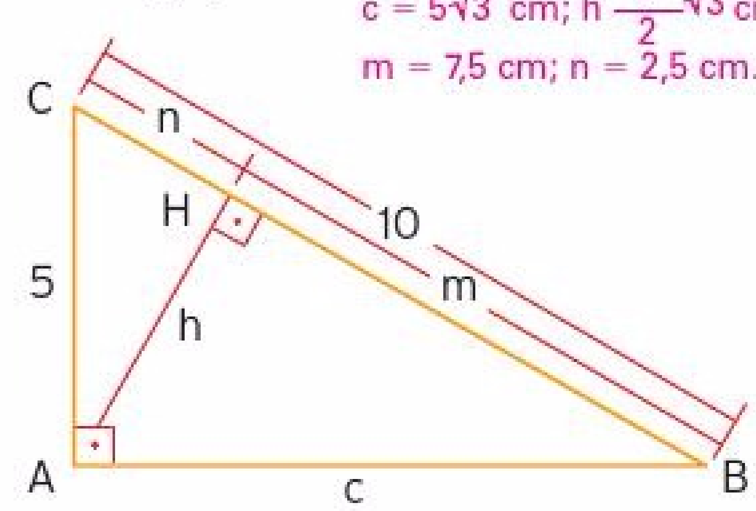


- A distância de **C** e **A** é de 50 m.
- A distância de **D** e **A** é $\frac{4}{5}$ da distância de **A** a **C**.
- ACD é um triângulo retângulo em **D**.
- Qual é a distância de **C** a **D**? 30 m

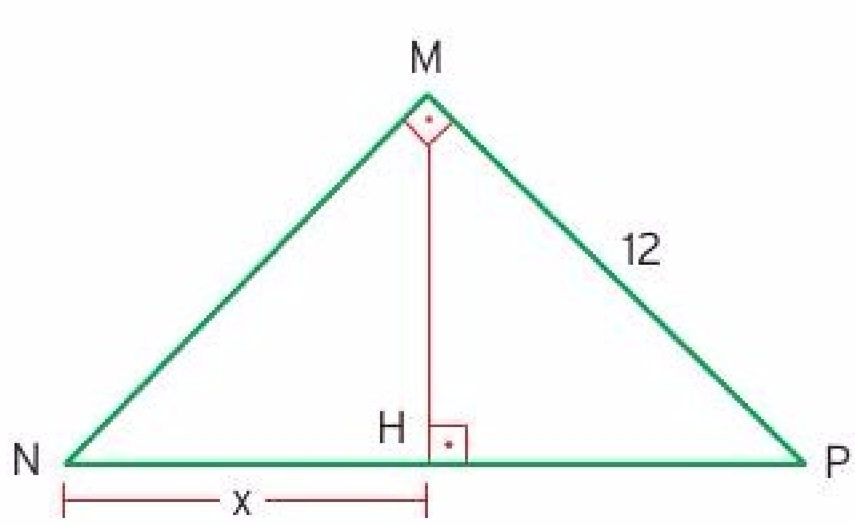
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

22. No triângulo retângulo a seguir, as medidas estão indicadas em centímetros. Determine as medidas de **c**, **h**, **m** e **n**. $c = 5\sqrt{3}$ cm; $h = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm; $m = 7{,}5$ cm; $n = 2{,}5$ cm.



23. Na figura, o $\triangle$MNP é um triângulo retângulo isósceles, e as medidas indicadas estão em centímetros.



a) Determine a medida de $\overline{HP}$. $6\sqrt{2}$ cm

b) Calcule a medida da hipotenusa. $12\sqrt{2}$ cm

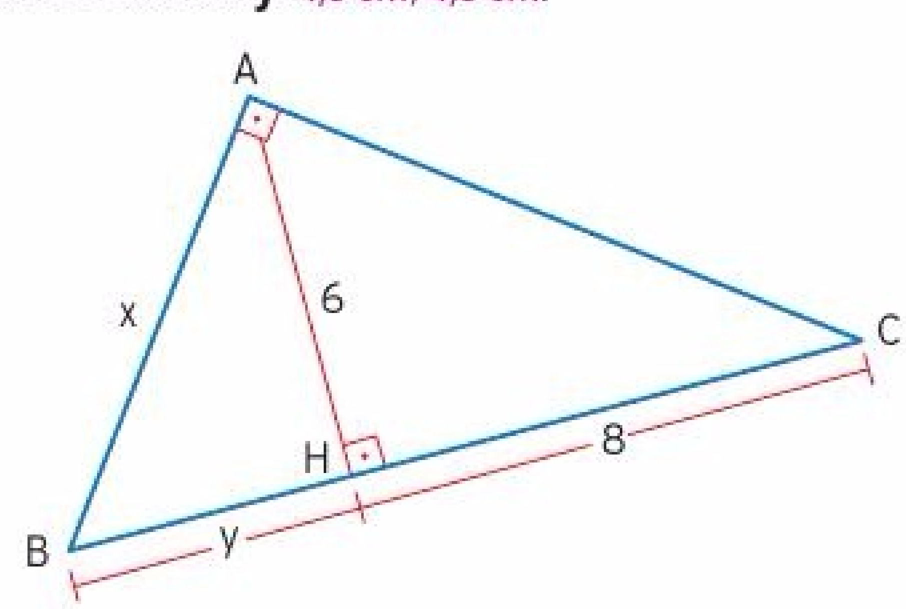
24. Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 24 cm, e a sua projeção sobre a hipotenusa mede 14,4 cm.

a) Determine a medida da hipotenusa. 40 cm

b) Determine a medida do outro cateto. 32 cm

c) Determine a medida da altura relativa à hipotenusa. 19,2 cm

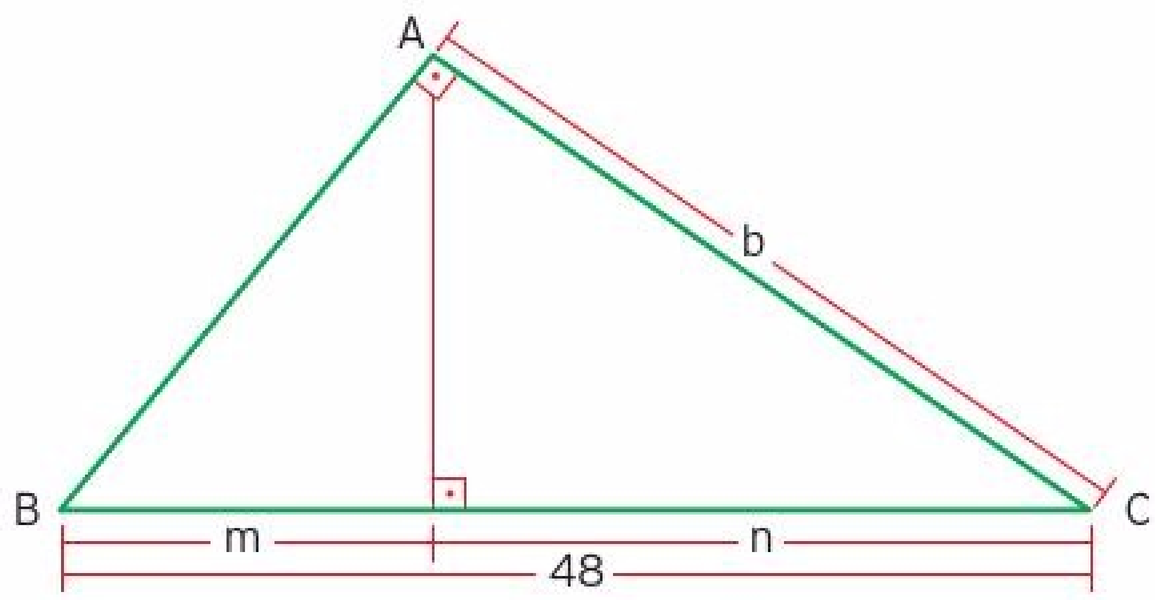
25. Na figura, a altura relativa à hipotenusa mede 6 cm, e a projeção ortogonal de um dos catetos sobre a hipotenusa mede 8 cm. Determine os valores de **x** e **y**. 7,5 cm; 4,5 cm.



26. Os catetos de um triângulo retângulo medem 5 cm e 12 cm. Calcule uma razão das projeções ortogonais desses catetos sobre a hipotenusa.

$\frac{25}{144}$ ou $\frac{144}{25}$

27. Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-a em dois segmentos de reta na razão $\frac{3}{5}$. Se a hipotenusa mede 48 cm, quanto mede o cateto maior?



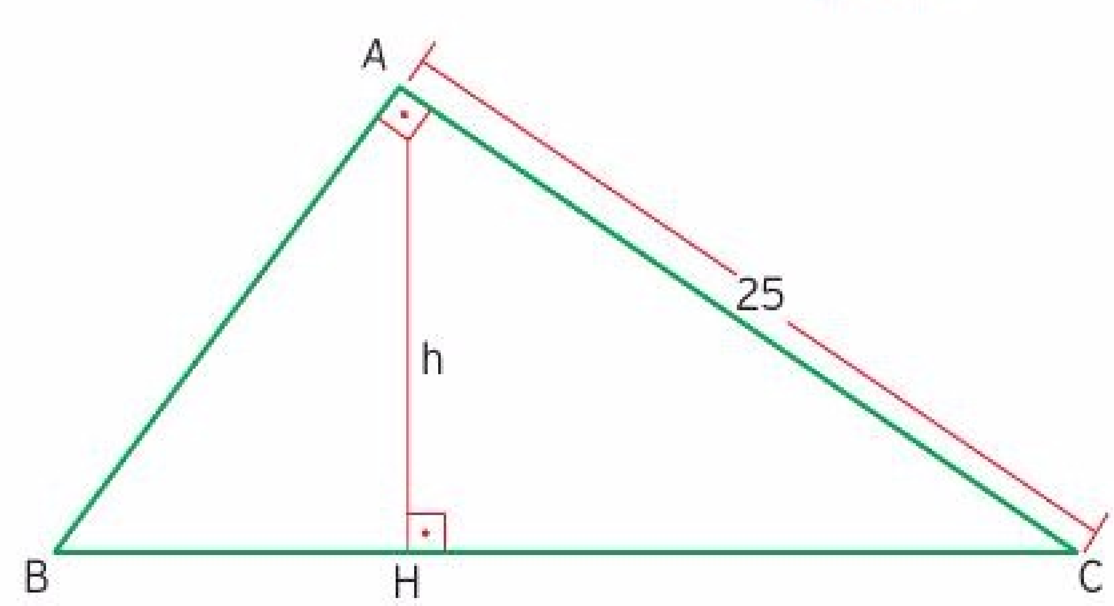
Pista: note que supondo que o cateto maior seja $\overline{AC}$, temos $\mathbf{n} > \mathbf{m}$ ou:

$\mathbf{m} < \mathbf{n}$ —— $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$

razão do menor para o maior

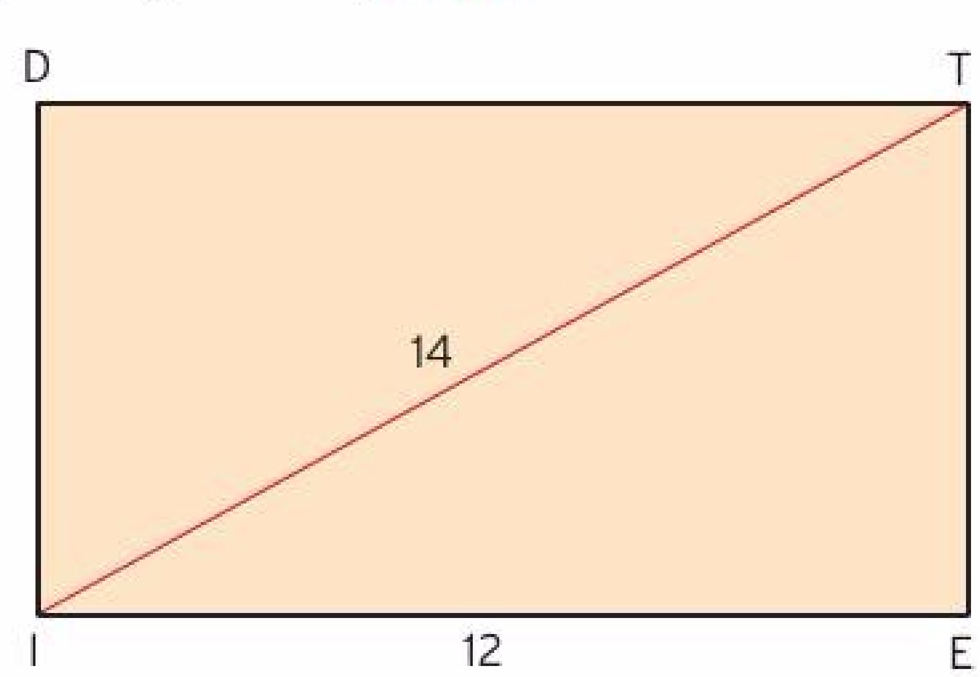
Agora, prossiga calculando primeiro o valor para **n**. Em seguida, a medida de $\overline{AC}$.
n = 10 e a medida de $\overline{AC}$ é $12\sqrt{10}$ cm.

28. Neste triângulo retângulo, a altura **h** divide a hipotenusa em dois segmentos de reta na razão $\frac{2}{3}$. Se a hipotenusa mede 25 cm, quanto mede o cateto menor desse triângulo? $5\sqrt{10}$ cm

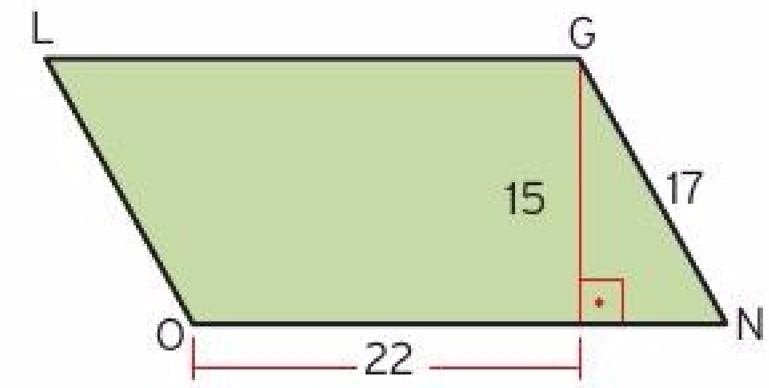


29. Determine a área dos polígonos a seguir sabendo que as medidas indicadas estão em centímetros:

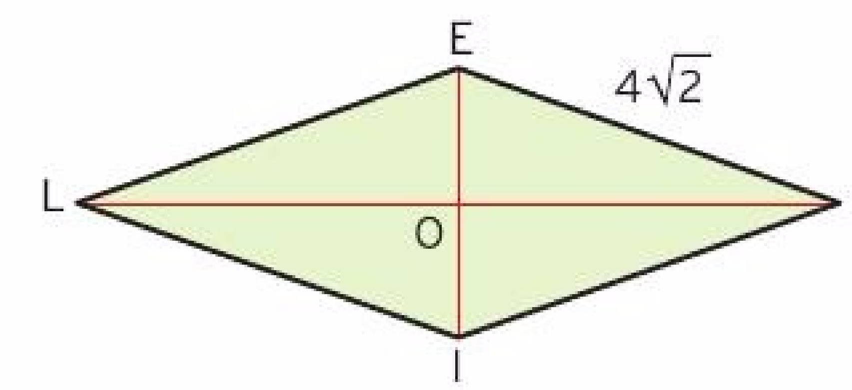
a) retângulo DIET; $24\sqrt{13}$ cm²



b) paralelogramo LONG; 450 cm²



c) losango LIFE, no qual $\overline{OE} = x$ e $\overline{OF} = 3x$.
19,2 cm²



30. Em um triângulo retângulo, a razão entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é $\frac{9}{16}$. Sabendo que a hipotenusa mede 75 cm, calcule as medidas dos catetos. 45 cm e 60 cm.

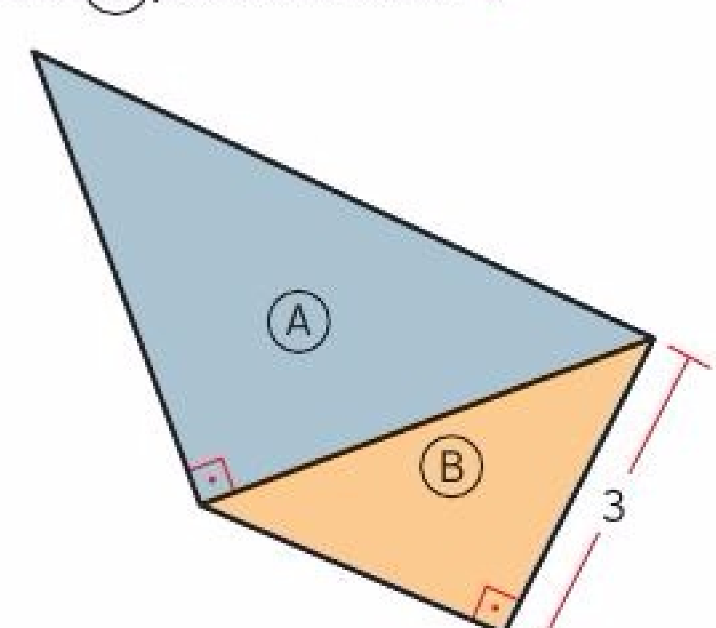
31. Calcule o perímetro de um triângulo retângulo sabendo que um cateto mede 12 m e a projeção do outro cateto sobre a hipotenusa mede 5,4 m.
36 m

32. Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 18 m e a hipotenusa excede em 6 m o outro cateto. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa. 14,4 m

33. A altura de um trapézio retângulo mede 8 cm e as bases medem 5 cm e 11 cm. Calcule o perímetro desse trapézio. 34 cm

34. Determine as medidas dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que o perímetro é 84 cm e a diferença entre as medidas dos catetos é 7 cm.
21 cm, 28 cm e 35 cm.

35. Os triângulos A e B da figura são retângulos e isósceles. Qual é a razão entre a área de A e a área de B, nessa ordem? 2

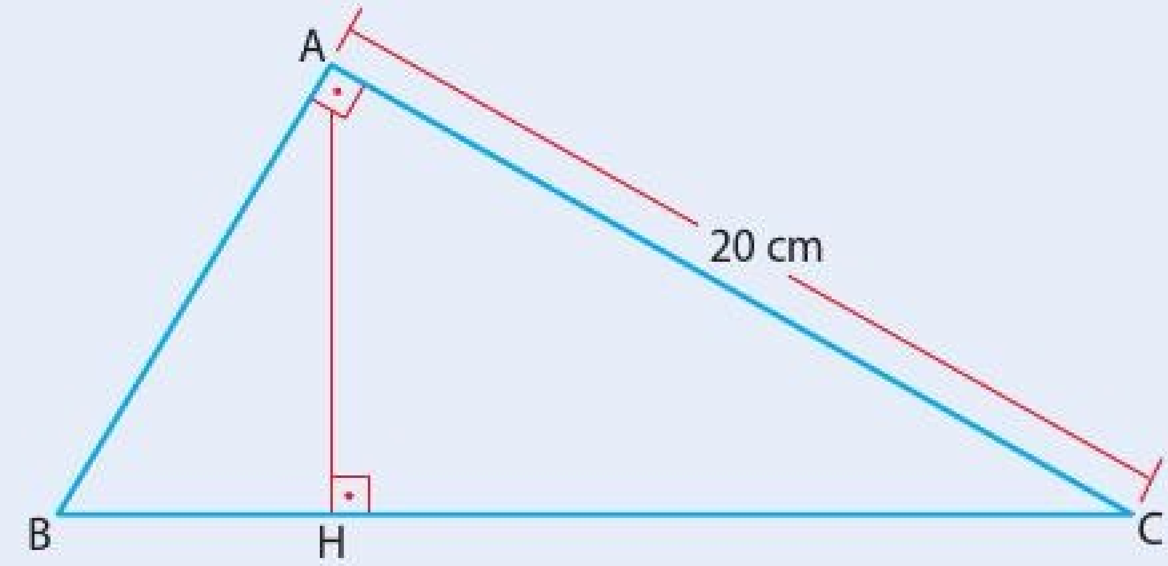


Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

No triângulo retângulo ABC dado na figura abaixo, med $\overline{HC}$ é o dobro de med $\overline{AH}$.



- Qual é a medida do cateto menor desse triângulo? 10 cm

Desafio

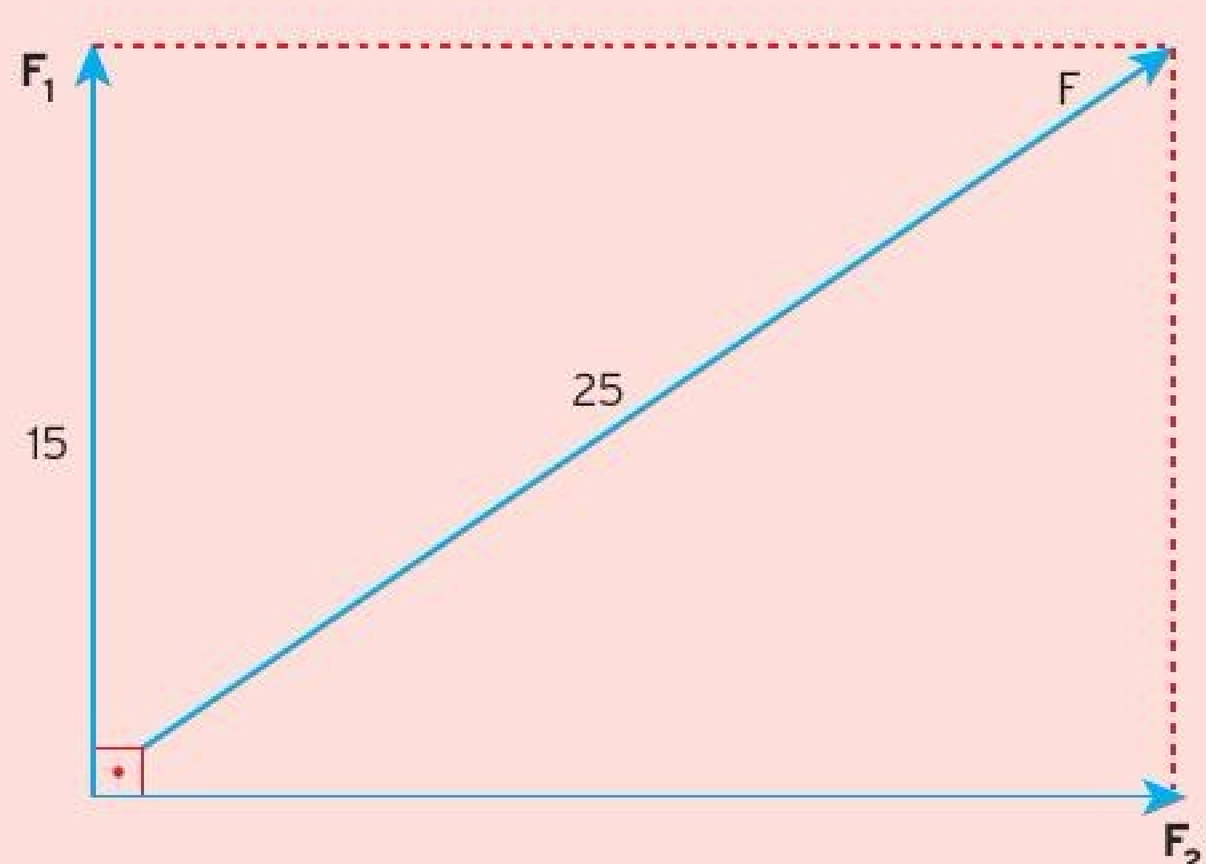
FAÇA NO CADERNO

O teorema de Pitágoras e o cálculo de forças

Duas forças perpendiculares entre si têm uma força resultante cuja intensidade vale 25 kgf (**kgf** significa quilograma-força).

A intensidade, a direção e o sentido da força resultante de duas forças perpendiculares são representados graficamente pela diagonal do retângulo traçado sobre essas forças.

Observe a figura abaixo.

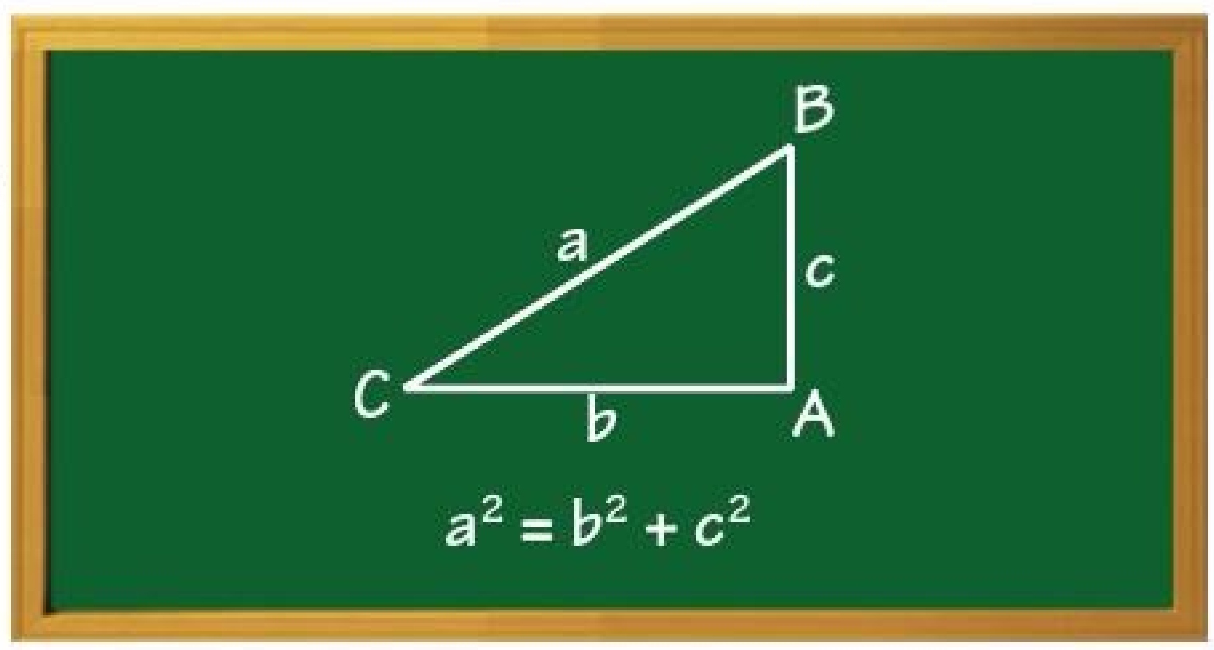


- Se uma das forças componentes tem intensidade de 15 kgf, qual é a intensidade da outra força componente? 20 kgf

2 Quadrados, triângulos e o teorema de Pitágoras

Explore outras situações de aplicação do teorema de Pitágoras que envolvam o cálculo de medida de lados e diagonais dos quadrados e de lados e alturas dos triângulos equiláteros.

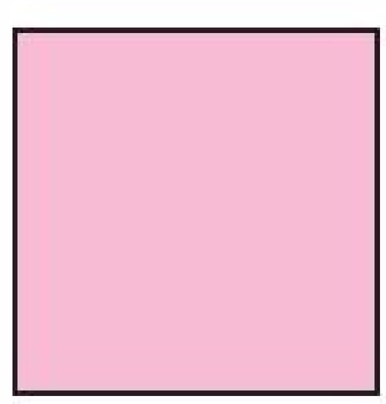
Quadrados e o teorema de Pitágoras



ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

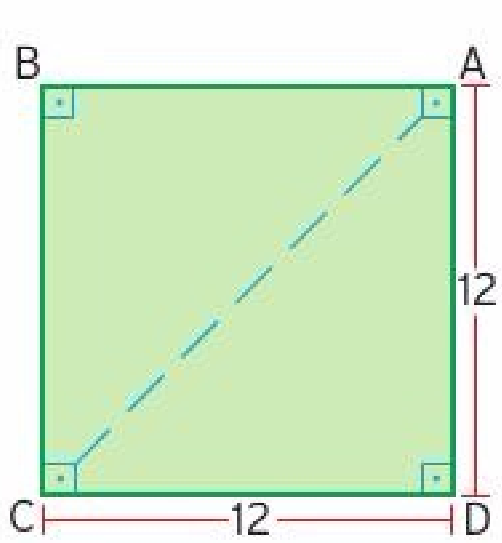
Para refletir e responder

Mariana tinha um pedaço de papel quadrado, como este abaixo. Acertou ponta com ponta e fez uma dobra marcando uma diagonal.



- Que tipo de figura ela obteve ao final da dobradura? Triângulos retângulos isósceles.
- Os lados do quadrado inicial mediam 12 cm. Calcule a medida da diagonal obtida na dobradura. $12\sqrt{2}$ cm

Nessa situação, a dobradura realizada marcou uma diagonal no quadrado inicial e formou dois triângulos retângulos: um deles é $\triangle ACD$.



teorema de Pitágoras

$\triangle ACD$ retângulo — $(\text{med } \overline{AC})^2 = 12^2 + 12^2$

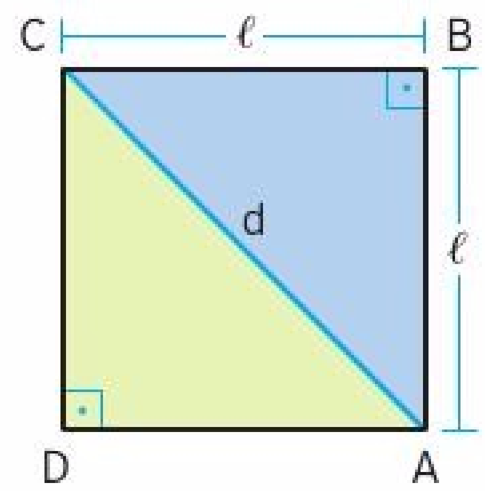
$(\text{med } \overline{AC})^2 = 144 + 144$ — $(\text{med } \overline{AC})^2 = 288$

$\text{med } \overline{AC} = \sqrt{288} = \sqrt{2 \cdot 144} = 12\sqrt{2}$

$\mathbf{med}\ \overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{12\sqrt{2}}$ **cm**

Portanto, se o lado do quadrado mede 12 cm, a diagonal deverá medir $12\sqrt{2}$ cm.

De modo geral, a medida de um lado de um quadrado qualquer relaciona-se com a medida de uma das diagonais aplicando o teorema de Pitágoras.



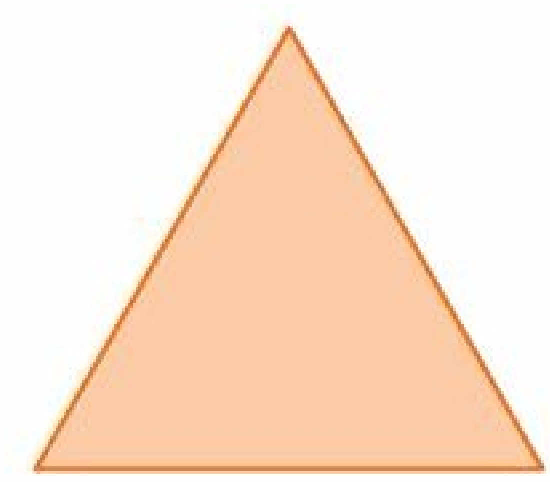
ℓ: medida do lado;
d: medida da diagonal.

$\triangle ABC$ retângulo em **B** —— $d^2 = \ell^2 + \ell^2$ —— $d^2 = 2\ell^2$

$d = \sqrt{2\ell^2}$ —— $d = \ell\sqrt{2}$

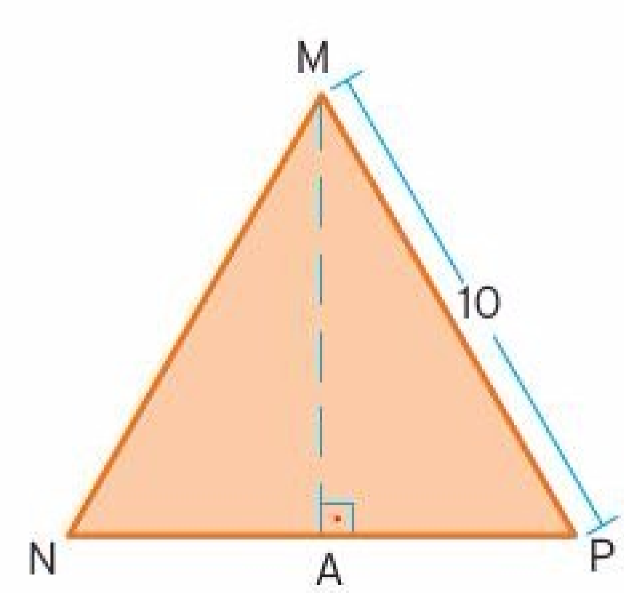
Triângulos equiláteros e o teorema de Pitágoras

Usando régua e compasso, João desenhou um triângulo equilátero com lados medindo 10 cm.



Recortou-o e fez como Mariana: ajustou lado com lado, dobrou o papel e vincou uma dobra.

Com a dobradura realizada, João marcou uma altura relativa a um dos lados do triângulo inicial e formou dois triângulos retângulos: um deles é $\triangle MAP$.



$\triangle MNP$ equilátero
$\overline{MA}$ altura relativa a $\overline{NP}$
—— $\overline{MA}$ é a mediana relativa a $\overline{NP}$.
A é o ponto médio de $\overline{NP}$.

med $\overline{NP}$ = 10 cm —— med $\overline{AP}$ = 5 cm

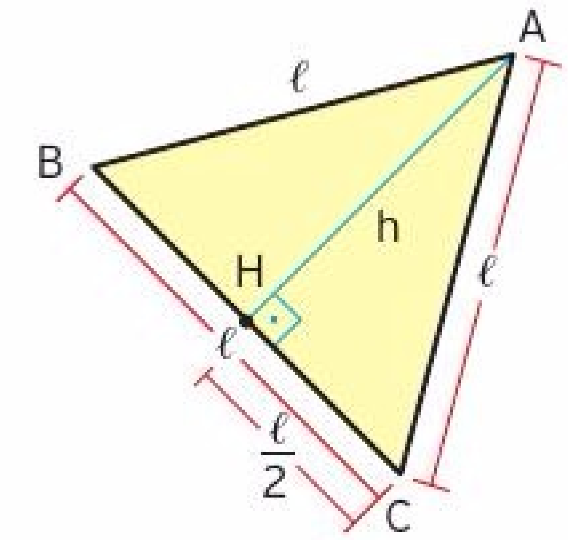
$\triangle MAP$ retângulo —— $10^2 = 5^2 + (\text{med } \overline{MA})^2$

$100 = 25 + (\text{med } \overline{MA})^2$

$(\text{med } \overline{MA})^2 = 100 - 25 = 75$ —— **med $\overline{MA}$ = $5\sqrt{3}$ cm**

Portanto, se os lados de um triângulo equilátero medem 10 cm, a altura relativa a qualquer um deles mede $5\sqrt{3}$ cm.

De modo geral, em um triângulo equilátero qualquer, cujos lados medem ℓ, traçando a altura relativa a um dos lados, temos:



$\triangle ABC$ equilátero, $\overline{AH}$ altura —— $\overline{AH}$ mediana relativa a $\overline{BC}$; **H** ponto médio de $\overline{BC}$; med $\overline{HC} = \dfrac{\ell}{2}$

$$\triangle AHC \text{ retângulo} \;—\; \ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \;—\; \ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$\ell^2 - \frac{\ell}{4} = h^2 \;—\; h = \frac{\sqrt{3\ell^2}}{\sqrt{4}} \;—\; \mathbf{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Outros exemplos:

- A diagonal de um quadrado mede 18 cm. Vamos calcular a medida dos lados desse quadrado.

  Vamos representar por:

  ℓ —— medida do lado do quadrado

  d —— medida da diagonal do quadrado

  $d = \ell\sqrt{2}$ ——— $18 = \ell\sqrt{2}$ ——— $\mathbf{\ell = 9\sqrt{2}}$ **cm**

  Os lados do quadrado medem $9\sqrt{2}$ cm ou aproximadamente 12,7 cm.

- Qual é a medida dos lados de um triângulo equilátero cujas alturas medem 9 cm?

  Vamos representar por:

  ℓ —— medida do lado do triângulo equilátero

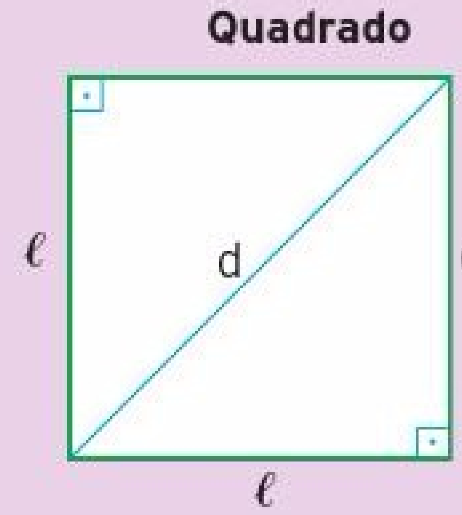
  h —— medida da altura relativa a um dos lados

  $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ ——— $9 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ ——— $\ell = 6\sqrt{3}$ cm $\cong$ **10,4 cm**

  Os lados do triângulo medem $6\sqrt{3}$ cm ou aproximadamente 10,4 cm.

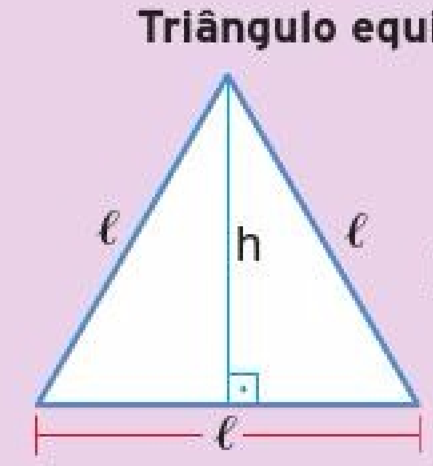
Em resumo, temos duas fórmulas:

Quadrado



$\mathbf{d = \ell\sqrt{2}}$

Triângulo equilátero



$$\mathbf{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

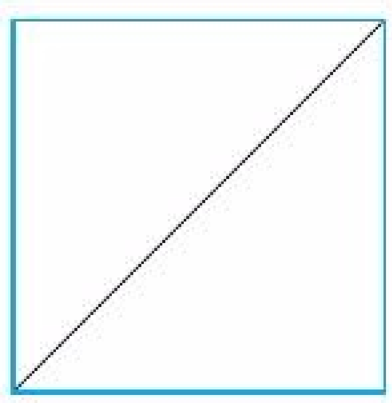
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

36. Para expor um trabalho de Geografia, Joana recortou um quadro de cartolina de formato quadrado. A diagonal desse quadro media, aproximadamente, 50 cm.

a) Qual era, aproximadamente, a medida do lado desse quadro? 35,36 cm

b) Joana fez uma moldura nesse quadro usando fita adesiva vermelha. Quantos centímetros de fita adesiva ela usou, aproximadamente? 142 cm



Use 1,41 como valor aproximado para $\sqrt{2}$.

37. Em Belo-Rio, a Praça da Sé é triangular com todos os lados iguais, medindo 48 m cada um. Em uma das alturas do triângulo formado pela praça existe um calçadão. Aproximadamente, quantos metros de comprimento tem o lado maior desse calçadão? 41,6 m

Use 1,73 como valor aproximado para $\sqrt{3}$.

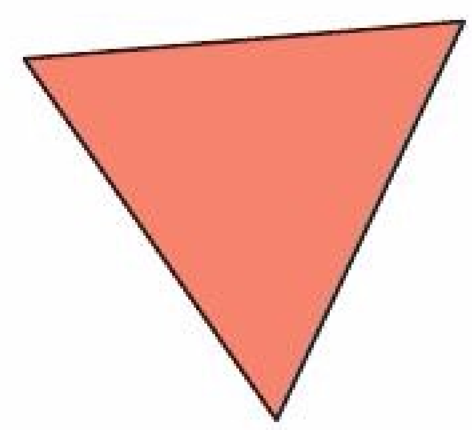
FRANCISCO VILACHÃ

38. Qual é a medida aproximada de uma diagonal de um terreno quadrado que tem 465 m de lado? Aproximadamente 658 m.

39. Qual é a medida da altura de um triângulo equilátero cujos lados medem 10 cm? E de um triângulo equilátero cujos lados medem $8\sqrt{3}$ cm? $5\sqrt{3}$ cm; 12 cm.

40. Determine a medida da altura de um triângulo equilátero que tem $10\sqrt{3}$ cm de lado. 15 cm

41. Juca fez uma pipa composta de dois triângulos equiláteros, cada um com 30 cm de lado. Ele colou as duas partes sem sobrepor as figuras: apenas ajustando um lado de um triângulo com um lado do outro.



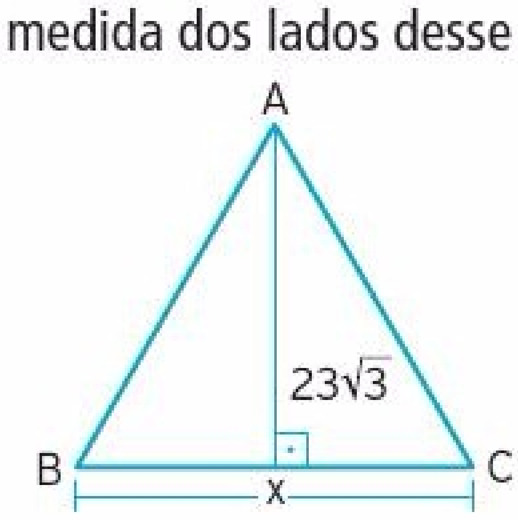
Use 1,73 como valor aproximado para $\sqrt{3}$.

a) Qual é a medida exata da altura de cada parte da pipa que ele construiu? E a medida aproximada? $15\sqrt{3}$ cm; 26 cm.

b) Qual é o formato da pipa de Juca? Um losango.

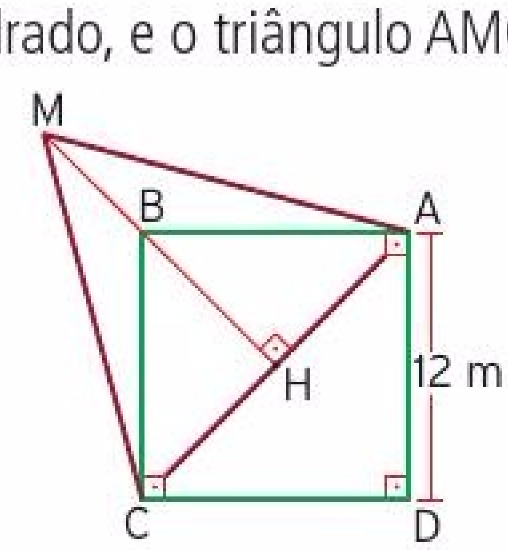
c) Qual é a medida aproximada de cada uma das diagonais dessa pipa? E a área aproximada? 30 cm, 52 cm, 780 cm^2

42. Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero e a medida da altura é dada em centímetro. Qual é a medida dos lados desse triângulo? 46 cm



Usando a calculadora

Nesta figura, ABCD é um quadrado, e o triângulo AMC é equilátero.



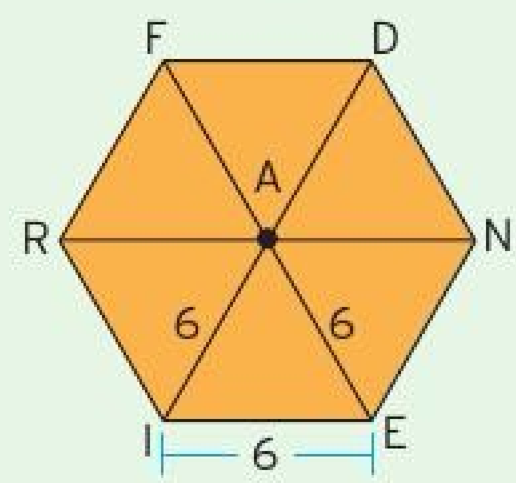
- Qual é a medida aproximada das alturas desse triângulo? 14,7 m

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões a seguir.

FRIEND é um hexágono regular com 6 cm de lado.



- Em relação aos lados, de que tipo é o triângulo AFR? E o triângulo ARI? Equilátero; equilátero.
- FRIEND foi decomposto em vários triângulos, sendo A um vértice comum a todos eles. Em quantos triângulos ele foi decomposto? De que tipo são esses triângulos? 6 triângulos equiláteros e congruentes entre si.
- Qual é a medida da altura de cada um dos triângulos? $3\sqrt{3}$ cm
- Qual é a área do triângulo ARI? $9\sqrt{3}$ cm^2
- Qual é a área de FRIEND? $54\sqrt{3}$ cm^2

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

43. Calcule o perímetro de um quadrado cuja diagonal mede $13\sqrt{2}$ m. 52 m

44. Calcule o perímetro de um triângulo equilátero cuja altura mede $12\sqrt{3}$ cm. 72 cm

45. Determine a área de um triângulo equilátero sabendo que a medida de um lado excede em 2 cm a medida da altura relativa a esse lado. $(48 + 28\sqrt{3})$ cm^2

46. Uma caixa-d'água tem uma base quadrada cuja diagonal mede 9 m a mais que o lado. Qual é o perímetro dessa base? $(36\sqrt{2} + 36)$ m

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Com um pedaço de arame de 72 cm de comprimento, Luís deseja fazer um triângulo retângulo cuja hipotenusa meça 30 cm.

- Que medidas devem ter os catetos desse triângulo? 18 cm e 24 cm.

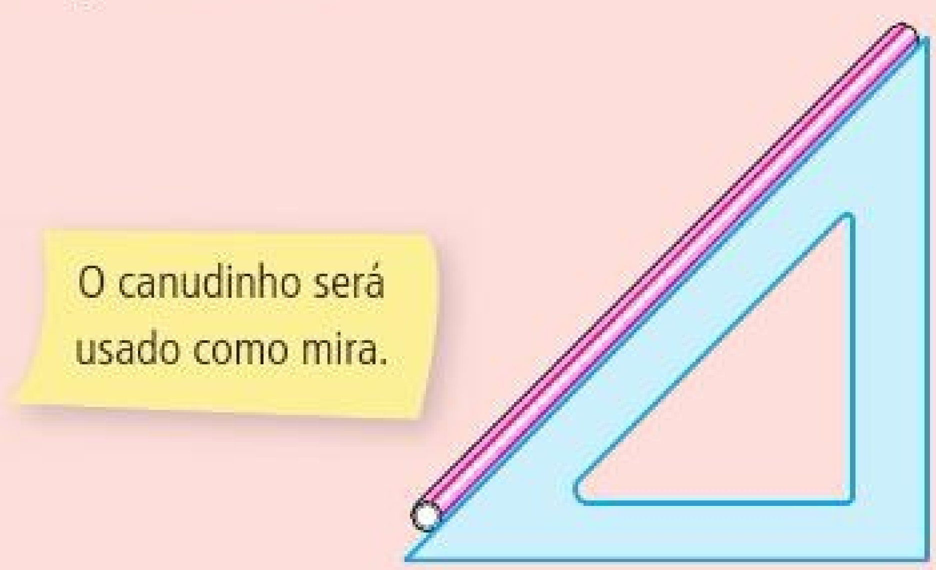
Desafio

FAÇA NO CADERNO

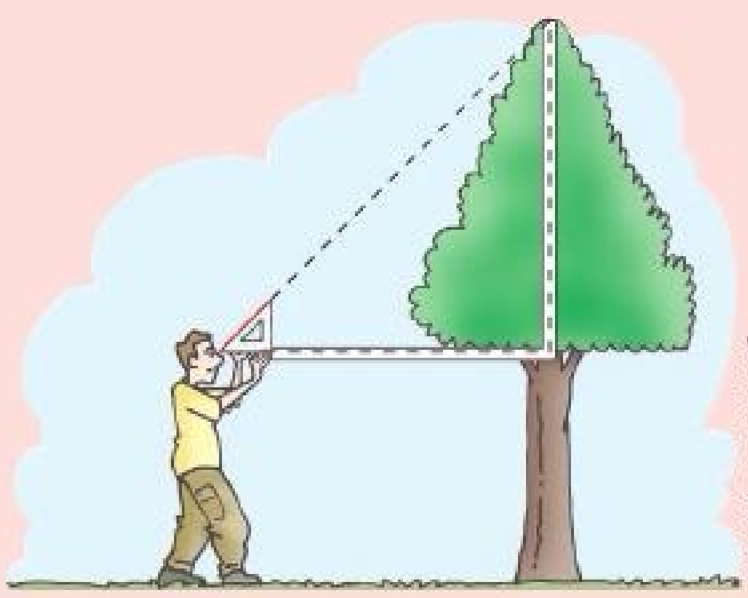
Medindo com o "olho"... e com um esquadro

... que com um esquadro é possível medir distâncias e alturas que dificilmente podemos medir diretamente? Experimente!

- Comece providenciando um esquadro com dois lados iguais e um canudinho de refrigerante.
- Ajuste o canudinho, ou um pedaço dele, como mostra a figura abaixo.



- Escolha uma árvore, um poste ou outro objeto cuja altura você não possa medir diretamente.
- Fique a certa distância do objeto escolhido. Se for uma árvore, por exemplo, segure o esquadro e mire a copa dessa árvore, conforme mostra a figura abaixo. Vá se distanciando ou se aproximando dela até que apareça o topo da árvore na sua mira.
- Agora, imagine um triângulo com um cateto formado pela altura da árvore menos a sua altura até a linha dos olhos, o segundo cateto formado pela distância do ponto onde está até o tronco da árvore e a hipotenusa pela linha reta que vai do topo da árvore até seus olhos. Compare esse triângulo com o triângulo formado pelo esquadro que está utilizando. Que relação há entre eles? São semelhantes.



- Como o esquadro tem dois catetos iguais, qual é a razão entre as medidas desses lados? 1
  Determine, agora, o valor da razão:

$$\frac{\text{medida da altura da árvore menos a sua até a linha dos olhos}}{\text{distância entre você e o tronco da árvore}}$$

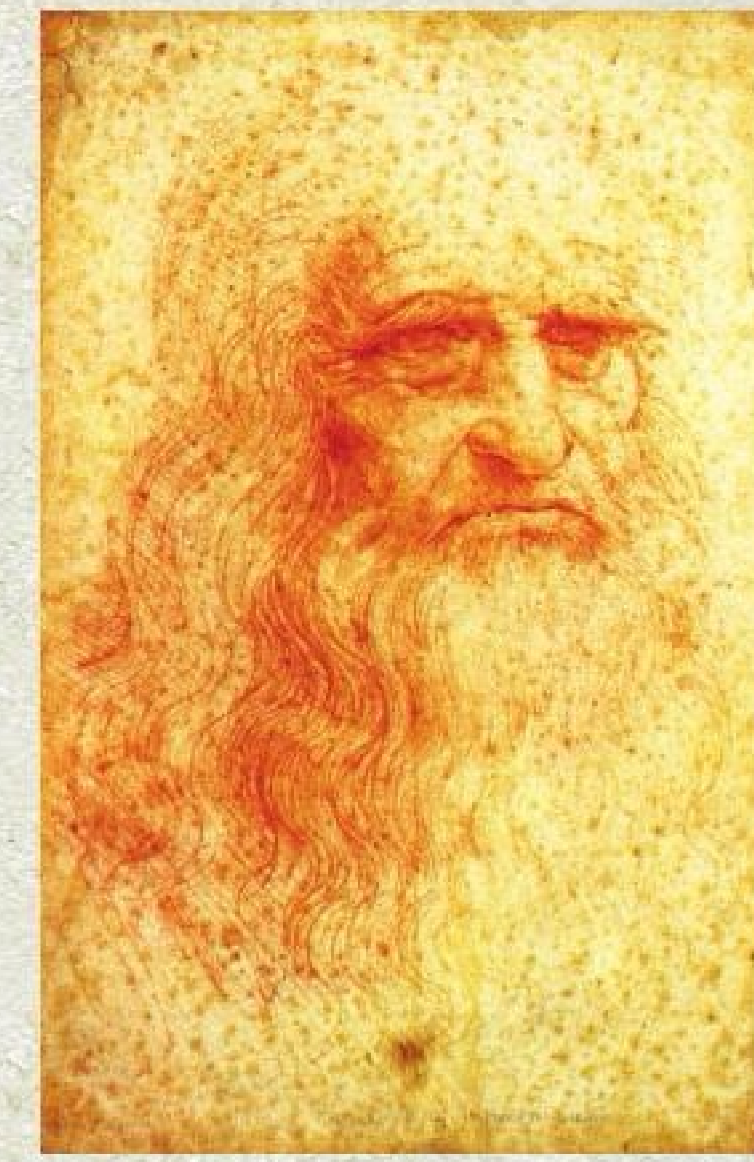
- De acordo com a sua altura, qual será a altura da árvore escolhida? (medida da sua altura até a linha dos olhos) + (sua distância até o tronco da árvore)

Leitura

"A proporção é linda!"

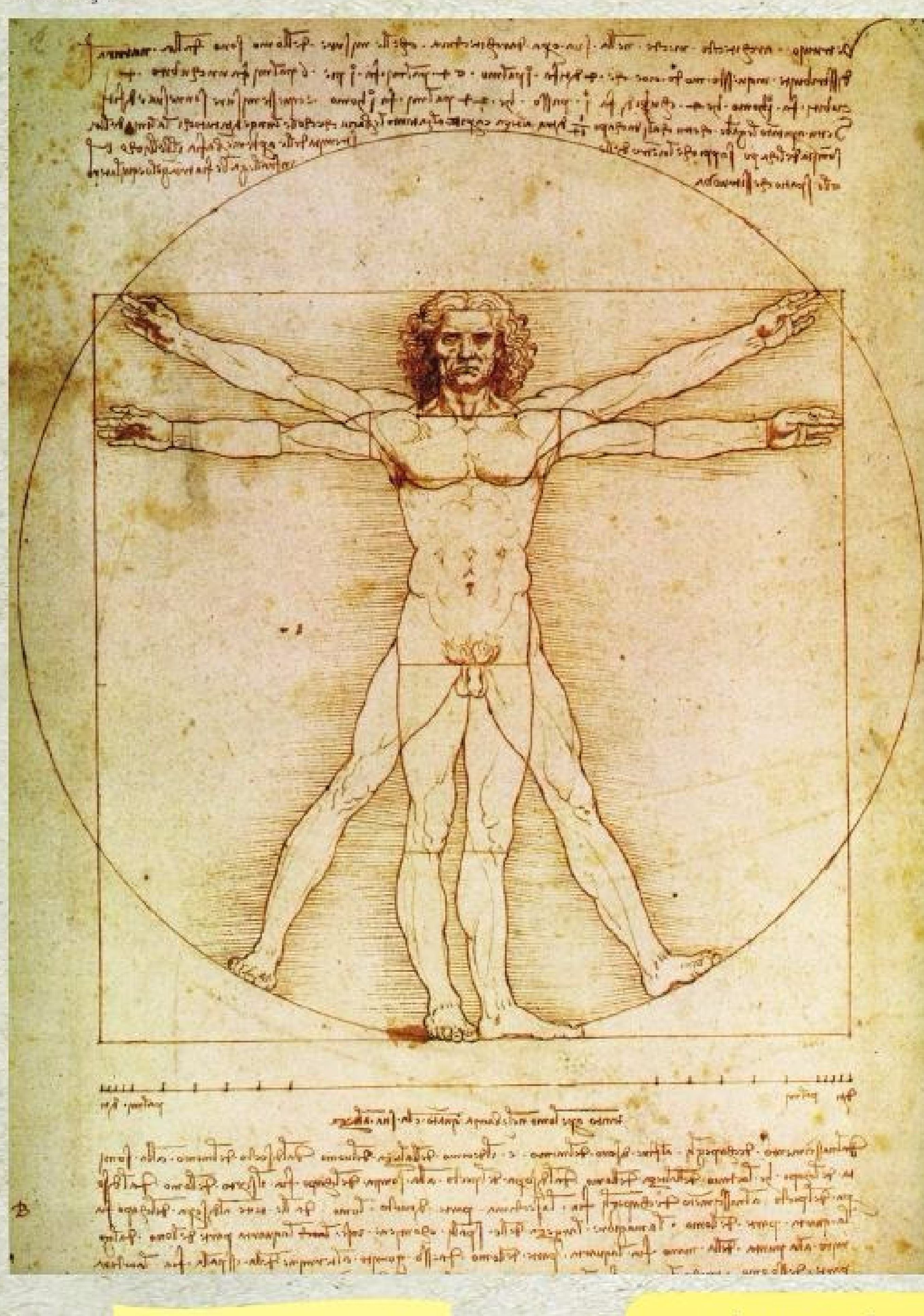
Leonardo da Vinci (1452-1519) foi um dos gênios da Renascença. Tinha pensamento ousado e original, era um homem tanto de ação quanto de contemplação. Foi também um dos artistas mais completos dessa época: pintor, arquiteto, criador de projetos e inventor de instrumentos e máquinas muito avançados para a época.

Com relação à beleza do corpo humano, Da Vinci afirmava que para ser harmonioso e proporcional existem algumas condições a verificar. Por exemplo, a altura total dividida pela altura até o ombro deve ser igual à altura até o ombro dividida pela distância ombro-cabeça.



LEONARDO DA VINCI. AUTORRETRATO, C. 1513.

Leonardo da Vinci (1452-1519).



LEONARDO DA VINCI. HOMEM VITRUVIANO, C. 1492.

Homem Vitruviano. Leonardo da Vinci.
Lápis e tinta sobre papel, 34cm × 24cm, 1492.

Cânone de harmonia do corpo humano.

$$\frac{\text{altura total}}{\text{altura até o ombro}} = \frac{\text{altura até o ombro}}{\text{distância ombro-cabeça}}$$

Essa proporção está presente em muitas das obras de arte de Leonardo da Vinci.

Fonte de pesquisa: Carl B. Boyer. **História da Matemática**. *Tradução de Elza F. Gomides. 3ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.*

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Resolva estas equações:

a) $-x^2 + x + 35 = -x + 20$ $-3, 5$

b) $4(x + 1) - 9 = (x + 3)(x - 3) - 4$ $2 - 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3}$

c) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{3} - \dfrac{(x-1)^2}{2} = \dfrac{2(x-3)}{3}$ $1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}$

2. Cecília comprou um terreno quadrado com $784\ m^2$ de área.

a) Qual é o perímetro do terreno que ela comprou? 112 m

b) Cecília dividiu o terreno ao meio com uma cerca que é uma de suas diagonais: em uma das partes, ela pretende construir sua casa; na outra, um pequeno pomar e uma horta. A cerca que divide o terreno é formada de 4 fios de arame, cada um com comprimento igual à medida da diagonal. Qual é a medida de cada pedaço de arame? $28\sqrt{2}$ m

c) Quantos metros de arame ela usou para demarcar essa separação? $112\sqrt{2}$ m

3. Os lados de um triângulo equilátero têm as mesmas medidas dos lados de um quadrado cuja diagonal mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a altura desse triângulo. $3\sqrt{2}$ cm

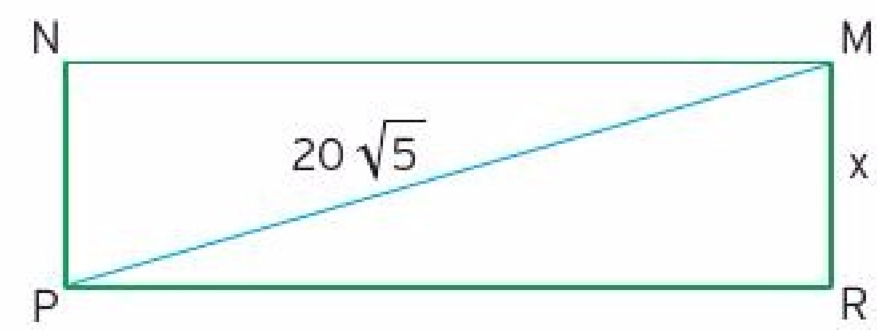
4. Determine os valores de **m** para que a equação $2x^2 + (m + 4)x + m + 10 = 0$ tenha duas raízes reais iguais. $m = -8$ e $m = 8$.

5. Um número inteiro diminuído de 6 unidades e multiplicado pelo seu consecutivo é igual a -6. Qual é esse número? 0 ou 5.

6. Na equação $2x^2 - (m - 5)x - 6m = 0$, com incógnita **x**, o número 3 é uma das raízes. Qual é o valor de **m**? $\frac{11}{3}$

7. O perímetro de um quadrado é 20 cm. Qual é a medida de uma diagonal desse quadrado? Qual é a sua área? $5\sqrt{2}$ cm; 25 cm^2.

8. MNPR é um retângulo em que o comprimento é o triplo da largura. Qual é a medida da largura desse retângulo? $10\sqrt{2}$ cm

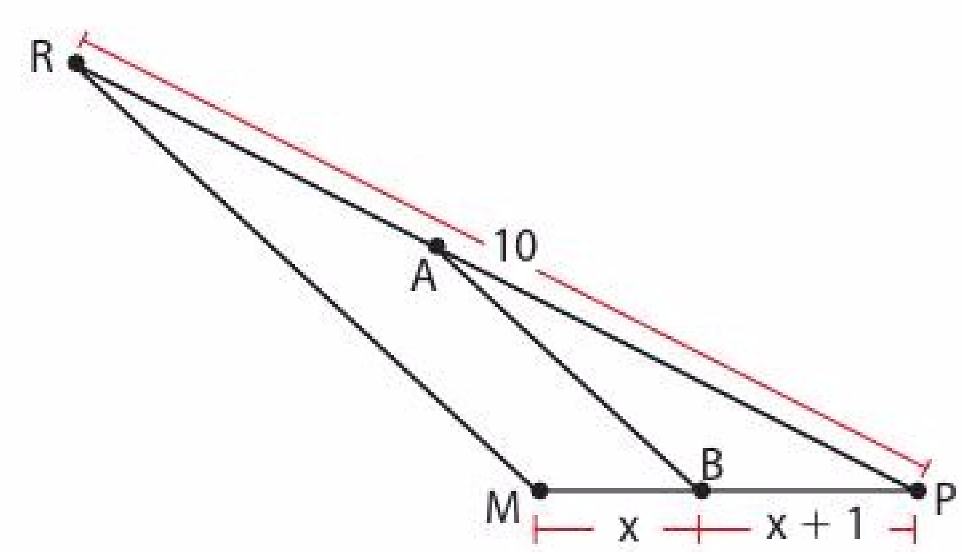


9. Calcule o valor da expressão: 42

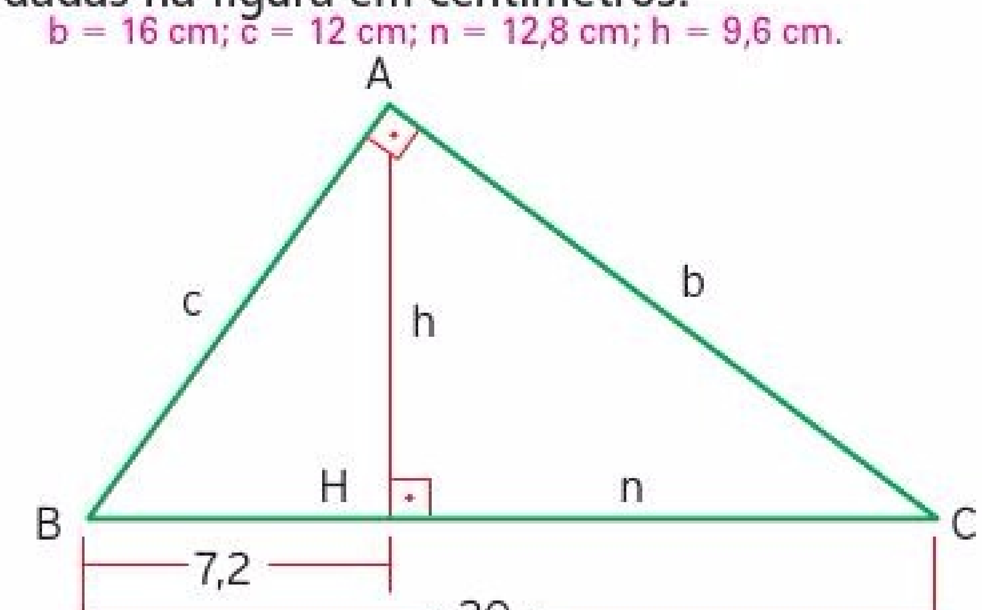
$$\frac{7^{n+3} - 7^{n+2}}{7^{n+1}}$$

10. A diferença entre as idades de dois irmãos é 3 anos e o produto de suas idades é 270. Qual é a idade de cada um? 15 anos e 18 anos.

11. Na figura, $\overline{AB} \parallel \overline{RM}$ e as medidas estão indicadas em metros. Sabendo que a distância de A a P é de 6 m, determine, em centímetros, a distância de M a P 500 cm



12. Este triângulo é retângulo em **A**. Determine os valores de **b**, **c**, **n** e **h**, considerando as medidas dadas na figura em centímetros.
b = 16 cm; c = 12 cm; n = 12,8 cm; h = 9,6 cm.



13. Calcule o valor destas expressões:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{5}{\sqrt{3}+1}$ $5\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}-\dfrac{3}{\sqrt{7}}}{7}$ $\dfrac{4\sqrt{7}}{49}$

14. O valor da expressão $\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ é: c

a) 1

b) $4-2\sqrt{3}$

c) $2-\sqrt{3}$

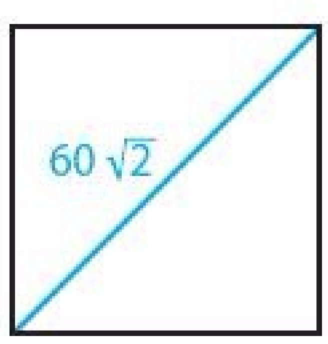
d) $2+\sqrt{3}$

15. (PUC-RJ) O valor de $\sqrt{2{,}777\ldots}$ é: b

a) 1,2 c) 1,5

b) 1,666... d) um número entre 0,5 e 1

16. (Saresp) A diagonal de um quadrado mede $60\sqrt{2}$ m, quanto mede o lado desse quadrado? b



a) 50 m

b) 60 m

c) 75 m

d) 90 m

17. (Fuvest-SP) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28}+2^{30}}{10}}$ é igual a: d

a) $\dfrac{2^8}{5}$ d) 2^9

b) $\dfrac{2^9}{5}$ e) $\left(\dfrac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) 2^8

18. A expressão $\dfrac{5^{2x+1}-5^{2x}}{5^{2x-1}}$ é igual a: a

a) 20 c) 0

b) $\dfrac{4}{5}$ d) -20

19. Mariana nasceu 8 anos depois de João. O dobro da idade de João multiplicado pela idade de Mariana é igual a 130. Podemos afirmar que Mariana tem: d

a) mais de 10 anos.

b) exatamente 10 anos.

c) exatamente 13 anos.

d) mais de 3 anos e menos de 6 anos.

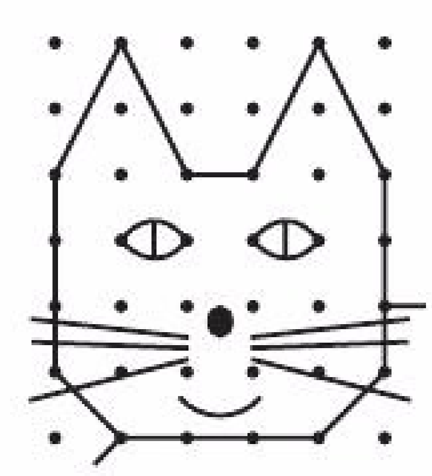
20. (FCC-RJ) Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que o inverso de $x-\sqrt{3}$ é $x+\sqrt{3}$, então x^2 vale: a

a) 4 d) 1

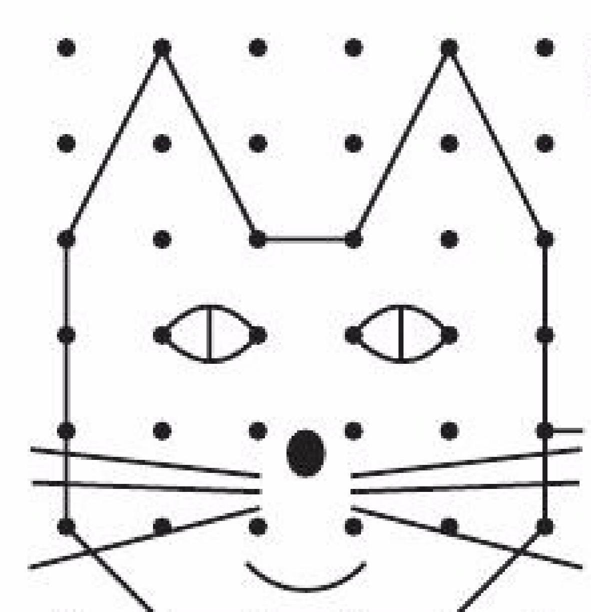
b) 3 e) 0

c) 2

21. (Saresp) O gato II da figura é uma ampliação do gato I, ambos desenhados em malha pontilhada. A distância entre dois pontos da malha II é uma vez e meia a distância entre os pontos da malha I.



I



ZAPT

II

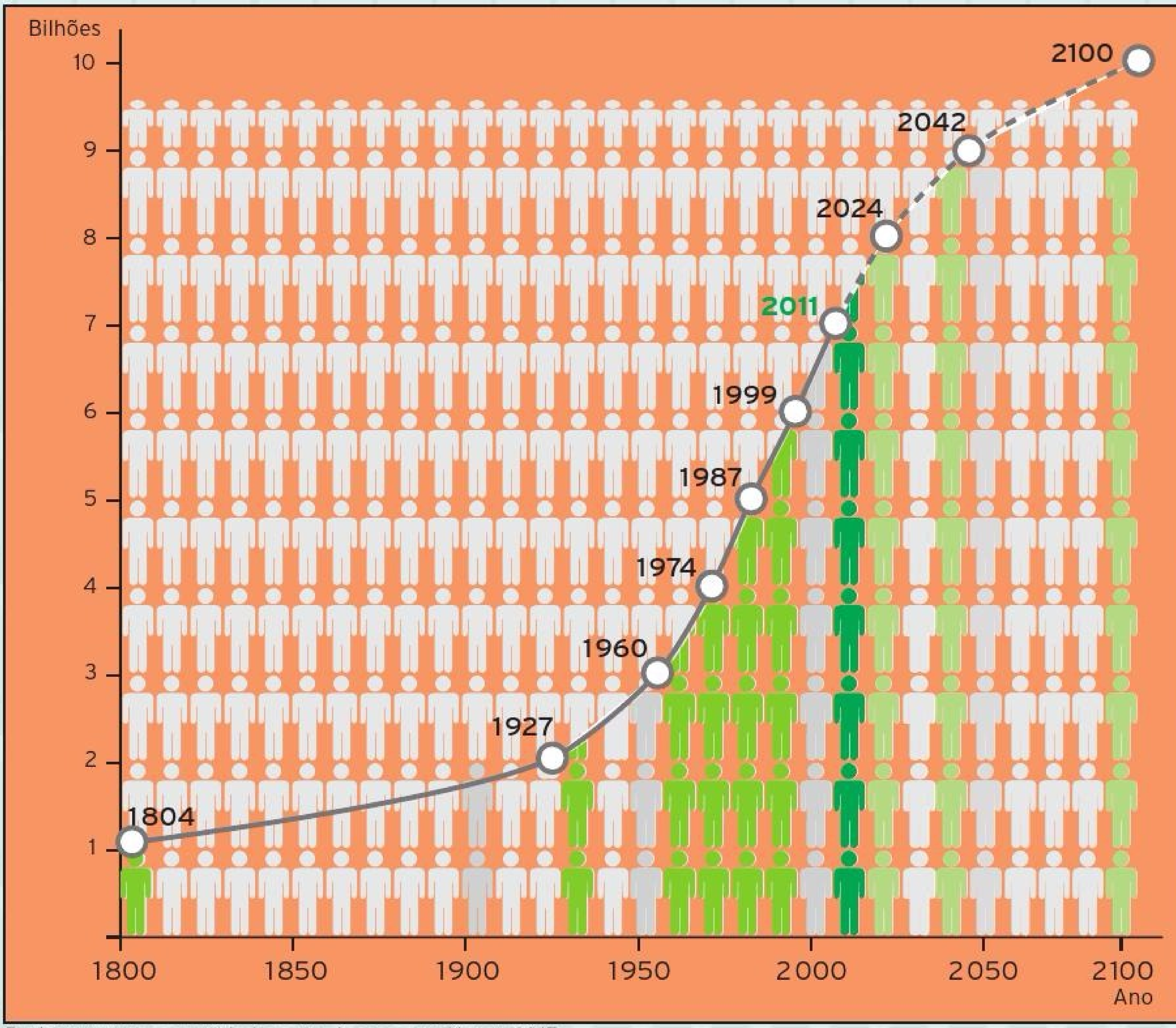
Se o contorno do gato I mede **p** centímetros, qual é a medida, em cm, do contorno do gato II? d

a) 6 p b) 3 p c) 2 p d) 1,5 p

UNIDADE 8

Estatística e probabilidade

Evolução do crescimento e projeção da população mundial



Fonte: <www.nacoesunidades.org>. Acesso em: 31 mar. 2015.

O gráfico de linha mostra que em 1804 a população mundial chegou ao primeiro bilhão e que aproximadamente 200 anos depois, em 2011, ela atingiu sete bilhões. Prevê-se que em 2050 serão 9,6 bilhões de pessoas. Atualmente, essa forma de apresentar informações é comum no cotidiano de quase todo cidadão. Nesta unidade será aprofundado o estudo de Estatística e probabilidade.

Nesta unidade...

1. Informações estatísticas
2. Médias
3. Probabilidade

Além da observação de fatos ou fenômenos e da coleta de dados, a **Estatística** trata de outros aspectos, como a transformação dos dados em informações e a análise e o registro dessas informações, com o objetivo de auxiliar na previsão e na solução de problemas e na tomada de decisões.

Por causa das muitas aplicações em vários ramos do conhecimento humano, é importante relembrar e ampliar algumas noções de Estatística, que já foram exploradas, tais como as noções de população e amostra.

A um conjunto de pessoas, objetos ou ocorrências, a respeito do qual desejamos obter informações, damos o nome de **população**.

No exemplo abaixo, a população é o conjunto de pessoas de 15 anos de idade ou mais que vivem no Brasil.

Como nem sempre é possível observar a população toda, trabalhamos com uma parte dela, que chamamos **amostra** e que pode ser utilizada para representar a população como um todo. Existem técnicas especiais para selecionar amostras convenientes e que estejam de acordo com os objetivos de uma pesquisa. Chamamos essas técnicas de **amostragem**. O uso de amostragem é justificado pela economia que se faz de tempo e de custos na realização de uma pesquisa.

Fonte: IBGE. Censo Demográfico 1940/2010.

O que você já sabe?

- A qual assunto se refere o primeiro gráfico da abertura desta unidade? Evolução do crescimento e projeção da população mundial.
- Observe o gráfico sobre a taxa de analfabetismo de pessoas com 15 anos de idade ou mais. Qual foi o porcentual de redução dessa taxa na década de 2000 a 2010? 4%
- Explique o que você entendeu por população e amostra. População é um conjunto de pessoas, objetos ou ocorrências a respeito do qual desejamos obter informações estatísticas; amostra é parte de uma população da qual serão obtidos dados para uma pesquisa estatística.
- Em algumas pesquisas, uma amostra pode ser utilizada para representar uma população. Por que isso ocorre? Porque nem sempre é possível pesquisar a população toda.

1 Informações estatísticas

Variável estatística

Procure fazer um diagnóstico a respeito do conhecimento prévio dos alunos sobre os conceitos da Estatística. A partir dele será possível decidir sobre a ênfase que deve ser dada a esses conceitos.

Para refletir e responder

Observe a representação dos dados obtidos em duas pesquisas estatísticas.

1) Pesquisa realizada em 11 escolas de uma cidade mostra o tipo de atividade preferida dos estudantes durante o intervalo. Cada estudante escolheu apenas uma atividade.

Atividades preferidas durante o intervalo

Lanchar	Conversar	Jogar	Ouvir música	Ler	Estudar
34%	28%	21%	10%	5%	2%

Dados fictícios.

2) Nesta pesquisa, foram entrevistadas 1 000 pessoas em quatro cidades brasileiras, para saber a quantia que as pessoas pretendiam gastar com as compras para o Natal do ano de 2015.

Compras para o Natal

Seguindo a tendência dos últimos anos, as compras de menor valor vão predominar. Quase metade dos entrevistados (46%) declarou que vai gastar até R$ 200,00.

Dados fictícios.

IMAGENS: MUSEU DE VALORES/BANCO DO BRASIL

- Nas pesquisas representadas acima, o tipo de atividade preferida e a quantia em reais são chamadas **variável estatística**. Em sua opinião, em qual pesquisa uma variável estatística qualitativa foi estudada? Na primeira pesquisa.

Variáveis qualitativas são aquelas que classificam os elementos da população segundo alguns atributos ou qualidades. Por exemplo, lanchar, conversar, jogar, ouvir música, ler e estudar são as variáveis qualitativas da pesquisa realizada nas escolas.

Variáveis quantitativas são aquelas que indicam um número decorrente de uma contagem ou de uma medição. Por exemplo, na segunda pesquisa foi estudada uma variável quantitativa.

Distribuição por frequências

Quando se faz uma pesquisa, a coleta de dados é organizada em uma **tabela de distribuição por frequências**. Observe como fica a tabela de distribuição por frequências da pesquisa sobre "Compras para o Natal", abordada na página anterior, para uma amostra com 1000 pessoas.

Compras para o Natal

Quantia (R$)	Frequência (f) (número de pessoas)	Frequência relativa (fr) (%)	Frequência acumulada (fa)	Frequência acumulada relativa (far) (%)
50,00	80	8	80	8
100,00	230	23	310	31
200,00	150	15	460	46
300,00	120	12	580	58
Acima de 300,00	90	9	670	67
Não sabe ou não respondeu	330	33	1 000	100
Total	**1 000**	**100**		

Em uma tabela de distribuição por frequências como essa devem constar:

frequência absoluta ou frequência — f — É o número de vezes que um dado se repete. **f** de R$ 50,00 é 80, ou seja, 80 pessoas escolheram gastar R$ 50,00.

frequência relativa — fr (%) — É o quociente entre uma frequência e o total da amostra e é expressa em porcentual:
$80 : 1000 = \frac{80}{1000} = \frac{8}{100} = 8\%$. **fr** de R$ 50,00 é 8%.

frequência acumulada — fa — É a soma de todas as frequências até determinado dado: $80 + 230 = 310$. **fa** de R$ 100,00 é 310.

frequência acumulada relativa — far (%) — É o quociente entre uma frequência acumulada e o total da amostra e é expressa em porcentual:
$310 : 1000 = \frac{310}{1000} = \frac{31}{100} = 31\%$. **far** de R$ 100,00 é 31%.

Pode-se também observar na tabela anterior que:

- a frequência absoluta, ou frequência (**f**), de gastos acima de R$ 300,00 é 90, ou seja, 90 entrevistados disseram que planejam gastar acima dessa quantia;
- a frequência acumulada de gasto até R$ 200,00 é 460. Isso significa que 460 entrevistados disseram que gastarão R$ 50,00; R$ 100,00 ou R$ 200,00;
- a frequência acumulada relativa de gasto até R$ 300,00 é 67%. Isso significa que 67% dos entrevistados disseram que gastarão R$ 50,00; R$ 100,00; R$ 200,00 ou R$ 300,00.

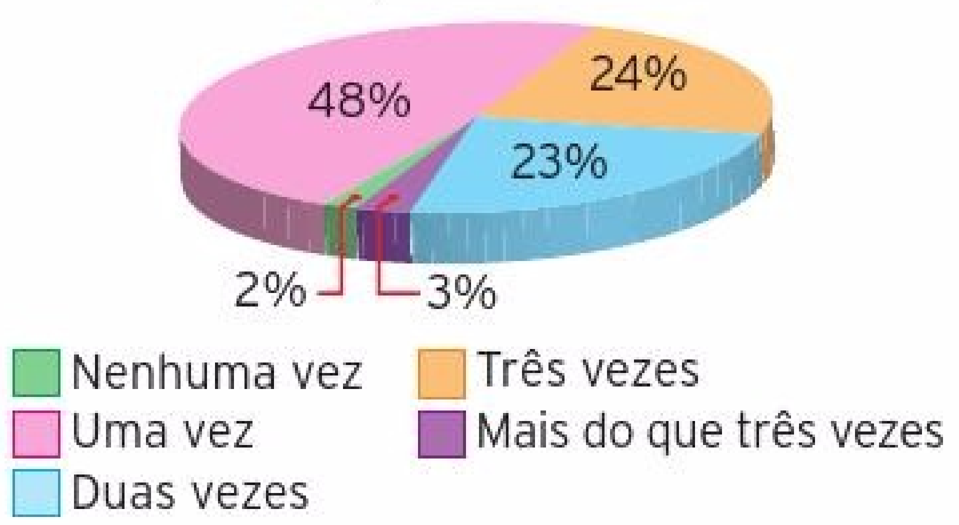
Vamos combinar:
Em situações que não for mencionada a fonte dos dados, ela será fictícia.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Veja o gráfico e a conclusão de uma pesquisa sobre hábitos de higiene dos alunos de uma escola do Ensino Fundamental.

Higiene bucal



Dados fictícios.

Nessa escola estão matriculados 1 500 estudantes. Para selecionar a amostra, foram sorteados 180 alunos a serem entrevistados pelos coordenadores da pesquisa.

a) Qual é a população dessa pesquisa? E a amostra? População: todos os alunos da escola; amostra: 180 estudantes sorteados.

b) Qual foi a técnica usada para selecionar a amostra? Sorteio.

c) A variável estatística que corresponde ao resultado dessa pesquisa é uma variável qualitativa ou quantitativa? Variável quantitativa.

d) É correto afirmar que aproximadamente metade dos entrevistados escova os dentes apenas uma vez ao dia? Sim.

2. Em uma pesquisa sobre os gastos de uma família com alimentação, transporte, escola e vestuário, a que tipo de variável estatística correspondem esses itens? Variável qualitativa.

3. Em uma pesquisa sobre alunos do 8º ano, foram coletados dados sobre as variáveis estatísticas a seguir:

a) idade
b) altura
c) classe social
d) esporte que pratica
e) disciplina preferida
f) número de irmãos

Quantitativas: idade, altura e número de irmãos; qualitativas: classe social, esporte que pratica e disciplina preferida.

Entre essas variáveis, quais são quantitativas? E quais são qualitativas?

4. Em uma prova de Português aplicada em um concurso, 40 candidatos finalistas obtiveram as notas apresentadas no quadro a seguir.

Notas de Português

6,5	7,0	7,5	8,0	8,5
9,0	8,0	9,0	7,0	9,0
7,5	9,0	9,0	8,5	9,5
8,0	8,5	9,0	9,5	9,5
9,0	7,0	8,0	6,5	8,0
8,0	8,5	7,5	9,5	9,5
9,0	9,0	9,0	7,5	8,0
7,5	8,5	6,5	8,5	7,0

a) Construa uma tabela de distribuição por frequências como esta: Veja resposta no final do livro.

Notas de Português

Nota	Frequência	Frequência relativa	Frequência acumulada	Frequência acumulada relativa
6,5	3			

b) O aproveitamento de um candidato que obteve nota 8,0 está abaixo ou acima do da maioria dos candidatos? Abaixo.

5. Daniel lançou um dado 50 vezes e anotou nesta tabela os números que apareceram na face superior.

4	1	3	2	1	3	2	1	2	3
6	2	4	5	1	1	4	6	3	1
1	3	6	1	3	2	6	3	6	1
5	6	3	6	4	5	1	2	4	5
6	4	2	1	6	3	3	1	5	4

a) Reorganize esses dados, colocando os números em ordem crescente. Construa uma tabela de distribuição por frequências. Veja resposta no final do livro.

b) Qual número apareceu mais vezes? 1

c) Qual é a frequência absoluta do número identificado no item anterior? 12

d) Qual é a frequência relativa do número 3? 20%

e) Qual é a frequência acumulada do aparecimento de números menores do que 3 ou do número 3? 29

f) Nesses 50 lançamentos, qual é o porcentual de um resultado menor do que 3? 38%

6. Faça como Daniel: lance um dado 50 vezes e anote os resultados obtidos na face superior. Em seguida, construa uma tabela de distribuição por frequências. Resposta pessoal.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, experimentem, discutam e resolvam.

Façam uma pesquisa sobre o número de horas, por semana, que os colegas de classe dedicam ao estudo e construam uma tabela de distribuição por frequências. Respostas pessoais.

- Quantos alunos estudam menos do que 2 horas por semana?
- Qual é a frequência acumulada em até 2 horas por semana?
- Qual é o porcentual de alunos que estudam menos do que 2 horas por semana?

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

7. Em uma pesquisa sobre os meios de transporte utilizados por turistas para viajar, foram entrevistadas 1 000 pessoas. Os resultados obtidos estão apresentados nesta tabela:

Transporte de turistas

Meios de transporte	Número de pessoas
Carro próprio	360
Ônibus de linha	300
Avião	130
Carona	90
Ônibus de excursão	70
Outros	50

Responda às questões:

a) A pesquisa trata dos meios de transporte utilizados em que tipo de viagem? Viagem de turismo.

b) A que tipo por frequência se referem os números nela apresentados? Frequência absoluta.

c) A partir desses dados, construa uma tabela de distribuição por frequências. Veja resposta no final do livro.

8. Responda às questões a seguir consultando os dados que constam da tabela elaborada na atividade anterior:

a) Quantas pessoas costumam viajar de carro próprio ou de ônibus de linha? 660 pessoas.

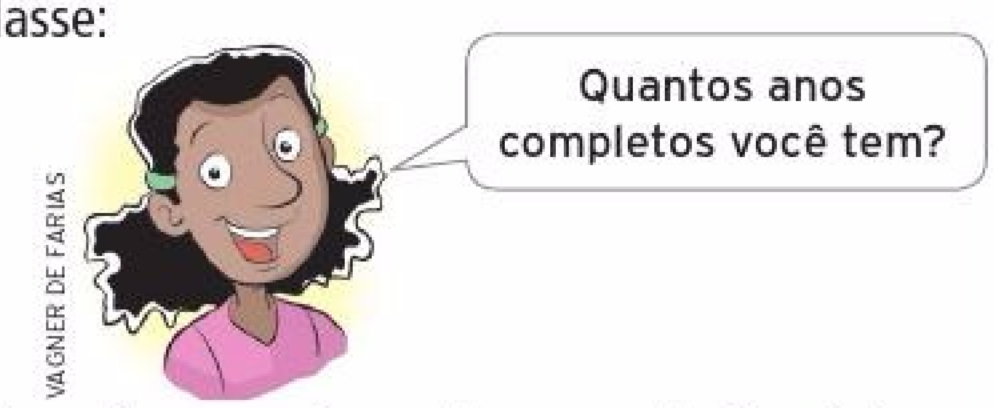
b) Qual é a frequência relativa da utilização de aviões nesse tipo de viagem? 13%

c) Que porcentual de pessoas viajam de carona ou de ônibus de excursão? Esse dado corresponde a quantas pessoas? 16%; 160 pessoas.

d) De que tipo é a variável estatística empregada na pesquisa? Variável qualitativa.

e) Represente os dados da pesquisa em um gráfico de colunas. Veja resposta no final do livro.

9. Júlia perguntou a cada um dos colegas de sua classe:



O quadro a seguir mostra as anotações dela:

Idade dos alunos do 9º ano A

16	16	16	18	14	18	17	16	16	16
15	14	15	15	17	14	19	15	15	14
14	16	16	14	15	15	15	19	18	14
15	15	16	14	14	15	15	15	18	14

a) Construa uma tabela de distribuição por frequências com os dados obtidos por Júlia. Veja resposta no final do livro.

b) Qual foi o total de alunos consultados nessa pesquisa? 40 alunos.

c) Qual é a frequência absoluta, ou frequência, da idade 15 anos? 13

d) Qual é a frequência acumulada até 15 anos? 23

e) Qual é a frequência acumulada relativa até 15 anos? 57,5%

f) Quantos alunos do 9º ano A têm 15 anos ou menos de 15 anos? 23 alunos

g) Qual é o porcentual de alunos do 9º ano A com 15 anos ou menos? 57,5%

2 Medidas de tendência central

Propicie várias atividades para que os alunos compreendam o significado e a utilizaçao das medidas de posição de uma distribuição por frequências: média aritmética, moda e mediana.

Moda

Para refletir e responder

VAGNER DE FARIAS

Expressões como **som da moda**, **velocidade média** e **altura mediana** são comuns no nosso dia a dia. O significado dessas expressões em Estatística difere, às vezes, do significado na linguagem comum.

- Você conhece o significado de moda, média e mediana em Estatística?

Resposta pessoal. É possível que os alunos identifiquem a média como a média aritmética das notas, por exemplo.

Veja o que revelou uma pesquisa realizada com 1000 jovens sobre o hábito de ir ao cinema.

Quantas vezes por semana você vai ao cinema?

Número de dias por semana	Número de pessoas
5	96
4	70
3	114
2	322
1	240
Nenhum	158
Total	**1000**


CHLOE JOHNSON/ALAMY/OTHER IMAGES

Nessa pesquisa temos uma variável quantitativa com seis alternativas de escolha possíveis para cada jovem entrevistado, que escolheu apenas uma alternativa.

Ao analisarmos a tabela, observamos que:

- do total de 1000 entrevistados — 70 pessoas vão ao cinema 4 vezes por semana;
- quanto ao número máximo exato de vezes por semana — **2 vezes** correspondem à **maior quantidade** de respostas, que são 320 escolhas.

Dizemos que a pesquisa apontou que "ir ao cinema 2 vezes por semana" é a **moda** entre os 1000 entrevistados.

Dependendo da qualidade da amostra escolhida e da pesquisa, a opção "ir ao cinema exatamente 2 dias por semana" poderá ser considerada uma tendência entre os jovens.

A **moda** de uma pesquisa é o dado que ocorre com maior frequência em um conjunto de dados.

Há pesquisas em que a moda é representada por dois ou mais dados.

Exemplo:

As notas de uma prova de Matemática de 41 alunos do 9º ano estão anotadas na tabela ao lado.

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alunos	2	2	5	4	8	8	5	3	3	1

Para esses dados, tanto 5 como 6 representam a moda.

Média aritmética

Para refletir e responder

O crescimento de 10 jovens foi observado ao longo de um ano.

A tabela ao lado registra o crescimento de cada um durante esse período.

Crescimento de 10 jovens em um ano

Nome	Crescimento (cm)
Ana	6
Beto	8
Clara	5
Diana	3
Edu	7
Fábio	4
Geraldo	6
Mauro	5
Nair	2
Valéria	4

- Que valor você usaria para representar o crescimento desse grupo?

5 cm. Há outras respostas possíveis.

Um valor adequado para representar o crescimento desse grupo em um ano, por exemplo, é a **média aritmética**, que é obtida adicionando todos os valores da tabela e dividindo o resultado por 10, que é o número de jovens:

$$\underbrace{Ma}_{\text{Média aritmética}} = \frac{6 + 8 + 5 + 3 + 7 + 4 + 6 + 5 + 2 + 4}{10} = \frac{50}{10} \longrightarrow \mathbf{Ma = 5}$$

O crescimento médio desse grupo foi de 5 cm ao longo de um ano.

A média aritmética indica que, se o crescimento se processasse da mesma forma para todos os jovens, cada um teria crescido 5 cm durante o ano observado.

A **média aritmética** de **n** valores é o quociente que se obtém dividindo a soma desses valores por **n**.

Outro exemplo:

Os dados referem-se ao consumo diário de combustível, em litros, de uma frota de 9 carros.

Consumo de combustível (em L)								
32,5	51,1	39,4	40,7	46,7	44,6	32,9	48,2	35,6

Determina-se o consumo médio diário dessa frota, calculando:

$$\text{Ma} = \frac{32{,}5 + 51{,}1 + 39{,}4 + 40{,}7 + 46{,}7 + 44{,}6 + 32{,}9 + 48{,}2 + 35{,}6}{9} = \frac{371{,}7}{9}$$

Ma = 41,3 L

Média aritmética em uma tabela de distribuição por frequências

Note que a ocorrência de alguns dados da tabela referentes ao crescimento, apresentada na página anterior, são iguais entre si. Por exemplo, crescimentos de 4 cm, 5 cm e 6 cm têm frequência 2.

Portanto, podemos organizar os dados dessa tabela em uma distribuição por frequências.

A soma de todas as frequências é igual ao número original de dados (10). A média aritmética desse conjunto de dados continua a mesma que a original, porém a forma de calculá-la pode ser modificada para:

Crescimento (cm)	Frequência (f)
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	1
8	1
Total	**10**

$$\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{\text{soma das frequências}} =$$

$$= \frac{2 + 3 + 8 + 10 + 12 + 7 + 8}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

Na prática, incluímos na tabela de distribuição por frequências uma coluna com o item **crescimento multiplicado pela frequência**.

crescimento	·	frequência	
2	·	1	= 2
3	·	1	= 3

$\text{Ma} = \frac{50}{10} = 5$ —— **Ma = 5 cm**

Crescimento (cm)	Frequência (f)	Crescimento · f
2	1	2
3	1	3
4	2	8
5	2	10
6	2	12
7	1	7
8	1	8
Total	**10**	**50**

Em uma distribuição por frequências, a média aritmética é o quociente entre a soma dos produtos (valor da variável · frequência) e o total das frequências.

Média ponderada

Há situações, como provas, concursos e campeonatos esportivos, em que, para se calcular a média final, são atribuídos pesos às modalidades que os compõem.

Leia estes dois exemplos:

- Em uma prova de Língua Portuguesa composta de redação e gramática, foi atribuído peso 3 à redação e peso 2 à parte referente à gramática. A nota final de um aluno que obteve 4,0 em redação e 6,0 em gramática é a **média ponderada** das notas de cada parte com o respectivo peso. Ou seja, levamos em consideração os pesos que dependem da importância atribuída a cada modalidade.

$$\text{Média ponderada} = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{3 + 2} = \frac{12 + 12}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$$

A nota final do aluno é 4,8.

- Em uma escola, a média anual por disciplina é calculada ponderando as notas de cada bimestre.

Observe na tabela as notas de Cláudia em Matemática, em quatro bimestres, e o peso de cada nota no período.

Período	Peso	Notas
1º bimestre	1	5,0
2º bimestre	2	4,5
3º bimestre	2	6,0
4º bimestre	3	6,0

A nota anual de Cláudia em Matemática é a média ponderada das notas bimestrais.

Calculamos essa média multiplicando a nota de cada bimestre pelo respectivo peso. Somamos esses produtos e dividimos o resultado pela soma dos pesos:

$$\text{Média poderada} = \frac{5{,}0 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 2 + 6{,}0 \cdot 2 + 6{,}0 \cdot 3}{1 + 2 + 2 + 3} = \frac{5 + 9 + 12 + 18}{1 + 2 + 2 + 3} = \frac{44}{8} = 5{,}5$$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. As notas de Carlos em dez provas de Geografia estão assinaladas na tabela a seguir. Qual é a média aritmética das notas de Carlos nessa disciplina? 7,0

Notas de Geografia de Carlos

8,5	7,0	5,0	6,5	4,0
10,0	6,0	5,5	9,0	8,5

11. Determine a moda da listagem:

a) das idades de um grupo de 10 crianças com: 3, 3, 5, 3, 1, 6, 4, 6, 6 e 3 anos; 3 anos.

b) dos pesos de um grupo de jovens com: 58, 72, 75, 75, 68 e 59 quilogramas. 75 kg

12. Para ser aprovado em um concurso para uma vaga de escriturário, um participante precisa submeter-se a três provas: Conhecimentos Gerais com peso 1, Matemática com peso 2 e Língua Portuguesa com peso 3 e obter pelo menos média 6,0. Pedro concorreu a uma vaga e obteve as notas: 7,0 em Conhecimentos Gerais, 4,0 em Matemática e 5,0 em Língua Portuguesa. Pedro foi aprovado no concurso? Justifique sua resposta. Não, pois sua média foi menor do que 6,0.

13. O número de pontos de cada time que participa de um campeonato de futebol é calculado da seguinte forma:

- vitória: 3 pontos;
- empate: 2 pontos;
- derrota: 0 ponto.

a) Copie esta tabela e complete-a calculando o número de pontos dos quatro finalistas.

Time	Nº de vitórias	Nº de empates	Nº de derrotas	Total de pontos
A	5	4	3	23
B	6	2	4	22
C	2	9	1	24
D	5	6	1	27

b) Qual foi o time vencedor? Qual foi a pontuação média desse time? Time D; 2,25 pontos.

c) Qual é a diferença entre a pontuação média do primeiro e a do segundo colocado? 0,25 ponto.

14. As anotações sobre a velocidade com que trafegam os carros em um trecho da estrada que liga São Paulo a Santos estão na tabela de distribuição por frequências a seguir.

Na estrada de Santos

Velocidade (km/h)	100	95	90	85	80	75	Total
Frequência (f)	2	4	5	6	2	1	**20**

Qual é a velocidade média com que os carros trafegam nesse trecho? 88,75 km/h

15. A tabela a seguir indica a distribuição por frequência das alturas, em centímetros, de 20 bebês de um berçário.

Altura de 20 bebês de um berçario

Altura (cm)	40	42	46	48	53	55	Total
Frequência (f)	4	5	3	5	1	2	**20**

a) Qual é a altura média nessa distribuição? 45,55 cm

b) Quantos bebês têm estatura mais próxima à altura média? 3

c) Quantos bebês têm estatura abaixo dessa média? 9

Usando a calculadora

Durante o mês de julho, em uma cidade gaúcha, foram registradas as temperaturas mínimas, como mostra o quadro ao lado.

- Calcule a temperatura média mínima nesse mês. 11,74 °C

Temperatura mínima (°C)						
6	6	7	8	8	10	12
12	13	12	14	12	15	15
10	10	9	7	6	6	8
11	11	12	16	17	17	20
18	18	18				

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, experimentem, discutam e resolvam.

Façam um levantamento sobre o tipo de vestuário (calça, camisa e calçado) usado por 20 colegas, em um certo dia, e construam uma tabela de distribuição por frequência.

- Qual é a moda para cada tipo de vestuário? Resposta pessoal.

Mediana

A **mediana** de um grupo de dados é uma das medidas estatísticas associadas a variáveis quantitativas. Ela é uma medida de tendência central. Vamos aprender um pouco sobre essa medida.

Para refletir e responder

Ao final do bimestre uma professora de Matemática examinou as seguintes notas de uma prova que ela aplicou: 7,3; 7,8; 8,2; 8,6; 8,9 e 9,1.

VAGNER DE FARIAS

Para fazer sua análise e ter uma noção do aproveitamento desses alunos, ela escolheu a nota **8,3** como referência.

- Na sua opinião, de que maneira a nota 8,3 representa o grupo de notas dos alunos? Resposta pessoal.

A professora organizou as notas em ordem crescente. Como temos um número ímpar de notas (7 notas), a nota escolhida foi a nota posicionada no "meio": 8,3.

$$\underbrace{7{,}3 \qquad 7{,}8 \qquad 8{,}2}_{\text{Três notas abaixo de } \mathbf{8{,}3}.} \qquad \mathbf{8{,}3} \qquad \underbrace{8{,}6 \qquad 8{,}9 \qquad 9{,}1}_{\text{Três notas acima de } \mathbf{8{,}3}.}$$

Nota mediana — Md

A nota **8,3** é a **mediana** desse grupo de notas.

Em situações como essa, em que temos um **número ímpar** de dados, adicionamos **1** a esse número e dividimos o resultado por **2**. O dado que se encontra na posição do quociente obtido é a mediana desse grupo de dados.

7 notas —— $\frac{7+1}{2} = 4$ —— A nota que se encontra na **4ª posição** é **8,3**.
8,3 é a **nota mediana** desse grupo de notas.

Em situações em que temos um **número par** de dados, a mediana é a média aritmética dos valores centrais.

Exemplo:

Na lista de notas a seguir, temos 8 notas (número par), ou seja, existem dois termos centrais. Nesse caso, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais.

$$\underbrace{7{,}3 \qquad 7{,}8 \qquad 8{,}2} \qquad \underbrace{8{,}3 \qquad 8{,}6} \qquad \underbrace{8{,}9 \qquad 9{,}1 \qquad 10{,}0}$$

$$\text{Md} = \frac{8{,}3 + 8{,}6}{2} = 8{,}45 \cong 8{,}5 \text{ —— } \mathbf{Md \cong 8{,}5}$$

Nessa situação, temos quatro notas abaixo de 8,5 e quatro notas acima de 8,5.

Mediana de um conjunto de dados não agrupados e organizados em ordem crescente ou decrescente é o valor que separa esse conjunto em dois grupos com o mesmo número de dados.

Mediana em uma tabela de distribuição por frequências

Veja como calcular a mediana quando os dados são organizados em uma tabela de distribuição por frequências.

Exemplo:

Velocidade no trânsito

Velocidade (km/h)	Frequência (f)
50	20
60	40
65	45
80	20
90	15
Total	**140**

A tabela ao lado apresenta dados de uma pesquisa sobre a velocidade dos veículos no trânsito em determinado local.

O total de veículos observados é 140, que é um número par. Para o termo central temos $\frac{140 + 1}{2} = 70{,}5$. Portanto, a mediana está entre o 70º e o 71º dado.

Construímos uma tabela com uma coluna com as velocidades em ordem crescente e uma coluna por frequência acumulada. Em seguida, localizamos a mediana na tabela.

Velocidade (km/h)	f	fa
50	20	20
60	40	60
65	**45**	**105**
80	20	125
90	15	140

antes do 70º dado

Mediana = 65

depois do 71º dado

Portanto, 65 km/h é o representante **mediano** dessa coleção de dados. Dizemos, então, que 65 km/h é a **velocidade mediana** dessa pesquisa.

> **Mediana** de uma distribuição por frequência em que os dados estão agrupados é o valor que divide a distribuição em duas partes com o mesmo número de dados.

A mediana não é influenciada por valores extremamente altos ou baixos que possam aparecer em algumas pesquisas.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

16. Observe os dados sobre a altura, em metros, de cinco jogadoras da seleção brasileira feminina de vôlei.

Jogadoras	Altura (m)
Fabiana	1,93
Mari	1,89
Paula Pequeno	1,85
Jaqueline	1,86
Sassá	1,79

Qual é a altura mediana dessas jogadoras? 1,86 m

17. A lista abaixo indica a idade dos candidatos a presidente do grêmio de uma escola. Determine a mediana das idades desses candidatos. 20 anos

Idade dos candidatos

20	22	24	18	16	17	20	20	16

18. Os dados abaixo são referentes à massa, em quilogramas, de seis ginastas de uma equipe que participou dos jogos escolares.

Massa dos ginastas

57	46	44	43	57	43

a) Qual é a massa mediana desses ginastas? 45 kg
b) Quantos ginastas estão acima da massa mediana desse grupo? 3 ginastas.
c) Qual é a massa média aproximada desses ginastas? 48,3 kg
d) Quantos ginastas estão acima da massa média desse grupo? 2 ginastas.

19. Um cronometrista marcou, em uma prova de 100 metros rasos, o tempo que cada atleta levou para alcançar a linha de chegada. Os tempos dos nove atletas, em segundos, foram:

11	12	14	13	11,4	12,5	11,2	13,1	14,2

Qual é o tempo mediano desses atletas? 12,5 segundos.

20. O quadro abaixo indica a distribuição por frequências das notas obtidas pelo 9º ano E em Matemática no 3º bimestre.

Matemática 9º ano E

Nota	2	4	5	7	9
f	2	6	12	8	2

Qual foi a nota mediana dessa classe nesse bimestre? 5

21. O quadro a seguir indica o número de pontos obtidos por 50 participantes de uma gincana.

1	4	3	9	8	7	6	5	2	10
6	2	3	1	2	1	2	10	10	8
5	7	9	7	1	7	8	10	6	9
4	8	9	9	1	4	7	6	4	5
5	5	3	2	4	6	6	6	7	5

Calcule o número mediano de pontos dessa gincana. 6 pontos.

Comparando moda, média e mediana

A tabela a seguir apresenta dados sobre os salários dos funcionários de uma pequena empresa.

Salários (2012)

Salário (x)	Frequência (f)	x · f (R$)
800,00	4	3 200,00
1 100,00	2	2 200,00
1 400,00	1	1 400,00
3 800,00	2	7 600,00
5 200,00	1	5 200,00
Total	**10**	**19 600,00**

Observe os valores da moda, da média e da mediana calculados a seguir:

moda: R$ 800,00 ← Salário mais comum.

média aritmética: (R$ 19 600,00) : 10 = R$ 1960,00 ← Salário de cada funcionário se o dinheiro fosse distribuído igualmente.

Para calcular a mediana, organizamos uma lista de salários em ordem crescente:

$$\underbrace{800 \quad 800 \quad 800 \quad 800} \quad \underbrace{1100 \quad\quad 1100} \quad \underbrace{1400 \quad 3800 \quad 3800 \quad 5200}$$

$$\text{mediana} = \frac{1100 + 1100}{2} = \text{R\$ } 1100{,}00$$ ← Salário de cerca de metade dos funcionários.

A **moda**, a **mediana** e a **média aritmética** são chamadas medidas de tendência central.

É comum usar a expressão "média" para qualquer um desses valores. Quando isso ocorrer, procure saber de que valor se trata. Muitas vezes, os dados são manipulados, dando origem a interpretações falsas sobre determinado acontecimento.

Usamos o valor que representa a:
- **moda** quando desejamos obter rapidamente o valor mais frequente em uma distribuição;
- **mediana** quando desejamos obter o valor que divide a distribuição em duas partes iguais;
- **média aritmética** quando desejamos obter um valor que seja o resultado de uma distribuição equitativa.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

22. Pedro faz parte de um grupo de atletas que participarão de uma prova de 100 metros rasos. O técnico cronometrou e anotou o tempo de cada um no último treino. Suas anotações estão no quadro acima. Nesse treino, Pedro percorreu os 100 m em 12 segundos. Para falar sobre seu aproveitamento a seus pais, que esperam que ele ganhe uma medalha de ouro, ele deverá usar a média aritmética, a moda ou a mediana? Resposta pessoal.

Campeonato juvenil

11	12	14	13
13	11	12	14
14	12	11	11

23. As idades dos jogadores de um time de futebol estão expressas a seguir:

18	21	20	17	22	29	20	32	18	26	20

Qual é a idade média dos jogadores desse time? E a moda? 22,1 anos; 20 anos.

24. Uma prova de Matemática aplicada no 9º ano da escola em que Joana estuda apresentou os resultados divulgados no quadro a seguir.

Matemática — 9º ano

1	4	3	9	8	7	6	5	2	10
6	2	3	1	2	1	2	10	10	8
5	7	9	7	1	7	8	10	6	9
4	8	9	9	1	4	7	6	4	5
5	5	3	2	4	6	6	6	7	5

a) Quantos alunos fizeram a prova? 50 alunos.

Construa uma tabela de distribuição por frequências como esta: Veja resposta no final do livro.

Matemática — 9º ano

Nota	Frequência (f)	Frequência relativa – (fr%)	Frequência · nota
1	5		$5 \cdot 1 = 5$
2			

b) Qual foi o porcentual da nota 8? 8%

c) Qual foi a nota média dos alunos nessa prova? 5,5

d) Qual é a moda nesse quadro de notas? 6

e) Jaime participou dessa avaliação e obteve nota 8. Qual foi o aproveitamento dele em relação aos demais alunos? Resposta pessoal.

25. Em um campeonato estadual de futebol, até a 20ª rodada foram marcados 90 gols, e a média foi de 2,5 gols por partida. Quantos jogos foram realizados até a 20ª rodada? 36 jogos.

26. A produção média semanal (segunda a sábado) de um pasteleiro é de 700 pastéis. Ao conferir as anotações diárias da produção, o pasteleiro verificou que faltava uma delas. Copie a tabela no caderno e complete-a com o número que está faltando.

	Produção do dia
Segunda	400
Terça	800
Quarta	550
Quinta	700
Sexta	850
Sábado	900

Desafio

FAÇA NO CADERNO

O reajuste

A tabela ao lado representa os salários que uma empresa paga para seus 20 funcionários.

Salário (em reais)	Número de funcionários
3000,00	4
6000,00	1
1800,00	4
1400,00	3
800,00	8

- Qual é o salário médio dessa empresa? R$ 1790,00
- A empresa pretende reajustar os salários de todos os funcionários em 12%. Construam outra tabela com os novos valores e calculem a nova média aritmética. Ela corresponde a 12% a mais em relação à média anterior? R$ 2004,80; sim.

Salários

Novo salário (R$)	3360,00	6720,00	2016,00	1568,00	896,00
f	4	1	4	3	8
f · salário	13440,00	6720,00	8064,00	4704,00	7168,00

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Você já ouviu esta canção?

Brasil brasileiro

"Sou brasileiro de estatura mediana
Gosto muito de fulana
Mas sicrana é quem me quer."

(Edu Lobo)

ZIG KOCH/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

- Procure saber o que é um brasileiro de "estatura mediana". Para isso, faça uma pesquisa sobre a estatura de um grupo de 100 pessoas e calcule a estatura média e a mediana desse grupo. Em seguida, apresente à classe os resultados obtidos. Resposta pessoal.

3 Probabilidade

Experimentos aleatórios

Os alunos poderão iniciar o tema abordado no texto a seguir realizando os experimentos descritos ou criando outros. Auxilie-os na organização dos resultados obtidos para que possam apresentá-los em um painel de discussões e, a partir daí, formular conceitos e desenvolver uma linguagem própria ao assunto.

Para refletir e responder

É possível que você já tenha recorrido a uma moeda para tomar alguma decisão em jogos e brincadeiras.

Jogar uma moeda envolve um experimento aleatório, ou seja, envolve as **leis do acaso**: não é possível dizer com exatidão qual será o resultado final.


THALES TRIGO

- Você conhece outras situações que envolvem experimentos aleatórios? Quais? Resposta pessoal. Os alunos podem citar o lançamento de um dado, o sorteio dos números da loteria.
- Quais são os resultados possíveis para o lançamento de uma moeda? Cara ou coroa.

Nesse lançamento, os resultados possíveis são "sair cara" ou "sair coroa". O conjunto de todos esses resultados chama-se **espaço amostral**. Ao realizar esse experimento, podemos escolher, com antecedência, "sair cara". Essa escolha é um **evento**. A escolha "sair coroa" é outro evento.

ILUSTRAÇÕES: VAGNER DE FARIAS

Podemos indicar o espaço amostral desse experimento como: E = {c, r} em que **c** representa cara e **r** representa coroa.

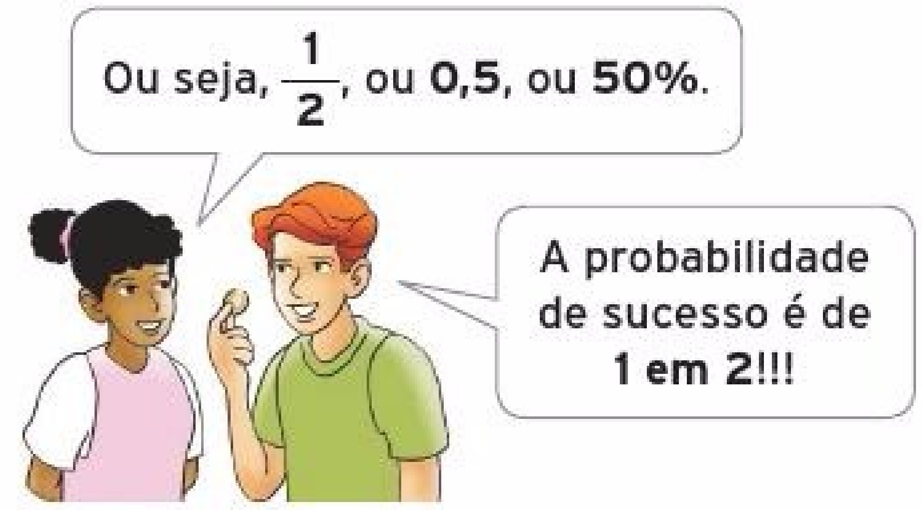
Calculando probabilidade

Para refletir e responder

Em um jogo de futebol, o juiz estabelece qual equipe vai iniciar o jogo ao lançar uma moeda. O capitão da equipe que acertar o resultado que vai ocorrer, quando a moeda parar, escolhe se terá posse de bola ou qual 'gol' deseja defender.

- Um dos capitães escolheu "sair cara". Qual é a probabilidade de ter ocorrido "sair cara"? $\frac{1}{2}$

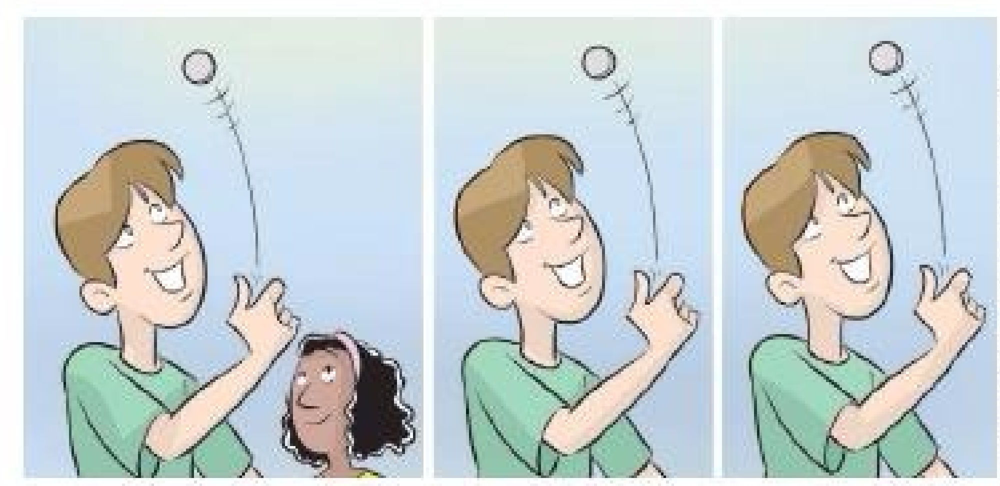
Se a moeda é "honesta", então espera-se que os eventos "sair cara" e "sair coroa" tenham a mesma probabilidade de ocorrer. Como só há essas duas possibilidades, então afirma-se que: a probabilidade de "sair cara" é igual à probabilidade de "sair coroa", ou seja, é 50%.



Dessa forma, em um experimento aleatório como este, se a moeda for lançada 1 000 vezes, espera-se que o evento "sair cara" ocorra, aproximadamente, em 500 lançamentos.

Outros exemplos:

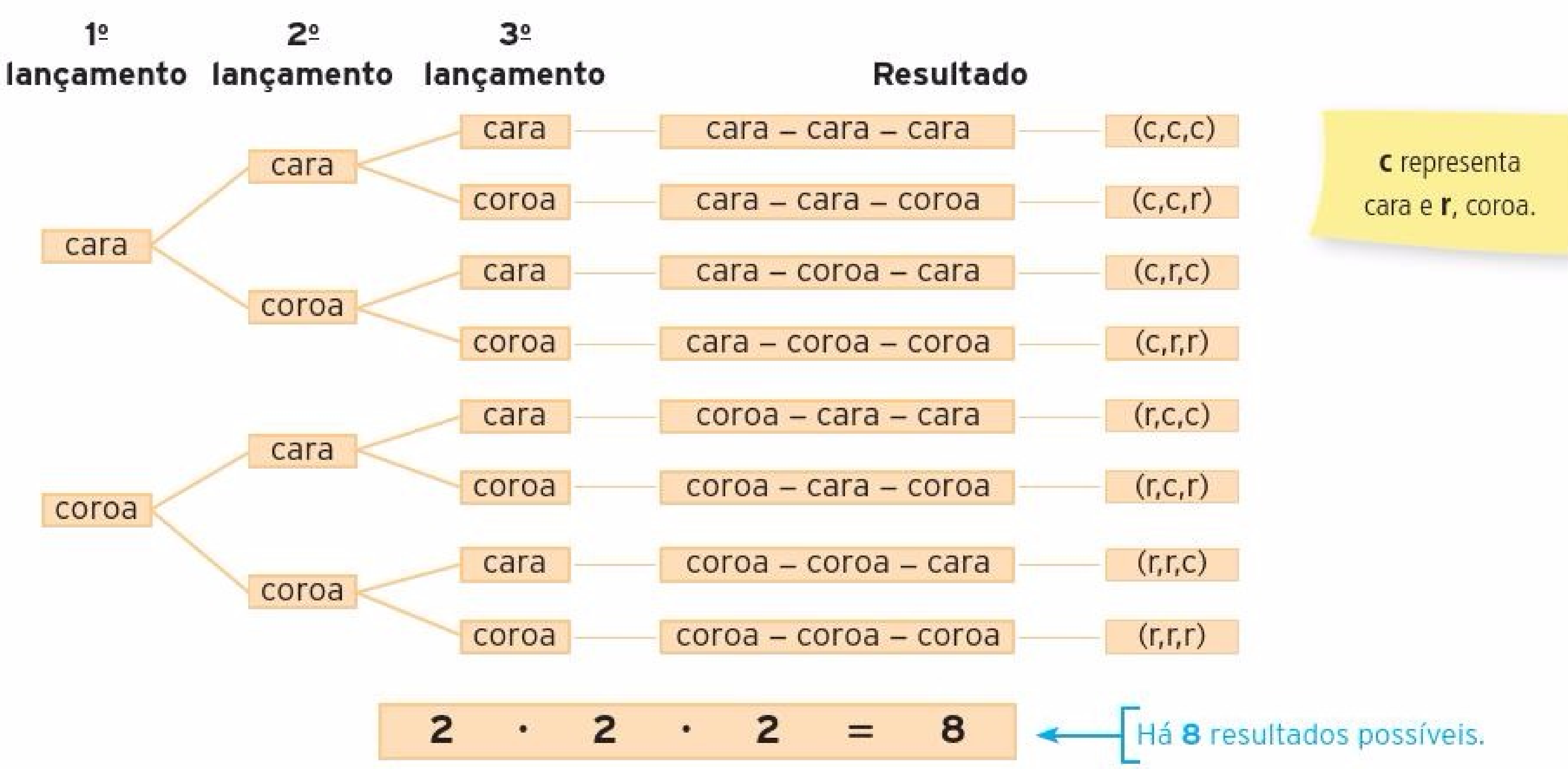
- Pense em um jogo em que uma moeda honesta é lançada três vezes seguidas. Qual é a probabilidade de "sair cara" nos três lançamentos?



ILUSTRAÇÕES: VAGNER DE FARIAS

Neste experimento determinamos o espaço amostral, ou seja, o conjunto de todos os tipos possíveis de resultados ao lançar uma moeda três vezes consecutivas e contamos em quantos deles ocorre "sair cara".

Para fazer a contagem podemos usar um diagrama árvore.



O espaço amostral desse experimento tem 8 elementos:

E = {(c,c,c); (c,c,r); (c,r,c); (c,r,r); (r,c,c); (r,c,r); (r,r,c); (r,r,r)}.

E apenas um deles corresponde ao evento "sair cara" nos três lançamentos.

Portanto, ao jogar a moeda três vezes consecutivas, a probabilidade de sair cara nos três lançamentos é de **1 em 8**, ou $\frac{1}{8}$, ou **0,125**, ou **12,5%**.

- Nesse mesmo experimento, qual é a probabilidade de "sair cara" nos dois primeiros lançamentos?

Ao observarmos o diagrama árvore, percebemos que existem dois resultados com cara no 1º e no 2º lançamento:

cara — cara — cara
e
cara — cara — coroa

Dizemos que a probabilidade de "sair cara" nos dois primeiros lançamentos é $\frac{2}{8}$, ou ainda 0,25, que é igual a **25%**.

Mas, se a ordem dos lançamentos não for considerada, as chances de sucesso aumentarão, pois a possibilidade de termos duas caras e uma coroa em três dos lançamentos é maior. Veja:

cara — cara — coroa
cara — coroa — cara
coroa — cara — cara

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Portanto, a probabilidade de sair cara em dois dos três lançamentos de uma moeda é de 37,5%. O mesmo ocorre com a probabilidade de sair coroa em dois dos três lançamentos de uma moeda.

Vamos combinar:
Vamos considerar que toda moeda, todo dado e toda bola mencionados nos exercícios são "honestos" ou "não viciados".

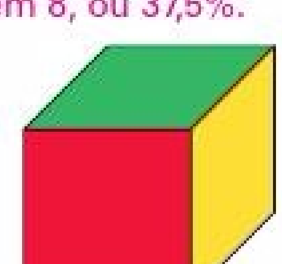
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Em quatro lançamentos sucessivos de uma moeda, quais resultados poderão ocorrer? Cite três deles. cara — cara — coroa — coroa; cara — coroa — coroa — coroa; coroa — coroa — coroa — coroa (Há outras respostas possíveis.)

28. Em três lançamentos sucessivos de uma moeda, qual é a probabilidade de sair duas coroas e uma cara em qualquer ordem de lançamento? 3 em 8, ou 37,5%.

29. Júlio construiu um dado não "viciado" com faces coloridas. Dentre as faces, três são verdes, duas são amarelas e uma é vermelha.



a) Cada vez que Júlio lança esse dado, quantos e quais são os possíveis resultados que ele pode obter na face superior? 6: 3 verdes, 2 amarelos e 1 vermelho.

b) Em um único lançamento, qual é a probabilidade de sair amarelo na face superior? 2 em 6, ou 0,333, ou 33,3%.

c) Em um único lançamento, que cor tem maior probabilidade de sair na face superior? Qual é a probabilidade dessa cor sair na face superior? Verde; 3 em 6, ou 0,5, ou 50%.

d) Em um único lançamento, que cor tem menor probabilidade de sair na face superior? Qual é a probabilidade dessa cor sair na face superior? Vermelho; 1 em 6, ou aproximadamente 0,167, ou 16,7%.

e) Se estivesse jogando com Júlio e usando esse dado, em que cor apostaria para ganhar em um único lance? Resposta pessoal.

30. Dentro de uma urna há 7 bolas brancas, 5 bolas pretas e 8 bolas azuis. Essas bolas só diferem uma das outras pelas cores. Ao se sortear, ao acaso, uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de sair uma bola que não seja preta? $\frac{3}{4}$ ou 0, 75 ou 75%.

31. No lançamento de uma moeda e um dado, nessa ordem, determine:

a) E = {(c,1); (c,2); (c,3); (c,4); (c,5); (c,6); (r,1); (r,2); (r,3); (r,4); (r,5); (r,6);}.

a) o espaço amostral para esse experimento;

b) a probabilidade de sair uma "cara" e um seis. $\frac{1}{12}$

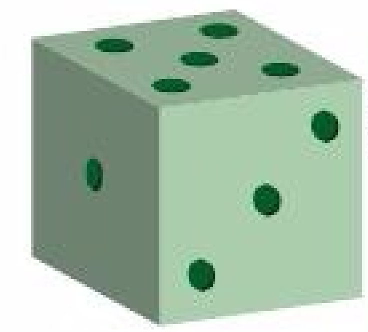
32. Paulo e Laura casaram-se há pouco tempo e planejam ter dois filhos.

a) Quais são todos os resultados possíveis quanto ao sexo desses filhos? Dê sua resposta desenhando um diagrama árvore. Veja resposta no final do livro.

b) Qual é a probabilidade de Paulo e Laura terem dois filhos homens? 1 em 4, ou $\frac{1}{4}$, ou 0,25, ou 25%.

c) Qual é a probabilidade de Paulo e Laura terem um casal de filhos? 2 em 4, ou $\frac{2}{4}$, que é $\frac{1}{2}$, ou 0,5, ou 50%.

33. João e Maria brincam com dados. No jogo que eles criaram, o que vale é o número representado na face superior do dado quando ele para após ter sido lançado. Cada jogador diz, na sua vez, um número de 1 a 6 e joga o dado uma única vez. Quem acertar o resultado ganha 2 pontos, quem errar perde 1 ponto.



a) Em uma jogada, quantos e quais são os resultados possíveis? 6: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

b) João apostou no 5. Qual é a probabilidade de ele ganhar 2 pontos? E de ele perder 1 ponto?

c) Maria apostou no 1. Qual é a probabilidade de ela ganhar 2 pontos? E de ela perder 1 ponto?

d) Em certo momento, eles combinaram que poderiam escolher dois números. Se qualquer um dos números sair, o jogador ganhará 2 pontos; caso contrário, perderá 1 ponto. Maria apostou em 3 ou 6. Qual é a probabilidade de ela ganhar 2 pontos? E de ela perder 1 ponto?

33. b) 1 em 6, ou $\frac{1}{6}$, ou aproximadamente 0,1667, ou aproximadamente 16,67%; 5 em 6, ou $\frac{5}{6}$, ou aproximadamente 0,833, ou 83,3%.

c) 1 em 6, ou $\frac{1}{6}$, ou aproximadamente 0,1667, ou 16,67%; 5 em 6, ou $\frac{5}{6}$, ou aproximadamente 0,833, ou 83,3%.

d) 2 em 6, ou $\frac{2}{6}$, que é $\frac{1}{3}$, ou aproximadamente 0,333, ou 33,3%; 4 em 6, ou $\frac{4}{6}$, que é $\frac{2}{3}$, ou aproximadamente 0,667, ou 66,7%.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Resultados ao lançar dois dados

A tabela a seguir apresenta os resultados possíveis para o lançamento de dois dados, um vermelho e outro azul. O par (**a, b**) significa que saiu **a** na face superior do dado vermelho e **b** na face superior do dado azul.

Vermelho \ Azul	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) Quantos são os resultados possíveis desse espaço amostral? 36 resultados.

b) Quantos são os resultados possíveis para o evento "sair 3" em pelo menos um dos dados? 11 resultados.

c) Qual é a probabilidade de "sair 3" em pelo menos um dos dados? $\frac{11}{36}$ ou 0,3055... ou 30,555%.

Leitura

Apesar de a seção **Leitura** ser opcional, estude a possibilidade de explorar a que segue, pois os alunos costumam ter grande interesse pelo tema abordado. Ele poderá ser integrado com outras disciplinas, especialmente com Ciências, que costuma tratar desse assunto no 9º ano.

Possibilidades, chances e hereditariedade

BILL BACHMANN/ALAMY/LATINSTOCK

A humanidade sempre se preocupou com a **herança genética**.

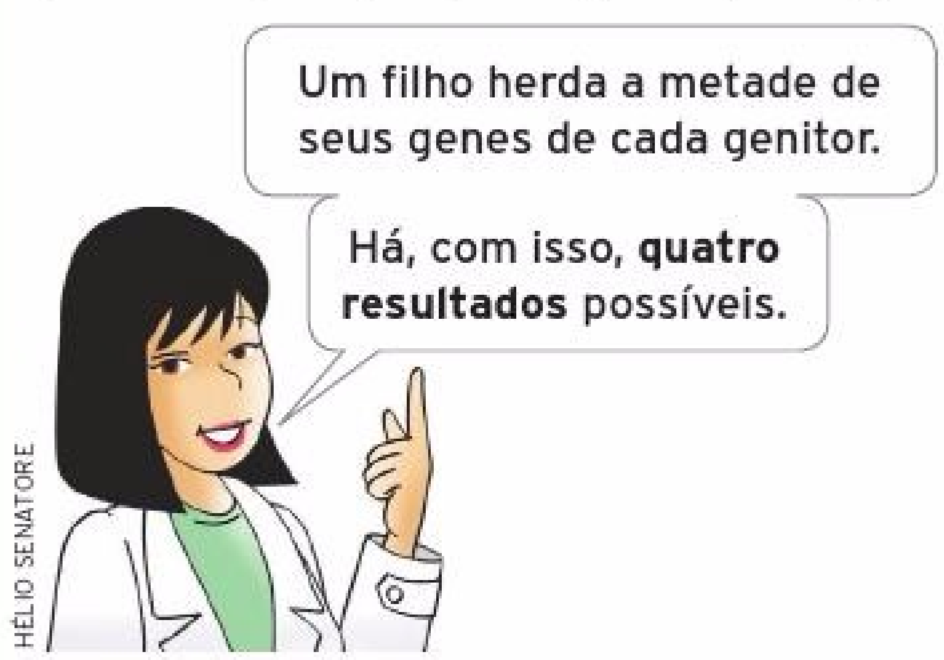
Os membros das gerações sucessivas são parecidos com seus ancestrais ou diferentes deles por várias razões. De qualquer forma, todo indivíduo carrega informações genéticas de seus ascendentes.

Por volta de 1850, o monge austríaco Gregor Mendel formulou as **leis básicas da hereditariedade**, mas a importância de suas descobertas só foi reconhecida cerca de 50 anos mais tarde.

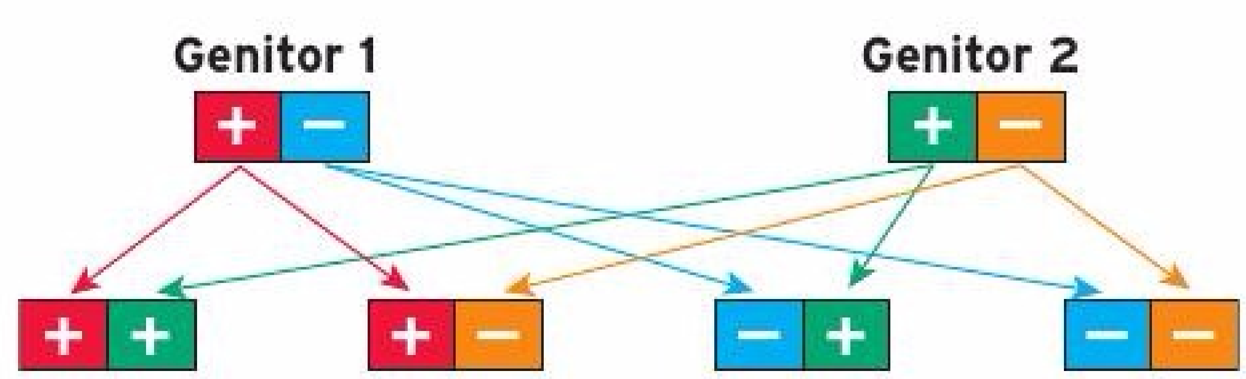
HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES

Gregor Mendel (1822-1884).

Um dos aspectos mais importantes do seu trabalho se refere à metodologia inovadora e pouco utilizada na época: a **metodologia experimental**. Mendel usava uma grande amostra de indivíduos e registrava a frequência dos diferentes tipos de descendentes que ocorriam na 1ª e na 2ª geração. Assim, ele procurava **identificar padrões** para propor **regras** que **regessem a herança**.



HÉLIO SENATORE



Assim, a **probabilidade** de esse casal ter um filho geneticamente:

$\boxed{+\,|\,-}$, isto é, **igual a eles**, é de **2 em 4** ou $\frac{2}{4}$, que é $\frac{1}{2}$ ou **50%**;

$\boxed{+\,|\,+}$ é de **1 em 4** ou $\frac{1}{4}$ ou **0,25**, que é **25%**;

$\boxed{-\,|\,-}$ é de **1 em 4** ou $\frac{1}{4}$ ou **0,25**, que é **25%**.

Quando as duas características, $\boxed{+}$ e $\boxed{-}$, estão presentes, se $\boxed{+}$ é dominante sobre $\boxed{-}$, $\boxed{+}$ prevalece. Dessa forma, são três as possibilidades de esse casal ter um filho com a característica $\boxed{+}$ predominante: $\boxed{+\,|\,+}$, $\boxed{+\,|\,-}$ e $\boxed{-\,|\,+}$. Portanto, a probabilidade, nesse caso, é de **3 em 4**, ou $\mathbf{\frac{3}{4}}$, ou **0,75**, ou **75%**. E a probabilidade de ter um filho $\boxed{-\,|\,-}$ é de **1 em 4**, ou $\mathbf{\frac{1}{4}}$, ou **0,25**, ou **25%**.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Simplifique a expressão:

$$\frac{2x}{2x-1} - \frac{2x+1}{4x^2-1} - \frac{2}{2x+1}$$ $\frac{2x-1}{2x+1}$

2. A medida dos raios de duas circunferências está na razão 2 : 5. Qual é a razão entre as áreas dos círculos determinados por essas circunferências? 4 : 25

3. Em um grupo de crianças, as idades, em anos, são: 8, 12, 13, 12, 10, 8, 9, 9, 11, 13, 8 e 10.

a) Qual é a idade média desse grupo? 10, 25 anos ou 10 anos e 3 meses.

b) Entre essas idades, qual é a moda? 8 anos.

c) Qual é a idade mediana desse grupo? 10 anos.

4. Em um levantamento sobre o número de filhos de uma comunidade, um pesquisador obteve os resultados a seguir considerando que a amostra envolveu 100 famílias.

Nº de filhos	0	1	2	3	4	5	6
Frequência	12	20	26	18	14	7	3

a) Qual é a moda dessa amostra? Família com 2 filhos.

b) Qual é o número médio de filhos nesse grupo de famílias? 2,35 filhos.

c) Calcule a mediana dessa amostra. 2 filhos.

5. Considere a equação

$$kx^2 + (2k+1)x + k + 2 = 0, \text{ com } k \neq 0$$

a) Para que valores de **k**, teremos uma equação com raízes reais? $k \leqslant \frac{1}{4}$

b) Escolha dois valores de **k** para os quais a equação terá duas raízes reais diferentes. Resposta pessoal.

c) Escreva a equação de 2º grau que se obtém substituindo **k** pelo valor escolhido no item anterior e resolva essa equação. Resposta pessoal.

6. Em um lançamento de um dado "não viciado", a probabilidade de que saia um número ímpar maior do que 2 é: b

a) $\frac{1}{6}$, ou, aproximadamente, 17%.

b) $\frac{1}{3}$, ou, aproximadamente, 33%.

c) $\frac{1}{2}$, ou 50%.

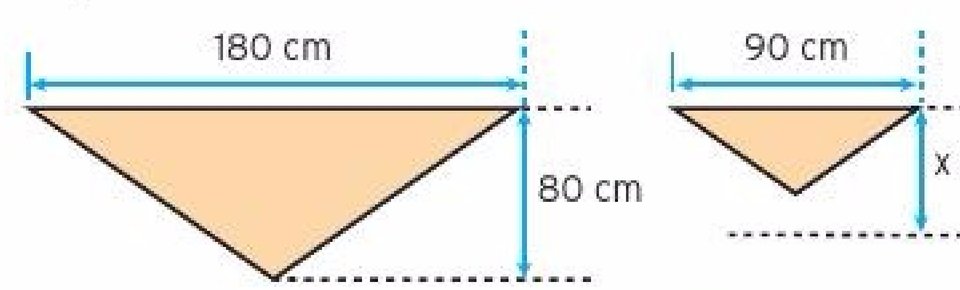
d) $\frac{2}{3}$, ou, aproximadamente, 67%.

7. Simplificando o radical $\sqrt[3]{\sqrt{256}}$, obtém-se: c

a) $2\sqrt[6]{3}$ b) $2\sqrt[3]{3^2}$ c) $2\sqrt[3]{2}$ d) $3\sqrt[3]{2}$

8. (Saresp) Patrícia fez dois xales semelhantes, um para si e outro para a filha, como na figura abaixo.

Se o comprimento do xale da filha é a metade do comprimento do xale da mãe, a medida **x** vale, em cm: d

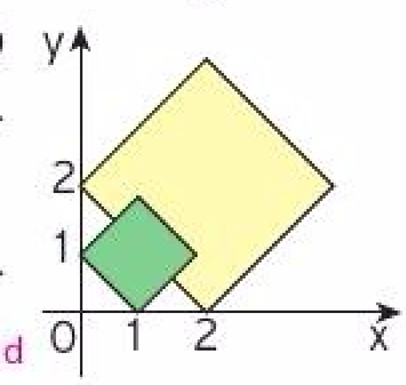


a) 20 b) 25 c) 35 d) 40

9. (Saresp) Dois quadrados estão representados no plano cartesiano, como mostra a figura.

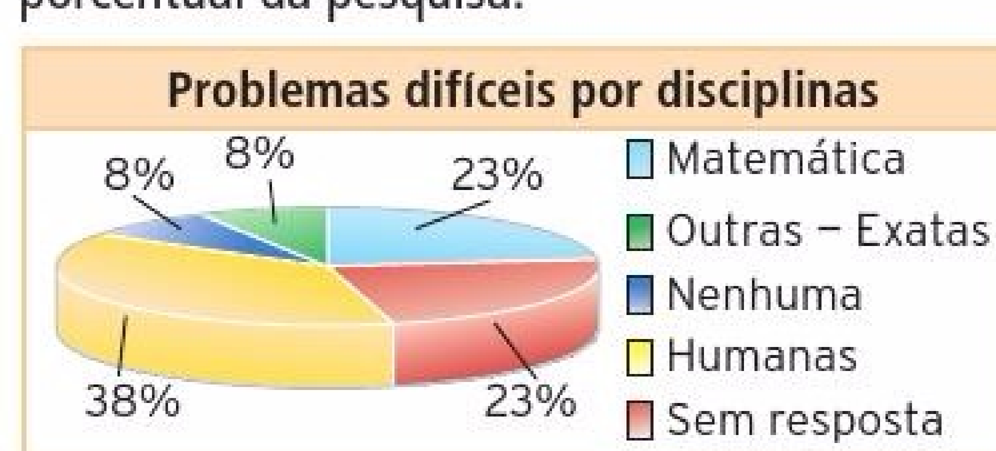
O perímetro do quadrado menor é **P** u, sendo u a unidade de comprimento.

É correto afirmar que o perímetro do quadrado maior é: d



a) 4P u b) (P + 8) u c) (P + 4) u d) 2P u

10. (Saresp) Uma escola fez uma pesquisa entre os alunos para saber em qual disciplina eles tinham mais dificuldades para resolver problemas. O gráfico a seguir representa o resultado porcentual da pesquisa.



Observando o resultado, qual é a porcentagem de alunos que têm dificuldade para resolver problemas de Ciências Humanas e de Matemática?

a) 23% b) 38% c) 61% d) 69% c

UNIDADE 9

Funções

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Nesta unidade...

1. Funções: significados e registros
2. Função de 1º grau
3. Função de 1º grau: estudo de sinais

Em um salto de paraquedas, a velocidade dos paraquedistas sofre influência de vários fatores, como a ação da gravidade, a resistência do ar e o tempo. Muitas vezes essas grandezas dependem uma da outra, e são relacionadas por meio do conceito de **função**, que será estudado nesta unidade.

É comum ler ou ouvir nos meios de comunicação frases como estas:

Nessas frases, a palavra **função** foi empregada com diferentes significados.

VAGNER DE FARIAS

Veja como ela é utilizada em Matemática, observando a página anterior.

Enquanto o paraquedas estiver fechado, pode-se considerar que o corpo está em queda livre. Após o salto, quanto mais tempo ele permanecer fechado, maior será a velocidade com que o paraquedista cairá: a velocidade depende, entre outros fatores, do tempo. Nessa situação, em Matemática diz-se que a **velocidade de queda** é **em função** do **tempo**.

O conceito de função está presente em muitos campos do conhecimento humano.

Para se estudar um determinado fenômeno físico, químico, biológico, econômico, social, entre outros, procura-se saber quais as grandezas representativas do fenômeno e como estão relacionadas entre si.

O que você já sabe?

- Descreva uma situação em que você tenha utilizado a palavra função.
  Minha mãe vive em função dos filhos. Há outras respostas possíveis.
- Pesquise em um dicionário significados da palavra função.
  Um cargo, um exercício, uma missão, uma incumbência, uma utilidade, um entendimento. Há outras respostas possíveis.
- Qual é o significado da palavra função na frase: "A função da televisão é informar e entreter".
  Utilidade, finalidade, papel.

1 Funções: significados e registros

O que é função?

Para refletir e responder

Uma empresa de ônibus oferece viagens a partir de Cuiabá para quatro cidades do estado do Mato Grosso. Observe na tabela abaixo a distância aproximada de cada cidade a Cuiabá e o preço correspondente da passagem.

Cidade	Distância aproximada de Cuiabá (km)	Preço da passagem (R$)
Matupá	70	30,00
Nobres	140	60,00
Cáceres	210	90,00
Sorriso	420	180,00

- Nessa situação, o preço da passagem depende da distância a ser percorrida de Cuiabá a cada uma das cidades? Sim, depende.

A cada distância **d** quilômetros de Cuiabá a uma das quatro cidades servidas pela empresa está associado **um único preço p** da passagem.

A relação entre a distância de Cuiabá a cada cidade e o preço da passagem correspondente denomina-se **função** e representaremos pela letra **f**.

Note que a cada 70 km de distância é cobrado R$ 30,00. Assim, para uma cidade localizada a 350 km = $(5 \cdot 70)$ km, o valor da passagem seria R$ 150,00 $(5 \cdot 30 = 150)$.

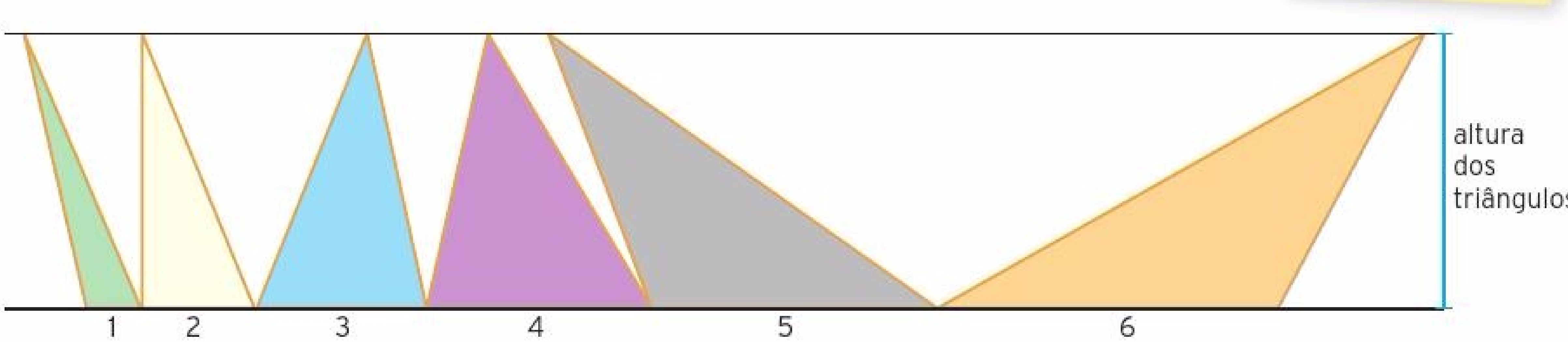
O conjunto formado pelas quatro distâncias entre Cuiabá e as quatro cidades denomina-se **domínio** da função **f**, que associa a cada distância **d** o preço da passagem **p**. Esse domínio pode ser representado, em quilômetros, assim:

domínio da função **f** = {70, 140, 210, 420}

Veja outros exemplos:

- Nesta figura há seis triângulos, todos com a mesma altura, e as medidas das bases são as que estão indicadas.

Medidas indicadas em cm.



O **domínio** da função **g**, que associa a medida de cada base B à área correspondente A do triângulo, pode ser representado, em centímetros, por: domínio da função **g** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- Em uma classe há **34** estudantes. Na lista de presença, a cada estudante **x** está associado **um único número y** de chamada.

O conjunto representado por {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, . . . , 33, 34} é o **domínio** da função que associa a cada estudante **x** o seu número da chamada **y**.

Função: registros

Expressamos funções de várias maneiras para poder analisá-las, fazer previsões e até interferir em alguns processos de mudança. Exemplo:

Em 1 mês, uma fábrica de refrigerantes produziu cerca de 10 milhões de litros de refrigerante.

Como a procura pelo produto estava crescendo, o gerente propôs um aumento na produção de 1,5 milhão de litros por mês. Ele fez anotações sobre o cálculo do aumento da produção para os 5 meses seguintes. Veja como ele poderia ter feito o registro:

- Organizando os cálculos em uma **tabela**:

Tempo (meses)	Aumento da produção (em milhões de litros)	Produção mensal (em milhões de litros)
1	$1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$	$10 + 1{,}5 = 11{,}5$
2	$2 \cdot 1{,}5 = 3{,}0$	$10 + 3{,}0 = 13{,}0$
3	$3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$	$10 + 4{,}5 = 14{,}5$
4	$4 \cdot 1{,}5 = 6{,}0$	$10 + 6{,}0 = 16{,}0$
5	$5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$	$10 + 7{,}5 = 17{,}5$

Aumento de 1,5 milhão de litros a cada mês.

Observando essa tabela, verificamos que a produção mensal **p** de refrigerante **depende** do número de meses ou, ainda, a produção **p** cresce com o aumento do tempo **t**, em meses.

- Usando uma **fórmula**:

t —— o número de meses

1,5t —— o aumento da produção em **t** meses

10 + 1,5t —— a produção mensal após **t** meses, a partir da produção inicial

A produção é uma função do número de meses.

Podemos escrever uma fórmula para **p** em **função** de **t**.

p = 10 + 1,5t, em que **t** e **p** são as **variáveis**.

Atribuindo valores a **t** nessa fórmula, calculamos os valores correspondentes de **p**:

Para $t = 4$ —— $p = 10 + 1{,}5 \cdot 4 = 10 + 6$ —— $p = 16$

16 é o valor **correspondente** a **4**, na função **p = 10 + 1,5t**.

Isso significa que em 4 meses a produção será de 16 milhões de litros, o que confirma o resultado obtido nos cálculos efetuados na tabela.

Do mesmo modo, atribuindo valores para **p** e resolvendo a equação, obtemos valores para **t**:

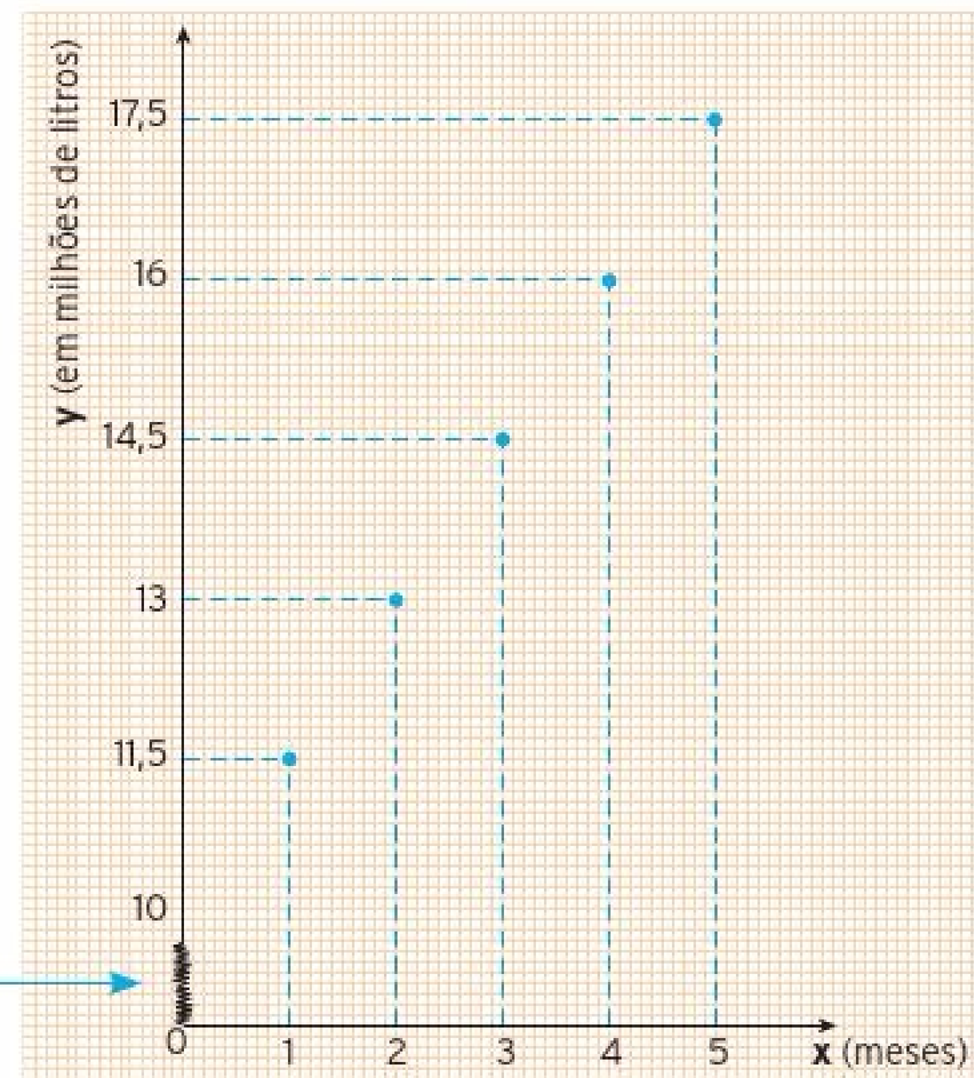
HÉLIO SENATORE

$$p = 10 + 1{,}5t \longrightarrow 14{,}5 = 10 + 1{,}5t$$
$$14{,}5 - 10 = 1{,}5t$$
$$4{,}5 = 1{,}5\,t \longrightarrow t = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3$$

Assim, dentro de 3 meses a produção atingirá 14,5 milhões de litros.

- Registrando os dados por meio de pontos em um **gráfico** no **plano cartesiano**:

Observe que, para cada aumento de 1 mês, há um aumento constante de 1,5 milhão de litros de refrigerante.



A linha quebrada indica que não se está mantendo a proporcionalidade entre 0 e 10.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Como se chama em Matemática uma correspondência entre o conjunto de alunos de sua classe e o conjunto dos números da lista de chamada? Função.

2. Para participar da maratona do verão, Paula programou o seu treinamento: 14 km de corrida por dia.

a) Quantos quilômetros ela terá percorrido em 5 dias de treinamento? 70 km

b) Construa uma tabela que mostre quantos quilômetros ela percorrerá durante os primeiros 7 dias de treinamento. Veja resposta no final do livro.

c) Nessa situação, do que depende o total de quilômetros percorridos por Paula? O percurso total depende do número de dias de treinamento.

3. Considerando a situação descrita na atividade anterior: a) $y = 14x$, em que **x** é o número de dias de treinamento e **y** é o percurso percorrido.

a) Escreva uma fórmula, com duas variáveis, por meio da qual seja possível obter os dados da tabela construída.

b) Quantos quilômetros ela terá percorrido em 10 dias de treinamento? 140 km

c) Quantos dias ela terá treinado após percorrer 252 km? 18 dias.

d) Construa em papel milimetrado um gráfico que represente esses dados até o 10º dia. Veja resposta no final do livro.

4. Existem retângulos cuja medida do comprimento é o dobro da medida da largura mais 6 unidades. Escreva uma fórmula que expresse o perímetro em função da largura desse retângulo. $p = 6L + 12$, em que **p** representa o perímetro em função da largura **L**.

a) Qual é o perímetro de um retângulo desse tipo cuja largura mede 5 cm? 42 cm

b) Construa uma tabela com os valores do comprimento, da largura e do perímetro de retângulos com largura de 1 cm; 1,5 cm; 2 cm; 4 cm; 4,5 cm; 5 cm e 8,3 cm. Veja resposta no final do livro.

c) Quais são as medidas da largura e do comprimento de um retângulo desse tipo cujo perímetro é 90 cm? 13 cm e 32 cm

5. Para encher uma piscina vazia, foi aberta uma torneira cuja vazão é de 25 litros por minuto.

a) Indicando por **V** o volume em litros de água despejada pela torneira em **t** minutos, escreva uma fórmula que relaciona **V** e **t**. $V = 25t$

b) Qual é o domínio dessa função? Conjunto dos números reais positivos.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

6. Em uma função, os valores de **y** dependem dos valores de **x** de acordo com a fórmula $y = 11 - x^2$. Copie e complete uma tabela como a que segue, obtendo os valores de **x** ou de **y**.
Veja resposta no final do livro.

x	$y = 11 - x^2$	y
-3	$11 - (-3)^2$	2
$-0{,}5$		
0		
		10
		7

7. Em uma função, os valores de **y** dependem dos valores de **x**, de acordo com esta fórmula:

$$y = \frac{3 - 4x}{5}$$

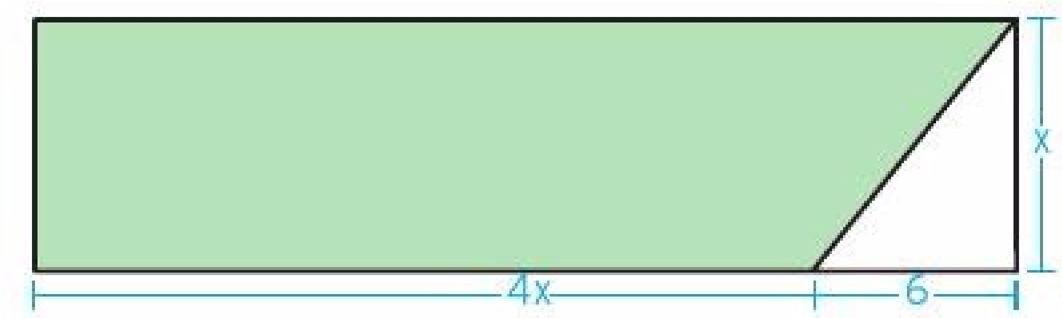
a) Para que valor de **y** corresponde $x = 7$? -5

b) Para que valor de **y** corresponde $x = -0{,}25$? 0,8

c) Qual é o valor de **x** para o qual $y = 7$? -8

d) Qual é o valor de **x** para o qual $y = 0$? $\frac{3}{4}$

8. Considere este retângulo:



a) Represente por **y** a área da parte pintada de verde e escreva uma fórmula que expresse **y** em função de **x**. $y = 4x^2 - 3x$

b) Por essa função, qual é o valor de **y** correspondente a $x = \sqrt{6}$? $24 - 3\sqrt{6}$

9. Considere triângulos em que a medida de um lado, expressa em cm, tem 1 unidade a mais do que a medida da altura relativa a esse lado.

a) Represente por **x** a medida desse lado e por **y** a área do triângulo e obtenha uma fórmula que expresse a área em função da medida do lado considerado.

b) Se a medida do lado de um triângulo desse tipo for 21 cm, qual será a sua área? 210 cm^2

c) Calcule a área de um triângulo desse tipo cuja altura mede 9 cm. 45 cm^2

d) Pela função obtida, qual é o valor de **y** correspondente a $x = 21$? 210

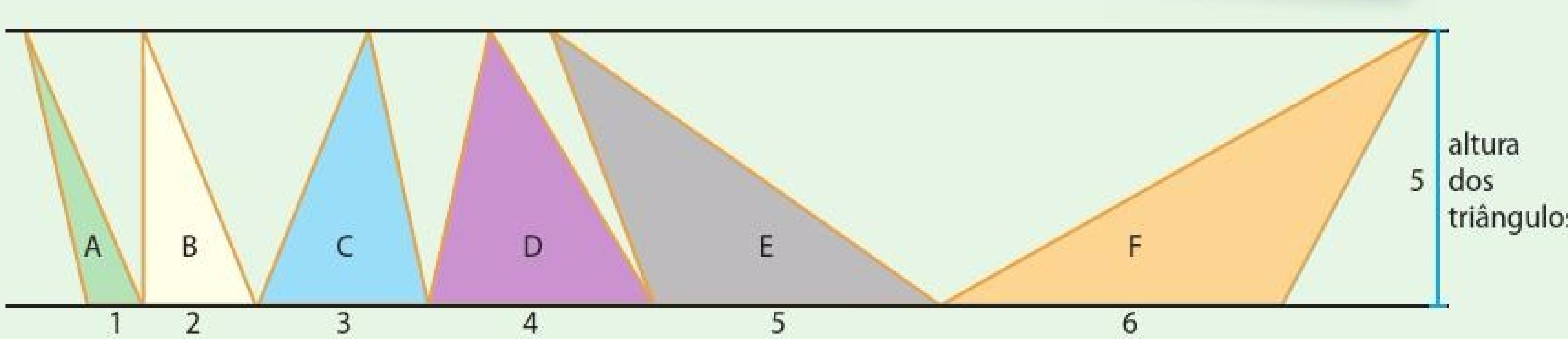
a) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. Há outras respostas possíveis.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e façam o que se pede.
Considere estes triângulos de alturas iguais.

Medidas indicadas em cm.



- Verifique que, quanto maior a medida da base, maior é a área desses triângulos.

Pista: a área de um triângulo em função da base e da altura relativa à base é expressa pela fórmula: $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$.

Área de A = 2,5 cm^2; Área de B = 5 cm^2; Área de C = 7,5 cm^2; Área de D = 10 cm^2; Área de E = 12,5 cm^2; Área de F = 15 cm^2.
Base de F > Base de E > Base de D > Base de C > Base de B > Base de A
Área de F > Área de E > Área de D > Área de C > Área de B > Área de A

2 Função de 1º grau

Proponha aos alunos várias situações de representação da função de 1º grau para que eles cheguem à conclusão de que o gráfico dessa função no conjunto dos números reais é sempre uma reta.

O que é uma função de 1º grau?

Para refletir e responder

Joana é vendedora em uma loja de roupas.

O seu salário mensal é composto de duas partes: uma fixa, no valor de R$ 800,00, e outra variável, que corresponde a uma comissão de 2% sobre o valor total de vendas que ela faz durante o mês.


COMMERCIAL EYE/GETTY IMAGES

Considere:

x —— o valor total de vendas mensal;

y —— o salário mensal correspondente.

- Determine uma fórmula que expresse o salário de Joana em função do valor total de vendas naquele mês. y = 2%x + 800. Há outras respostas possíveis.

Algumas situações envolvem duas grandezas em que as variações numéricas de uma delas e as variações correspondentes da outra são diretamente proporcionais.

Quando isso ocorre, dizemos que essas grandezas são dependentes uma da outra por uma **função polinomial de 1º grau**.

Na situação acima podemos escrever a fórmula:

$$y = \underbrace{0{,}02}_{2\%}x + 800$$

x e **y** são as variáveis.

Nessa fórmula, **x** e **y** representam números reais positivos e, para cada valor de **x**, temos um único valor correspondente para **y**. Dizemos que **y** é **função** de **x** e que **y = 0,02x + 800** expressa uma **função** de 1º grau do tipo **y = ax + b**, com a = 0,02 e b = 800.

Função polinominal de 1º grau é toda função que pode ser expressa por uma fórmula do tipo **y = ax + b**, com $a \neq 0$.

Na fórmula y = ax + b:

- **a** e **b** representam números reais;
- **a** é o **coeficiente** do termo em **x**;
- **b** é o **termo independente** de **x** ou **termo constante**;
- **x** é a **variável independente**;
- **y** é a **variável dependente**.

Vamos combinar:
Quando não há referências sobre a variável independente, vamos considerar que ela representa qualquer número real, e isso significa que o domínio da função é o conjunto dos números reais.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Identifique e anote as fórmulas que expressam função de 1º grau.

$y = 7x - 2$	$y = 28$	$2x - y^2 = 18$
$y = -x + 12$	$y = \frac{x}{6} + 4$	$x - y = 0$

$y = 7x - 2$; $y = -x + 12$; $y = \frac{x}{6} + 4$; $x - y = 0$

11. Dada a função definida pela fórmula $y = \frac{2}{3}x - 6$, Isabela determinou valores de y correspondentes aos valores de **x** indicados em cada item. Apenas um está correto. Destaque-o e corrija os demais.

a) $y = 5$, para $x = \frac{3}{2}$ $y = -5$, para $x = \frac{3}{2}$

b) $y = -6$, para $x = 0$ correta: b

c) $y = 10$, para $x = 6$ $y = -2$, para $x = 6$

12. Considere a função de 1º grau definida pela fórmula $7y - 3x = -21$.

a) Escreva uma fórmula do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$ que seja equivalente à fórmula dada.
$y = \frac{3x}{7} - 3$. Há outras respostas possíveis.

b) Qual é o valor de **y** correspondente a $\mathbf{x} = \mathbf{63}$, nessa função? 24

c) Qual é o valor de **x** para o qual y é igual a zero, nessa função? 7

13. Em uma promoção, vários modelos de camisetas estão sendo vendidos com 20% de desconto sobre o preço normal. Nessa situação, o valor de **y** a ser pago após o desconto é em função do preço normal **x**.

a) Escreva a fórmula que define essa função.
$y = 0,8x$

b) Qual é o domínio dessa função?
O conjunto dos números reais positivos.

14. Para se obter a soma **y** das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, subtrai-se 2 do número **x** de lados e multiplica-se essa diferença por 180°.

a) Escreva uma fórmula que expresse **y** em função de **x**. Essa função é de 1º grau?
$y = (x - 2) \cdot 180°$ ou $y = 180°x - 360°$; sim.

b) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo com 8 lados? 1080°

c) Qual é o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1440°? Decágono.

Usando a calculadora

O preço de venda **y** de um livro é igual ao preço de custo **x** acrescido de 30%.

- Que expressão representa a frase "30% sobre o preço de custo"? 0,3x
- Que função de 1º grau expressa o preço de venda do livro nessa situação? $y = 1,3x$
- Qual será o preço de venda, se o preço de custo for de R$ 29,00? R$ 37,70
- Qual terá sido o custo de um livro que é vendido por R$ 50,96? R$ 39,20

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Cuidar-se bem!

Nino, que cuida muito de seu físico, foi se matricular em uma escola de natação e se deparou com a promoção ao lado.

- Escreva uma fórmula que expresse a quantia **q** que Nino pagará em função do número **m** de meses que frequentará a escola de natação.
$q = 150 + 120m$
- Essa fórmula expressa uma função de 1º grau? Explique por quê. Sim, porque é do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

VAGNER DE FARIAS

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões.

Antônio tem uma pequena empresa que produz sucos de frutas. Todo mês, além de uma despesa fixa de R$ 3 000,00, ele gasta R$ 0,20 para produzir cada litro de suco.

- Escreva uma fórmula que expresse o gasto total mensal de Antônio em função da quantidade, em litros, de suco produzido. $y = 0{,}20x + 3\,000$
- Em um certo mês, a empresa produziu 5 000 L de suco. Quanto foi o gasto total nesse mês? R$ 4000,00
- Se um litro de suco foi vendido por R$ 2,00, de quanto por cento foi o lucro de Antônio nesse mês? 150%

Representação gráfica

Uma função de 1º grau expressa por uma fórmula do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$, que relaciona números reais, é representada no plano cartesiano por uma **reta**.

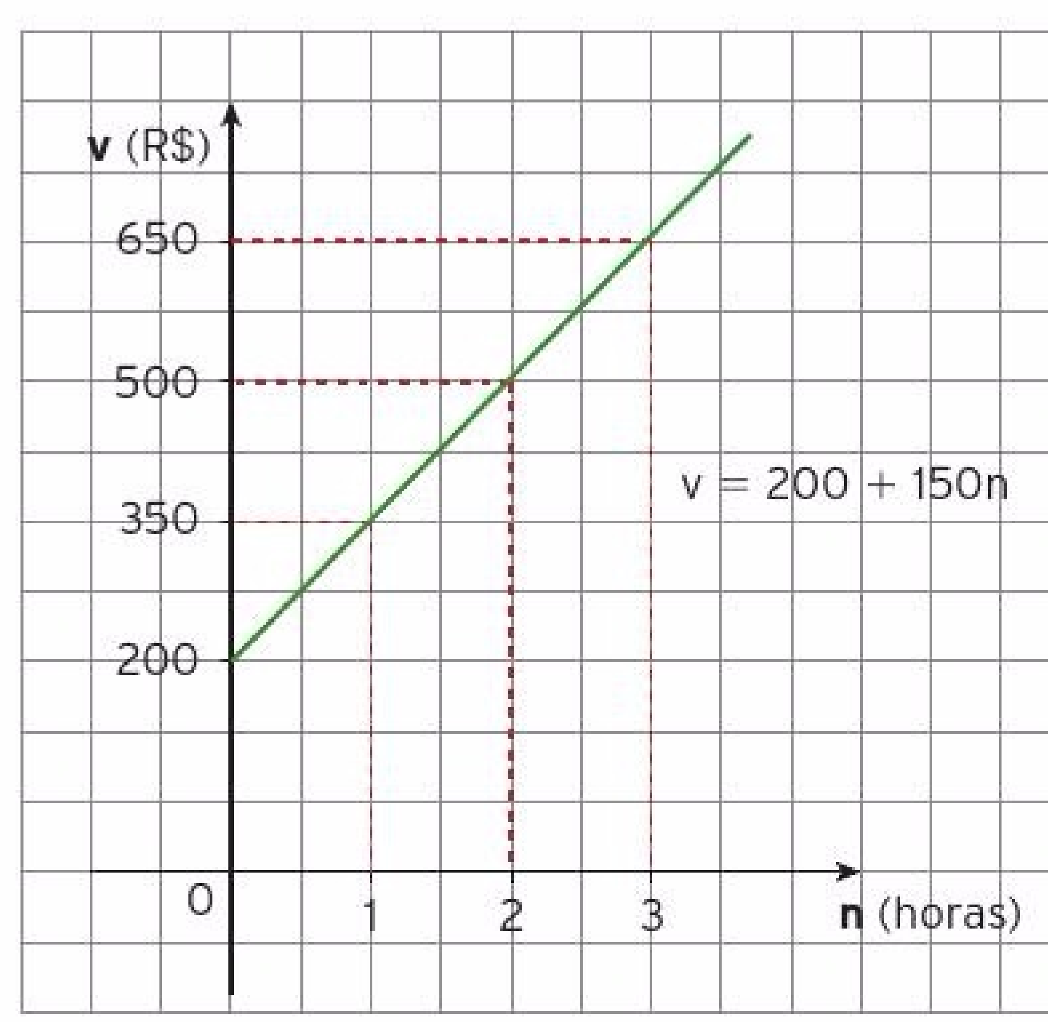
Veja alguns exemplos:

- Um consultor de informática cobra R$ 200,00 pela visita e mais R$ 150,00, por hora, de consulta. O valor total que um cliente paga depende do tempo da consulta. Uma fórmula que expressa o valor total **v** em função do número **n** de horas é: $\mathbf{v = 200 + 150n}$.

Para desenhar um gráfico cartesiano que representa essa função, escolhemos alguns valores em reais para **n**, calculamos os valores correspondentes de **v** e obtemos um par ordenado (n, v).

Em seguida, representamos os pares ordenados (n, v) obtidos por pontos de um plano e completamos o gráfico.

n (horas)	v (R$)	(n, v)
1	350	(1, 350)
2	500	(2, 500)
3	650	(3, 650)



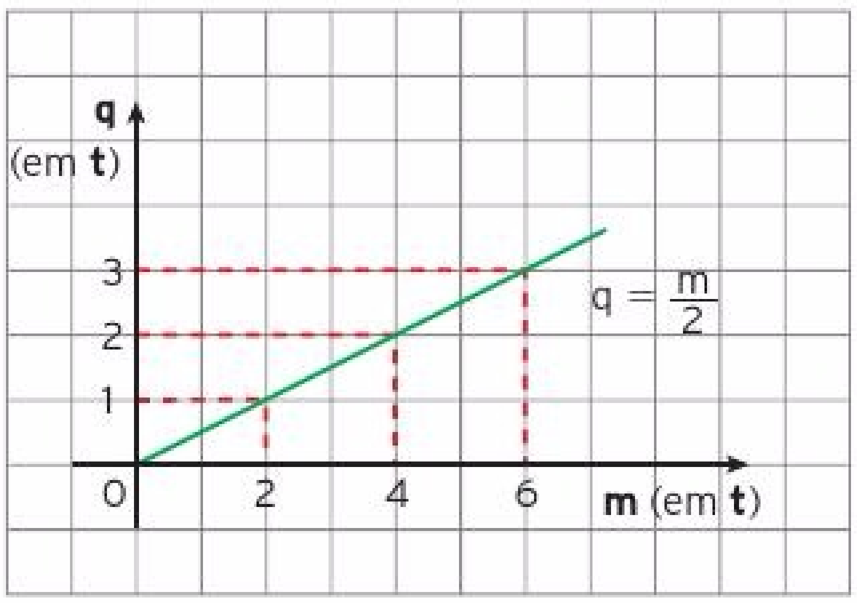
Observe que, quando o número de horas aumenta uma unidade, o valor pago por um cliente aumenta R$ 150,00, ou seja, a variação da grandeza **n** (número de horas) e a correspondente variação de **v** (valor pago) são **grandezas diretamente proporcionais**.

Como o gráfico é uma reta, bastam dois pontos para desenhá-la.

- Em uma empresa de mineração, a cada tonelada extraída de um certo minério, aproveita-se meia tonelada para a fabricação de um componente eletrônico. Uma fórmula que expressa a quantidade de minério aproveitado (**q**) em função da quantidade de minério extraído (**m**) é:

$$q = \frac{m}{2}$$

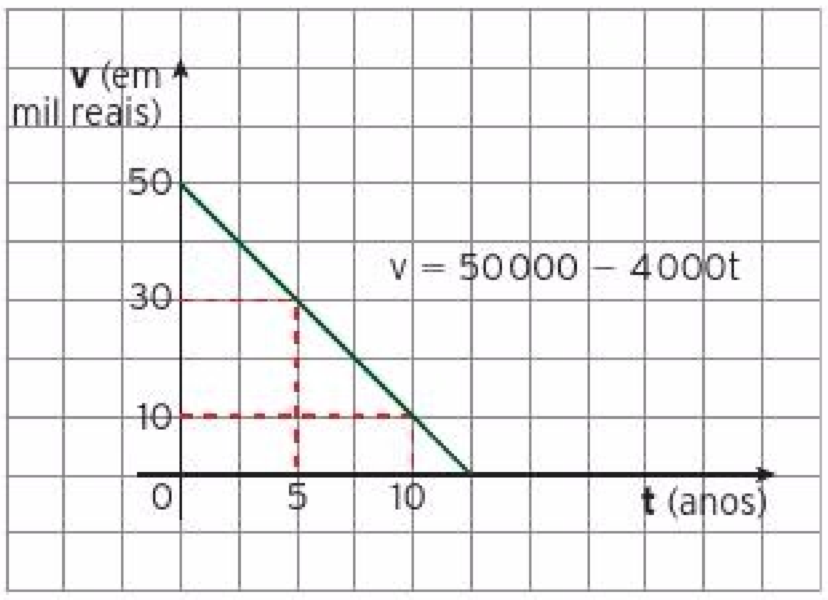
Gráfico de $q = \frac{m}{2}$



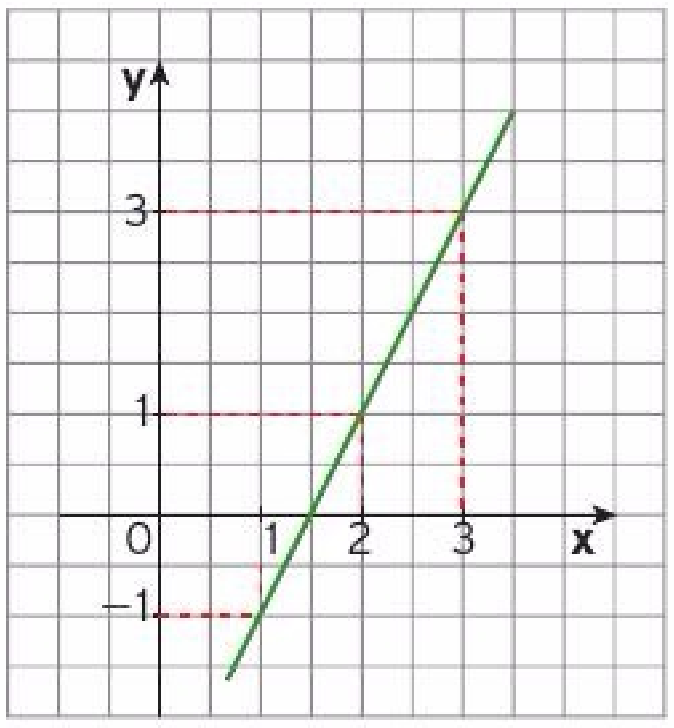
- Um equipamento industrial novo custava R$ 50 000,00. Com o passar do tempo, seu valor sofreu uma depreciação de R$ 4 000,00 em média por ano. Uma fórmula que expressa o valor (**v**) do equipamento após **t** anos é:

$$v = 50000 - 4000t$$

Gráfico de $v = 50000 - 4000t$



- O gráfico ao lado representa uma função de 1º grau do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$.



Vamos determinar qual é essa função.

No gráfico ao lado podemos observar que para $x = 1$ temos $y = -1$ e para $x = 2$ temos $y = 1$.

Atribuímos esses valores a **x** e aos correspondentes valores de **y** na fórmula $y = ax + b$:

$$x = 1 \text{ e } y = -1 \text{ ——— } -1 = a \cdot 1 + b \qquad \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$x = 2 \text{ e } y = 1 \text{ ——— } 1 = a \cdot 2 + b$$

Sistema de equações.

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição:

- Isolamos **a** na equação $\mathbf{a + b = -1}$ ——— $a = -1 - b$.
- Substituímos **a** por $(-1 - b)$ na equação $\mathbf{2a + b = 1}$.

$2(-1 - b) + b = 1$ ——— $b = -3$

- Calculamos o valor de **a** ——— $a = 2$.

Portanto, a função do tipo $y = ax + b$ representada pelo gráfico dado é $y = 2x - 3$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

15. Em um plano cartesiano, construa os gráficos das funções de 1º grau definidas pelas fórmulas: Veja os gráficos no final do livro.

a) $y = 6x - 4$

b) $y = -4x + 2$

c) $y + 5x = 0$

d) $y = \frac{1}{3}x + 6$

16. Escreva estas fórmulas na forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$, com **x** e **y** representando números reais. Em seguida, construa os gráficos em um plano cartesiano: Veja os gráficos no final do livro.

a) $3x + 2y = 10$ $y = -\frac{3}{2}x + 5$

b) $x = 5(y - 2)$ $y = \frac{x}{5} + 2$

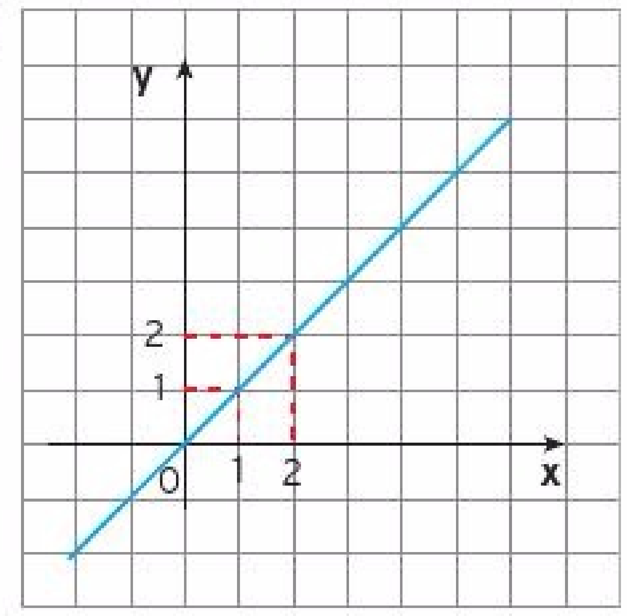
17. Represente, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções definidas pelas fórmulas abaixo: Veja o gráfico no final do livro.

$y = -\frac{3}{2}x + 6$ $y = \frac{2}{3}x + 6$

Qual é a posição de uma reta em relação à outra nesse plano? Elas são concorrentes e perpendiculares.

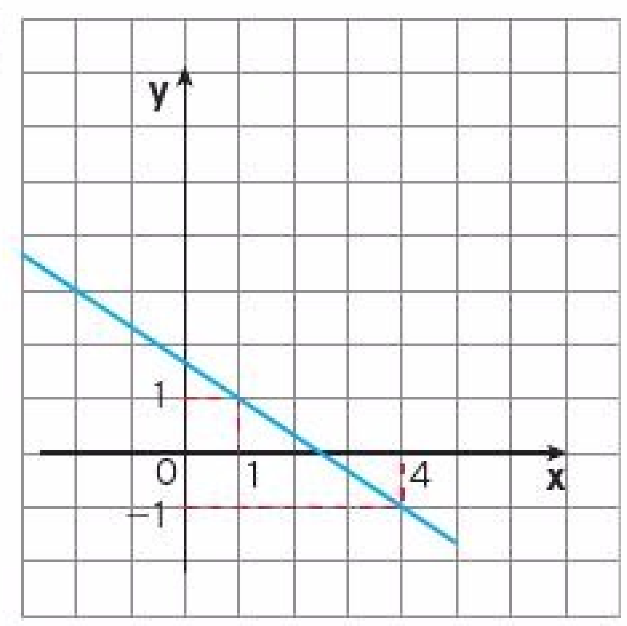
18. Escreva as funções de 1º grau representadas por estes gráficos:

a)



$y = x$

b)



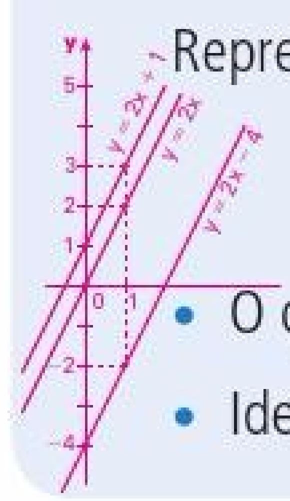
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Representem, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções definidas por estas fórmulas:



$y = 2x$ $y = 2x + 1$ $y = 2x - 4$

x e **y** representam números reais.

- O que se pode observar em relação às três retas? Elas são paralelas entre si.
- Identifique outra função de 1º grau que tenha a mesma relação verificada para as funções dadas.

$y = 2x + 6$. Há outras respostas possíveis.

Retas e ângulos

Certifique-se de que os alunos conseguem perceber que na função de 1º grau o tipo de ângulo que as retas formam com o eixo **x** é identificado pelo sinal do coeficiente de **x** e que a raiz dessa função corresponde ao valor da abscissa do ponto de intersecção da reta com o eixo **x**.

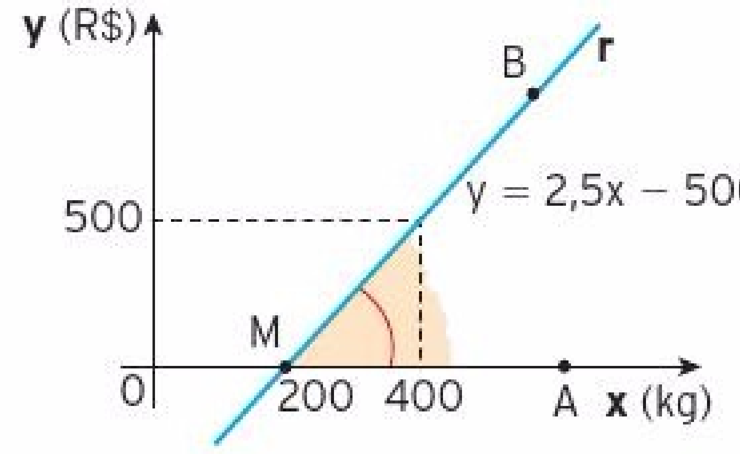
No gráfico cartesiano da função de 1º grau é possível mostrar que o tipo de ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas está relacionado com o sinal do coeficiente de **x** da função de 1º grau que ela representa.

Exemplo:

O lucro mensal de uma fábrica de farinha é expresso pela função: $\mathbf{y = 2{,}5x - 500}$, na qual **x** representa a produção mensal de farinha, em quilogramas, e **y** representa o seu lucro, em reais.

No gráfico cartesiano dessa função, se observarmos a reta e o seu ponto de intersecção com o eixo **x**, poderemos verificar a formação de quatro ângulos. $A\hat{M}B$ é um desses ângulos.

$A\hat{M}B$ é um ângulo agudo.



Nesta função, o coeficiente de **x** é 2,5, que é um número real positivo.

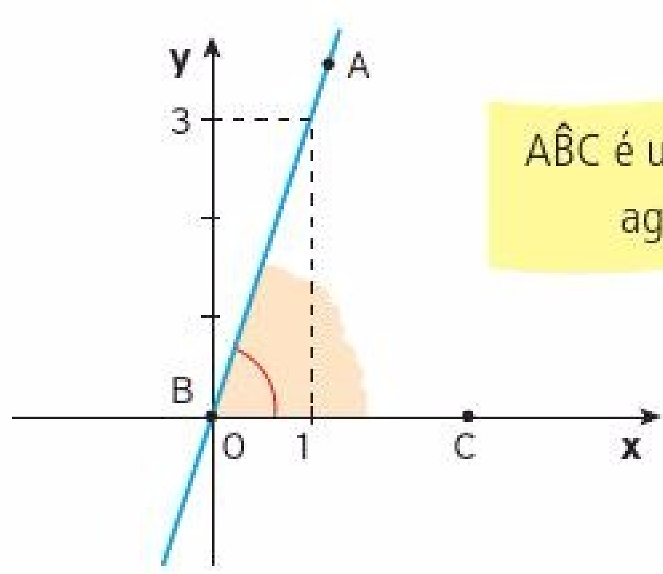
Os gráficos a seguir representam as funções $y = 3x$ e $y = -2x + 1$, nas quais **x** representa números reais. Observe neles o tipo de ângulo que as retas formam com o eixo **x**, no sentido anti-horário.

3 é o coeficiente de x e é um número positivo.

$y = 3x$

ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

$a = 3$ e $a > 0$

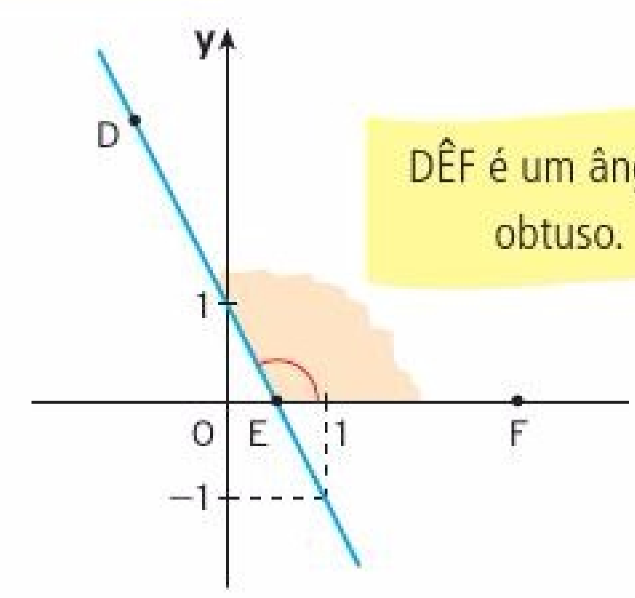


$A\hat{B}C$ é um ângulo agudo.

−2 é o coeficiente de x e é um número negativo.

$y = -2x + 1$

$a = -2$ e $a < 0$



$D\hat{E}F$ é um ângulo obtuso.

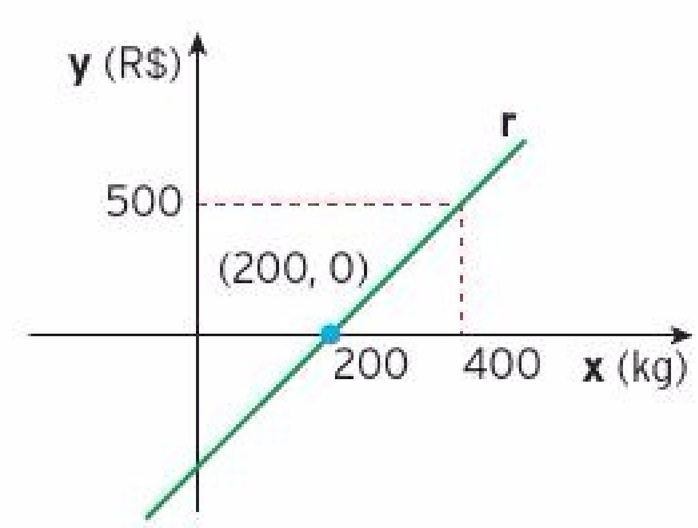
De modo geral:

A reta que representa geometricamente uma função de 1º grau do tipo $y = ax + b$ forma com o eixo **x**, no sentido anti-horário, um ângulo:

- agudo quando $\mathbf{a > 0}$;
- obtuso quando $\mathbf{a < 0}$.

Zero de uma função de 1º grau

Observe novamente o gráfico da função $\mathbf{y = 2{,}5x - 500}$, que representa o lucro mensal de uma fábrica, apresentado acima.



O ponto de coordenadas (200, 0) é a intersecção da reta **r** com o eixo **x**.

O valor de **x** para o qual o lucro **y** é nulo se chama **zero** da função.

Neste caso, determinamos o zero da função substituindo **y** por zero e resolvendo a equação obtida:

$$2{,}5x - 500 = 0 \text{ ——— } x = \frac{500}{2{,}5} = 200$$

Isso significa que, se a fábrica produzir 200 quilogramas por mês, o seu lucro será zero.

Outro exemplo:

O zero da função expressa pela fórmula $y = 14x - 21$ é determinada substituindo **y** por zero nessa fórmula e resolvendo a equação obtida.

$$y = 0 \longrightarrow 14x - 21 = 0 \longrightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

O zero da função $y = 14x - 21$ é $\frac{3}{2}$.

> **Zero** de uma função de 1º grau do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é o valor do número real **x** para o qual se tem $y = 0$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

19. Esta fórmula define uma função de 1º grau:

$$y - 20x = 3x + 4$$

a) Escreva-a na forma $y = ax + b$. Qual é o sinal de **a**? $y = 23x + 4$; positivo.

b) Qual é o tipo de ângulo que a reta que representa a função forma com o eixo **x**, no sentido anti-horário? Agudo.

20. Observe este quadro e anote o valor que é zero dessas funções: $\frac{5}{2}$; 2; −12; 4

Função	Raiz da função			
$y = 16x - 40$	-1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$
$4y = 15x - 30$	-2	2	0	4
$9y - x = 12$	-3	-4	-12	6
$x - 4 = 32y$	4	0	5	16

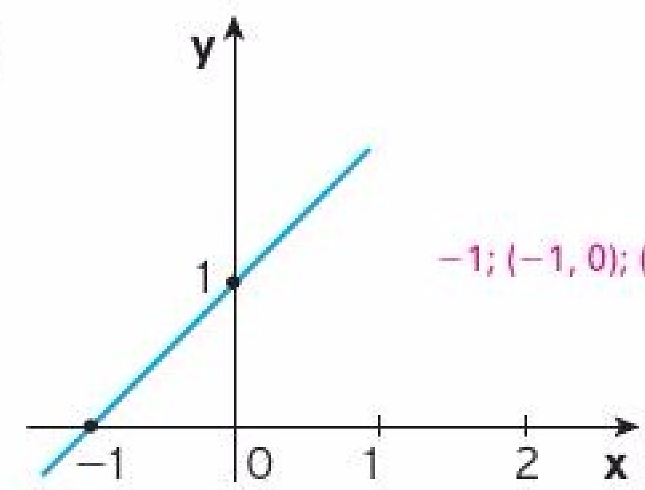
21. Quais são as coordenadas do ponto de intersecção do eixo **x** com a reta que representa a função definida por $y = -12x + 10$? $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$

22. Em uma função, os valores de **y** dependem dos valores de **x** definidos pela equação $x + y = \frac{3}{2}x - 1$.

Qual é o ponto de intersecção do eixo **y** com a reta que representa essa função? (0, −1)

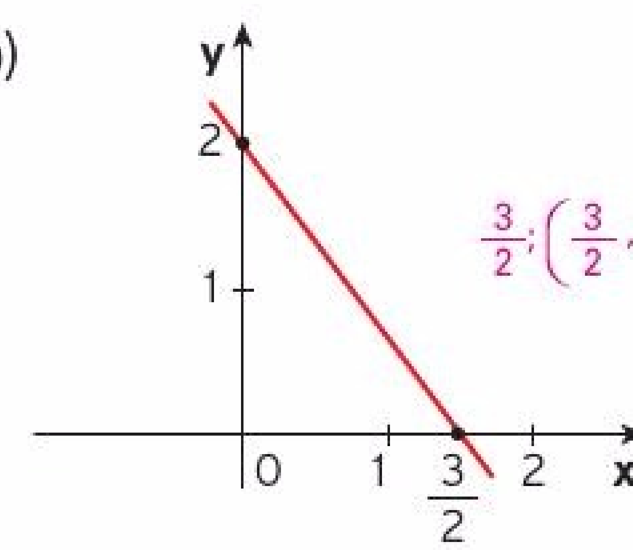
23. Determine os zeros das funções de 1º grau representadas nos gráficos a seguir e as coordenadas dos pontos de intersecção de cada reta com o eixo **x** e com o eixo **y**.

a)



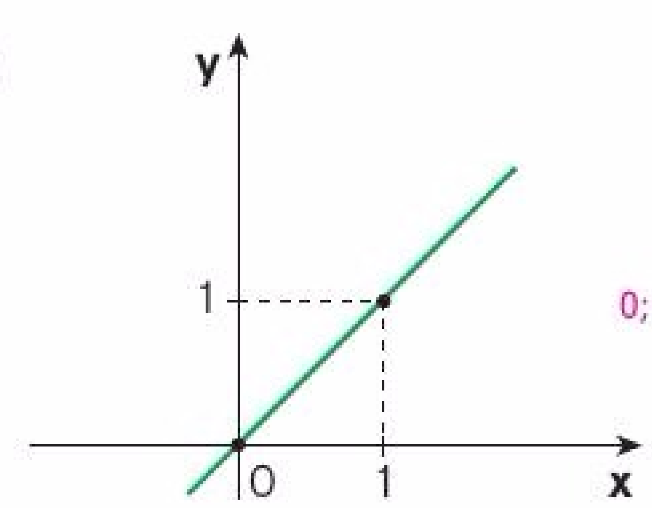
−1; (−1, 0); (0, 1)

b)



$\frac{3}{2}$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; (0,2)

c)



0; (0, 0)

24. Uma função de 1º grau tem coeficiente de **x** igual a 5 e raiz 2. Que função é essa? $y = 5x - 10$

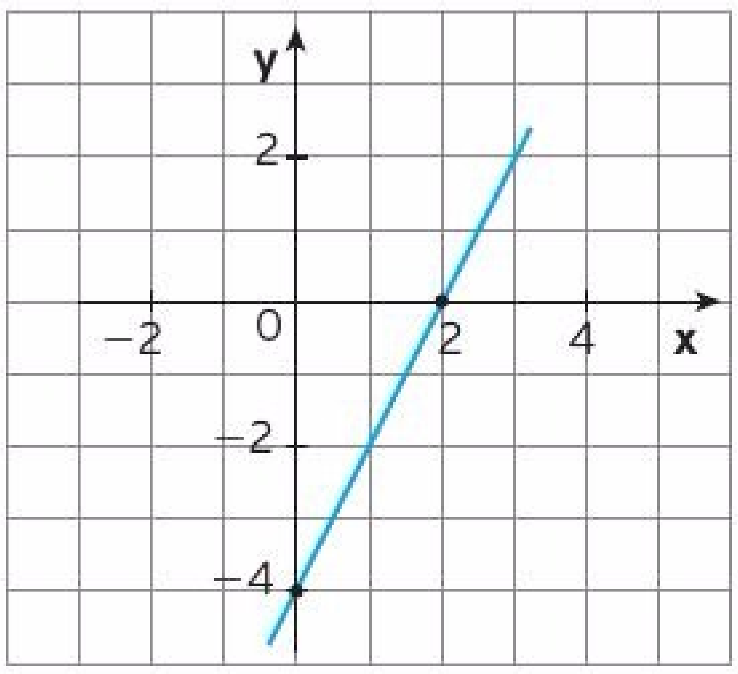
3 Função de 1º grau: estudo de sinais

Estudando os sinais

Incentive os alunos a fazer esboços gráficos no estudo do sinal da função de 1º grau. Isso possibilita uma melhor compreensão desse assunto.

Para refletir e responder

Observe o gráfico da função definida por $y = 2x - 4$.

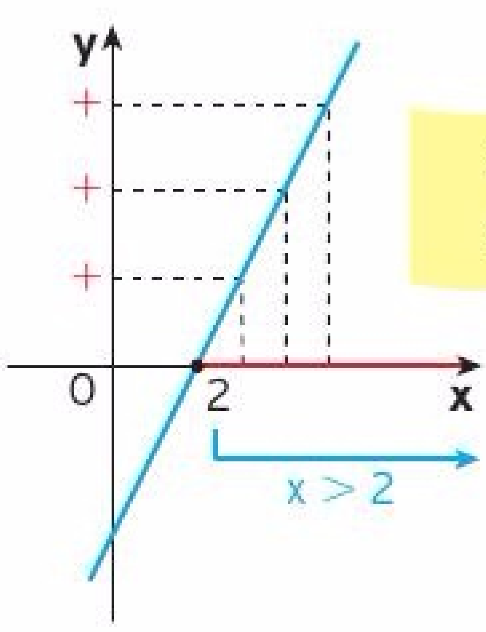


- Qual é o sinal de **y**, quando se atribui a **x** um número real maior que 2? E um valor menor que 2? Para $x > 2$, **y** tem sinal positivo e, para $x < 2$, **y** tem sinal negativo.

É importante saber representar graficamente uma função, pois analisando seu gráfico podemos chegar a conclusões sobre o seu sinal.

Na situação dada, para os valores de **x** maiores que 2, a parte da reta que representa a função está **acima** do eixo **x**. Portanto, as ordenadas correspondentes a esses pontos (**y**) têm sinal positivo, ou seja, **y** é maior que zero.

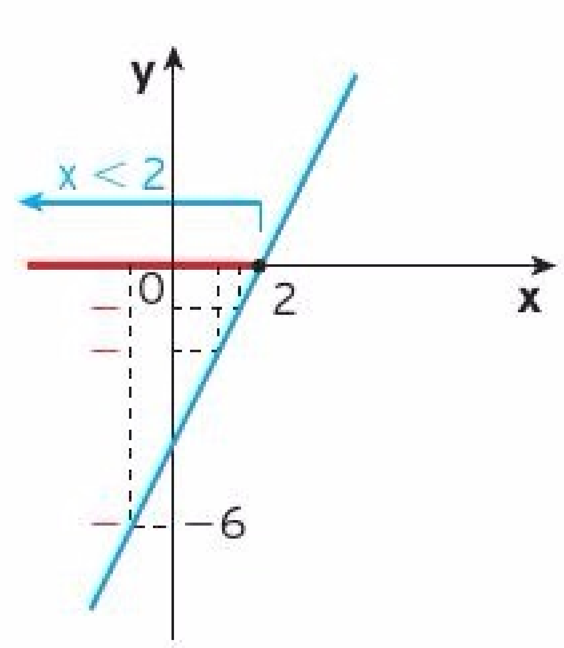
Para $x > 2$, tem-se $y > 0$.



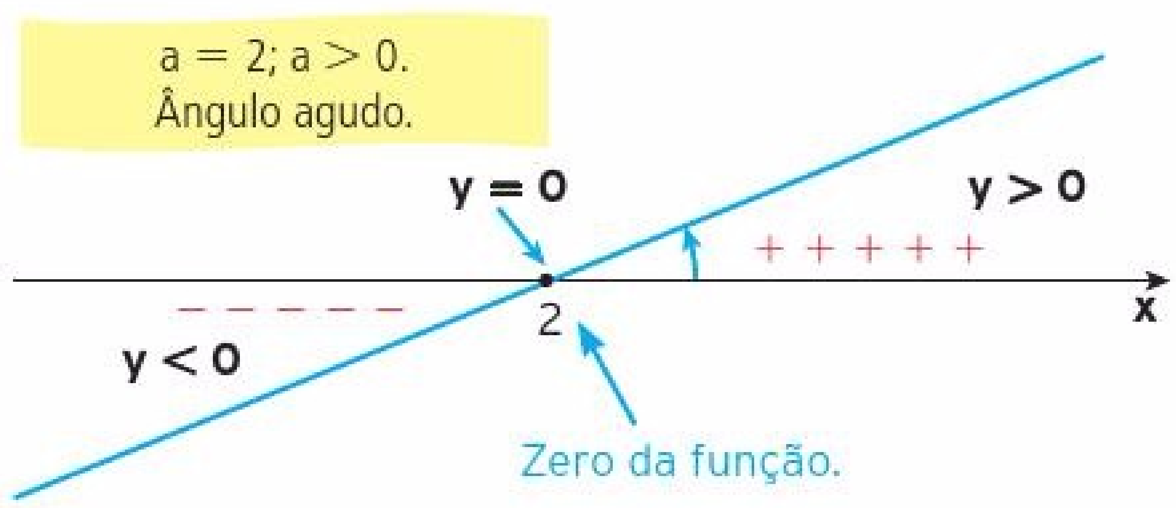
2 é o zero da função.

Para os valores de **x** menores que 2, a parte da reta que representa a função está **abaixo** do eixo **x**. Portanto, as ordenadas correspondentes a esses pontos (**y**) têm sinal negativo, ou seja, **y** é menor que zero.

Para $x < 2$, tem-se $y < 0$.



Na prática podemos estudar os sinais de **y** $=$ **2x** $-$ **4** determinando o zero da função, fazendo um esboço gráfico e observando o sinal de **a** para verificar que tipo de ângulo a reta que representa essa função forma com o eixo **x**, no sentido anti-horário.



Para a função **y** $=$ **2x** $-$ **4**, temos:

- para $x > 2$ —— $y > 0$;
- para $x < 2$ —— $y < 0$;
- para $x = 2$ —— $y = 0$.

Outro exemplo:

Considere a função de 1º grau definida pela fórmula ao lado.

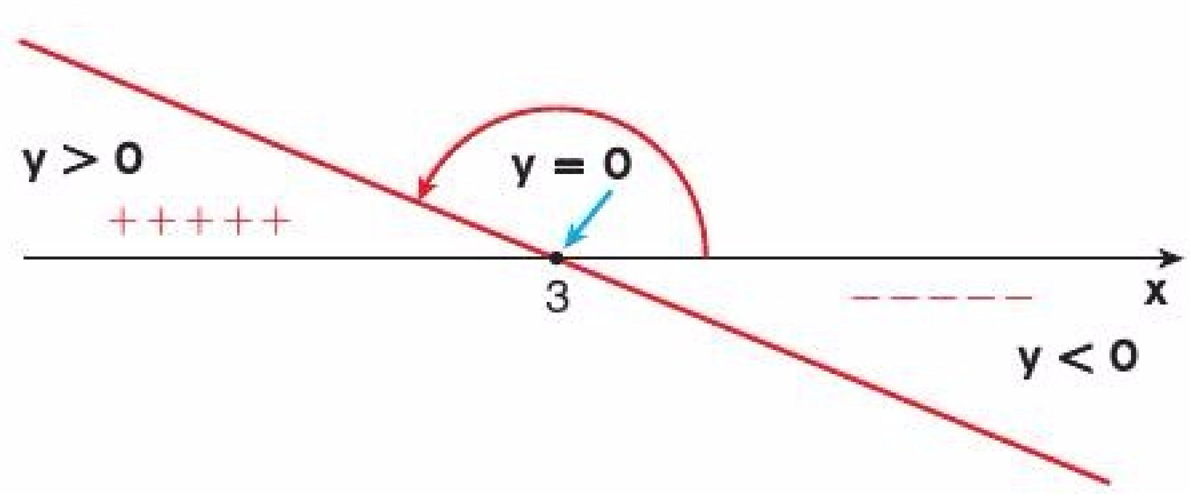
$$\mathbf{y = -x + 3}$$

Para que valores de **x** se tem valores de **y** positivos? E valores de **y** negativos?

Construímos o esboço gráfico da situação dada e o analisamos.

zero da função: $y = 0$ —— $-x + 3 = 0$ —— $x = 3$

sinal de **a**: $a = -1$ —— $a < 0$ —— ângulo obtuso.

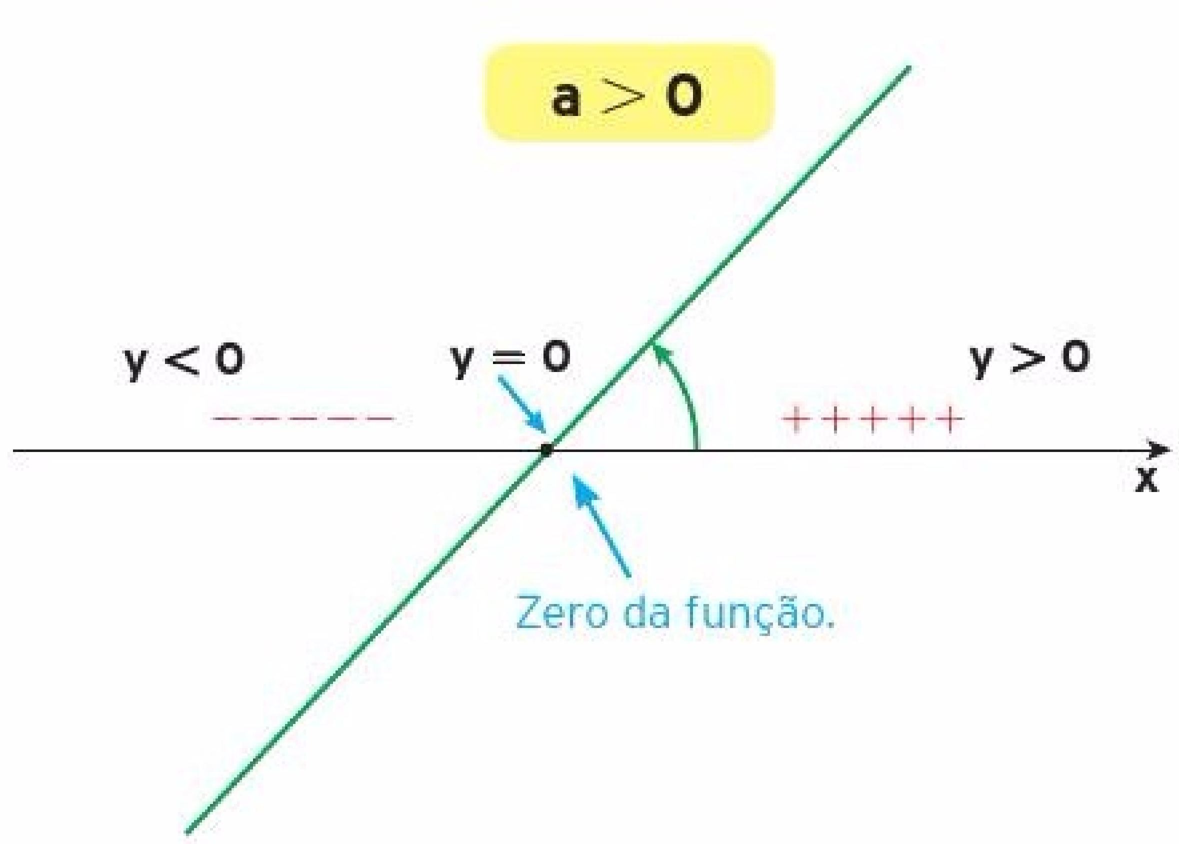


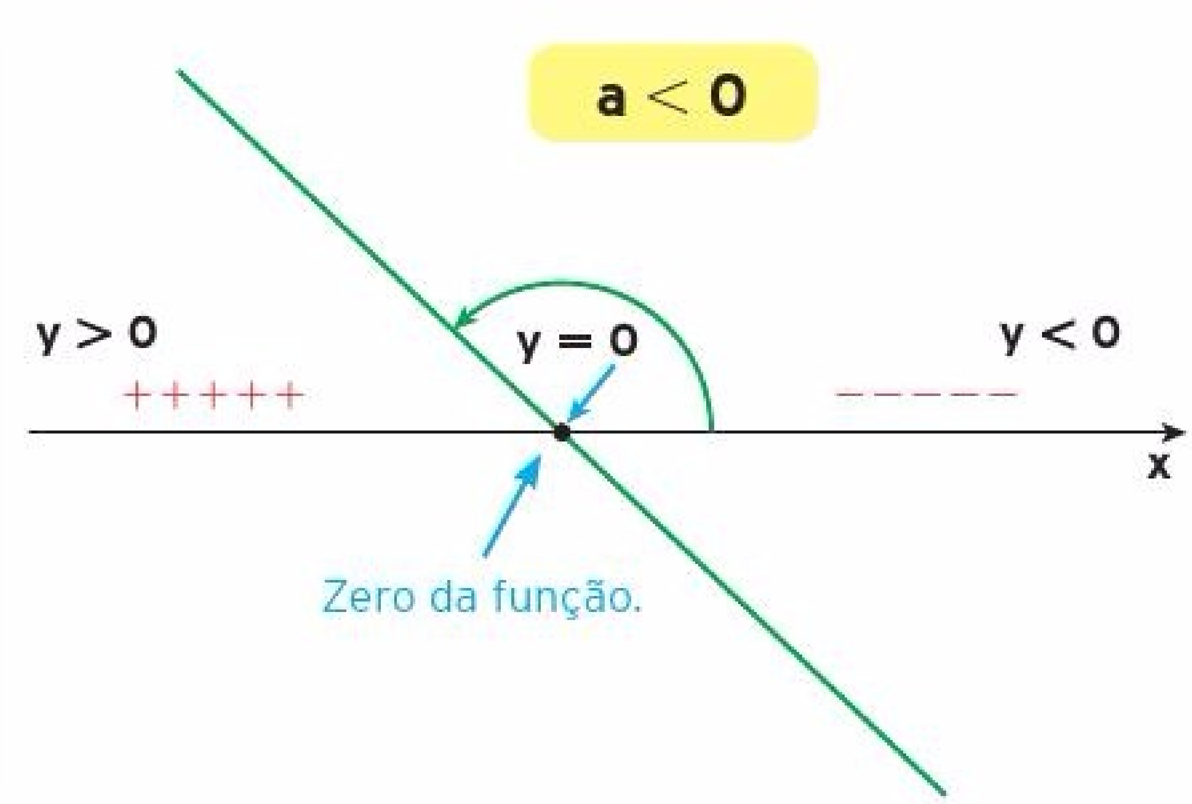
Para a função **y** $= -$ **x** $+$ **3**, temos:

- para $x > 3$ —— $y < 0$;
- para $x < 3$ —— $y > 0$;
- para $x = 3$ —— $y = 0$.

Portanto, os valores de **y** são positivos para $x < 3$ e negativos para $x > 3$.

De modo geral:

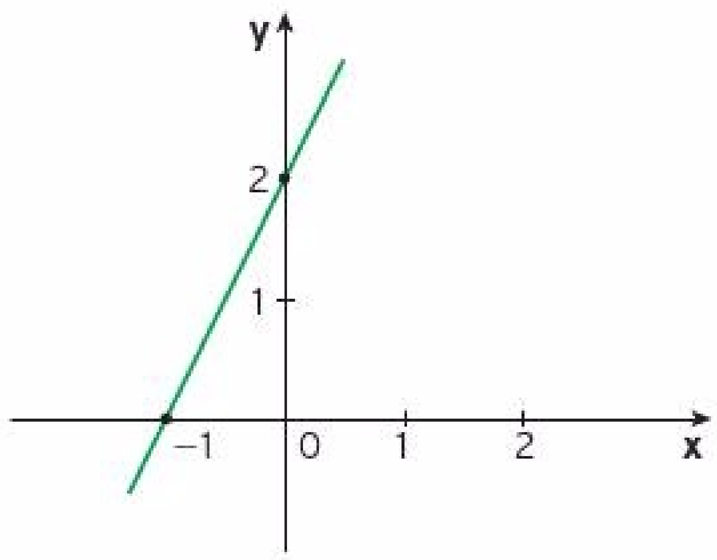




Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

25. Este gráfico representa uma função cujas variáveis são **x** e **y**. Observe-o e responda:



a) Para que valores de **x** tem-se $y > 0$? $x > -1$

b) Para que valores de **x** tem-se $y = 0$? $x = -1$

c) Para que valores de **x** tem-se $y < 0$? $x < -1$

26. Analise os sinais destas funções:

a) $y = 4x - 10$

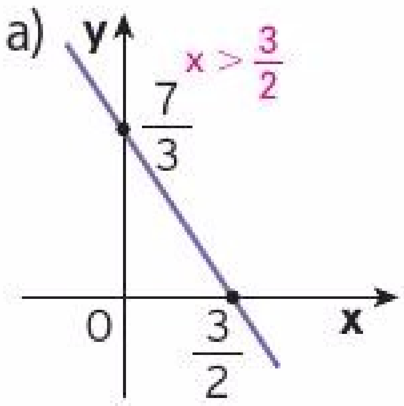
b) $y = -9x + 3$

a) Para $x > \frac{5}{2}$, $y > 0$; para $x < \frac{5}{2}$, $y < 0$; e para $x = \frac{5}{2}$, $y = 0$

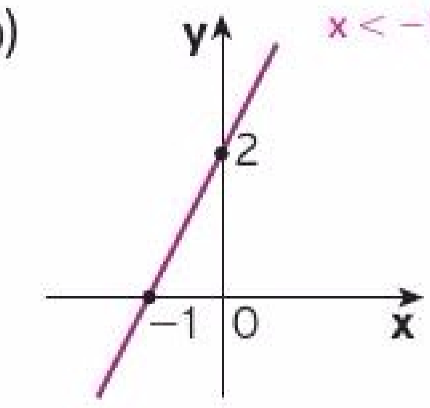
b) Para $x > \frac{1}{3}$, $y < 0$; para $x < \frac{1}{3}$, $y > 0$; e para $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$

27. Os gráficos representam funções de 1º grau cujas variáveis são **x** e **y**. Determine para que valores de **x** os valores de **y** são negativos.

a)



b)



28. Para que valores de **x** os valores de **y** da função definida por $y = 18x - 45$ são positivos? $x > \frac{5}{2}$

29. Para que valores de **x** a função dada por

$y = -6x - \frac{3}{4}$ tem $y > 0$? $x < -\frac{1}{8}$

30. Para que valor de **x** a função dada por

$y = -8x - 2(x - 1)$ se anula? $\frac{1}{5}$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

31. Para que valores de **x** a função de 1º grau definida por $y = -10x - 12$ tem valores de **y** positivos? $x < -\frac{6}{5}$

32. Analise os sinais das funções:

a) $3y + 12 = 6x - 1$

b) $6y - 8 = 10 - 9x$

a) $y = 0$ para $x = \frac{13}{6}$; $y > 0$ para $x > \frac{13}{6}$; $y < 0$ para $x < \frac{13}{6}$.

b) $y = 0$ para $x = 2$; $y > 0$ para $x < 2$; $y < 0$ para $x > 2$.

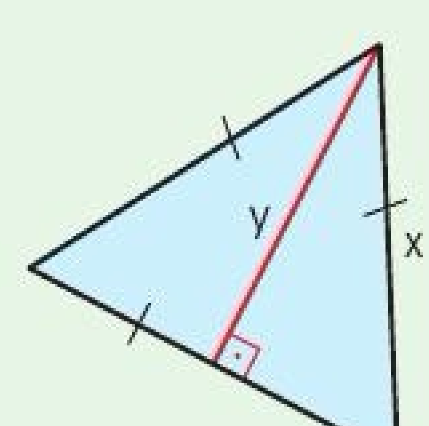
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e façam o que se pede.

Em um triângulo equilátero, a medida de **y** de qualquer altura relativa a um lado depende da medida **x** desse lado, de acordo com a fórmula $y = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

- Por essa função, qual é o valor de **y** correspondente a um lado com 46 cm? Qual é a medida da altura para um lado com $\sqrt{3}$ cm? $23\sqrt{3}$ cm; $\frac{3}{2}$ cm
- Nessa função, qual é a medida de **x** para a qual $y = 21$? $14\sqrt{3}$ cm
- Escolham duas medidas quaisquer para **x** e determinem os valores correspondentes de **y** nessa função. $x = 12\sqrt{3}$ cm e $y = 18$ cm; $x = 10$ cm e $y = 5\sqrt{3}$ cm. Há outras respostas possíveis.



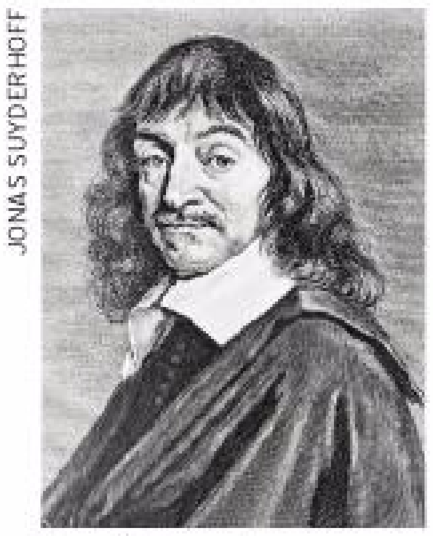
- Nessa situação, seria possível ter $y = -18$? Por quê? Não, pois **x** e **y** representam medidas. Portanto, são números positivos.

Leitura

O casamento da Álgebra com a Geometria…

... um acontecimento importante na Matemática!

No século XVII a Álgebra e a Geometria foram relacionadas pelos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) em um importante método que permite a localização de pontos em um plano: o sistema de coordenadas retangulares, também chamado, em homenagem a Descartes, de coordenadas cartesianas.


JONAS SUYDERHOFF

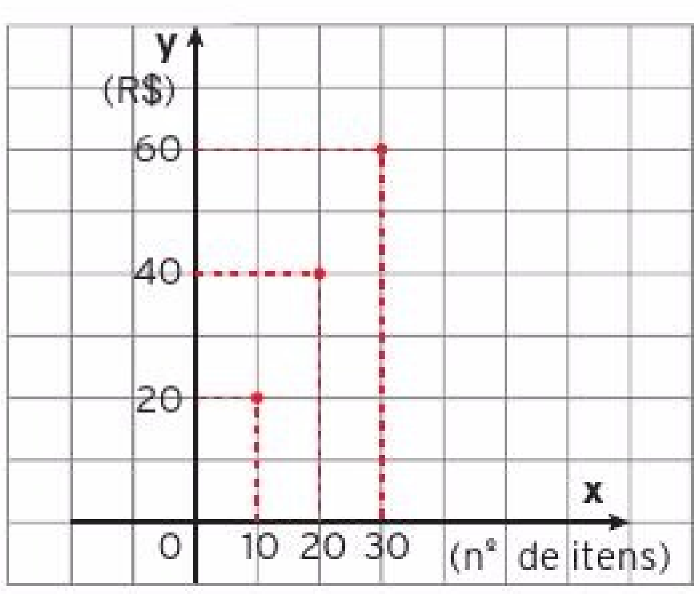
René Descartes, matemático e filósofo francês.


HERITAGE IMAGES/DIOMEDIA

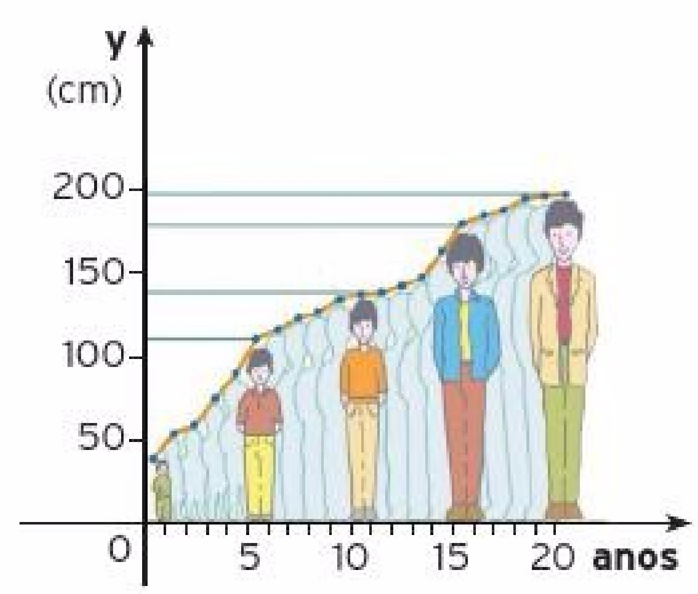
Pierre Fermat, matemático e cientista francês.

Com esse método, viu-se que era possível desenhar no plano figuras geométricas que correspondessem a equações algébricas. Essas representações gráficas em um sistema de coordenadas cartesianas são formadas por pontos isolados ou por pontos que dão origem a diversos tipos de curva.

Preço × quantidades de itens



Acompanhando o crescimento



A união da Álgebra com a Geometria abriu um novo campo de estudos na Matemática: a Geometria Analítica. O surgimento desse ramo propiciou grandes avanços nas ciências e na Engenharia.

Revisão cumulativa e testes

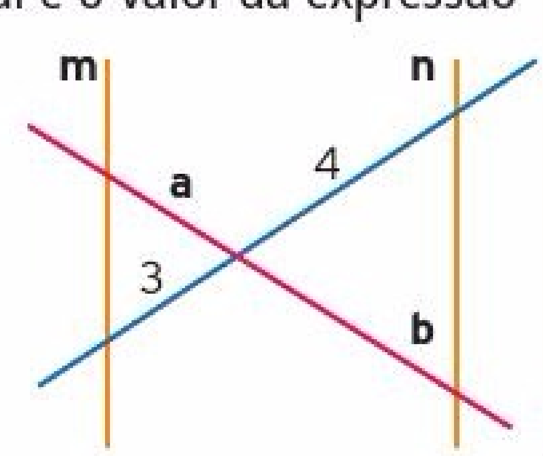
FAÇA NO CADERNO

1. Considere a equação de 2º grau $kx^2 + (2k + 1)x + k + 2 = 0$, com incógnita **x** e $k \neq 0$.

a) Para que valores de **k** essa equação terá raízes reais? $k \leqslant \frac{1}{4}$

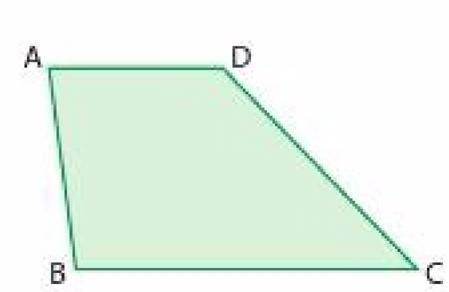
b) Escolha dois valores de **k** para os quais a equação terá raízes reais. $k = -1, k = 0$ Há outras respostas possíveis.

2. As retas **m** e **n** na figura são paralelas. Sabendo-se que $b - a = 6$, qual é o valor da expressão $\frac{a}{2} - 3b$? -63



Medidas indicadas em **cm**.

3. Os prolongamentos dos lados não paralelos de um trapézio ABCD encontram-se em um ponto **E**. Se med $\overline{AE} = 6$ cm, med $\overline{ED} = 9$ cm, med $\overline{AD} = 4$ cm e med $\overline{BC} = 10$ cm, qual é o perímetro do trapézio ABCD? Observe a representação abaixo. 36,5 cm



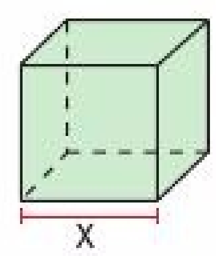
4. Um estacionamento de veículos cobra R$ 8,00 pela primeira hora e mais R$ 2,00 por hora, a partir da segunda hora. O preço **p** que se paga para um carro permanecer no estacionamento depende do tempo **t** que ele ficará lá.

a) Escreva uma fórmula que expresse o valor de **p** em função do tempo **t**. $p = 8 + 2t, t > 0$

b) Qual é o valor que pagará um carro que permanecer três horas? R$ 14,00

c) Uma pessoa pagou o estacionamento com uma nota de R$ 20,00 e recebeu de troco R$ 2,00. Quanto tempo seu carro ficou estacionado? Cinco horas.

5. Em um cubo, **x** representa a medida das arestas e **y**, o seu volume. Os valores de **x** e os correspondentes valores de **y** definem uma função.



a) Escreva uma fórmula que expresse essa função. $y = x^3$

b) Qual é o valor de **y** correspondente a $x = 5$? 125

c) Qual é o valor de **x** para o qual se tem $y = 343$? 7

d) Qual é o volume de um cubo desse tipo cuja aresta mede 1,2 cm? 1,728 cm³

6. Em uma função definida pela equação $\mathbf{y - 13 = \frac{2}{3}x - 5}$, para que valores de **x** tem-se $y < 0$? $x < -12$

7. O espaço percorrido por um móvel, em velocidade constante, é dado pela fórmula $s = 6 + 3t$, na qual **s** é o espaço percorrido em metros, e **t** é o tempo em segundos. Construa o gráfico que representa esse movimento.

8. Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede 14 cm. Por um ponto **M** de $\overline{AB}$, situado a 6 cm do vértice **A**, traça-se uma reta paralela a $\overline{BC}$ que encontra $\overline{AC}$ no ponto **N**. Se med $\overline{NC} = 9$ cm, então $\overline{AC}$ mede: c

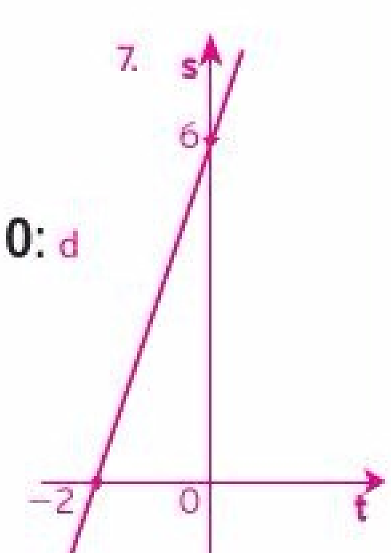
a) 7 cm

b) 23 cm

c) 15,75 cm

d) 21 cm

7.



9. A equação $\mathbf{2x^4 + 3x^2 + 1 = 0}$: d

a) tem quatro raízes reais.

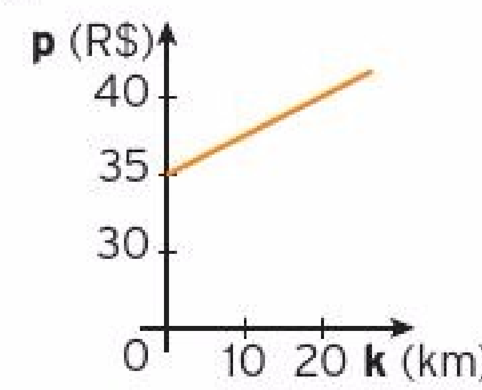
b) tem duas raízes reais.

c) tem uma raiz real.

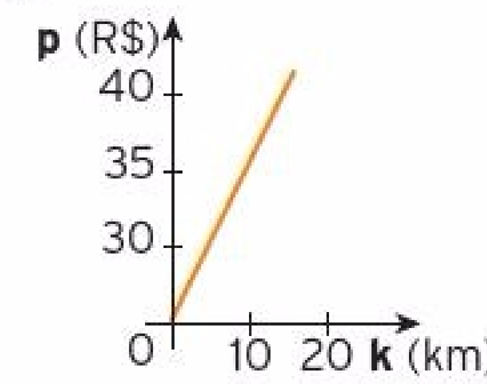
d) não tem raiz real.

10. Para alugar um carro, uma locadora cobra uma taxa fixa acrescida de uma taxa que varia de acordo com o número de quilômetros rodados. O preço **p** do aluguel, em reais, em função do número de quilômetros rodados **k** é expresso pela equação: $\mathbf{p = \frac{k}{2} + 30}$. O gráfico cartesiano que representa essa função é: d

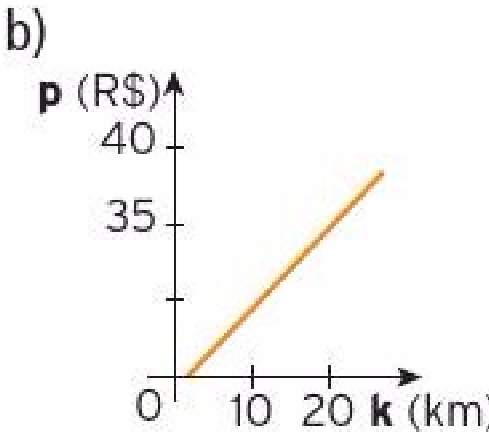
a)



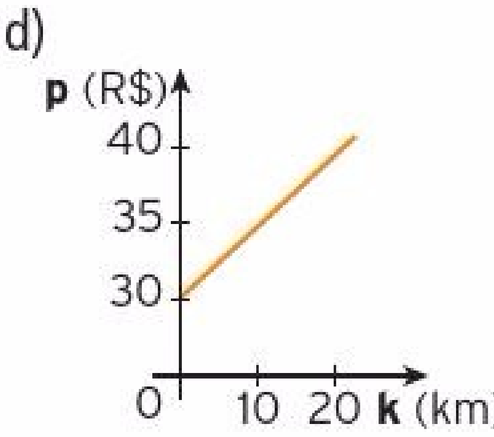
c)



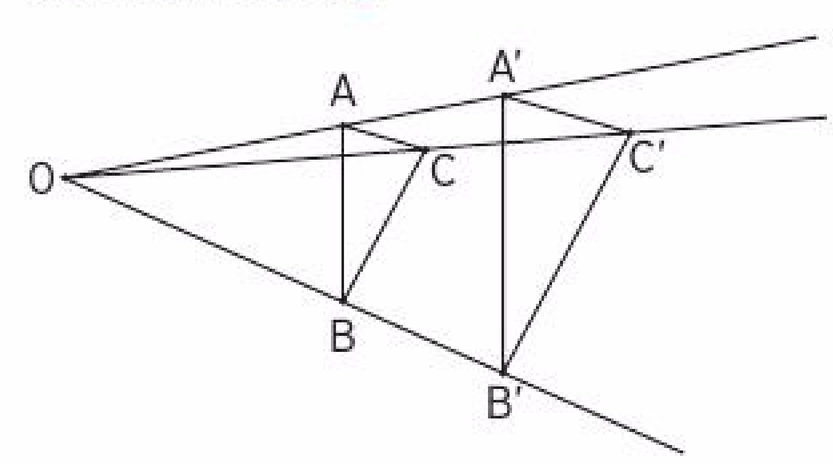
b)



d)



11. (Prova Brasil – modelo) Ampliando-se o triângulo ABC, obtém-se um novo triângulo A'B'C', em que cada lado é o dobro do seu correspondente em ABC. d



Em figuras ampliadas ou reduzidas, os elementos que conservam a mesma medida são:

a) as áreas.

b) os perímetros.

c) os lados.

d) os ângulos.

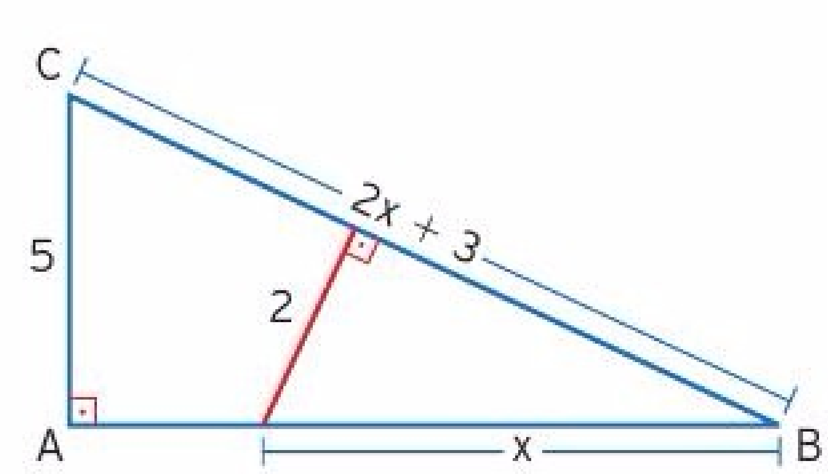
12. Na figura, o $\triangle ABC$ é retângulo em $\hat{A}$ e $\overline{BC} = 2x + 3$. O valor de **x** é: b

a) 0,65

b) 6

c) 0,24

d) 6,5



UNIDADE 10

Função de 2º grau

DAVID NOTON/ALAMY/LATINSTOCK

As funções polinomiais de 2º grau ou funções quadráticas estão presentes em várias situações do dia a dia como, por exemplo, no lançamento de objetos com certa inclinação em relação ao solo, como mostra a fotografia.

A bola sobe até uma altura máxima e começa a descer. Nesse movimento, a trajetória percorrida pela bola é uma curva chamada parábola.

Nesta unidade...

1. Função de 2º grau
2. Representação gráfica de uma função de 2º grau
3. Estudando parábolas
4. Função de 2º grau e o estudo dos sinais
5. Inequação de 2º grau

Uma antena parabólica é formada por uma superfície parabólica e um receptor de ondas colocado no foco dessa superfície. Quando a antena é orientada em direção a um objeto distante, como um satélite, por exemplo, todas as ondas que chegam à sua superfície são refletidas e se concentram nesse foco.

Conta-se que, há mais de 2 mil anos, Arquimedes conseguiu que as tropas de Siracusa, sua cidade natal, vencessem os romanos ateando fogo em suas embarcações.

O sábio grego construiu vários espelhos parabólicos e direcionou cada um deles a um barco inimigo. Quando a luz do Sol incidia sobre os espelhos, ela era direcionada e concentrada nos barcos inimigos, que, após certo tempo, começavam a incendiar.

Ainda hoje, além dos espelhos parabólicos, as superfícies parabólicas são utilizadas na construção de equipamentos, como lentes e faróis de carros.

Fonte: Construindo sempre Matemática. Livro III. São Paulo: Proem, 2002.

DYNAMIC GRAPHICS/KEYSTONE

Antena parabólica.

O que você já sabe?

- Um jogador de futebol dá um chute, bem forte, em uma bola com certa inclinação em relação ao solo. Como é denominada a curva que representa a trajetória da bola? Parábola.
- Mencione duas aplicações das propriedades refletoras das superfícies parabólicas.
Antenas parabólicas, espelhos parabólicos, faróis de automóveis, lanternas. Há outras respostas possíveis.

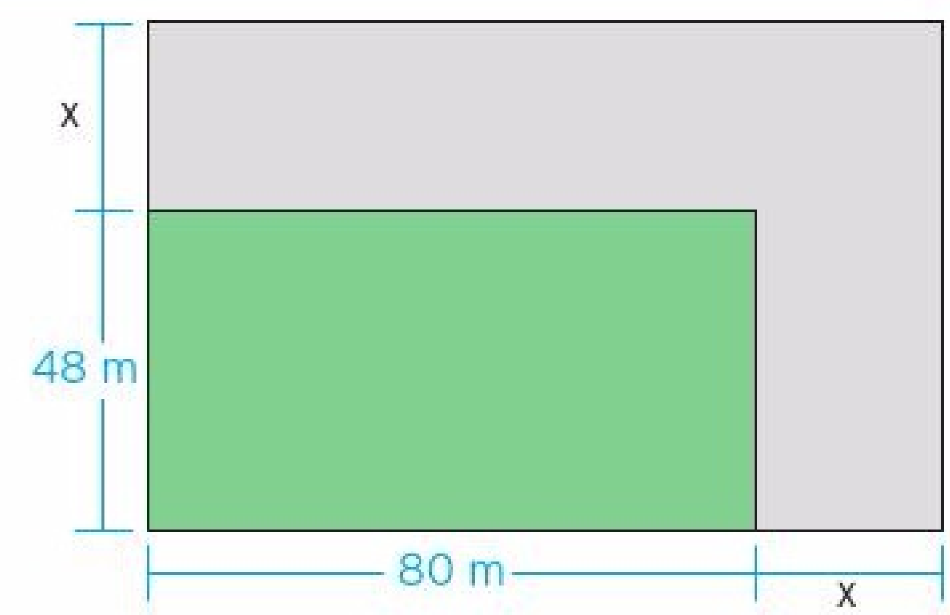
1 Função de 2º grau

Fórmula da função de 2º grau ou função quadrática

Para refletir e responder

Uma quadra de esportes de um clube mede 48 m de largura e 80 m de comprimento.

O diretor do clube deseja aumentar a área dessa quadra, acrescentando faixas de mesma largura a um dos lados e aos fundos, de modo a conservar o formato retangular, como representado na figura ao lado.



- Escreva uma fórmula para a nova área **y** em função da medida **x**. $x^2 + 128x + 3840$

Nessa situação, a nova área depende das novas medidas dos lados da quadra.

x — medida da largura das faixas.
y — medida da nova área.

$$y = (x + 48) \cdot (x + 80)$$
$$y = x^2 + 80x + 48x + 3840$$
$$y = x^2 + 128x + 3\,840$$

Nessa fórmula, para cada valor real positivo de **x**, temos um único valor para **y**. Assim, **x** e **y** são as **variáveis** e dizemos que **y** é **função** de **x**.

A fórmula $\mathbf{y = x^2 + 128x + 3840}$ é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com coeficientes $a = 1$, $b = 128$ e $c = 3840$, e define uma **função polinomial de 2º grau** ou **função quadrática**.

Função polinomial de 2º grau, ou **função quadrática**, é toda função definida por uma fórmula do tipo: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$**, com** $\mathbf{a \neq 0}$.

Nessa fórmula:

- **a**, **b** e **c** são números reais;
- **a** e **b** são os **coeficientes** dos termos $\mathbf{x^2}$ e **x**, respectivamente;
- **c** é o **termo independente** de **x** ou **termo constante**;
- **x** é a **variável independente**;
- **y** é a **variável dependente**.

Vamos combinar:
Quando não houver referências sobre a variável independente, vamos considerar que ela representa qualquer número real, e isso significa que o domínio da função é o conjunto dos números reais.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Qual é o valor de **y** correspondente a $x = \frac{1}{2}$ na função $y = -40x^2 + 18x$? -1

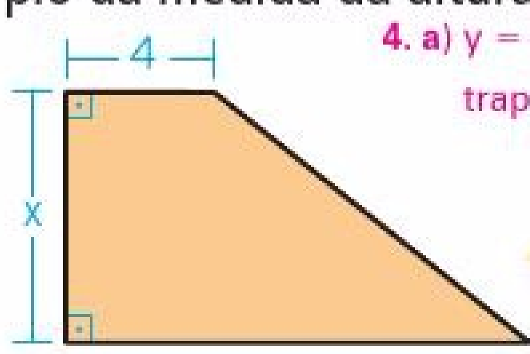
2. Quais são os valores de **x** para os quais $y = -13$ na função $y = 2x^2 + 5x - 13$? $-\frac{5}{2}$ e 0

3. Considere a função quadrática definida por $y = 5x^2 - 6x + 1$.

Atribua um valor real qualquer a **x** e determine o valor de **y** correspondente a ele nessa função. $x = 0$; $y = 1$. Há outras respostas possíveis.

4. Em um trapézio retângulo, a base menor mede 4 cm e a medida da base maior é o triplo da medida da altura.

4. a) $y = \frac{3x^2}{2} + 2x$, sendo **y** a área do trapézio e **x** a medida da altura.



Medidas indicadas em cm.

a) Escreva uma fórmula que represente a área desse trapézio, em função de sua altura.

b) Explique por que essa fórmula define uma função de 2º grau. Porque é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a = \frac{3}{2} \neq 0$.

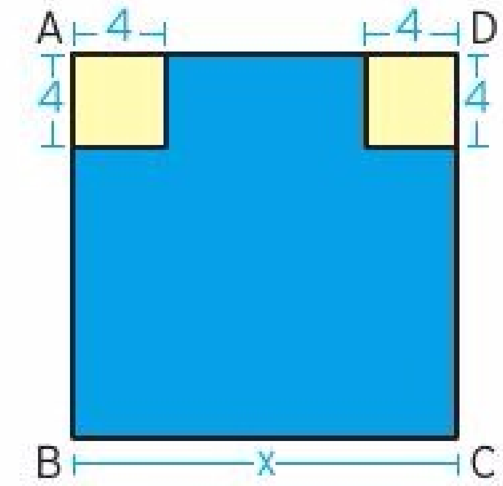
c) Qual é o domínio dessa função? O conjunto dos números reais positivos.

5. Considere a sentença $y - (x + 2)^2 = 2x - 8$.

a) Transforme essa sentença em uma fórmula do tipo $y = ax^2 + bx + c$. $y = x^2 + 6x - 4$

b) Existem dois números reais que podem ser atribuídos a **x**, cujo valor correspondente de **y** é igual a 3. Quais são esses números? -7 e 1

6. Nesta figura, ABCD é um quadrado com dois cantos amarelos também quadrados. Mantendo-se a área dos cantos amarelos, a área da figura pintada de azul dependerá da medida do lado do quadrado ABCD.



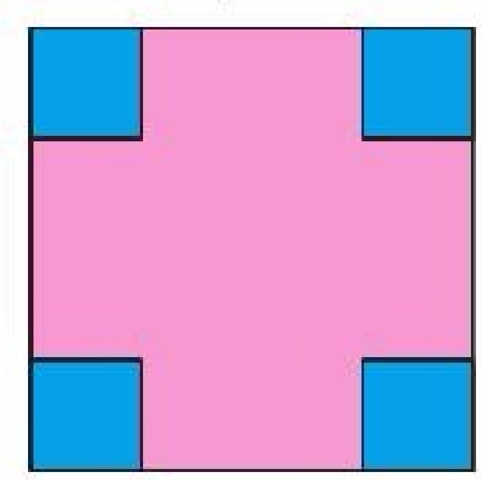
Medidas indicadas em cm.

a) Escreva uma fórmula para a área da região pintada de azul em função da medida do lado do quadrado ABCD. $y = x^2 - 32$

b) Qual será a área da região pintada de azul quando a medida do lado do quadrado ABCD for de 10 cm? 68 cm^2

c) Qual será a medida do lado do quadrado ABCD quando a área em azul for de 112 cm^2? 12 cm

7. Em cada um dos cantos de um quadrado de lados que medem 8 m foram pintados 4 quadrados azuis com **x** m de lado. A região restante, que tinha forma de cruz, foi pintada de rosa.



a) Representando a área da cruz por **y**, qual é a fórmula da área dessa cruz, em m^2? $y = -4x^2 + 64$

b) A área **y** é uma função do 2º grau? Sim.

Desafio

FAÇA NO CADERNO

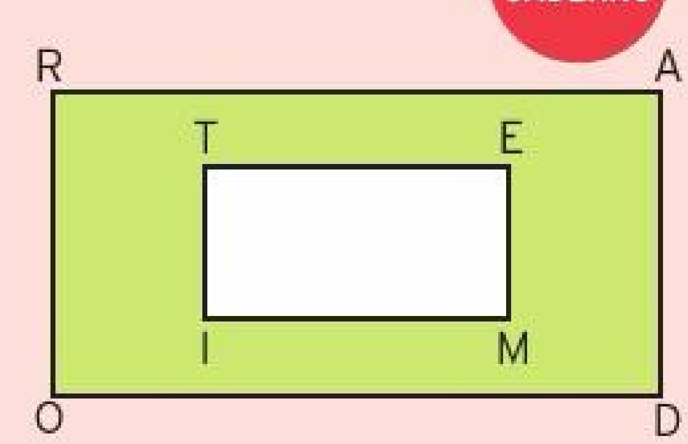
Região verde

No retângulo TIME, a medida de $\overline{IM}$ é o dobro da medida de $\overline{TI}$.

A medida de $\overline{TI}$ é a metade da medida de $\overline{AD}$.

No retângulo RODA, a medida de $\overline{RO}$ é a metade da medida de $\overline{OD}$.

A área da região pintada de verde depende da medida do lado $\overline{TI}$.



- Escreva uma fórmula que represente a área da região pintada de verde em função da medida do lado $\overline{TI}$. $y = 6x^2$. Há outras respostas possíveis.
- Quais serão as medidas dos lados de RODA e TIME quando a área da região pintada de verde for de 150 m^2? RODA: 20 m e 10 m; TIME: 10 m e 5 m

2 Representação gráfica de uma função de 2º grau

Na construção de gráficos de uma função quadrática, peça aos alunos que façam apenas o esboço, tendo como base os pontos relevantes. Para mais detalhes, leia comentários no **Manual do Professor – Orientações Didáticas**.

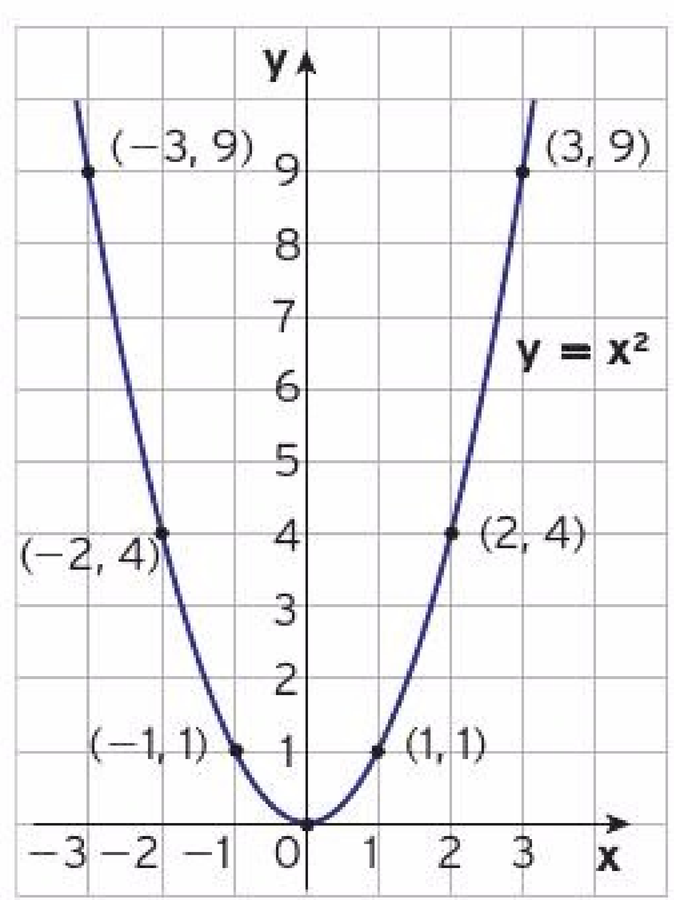
Desenhando parábola

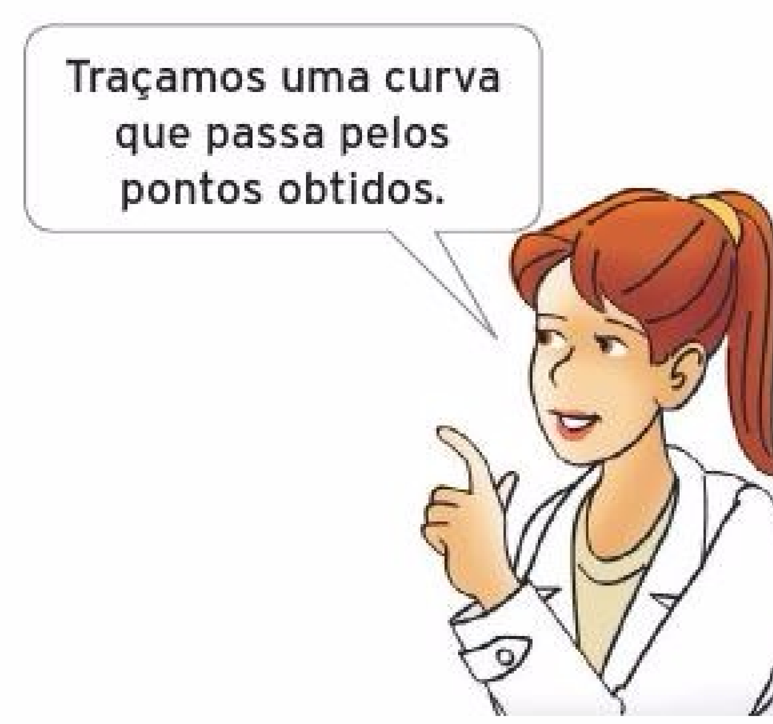
O gráfico de uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, em que **x** representa um número real, é uma curva denominada **parábola**.

Exemplo: vamos construir o gráfico de $\mathbf{y = x^2}$.

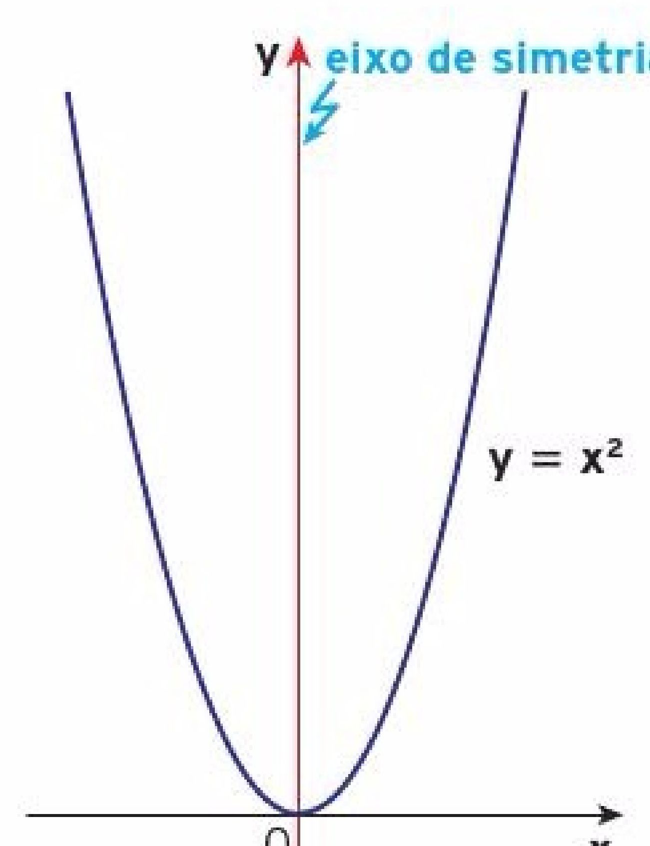
Para construir uma tabela, podemos escolher alguns valores reais para **x** e determinar os valores correspondentes de **y**. Assim, obtemos pares ordenados (x, y), que representam pontos da parábola. Em seguida, representamos esses pares ordenados por pontos em um plano cartesiano.

x	x^2	$y = x^2$	(x, y)
−3	$(-3)^2$	9	(−3, 9)
−2	$(-2)^2$	4	(−2, 4)
−1	$(-1)^2$	1	(−1, 1)
0	0^2	0	(0, 0)
1	1^2	1	(1, 1)
2	2^2	4	(2, 4)
3	3^2	9	(3, 9)





ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE



Dizemos que essa parábola tem **concavidade** voltada **para cima**.

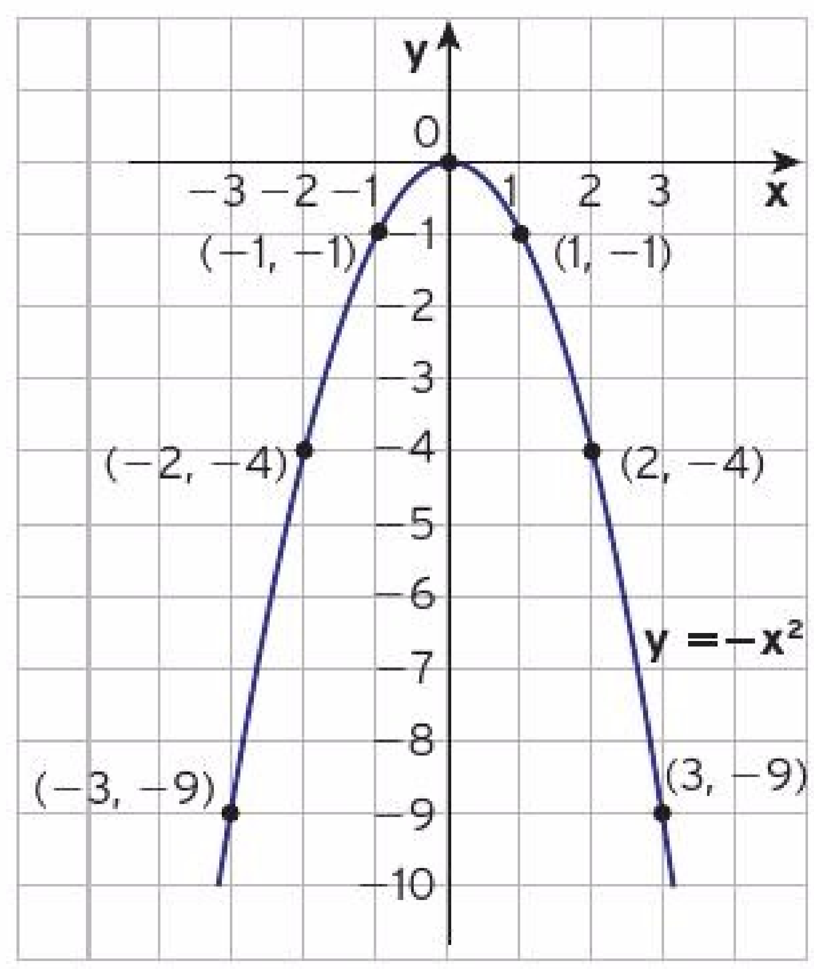
Note que em $y = x^2$ temos $a = 1$, ou seja, $a > 0$ (positivo).

Se dobrarmos, pelo eixo **y**, o papel em que o gráfico foi desenhado, veremos que a parte esquerda desse gráfico se sobrepõe à parte direita. Desse modo, verificamos graficamente a existência de um **eixo de simetria** na parábola, que, no caso da função $y = x^2$, coincide com o eixo das ordenadas **y**.

Outro exemplo:

De fato, organizando uma tabela de valores e representando graficamente os pares ordenados obtidos, podemos constatar que é o gráfico anterior "virado para baixo". Observe:

x	$-x^2$	$y = -x^2$	(x, y)
-3	$-(-3)^2$	-9	$(-3, -9)$
-2	$-(-2)^2$	-4	$(-2, -4)$
-1	$-(-1)^2$	-1	$(-1, -1)$
0	-0^2	0	(0, 0)
1	-1^2	-1	$(1, -1)$
2	-2^2	-4	$(2, -4)$
3	-3^2	-9	$(3, -9)$



Esta parábola tem concavidade voltada para baixo.

De modo geral:

A concavidade de uma parábola que representa uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, depende do sinal de **a**.

a > 0 —— **concavidade** voltada **para cima**

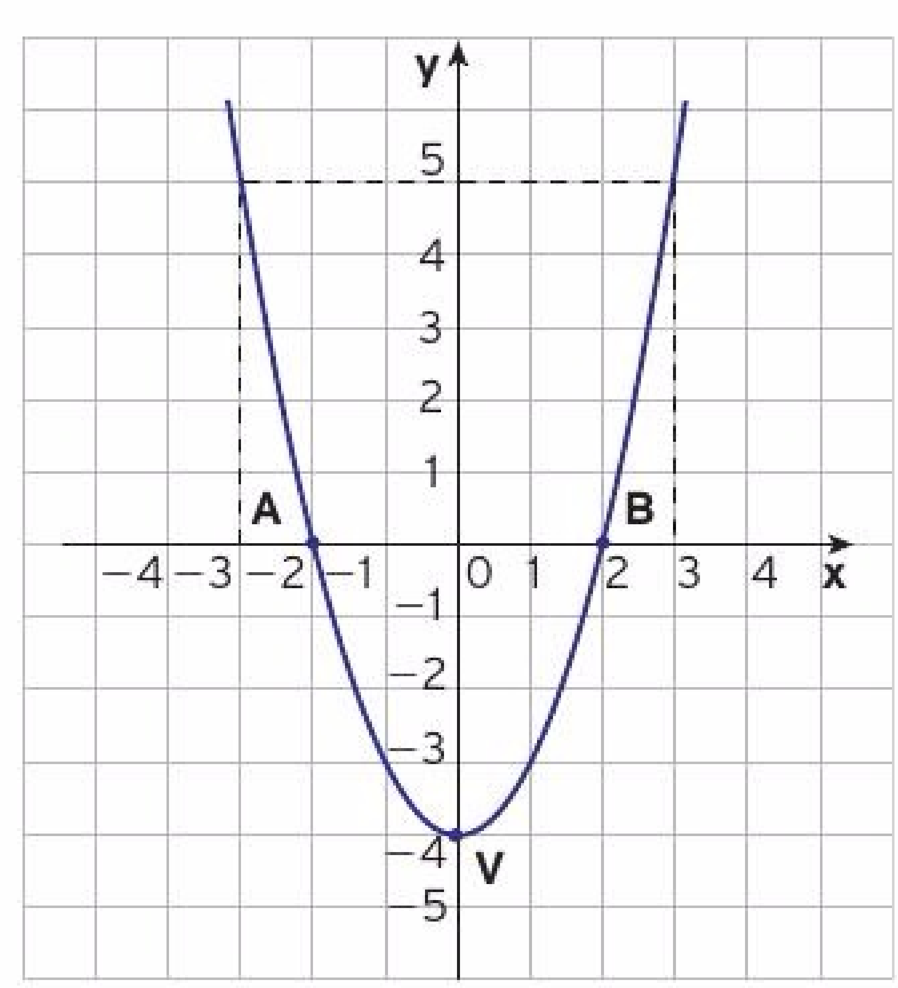
a < 0 —— **concavidade** voltada **para baixo**

Zeros de uma função de 2º grau

Observe os pontos A(−2,0) e B(2,0) destacados na parábola que representa a função $\mathbf{y = x^2 - 4}$. Esses são os pontos de intersecção da parábola com o eixo **x**. Nesses pontos, o valor de **y** é **zero**, ou seja, $x^2 - 4 = 0$.

$x^2 - 4 = 0$ é uma **equação de 2º grau** cujas raízes são **−2** e **2**.

Dizemos que $x = -2$ e $x = 2$ são os **zeros** da função definida por $\mathbf{y = x^2 - 4}$.



Se a função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem zeros, então os pares ordenados formados por esses zeros e pelos valores correspondentes de **y** são representados graficamente pelos pontos de intersecção da parábola com o eixo **x**.

Nesses pontos, os valores de **y** correspondentes aos valores de **x** são iguais a zero, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$.

Zeros de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, são os valores de **x** para os quais $\mathbf{y = 0}$, ou seja, são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Vértice de uma parábola

O **ponto V** do segundo gráfico da página anterior é o **vértice** da parábola.

Vamos anotar a abscissa do vértice de uma parábola que representa graficamente a função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, por $\mathbf{x_v}$ e a ordenada por $\mathbf{y_v}$.

É possível calcular a abscissa do vértice pela fórmula $\mathbf{x_v} = \dfrac{\mathbf{-b}}{\mathbf{2a}}$.

No caso da função $y = x^2 - 4$, $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$.

Calculamos a abscissa do vértice da parábola que representa graficamente essa função, atribuindo a **a** e **b** na fórmula os valores correspondentes na função:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} \text{ —— } \mathbf{x_v = 0}$$

Atribuindo a **x** o valor **0** na fórmula $y = x^2 - 4$, temos a ordenada (y_v) do vértice da parábola.

$$y_v = 0^2 - 4 = 0 - 4 \text{ —— } \mathbf{y_v = -4}$$

Assim, **0** e **−4** são as coordenadas do vértice V (0, −4) dessa parábola.

O vértice é um ponto importante de uma parábola e pertence ao seu eixo de simetria. Ele é um dos pontos de referência para se desenhar uma parábola.

Um pouco mais sobre construção de parábolas

Na construção do gráfico de uma função de 2º grau, é conveniente organizar a escolha de alguns pontos da parábola. Observe, nos exemplos a seguir, algumas escolhas que podem auxiliar na elaboração de um gráfico.

- Represente graficamente a função $\mathbf{y = x^2 - 2x}$.
  - ✓ Determinamos as coordenadas do vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} \text{ —— } x_v = 1$$
$$y_v = x^2 - 2x \text{ —— } y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 \text{ —— } y_v = -1$$
$$\Rightarrow \mathbf{V\ (1, -1)}$$

  - ✓ Determinamos pontos de intersecção da parábola com o eixo x, caso existam. Lembre-se de que a abscissa desses pontos são os zeros da função, ou seja, os pontos nos quais as suas ordenadas são iguais a zero ($y = 0$).

$$x^2 - 2x = 0 \text{ —— } x \cdot (x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ —— } \mathbf{A\ (0, 0)} \\ \text{ou} \\ x - 2 = 0 \text{ —— } \mathbf{B\ (2, 0)} \end{cases}$$

✓ Escolhemos para **x** alguns valores menores que $\mathbf{x_V}$ e outros maiores que $\mathbf{x_V}$.

$x = -1$ —— $y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$ —— $(-1, 3)$

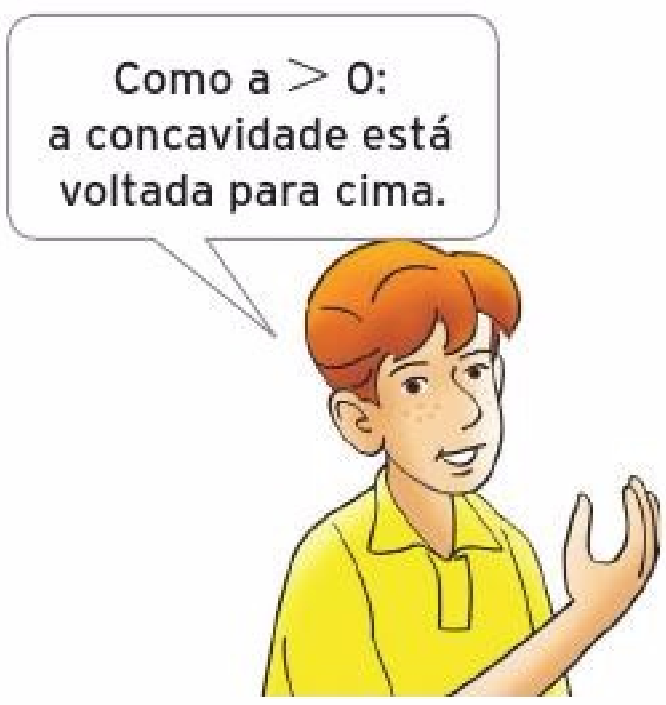
$x = -2$ —— $y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 4 + 4 = 8$ —— $(-2, 8)$

$x = 3$ —— $y = 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$ —— $(3, 3)$

$x = 4$ —— $y = 4^2 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8$ —— $(4, 8)$

Essas são as coordenadas dos pontos.

✓ Organizamos esses dados em uma tabela. Representamos os pares ordenados por pontos no plano cartesiano e desenhamos a parábola, unindo os pontos correspondentes a eles.



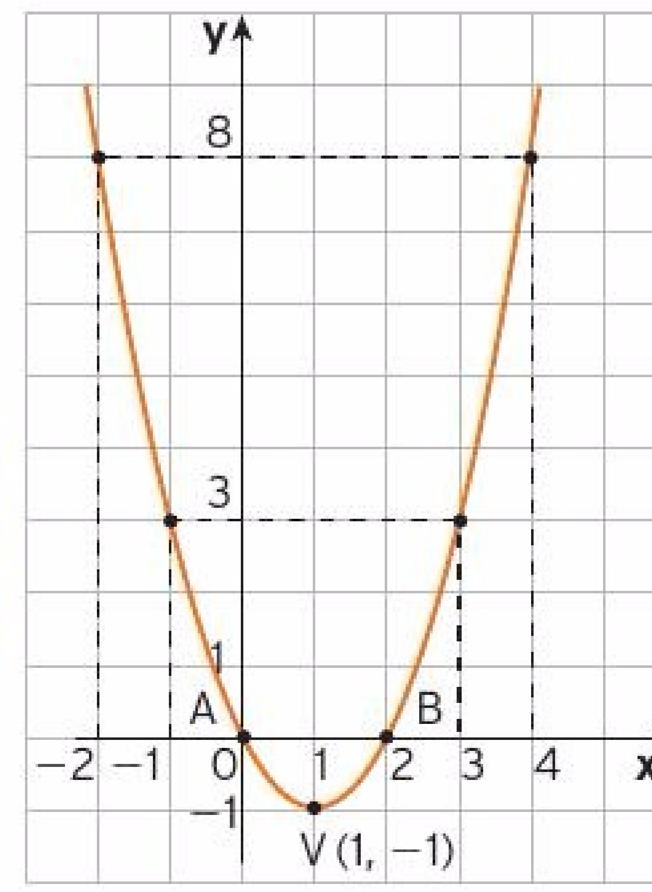
$y = x^2 - 2x$

x	y	(x, y)
−2	8	(−2,8)
−1	3	(−1,3)
0	0	(0, 0)
1	−1	(1, −1)
2	0	(2, 0)
3	3	(3, 3)
4	8	(4, 8)

→ A (0, 0)

→ V (1, −1)

→ B (2, 0)



- Represente geometricamente a **função** definida por $y = -x^2 + 2x - 4$.

Organizamos a escolha dos pontos:

✓ determinando as coordenadas do vértice:

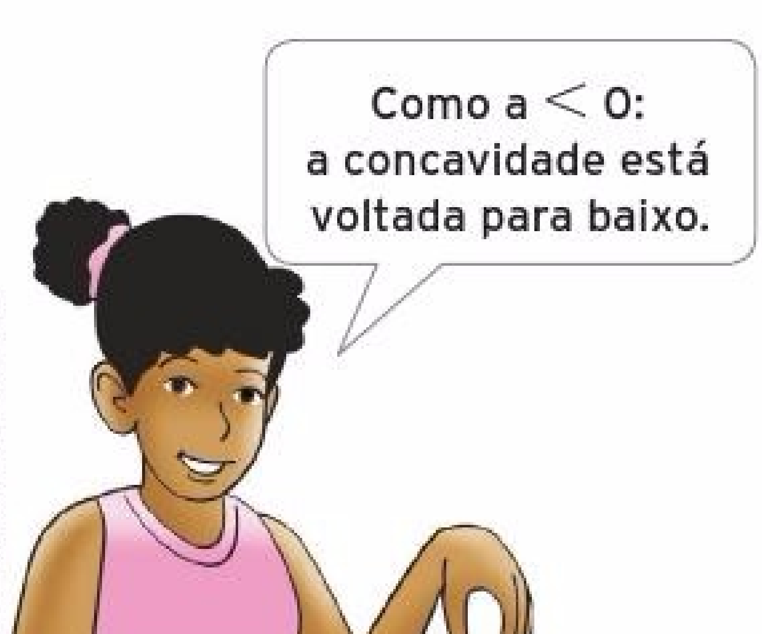
$$\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} \text{ —— } x_V = 1 \\ y_V = -1^2 + 2 \cdot 1 - 4 \text{ —— } y_V = -3 \end{array}\right\rangle \mathbf{V\ (1, -3)}$$

✓ determinando os pontos de intersecção com o eixo **x**: $y = 0$

$$-x^2 + 2x - 4 = 0 \text{ —— } \Delta = -12$$

Como $\Delta < \mathbf{0}$, a função definida por $y = -x^2 + 2x - 4$ não tem zeros reais, e a parábola que a representa não tem ponto em comum com o eixo **x**.

✓ escolhendo, por exemplo, os valores −1, 0, 1, 2 e 3 para **x** e calculando os valores correspondentes de **y**:

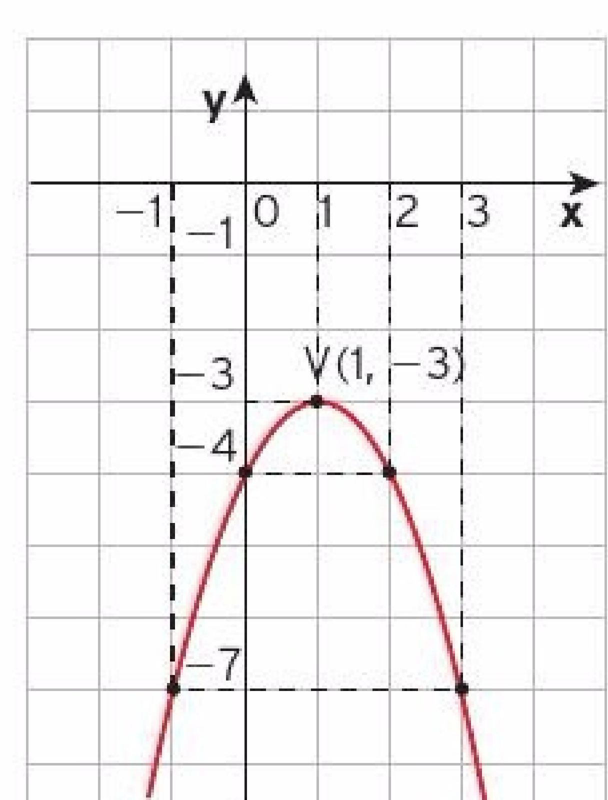


ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

$y = -x^2 + 2x - 4$

x	y	(x, y)
−1	−7	(−1, −7)
0	−4	(0, −4)
1	−3	(1, −3)
2	−4	(2, −4)
3	−7	(3, −7)

← V (1, −3)



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

8. b) O eixo de simetria da parábola que representa a função $y = -x^2$ é o eixo das ordenadas.
8. d) Se uma parábola intercepta o eixo **x** em um único ponto, então a ordenada desse ponto de intersecção é 0.
8. e) Uma parábola é a representação geométrica de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e apresenta $\Delta = 0$ para a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Essa parábola intercepta o eixo **x** em um único ponto.

8. Analise cada uma das afirmações e indique as que estão corretas. Reescreva as afirmações falsas, de modo que sejam verdadeiras. Corretas: a; c

a) A parábola que representa a função $\mathbf{y = 5x^2 - 8x + 13}$ tem a concavidade voltada para cima.

b) O eixo de simetria da parábola que representa a função $\mathbf{y = -x^2}$ é o eixo das abscissas.

c) Se uma parábola intercepta o eixo **x** em dois pontos, então as ordenadas desses pontos de intersecção é zero.

d) Se uma parábola intercepta o eixo **x** em um único ponto, então a ordenada desse ponto de intersecção é 1.

e) Uma parábola é a representação geométrica de uma função do tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, com $a \neq 0$, e apresenta $\Delta = 0$ para a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Essa parábola não intercepta o eixo **x**.

9. Identifique o tipo de concavidade das parábolas que representam as funções de 2º grau:

a) $y = x^2 - 4x + 3$ Voltada para cima.

b) $y = -x^2 + 2x$ Voltada para baixo.

c) $y = -2x^2 + 4x - 3$ Voltada para baixo.

d) $y = \dfrac{11}{25}x^2 - 1$ Voltada para cima.

10. Considere a função de 2º grau definida por: $y = 9x^2 - 4$

a) Quais são as raízes dessa função? $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

b) Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção da parábola que representa essa função com o eixo **x**? $\left(-\frac{2}{3}, 0\right); \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

c) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa essa função? $(0, -4)$

d) Construa o gráfico que representa essa função. Veja resposta no final do livro.

11. Considere a função de 2º grau definida por: $y = x^2 + 6x + 8$

a) De que tipo é a concavidade da parábola que representa essa função? Voltada para cima.

b) Quais são os zeros dessa função? $-4, -2$

c) Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção do eixo **x** com a parábola que representa essa função? $(-4, 0); (-2, 0)$

d) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa essa função? $(-3, -1)$

e) Copie e complete uma tabela como esta, determinando os valores de **y** correspondentes aos valores de **x** iguais a $-5, -4, -3, -2$ e -1. Veja resposta no final do livro.

x	y	(x, y)
−5		

f) Construa em uma folha de papel quadriculado o gráfico que representa essa função. Veja resposta no final do livro.

12. Represente graficamente as funções quadráticas definidas por: Veja respostas no final do livro.

a) $y = 2x^2$

b) $y = -\dfrac{x^2}{2}$

c) $y = -x^2 + 2x$

d) $y = \dfrac{2}{3}x^2 - x$

e) $y = -3x^2 + 4x - 5$

f) $y = x^2 - x - 2$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Quem está com a razão?

- Se Pedro soltar a bola no mesmo momento em que Joana lançar a flecha na horizontal e da mesma altura em que está a bola, qual chegará primeiro ao chão: a bola ou a flecha? Despreze a influência do ar e considere o chão plano e horizontal.

As duas chegarão ao mesmo tempo. Na vertical, tanto a bola quanto a flecha têm velocidade inicial nula e caem com a mesma aceleração, devido à gravidade da Terra.

3 Estudando parábolas

Discriminantes e tipos de gráfico

Podemos concluir alguns fatos sobre o gráfico de funções de 2º grau desenhando apenas um esboço dele.

Exemplo:

Vamos fazer um esboço do gráfico para a função definida pela fórmula que está no quadro.

$$y = x^2 + 2x - 24$$

Começamos identificando o tipo de concavidade e determinando os zeros da função.

a > 0 —— concavidade voltada para cima

Zeros: $y = 0$ —— $x^2 + 2x - 24 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)$ —— $\Delta = 100$

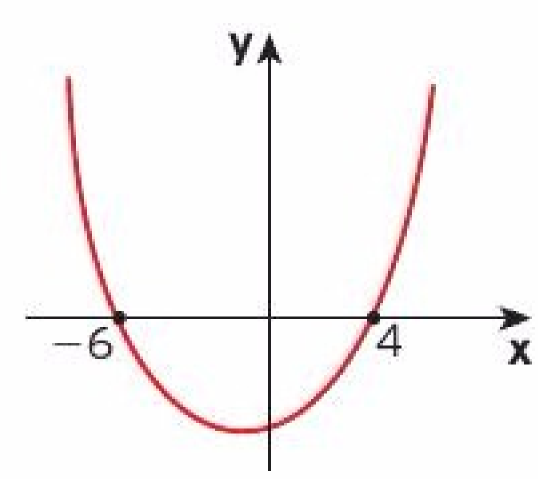
$$x = \frac{-2 \pm 10}{2} \begin{cases} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Como a função tem dois zeros, a parábola intercepta o eixo **x** em dois pontos:

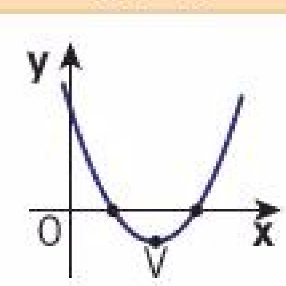
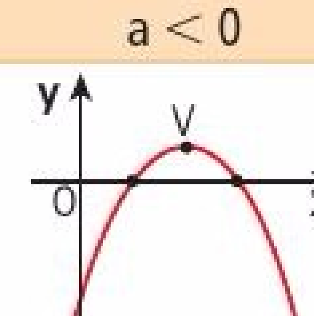
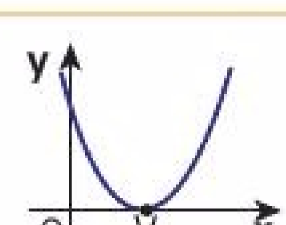
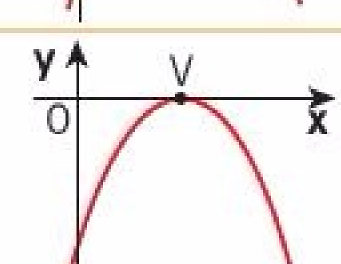
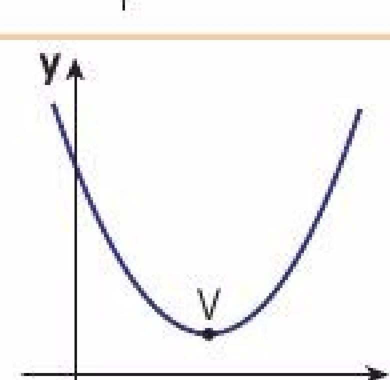
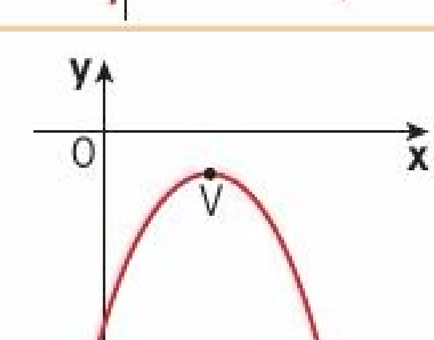
$x = 4$ e $y = 0$ —— $(4, 0)$

$x = -6$ e $y = 0$ —— $(-6, 0)$

Veja um esboço do gráfico.



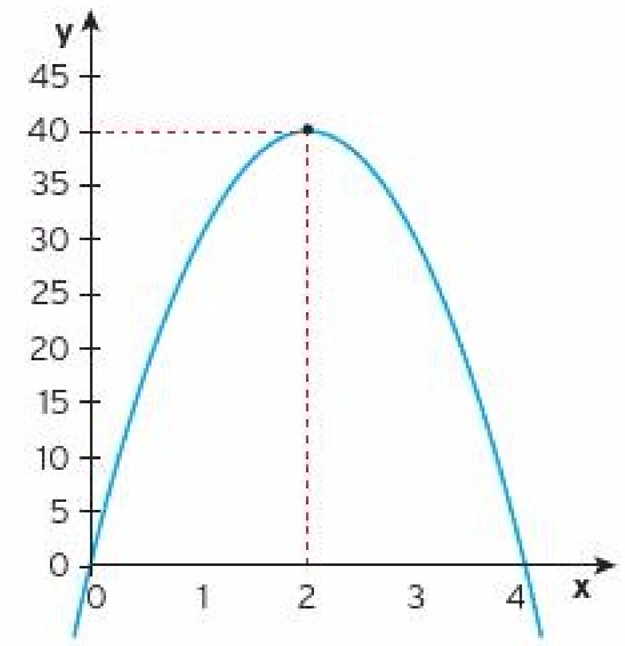
De modo geral, como a existência de raízes reais de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, depende do valor de Δ, temos:

	Tipos de gráficos de $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$	
	$a > 0$	$a < 0$
Para $\boldsymbol{\Delta > 0}$: • há duas raízes reais diferentes; • há dois pontos de intersecção com o eixo **x**.		
Para $\boldsymbol{\Delta = 0}$: • há duas raízes reais iguais; • há um único ponto de intersecção com o eixo **x**.		
Para $\boldsymbol{\Delta < 0}$: • não existe raiz real; • não existe ponto de intersecção com o eixo **x**.		

Máximos e mínimos

Para refletir e responder

Este gráfico representa a função definida por $y = -10x^2 + 40x$



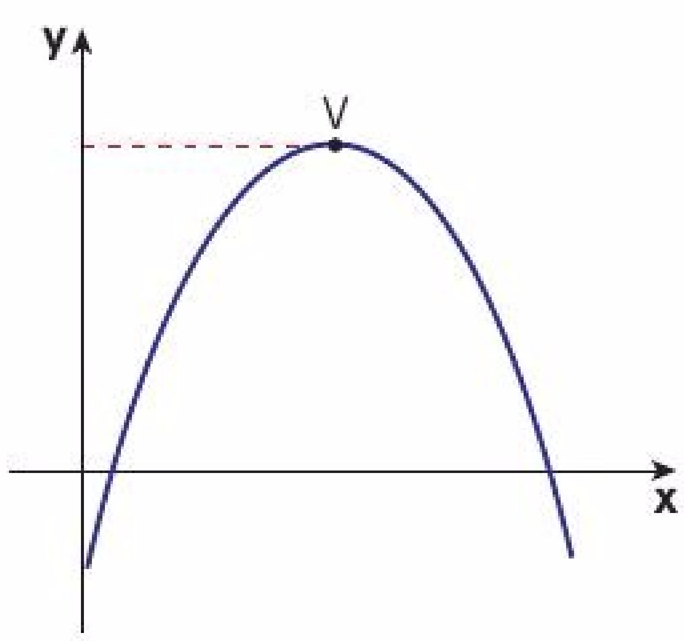
- Para que valor de **x** o valor de **y** tem valor máximo? 2 Qual é o valor máximo de **y**? 40

Observando o gráfico, podemos verificar que o valor de **x** cresce de 0 a 2, enquanto o valor de **y** cresce de 0 a 40, que é o valor máximo assumido por **y**. E quando **x** continua crescendo de 2 a 4, o valor de **y** decresce de 40 a 0.

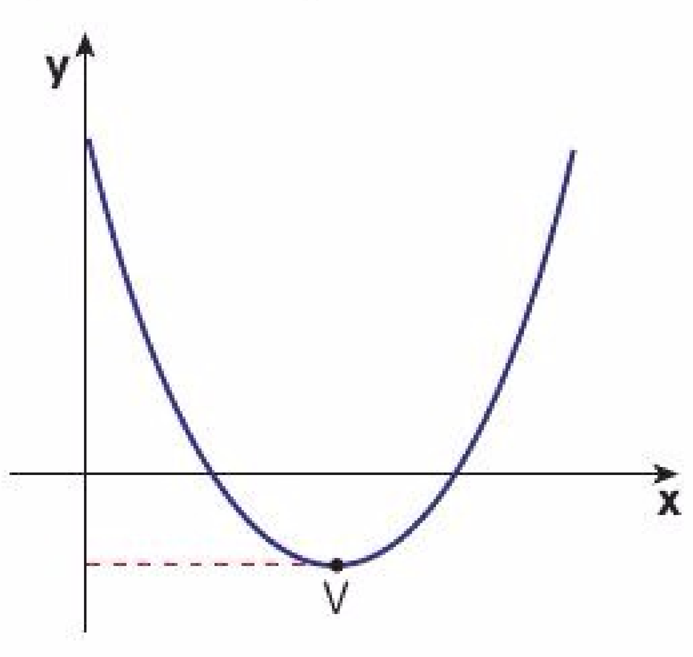
Portanto, o valor máximo assumido por **y** nessa função é 40 e corresponde a **x** igual a 2.

Toda parábola tem um "ponto mais alto" ou um "ponto mais baixo" que corresponde ao vértice.

O **vértice** é o "ponto mais alto" da parábola quando $\mathbf{a < 0}$.



O **vértice** é o "ponto mais baixo" da parábola quando $\mathbf{a > 0}$.



A ordenada $\mathbf{y_V}$ é o **valor máximo** ou o **valor mínimo** de uma função de 2º grau, dependendo do sinal do coeficiente **a** de $\mathbf{x^2}$.

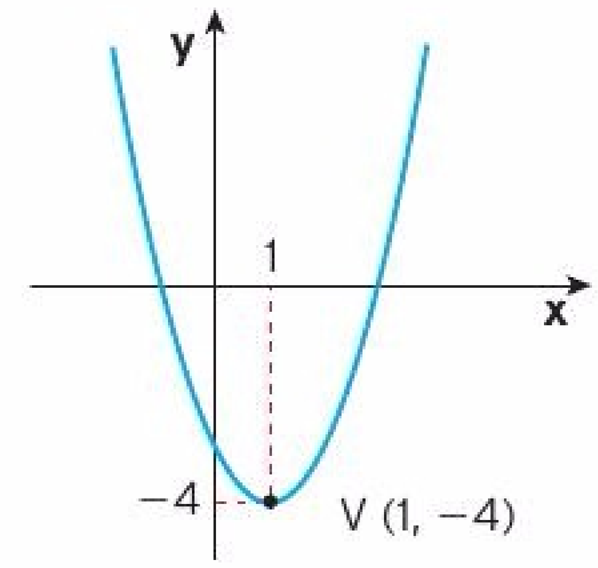
Outros exemplos:

- Na função $y = x^2 - 2x - 3$, o vértice é o "ponto mais baixo" da parábola, pois $a = 1$ e $a > 0$.

As coordenadas desse ponto são:

Abscissa $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1}$ —— $\mathbf{x_V = 1}$

Obtemos o valor mínimo da função $y = x^2 - 2x - 3$ atribuindo a **x** o valor 1 na função:



Ordenada $y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ —— $\mathbf{y_V = -4}$

V (1, −4) é o vértice da parábola.

O valor mínimo dessa função é −4.

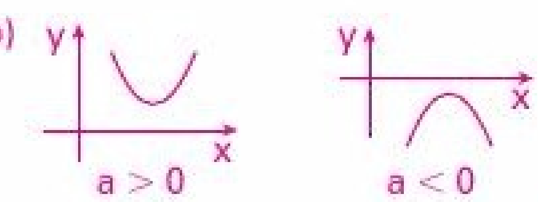
- Na função $y = -5x^2 + x - 1$, o vértice é o "ponto mais alto" da parábola, pois $a = -5$ e $a < 0$.

Obtemos o valor máximo da função determinando a ordenada de seu vértice:

$$x_V = \frac{-1}{2 \cdot (-5)} = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad y_V = -5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} - 1 = -\frac{19}{20}$$

O valor máximo dessa função é $-\frac{19}{20}$.

14. b)



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

13. Uma função de 2º grau escrita na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, tem dois zeros reais e diferentes. O que se pode afirmar sobre a parábola que representa essa função?

14. Uma função de 2º grau escrita na forma $y = ax^2 + bx + c$ tem $\Delta < 0$.

a) O que se pode afirmar sobre os pontos de intersecção do eixo **x** com a parábola que representa essa função? Não há pontos de intersecção com o eixo **x**.

b) Faça dois esboços para representar as funções do item anterior: em um deles considere $a > 0$ e, em outro, considere $a < 0$.

15. Faça um esboço gráfico de cada uma destas funções de 2º grau: Veja respostas no final do livro.

a) $y = 2x^2 - 3x + 6$

b) $y = -4x^2 + 25$

c) $y = -x^2 - 5x + 24$

d) $y = 5x^2 - 10x + 5$

16. O vértice da parábola que representa geometricamente a função definida pela fórmula $y = 3x^2 - 18x + 50$ é o seu ponto "mais alto" ou "mais baixo"? Justifique sua resposta. Quais são as coordenadas desse ponto? É o seu ponto "mais baixo", porque $a = 3$ e $a > 0$; (3, 23).

17. Considere a função definida pela fórmula: $y = -2x^2 + 20x - 60$.

Essa função tem valor máximo ou valor mínimo? Qual é esse valor? Valor máximo; $y = -10$.

13. Tem concavidade voltada para cima, ponto de mínimo e dois pontos de intersecção com o eixo **x**.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões.

Para reiniciar um jogo, um goleiro lança a bola para cima, com certa inclinação em relação ao nível do chão. A altura **h** (em metros), depois de um tempo **t** (em segundos), pode ser calculada pela fórmula $\mathbf{h = 12t - 8t^2}$.

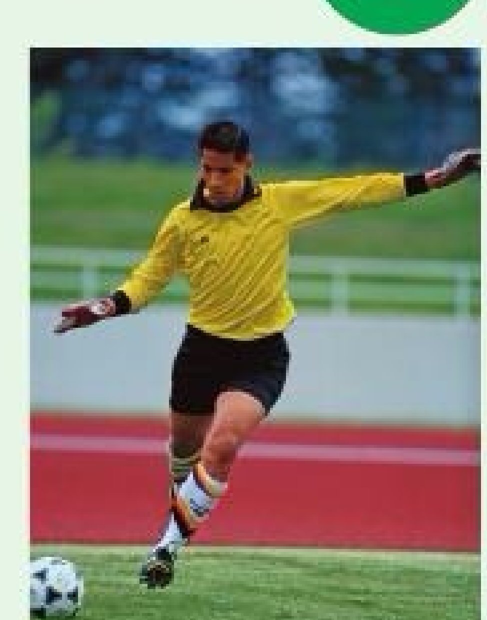


PHOTO KISHIMOTO/AMANAIMAGES/CORBIS/LATINSTOCK

- A que altura se encontrava a bola após 0,5 segundo? E após 1 segundo? 4 m; 4 m
- Determinem o tempo que a bola levará para cair no chão novamente. 1,5 segundo.
- Qual é a altura máxima alcançada pela bola em sua trajetória? Após quanto tempo isso ocorre? 4,5 m e 0,75 segundo.

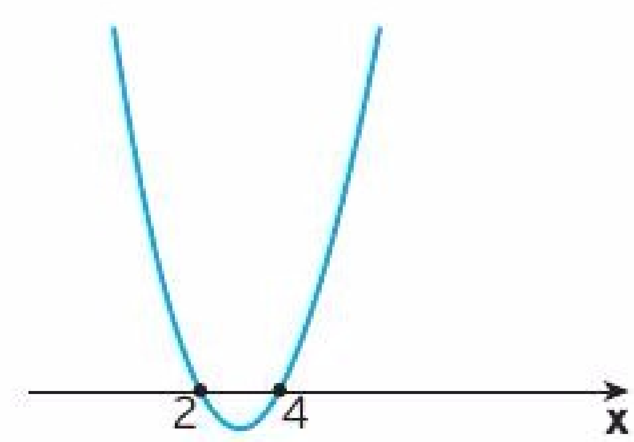
4 Função de 2º grau e o estudo dos sinais

Estudando os sinais

Para refletir e responder

Observe o esboço gráfico da função de 2º grau definida por $y = x^2 - 6x + 8$.

HÉLIO SENATORE

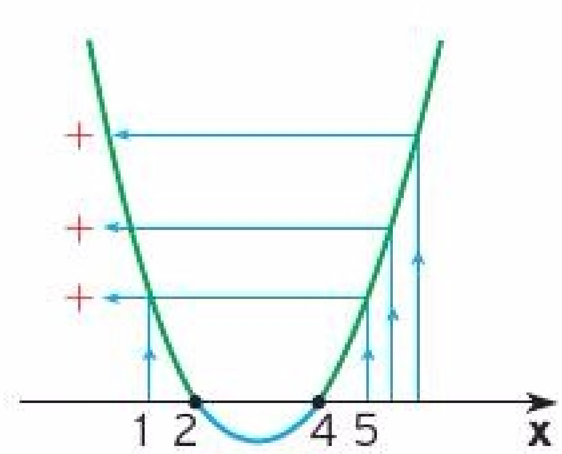


- Qual é o sinal de **y** quando se atribui a **x** um valor menor que 2? E um valor maior que 4? Positivo; positivo.

Observando uma parábola, podemos concluir algumas propriedades sobre os sinais da função que ela representa.

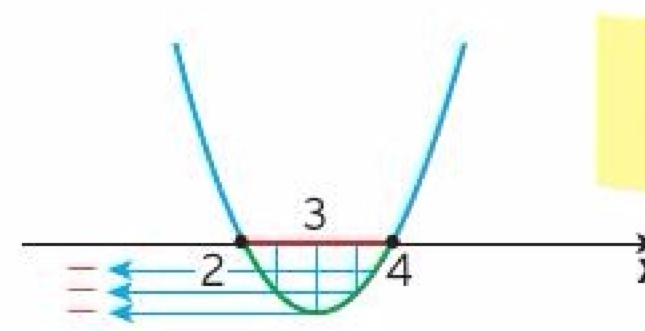
Na função $y = x^2 - 6x + 8$, como $a = 1$, ou seja, $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. E os zeros da função são $\mathbf{x = 2}$ e $\mathbf{x = 4}$.

- Para os valores de **x** menores que **2**, parte da parábola que representa a função fica **acima** do eixo **x**. Portanto, as ordenadas (**y**) correspondentes a esses pontos têm sinal positivo.



Para $x < 2$ ou $x > 4$, tem-se $y > 0$.

- Para os valores de **x** maiores que **4**, parte da parábola que representa a função fica **acima** do eixo **x**. Portanto, as ordenadas (**y**) correspondentes a esses pontos têm sinal positivo.

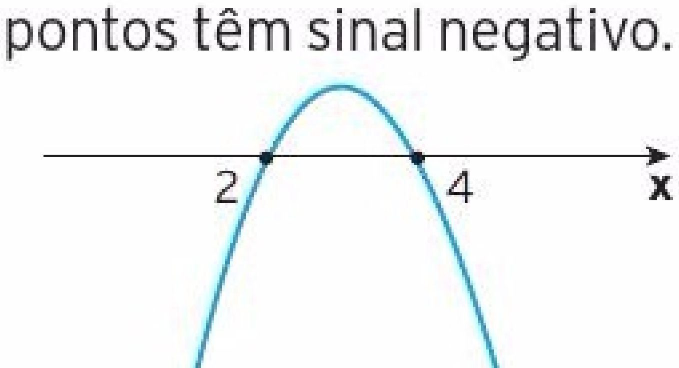


Para $2 < x < 4$, tem-se $y < 0$.

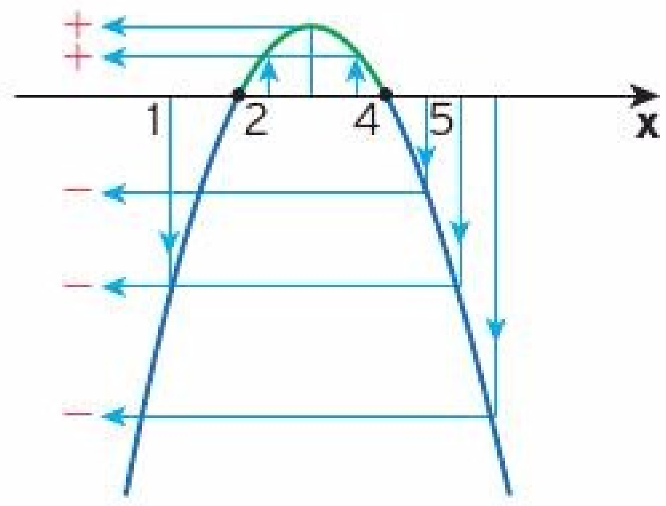
- Para os valores de **x** entre **2** e **4**, a parte da parábola que representa a função fica **abaixo** do eixo **x**. Portanto, as ordenadas (**y**) correspondentes a esses pontos têm sinal negativo.

Outros exemplos:

- Observe ao lado o esboço gráfico da função definida por $y = -x^2 + 6x - 8$.



✓ Para **x < 2** ou **x > 4**, a parte da parábola que representa a função fica abaixo do eixo **x**. Portanto, as ordenadas (**y**) correspondentes a esses pontos têm sinal negativo.



Para $x < 2$ ou $x > 4$, tem-se $y < 0$.

✓ Para **2 < x < 4**, a parte da parábola que representa a função fica **acima** do eixo **x**. Portanto, as ordenadas (**y**) correspondentes a esses pontos têm sinal positivo.

Para $2 < x < 4$, tem-se $y > 0$.

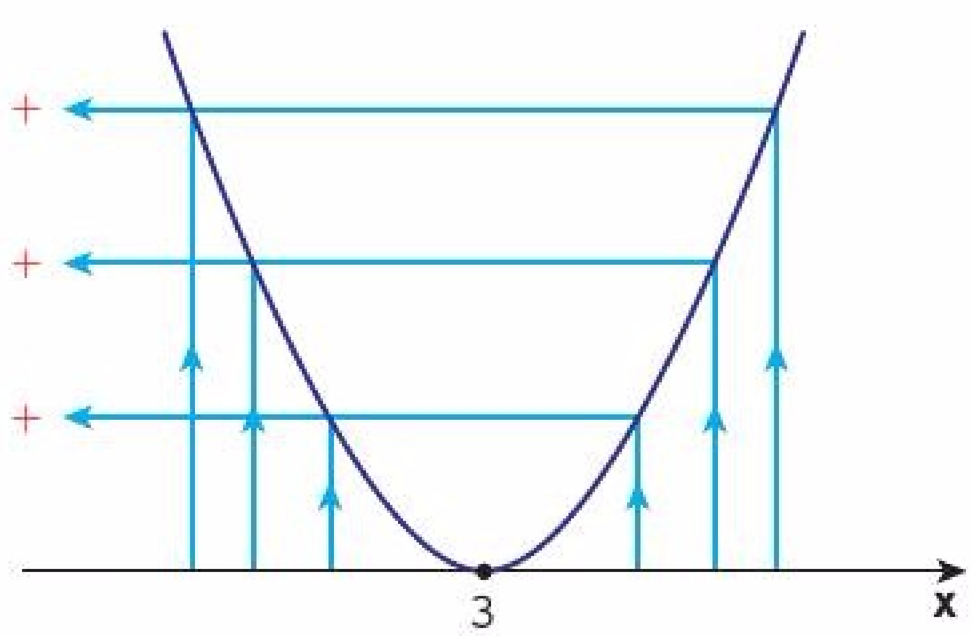
- Analise os sinais da função de 2º grau definida por $\mathbf{y = 2x^2 - 12x + 18}$.

Fazemos um esboço gráfico da função e observamos os sinais de **y** em relação aos zeros dessa função. Como $a = 2$ e $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.

Calculamos os zeros da função:

$y = 0$ —— $2x^2 - 12x + 18 = 0$ —— $\Delta = 0$

$x = 3$ —— A parábola tem um único ponto comum com o eixo **x**: (3, 0)



Portanto:

Para $x = 3$, $y = 0$.

Para $x < 3$, $y > 0$.

Para $x > 3$, $y > 0$.

Os valores de **y** são positivos para todos os números diferentes de 3 e é zero para $x = 3$.

- Para determinar os valores de **x** para os quais a função $y = -3x^2 + x - 4$ tem valores positivos também, fazemos um esboço gráfico da função e observamos os sinais de **y**.

Na função dada, $a = -3$, ou seja, $a < 0$. Portanto, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

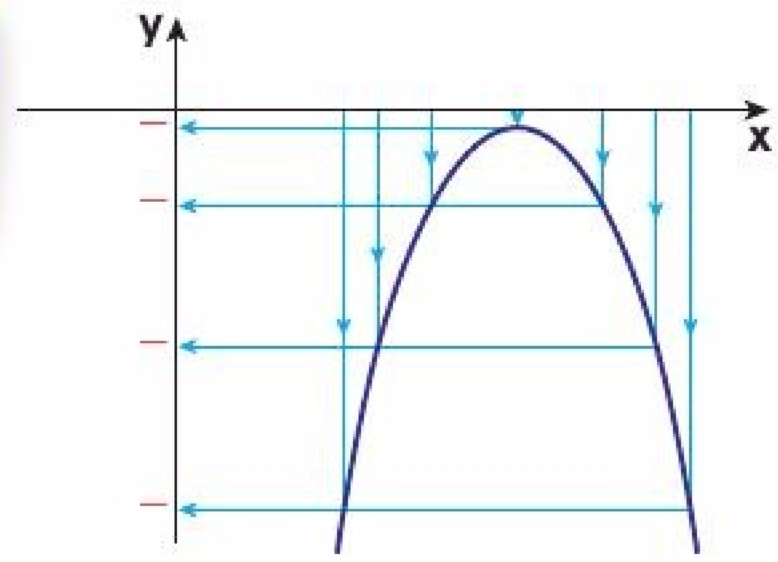
Calculamos os zeros da função.

$y = 0$ —— $-3x^2 + x - 4 = 0$

$\Delta = -47$. A função não possui zeros reais.

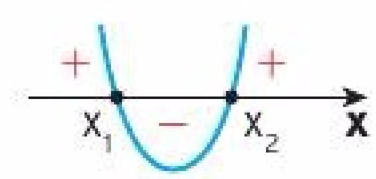
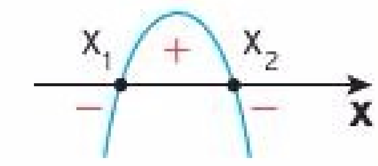
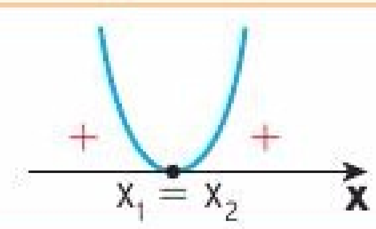
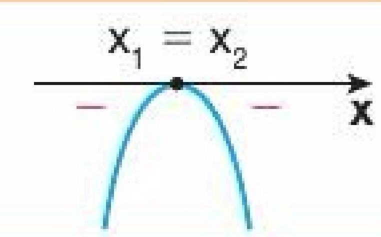
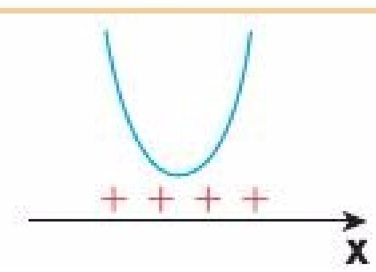
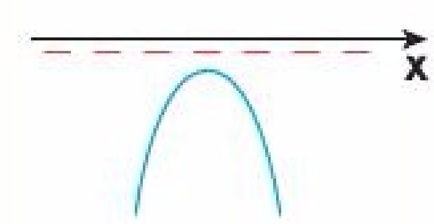
A parábola não tem pontos comuns com o eixo **x**.

Veja o esboço.



Para essa função não existem valores reais de **x** para os quais os valores de **y** sejam positivos ou nulos.

De modo geral, podemos identificar os sinais de uma função de 2º grau determinando os zeros dessa função e observando o sinal do coeficiente **a**, conforme resumo ao lado.

	Sinal de $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$	
	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

21. a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3}$
b) $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{4}{3}$
c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$

24. $y = 0$ para $x = \frac{2}{3}$; para $y > 0$ não existe valor de **x**; $y < 0$ para todo **x** real e $x \neq \frac{2}{3}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

18. Considere a função definida por $y = -x^2 + 6x - 5$.

a) Faça um esboço gráfico dessa função.

b) Escolha três valores para **x** cujos valores de **y** sejam positivos. 2; 2,5; 4. Há outras respostas possíveis.

c) Escolha três valores para **x** cujos valores de **y** sejam negativos. −1; 0,5; 6. Há outras respostas possíveis.

19. Considere a função quadrática definida por $y = 5x^2 - 6x + 1$.

a) Para que valores de **x** temos $y = 0$? $\frac{1}{5}$ e 1

b) Para que valores de **x** temos $y > 0$? $x < \frac{1}{5}$ ou $x > 1$

c) Para que valores de **x** temos $y < 0$? $\frac{1}{5} < x < 1$

20. Para que valores de **x** a expressão algébrica $-3x^2 + 10x - 3$ é positiva? $\frac{1}{3} < x < 3$

21. Considere a função $y = 6x^2 - 5x - 4$ e determine os valores reais de **x** para os quais:

a) $y = 0$ b) $y > 0$ c) $y < 0$

22. Para que valores reais de **x** a função $y = -\frac{x^2}{4}$ é:

a) nula; 0

b) positiva; Nenhum valor real de **x**.

c) negativa. Todo número real diferente de zero.

23. Sabendo que $y = -x^2 - 3x + 1$, para que valores de **x** temos:

a) $y = 0$ $\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ e $\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

b) $y > 0$ $\frac{-3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

c) $y < 0$ $x < \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ ou $x > \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

24. Analise os sinais da função definida por $y = -9x^2 + 12x - 4$.

25. Para que valores de **x** a função $y = 2x^2 - 4x + 5$ é negativa? Não há valor real de **x** para o qual a função seja negativa.

26. A função $y = 2x^2 - x + 3$ é positiva para qualquer valor real de **x**. Esta afirmação é verdadeira ou falsa? Explique por quê.

Verdadeira. Como $\Delta < 0$ e $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e não tem pontos comuns com o eixo **x**, ou seja, ela está acima do eixo **x** e por isso é positiva para qualquer valor real de **x**.

5 Inequação de 2º grau

Desigualdades que envolvem expressões de 2º grau

Para refletir e responder

Em uma fábrica de móveis, o custo **C**, em reais, para produzir **x** armários por semana é dado pela função:

$$C = 1\,500 + 75x + x^2$$

- Escreva uma desigualdade que expresse a frase: "O custo não deve superar R$ 1 900,00". $1\,500 + 7x + x^2 \leqslant 1\,900$. Há outras respostas possíveis.

Situações como essa acima envolvem função de 2º grau e desigualdade. Veja:

Para que o custo não supere R$ 1900,00, é necessário que ele seja menor ou igual a esse valor, isto é:

$1\,500 + 75x + x^2 \leqslant 1\,900$, ou $x^2 + 75x + 1\,500 - 1\,900 \leqslant 0$, ou $x^2 + 75x - 400 \leqslant 0$.

$x^2 + 75x - 400 \leqslant 0$ é uma **inequação de 2º grau**.

As inequações de 2º grau são do tipo:

$ax^2 + bx + c > 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c < 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ $\quad$ $\mathbf{a \neq 0}$

Exemplos:

$x^2 + 6x - 4 > 0$ $\qquad$ $x^2 - 2x + 4 \leqslant 0$

Resolução de inequações de 2º grau

Para resolver uma inequação de 2º grau estudamos os sinais da função de 2º grau associada a ela.

Exemplos:

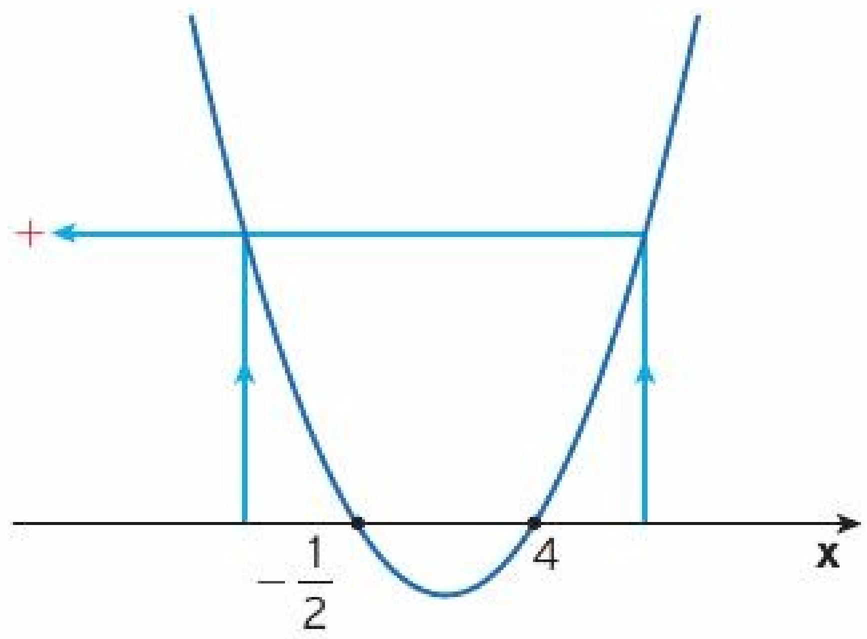
- Determine os valores de **x**, para os quais se tem $\mathbf{2x^2 - 7x - 4 \geqslant 0}$. $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x \geqslant 4$

Para resolvermos essa inequação, estudamos os sinais da função $\mathbf{y = 2x^2 - 7x - 4}$ associada a ela e determinamos **x** para os quais $\mathbf{y \geqslant 0}$.

Como $a = 2$, $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Calculamos os zeros da função resolvendo a equação $2x^2 - 7x - 4 = 0$.

Os zeros são $-\dfrac{1}{2}$ e 4.



Bolinhas cheias significam que os zeros são também soluções da inequação.

Portanto, a parábola intercepta o eixo **x** nos pontos $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e (4, 0).

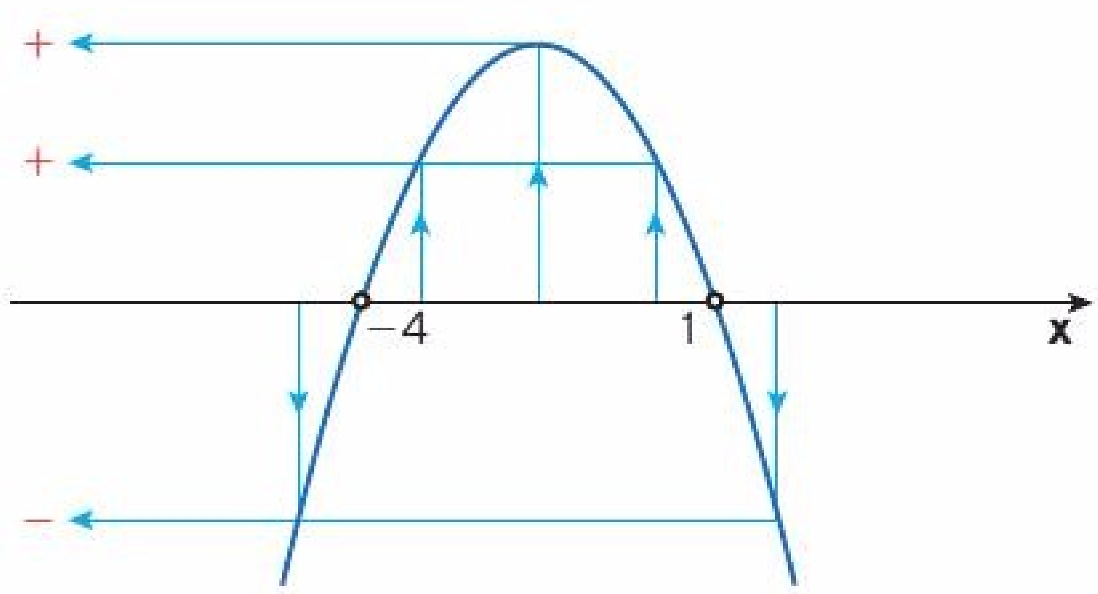
Para valores de **x** menores que $-\frac{1}{2}$ e valores de **x** maiores que 4, a parábola que representa a função está **acima** do eixo **x**.

Para $x = \frac{1}{2}$ e $x = 4$, $y = 0$ e a parábola intercepta o eixo **x**.

Assim, temos $2x^2 - 7x - 4 \geqslant 0$ para todos os números reais, tais que $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x \geqslant 4$.

- Quais números reais são soluções da inequação $-x^2 - 3x + 4 > 0$?

Analisamos os sinais da função $y = -x^2 - 3x + 4$ para resolvermos a inequação proposta.



$a = -1$, com $a < 0$: concavidade voltada para baixo.

−4 e 1 são os zeros e não são soluções da inequação.

Para **x** entre −4 e 1, a parábola que representa a função fica **acima** do eixo **x**.

$-x^2 - 3x + 4$ terá sinal positivo para $\mathbf{-4 < x < 1}$.

As soluções são: $x \in \mathbb{R}$, $-4 < x < 1$.

Vamos combinar:
Em uma inequação, quando não for citado, a incógnita representa um número do conjunto mais amplo que se conhece, que é $\mathbb{R}$.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

27. Considere a função $y = 14x^2 + 7x$ e calcule os valores reais de **x** para que se tenha $y > 0$. $x \in \mathbb{R}, x < -\frac{1}{5}$ ou $x > 0$

28. Para que valores de **x** a função $y = -5x^2 - 9x + 2$ é positiva? $x \in \mathbb{R}, -2 < x < \frac{1}{5}$

29. Para que valores de **x** a função $y = 3x^2 - 2x + 4$ é negativa? Não há nenhum valor real de **x** para o qual se tenha $3x^2 - 2x + 4 < 0$.

30. Para que valores de **x** o produto $(x - 3) \cdot (x + 2)$ é positivo? $x \in \mathbb{R}, x < -2$ ou $x > 3$

31. Existe algum valor de **x** para o qual a função $y = -4x^2 + 6x - 5$ seja negativa? Todos os números reais.

32. Para que valores de **x** a expressão algébrica $3x^2 + 18x + 8$ é menor que 8? $x \in \mathbb{R}, -6 < x < 0$

33. Determine as soluções da inequação: $(3x + 1)^2 < (2x - 1)^2$. $x \in \mathbb{R}, -2 < x < 0$

34. Resolva a inequação $x^2 - \frac{x}{3} < \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$. **34.** $x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$

35. Determine os valores de **x** para os quais o trinômio $6x^2 - x - 1$ é positivo. $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2}$

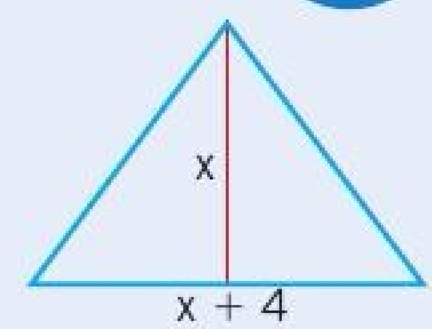
36. Determine as soluções da inequação: $\frac{x - 1}{3} - \frac{x^2}{2} \geqslant 2x^2 + 1$. Não existe solução.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Em um triângulo, a medida de um dos lados é 4 unidades a mais que a medida da altura relativa a ele, representada pela letra **x**.



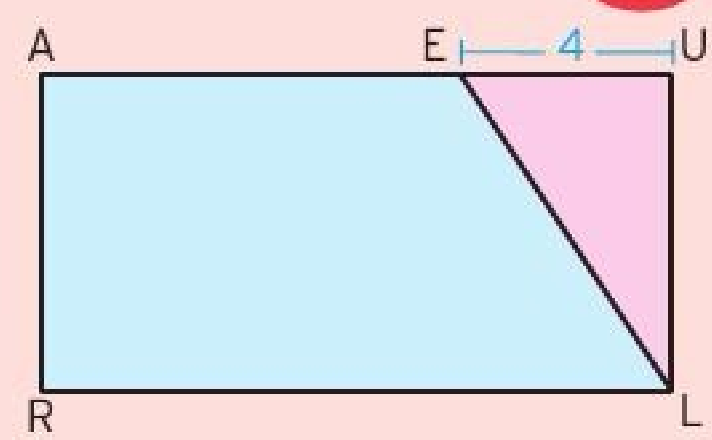
- Determinem os valores de **x** para os quais a área desse triângulo seja maior que 6. $x \in \mathbb{R}, x > 2$

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Problema de áreas e inequação

No retângulo LUAR representado ao lado, a medida de $\overline{RL}$ é o dobro da medida de $\overline{AR}$. As medidas estão indicadas em centímetros.



- Para quais medidas do lado $\overline{RL}$ de LUAR a área de LEAR será maior que 60 cm^2? med $\overline{RL} > 12$ cm

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e façam o que se pede.

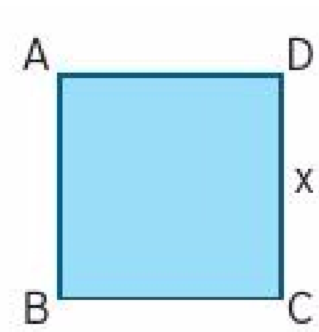
- Decomponha o número 12 em duas parcelas de modo que o produto entre essas parcelas seja o maior possível.
  Pista: encontre uma função de 2º grau, seguindo as sugestões apresentadas ao lado e investigue a variação de **y**. O produto máximo é igual a 36.

Represente por:
x uma parcela;
12 − x outra parcela;
y o produto.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

37. Na figura, **x** representa a medida dos lados do quadrado ABCD.



a) Expresse a área **a** desse quadrado em função de **x**. $a = x^2$

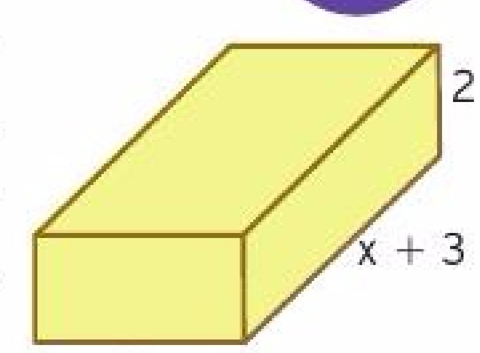
b) Expresse o perímetro **p** desse quadrado em função de **x**. $p = 4x$

c) Escreva uma fórmula que expresse a área do quadrado em função do perímetro. $a = \frac{p^2}{16}$

d) Qual o perímetro de um quadrado com 20 m^2 de área? $8\sqrt{5}$ m

38. Considere a função de 2º grau definida por $y = (m + 7)x^2 + 11x - 14$. Para que valores reais de **m** o gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo? $m \in \mathbb{R}, m < -7$

39. Calcule o valor de **x** para o qual o volume da caixa em forma de paralelepípedo seja maior que 20. $x < -5$ ou $x > 2$



40. Responda às questões.

a) Dentre os retângulos com perímetro igual a 412 m, qual o comprimento e a largura daquele que tem maior área? 103 m; 103 m

b) Qual é a área máxima para retângulos com 412 m de perímetro? 10 609 m^2

c) Que outro nome pode ser dado a esse retângulo? Quadrado.

Leitura

Bola na cesta

Você sabia?


RACHEL WATSON/GETTY IMAGES

Quando a bola sai das mãos de um jogador de basquete em direção à cesta, ela percorre uma trajetória curvilínea.

A curva que ela descreve é parte de uma **parábola**.

Esse fato, que ocorre em outras situações, possui uma explicação física: a Terra atrai os corpos próximos à sua superfície, produzindo neles uma aceleração de cima para baixo. Trata-se do efeito da **gravidade**.

Se não houvesse a gravidade e o ar não influísse no movimento, a bola seguiria em linha reta indefinidamente.

Como a Terra atrai a bola, ela vai se afastando de sua trajetória retilínea original e descreve uma curva.

Em um instante **t**, a distância **d** entre a posição em que a bola se encontra na parábola e a posição em que ela estaria na reta pode ser calculada pela fórmula ao lado. $d = \frac{1}{2}gt^2$

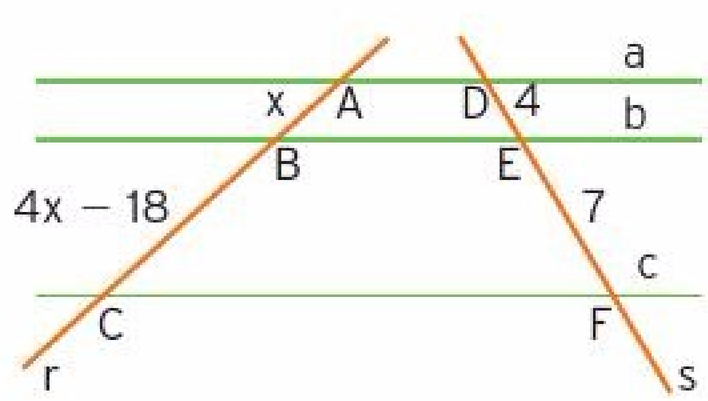
Se a aceleração da gravidade local for de 9,8 m/s^2, a fórmula será: $d = 4{,}9t^2$.

Portanto, **d** é uma função de 2º grau de variável **t** (tempo).

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

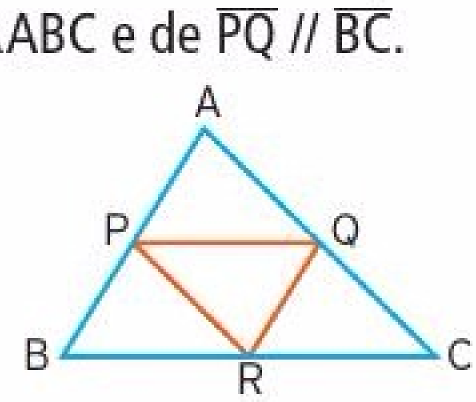
1. As retas **a**, **b** e **c**, na figura, formam um feixe de retas paralelas, e as medidas estão indicadas em centímetros.



a) Qual é a medida de $\overline{BC}$? 14 cm

b) Qual é a medida de $\overline{AC}$? 22 cm

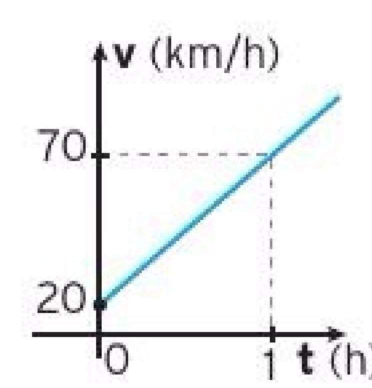
2. Os vértices do △PRQ são os pontos médios dos lados do △ABC e de $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$.



Determine a razão entre as áreas dos dois triângulos. 4 ou $\frac{1}{4}$

3. Determine o valor de **m** na equação de 2º grau $x^2 + (6 + 2m)x + m^2 - 5 = 0$, de modo que ela não tenha raiz real. $m < -\frac{7}{3}$

4. O gráfico ilustra a velocidade **v**, em quilômetros por hora, de um automóvel em função do tempo **t**, em horas.



Qual é a função do tipo $v = at + b$ representada por esse gráfico? $v = 50t + 20$

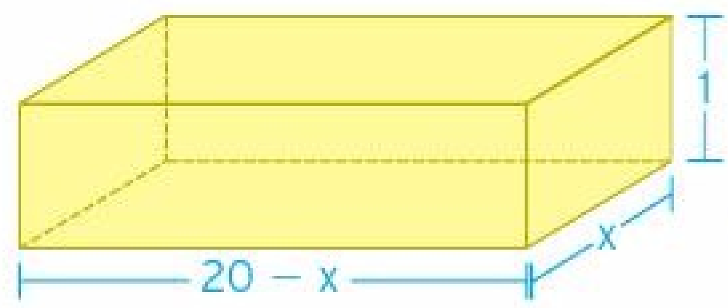
5. Em uma partida de futebol, um jogador chutou uma bola que atingiu uma altura **h** em metros, em um tempo **t**, em segundos, de acordo com a função $h(t) = -t^2 + 6t$.

a) Em que instante a bola atingiu a altura máxima? 3 s

b) De quantos metros foi a altura máxima alcançada pela bola? 9 m

c) Esboce o gráfico que representa essa situação. Veja resposta no final do livro.

6. Qual é o volume máximo de caixas em forma de paralelepípedo como o da figura? 100 m³



Medidas indicadas em m.

7. Considere a função $y = -5x^2 + 45$ e determine os valores de **x** para os quais:

a) $y = 0$ b) $y < 0$ c) $y > 0$

a) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x = -3$ ou $x = 3$
b) $y < 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x < -3$ ou $x > 3$ c) $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $-3 < x < 3$

8. Determine os valores de **x** para os quais a função $y = -2x^2 + 16x - 32$ é:

a) nula. b) positiva. c) negativa.

a) $y = 0$ para $x = 4$ b) Para nenhum valor real de **x**.
c) $y < 0$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 4$

9. Sabendo que $y = 7x^2 - 3x + 2$, determine os valores de **x** para os quais:

a) $y = 0$ b) $y > 0$ c) $y < 0$

a) Para nenhum valor de **x**. / b) Para todos os valores de **x**.
c) Para nenhum valor de **x**.

10. Analise a variação do sinal das funções de 2º grau definidas por:

a) $y = 4x^2 - 4x + 1$

a) $y = 0$ para $x = \frac{1}{2}$; $y > 0$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{1}{2}$

b) $y = 4x^2 - 7x + 3$

b) $y = 0$ para $x = \frac{3}{4}$ ou $x = 1$; $y > 0$ para $x \in \mathbb{R}$, $x < \frac{3}{4}$ ou $x > 1$; $y < 0$ para $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < \frac{3}{4}$.

11. (Funrio) Se x_1 e x_2 são as raízes da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $ac \neq 0$, o valor de $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ é: c

a) $\frac{b^2 - 4ac}{c^2}$

b) $\frac{b^2 - 4ac}{2a}$

c) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

d) $\frac{b^2 - 2ac}{2a}$

e) $\frac{b^2 - 4ac}{2c}$

12. A temperatura **y** de certa região é 5 °C mais fria que a metade da temperatura **x** de uma outra região. A fórmula que expressa **y** em função de **x** é: c

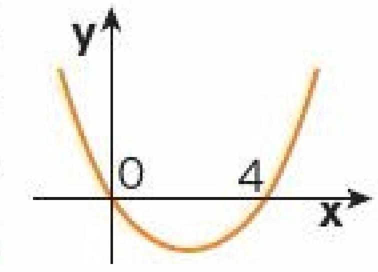
a) $y = 2x + 5$

b) $y = x + 5$

c) $y = \frac{x}{2} - 5$

d) $y = \frac{x}{2} + 5$

13. A parábola representa uma função de 2º grau. Observando o gráfico, podemos afirmar que a função é nula para: a



a) $x = 0$ e $x = 4$.

b) $x = -2$ e $x = 2$.

c) $x = 2$ e $x = 4$.

d) $x = 0$ e $x = 2$.

14. (Encceja) Lúcia ganhou da prefeitura um lote retangular com 30 m x 20 m de dimensões. Ela desejava desenhar o lote em uma folha de papel na escala 1 : 100. Ao ir a uma papelaria, o vendedor lhe deu as seguintes opções de 4 formatos de papel: d

A_4 — 21 cm por 29,7 cm

B_5 — 25,7 cm por 18,2 cm

Carta — 21,59 cm por 27,94 cm

Legal — 21,59 cm por 35,56 cm

O desenho do lote de Lúcia na escala desejada caberá apenas no papel de formato:

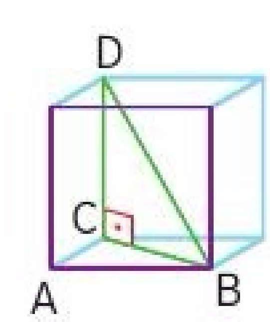
a) A_4. b) B_5. c) carta. d) legal.

15. (Fuvest) Sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as soluções do sistema $\begin{cases} x^2 + 3xy = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$, então $y_1 + y_2$ é igual a: a

a) $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 3

16. No cubo, a aresta mede 1 cm.

A área do $\triangle CBD$ é igual a: b



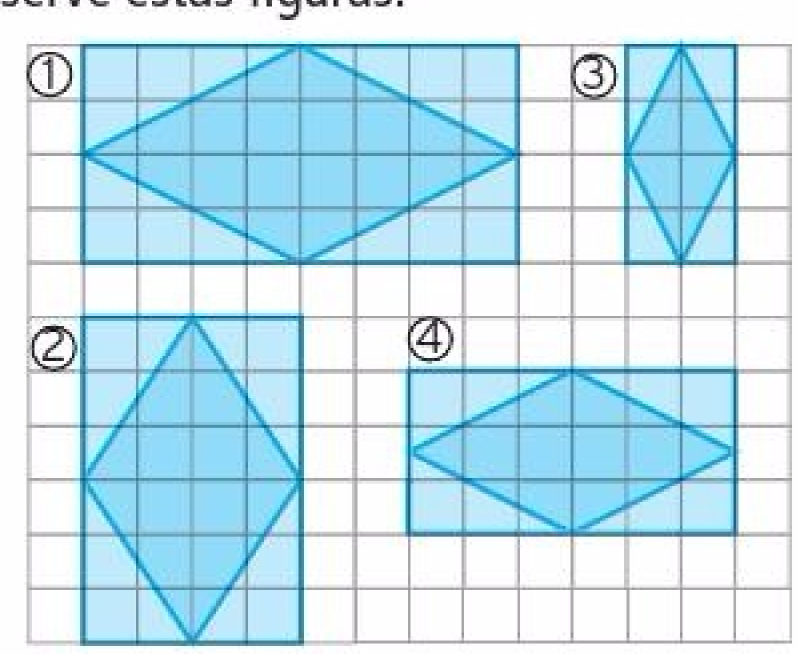
a) $\sqrt{2}$ cm²

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm²

c) $2\sqrt{2}$ cm²

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm²

17. Observe estas figuras:



Os pares de figuras semelhantes são: a

a) 1 e 3. b) 1 e 2. c) 2 e 4. d) 2 e 3.

UNIDADE 11

Circunferências

DORIVAL MOREIRA/PULSAR IMAGENS

Desde que foi descoberta, a forma circular tornou-se uma das formas mais utilizadas no dia a dia: nos jogos e nas brincadeiras, nas artes, na indústria e nas ciências.

Nesta unidade...

1. Circunferências e propriedades
2. Circunferências e retas em um plano
3. Ângulos com vértice em uma circunferência
4. Comprimento e área

Formas arredondadas estão presentes no prédio do Congresso Nacional, em Brasília (DF).

Por serem muito utilizados, os círculos e as circunferências tiveram suas propriedades e aplicações bastante exploradas.

A circunferência sempre chamou muito a atenção das pessoas por ser a figura mais regular e perfeita já desenhada. Ela é, também, a única figura plana que é simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria.

DON MASON/CORBIS/LATINSTOCK

Ao dar uma volta completa, a roda de uma bicicleta terá percorrido uma distância igual ao comprimento da circunferência dessa roda. Para saber o tamanho desse percurso, precisamos saber como calcular esse comprimento.

CARLOS MAGNO/ESTAÇÃO DE CONTEÚDO

O estádio do Maracanã, na cidade do Rio de Janeiro, apresenta forma circular. Visto de cima, percebem-se várias circunferências concêntricas.

O que você já sabe?

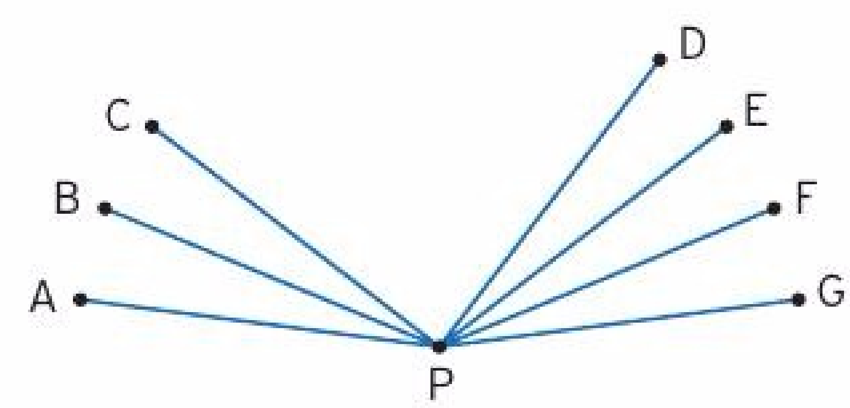
- Cite outras situações que envolvam círculos e circunferências. Respostas pessoais.
- O que são circunferências concêntricas? Circunferências que têm o mesmo centro.
- Desenhe uma circunferência e trace três eixos de simetria. Há outras respostas possíveis.

1 Circunferências e propriedades

Revendo conceitos

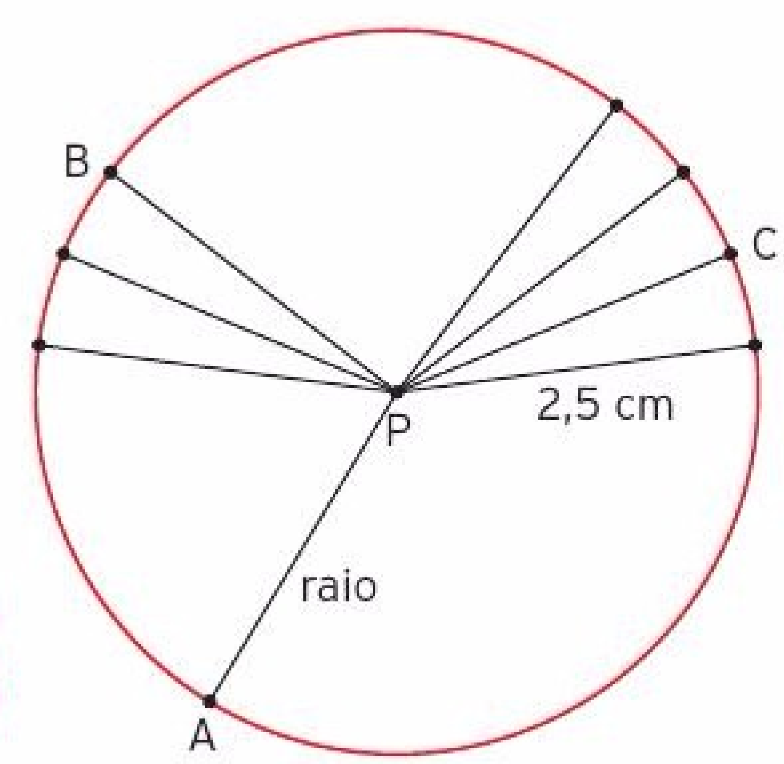
Para refletir e responder

Na figura, os pontos destacados estão a 2,5 cm de **P**.



- Copie o desenho em seu caderno e marque outros seis pontos a 2,5 cm de **P**. Resposta pessoal.
- Desenhando todos os pontos dessa folha que estejam a 2,5 cm de **P**, que figura será obtida? Circunferência.

Todos os pontos do plano da folha que estão a 2,5 cm do ponto **P** formam a linha em vermelho ao lado. Ela é uma circunferência de **centro P** e **raio** de 2,5 cm.



Nessa circunferência, todo segmento de reta com extremidades em **P** e em um de seus pontos é um **raio**: $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$... são raios dessa circunferência e medem 2,5 cm.

Note que uma circunferência tem infinitos raios (segmentos de reta), todos com a mesma medida. Assim, quando nos referimos à medida, podemos dizer "raio da circunferência". Se considerar importante essa distinção, chame a atenção dos alunos para esse fato.

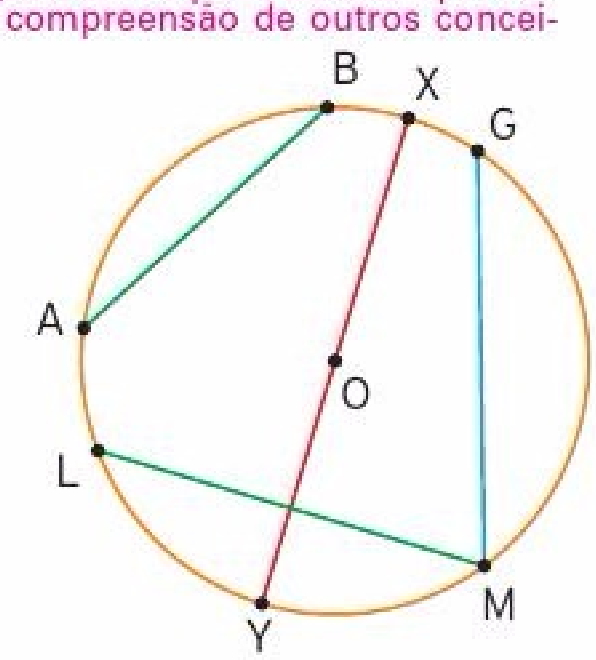
Dizemos que:

> Uma circunferência é um **lugar geométrico** no plano, pois todos os seus pontos têm uma propriedade comum: estão a uma mesma distância de um ponto fixo desse plano.

No caso da circunferência acima, esse lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos do plano que compõem a linha em vermelho.

O estudo do tema **lugar geométrico** poderá desempenhar um papel importante na compreensão de outros conceitos e propriedades. Caso você decida aprofundá-lo, procure fazer com que os alunos se interessem por ele, integrando-o à disciplina de Arte.

Veja a circunferência ao lado.



Segmentos de reta com extremidades em pontos da circunferência são chamados de **cordas**. Os segmentos de reta $\overline{XY}$, $\overline{LM}$, $\overline{AB}$ e $\overline{GM}$ são **cordas** da circunferência.

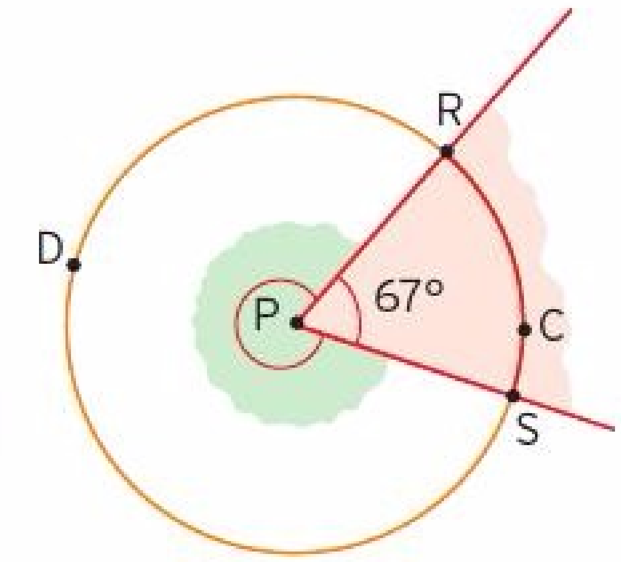
A corda $\overline{XY}$ é, também, um **diâmetro**, pois ela passa pelo centro da circunferência.

A medida de um diâmetro **d** de uma circunferência é o dobro da medida de um raio **r**.

$$d = 2 \cdot r$$

Dois pontos não coincidentes de uma circunferência dividem essa figura em duas partes. Cada uma delas é um **arco** dessa circunferência.

Observe, na figura ao lado, os arcos determinados pelos pontos **R** e **S**: **arco SCR** ou $\overset{\frown}{SCR}$ e **arco RDS** ou $\overset{\frown}{RDS}$. Note que ao arco RCS corresponde um ângulo central $R\hat{P}S$ que mede 67°.



Vamos combinar:

A medida de $\overset{\frown}{SCR}$, em graus (ou medida angular), é igual à medida do ângulo central $R\hat{P}S$, correspondente a ele.

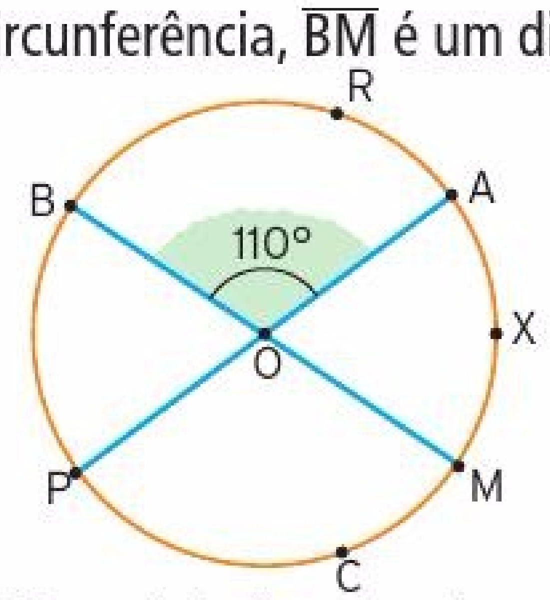
$$\text{med } \overset{\frown}{SCR} = \text{med } R\hat{P}S$$
$$\text{med } \overset{\frown}{SCR} = 67°$$

A medida do arco RDS, em graus, é a que completa 360° com a medida de $\overset{\frown}{SCR}$. Ou seja, med $\overset{\frown}{RDS}$ = 360° − 67° = 293° —— **med $\overset{\frown}{RDS}$ = 293°**

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Nesta circunferência, $\overline{BM}$ é um diâmetro.



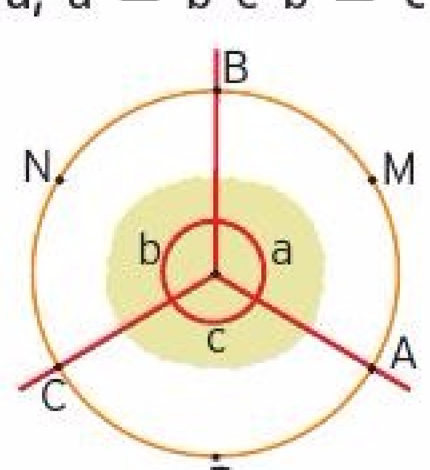
a) Identifique dois de seus raios.
$\overline{AO}$ e $\overline{OM}$. Há outras respostas possíveis.

b) Qual é a medida, em graus, de $\overset{\frown}{ARB}$? E de $\overset{\frown}{PCM}$? 110°; 110°

c) Qual é a medida, em graus, de $\overset{\frown}{MXA}$? 70°

d) Se med $\overline{BM}$ = 3,2 cm, quanto mede o raio dessa circunferência? 1,6 cm

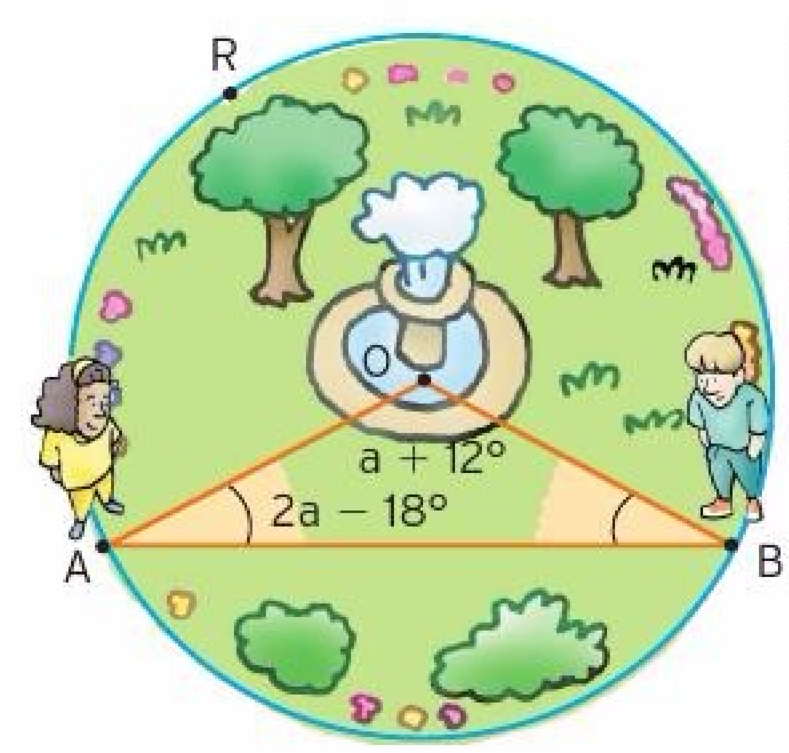
2. Nesta figura, $\hat{a} \equiv \hat{b}$ e $\hat{b} \equiv \hat{c}$.



a) Quais são os valores de **a**, **b** e **c** em graus? 120°

b) Quais são as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{BNC}$ e $\overset{\frown}{CPA}$? 120°

3. Juliana encontra-se no ponto **A** e Paulo, no ponto **B** de uma praça circular com raio de 3,4 m e que tem uma fonte em seu centro, como mostra este desenho.



FRANCISCO VILACHÃ

a) A quantos metros do centro dessa praça está Juliana? E Paulo? Qual é a relação entre essas distâncias?
3,4 m; 3,4 m; são iguais.

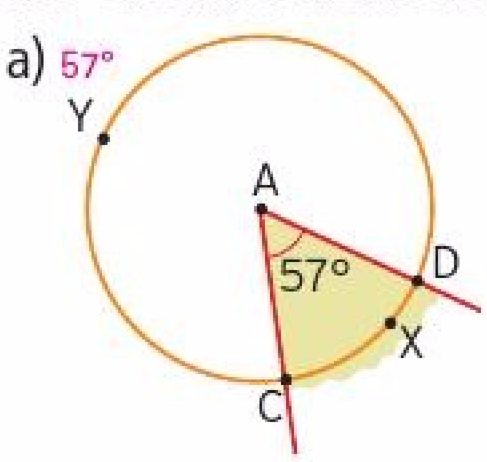
b) Que tipo de triângulo é o △OAB? Justifique sua resposta. O △OAB é isósceles, porque $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios).

c) Nas expressões algébricas que indicam as medidas dos ângulos $O\hat{A}B$ e $A\hat{B}O$, a letra **a** representa uma medida em graus. Qual é o valor de **a**? 40,8° ou 40° 48′

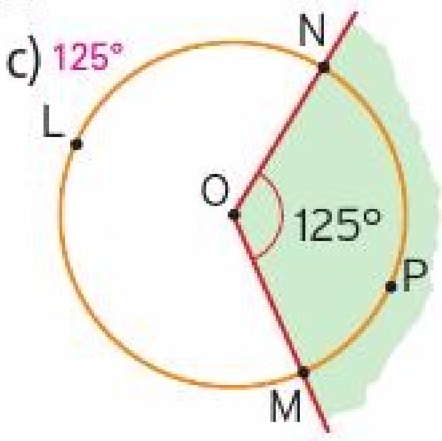
d) Qual é a medida, em graus, do arco BRA?
307,2° ou 307° 12′

4. Quais são as medidas, em graus, dos arcos correspondentes aos ângulos centrais destacados nas circunferências a seguir?

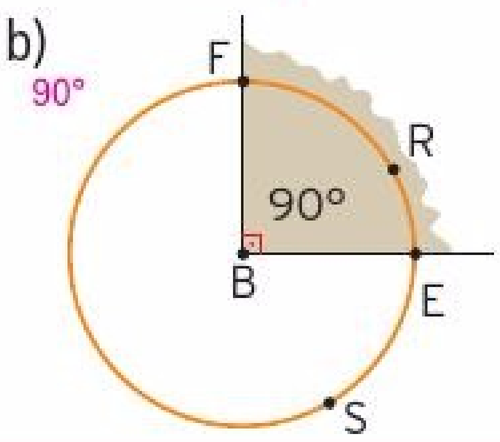
a) 57°



c) 125°

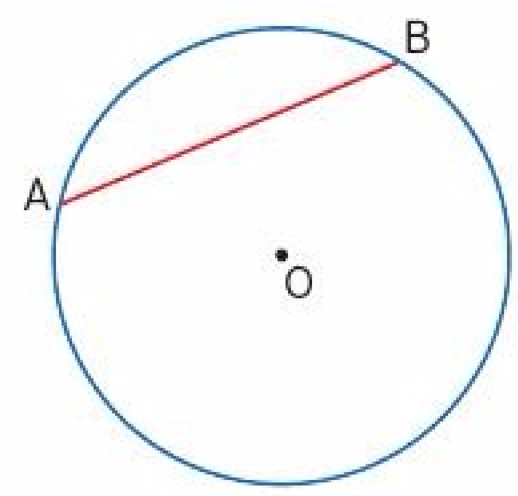


b) 90°



5. Em cada figura da atividade 4, nomeie o outro arco que completa 360° e determine sua medida em graus. $\overset{\frown}{DYC} = 303°$; $\overset{\frown}{FSE} = 270°$; $\overset{\frown}{NLM} = 235°$

6. Na circunferência abaixo, um raio mede 12 cm e $\overline{AB}$ é uma corda que mede 18 cm. Qual é o perímetro do triângulo AOB? 42 cm



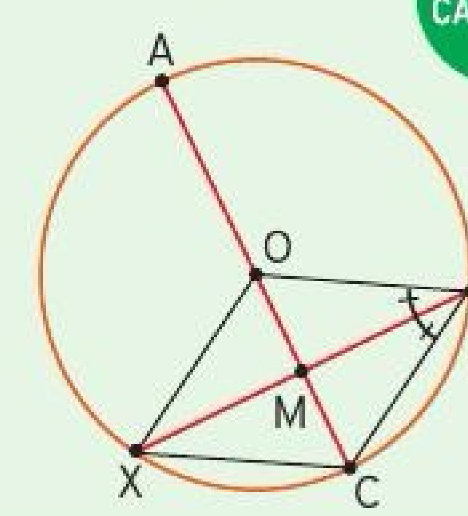
Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam à questão.

Nesta figura, $\overline{AC}$ é um diâmetro perpendicular à corda $\overline{XY}$ e $\overrightarrow{YX}$ é bissetriz de $O\hat{Y}C$.

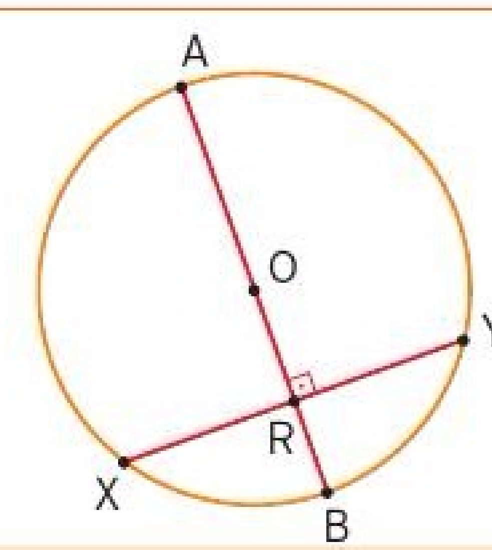
- Se med $O\hat{Y}C = 3a + 17°$ e med $Y\hat{O}M = 2a + 29°$, qual será a medida do ângulo $O\hat{Y}C$? 62°



Propriedade das cordas

Para refletir e responder

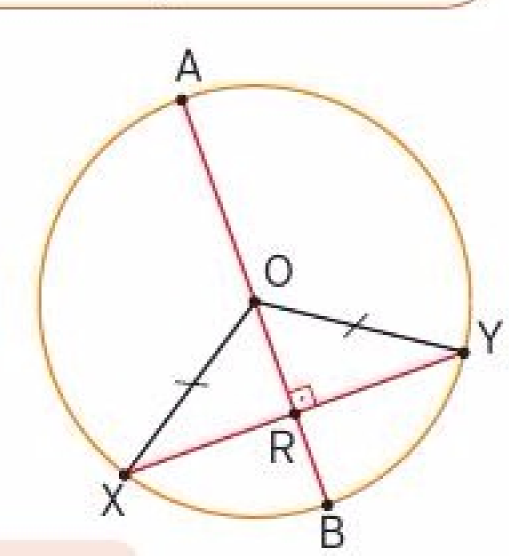
Nesta figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro e $\overline{XY}$, uma corda perpendicular a $\overline{AB}$.



- Faça um desenho como este e trace outras três cordas perpendiculares a $\overline{AB}$. Qual é a posição de cada ponto de intersecção dessas cordas com o diâmetro $\overline{AB}$?
São pontos médios das cordas traçadas.

Nessa situação, vamos demonstrar que **R** é ponto médio de $\overline{XY}$.

Desenhando os raios $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$, temos o triângulo OXY, como mostra a figura:



$\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ são raios ——— $\overline{OX} \equiv \overline{OY}$ ——— Triângulo OXY é isósceles.

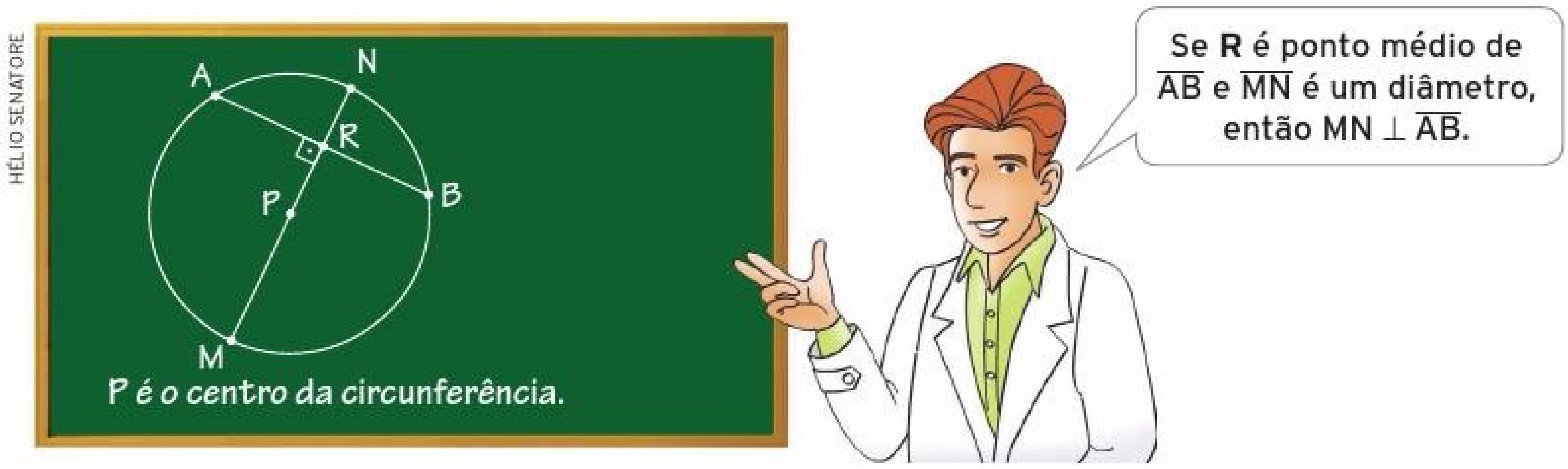
$\overline{OR} \perp \overline{XY}$ ——— $\overline{OR}$ é a altura relativa à base $\overline{XY}$.

$\overline{OR}$ é a mediana relativa à base $\overline{XY}$. **R** é o ponto médio de $\overline{XY}$.

Propriedade Em uma circunferência, qualquer diâmetro perpendicular a uma corda encontra essa corda em seu ponto médio.

É possível demonstrar também que:

Se um diâmetro contém o ponto médio de uma corda, então ele é perpendicular a essa corda.



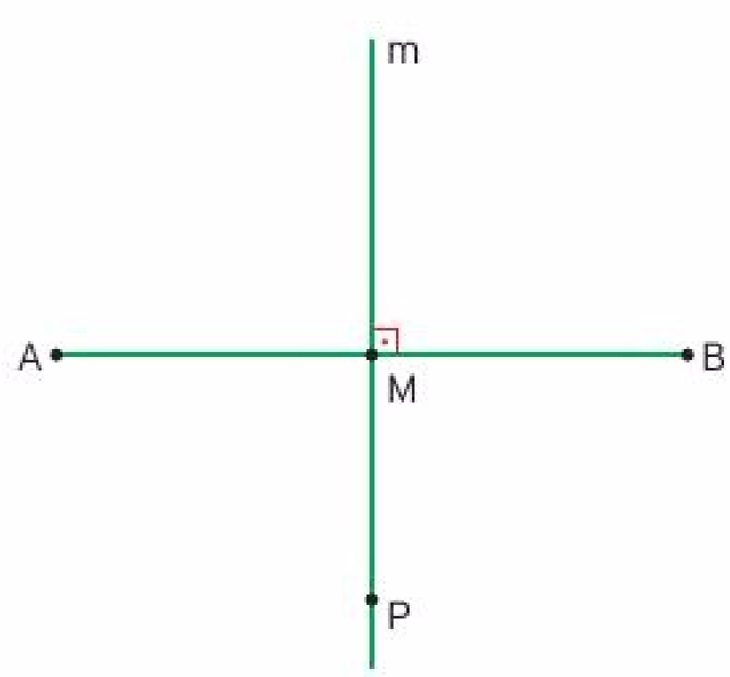
Vamos explorar a relação entre uma circunferência e a mediatriz de uma **corda**.

Lembrando que:

A reta mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico formado por todos os pontos que são equidistantes das extremidades desse segmento.

Exemplo:

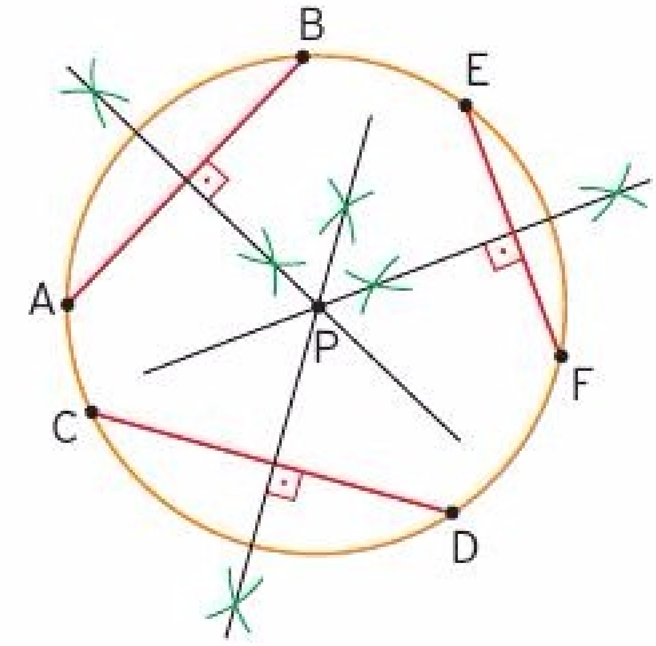
Na figura a seguir, **m** é mediatriz de $\overline{AB}$.



Agora, veja o que ocorre com as mediatrizes de uma corda.

Na circunferência de centro **P** abaixo, foram desenhadas as cordas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$. Ao traçarmos suas mediatrizes observamos que elas passam pelo centro da circunferência.

Em uma circunferência, a mediatriz de qualquer corda contém o centro dessa circunferência.



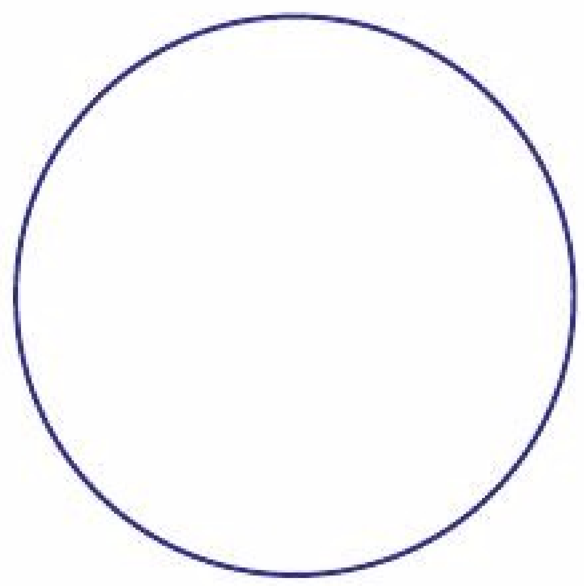
Assim, quando não conhecemos o centro de uma circunferência podemos determiná-lo traçando a mediatriz de pelo menos duas cordas.

Fazer e aprender

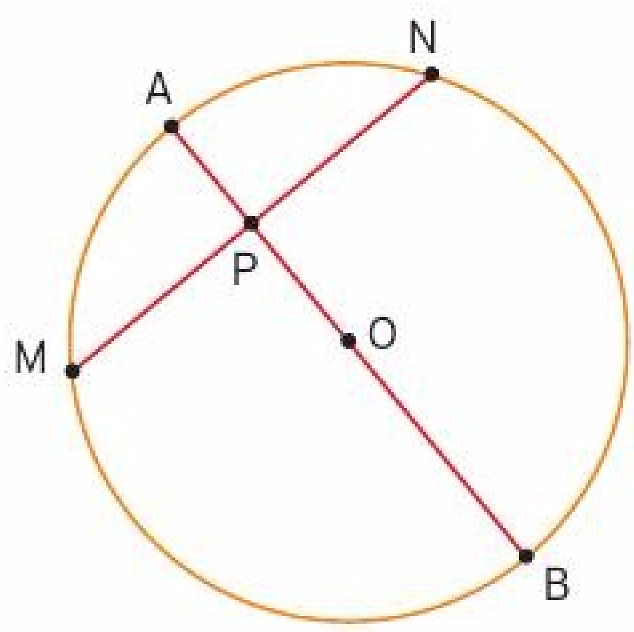
FAÇA NO CADERNO

Traçam-se duas cordas e as mediatrizes dessas cordas. A interseção dessas mediatrizes é o centro.

7. Na circunferência abaixo não foi marcado o centro. Descreva um procedimento para determinar o centro dessa circunferência.



8. Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro perpendicular à corda $\overline{MN}$. Copie as sentenças a seguir, substituindo o ■ por palavras ou medidas de modo que elas sejam verdadeiras:

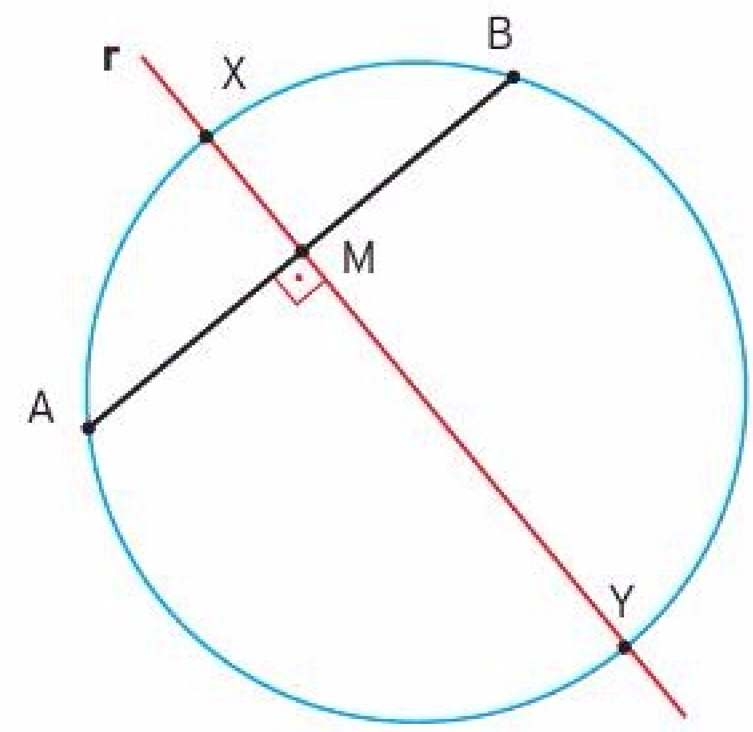


a) **P** é o ponto ■ de $\overline{MN}$. médio

b) Se med $\overline{MN}$ = 6 cm, então med $\overline{MP}$ = ■. 3 cm

c) Se med $\overline{PN}$ = 4,9 cm, então med $\overline{MN}$ = ■. 9,8 cm

9. Um pedreiro está construindo uma piscina circular com 3,5 m de raio. No esboço que ele fez havia uma corda $\overline{AB}$ e uma reta **r** perpendicular a ela passando pelo ponto médio, **M**, de $\overline{AB}$.



a) Nessa figura, qual é a reta que contém o centro dessa circunferência? r

b) Que tipo de corda é $\overline{XY}$? Um diâmetro.

c) Quanto mede $\overline{XY}$? 7 m

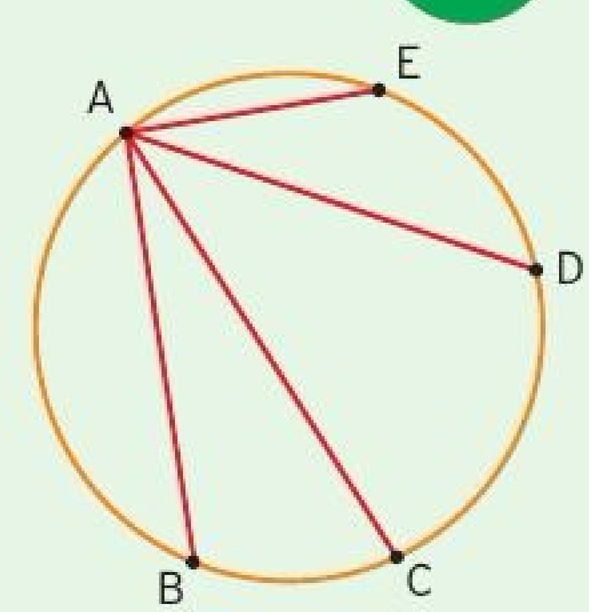
d) O que a reta $\overleftrightarrow{XY}$ é em relação a $\overline{AB}$? Mediatriz de $\overline{AB}$.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões.

Os segmentos de reta destacados na figura ao lado têm uma extremidade no ponto **A** e a outra em um dos outros quatro pontos: **B**, **C**, **D** ou **E**.



- Quantas cordas como essas podem ser traçadas com extremidades nos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**? 10 cordas.
- Se forem destacados **6** pontos nessa circunferência, quantas cordas têm extremidades nesses pontos? 15 cordas.
- Se forem destacados **10** pontos nessa circunferência, quantas cordas têm extremidades nesses pontos? 45 cordas.
- É possível encontrar uma fórmula para calcular o número de cordas em função do número de pontos? Sim. Para **n** pontos, temos $\frac{(n-1) \cdot n}{2}$.

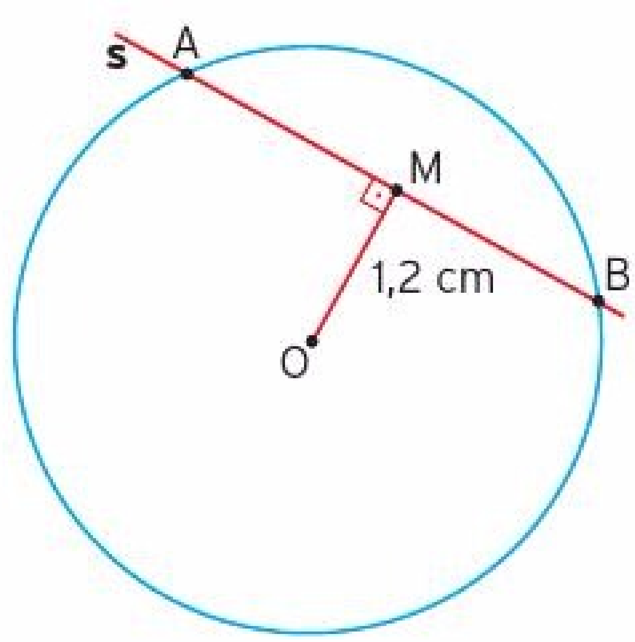
2 Circunferências e retas em um plano

Propriedade das tangentes

Este é um tema com poucas aplicações neste nível. Além disso, será retomado mais adiante. Portanto, não há necessidade de se dar muita ênfase a ele.

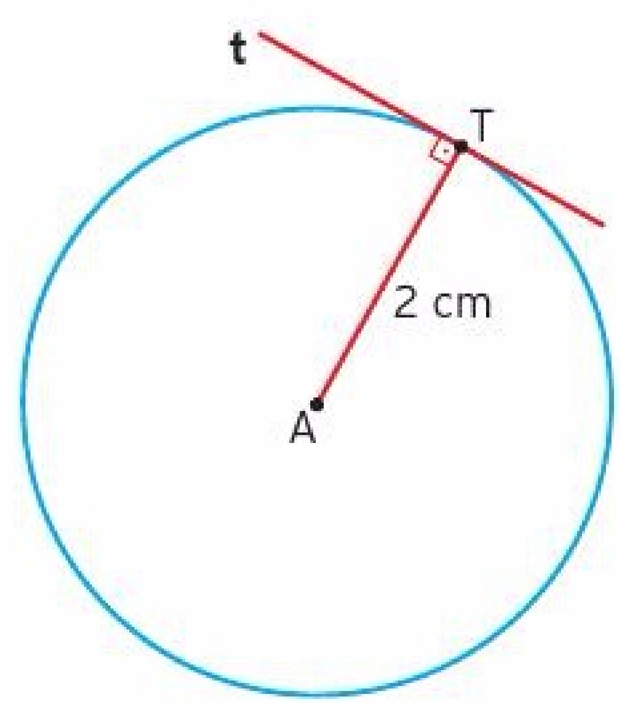
Quando desenhamos uma reta e uma circunferência em um mesmo plano, elas podem ter, ou não, ponto em comum. Observe a distância do centro das circunferências abaixo, com raio de 2 cm, às retas **s**, **t** e **m** e o número de pontos comuns entre eles:

med $\overline{OM} < 2$ cm



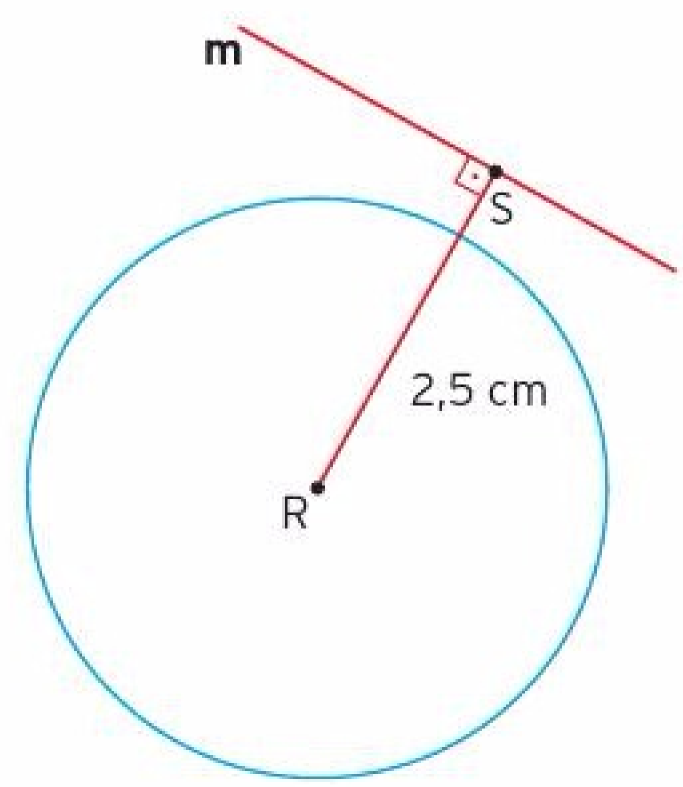
Existem **dois** pontos comuns: **A** e **B**.
A reta **s** é **secante** à circunferência.

med $\overline{AT} = 2$ cm



Existe **um** ponto comum: **T**.
A reta **t** é **tangente** à circunferência.
T é o **ponto de tangência**.

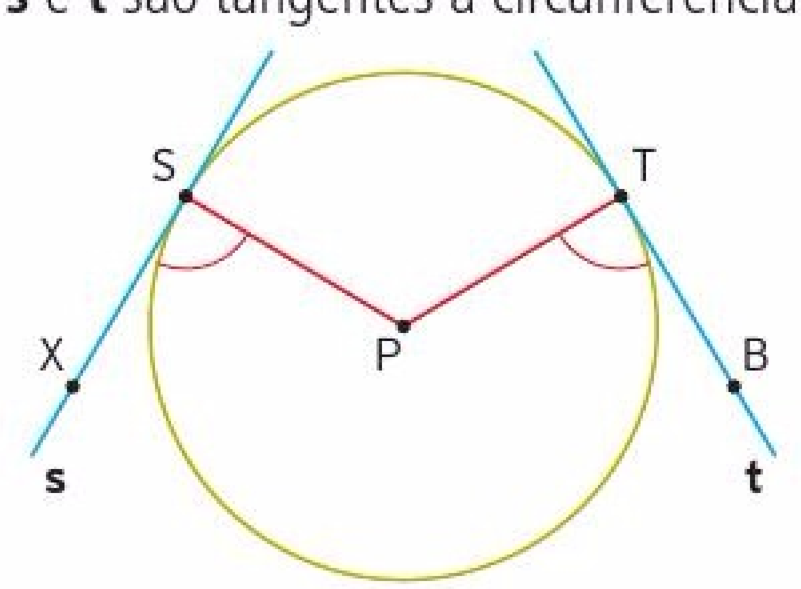
med $\overline{RS} > 2$ cm



Não existem pontos comuns.
A reta **m** é **externa** à circunferência.

Para refletir e responder

Na figura abaixo, as retas **s** e **t** são tangentes à circunferência nos pontos **S** e **T**, respectivamente.



- Qual é a medida dos ângulos $P\hat{S}X$ e $P\hat{T}B$? 90°

É possível demonstrar que:

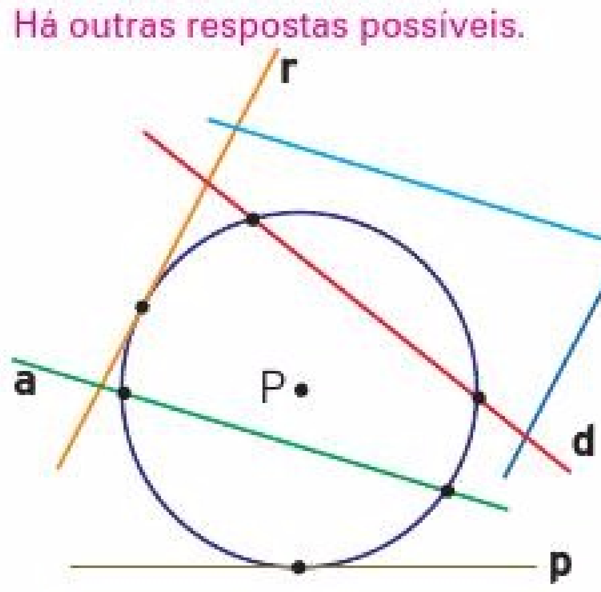
Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que tem como uma das extremidades o ponto de tangência.

Toda reta que contém um diâmetro de uma circunferência e passa pelo ponto de tangência de uma reta tangente a ela é perpendicular a essa reta.

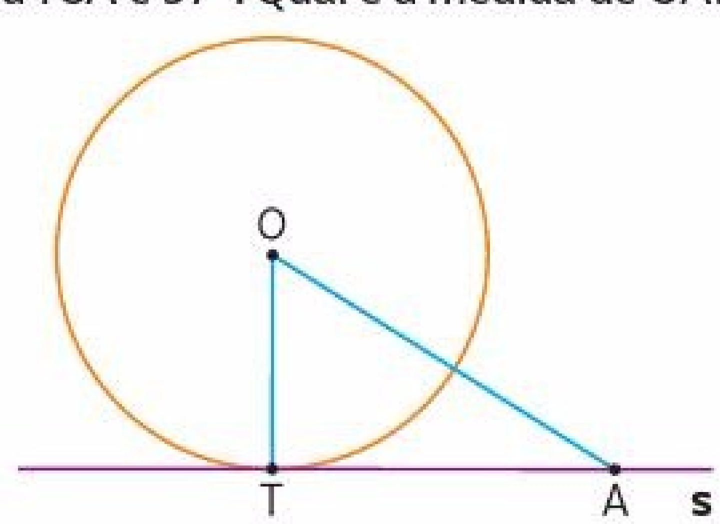
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Nesta figura, identifique o nome de uma reta secante, uma tangente e outra externa à circunferência. **d**, **r** e **s**, respectivamente. Há outras respostas possíveis.

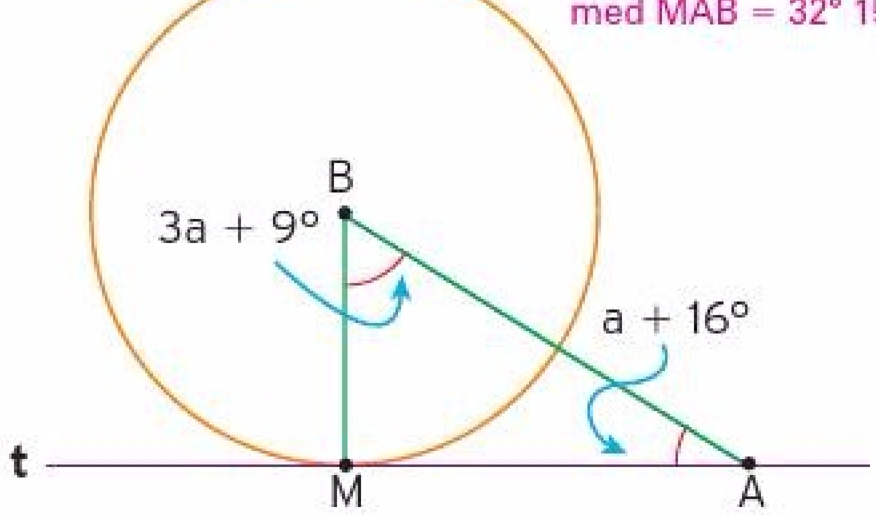


11. Nesta figura, **s** é tangente à circunferência no ponto **T** e med $T\hat{O}A$ é 57°. Qual é a medida de $O\hat{A}T$? 33°



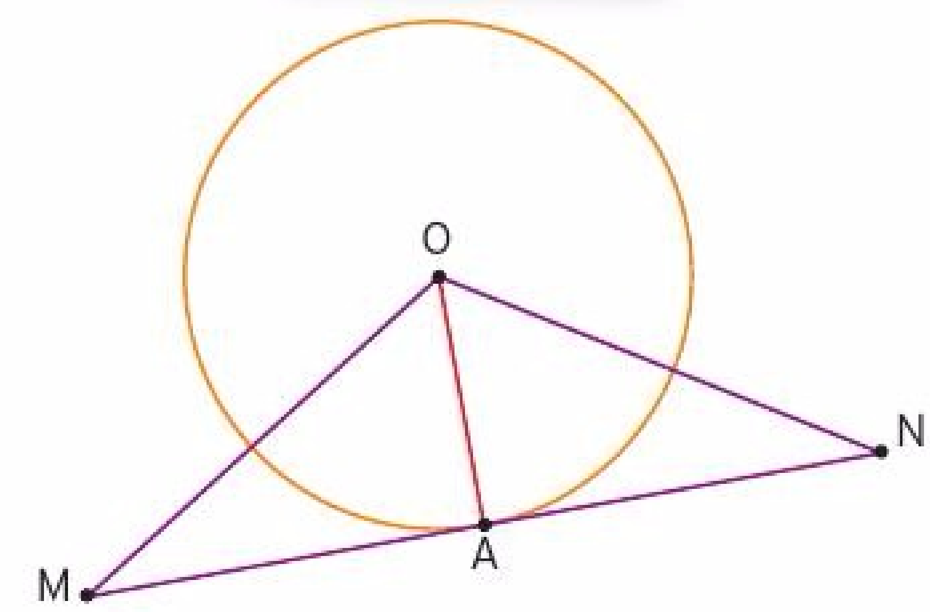
12. Determine o valor de **a** e a medida do ângulo $M\hat{A}B$ na figura abaixo, em que a reta **t** é tangente à circunferência no ponto **M**.

$a = 16° \, 15'$
med $M\hat{A}B = 32° \, 15'$

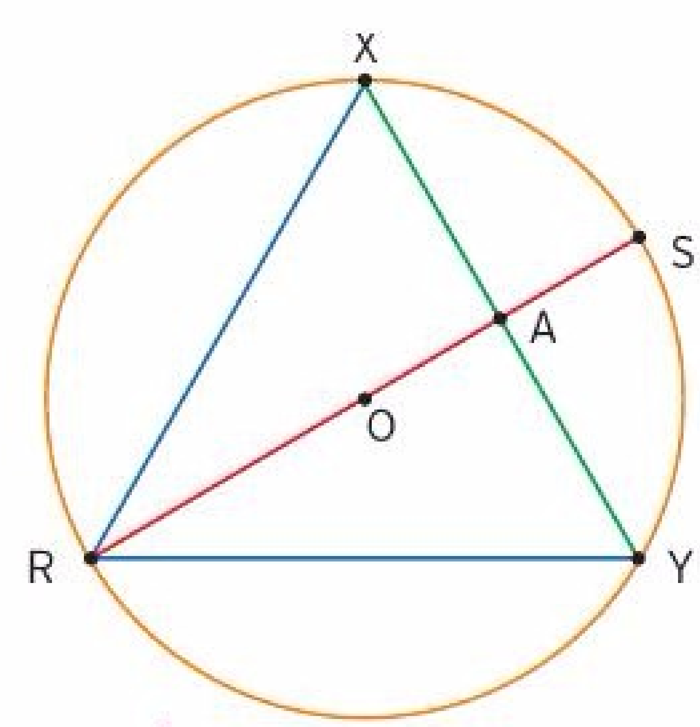


13. A circunferência na figura representada a seguir tem $3\sqrt{2}$ cm de raio. Foi traçado $\overline{MN}$ com $8\sqrt{2}$ cm de comprimento, tangente à circunferência no ponto **A** e de modo que $\overline{OM} \equiv \overline{ON}$. Qual é a medida aproximada de $\overline{OM}$? 7,05 cm

Use $\sqrt{2} \cong 1{,}41$.



14. Nesta figura, $\overline{RS}$ é um diâmetro e **A** é o ponto médio de $\overline{XY}$. Mostre que o triângulo XRY é isósceles.



$\overline{RS}$ é diâmetro.
A é ponto médio de $\overline{XY}$.
$\overline{XY}$ é corda.
$\overline{RS} \perp \overline{XY}$ e contém o ponto médio de $\overline{XY}$.
Logo, $\overleftrightarrow{RS}$ é mediatriz de $\overline{XY}$.
R pertence à mediatriz de $\overline{XY}$ —— med $\overline{RX}$ = med $\overline{RY}$ —— $\overline{RX} = \overline{RY}$ —— $\triangle XRY$ é isósceles.

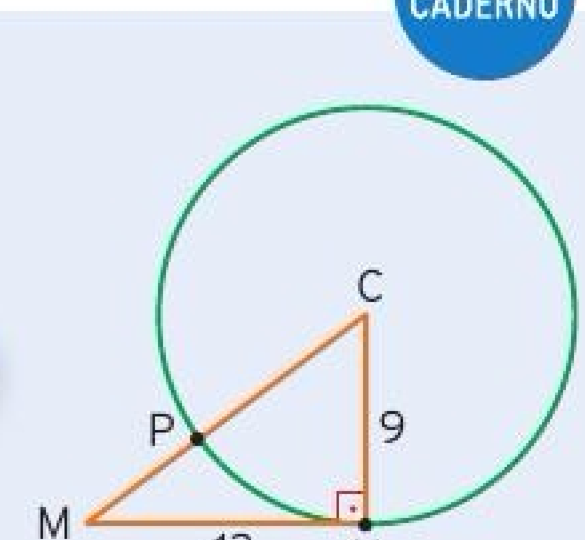
Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre as questões e encontrem soluções.

Nesta figura, a medida do raio da circunferência de centro **C** é 9 cm. O segmento de reta $\overline{MN}$ mede 12 cm e é tangente a essa circunferência no ponto **N**.

Medidas indicadas em cm.



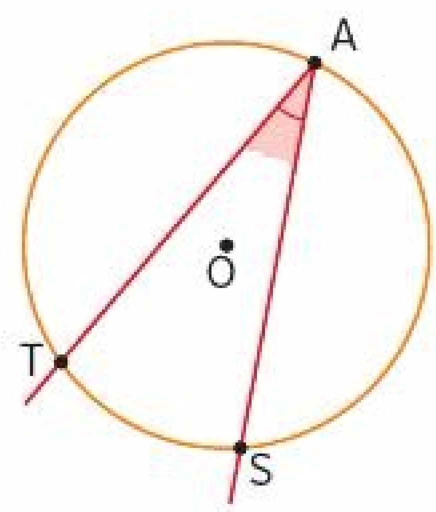
- Determinem o perímetro do $\triangle MNC$. 36 cm
- Determinem a medida do segmento de reta $\overline{MP}$. 6 cm

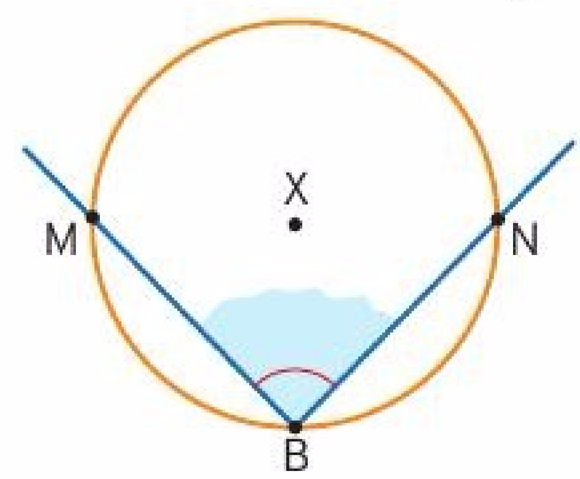
3 Ângulos com vértice em uma circunferência

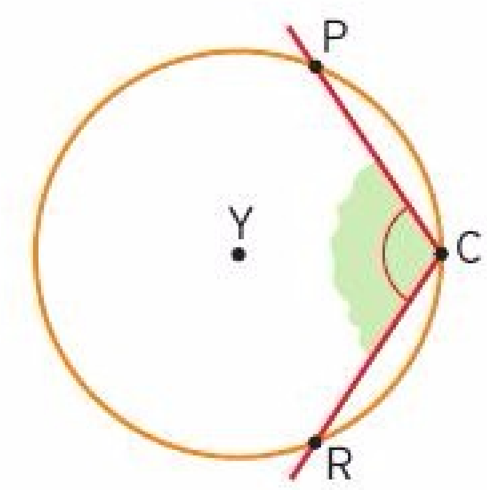
Este é um tema com poucas aplicações neste nível. Além disso, será retomado mais adiante. Portanto, não há necessidade de se dar muita ênfase a ele.

Ângulos inscritos em uma circunferência

Os vértices dos ângulos, nas figuras a seguir, são pontos das circunferências e seus lados são secantes a elas. Chamamos ângulos como esses de **ângulos inscritos** em uma circunferência.

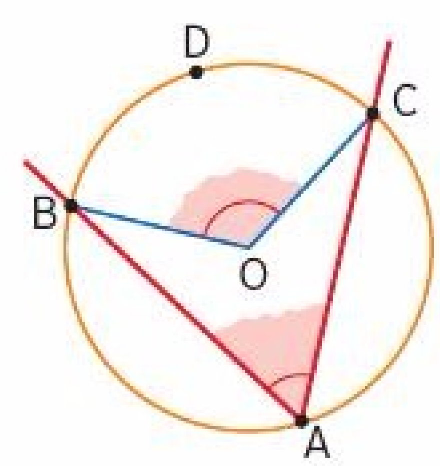






Um ângulo inscrito em uma circunferência determina, sempre, um ângulo central correspondente a ele associado ao arco que fica em sua região angular.

Por exemplo, na figura abaixo:



$B\hat{A}C$ é um ângulo inscrito;

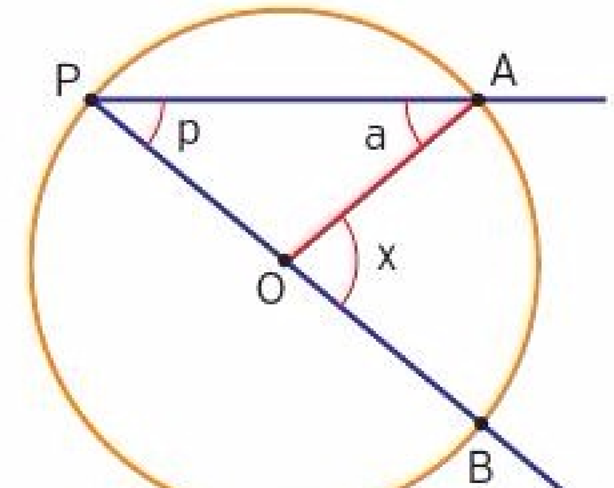
$\overset{\frown}{CDB}$ é o arco que fica na região angular de $B\hat{A}C$;

$B\hat{O}C$ é o ângulo central correspondente ao arco CDB.

Dizemos que $B\hat{O}C$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $B\hat{A}C$ porque ambos determinam o mesmo arco CDB na circunferência.

Vamos demonstrar que a medida de qualquer ângulo inscrito em uma circunferência é sempre a metade da medida do ângulo central a ele correspondente.

Para essa demonstração, consideraremos três situações de ângulos inscritos em uma circunferência:



- O centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo inscrito.

  Vamos demonstrar que $p = \dfrac{x}{2}$.

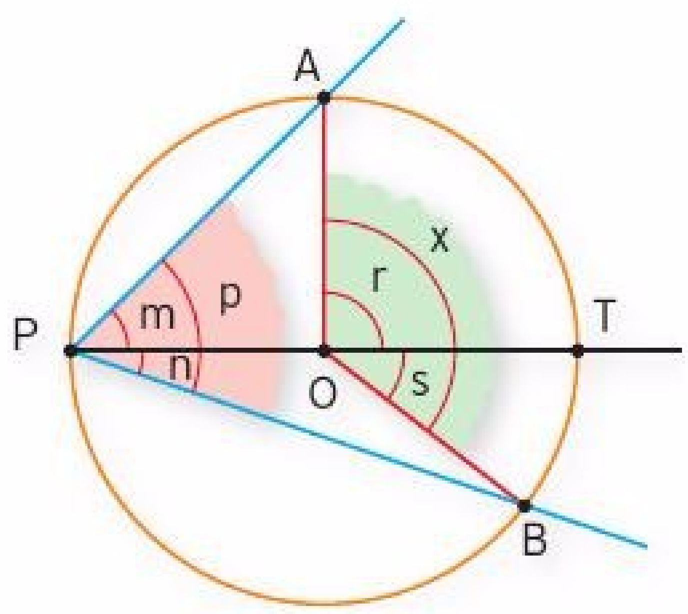
  $\overline{OP} \equiv \overline{OA}$ (raios) —— $\triangle APO$ é isósceles.

  $\hat{A} \equiv \hat{P}$ —— $a = p$

No triângulo APO, $A\hat{O}B$ é um ângulo externo, não adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{P}$. Portanto:

$$x = \underbrace{a}_{p} + p \quad x = p + p \quad x = 2p \quad \boxed{p = \frac{x}{2}}$$

- O centro da circunferência pertence à região angular do ângulo inscrito nessa circunferência.



Vamos demonstrar que $\mathbf{p = \frac{x}{2}}$ recorrendo à situação anterior. Para isso, decompomos os ângulos de modo que $\mathbf{m + n = p}$ e $\mathbf{r + s = x}$.

$A\hat{P}T$ é um ângulo inscrito.
O centro **O** pertence a $\overrightarrow{PT}$. $\quad \boxed{m = \frac{r}{2}}$

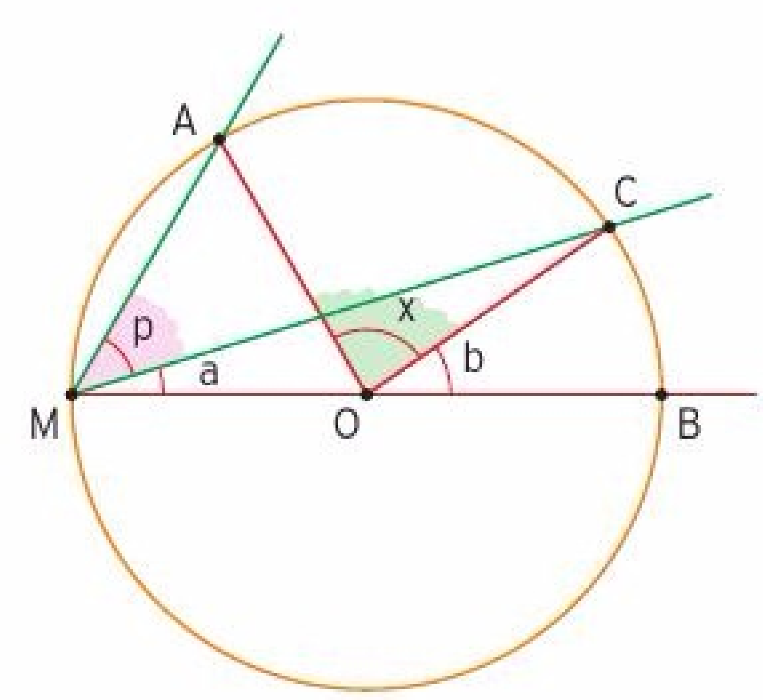
$T\hat{P}B$ é um ângulo inscrito.
O centro **O** pertence a $\overrightarrow{PT}$. $\quad \boxed{n = \frac{s}{2}}$

Adicionando **m** e **n**, temos:

$$m + n = \frac{r}{2} + \frac{s}{2} \quad m + n = \frac{r + s}{2} \quad \boxed{p = \frac{x}{2}}$$

- O centro da circunferência não pertence a nenhum dos lados do ângulo inscrito nem à região angular a ele correspondente.

Traçando $\overrightarrow{MB}$, que passa pelo centro **O**, obtemos os ângulos $A\hat{M}B$ e $C\hat{M}B$, que são ângulos inscritos em uma posição semelhante aos da primeira situação:

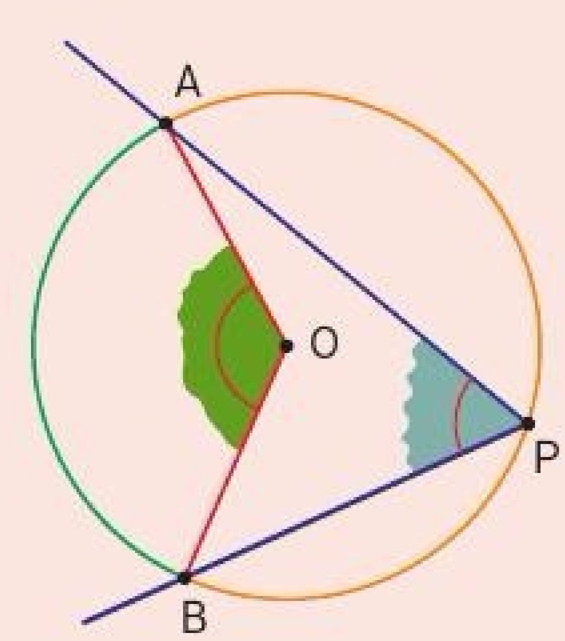


$$p + a = \frac{x + b}{2} \quad p + \frac{b}{2} = \frac{x + b}{2}$$

$$a = \frac{b}{2} \qquad p + \cancel{\frac{b}{2}} = \frac{x}{2} + \cancel{\frac{b}{2}} \quad \boxed{p = \frac{x}{2}}$$

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central por ele determinado.

$$\text{med } A\hat{P}B = \frac{\text{med } A\hat{O}B}{2}$$

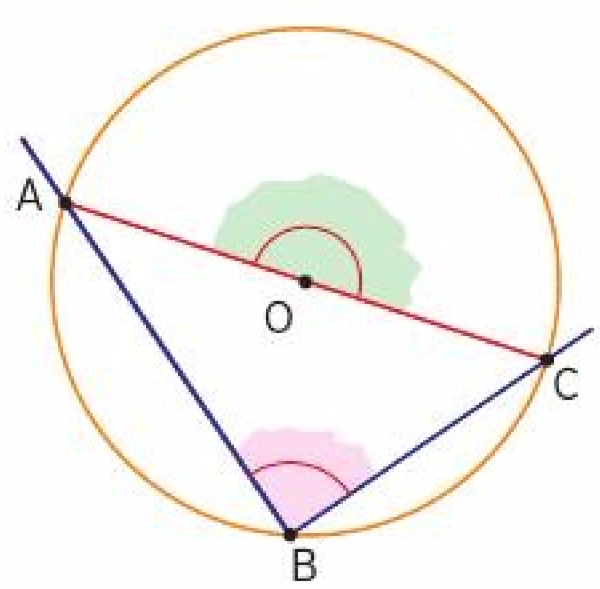


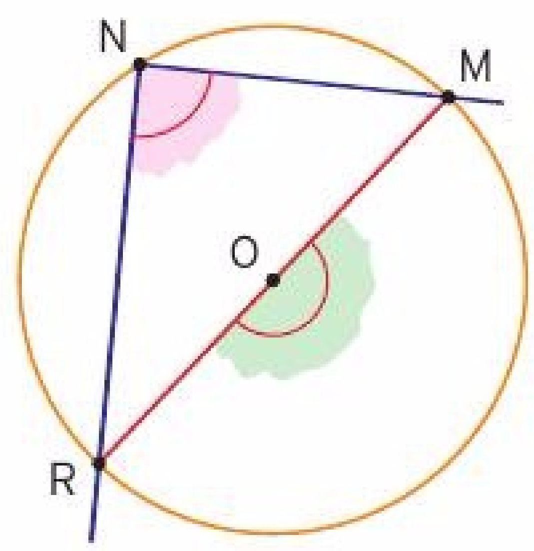
Ângulos inscritos em uma semicircunferência

Para refletir e responder

Observe as circunferências nas figuras a seguir.

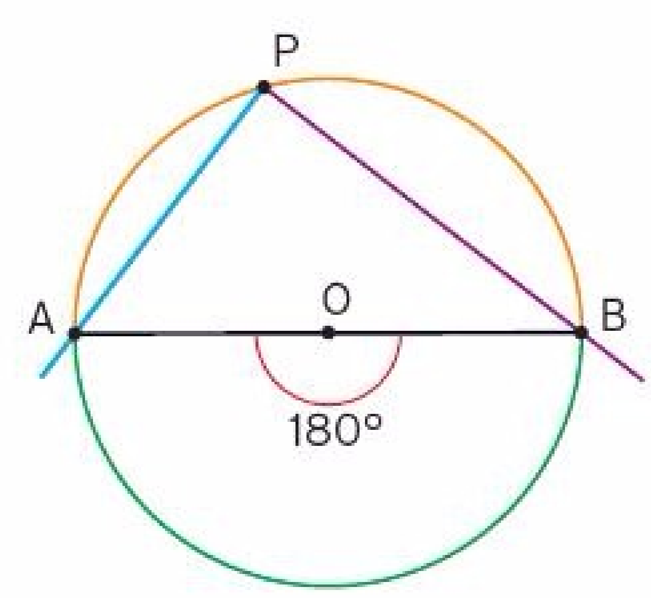
Nelas, $A\hat{B}C$ e $M\hat{N}R$ são ângulos inscritos em uma semicircunferência e determinam ângulos centrais que são ângulos rasos.





- Qual é a medida de um ângulo inscrito em uma semicircunferência? 90°

Na figura abaixo, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito em uma semicircunferência e $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente a ele.



$A\hat{O}B$ é um ângulo raso. —— med $A\hat{O}B = 180°$

$$\text{med } A\hat{P}B = \frac{\text{med } A\hat{O}B}{2} = \frac{180°}{2}$$

med $A\hat{P}B = 90°$ —— $A\hat{P}B$ é um ângulo reto.

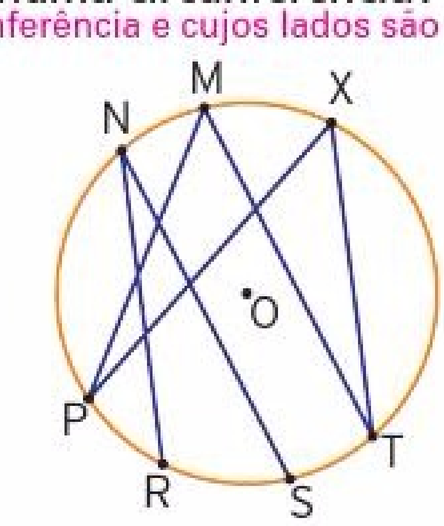
Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto e mede 90°.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

15. O que é um ângulo inscrito numa circunferência? É um ângulo com vértice na circunferência e cujos lados são secantes a ela.

16. Observe a figura ao lado e faça o que se pede:



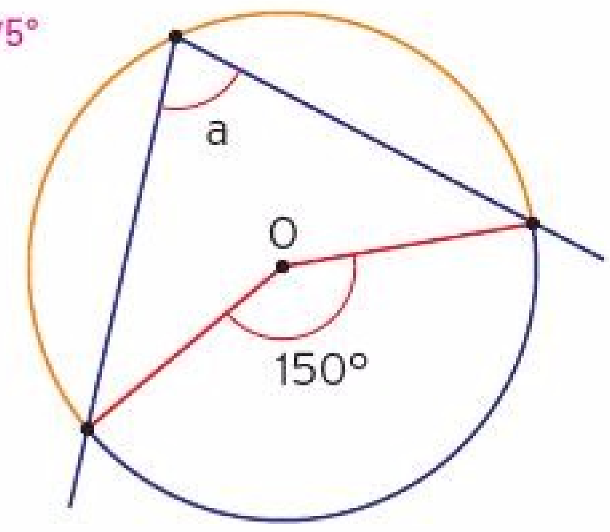
a) Identifique um ângulo inscrito na circunferência e o ângulo central a ele correspondente. $S\hat{N}R$ e $S\hat{O}R$. Há outras respostas possíveis.

b) Identifique dois ângulos inscritos congruentes. $T\hat{M}P$ e $T\hat{X}P$. Há outras respostas possíveis.

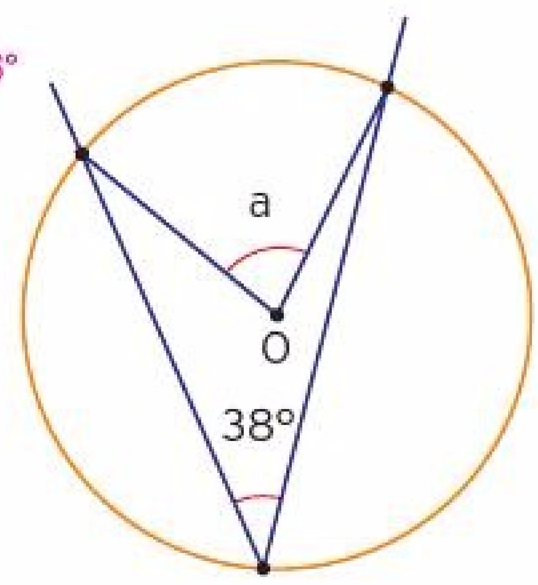
17. A medida de um ângulo central é 137°. Qual é a medida de um ângulo inscrito na circunferência correspondente a esse ângulo central? 68° 30' ou 68,5°

18. Determine o valor de **a** nas figuras a seguir.

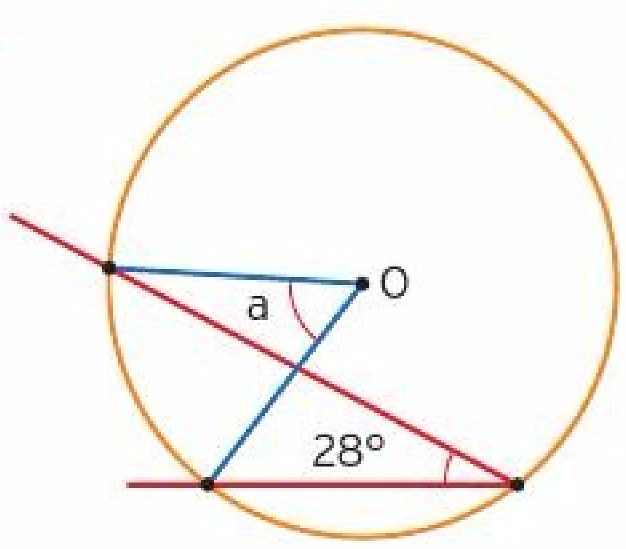
a) 75°



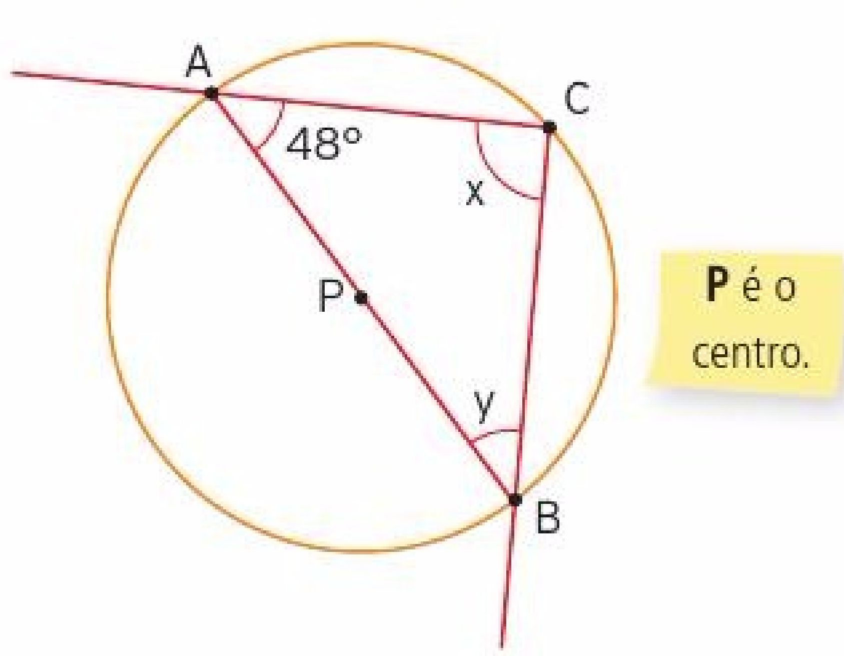
b) 76°



c) 56°



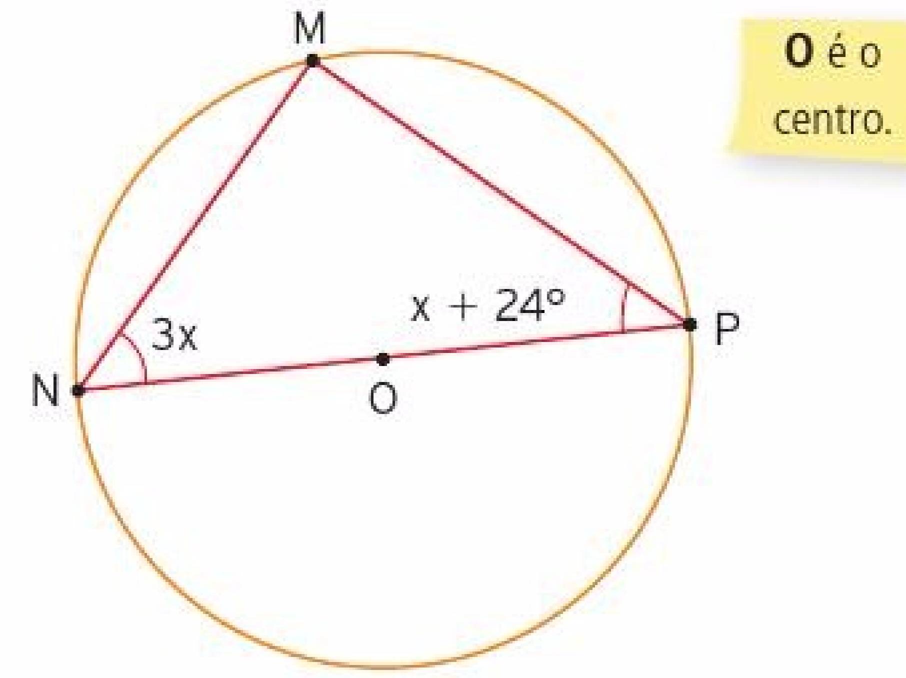
19. Observe os ângulos do △ABC desta figura e responda às questões.



a) Que tipo de triângulo é esse? Triângulo retângulo.

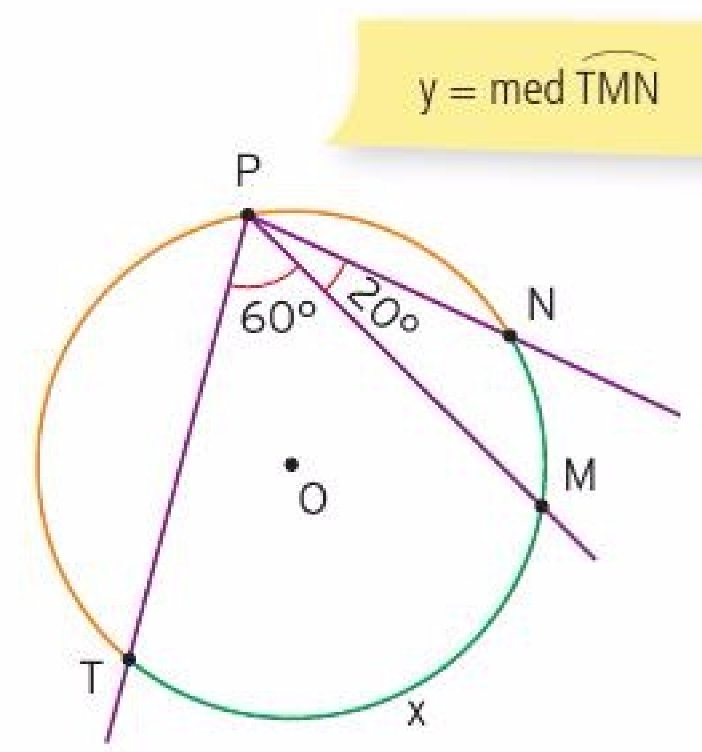
b) Qual é o valor de **x**? E de **y**? 90°; 42°

20. Determine a medida dos ângulos do △MNP indicados nesta figura. med $P\hat{M}N = 90°$; med $N\hat{P}M = 40° 30'$; med $M\hat{N}P = 49° 30'$

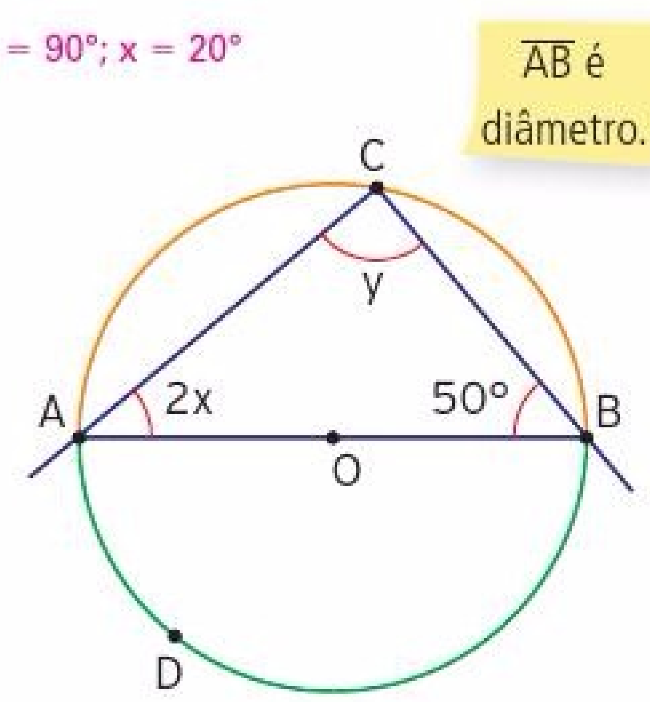


21. Nestas figuras, determine os valores de **x** e de **y**.

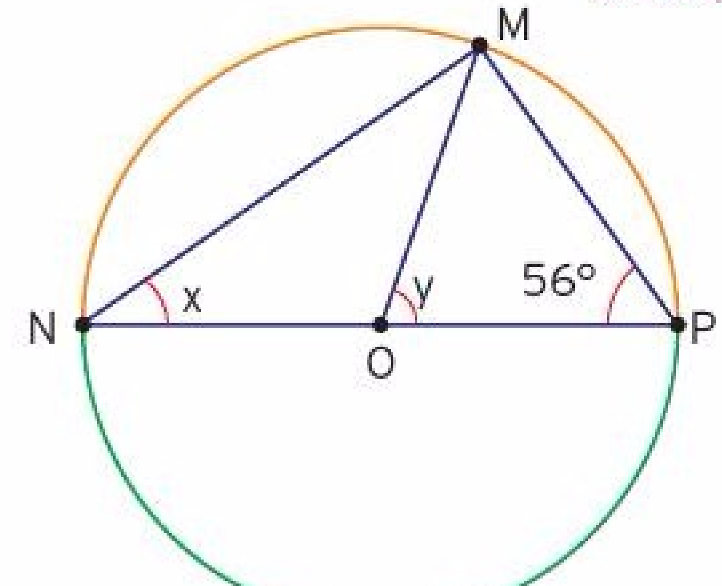
a) x = 120°; y = 160°



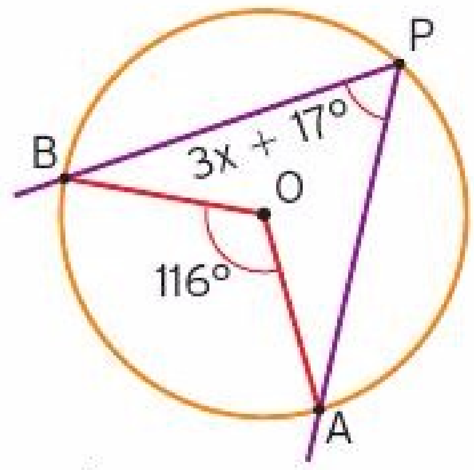
b) y = 90°; x = 20°



22. Determine os valores de **x** e de **y** na figura abaixo, em que **O** é o centro da circunferência. x = 34°; y = 68°



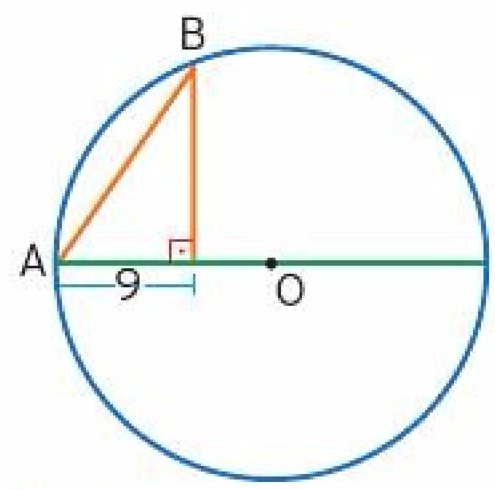
23. Considerando que, na figura ao lado, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito na circunferência de centro **O**, responda às questões:



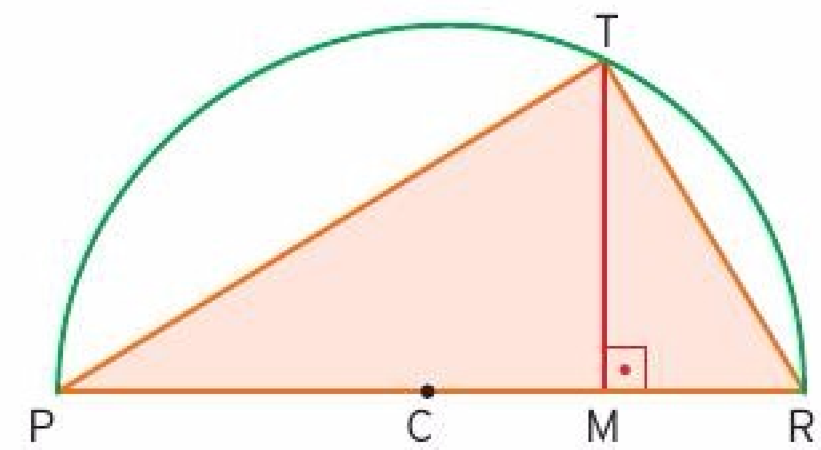
a) Determine a medida de $A\hat{P}B$. 58°

b) Determine o valor de **x**. 13° 40′

24. Em uma circunferência, a projeção ortogonal de uma corda $\overline{AB}$, que mede 15 cm, sobre um diâmetro que passa por uma de suas extremidades é igual a 9 cm. Determine a medida desse diâmetro. 25 cm



25. Nesta figura, **C** é o centro de uma semicircunferência de 16 cm de diâmetro e **M** é o ponto médio do raio $\overline{CR}$.



Responda às questões:

a) Determine a medida da corda $\overline{RT}$. 8 cm

b) Determine a medida da corda $\overline{TP}$. $8\sqrt{3}$ cm

c) Qual é o perímetro do triângulo PRT? $(24 + 8\sqrt{3})$ cm

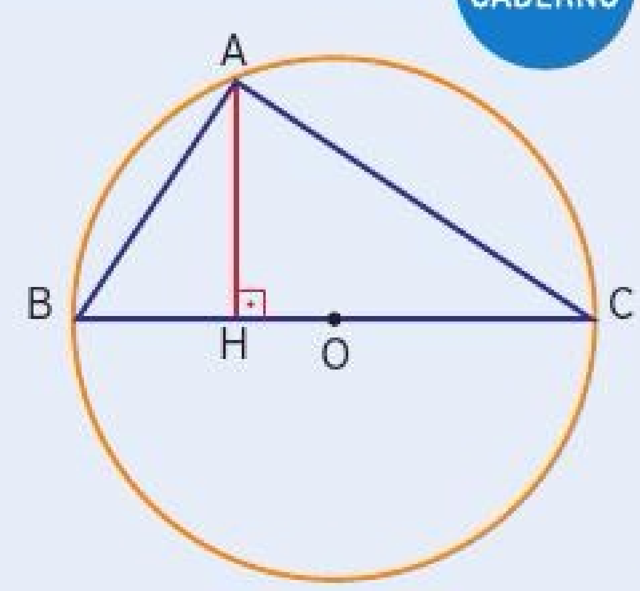
d) Qual é a área do triângulo PRT? $32\sqrt{3}$ cm²

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre o problema e encontrem uma solução.

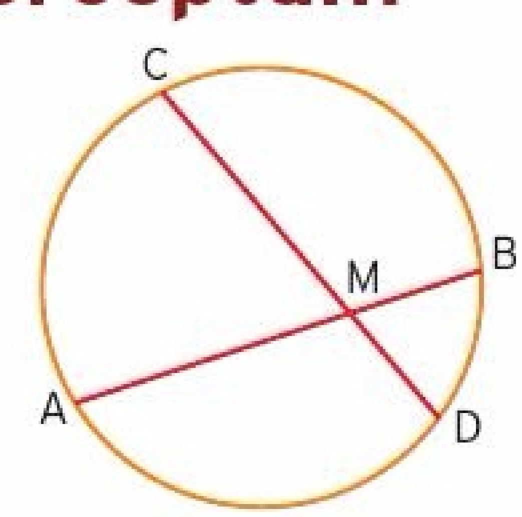
Nesta figura, o $\triangle ABC$ está inscrito em uma semicircunferência de centro **O** e raio de 3 cm. $\overline{AH}$ é a altura relativa a $\overline{BC}$ e $\overline{BH}$ mede 2 cm.



- Quanto mede $\overline{AC}$? $2\sqrt{6}$ cm

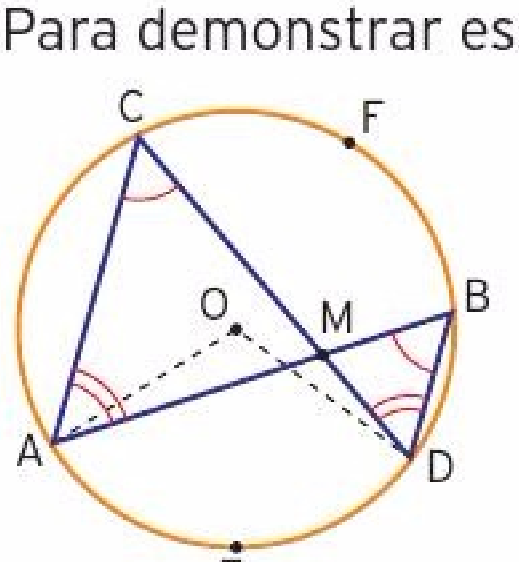
Cordas de uma circunferência que se interceptam

Na figura ao lado, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas que têm um ponto em comum e formam os segmentos de reta $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{CM}$ e $\overline{MD}$. Para as medidas desses segmentos de reta, podemos escrever:



$$\text{med } \overline{AM} \cdot \text{med } \overline{MB} = \text{med } \overline{CM} \cdot \text{med } \overline{MD}$$

Para demonstrar essa propriedade, vamos completar a figura traçando $\overline{CA}$ e $\overline{BD}$:



$A\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$ são ângulos inscritos nessa circunferência.

$$\left.\begin{array}{l} \text{med } A\hat{C}D = \dfrac{\text{med } A\hat{O}D}{2} \\[2ex] \text{med } A\hat{B}D = \dfrac{\text{med } A\hat{O}D}{2} \end{array}\right\} \text{med } A\hat{C}D = \text{med } A\hat{B}D \text{ —— } A\hat{C}D \equiv A\hat{B}D$$

$C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ são ângulos inscritos nessa circunferência.

$$\left.\begin{array}{l} \text{med } C\hat{A}B = \dfrac{\text{med } C\hat{O}B}{2} \\[2ex] \text{med } C\hat{D}B = \dfrac{\text{med } C\hat{O}B}{2} \end{array}\right] \text{med } C\hat{A}B = \text{med } C\hat{D}B \text{ —— } C\hat{A}B \equiv C\hat{D}B$$

Portanto,

$\triangle CAM$ e $\triangle BDM$ têm dois ângulos respectivamente congruentes —— $\triangle CAM \sim \triangle BDM$

Logo, os lados correspondentes são proporcionais. —— $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{MB}}$

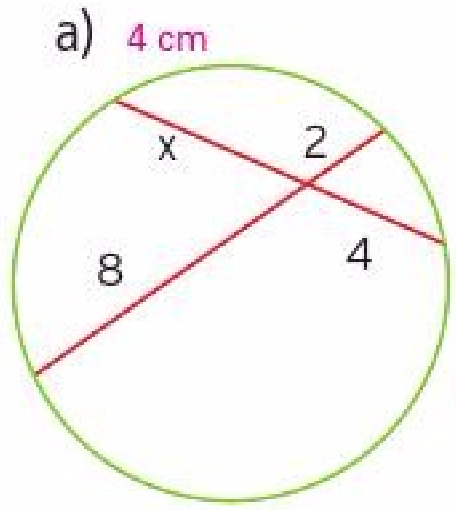
Ou ainda: $\dfrac{\text{med } \overline{AM}}{\text{med } \overline{MD}} = \dfrac{\text{med } \overline{CM}}{\text{med } \overline{MB}}$ —— $\mathbf{med\ \overline{AM} \cdot med\ \overline{MB} = med\ \overline{CM} \cdot med\ \overline{MD}}$

Fazer e aprender

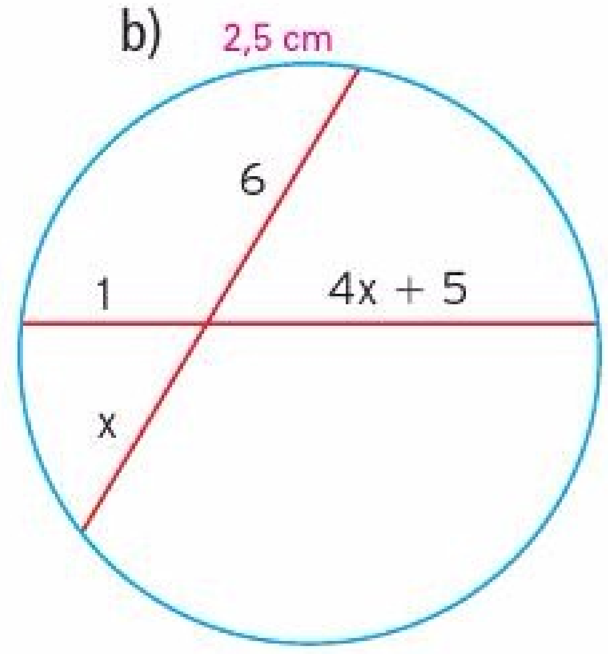
FAÇA NO CADERNO

26. Nas figuras a seguir as medidas estão indicadas em centímetros. Determine o valor de **x**:

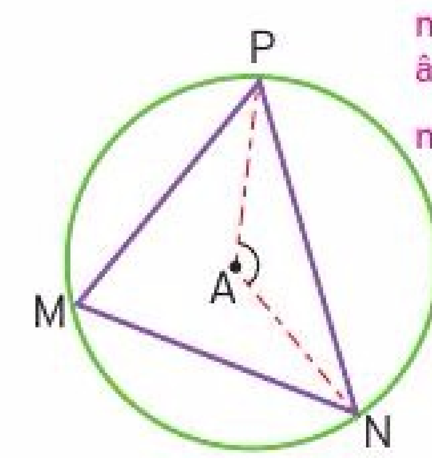
a) 4 cm



b) 2,5 cm



27. Na figura a seguir, o triângulo MNP é isósceles de base $\overline{NP}$ e seus vértices pertencem a uma circunferência de centro **A**.



med $P\hat{M}N$ é a metade da medida do ângulo central $P\hat{A}N$; logo:
med $P\hat{M}N = \dfrac{174^\circ}{2} = 87^\circ$; med $M\hat{N}P$ = = med $M\hat{P}N = \dfrac{(180 - 87)}{2}$ = = 46° 30'

med $P\hat{A}N = 174^\circ$

a) Descreva, indicando as etapas de modo resumido, como determinar as medidas dos ângulos desse triângulo.

b) Troque suas anotações com um colega. Cada um determina as medidas dos ângulos desse triângulo seguindo as etapas indicadas pelo colega. med $\hat{M} = 87^\circ$; med $\hat{N}$ = med $\hat{P}$ = 46° 30'

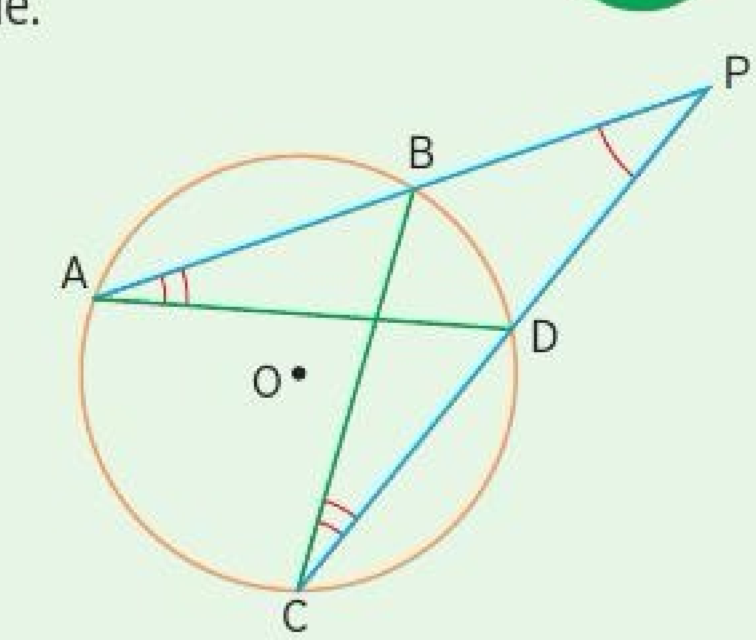
c) Para finalizar, confiram se ambos encontraram os mesmos valores.
Resposta pessoal.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e façam o que se pede.

Nesta figura, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$ são segmentos de reta secantes à circunferência.



- Os ângulos $P\hat{A}D \equiv P\hat{C}B$ são congruentes? Justifiquem sua resposta. Sim; são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco.
- Mostrem que med $\overline{PA}$ · med $\overline{PB}$ = med $\overline{PC}$ · med $\overline{PD}$.

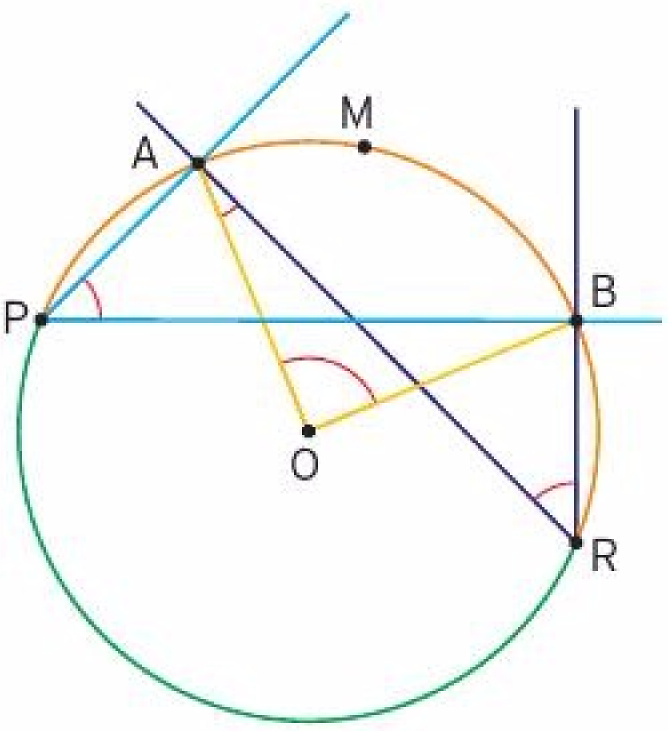
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{P} = \hat{P} \end{array}\right] \text{—— } \triangle PAD \sim \triangle PCB$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \text{ —— med } \overline{PA} \cdot \text{med } \overline{PB} = \text{med } \overline{PC} \cdot \text{med } \overline{PD}$$

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

28. Nesta figura, $A\hat{P}B$ e $A\hat{R}B$ são ângulos inscritos na circunferência de centro **O** e raio $\overline{OA}$.

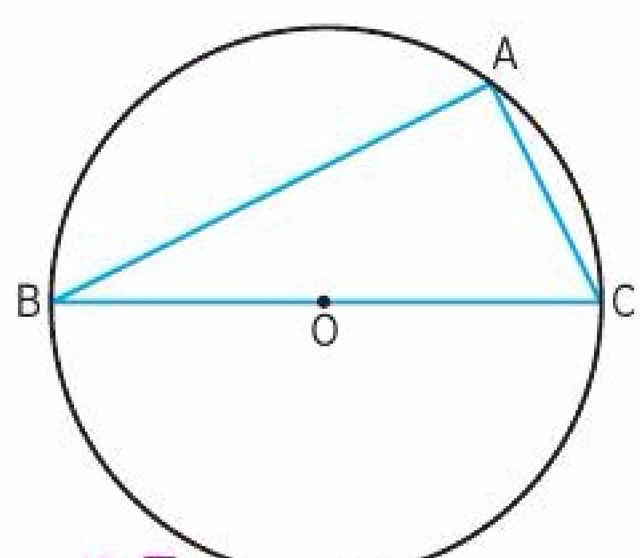


Sabendo que med $A\hat{P}B = 2x + 6°$ e med $A\hat{R}B = 5x - 42°$, responda às questões:

a) Qual é o valor de x? 16°

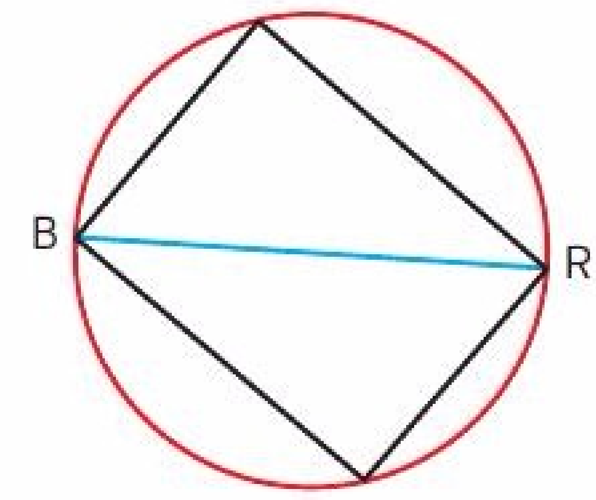
b) Qual é a medida do ângulo central $A\hat{O}B$? 76°

29. O raio da circunferência nesta figura mede 4,5 cm e $\overline{BC}$ é um diâmetro. Se a medida de $\overline{AB}$ é o dobro da medida de $\overline{AC}$, quais são as medidas dos lados do $\triangle ABC$?



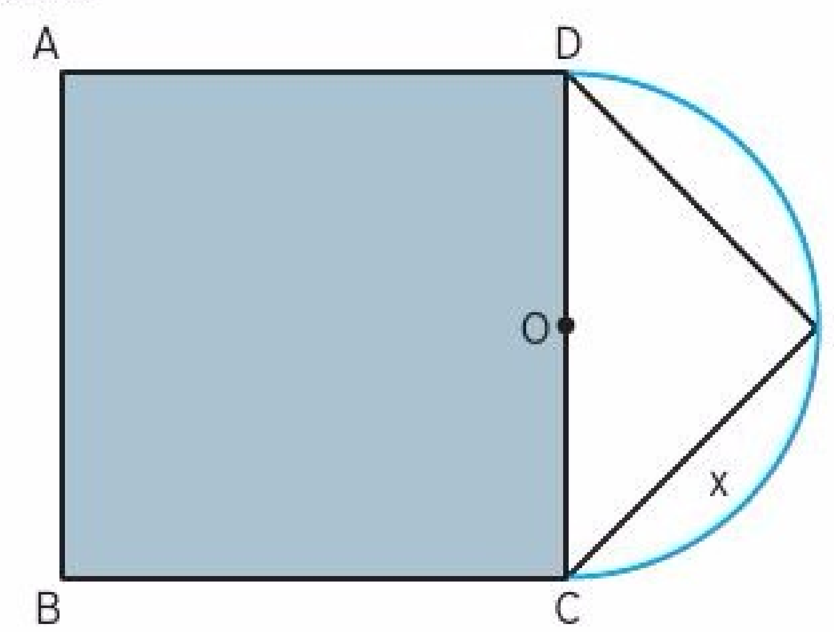
$\overline{BC} = 9$ cm; $\overline{AC} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ cm; $\overline{AB} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm

30. Um retângulo com 20 cm de comprimento e 15 cm de largura está inscrito em uma circunferência de diâmetro $\overline{BR}$. Qual é a medida do raio dessa circunferência? 12,5 cm



31. A área deste quadrado ABCD é 169 cm². O $\triangle CED$ é um triângulo isósceles inscrito em uma semicircunferência de centro **O**, cujo diâmetro é igual à medida do lado de ABCD. Determine o valor de **x**.

$\frac{13\sqrt{2}}{2}$ cm



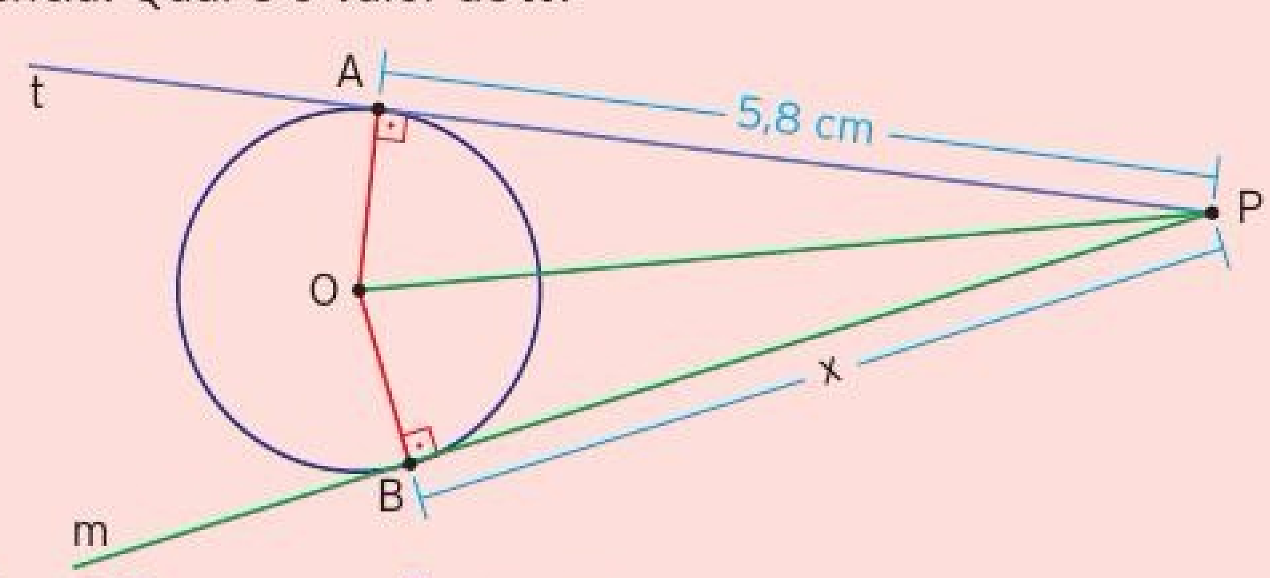
32. No exercício anterior, determine o perímetro e a área do triângulo CED. $13(\sqrt{2} + 1)$ cm e $\frac{169}{4}$ cm²

Desafio

FAÇA NO CADERNO

Qual é o valor?

As retas **t** e **m** são tangentes à circunferência. Qual é o valor de **x**?



$\triangle OAP = \triangle OBP$
$\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios)
$\overline{OP} = \overline{OP}$ (hipotenusa comum)

$\overline{AP} = \overline{BP}$
med $\overline{BP}$ = med $\overline{AP}$ = 5,8 cm —— x = 5,8 cm

4 Comprimento e área

Comprimento de uma circunferência

Faça um diagnóstico a respeito do conhecimento dos alunos sobre o tema comprimento da circunferência. Seu trabalho poderá ser abreviado conforme o resultado obtido.

Para refletir e responder

Observe estas circunferências e seus comprimentos aproximados.

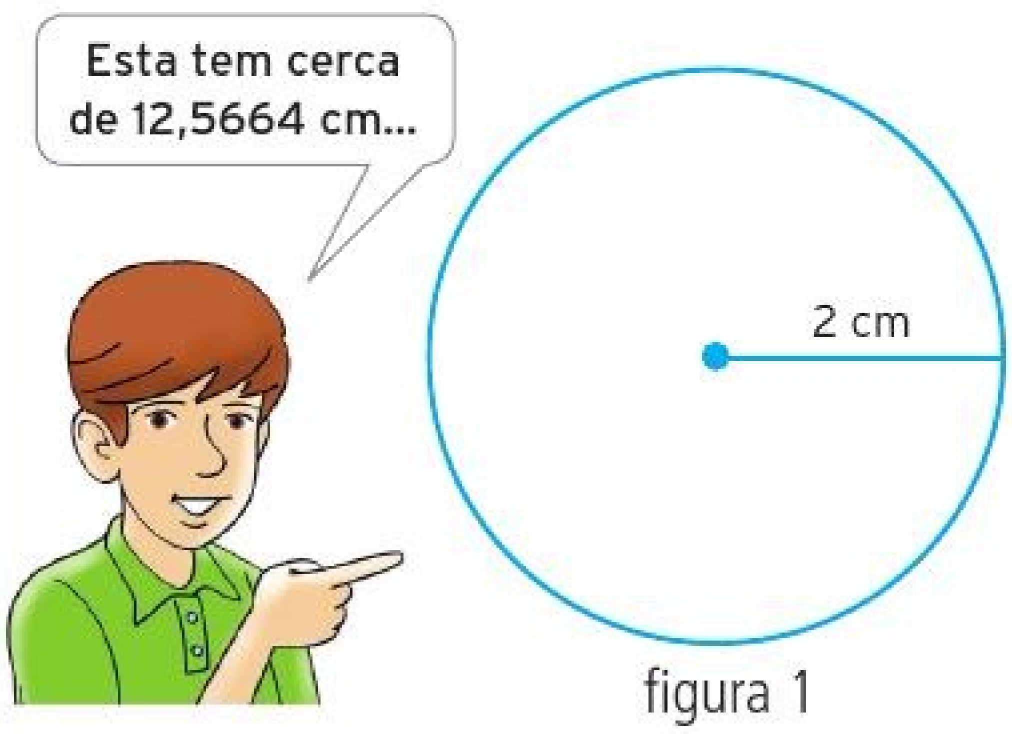


figura 1

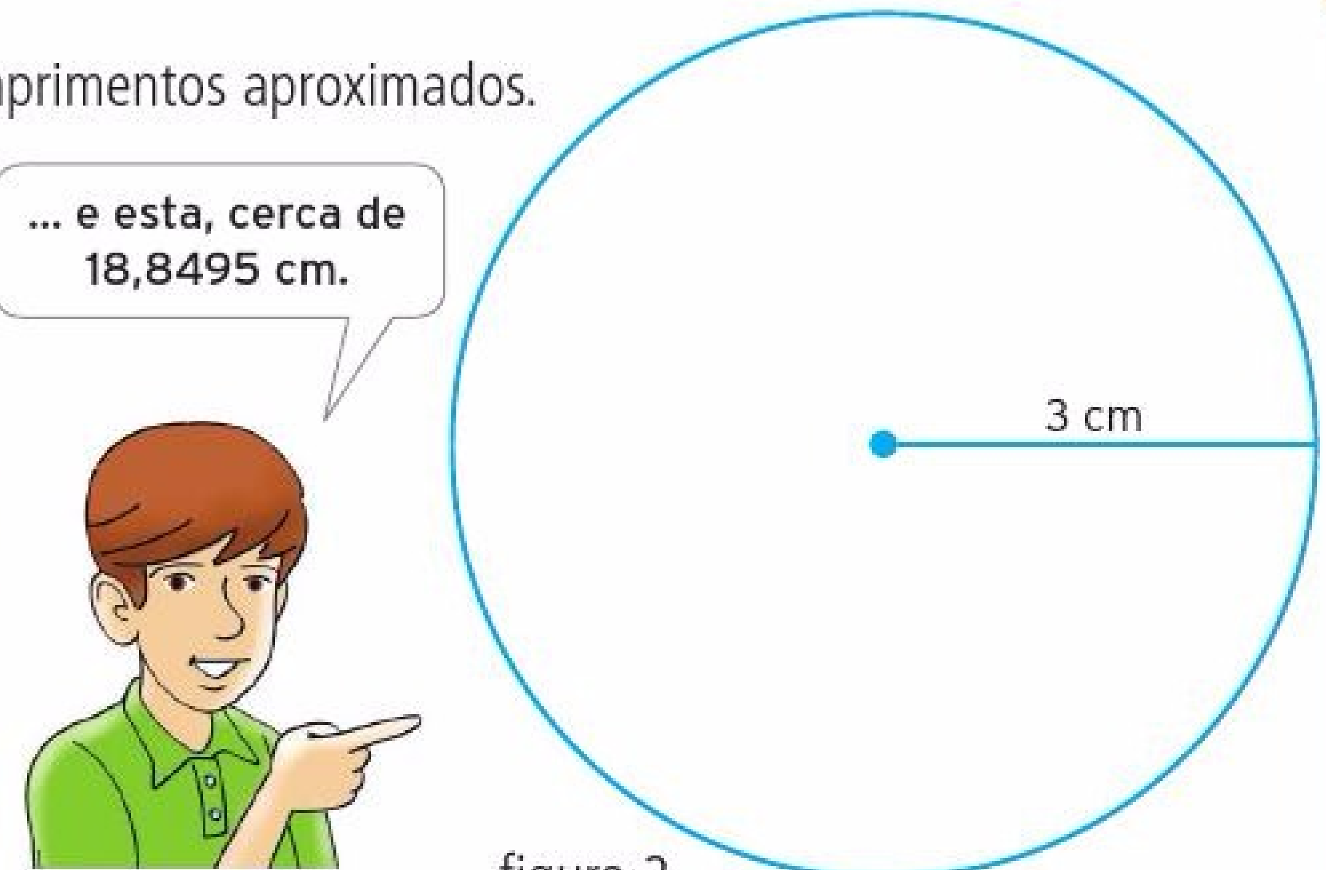


figura 2

HÉLIO SENATORE

- Para cada figura, calcule a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência. Que número obtemos com essa razão?

3,1416 e 3,1415833... O número π.

Vamos calcular a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro de cada circunferência.

- Figura 1: $\dfrac{\text{comprimento}}{\text{medida do diâmetro}} = \dfrac{12{,}5664}{4} = 3{,}1416$

- Figura 2: $\dfrac{\text{comprimento}}{\text{medida do diâmetro}} = \dfrac{18{,}8495}{6} \cong 3{,}14158333...$

Valores aproximados como esses que foram obtidos para as figuras 1 e 2 e valem para qualquer circunferência. Esses são valores aproximados do importante número irracional denominado "*pi*" e representado pela letra grega π.

π tem uma representação decimal com infinitas casas decimais, que não se repetem periodicamente. Um valor aproximado de π com sete ordens decimais, utilizado atualmente é **3,1415927**.

De modo geral, em qualquer circunferência de raio **r** e diâmetro **d** temos:

$$\frac{\text{(comprimento)}}{\text{(diâmetro)}} = \pi \text{ —— } \frac{C}{d} = \pi \text{ —— } \boxed{C = \pi \cdot d}$$

$$\frac{\text{(comprimento)}}{2 \cdot \text{(raio)}} = \pi \text{ —— } \frac{C}{2 \cdot r} = \pi \text{ —— } \boxed{C = 2\pi \cdot r}$$

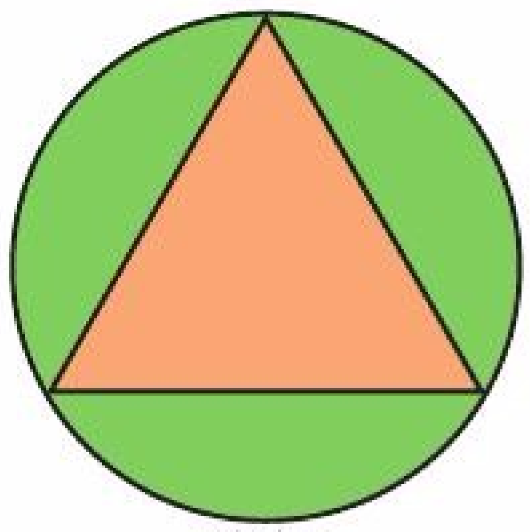
Nos cálculos usamos $\pi \cong 3,14$.

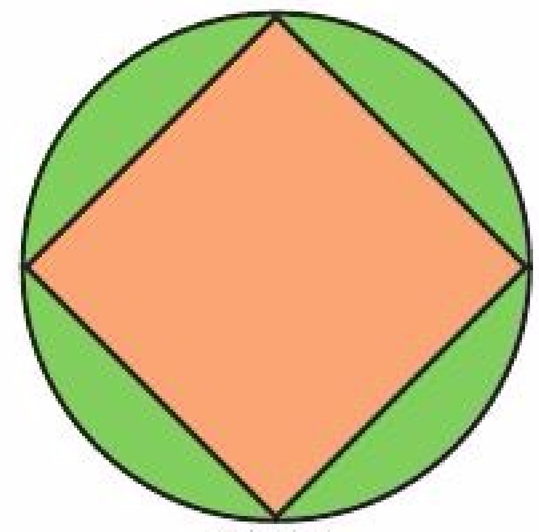
Uma **circunferência** de raio **r** tem **perímetro** ou **comprimento** igual a **$2\pi r$**.

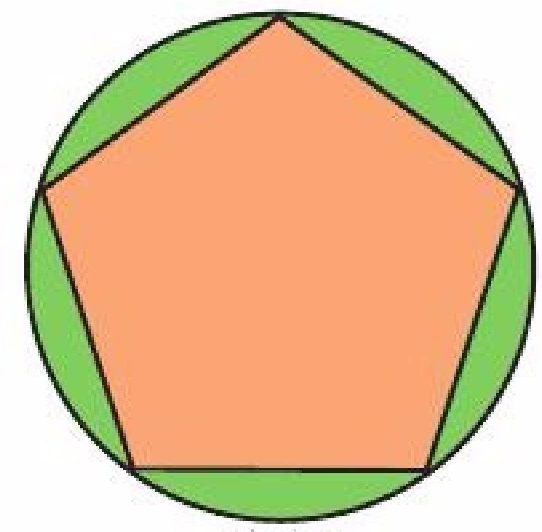
Área de um círculo

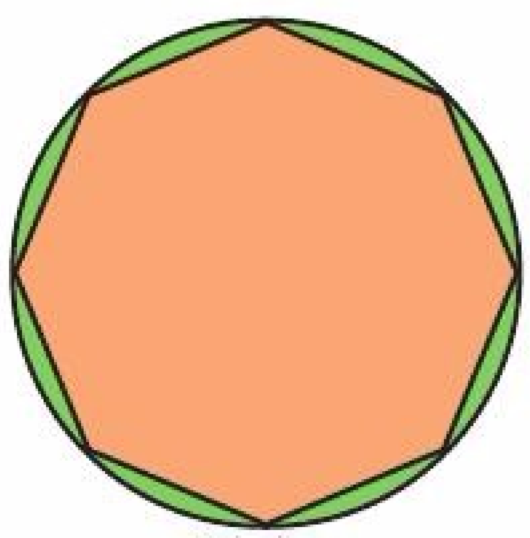
Nas figuras a seguir, os vértices dos polígonos pertencem a uma circunferência. Dizemos que eles são **polígonos inscritos** nessa circunferência.

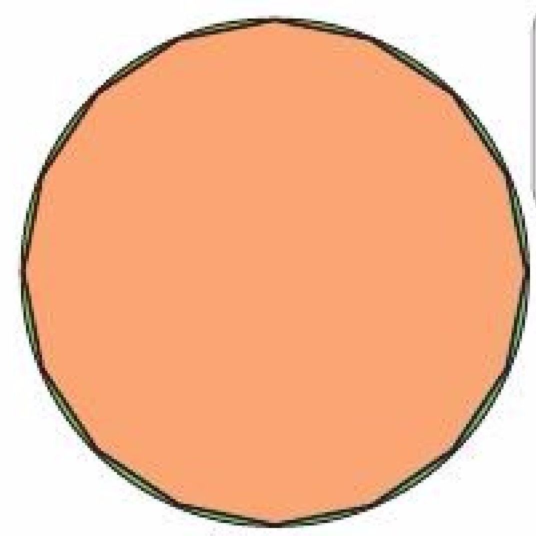
Analisando o que ocorre com a área da região de um plano limitada por polígonos regulares, inscritos em uma circunferência, à medida que aumenta o número de lados desses polígonos, podemos ter uma ideia sobre a área de um círculo.

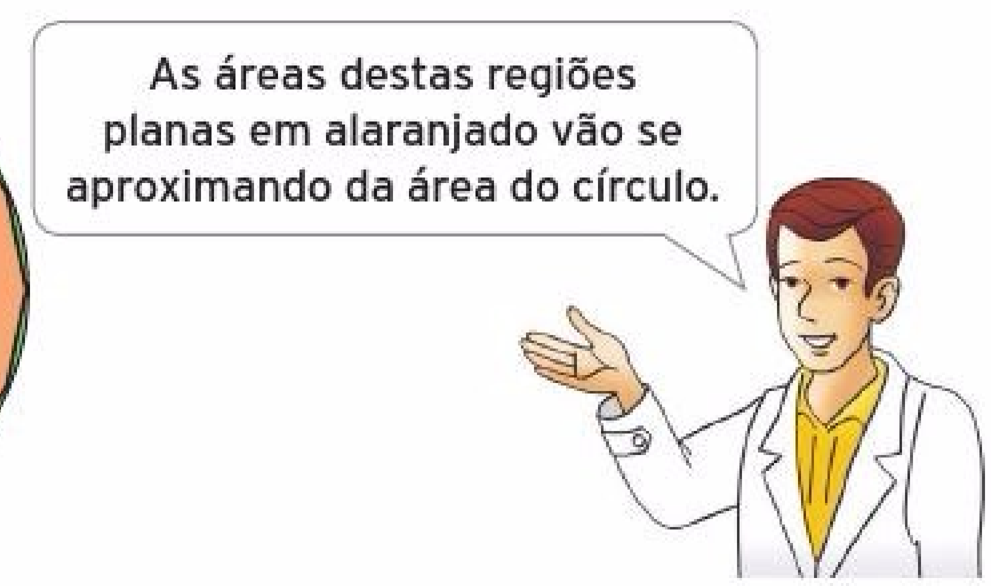

3 lados


4 lados

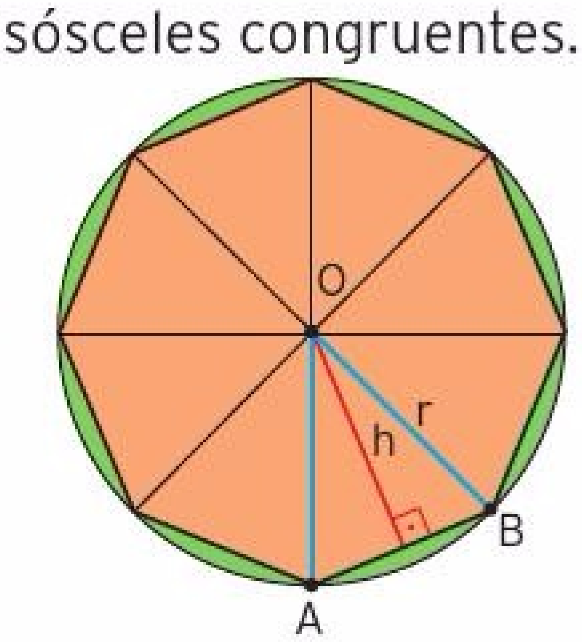

5 lados

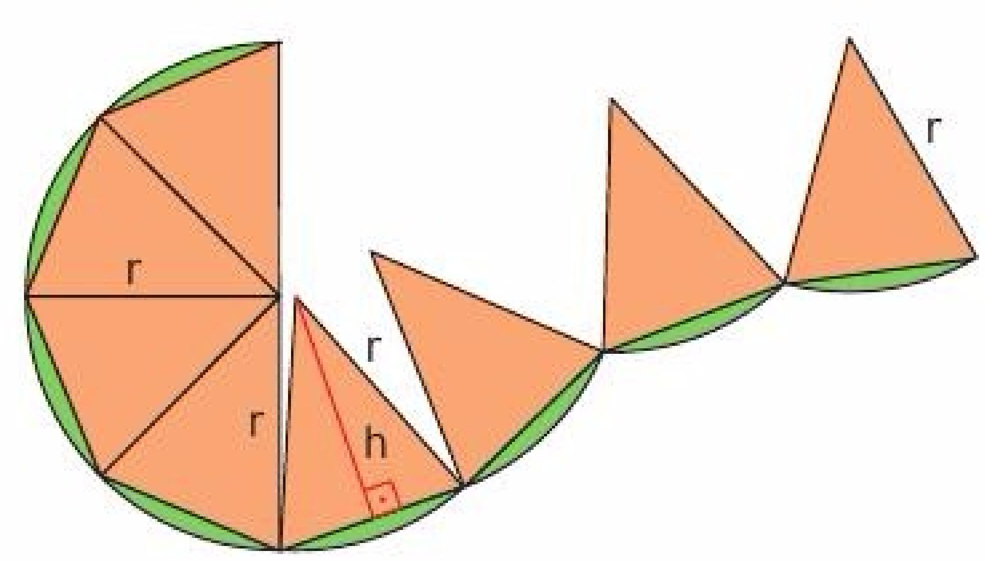

8 lados


16 lados



Em particular, ao decompormos um octógono regular inscrito em uma circunferência, a partir do centro da circunferência, obteremos **oito** triângulos isósceles congruentes.



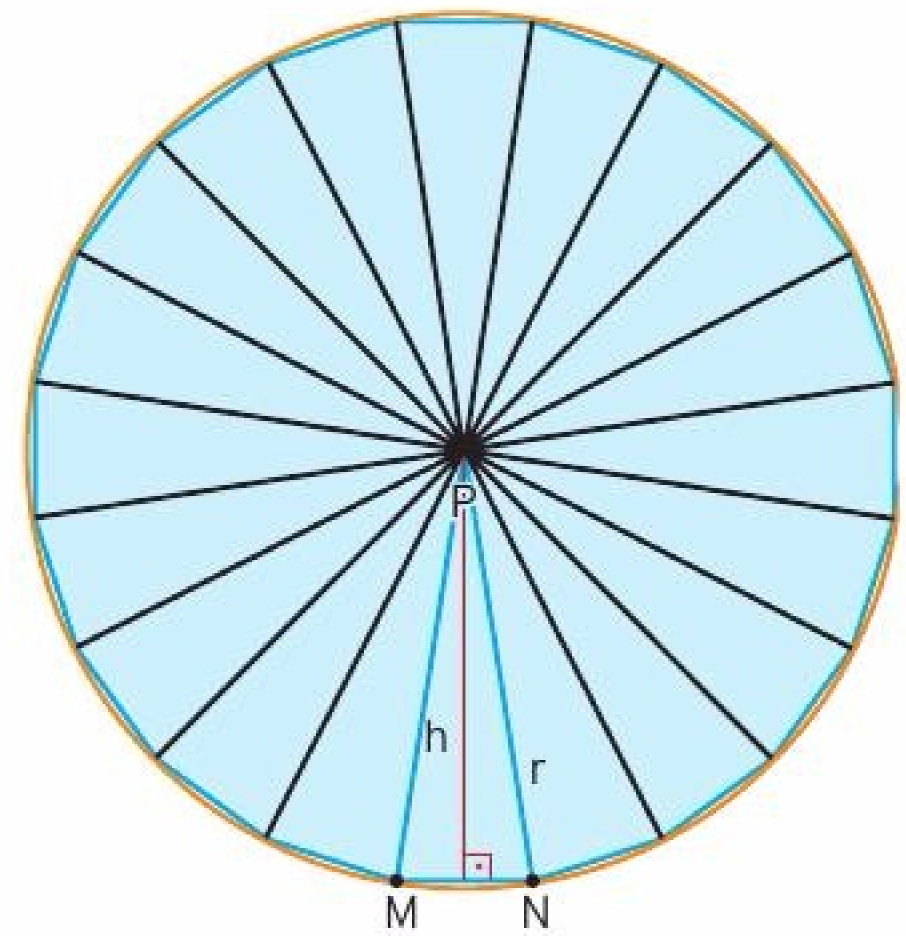


área do octógono $= \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \dfrac{(\text{med } \overline{AB}) \cdot h}{\underset{1}{\cancel{2}}}$

área do octógono $= 4 \cdot (\text{med } \overline{AB}) \cdot h$

Nessa fórmula, $\mathbf{4 \cdot (med\ \overline{AB})}$ é a metade do perímetro, ou semiperímetro, do octógono.

Para um icoságono regular, polígono com 20 lados, inscrito em uma circunferência, temos:



$$\text{área do icoságono} = \overset{10}{\cancel{20}} \cdot \frac{(\text{med}\,\overline{MN}) \cdot h}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$\text{área do icoságono} = \underbrace{10 \cdot (\text{med}\,\overline{MN})}_{\text{metade do perímetro ou semiperímetro do icoságono}} \cdot h$$

Representando o semiperímetro de um polígono regular qualquer por **p**, obtemos uma fórmula para a área da região poligonal:

$$\textbf{área} = \mathbf{p \cdot h}$$

Imagine que aumentamos ainda mais o número de lados do polígono regular inscrito nessa circunferência. Nessa situação, partindo da fórmula da área de um polígono regular qualquer, podemos escrever uma fórmula para a área do círculo.

HÉLIO SENATORE

- **h** se aproxima do raio **r** —— $h \cong r$
- **p** se aproxima da metade da medida do comprimento da circunferência:

$$p \cong \frac{\overset{\text{comprimento da circunferência}}{C}}{2} \text{ —— } p \cong \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\pi \cdot r}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \pi \cdot r \text{ —— } p \cong \pi \cdot r$$

$$\text{área do icoságono} = p \cdot h \text{ —— área do círculo} \cong p \cdot h$$

$$\text{área do círculo} = \pi \cdot r \cdot r \text{ —— } \textbf{área do círculo} = \boldsymbol{\pi \cdot r^2}$$

Um círculo com raio **r** tem **área** igual a $\boldsymbol{\pi r^2}$:

$$\mathbf{A = \pi r^2}$$

Exemplo:

Para o círculo com 3 cm de raio, temos:

Use $\pi \cong 3{,}14$.

$$\text{área do círculo} \cong \overbrace{\pi \cdot 3^2}^{\pi \cdot r^2}$$

$$\text{área do círculo} \cong 28{,}26 \text{ cm}^2$$

A demonstração da fórmula da área de um círculo está fora do alcance dos alunos neste momento. Mas é possível fazer uma indução que não leve a erro conceitual. Observe no texto que os desenhos poderão ser reproduzidos com círculos de raios maiores e polígonos regulares com maior número de lados. Para mais esclarecimentos, leia texto no **Manual do Professor**.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

33. Que fórmula podemos usar para o cálculo do comprimento de uma circunferência de raio **r**? E para a área do círculo de raio **r**? $C = 2\pi r$; $A = \pi r^2$

34. Uma lata de óleo é cilíndrica e sua base tem 5 cm de raio. Qual é, aproximadamente, o perímetro da circunferência dessa base? E a área? Aproximadamente, 31,4 cm; 78,5 cm²

35. Determine a medida aproximada do comprimento de uma circunferência cujo raio mede 8 cm. Qual é a área aproximada do círculo determinado por essa circunferência? 50,24 cm; 200,96 cm²

36. Qual é a medida aproximada do comprimento de uma circunferência cujo diâmetro mede 4,5 cm? Qual é, aproximadamente, a área do círculo determinado por essa circunferência? 14,13 cm; 15,90 cm²

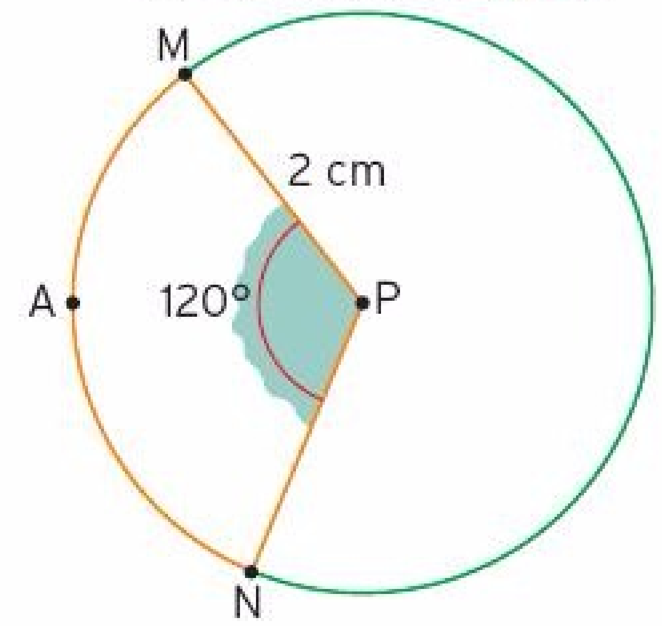
37. Uma circunferência tem 28π cm de comprimento.

a) Qual é a medida de um raio dessa circunferência? 14 cm

b) Qual é, aproximadamente, a área do círculo determinado por essa circunferência? 615,44 cm²

38. O comprimento de uma circunferência mede, aproximadamente, 12,56 cm. Qual é a medida do diâmetro dessa circunferência? 4 cm

39. Um ângulo central que mede 120° determina o arco MAN em uma circunferência com 2 cm de raio. Qual é a medida aproximada desse arco, em centímetro? 4,19 cm



$120°$ é $\frac{1}{3}$ de $360°$

40. Uma circunferência tem 6 cm de raio. Determine a medida, em centímetros, de um arco correspondente a um ângulo central com:

a) 60° 6,28 cm b) 30° 3,14 cm c) 45° 4,71 cm d) 120° 12,56 cm

Usando a calculadora

- Calcule a medida aproximada do comprimento de uma circunferência e a área aproximada de um círculo cujo raio mede:

3,4 cm 21,3629 cm; 36,3169 cm² 5,2 cm 32,6726 cm; 84,9489 cm² 7,5 m 47,1240 m; 176,7150 m²

Use $\pi \cong 3{,}1416$.

Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam sobre os problemas e encontrem soluções.

Carlos gira uma moeda em torno de outra, fixa, sem deixá-la escorregar.

- Se as duas moedas forem iguais, isto é, tiverem o mesmo raio, quantas voltas deverá dar a moeda que gira para chegar à posição inicial? 1 volta.
- Se o raio da moeda que gira for a metade do raio da outra, quantas voltas ela deverá dar para chegar à posição inicial? 2 voltas.


VAGNER DE FARIAS

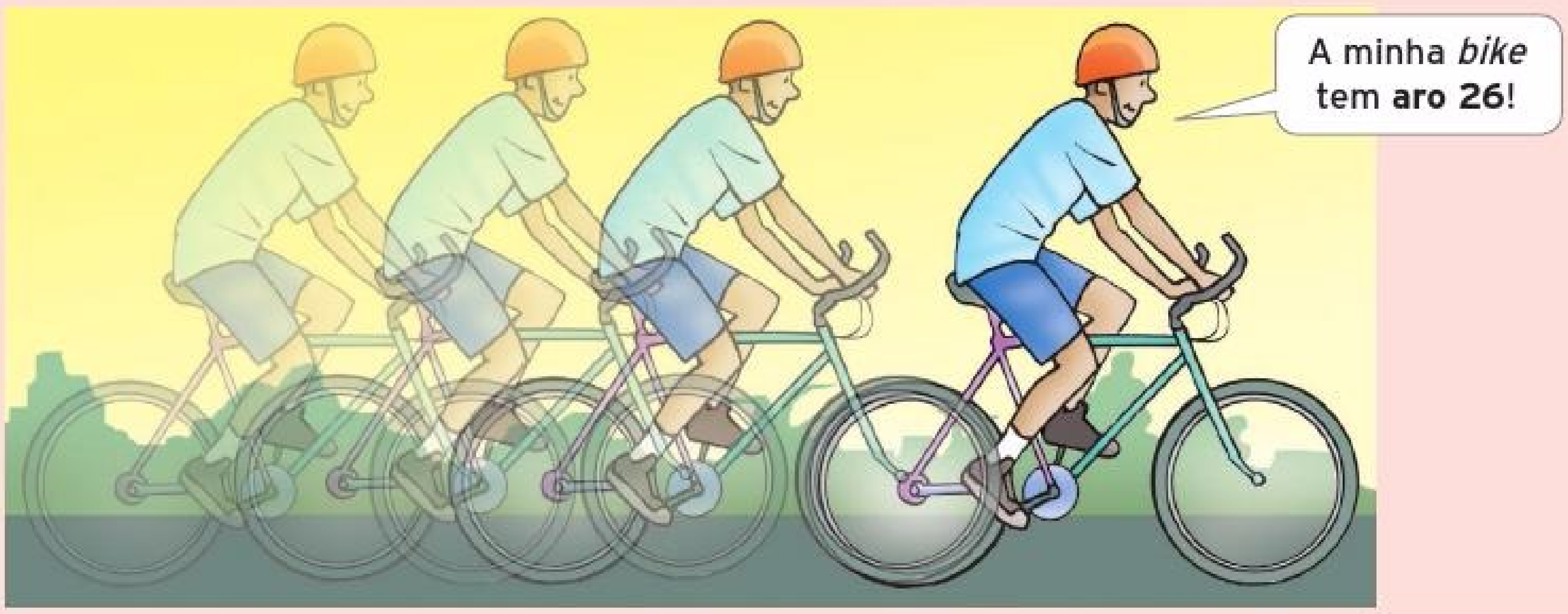
Desafio

FAÇA NO CADERNO

Quantos metros em quatro voltas?

João treina diariamente para participar dos torneios de ciclismo.

FRANCISCO VILACHÁ



"Aro 26" significa que a roda da bicicleta tem **26 polegadas** de diâmetro.

HÉLIO SENATORE

1 polegada tem, aproximadamente, **2,54 cm**.

Pense em voltas completas.

- Quantos metros, aproximadamente, João terá percorrido quando a roda da frente der uma volta completa? Aproximadamente, 2,07 m.
- Aproximadamente quantos metros João terá percorrido quando a roda da frente tiver completado quatro voltas? Aproximadamente, 8,28 m.

Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

41. Determine o valor aproximado da área do círculo cuja circunferência tem raio de:

a) 20 cm 1 256 cm²

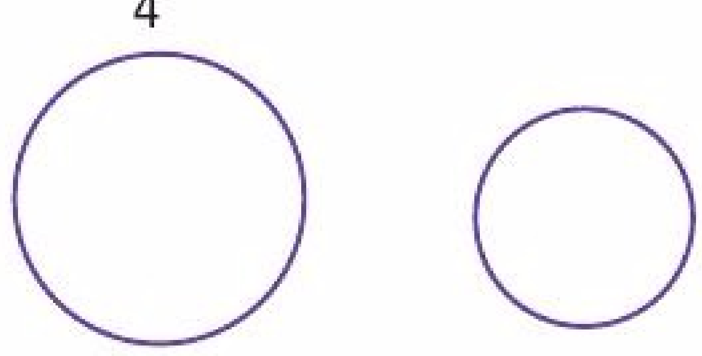
b) 1,5 cm 7,065 cm²

c) $2\sqrt{3}$ cm 37,68 cm²

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm 39,25 cm²

Use $\pi = 3,14$.

42. A razão entre as medidas dos raios de duas circunferências é $\frac{3}{4}$.



Qual é a razão entre as medidas dos comprimentos dessas circunferências? $\frac{3}{4}$

43. Os comprimentos de duas circunferências estão na razão $\frac{3}{5}$. Calcule a razão entre as áreas dos círculos dessas circunferências. $\frac{9}{25}$

44. A razão entre os comprimentos de duas circunferências é $\frac{2}{3}$.

a) Qual é a razão entre dois diâmetros dessas circunferências? $\frac{2}{3}$

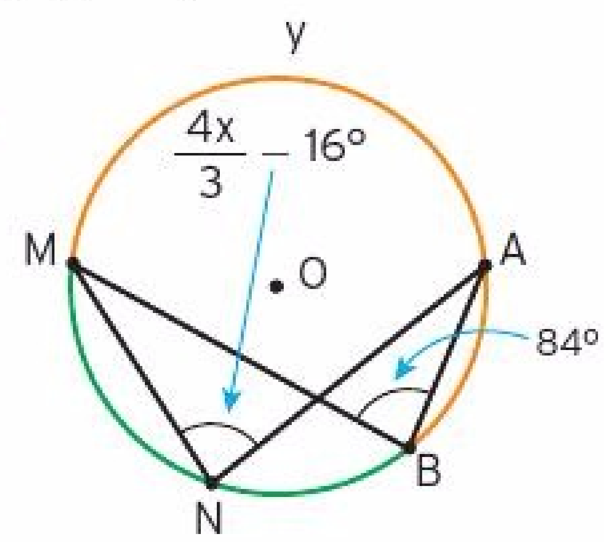
b) Qual é a razão entre dois raios dessas circunferências? $\frac{2}{3}$

c) Se o raio da circunferência maior medir 5,7 cm, qual será a medida do raio da outra circunferência? 3,8 cm

45. Determine os valores de **x** e de **y** nas figuras a seguir, em que **O** é o centro das circunferências:

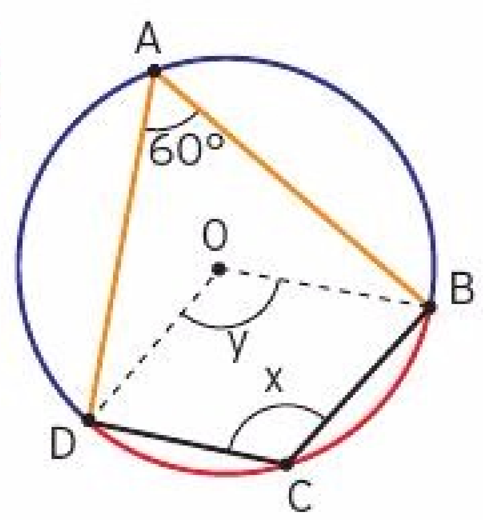
a)

$x = 75°$
$y = 168°$

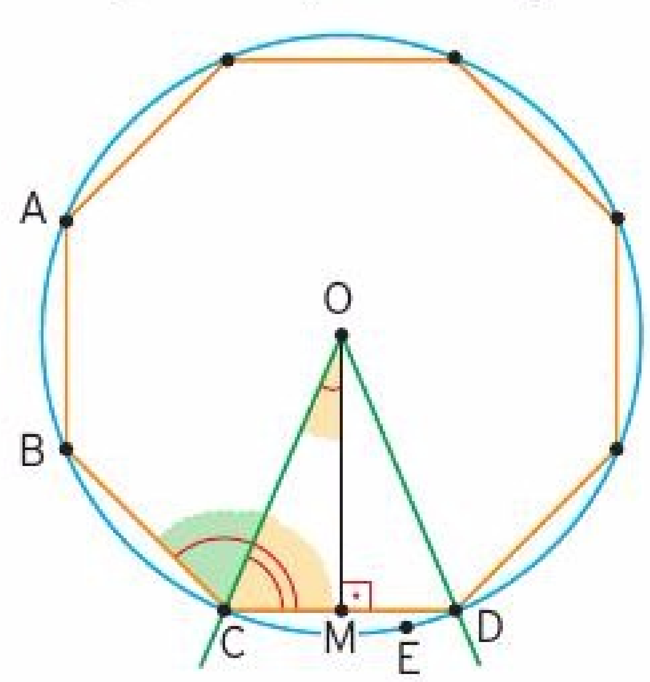


b)

$x = 120°$
$y = 120°$



46. Considerando que o octógono da figura a seguir é regular, responda às questões:



a) Qual é a medida do ângulo central correspondente ao arco CED? 45°

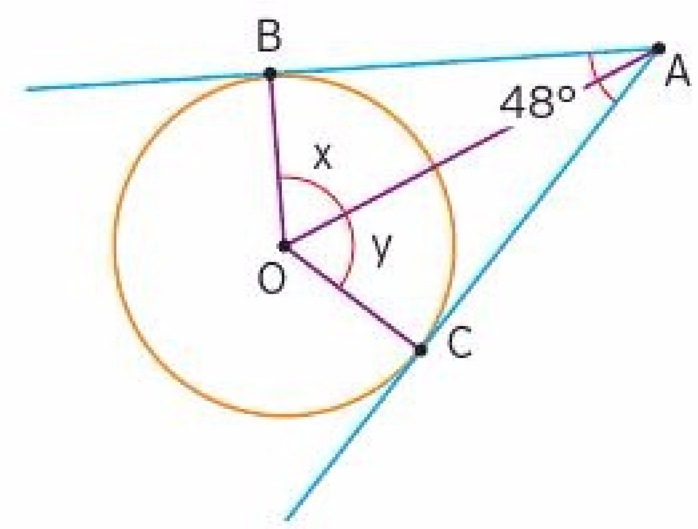
b) Qual é a medida de $C\hat{O}M$? 22° 30′

c) Qual é o valor da medida de $O\hat{C}D$? 67° 30′

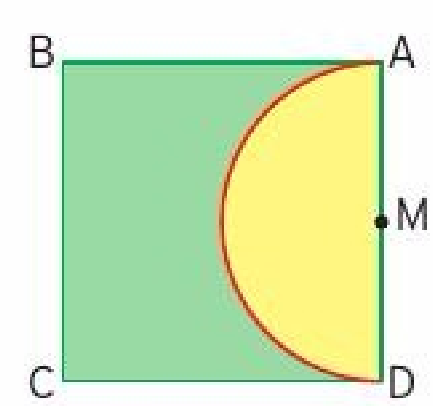
d) Qual é o valor da medida de $B\hat{C}D$? 135°

47. A circunferência desta figura tem centro **O**. Quais são os valores de **x** e de **y**? $x = y = 66°$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são tangentes à circunferência.



48. A figura ABCD é um quadrado de 8 cm de lado e a parte pintada de amarelo é um semicírculo de centro **M**. Qual é a área aproximada da parte pintada de verde? 38,88 cm²



M é ponto médio de $\overline{AD}$.

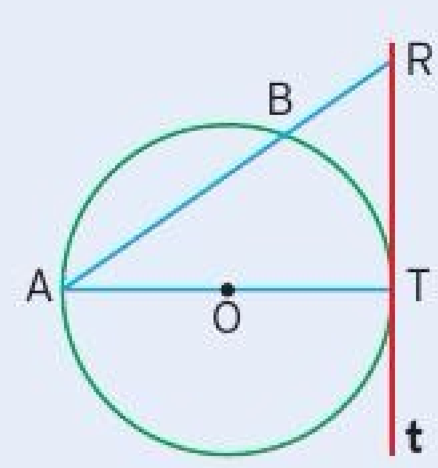
Troquem ideias e resolvam

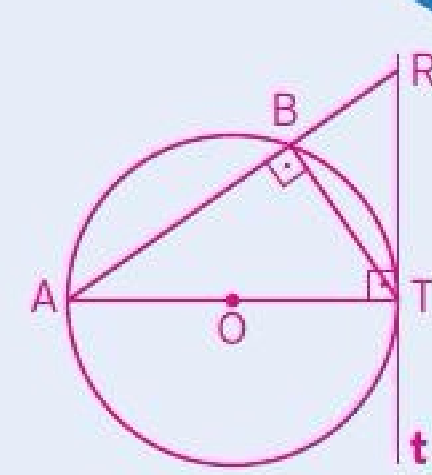
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, reflitam e respondam às questões.

Nesta figura, **t** é tangente à circunferência de centro **O** no ponto **T**.

Utilize △BAT e △BTR.





t tangente no ponto **T**
$\overline{AT}$ diâmetro
med $A\hat{T}R = 90°$ → △RAT retângulo em **T**
$A\hat{B}T$ inscrito em semicircunferência → $A\hat{B}T$ ângulo reto.

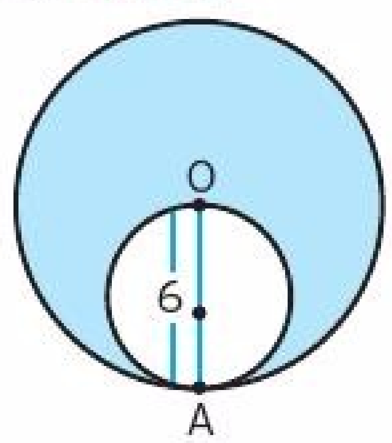
Mostrem que os triângulos △BAT e △BTR são triângulos retângulos.

Fazer e aprender

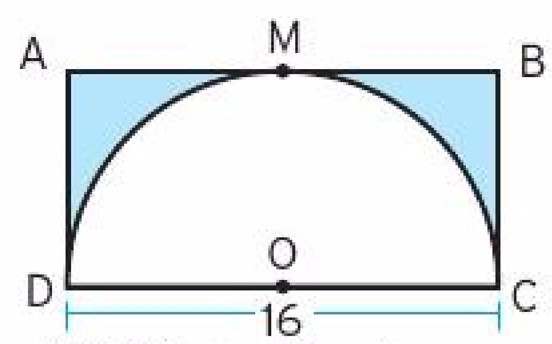
FAÇA NO CADERNO

49. Calcule a área aproximada da parte pintada de azul nas figuras. O ponto **O** indica o centro dos círculos e as medidas estão indicadas em centímetros.

a) 84,78 cm²

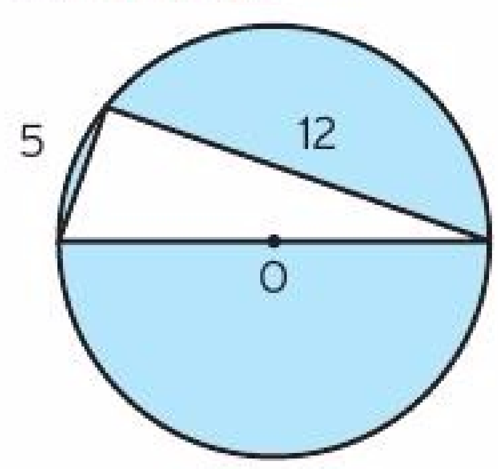


c) 27,52 cm²

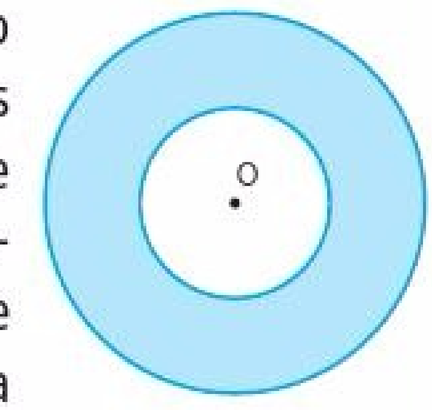


ABCD é um retângulo.
$\overleftrightarrow{AB}$ é tangente à semicircunferência no ponto **M**.

b) 102,665 cm²

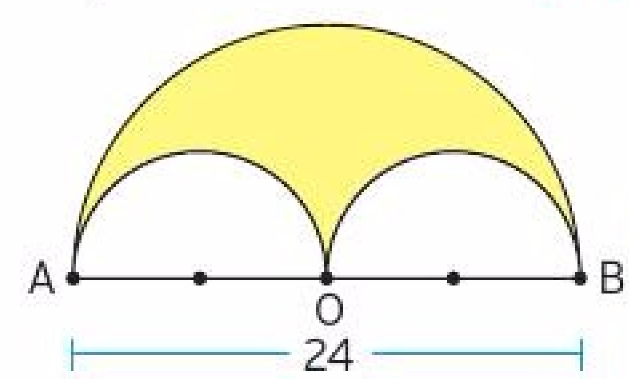


50. As duas circunferências desta figura são concêntricas, ou seja, têm o mesmo centro. Chamamos a parte pintada de azul de coroa circular. Se as circunferências têm raios de 6 cm e 10 cm, qual é a área dessa coroa circular? 64π cm² ≅ 200,96 cm²



51. Calcule a área da coroa circular determinada por duas circunferências concêntricas e de raios medindo 7 cm e 9 cm. 32π cm² ≅ 100,48 cm²

52. Nesta figura, os diâmetros das semicircunferências menores são iguais ao raio da semicircunferência maior. Qual é a área da parte pintada de amarelo? 36π cm² ≅ 113,04 cm²

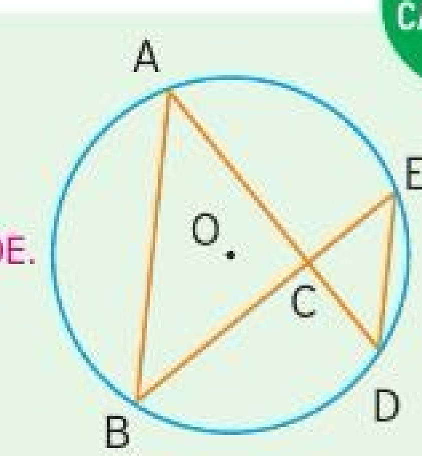


Medidas indicadas em cm.

Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e respondam às questões.



- Quais são os ângulos inscritos destacados nesta circunferência?
  $B\hat{A}D$, $B\hat{E}D$, $A\hat{B}E$ e $A\hat{D}E$.
- O que ocorre com os ângulos que vocês identificaram?
  Formam pares de ângulos congruentes: $B\hat{A}D \cong B\hat{E}D$, $A\hat{B}E \cong A\hat{D}E$.
- Expliquem por que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.
  $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ porque têm dois ângulos respectivamente congruentes.

Desafio

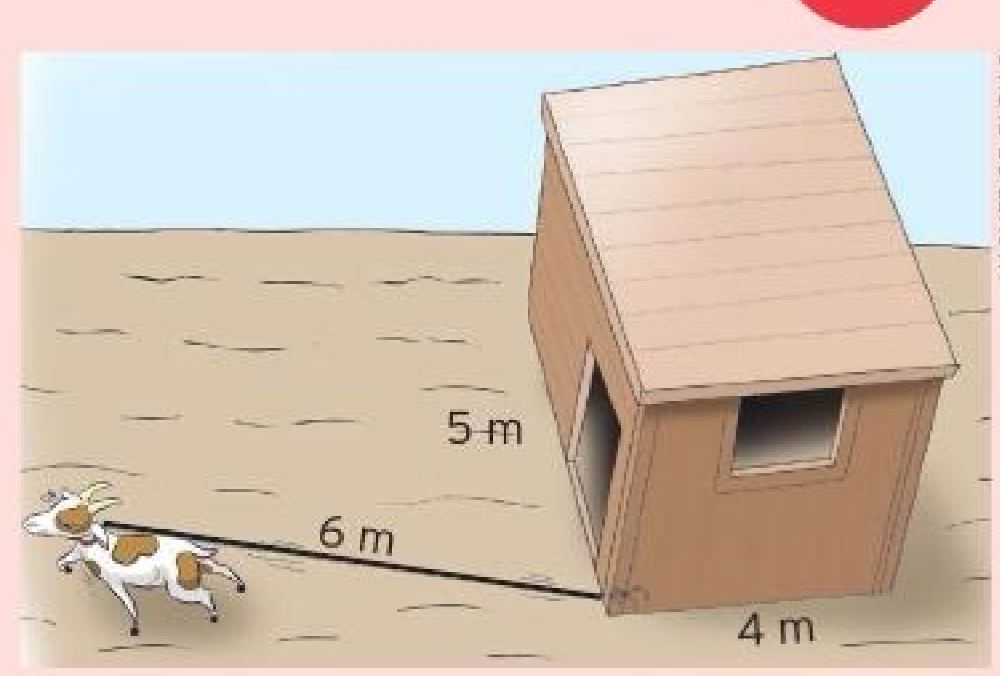
FAÇA NO CADERNO

Babucha e seu pasto

A cabra Babucha está amarrada em um canto de um barracão de base retangular.

A fome é tanta que ela estica bastante a corda para pastar em todo o terreno.

- Se o barracão tem 5 m por 4 m e a corda tem 6 m, qual é a área aproximada em que Babucha poderá pastar? 88,705 m²



VAGNER DE FARIAS

Leitura

Apesar de a seção **Leitura** ser opcional, avalie a possibilidade de explorar a que segue, pois, além de tratar da história da Matemática, o assunto por ela abordado está presente em outros contextos escolares e extraescolares.

A circunferência da Terra

A Terra é **redonda**?

— É lógico!, responderia você, mas...

Esse fato foi provado somente depois do século IV a.C. pelo filósofo grego Aristóteles.

No século III a.C., Eratóstenes, um matemático e astrônomo grego, "mediu" a circunferência da Terra.

É claro que ele não saiu por aí com uma fita métrica na mão, mas fez alguns cálculos e chegou lá: 39 600 km.

Veja como foi:

Assuã e Alexandria são cidades localizadas no Egito, à beira do rio Nilo, e estão a 792 km de distância uma da outra. Eratóstenes supunha que essas duas cidades estavam situadas em um mesmo meridiano.

O solstício de verão é o dia do ano em que no hemisfério Norte, ao meio-dia, o sol está "a pino" nos lugares por onde passa o trópico de Câncer. Eratóstenes havia observado que nesse dia e nessa hora, em Assuã, cidade localizada próximo ao trópico de Câncer, uma estaca fincada no solo, verticalmente, não projetava sombra. Já em Alexandria, que se encontrava ao norte de Assuã, uma estaca projetava sombra.

Representação esquemática com tamanhos e distâncias fora de escala, e cores fantasia.

Em certo solstício de verão, estando Eratóstenes em Alexandria, fincou verticalmente uma estaca no chão e verificou que:

- o ângulo formado pelos raios de sol e pela estaca media 7° 12′;
- as semirretas com origem no centro da Terra e que passavam por Alexandria e Assuã também formavam um ângulo de 7° 12′;
- 7° 12′ é $\frac{1}{50}$ de 360° ——— 7° 12′ determinam um "arco na Terra" que mede 792 km.

Explique a seus alunos que as dimensões das estacas e da sombra foram exageradamente ampliadas a fim de possibilitar uma visualização esquemática, sendo, na verdade, irreais.

Portanto: $\frac{1}{50}$ de $2\pi r$ é 792 km ——— $\underbrace{\frac{50}{50} \text{ de } 2\pi r}_{\text{a circunferência da Terra}}$ são $\underbrace{(50 \cdot 792) \text{ km}}_{39\,600 \text{ km}}$

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Determine o valor de **n** na igualdade
$3^7 \cdot 3^{3n} = \dfrac{1}{243}$. -4

2. Considerando que $A = 5x + 3$ e $B = 5x - 3$, calcule:

a) $-(A - B)^3$ -216

b) $3(A + B)^2$ $300x^2$

c) $(A \cdot B)^{-1}$ $\dfrac{1}{25x^2 - 9}$

d) B^3 $125x^3 - 225x^2 + 135x - 27$

3. Calcule:

a) $(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1)$ 44

b) $(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^2$ $24 - 12\sqrt{3}$

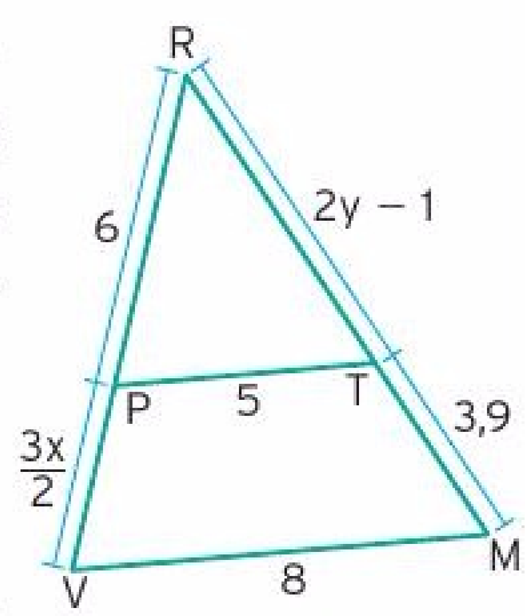
4. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $\dfrac{3}{4}x^3y^4 - \dfrac{15}{8}x^3y^3$ $\dfrac{3}{4}x^3y^3\left(y - \dfrac{5}{2}\right)$

b) $50x^4y^4 - 2x^4y^6$ $2x^4y^4(5 + y)(5 - y)$

c) $a^2b + 9 - 9b - a^2$ $(b - 1)(a + 3)(a - 3)$

5. Nesta figura, os segmentos de reta $\overline{PT}$ e $\overline{VM}$ são paralelos e as medidas estão indicadas em centímetros.

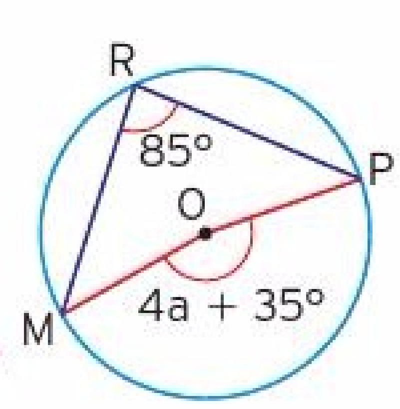


Responda às questões.

a) Determine os valores de **x** e do **y**, em centímetros. 2,4 cm; 3,75 cm

b) Calcule a razão entre os perímetros do △RPT e do △RVM, nessa ordem. $\frac{5}{8}$

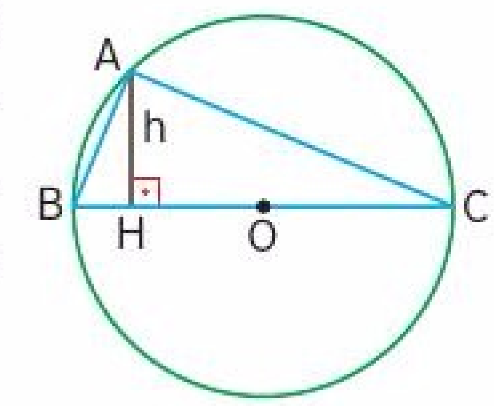
6. Nesta figura, a representa uma medida em graus e é $M\hat{R}P$ um ângulo inscrito na circunferência de centro **O**. Qual é o valor de **a**? 33° 45′



7. A medida de um ângulo central é 137°. Qual é a medida do ângulo inscrito na circunferência correspondente a esse ângulo central? 68° 30′

8. Um ângulo inscrito em uma circunferência mede 68°. Qual é a medida do ângulo central correspondente? 136°

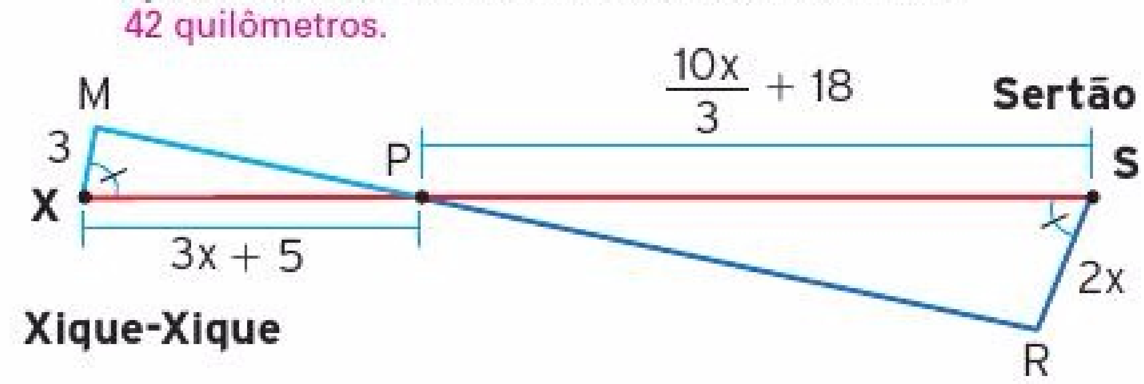
9. O triângulo ABC está inscrito em uma semicircunferência de centro **O** e raio de medida 13 cm.



a) Em relação aos ângulos, que tipo de triângulo é o △ABC? Por quê? Como Â é um ângulo inscrito em uma circunferência, med Â = 90° e, portanto, △ABC é retângulo.

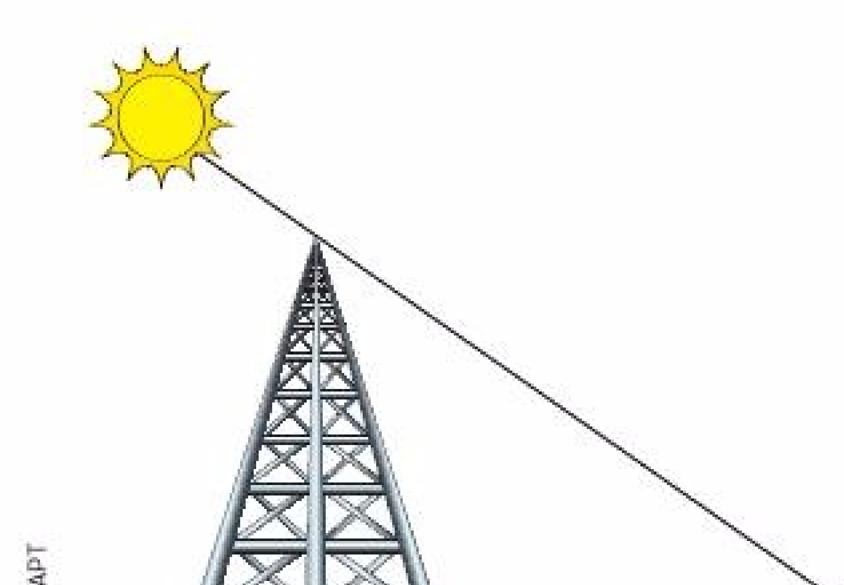
b) Sabendo que med $\overline{AB}$ = 10 cm, calcule a medida aproximada da altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$. 9,23 cm

10. Existe uma estrada, em linha reta, entre as cidades de Xique-Xique e Sertão, como mostra a figura a seguir. Nela, $\hat{X}$ e $\hat{S}$ são ângulos congruentes e as medidas estão indicadas em quilômetros. Qual é a distância entre as duas cidades? 42 quilômetros.



11. Em uma oficina há duas estruturas metálicas triangulares semelhantes, com perímetros iguais a 45 m e 18 m, respectivamente. Essas estruturas têm uma haste que passa por um dos vértices e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice. Qual é a medida da haste da estrutura maior, se a haste da estrutura menor mede 12 m? 30 m

12. A sombra de um homem de 1,60 m de altura, projetada em um chão plano, mede 3,20 m. Determine o comprimento da sombra de uma torre de 16,60 m de altura, nesse mesmo instante. 33, 20 m



13. Simplifique a expressão algébrica:

$$\frac{5(m-n)-(m-n)^2}{xm-xn+5m-5n} \quad \frac{5-m+n}{x+5}$$

14. Racionalize os denominadores das frações.

a) $\dfrac{7\sqrt{5}-14}{2\sqrt{7}}$ $\dfrac{\sqrt{35}-2\sqrt{7}}{2}$ b) $\dfrac{8}{2-\sqrt{6}}$ $-8-4\sqrt{6}$

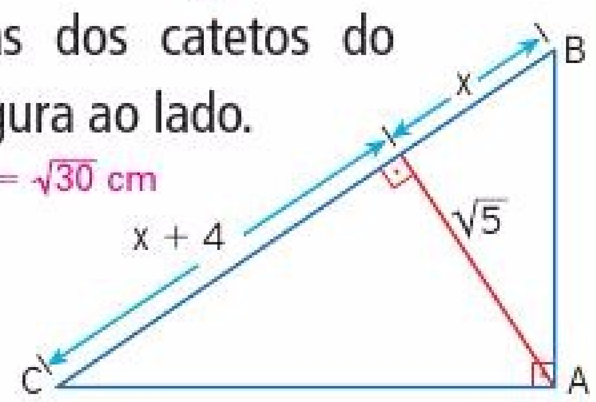
15. Para quais valores de **m** a equação

$$2mx^2 - 3mx - 1 = 0$$

tem raízes reais iguais? 0 e $-\frac{8}{9}$

16. Calcule as medidas dos catetos do triângulo ABC da figura ao lado.
med $\overline{AB} = \sqrt{6}$ cm; med $\overline{AC} = \sqrt{30}$ cm

Medidas indicadas em cm.



17. Resolva as equações:

a) $x^2 - x - 12 = 0$ $-3; 4$

b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ $-\frac{1}{2}; 2$

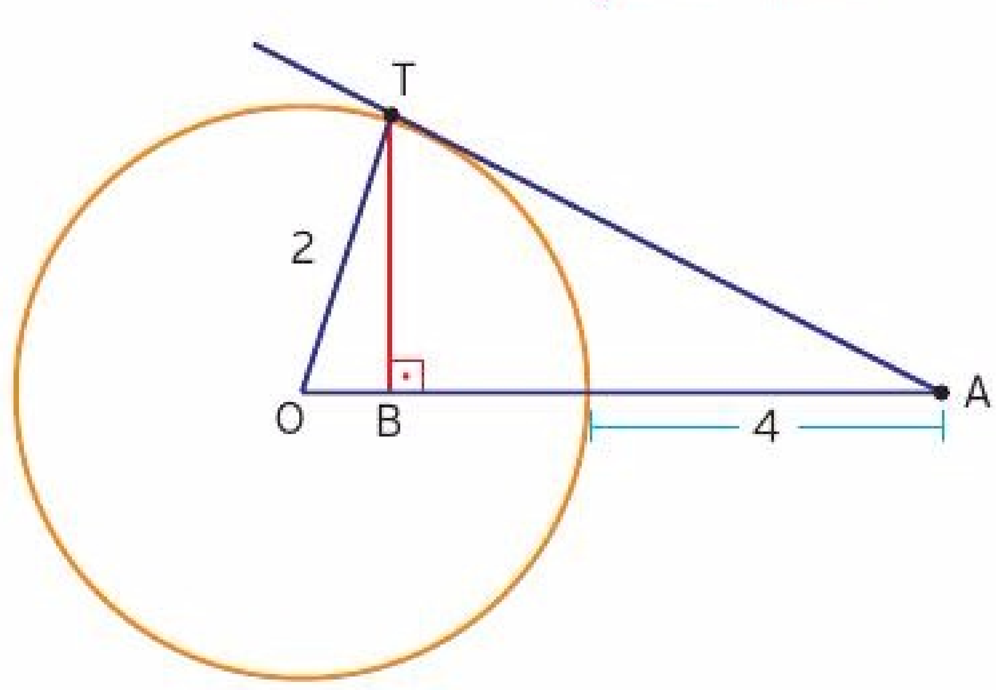
c) $x^2 + 2x - 17 = 0$ $-1-3\sqrt{2}; -1+3\sqrt{2}$

18. Determine as raízes das equações em $\mathbb{R}$ em:

a) $x^3 - \dfrac{x}{81} = 0$ $-\frac{1}{9}; 0; \frac{1}{9}$

b) $x^3 + x^2 - 6x = 0$ $-3; 0; 2$

19. Nesta figura, $\overleftrightarrow{AT}$ é uma reta tangente à circunferência no ponto **T** e as medidas indicadas estão em centímetros. Qual é a medida da altura do $\triangle$TOA, relativa a $\overline{OA}$? $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm $\cong$ 1,9 cm



20. (Saresp) Valdemar tem um terreno na forma de um trapézio. Um riacho paralelo à estrada em que se situa divide o terreno em duas partes, como mostra a figura a seguir.

Ele já cercou quase todo o limite externo do terreno e só falta o trecho **x**, cuja medida em metros é: d

a) 15 b) 20 c) 36 d) 45

21. (Saresp) Por qual número deve ser multiplicada a expressão $\sqrt{8} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$ para que seja obtido um número inteiro? a

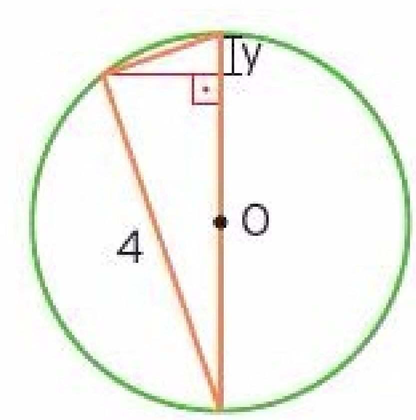
a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{30}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{50}$

22. Na equação $2x^3 + 3x^2 - 2x = 0$, **x** representa um número inteiro negativo. As raízes dessa equação são: b

a) -2 e 0 b) -2 c) -2, 0 e $\dfrac{1}{2}$

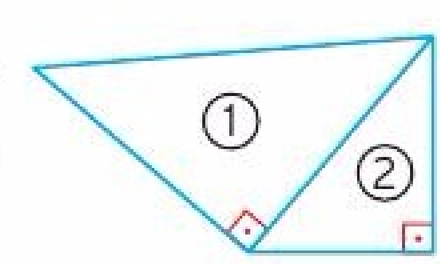
d) Não há raízes que sejam números inteiros negativos.

23. Nesta figura, **y** representa uma medida em centímetros e a circunferência tem $3\sqrt{2}$ cm de raio. O valor de **y** é: d



a) $14\sqrt{2}$ b) $14\sqrt{3}$ c) $\dfrac{14\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}$

24. (Cesgranrio-RJ) Os triângulos 1 e 2 da figura são retângulos isósceles.



Então, a razão da área de 1 para a de 2 é: c

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) -1 e) -2

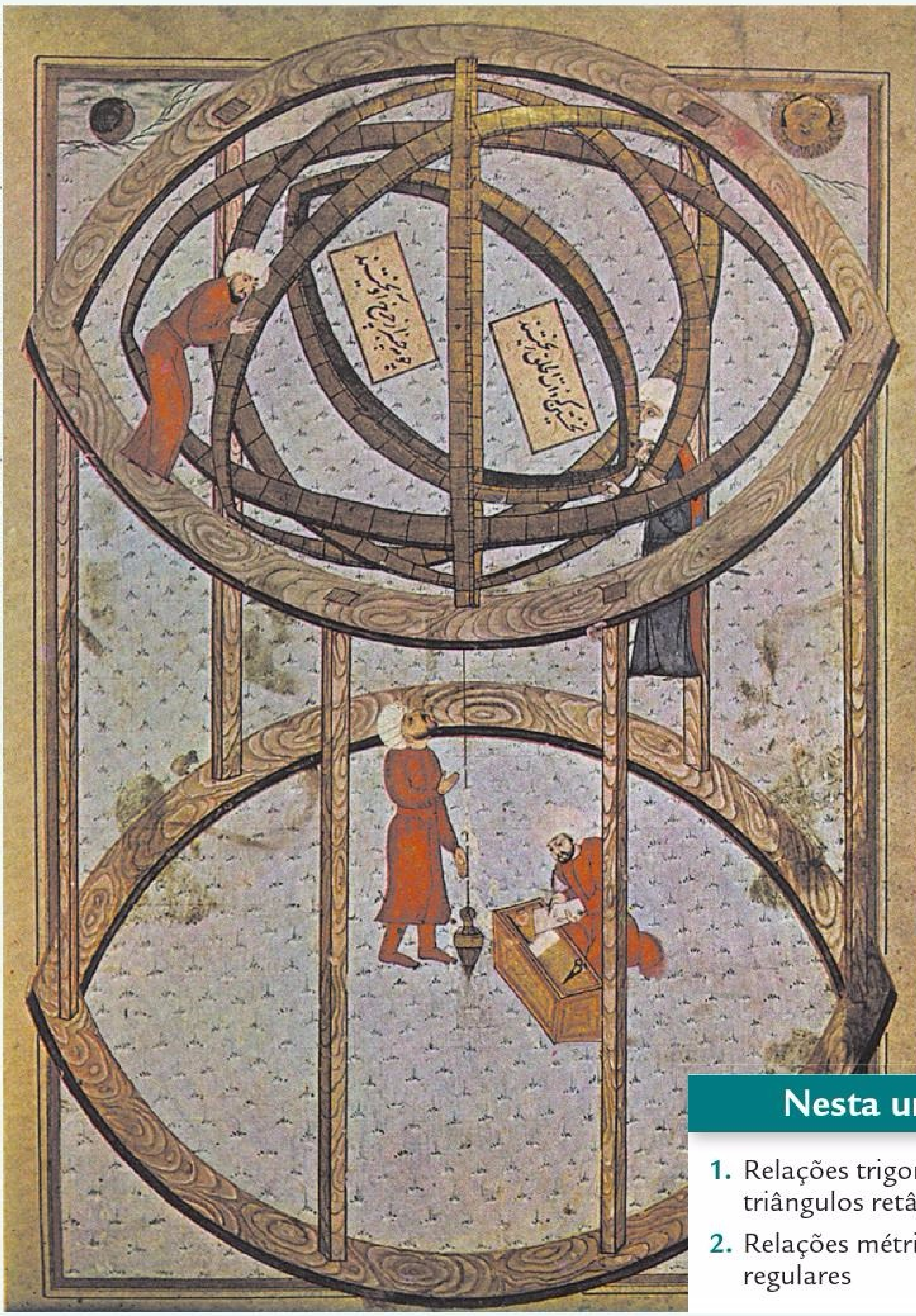
25. (Saresp) Antonio gastou do seu salário: $\dfrac{1}{5}$ para pagar a mensalidade da sua escola, $\dfrac{1}{10}$ para sua condução e $\dfrac{1}{2}$ para as despesas de casa. A porcentagem que sobra de seu salário é: c

a) 8% b) 10% c) 20% d) 22%

UNIDADE 12

Relações trigonométricas

AUTOR DESCONHECIDO. MUÇULMANOS UTILIZANDO INSTRUMENTO DE MEDIÇÃO ASTRONÔMICA, SÉCULO XVI.



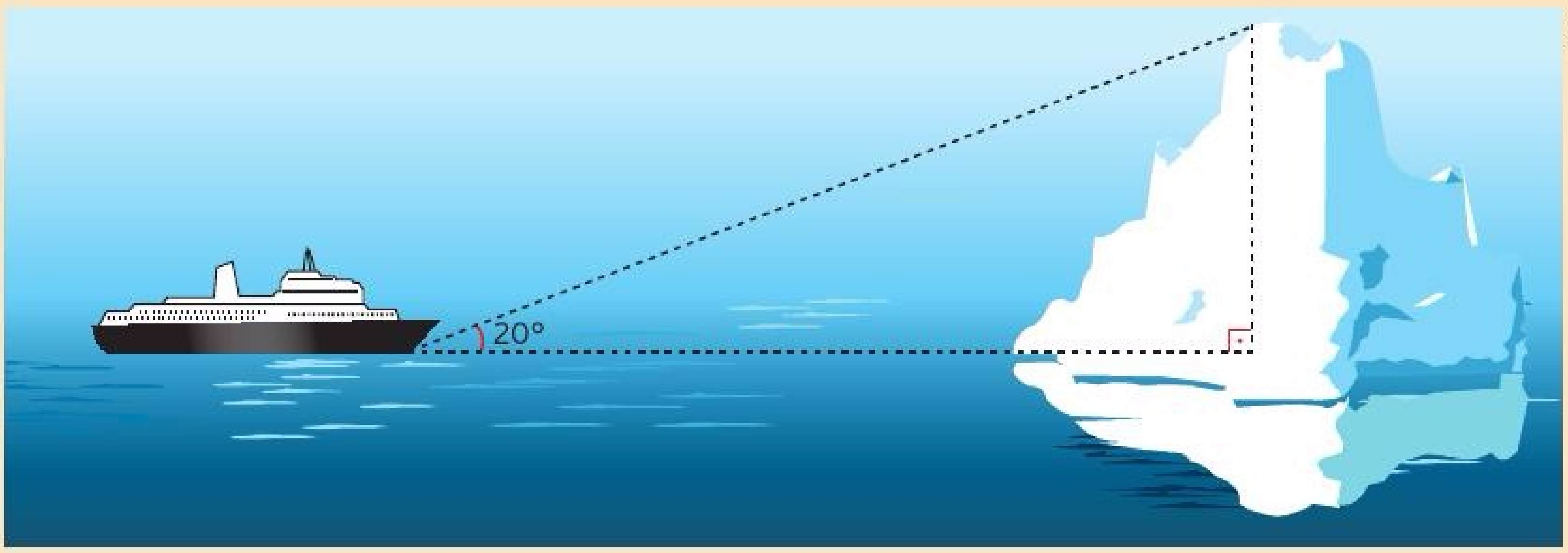
Instrumento utilizado no século XVI pelos muçulmanos para calcular distâncias sem medições diretas.

Acredita-se que, por volta do ano 300 a.C., ideias da Trigonometria já existiam entre os gregos e que teriam surgido para resolver problemas de Astronomia e de navegação. Foram as descobertas de Tales e de Pitágoras que permitiram grandes avanços em questões que envolvem medições que não podem ser realizadas diretamente.

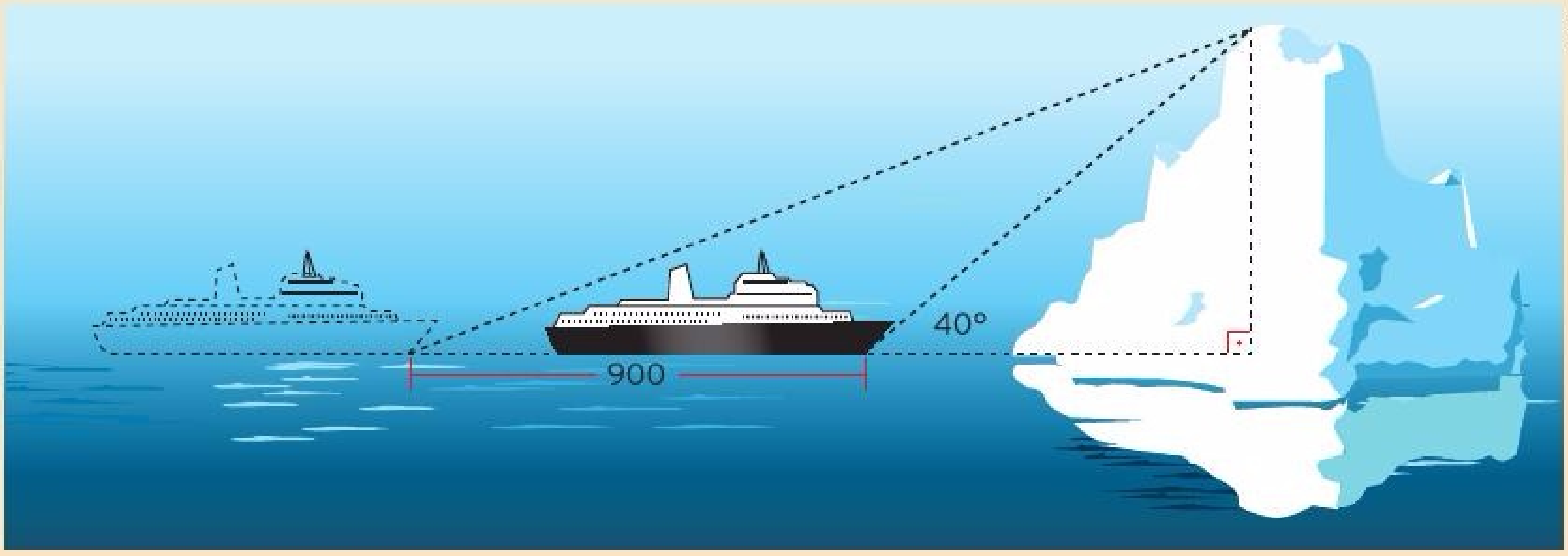
Nesta unidade...

1. Relações trigonométricas nos triângulos retângulos
2. Relações métricas em polígonos regulares

Um navegador vê o topo de um *iceberg* sob um ângulo de 20°.



Avançando 900 metros em direção ao *iceberg*, ele o vê sob um ângulo de 40°.



Em situações como essas, relações entre medidas de ângulos e de lados de um triângulo retângulo permitem calcular a altura do *iceberg* acima do nível do mar sem uma medição direta.

O estudo das relações das medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo e, em particular, do triângulo retângulo deu origem à Trigonometria.

Atualmente, as ideias da Trigonometria são aplicadas nas telecomunicações, nas navegações aérea e marítima, na agrimensura e em outras áreas.

O que você já sabe?

- Cite situações que envolvem medições de distâncias inacessíveis.
  Determinar a distância do Sol à Lua. Há outras respostas possíveis.
- Como um navegador poderá calcular a altura de um *iceberg* sem medi-la diretamente?
  Usando relações entre medidas de ângulos e de lados de um triângulo retângulo. Há outras respostas possíveis.

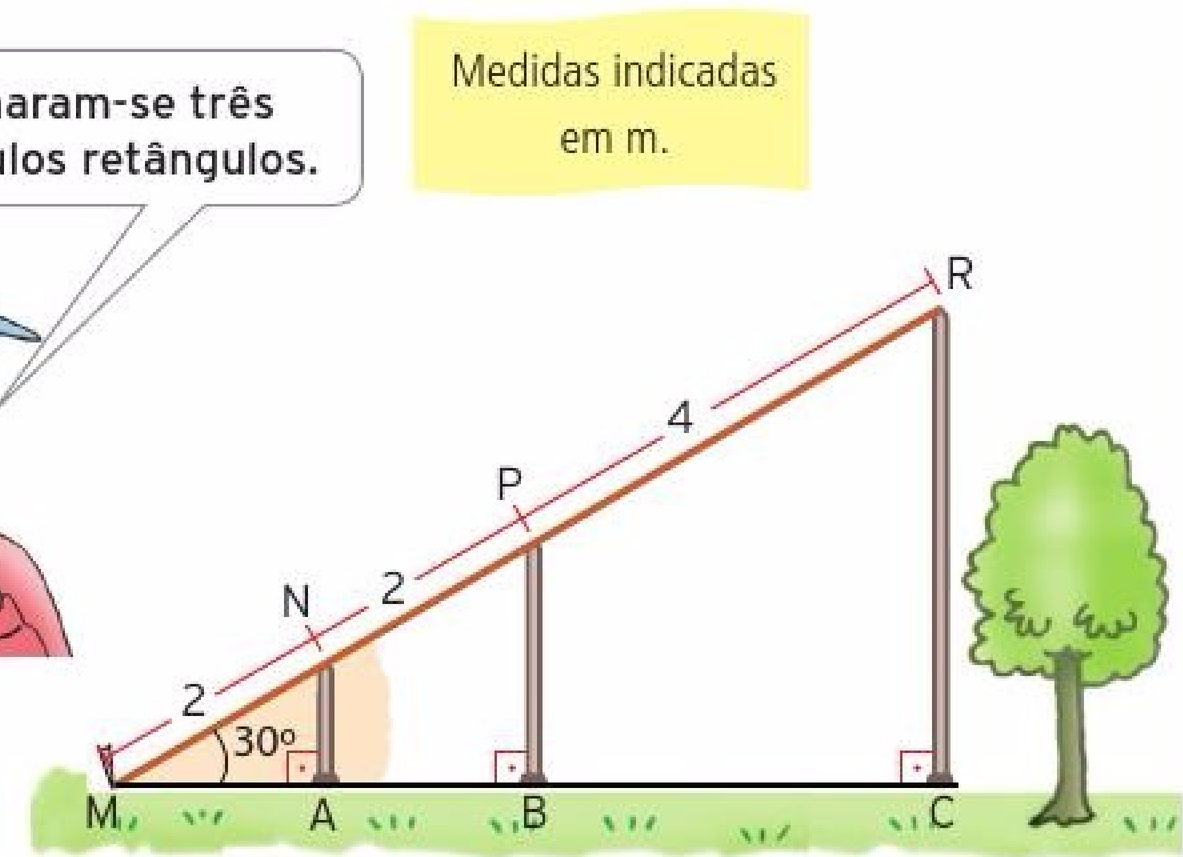
1 Relações trigonométricas nos triângulos retângulos

Seno de um ângulo agudo

Para refletir e responder

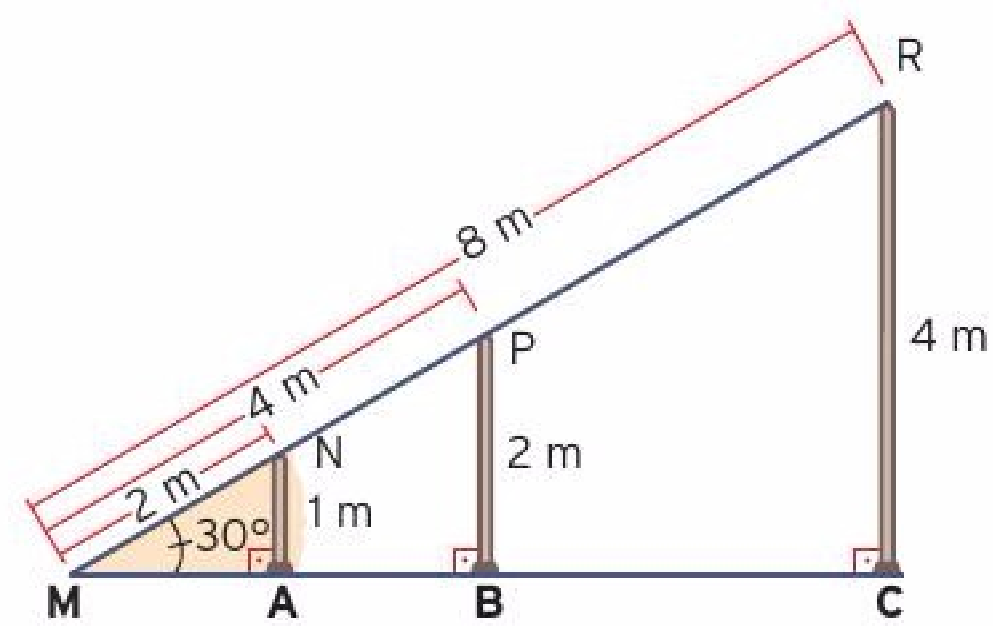
Observe esta situação.

Três estacas medindo 1 m, 2 m e 4 m foram fincadas verticalmente no solo. Um cabo de aço com 8 m foi esticado unindo o topo dessas estacas, como mostra esta figura. Esse cabo de aço formou um ângulo de 30° com o solo.



- Os três triângulos retângulos formados são semelhantes? Por quê?
  Sim. Porque eles têm dois ângulos respectivamente congruentes: os ângulos de 30º e de 90º.

Na situação acima os três triângulos retângulos têm em comum o ângulo $\hat{M}$. Portanto, eles são semelhantes.



Ao estudarmos a semelhança entre triângulos retângulos, podemos observar razões entre os lados dos triângulos que resultam em propriedades de ângulos. Essas propriedades determinam as **relações trigonométricas**.

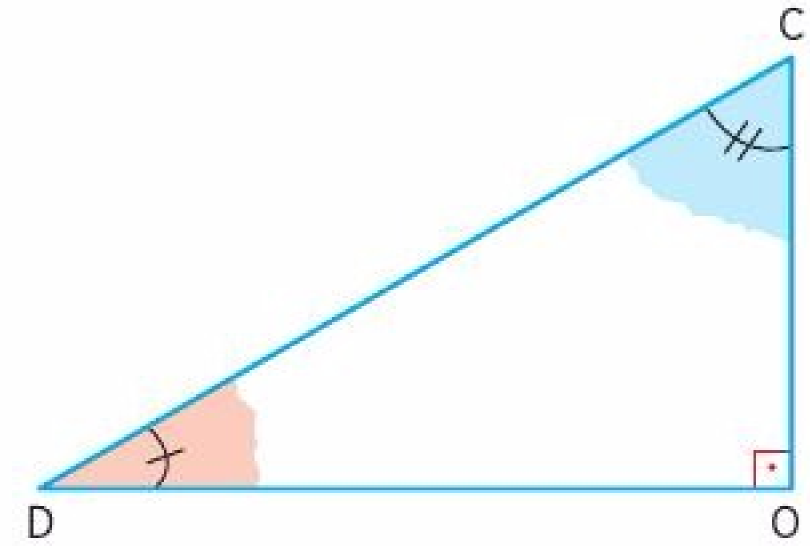
ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Em um triângulo retângulo, cada um dos ângulos agudos é formado pela hipotenusa e por um cateto. Esse cateto é chamado de **cateto adjacente** a esse ângulo agudo. O cateto que não forma o ângulo em questão é chamado de **cateto oposto** a esse ângulo.

No triângulo retângulo DOC:

- Em relação a $\hat{C}$: $\overline{OC}$ — Cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$.
  $\overline{DO}$ — Cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$.

- Em relação a $\hat{D}$: $\overline{DO}$ — Cateto adjacente ao ângulo $\hat{D}$.
  $\overline{OC}$ — Cateto oposto ao ângulo $\hat{D}$.



Retomando a situação das estacas da página anterior, para a razão $\dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{M}}{\text{hipotenusa}}$, temos: $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{MN}} = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{MP}} = \dfrac{2}{4}$ $\dfrac{\overline{CR}}{\overline{MR}} = \dfrac{4}{8}$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{MR}} = \frac{1}{2}$$

A razão $\dfrac{1}{2}$ está relacionada ao ângulo de 30° e ao cateto oposto a esse ângulo em um triângulo retângulo. Por esse motivo, dizemos que $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ é o seno de um ângulo que mede 30°. Ou seja, nos triângulos retângulos MAN, MBP e MCR temos:

$$\textbf{sen de 30°} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ — } \frac{\overline{AN}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{MR}} = \frac{1}{2} \text{ — } \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

Cosseno de um ângulo agudo

Vamos calcular a medida do cateto adjacente a $\hat{M}$ em cada triângulo aplicando o teorema de Pitágoras:

- no $\triangle$**MAN:** $2^2 = 1^2 + (\text{med } \overline{MA})^2$ — $(\text{med } \overline{MA})^2 = 4 - 1$ — $\text{med } \overline{MA} = \sqrt{3}$ m

Como os triângulos são semelhantes, temos:

- no $\triangle$**MBP:** $4^2 = 2^2 + (\text{med } \overline{MB})^2$ — $(\text{med } \overline{MB})^2 = 16 - 4$
  $\text{med } \overline{MB} = \sqrt{12}$ — $\text{med } \overline{MB} = 2\sqrt{3}$ m
- no $\triangle$**MCR:** $8^2 = 4^2 + (\text{med } \overline{MC})^2$ — $(\text{med } \overline{MC})^2 = 64 - 16$
  $\text{med } \overline{MC} = \sqrt{48}$ — $\text{med } \overline{MC} = 4\sqrt{3}$ m

Para a razão $\dfrac{\text{cateto adjacente a } \hat{M}}{\text{hipotenusa}}$, temos: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MP}} = \dfrac{\cancelto{1}{2}\sqrt{3}}{\cancelto{2}{4}}$ $\dfrac{\overline{MC}}{\overline{MR}} = \dfrac{\cancelto{1}{4}\sqrt{3}}{\cancelto{2}{8}}$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MR}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A razão $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ também está relacionada a um ângulo de 30° e ao cateto adjacente a esse ângulo em um triângulo retângulo. Por esse motivo, dizemos que $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é o cosseno de um ângulo que mede 30°.

Ou seja, nos triângulos retângulos MAN, MBP e MCR, temos:

$$\textbf{cosseno de 30°} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \text{ — } \frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MR}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

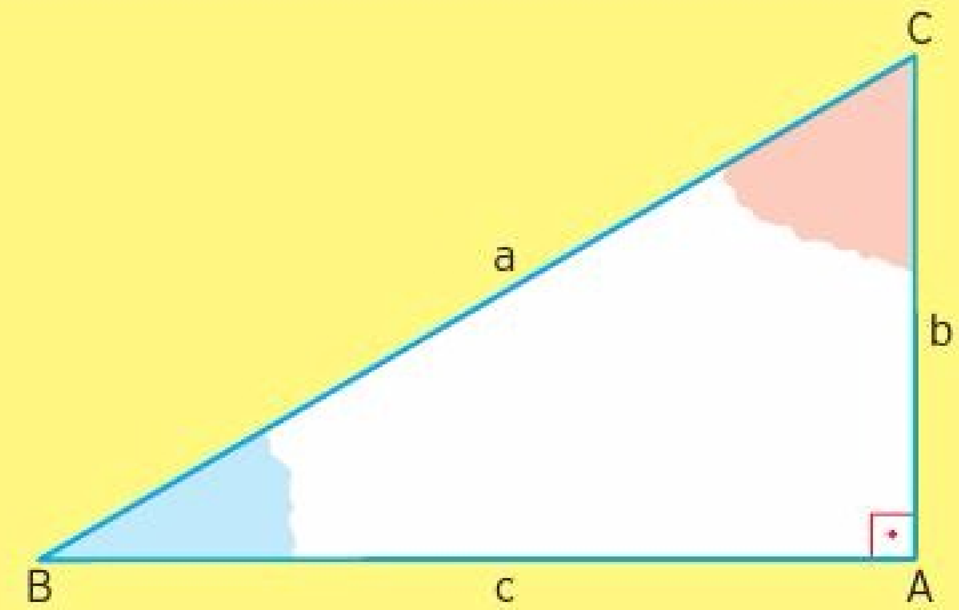
De modo geral, em um **triângulo retângulo ABC** dizemos que:

- **Seno de $\hat{B}$:** $\dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}}$

  $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ —— $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a}$

- **Cosseno de $\hat{B}$:** $\dfrac{\text{cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}}$

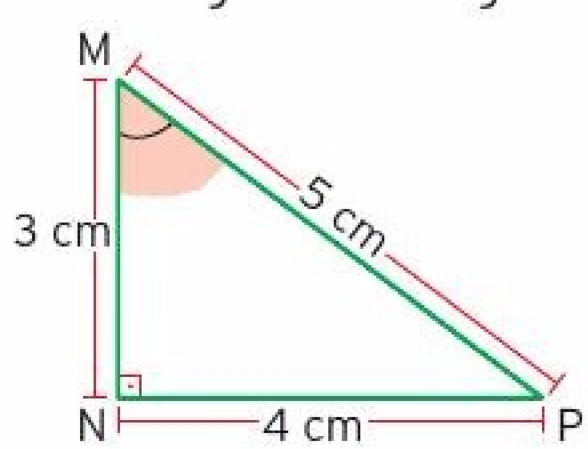
  $\cos \hat{B} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ —— $\cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$



Vamos combinar:
Se a medida de um ângulo $\hat{M}$ é igual a 30°, então as expressões sen $\hat{M}$ e sen 30° têm o mesmo significado. Da mesma maneira, as expressões cos $\hat{B}$ e cos 30° têm o mesmo significado.

Outros exemplos:

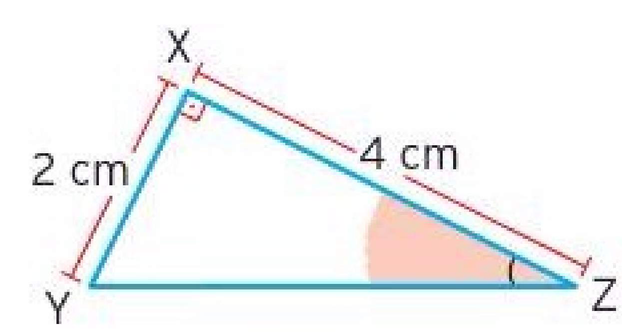
- No triângulo retângulo MNP:



$$\text{sen } \hat{M} = \frac{\overline{NP}}{\overline{MP}} = \frac{4}{5} \text{ —— } \boxed{\text{sen } \hat{M} = 0{,}8}$$

$$\cos \hat{M} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \frac{3}{5} \text{ —— } \boxed{\cos \hat{M} = 0{,}6}$$

- No triângulo retângulo XYZ:



$$(\text{med } \overline{YZ})^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$\text{med } \overline{YZ} = \sqrt{20} \text{ cm} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

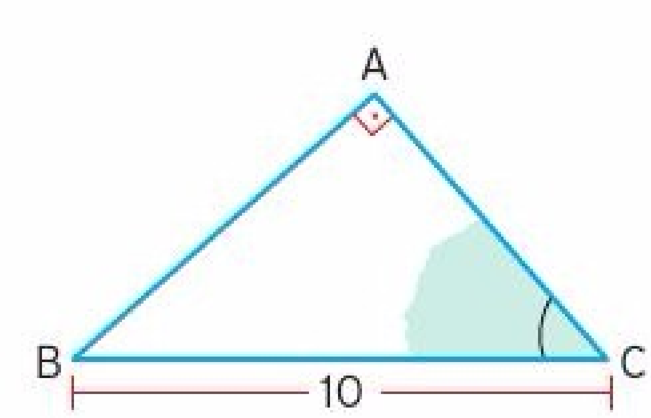
$$\text{sen } \hat{Z} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \text{ —— } \boxed{\text{sen } \hat{Z} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\cos \hat{Z} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{YZ}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \text{ —— } \boxed{\cos \hat{Z} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}}$$

- No triângulo retângulo ABC, $\cos \hat{C} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ e a hipotenusa mede 10 cm. Vamos calcular a medida do cateto adjacente a $\hat{C}$.

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \text{ —— } \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\overline{AC}}{10}$$

$$\text{med } \overline{AC} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \cong 6{,}6 \text{ cm}$$

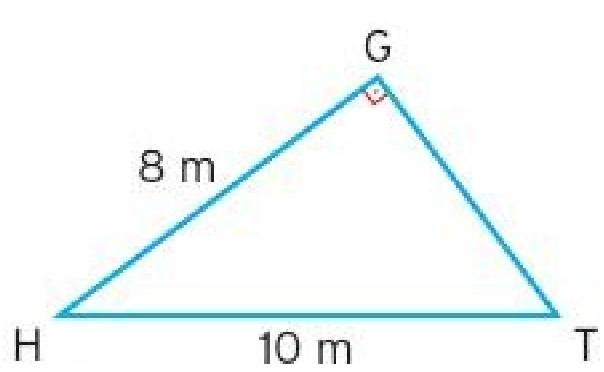


Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Leia o que o professor diz e faça o que se pede a seguir. André e Célia. Bianca e Danilo erraram porque $\cos \hat{H} = \frac{4}{5}$ e $\cos \hat{T} = \frac{3}{5}$.

SHUTTERSTOCK



Analise as respostas de alguns alunos:

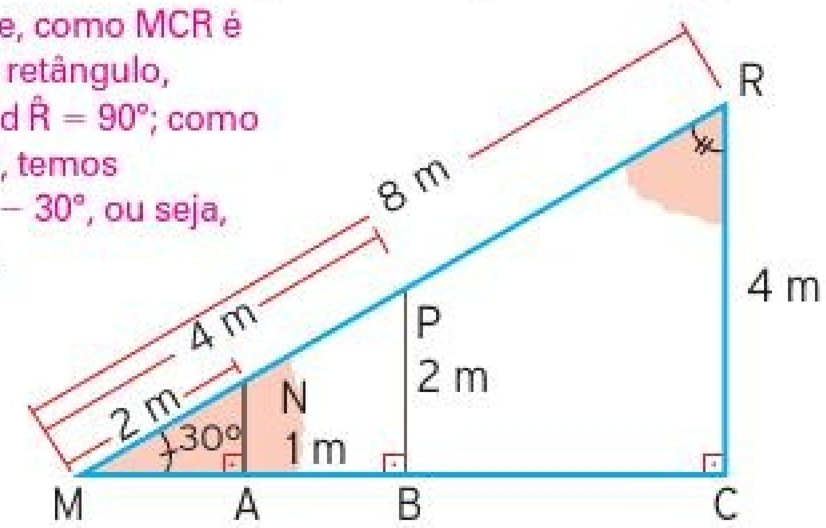
André: $\text{sen } \hat{H} = \frac{3}{5}$ **Bianca:** $\cos \hat{H} = \frac{3}{5}$

Célia: $\text{sen } \hat{T} = \frac{4}{5}$ **Danilo:** $\cos \hat{T} = \frac{4}{5}$

Anote os nomes daqueles que acertaram e explique por que os outros erraram.

2. Observe esta figura e responda às questões:

b) 60°, porque, como MCR é um triângulo retângulo, $\text{med } \hat{M} + \text{med } \hat{R} = 90°$; como $\text{med } \hat{M} = 30°$, temos $\text{med } \hat{R} = 90° - 30°$, ou seja, $\text{med } \hat{R} = 60°$.

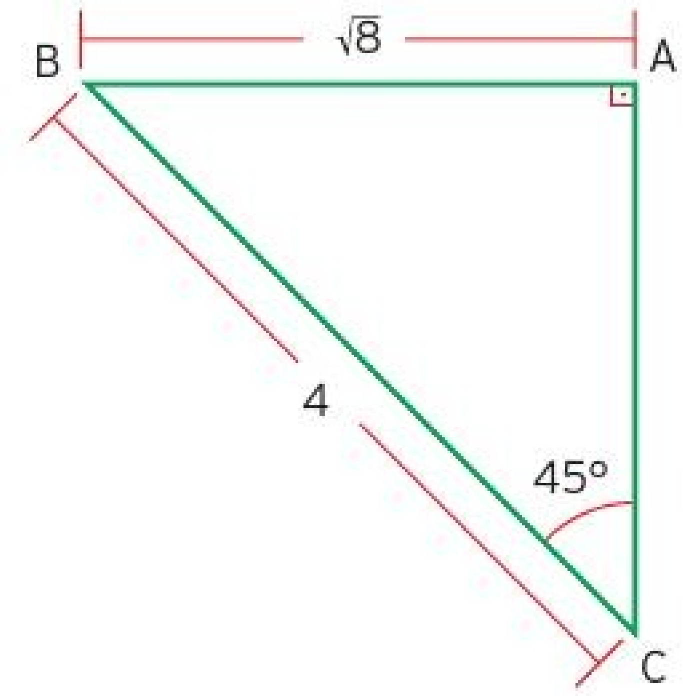


a) Qual é o valor exato de med $\overline{MA}$? E de med $\overline{MB}$? E de med $\overline{MC}$? $\sqrt{3}$ m; $2\sqrt{3}$ m; $4\sqrt{3}$ m

b) Qual é a medida de $\hat{R}$? Justifique sua resposta.

c) Qual é o valor de sen $\hat{R}$? E de cos $\hat{R}$? $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$

3. O triângulo ABC é retângulo em **A** e as medidas estão indicadas em metros.

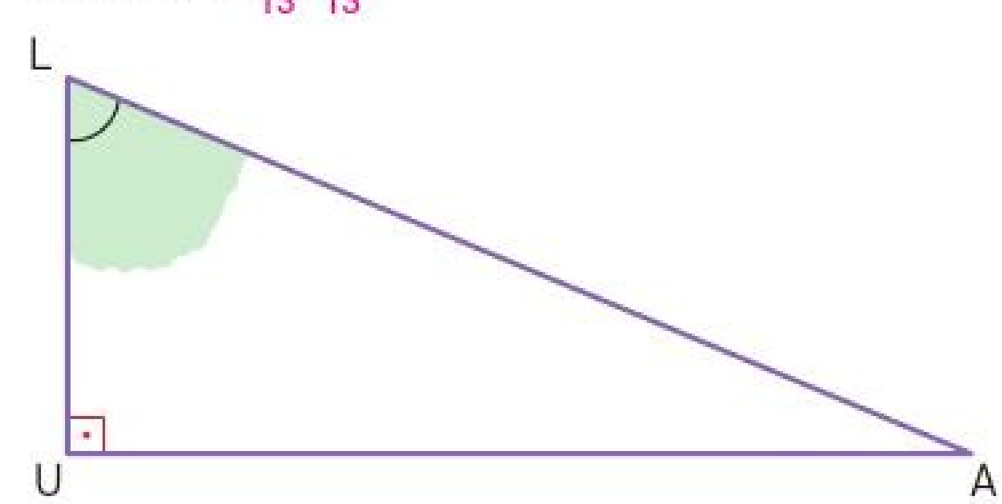


Responda às questões:

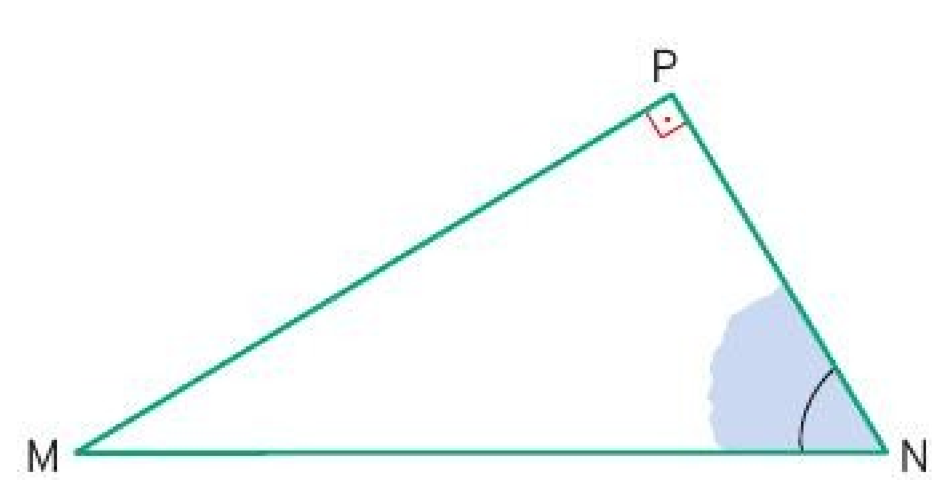
a) Qual é a medida de $\hat{B}$? 45°

b) Determine o seno e o cosseno de um ângulo de 45°. $\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. No triângulo retângulo LUA, med $\overline{LU}$ é 10 cm e med $\overline{UA}$ é 24 cm. Qual é o valor de sen $\hat{L}$? E de cos $\hat{L}$? $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$



5. No triângulo retângulo MNP, $\text{sen } \hat{N} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e a hipotenusa mede 12 cm.



a) Qual é a medida do cateto oposto a $\hat{N}$? $2\sqrt{3}$ cm $\cong$ 3,5 cm

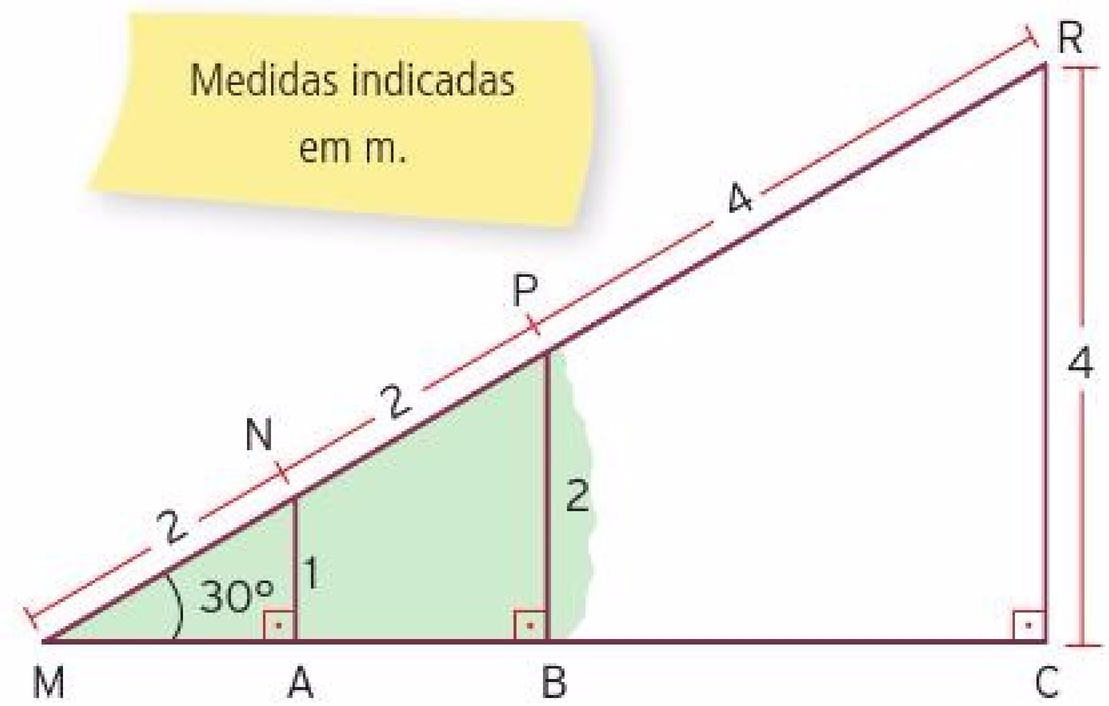
b) Qual é o valor de cos $\hat{N}$? $\frac{\sqrt{33}}{6}$

c) Qual é o valor de cos $\hat{M}$? $\frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0{,}3$

Tangente de um ângulo agudo

Para refletir e responder

Observe a figura:



- Calcule o valor da razão $\dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{M}}{\text{cateto adjacente a } \hat{M}}$ nos três triângulos retângulos dessa figura. O que ocorre com os valores calculados? $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{MA}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{MB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{\overline{CR}}{\overline{MC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; são iguais entre si.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos MAN, MBP e MCR concluímos que:

$$\text{med } \overline{MA} = \sqrt{3} \text{ m, med } \overline{MB} = 2\sqrt{3} \text{ m e med } \overline{MC} = 4\sqrt{3} \text{ m.}$$

Portanto:

A razão $\dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{M}}{\text{cateto adjacente a } \hat{M}}$ nos triângulos MAN, MBP e MCR são iguais entre si:

$\triangle MAN$ — $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{MA}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle MBP$ — $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{MB}} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle MCR$ — $\dfrac{\overline{CR}}{\overline{MC}} = \dfrac{\cancel{4}^{1}}{{}_{1}\cancel{4}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

— $\dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{M}}{\text{cateto adjacente a } \hat{M}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

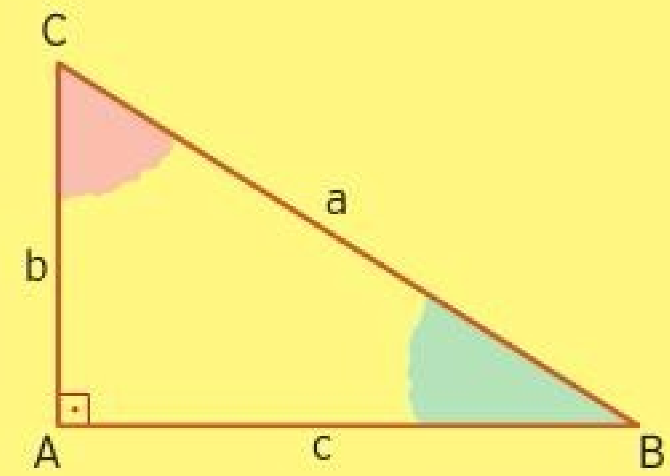
$$\frac{\overline{AN}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{MC}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ — $\boxed{\text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

De modo geral, em um **triângulo retângulo ABC** dizemos que:

$$\text{Tangente de } \hat{B} = \frac{\textbf{cateto oposto a } \hat{B}}{\textbf{cateto adjacente a } \hat{B}}$$

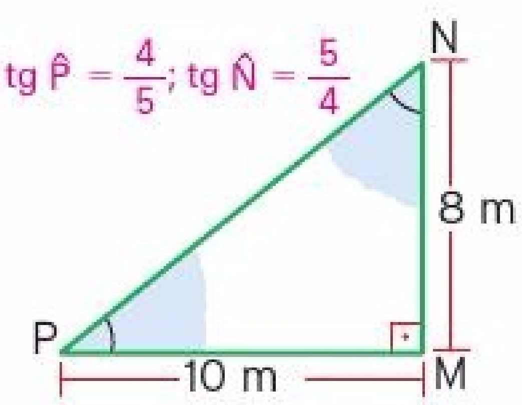
$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ —— } \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$$



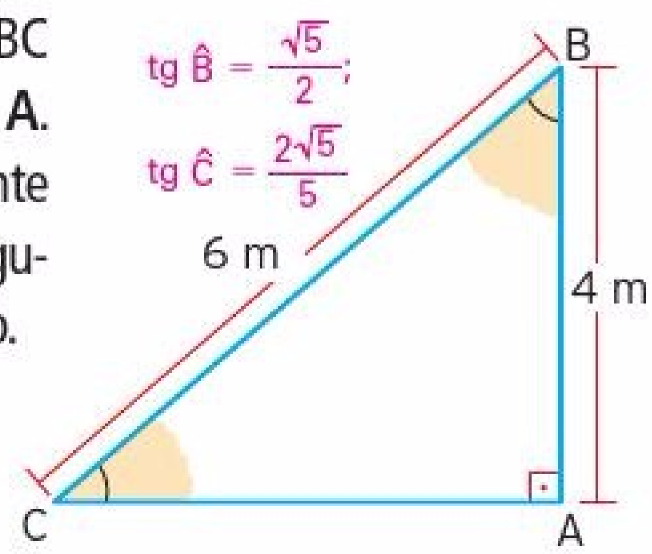
Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

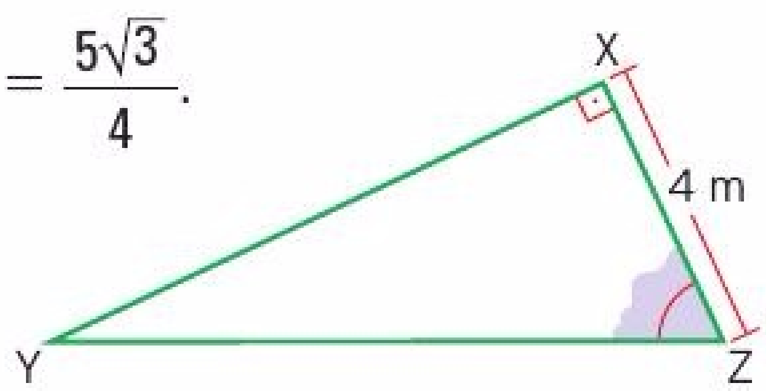
6. Nesta figura, △MNP é retângulo em **M**. Calcule a tangente de cada ângulo agudo desse triângulo. $\text{tg } \hat{P} = \frac{4}{5}$; $\text{tg } \hat{N} = \frac{5}{4}$



7. Nesta figura, △ABC é retângulo em **A**. Calcule a tangente de cada ângulo agudo desse triângulo. $\text{tg } \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\text{tg } \hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



8. Nesta figura, △XYZ é retângulo em **X** e $\text{tg } \hat{Z} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

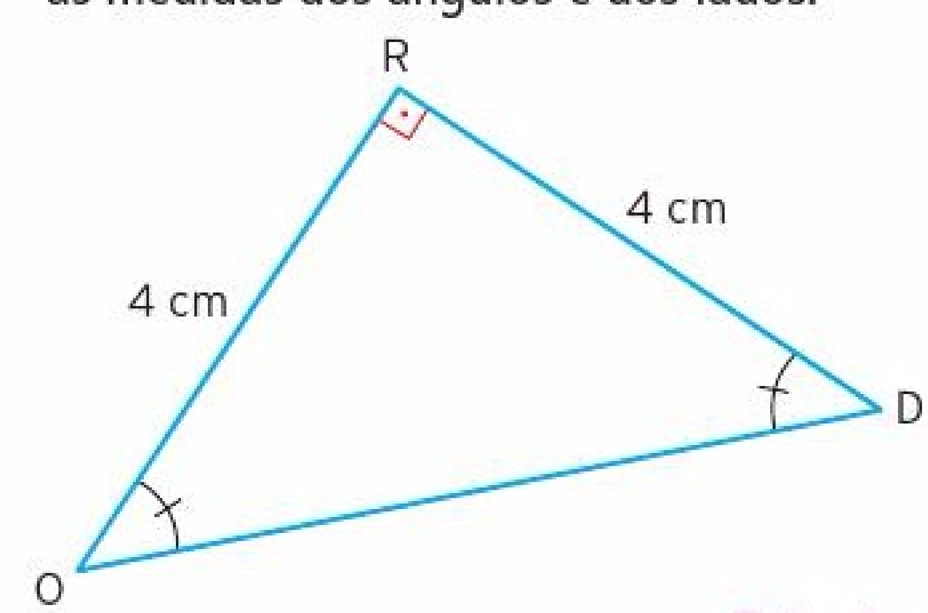


a) Qual é a medida do cateto oposto a $\hat{Z}$? $5\sqrt{3}$ cm

b) Qual é a medida da hipotenusa? $\sqrt{91}$ m

c) Qual é o valor de tg $\hat{Y}$? $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

9. Este triângulo foi desenhado por Chico. Observe as medidas dos ângulos e dos lados.



a) Que tipo de triângulo ele desenhou? Triângulo retângulo isósceles.

b) Qual é o valor de med $\hat{O}$? E de med $\hat{D}$? 45°; 45°

c) Qual é a medida de $\overline{OD}$? $4\sqrt{2}$ cm

d) Identifique o cateto oposto e o cateto adjacente a $\hat{D}$. $\overline{RO}$; $\overline{DR}$

e) Qual é o valor de sen $\hat{D}$? E de cos $\hat{D}$? E de tg $\hat{D}$? $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1

Investigue e explique

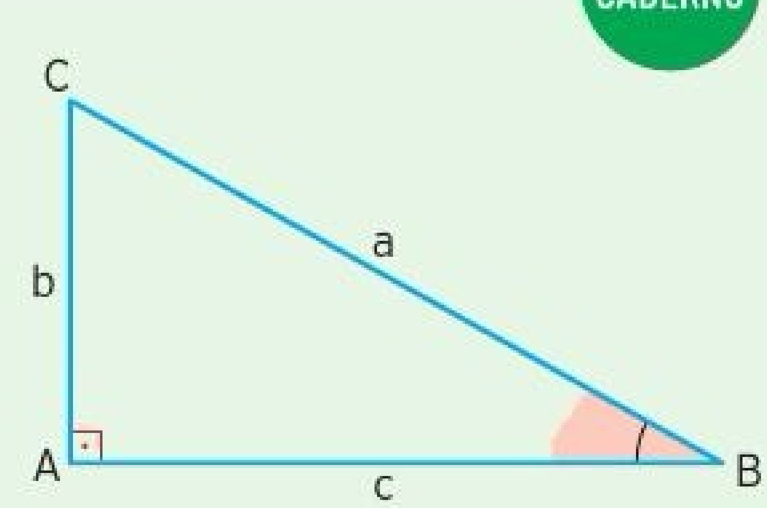
FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e resolvam.

Considerem o triângulo ABC, retângulo, como mostra a figura.

Mostrem que $\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.

$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$ e $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$ —— $\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{\cancel{a}_1} \cdot \frac{\cancel{a}^1}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg } \hat{B}$

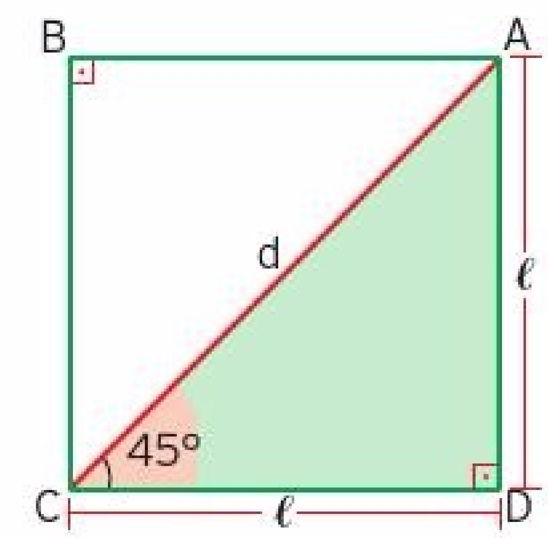


Ângulos de 30°, 45° e 60°

Ângulos com **30°**, **45°** e **60°** são frequentes em problemas, por isso é importante calcular o valor de seno, cosseno e tangente desses ângulos.

Ângulo de 45°

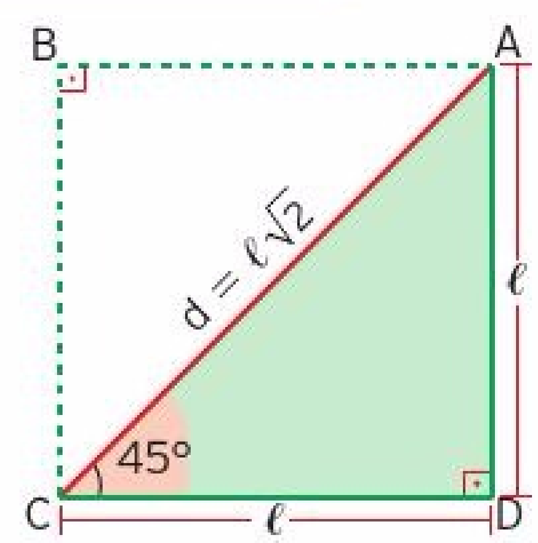
Em um quadrado qualquer, obtemos ângulos de 45° traçando uma de suas diagonais.



Observe o quadrado ABCD, cujos lados medem ℓ cm.

Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles ACD e calculamos a medida de $\overline{AC}$ em função de ℓ:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \;\text{———}\; d^2 = 2\ell^2 \;\text{———}\; d = \ell\sqrt{2}$$



Observando as medidas dos lados do $\triangle ACD$, temos:

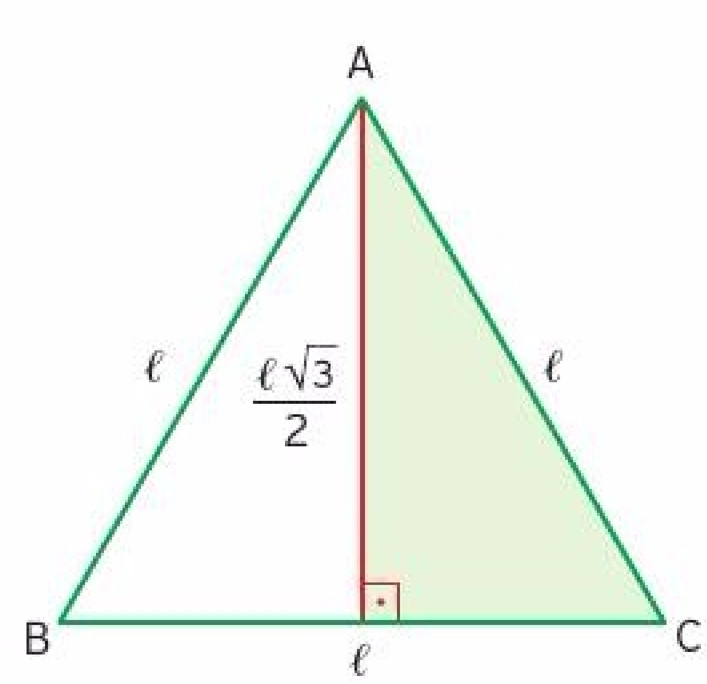
$$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{d} = \frac{\overset{1}{\cancel{\ell}}}{\underset{1}{\cancel{\ell}}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\text{———}\; \boxed{\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\ell}{d} \;\text{———}\; \boxed{\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell} \;\text{———}\; \boxed{\text{tg } 45° = 1}$$

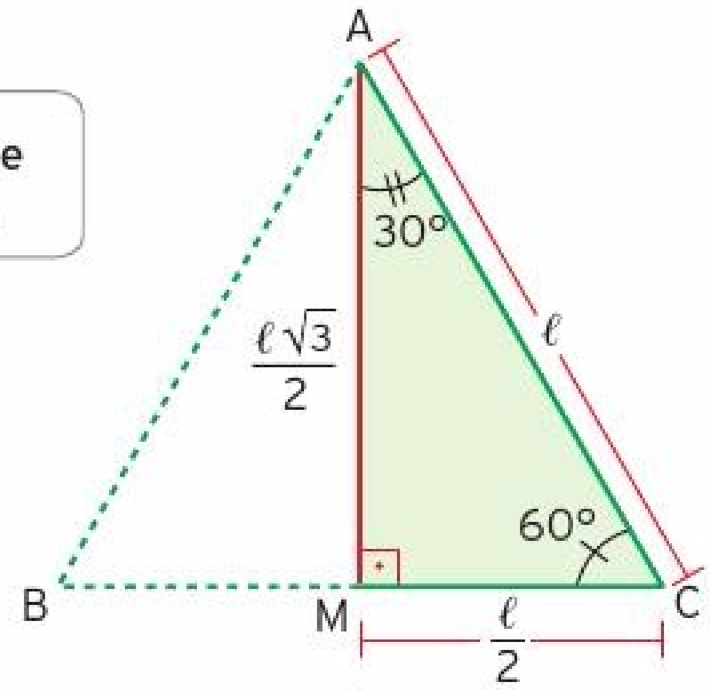
Ângulos de 30° e 60°

O triângulo MNP dado nesta figura é equilátero e seus lados medem ℓ cm.



Em todo triângulo equilátero observamos ângulos de 60° e, ao traçarmos uma de suas alturas, obtemos ângulos de 30°.

HÉLIO SENATORE



$\triangle ABC$ equilátero
$\overline{AM}$ altura

$\overline{AM}$ é mediana.
$\triangle AMC$ é retângulo.
$\overline{AM}$ é bissetriz de $\hat{A}$.

M é ponto médio de $\overline{BC}$ —— med $\overline{MC} = \dfrac{\ell}{2}$

$\overline{AM}$ é altura do $\triangle ABC$ —— med $\overline{AM} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AM}$ é bissetriz de $\hat{A}$ —— med $C\hat{A}M = \dfrac{60°}{2}$ —— med $C\hat{A}M = 30°$

As razões entre as medidas dos lados do $\triangle AMC$ resultam em relações trigonométricas para ângulos de 30° e 60°.

- **Ângulo de 30°**

$\text{sen } 30° = \dfrac{\ell}{2} : \ell$ —— $\boxed{\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}}$

$\cos 30° = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} : \ell$ —— $\boxed{\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\text{tg } 30° = \dfrac{\ell}{2} : \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ —— $\boxed{\text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

- **Ângulo de 60°**

$\text{sen } 60° = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} : \ell$ —— $\boxed{\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cos 60° = \dfrac{\ell}{2} : \ell$ —— $\boxed{\cos 60° = \dfrac{1}{2}}$

$\text{tg } 60° = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} : \dfrac{\ell}{2}$ —— $\boxed{\text{tg } 60° = \sqrt{3}}$

Note que esses valores são números reais positivos.

Observe também que sen 30° = cos 60° e cos 30° = sen 60°.

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

10. Copie este quadro, complete-o e responda às questões:

$\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \sqrt{3}$

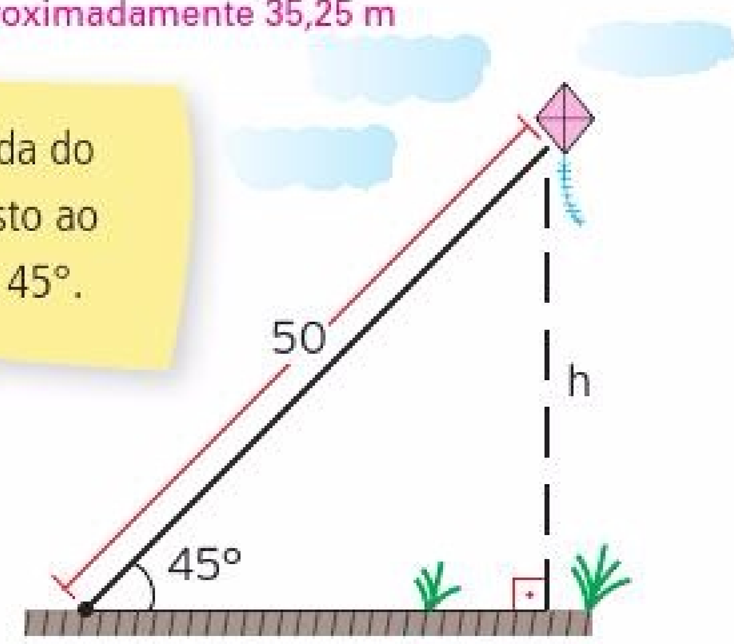
	30°	45°	60°
Seno			
Cosseno			
Tangente			

a) Qual é a medida de um ângulo de um triângulo cujo seno é igual ao cosseno? 45°

b) Qual é a medida de um ângulo de um triângulo cuja tangente é 1? E igual a $\sqrt{3}$? 45°; 60°

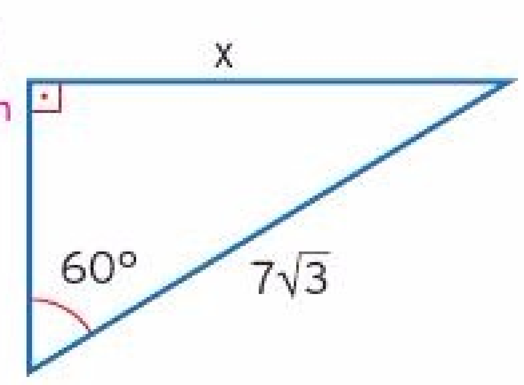
11. Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma um ângulo de 45° com o solo. Da pipa ao solo, a linha mede 50 m de comprimento. A que distância do solo está a pipa?
$25\sqrt{2}$ m, ou aproximadamente 35,25 m

h é a medida do cateto oposto ao ângulo de 45°.

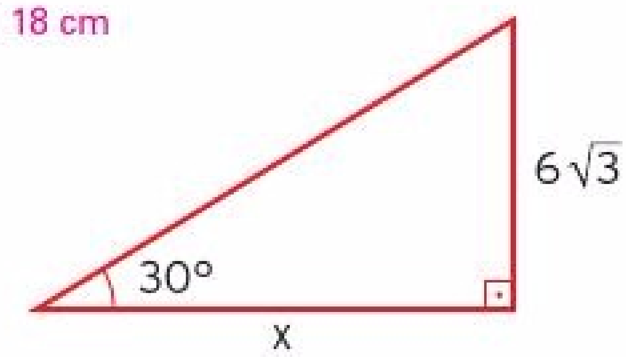


12. Nestas figuras, as medidas dos comprimentos estão indicadas em centímetros. Calcule a medida **x**:

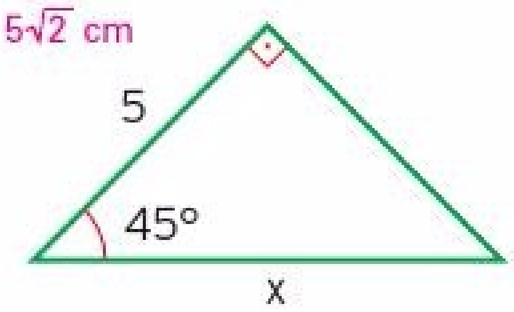
a) 10,5 cm



b) 18 cm



c) $5\sqrt{2}$ cm



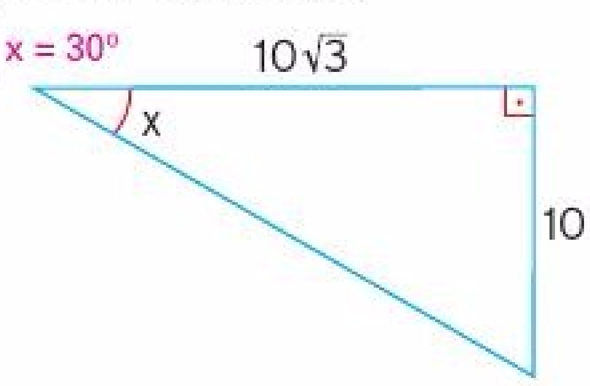
13. Consulte a tabela construída na atividade 10 e calcule:

a) $\frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\text{sen } 45°}{\cos 45°}$ 1 c) $\frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°}$ $\sqrt{3}$

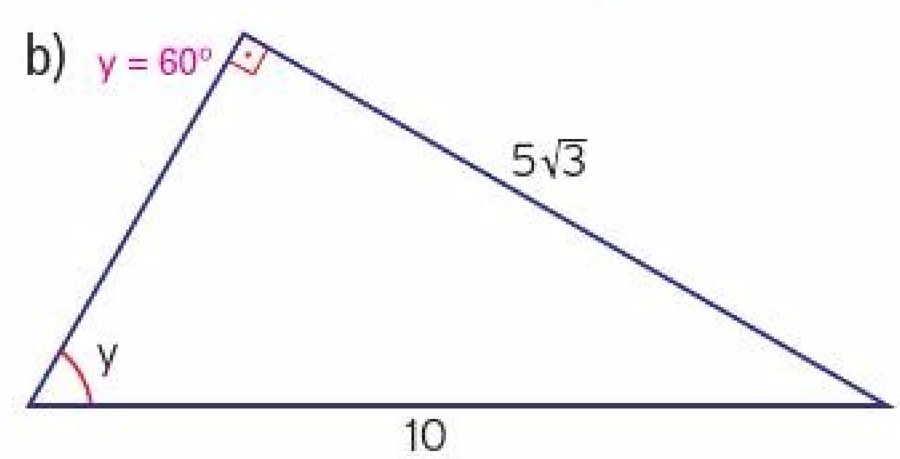
Compare cada item anterior com a tangente do ângulo correspondente. Quais são as suas conclusões? Os valores são iguais.

14. Nestas figuras, as medidas estão indicadas em centímetros. Calcule a medida do ângulo destacado em cada uma:

a) x = 30°



b) y = 60°



Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

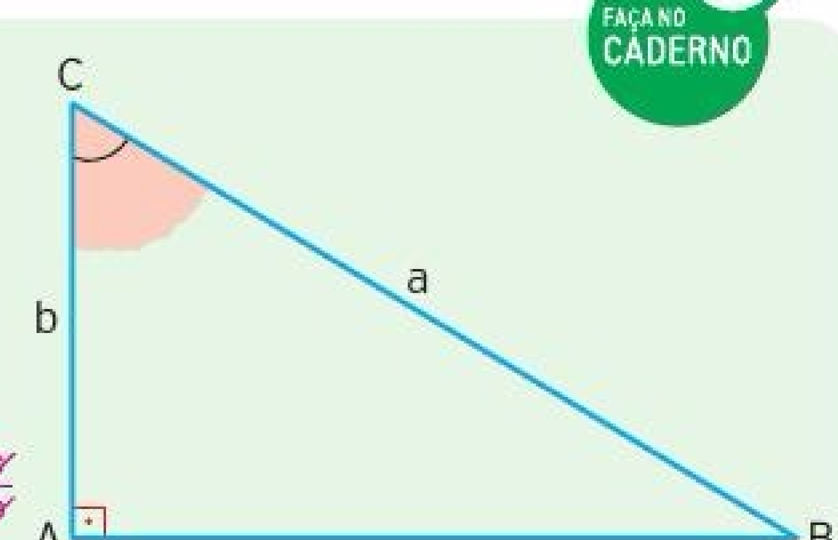
Junte-se a um colega, investiguem, reflitam e resolvam.

O triângulo ABC dado nesta figura é retângulo.

- Mostrem que **tg $\hat{B}$ · tg $\hat{C}$ = 1**.
- Usando potências podemos escrever sen $\hat{C}$ · sen $\hat{C}$ = sen² $\hat{C}$ e
- cos $\hat{C}$ · cos $\hat{C}$ = cos² $\hat{C}$.
  Mostrem que sen² $\hat{C}$ + cos² $\hat{C}$ = 1.

$\left.\begin{aligned} \text{tg } \hat{B} &= \frac{b}{c} \\ \text{tg } \hat{C} &= \frac{c}{b} \end{aligned}\right] \text{tg } \hat{B} \cdot \text{tg } \hat{C} = \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{b}}$

tg $\hat{B}$ · tg $\hat{C}$ = 1



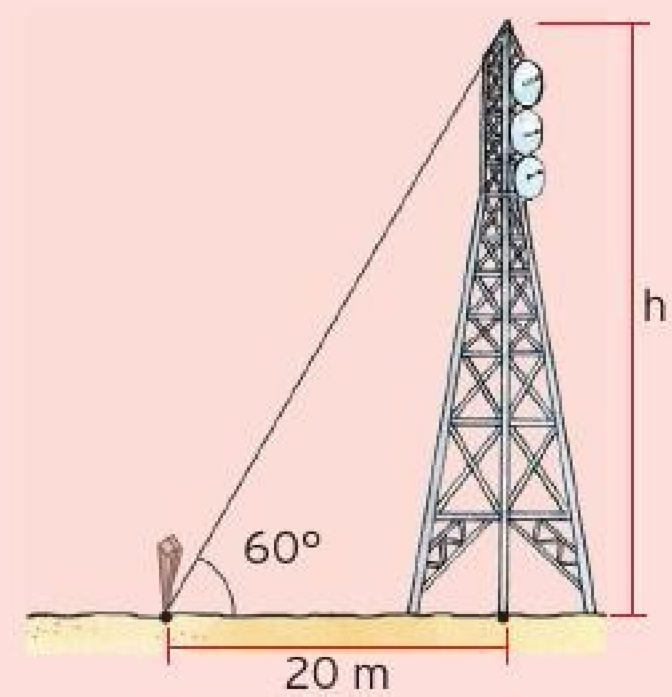
Desafio

FAÇA NO CADERNO

Qual é a altura da torre?

Determine a medida aproximada da altura da torre de transmissão da imagem ao lado. 34,60 m

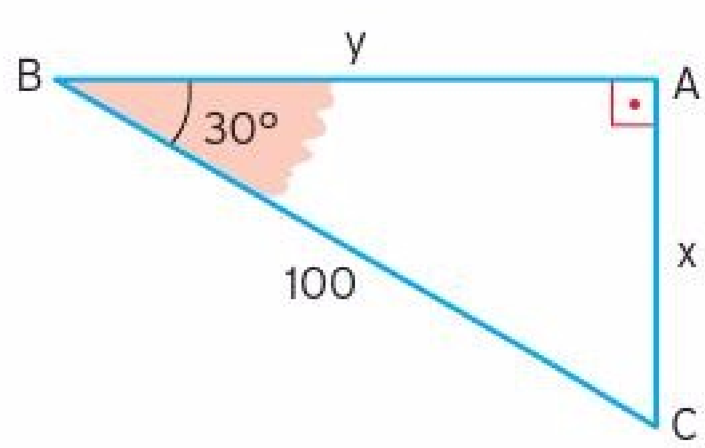
Use $\sqrt{3} \cong 1{,}73$.



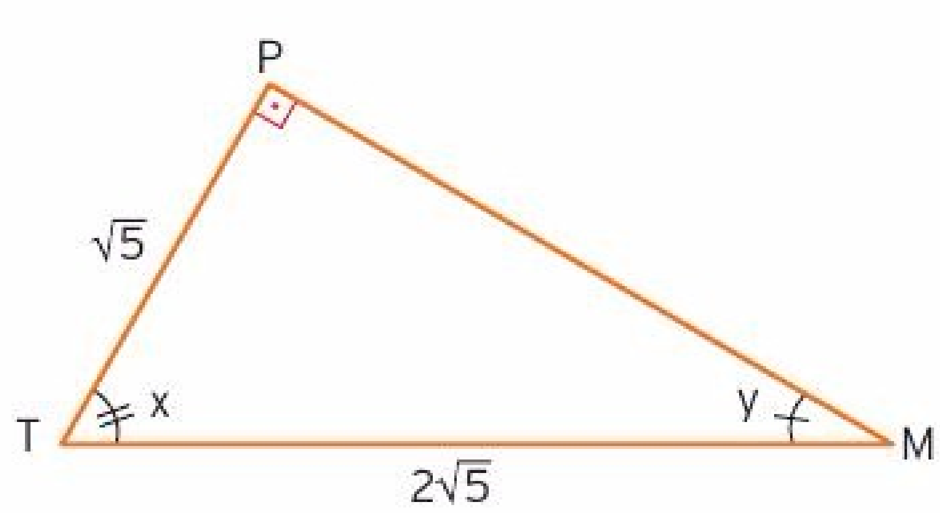
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

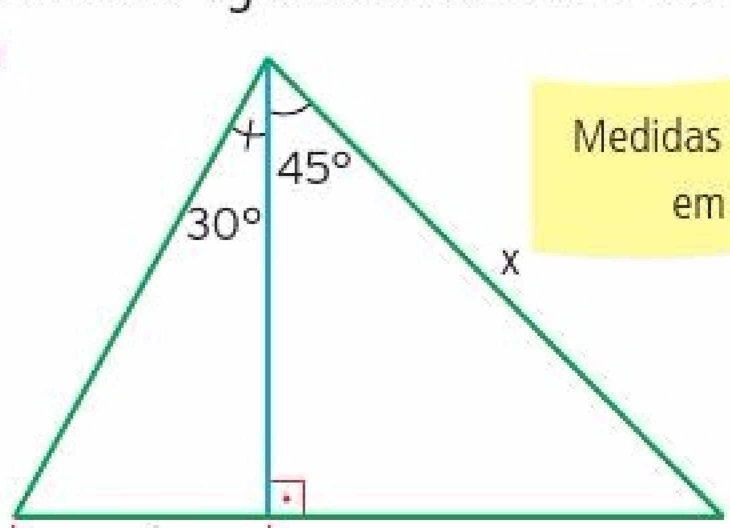
15. Calcule as medidas **x** e **y**, em centímetros, assinaladas no triângulo ABC. 50 cm; $50\sqrt{3}$ cm



16. Determine as medidas **x** e **y** dos ângulos agudos do triângulo retângulo PTM. 60°; 30°



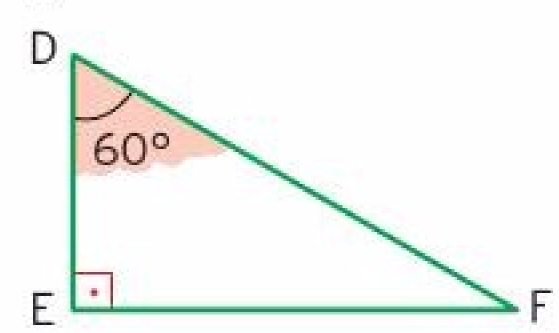
17. Observe a figura e determine o valor de **x**.
$4\sqrt{6}$ cm



Medidas indicadas em cm.

18. Em um triângulo retângulo, um ângulo agudo mede 60° e a hipotenusa, 10 dm. Calcule as medidas dos catetos desse triângulo. $5\sqrt{3}$ dm; 5 dm

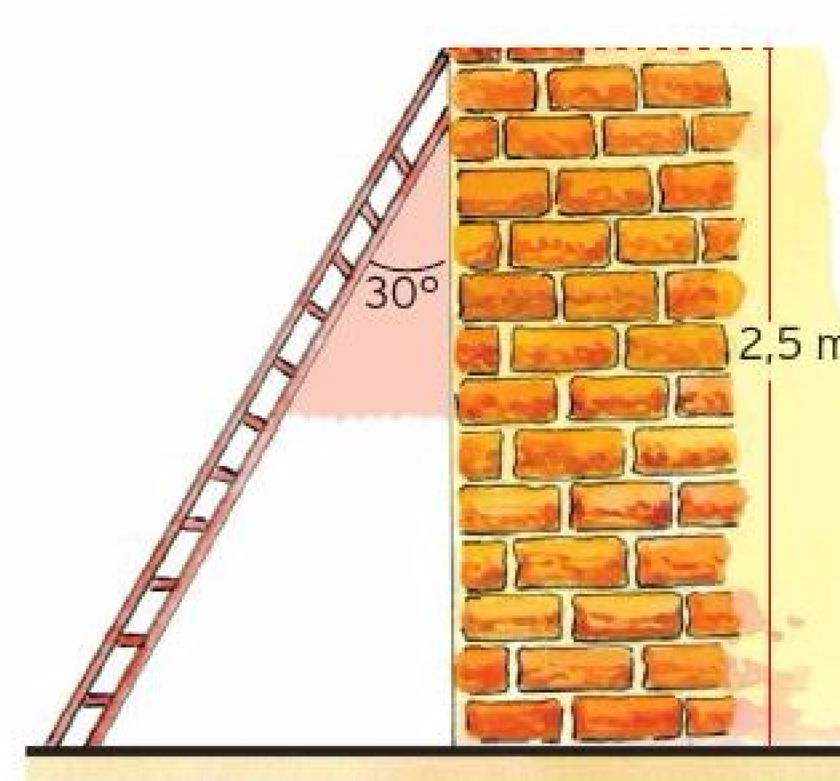
19. Nesta figura, med $\overline{EF} = 180$ cm.



a) Qual é a medida do cateto $\overline{DE}$? $60\sqrt{3}$ cm

b) Qual é a medida da hipotenusa do $\triangle$DEF? $120\sqrt{3}$ cm

20. Uma escada está apoiada no topo de um muro, formando com este um ângulo de 30°. Se o muro tem 2,5 m de altura, qual é o comprimento dessa escada? $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ m

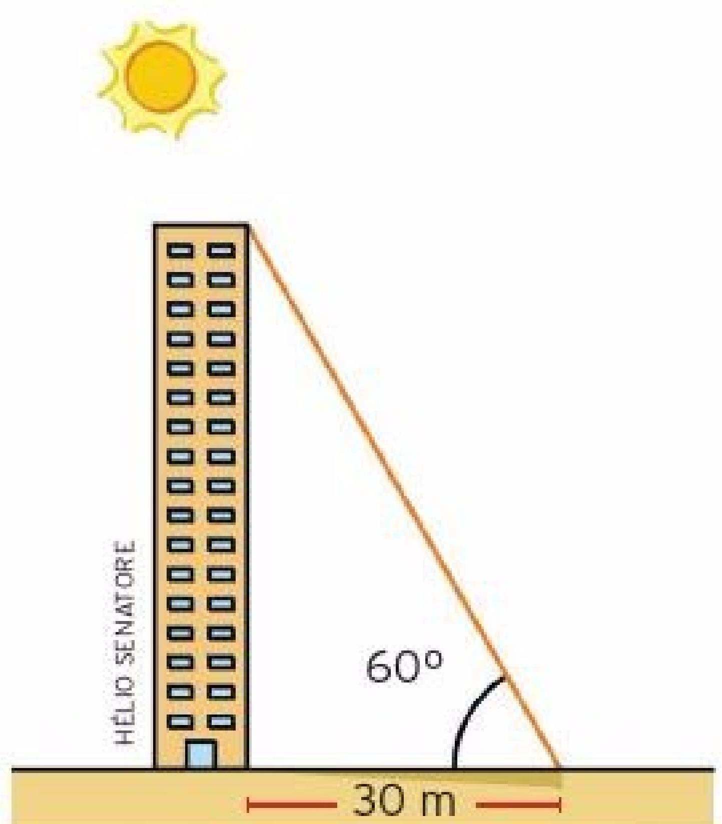


ILUSTRAÇÕES: FRANCISCO VILACHÃ

21. O seno de um ângulo α (lê-se "alfa") de um triângulo retângulo é $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Calcule o cosseno desse ângulo. $\frac{1}{3}$

Pista: Use a relação $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$.

22. Quando os raios solares formam ângulos de 60° com o solo, um edifício projeta uma sombra de 30 m. Qual é a altura desse edifício? $30\sqrt{3}$ m



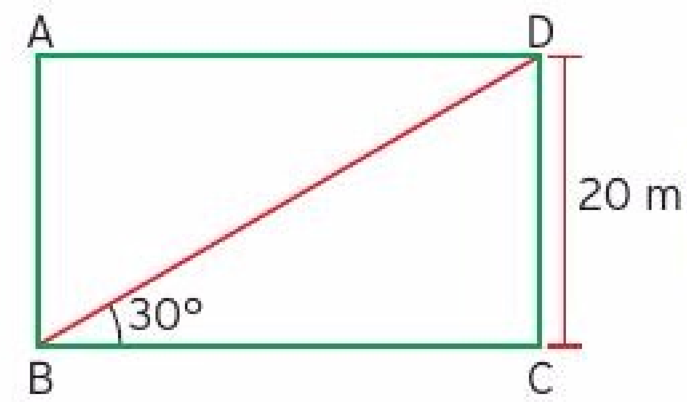
23. O cosseno de um ângulo de um triângulo retângulo é $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Calcule:

a) o seno desse ângulo; $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) a tangente desse ângulo. $\frac{1}{2}$

24. Em um triângulo retângulo, a tangente de um dos ângulos agudos é $2\sqrt{2}$ e o cateto adjacente a esse ângulo mede 4 m. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo? 12 m

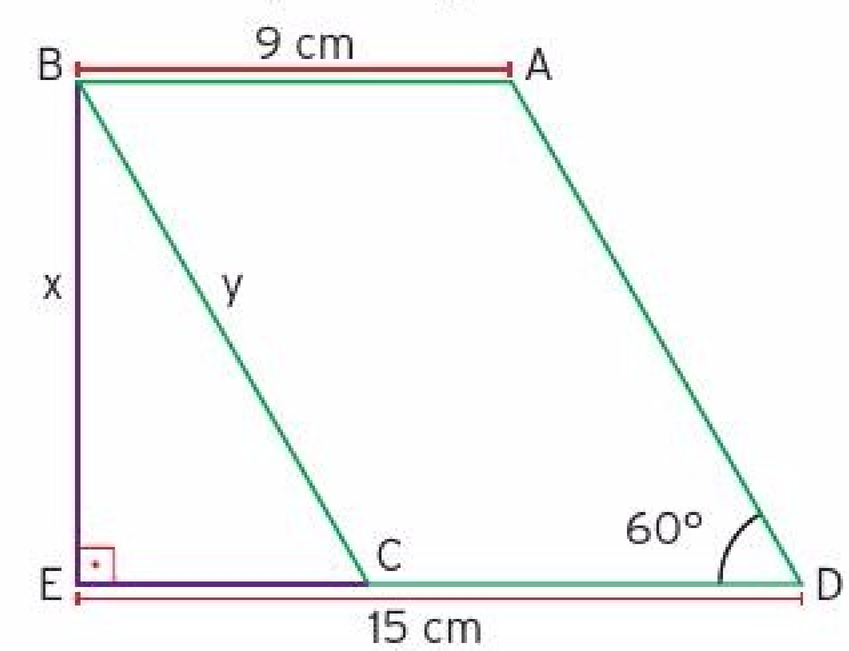
25. Em um retângulo ABCD, a diagonal $\overline{BD}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de 30°, como mostra a figura a seguir. Qual é a área, aproximada, desse retângulo? 692 m²



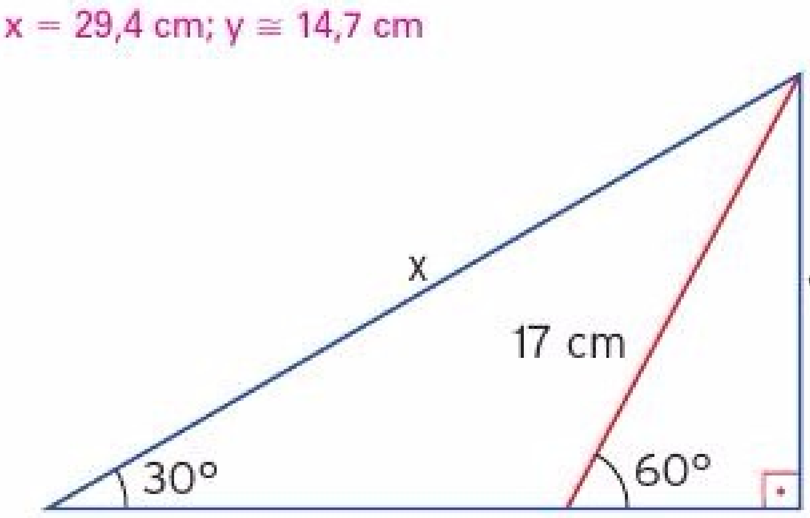
Use $\sqrt{3} \cong 1{,}73$.

26. Determine o valor aproximado de **x** e **y** nestas figuras:

a) ABCD é um paralelogramo. $x \cong 10{,}39$ cm; $y = 12$ cm



b) $x = 29{,}4$ cm; $y \cong 14{,}7$ cm

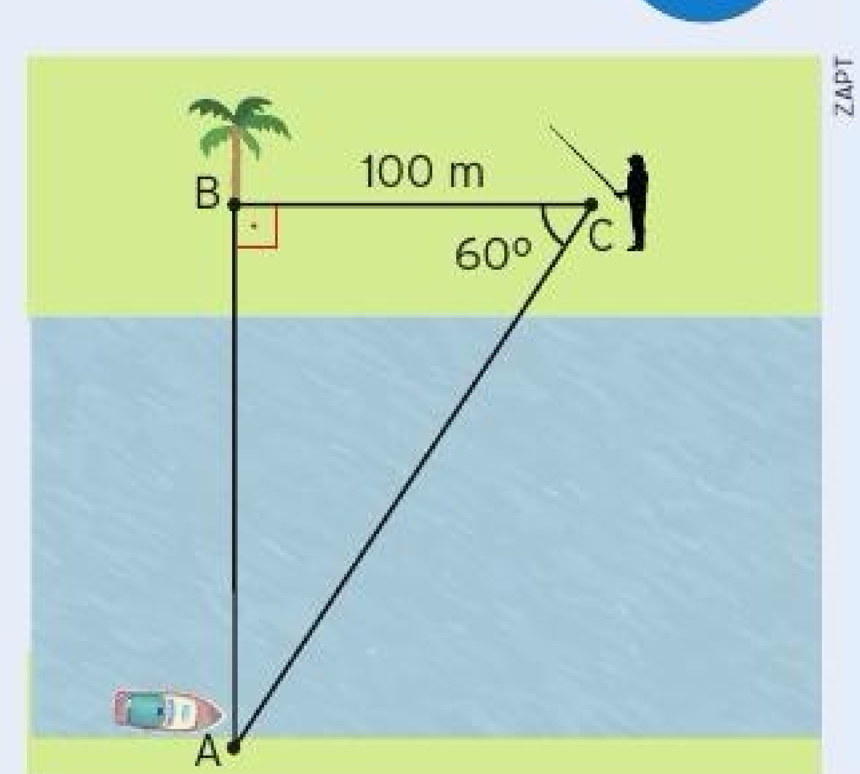


Troquem ideias e resolvam

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, discutam e resolvam.

Na figura, o triângulo ABC é retângulo em **B**, e no vértice **A** encontra-se um barco. Um pescador em **C** está a 100 m da árvore. Sabendo que a árvore está a 3 m da margem do rio, calcule a medida aproximada da largura desse rio. 170,21 m



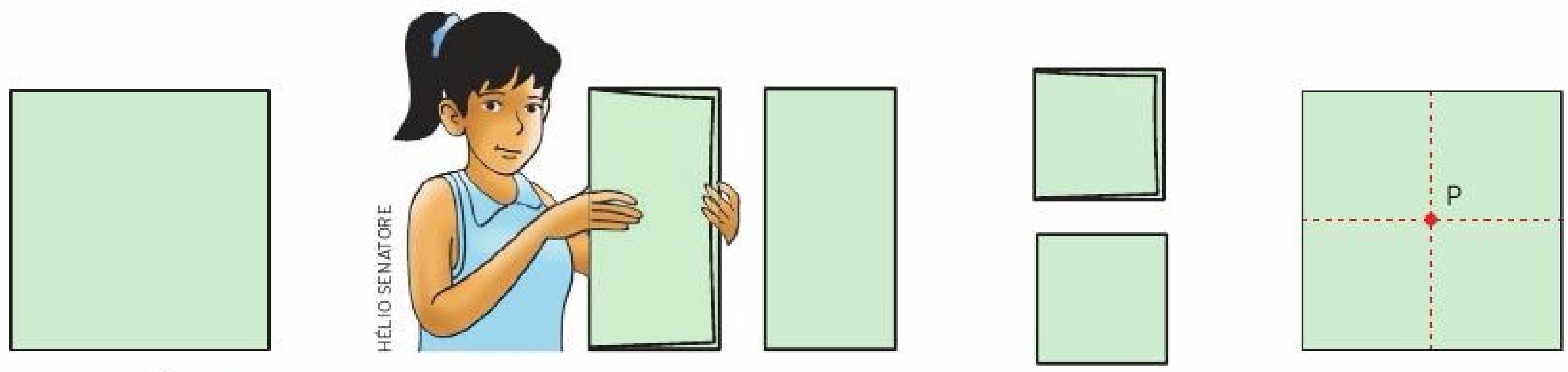
2 Relações métricas em polígonos regulares

Polígono regular inscrito em uma circunferência

Para refletir e responder

Cida desenhou um quadrado e recortou-o.

Lembrou-se das dobraduras, ajustou lado com lado e fez uma dobra. Repetiu o mesmo tipo de dobra na dobradura já feita e abriu o papel: as dobras tinham um ponto comum.



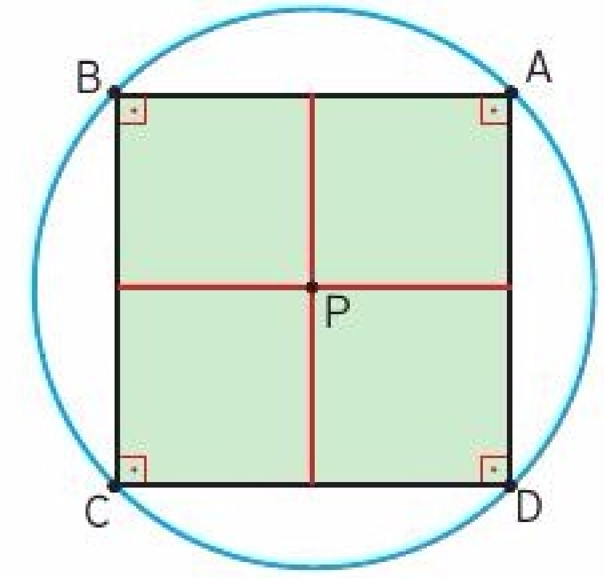
Cida observou esse ponto por alguns minutos e teve uma ideia. Para comprová-la, colou o papel desdobrado sobre uma folha colorida, utilizou um compasso com abertura igual à metade da medida de uma das diagonais e teve uma surpresa.

Experimente também e procure obter as respostas.

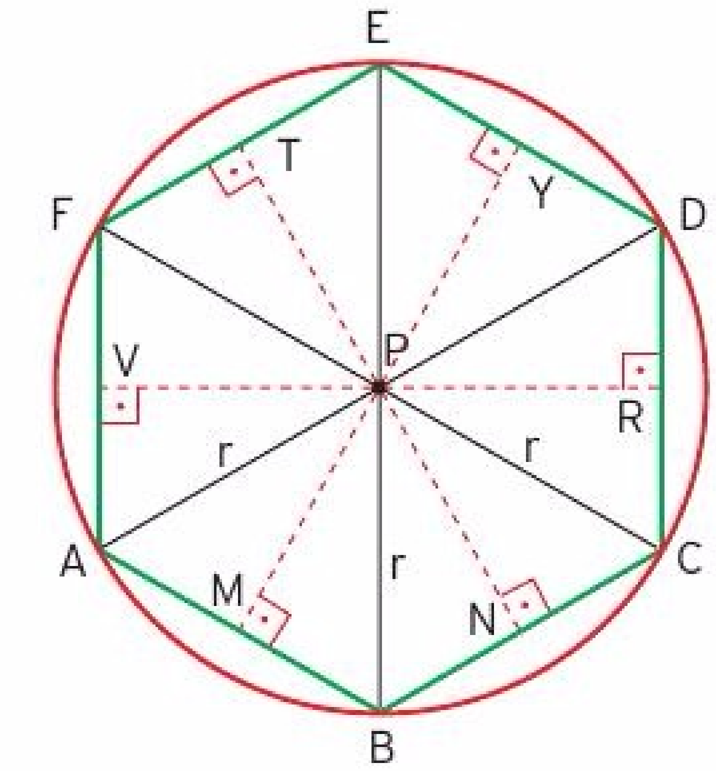
- Em sua opinião, o que aconteceu? Isso acontecerá com outros quadrados? Respostas pessoais.

Muitos problemas em Geometria envolvem os elementos de um polígono regular e os de uma circunferência posicionados de maneira particular um em relação ao outro.

Nessa situação, a figura obtida pode ser como esta abaixo. Nela, os vértices do quadrado pertencem à circunferência e as dobras estão representadas pelas linhas em vermelho. Observe que elas são mediatrizes dos lados do quadrado e o ponto de intersecção **P** é o centro dessa circunferência.



Apótema de um polígono regular



É possível mostrar que, se um polígono é regular, existe sempre uma circunferência circunscrita a ele. Vamos demonstrar que o centro dessa circunferência é equidistante dos lados do polígono, no caso particular de um hexágono.

O hexágono regular da figura ao lado é inscrito na circunferência de centro **P** e raio $\overline{AP}$. Vamos demonstrar que **P** é equidistante de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$, ou seja, **P** é equidistante dos lados do hexágono.

No $\triangle PAB$:

$\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ (raios) — $\triangle PAB$ é isósceles — $\hat{A} \equiv \hat{B}$

med $A\hat{P}B = \dfrac{360°}{6} = 60°$ (hexágono regular) — med $\hat{A}$ = med $\hat{B} = \dfrac{180° - 60°}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$

Portanto, $A\hat{P}B \equiv \hat{A} \equiv \hat{B}$ — $\triangle PAB$ equilátero — med $\overline{PA}$ = med $\overline{PB}$ = med $\overline{AB}$ = r

Do mesmo modo, $\triangle PBC$ equilátero — med $\overline{PB}$ = med $\overline{BC}$ = med $\overline{CP}$ = r

Logo, $\triangle PAB \equiv \triangle PBC$ (LLL) — $\overline{PM} \equiv \overline{PN}$ — o ponto **P** é equidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que:

$\overline{PM} \equiv \overline{PN} \equiv \overline{PR} \equiv \overline{PY} \equiv \overline{PT} \equiv \overline{PV}$ — med $\overline{PM}$ = med $\overline{PN}$ = med $\overline{PR}$ = med $\overline{PY}$ = med $\overline{PT}$ = med $\overline{PV}$

Ou seja, o centro da circunferência, **P**, é equidistante dos lados do hexágono regular ABCDEF.

Chamamos o segmento de reta $\overline{PM}$ de **apótema** do hexágono regular ABCDEF.

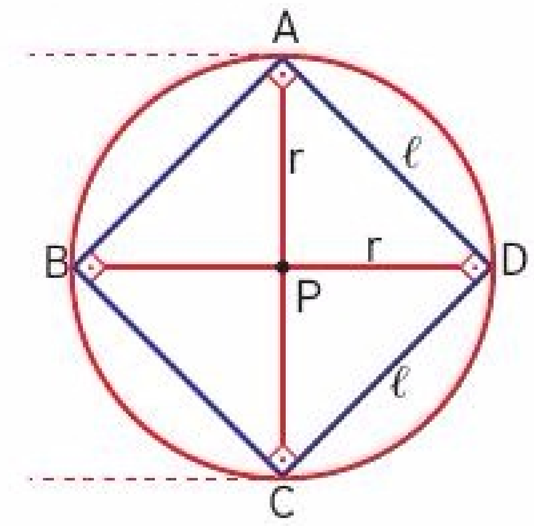
Os segmentos de reta $\overline{PN}$, $\overline{PR}$, $\overline{PY}$, $\overline{PT}$ e $\overline{PV}$ também são apótemas desse hexágono.

Em um polígono regular, inscrito em uma circunferência, **apótema** é o segmento de reta perpendicular a um lado e com uma extremidade no centro dessa circunferência e a outra no ponto médio desse lado.

Quadrados inscritos em uma circunferência

A seguir será demonstrada uma relação entre as medidas do lado de um quadrado e o raio da circunferência circunscrita a ele.

Na figura a seguir, o quadrado ABCD de lados com medida igual a ℓ está inscrito em uma circunferência de raio **r**. Como suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ interceptam-se no ponto **P**, **P** é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$.



ABCD quadrado — $\triangle ACD$ triângulo retângulo

$(2r)^2 = \ell^2 + \ell^2$ — $4r^2 = 2\ell^2$

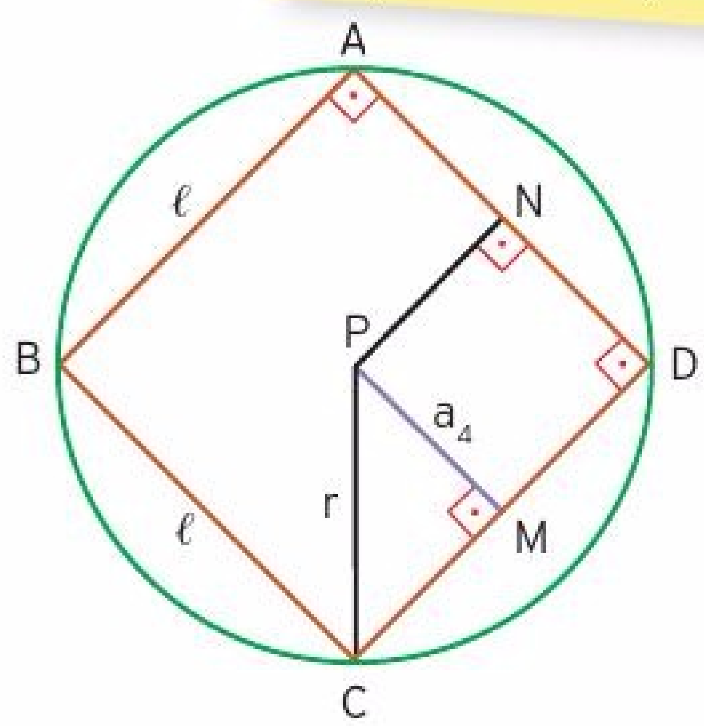
$r^2 = \dfrac{\ell^2}{2}$ — $\boxed{r = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}}$

Acompanhe como obter uma fórmula para calcular a medida dos lados de um quadrado em função da medida dos raios da circunferência circunscrita a ele.

$$r = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \text{ — } 2r = \ell\sqrt{2} \text{ — } \boxed{\ell = r \cdot \sqrt{2}}$$

Existe, também, uma fórmula para calcular a medida do **apótema de um quadrado** inscrito em uma circunferência de raio de medida **r**:

a_4 representa a medida do apótema de um quadrado.



PMDN é um quadrado — $a_4 = \text{med } \overline{PM}$

$\overline{CD}$ é corda da circunferência
$\overline{PM}$ contém o centro da circunferência
$\overline{PM} \perp \overline{CD}$
— **M** é ponto médio de $\overline{CD}$

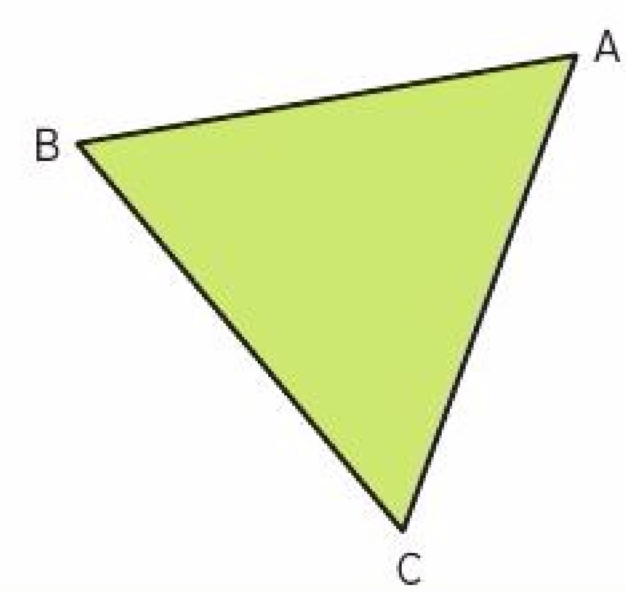
Logo: $\text{med } \overline{MD} = \frac{\ell}{2}$

$a_4 = \text{med } \overline{PM} = \frac{\ell}{2}$
$\ell = r\sqrt{2}$
— $\boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$

Triângulos equiláteros inscritos em uma circunferência

Para refletir e responder

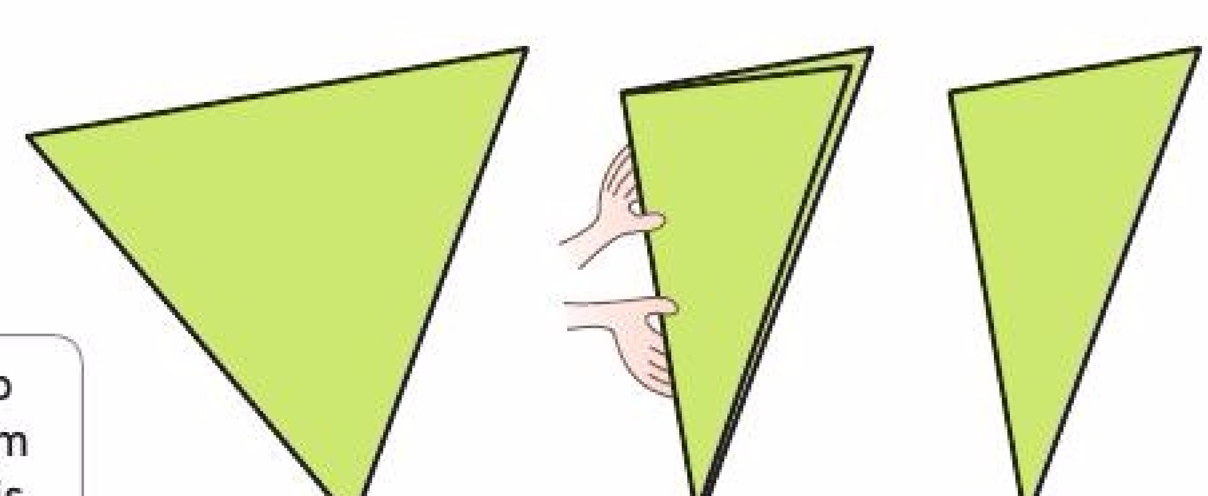
O triângulo equilátero também é um polígono regular.



• Responda à pergunta do garoto. Sim.

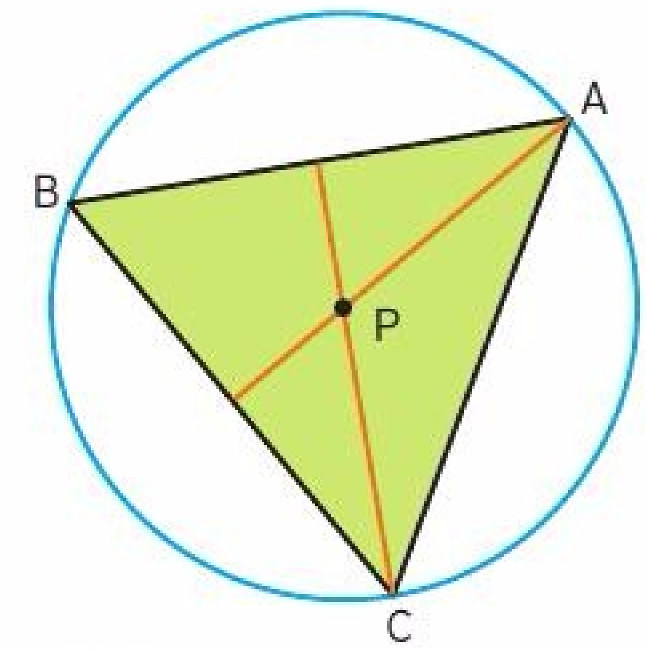
Podemos obter a resposta da questão proposta acima de vários modos: usando dobraduras, régua e compasso ou propriedades geométricas.

• **Usando dobraduras:** podemos desenhar um triângulo equilátero com lados medindo 3,5 cm, por exemplo, recortá-lo e dobrá-lo:

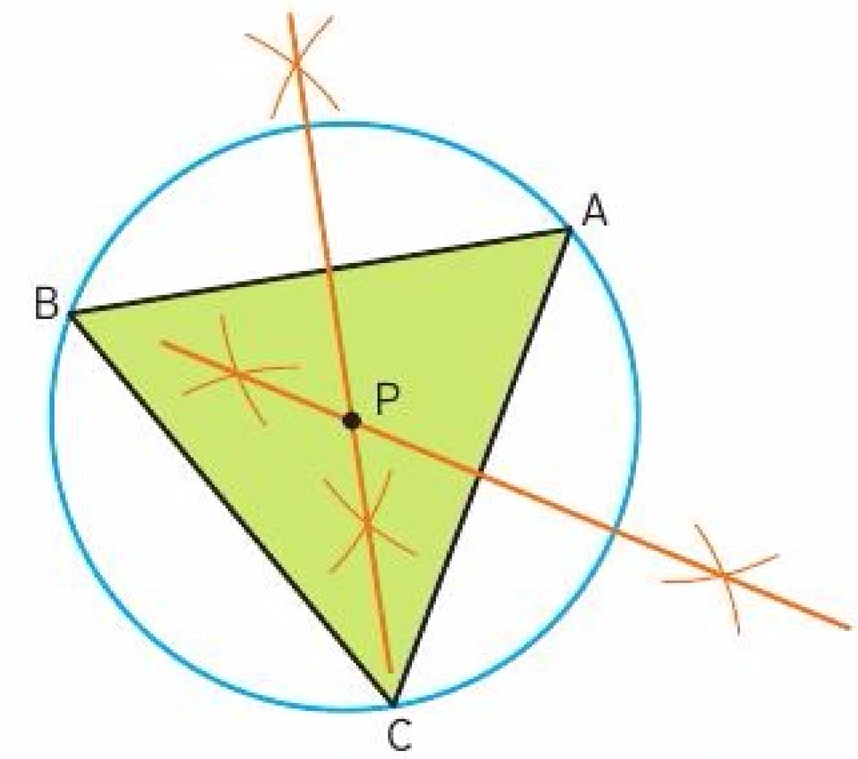


ILUSTRAÇÕES: HÉLIO SENATORE

Desdobre o triângulo e cole-o em uma folha de papel. Chame de **P** o ponto comum às dobras. Trace uma circunferência de centro **P** e raio $\overline{PC}$, usando compasso. Veja o esquema ao lado.

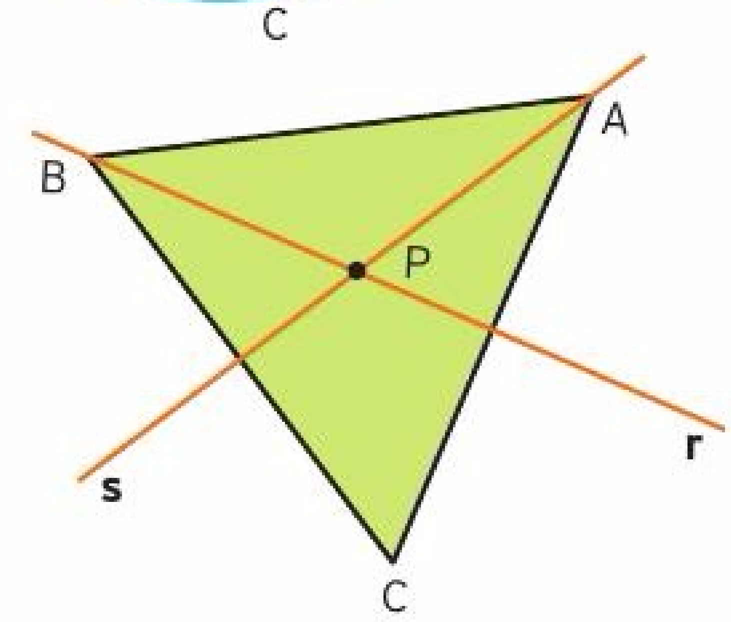


- **Usando régua e compasso:** trace a mediatriz de dois dos lados desse triângulo. O ponto comum a essas mediatrizes é o centro de uma circunferência que contém os vértices desse triângulo, ou seja, o triângulo estará inscrito nessa circunferência.



ABC é um triângulo equilátero **inscrito** em uma circunferência.

- **Usando as propriedades geométricas:** os pontos da mediatriz de um segmento de reta são equidistantes dos extremos desse segmento de reta. Portanto, temos:



P é ponto comum às retas **r** e **s**

r é mediatriz de $\overline{AC}$ — med $\overline{PA}$ = med $\overline{PC}$

s é mediatriz de $\overline{BC}$ — med $\overline{PC}$ = med $\overline{PB}$

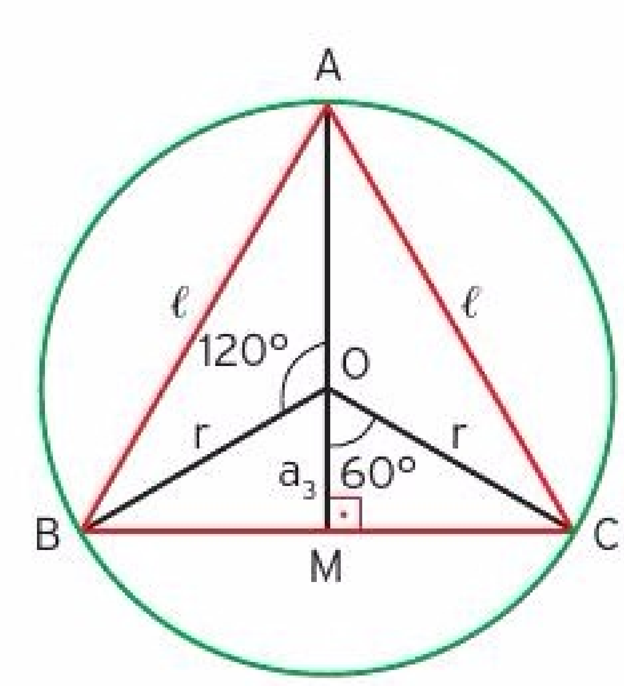
— med $\overline{PA}$ = med $\overline{PC}$ = med $\overline{PB}$

Como **A**, **B** e **C** estão a mesma distância de **P**, podemos traçar uma circunferência de centro **P** e que contenha esses pontos.

Portanto, **A**, **B** e **C** pertecem a uma circunferência de centro **P** e raio $\overline{PA}$.

Um triângulo equilátero qualquer pode ser inscrito em uma circunferência.

A seguir serão demonstradas relações entre as medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero e do raio da circunferência.



Na figura ao lado, o $\triangle ABC$ é equilátero com lados de medida ℓ e está inscrito em uma circunferência com raio de medida **r**. Vamos expressar ℓ e o apótema $\mathbf{a_3}$ em função de **r**:

$\triangle ABC$ equilátero — med $A\hat{O}B$ = med $B\hat{O}C$ = med $C\hat{O}A$

$$\text{med } B\hat{O}C = \frac{360°}{3} = 120°$$

$\triangle OBC$ é isósceles
$\overline{OM} \perp \overline{BC}$
$\overline{BC}$ é corda

$\overline{OM}$ é bissetriz de $B\hat{O}C$ — med $M\hat{O}C = 60°$

M é ponto médio de $\overline{BC}$ — med $\overline{MC} = \dfrac{\ell}{2}$

- **Lado:** $\text{sen } 60° = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{OC}}$ — $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{r}$ — $\cancel{2}^{1} \cdot \dfrac{\ell}{\cancel{2}_{1}} = r\sqrt{3}$ — $\boxed{\ell = r\sqrt{3}}$
- **Apótema:** $\cos 60° = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OC}}$ — $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a_3}{r}$ — $2 \cdot a_3 = r$ — $\boxed{a_3 = \dfrac{r}{2}}$

Exemplo:

A altura de um triângulo equilátero mede $14\sqrt{3}$ cm. Vamos obter a medida do apótema desse triângulo.

$h = 14\sqrt{3}$ cm
$\triangle ABC$ equilátero

$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ — $14\sqrt{3} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ — $\ell = 28$ cm

$\ell = r\sqrt{3}$ — $28 = r\sqrt{3}$ — $r = \dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ cm

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$a_3 = \dfrac{r}{2}$ — $a_3 = \dfrac{28\sqrt{3}}{3} : 2 = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ cm — $\mathbf{a_3 \cong 8}$ **cm**

28. É um segmento de reta que tem como extremidades o centro da circunferência circunscrita a esse quadrado e o ponto médio de um dos seus lados.

Fazer e aprender

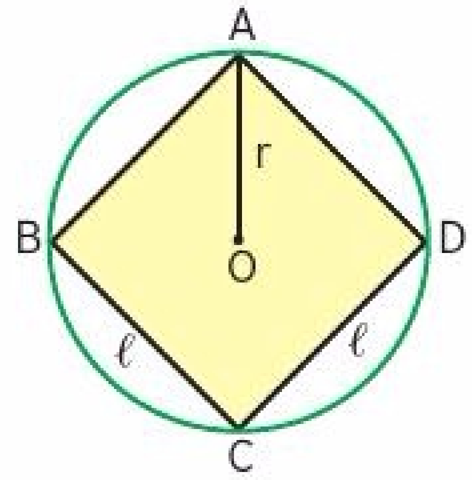
FAÇA NO CADERNO

27. Que fórmula relaciona a medida do lado de um quadrado à medida de um raio da circunferência na qual ele está inscrito? $\ell = r\sqrt{2}$

28. O que é um apótema de um quadrado?

29. Qual é a fórmula que relaciona a medida do lado de um triângulo equilátero à medida de um raio da circunferência na qual ele está inscrito? $\ell = r\sqrt{3}$

30. A área de um quadrado ABCD, inscrito em uma circunferência, é 72 cm².



a) Determine a medida de um dos lados desse quadrado. $6\sqrt{2}$ cm

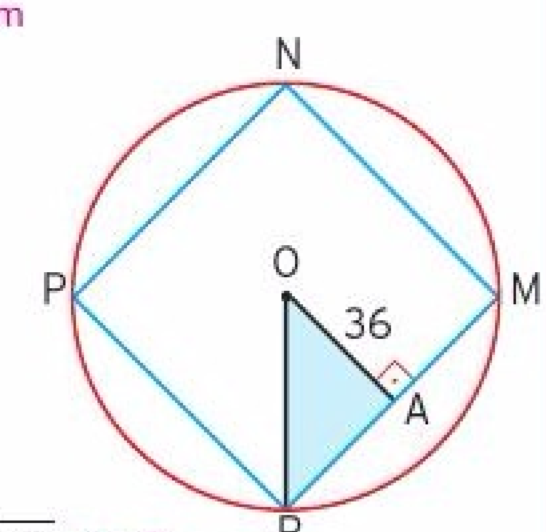
b) Determine a medida de um raio da circunferência circunscrita a ABCD. 6 cm

31. A área de um quadrado inscrito em uma circunferência é 128 cm².

a) Calcule a medida de um raio dessa circunferência. 8 cm

b) Qual é a medida de um dos lados de um triângulo equilátero inscrito nessa mesma circunferência? $8\sqrt{3}$ cm

32. Nesta figura, MNPR é um quadrado, O é o centro da circunferência em que ele está inscrito e as medidas dadas estão em centímetros.

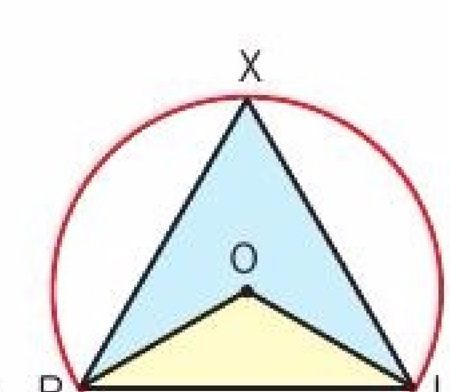


a) Qual é a medida de $\overline{OR}$? $36\sqrt{2}$ cm

b) Qual é a medida de $\overline{MN}$? 72 cm

c) Qual é a área do $\triangle ORA$? 648 cm²

33. Nesta figura, XRL é um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro O. Seu apótema mede 20 cm. $1\,200\sqrt{3}$ cm²



a) Qual é a área do $\triangle XRL$?

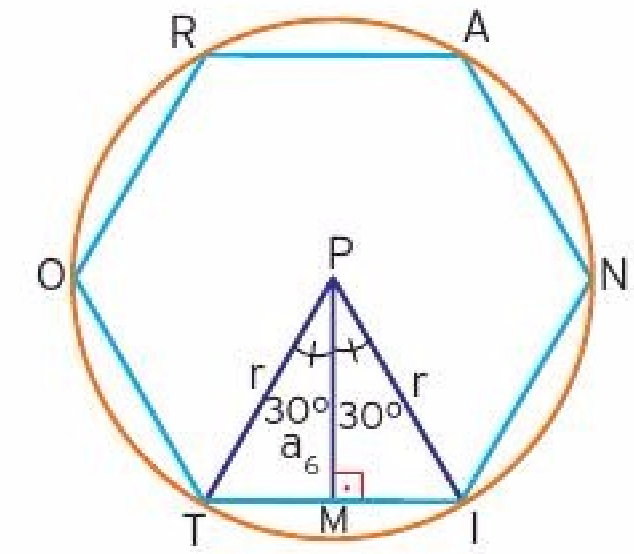
b) Qual é a área do $\triangle ORL$? $400\sqrt{3}$ cm²

c) Qual é a área do quadrilátero XROL? $800\sqrt{3}$ cm²

Hexágonos regulares inscritos em uma circunferência

A seguir serão demonstradas relações entre as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular e do raio da circunferência.

Nesta figura, ROTINA é um hexágono regular inscrito em uma circunferência, cuja medida de um raio está representada por **r** e a de um apótema, por $\mathbf{a_6}$.



$\triangle PTI$ é isósceles
$\overline{PM} \perp \overline{TI}$
$\overline{TI}$ é corda

$\overline{PM}$ é bissetriz de $T\hat{P}I$ — med $M\hat{P}I = 30°$

M é ponto médio de $\overline{TI}$ — med $\overline{MI} = \dfrac{\ell}{2}$

- **Lado:** $\text{sen } 30° = \dfrac{\overline{MI}}{\overline{PI}}$ — $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{r}$ — $\cancel{2} \cdot \dfrac{\ell}{\cancel{2}} = r$ — $\boxed{\ell = r}$
- **Apótema:** $\cos 30° = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{PI}}$ — $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a_6}{r}$ — $2 \cdot a_6 = r \cdot \sqrt{3}$ — $\boxed{a_6 = \dfrac{r \cdot \sqrt{3}}{2}}$

Exemplo:

Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de 10 cm de raio. Qual é a medida dos apótemas desse hexágono?

$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\cancel{10}^{5}\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}}$ — $\mathbf{a_6 = 5\sqrt{3}}$ **cm**

$\mathbf{a_6 \cong 8{,}7}$ **cm**

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

34. O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 18 cm. Determine a medida de um lado de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. 36 cm

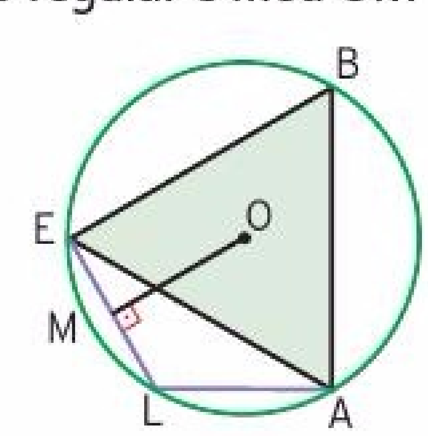
35. O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $15\sqrt{3}$ cm.

a) Qual é a medida de um raio dessa circunferência? 30 cm

b) Determine a medida de um lado de um quadrado, um triângulo equilátero e um hexágono inscritos nessa circunferência. $30\sqrt{2}$ cm, $30\sqrt{3}$ cm e 30 cm.

c) Qual é a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência? 15 cm

36. Nesta figura, BEA é um triângulo equilátero, O é o centro da circunferência, $\overline{EL}$ e $\overline{LA}$ são lados de um hexágono regular e med $\overline{OM} = 12\sqrt{3}$ cm.



a) Qual é a medida de EL? 24 cm

b) Qual é o perímetro do $\triangle BEA$? $72\sqrt{3}$ cm

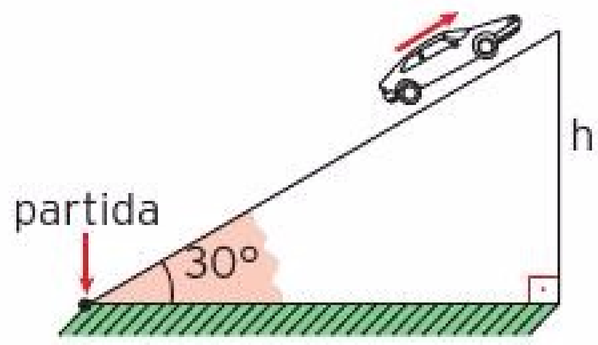
c) Qual é a medida de uma altura do $\triangle BEA$? 36 cm

d) Qual é a área do $\triangle BEA$? $432\sqrt{3}$ cm²

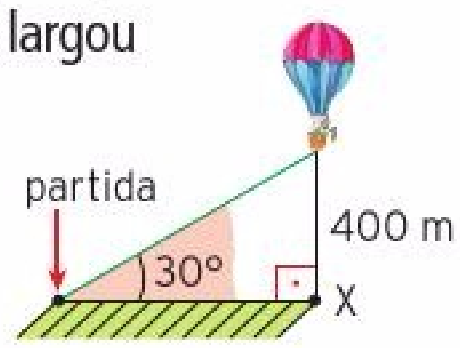
Exercícios complementares

FAÇA NO CADERNO

37. Um rapaz parte de um local situado no nível do mar. Quando percorrer 80 m de uma estrada em aclive de 30°, a que altitude ele estará? 40 m



38. Um balão subiu seguindo uma trajetória em linha reta, como mostra a ilustração. Quando estava a 400 m do solo, o passageiro largou um objeto que caiu no ponto **X**. A que distância do ponto de partida caiu esse objeto? 692,84 cm



39. Um losango tem um ângulo com 120° e sua diagonal menor mede 36 cm. Determine a medida aproximada da diagonal maior. 62,35 cm

40. O perímetro de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência é de 54 cm. Qual é a área de um quadrado inscrito nessa mesma circunferência? 216 cm²

41. Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência cujo comprimento mede 16π cm.

a) Qual é a medida de um lado desse hexágono? 8 cm

b) Qual é a medida do apótema desse hexágono? $4\sqrt{3}$ cm

c) Qual é a área desse hexágono? $96\sqrt{3}$ cm²

Leitura

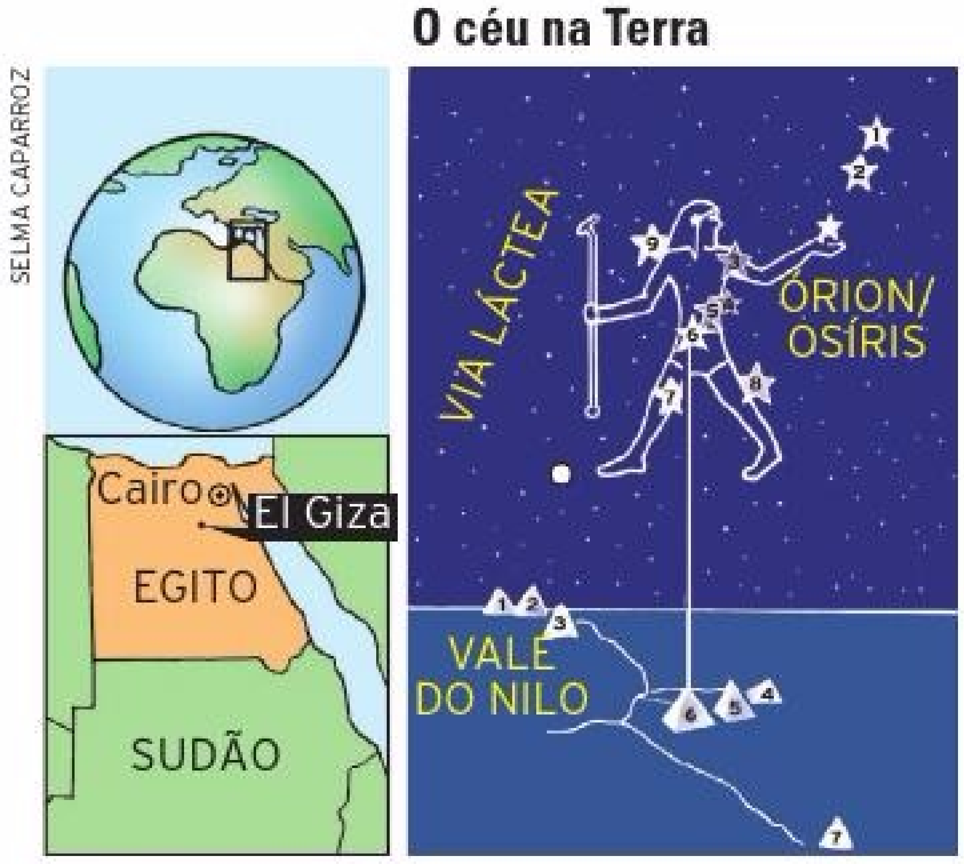
"Pirâmides: o mapa do céu". Verdade ou ficção científica?

"As pirâmides foram construídas para serem um gigantesco mapa das estrelas."

É o que concluiu uma pesquisa realizada por Robert Bauval, um egiptólogo inglês. Utilizando computador, ele recriou o céu noturno como teria sido no Egito há cerca de 4 500 anos. Segundo ele, "a edificação das pirâmides foi uma tentativa de construir o céu na Terra".

Suas hipóteses apoiam-se na maior série de pirâmides do Egito, construídas pela Quarta Dinastia dos faraós e localizadas no que hoje é a atual cidade de El Giza. Bauval descobriu que o eixo que passa pelo centro da pirâmide de Quéops apontava diretamente para a estrela Dzeta, da constelação de Órion, chamada de Osíris pelos egípcios. É uma das estrelas que formam o cinturão da constelação conhecida, no Brasil, como "As três Marias". Ainda segundo ele, em seis das sete pirâmides as dimensões formam um todo proporcional ao brilho da estrela que ela representa.

O céu na Terra



★ Estrela	▲ Pirâmide
1 Epsilo de Touro	Pirâmide Snefru
2 Aldebaran	Pirâmide Snefru (vermelha)
3 Gama de Órion	Zawiyet el-Aryan
4 Delta de Órion	Pirâmide de Miquerinos
5 Epsilo de Órion	Pirâmide de Quéfren
6 Dzeta de Órion	Pirâmide de Quéops
7 Capa de Órion	Abu Roash
8 Rigel	
9 Betelgeux	

Fonte de pesquisa: <http://www.robertbauval.co.uk>. Acesso em: 11 maio 2015.

Revisão cumulativa e testes

FAÇA NO CADERNO

1. Calcule o valor da expressão:

$$\sqrt{2a^3 - 10\sqrt{92 + 2\sqrt{a^2 - 2a + 1}}},$$

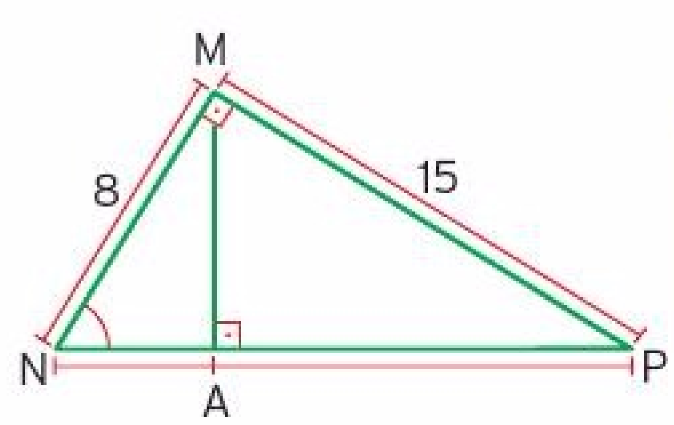
para $a = 5$. $5\sqrt{6}$

2. Racionalize os denominadores das frações: $\frac{13 + 4\sqrt{3}}{11}$

a) $\dfrac{15}{4\sqrt[3]{6}}$ $\frac{5\sqrt[3]{36}}{8}$ b) $\dfrac{18\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$ $-36\sqrt{5} - 90$ c) $\dfrac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3} - 1}$

3. João tinha algumas notas de R$ 5,00 e Paulo, notas de R$ 10,00. O produto das quantidades de notas dos dois era igual a 90. Eles juntaram essas notas e puderam pagar um passeio de barco por um lago, para os dois, que custou R$ 135,00. Quantas notas tinha cada um deles?
João: 15 notas; Paulo: 6 notas

4. Observe os dados assinalados na figura a seguir e calcule:



Medidas indicadas em cm.

a) a medida da hipotenusa. 17 cm

b) a medida, aproximada, da projeção ortogonal do cateto $\overline{MN}$ sobre a hipotenusa. 3,8 cm

c) o valor, aproximado, de sen $\hat{N}$. 0,88

5. Um hexágono regular e um triângulo equilátero estão inscritos em uma mesma circunferência. O apótema do triângulo mede 5 cm.

a) Qual é a medida de um raio dessa circunferência? 10 cm

b) Qual é o perímetro desse hexágono regular? 60 cm

c) Qual é a medida do apótema desse hexágono regular? $5\sqrt{3}$ cm

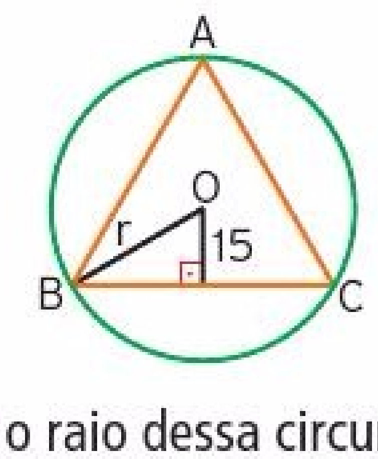
d) Qual é a área desse hexágono regular? $150\sqrt{3}$ cm²

6. Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência e seu apótema mede 20 cm.

a) Qual é o perímetro aproximado desse hexágono? 138,56 cm

b) Qual é a área aproximada desse hexágono? 1 385,64 cm²

7. O apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede 15 cm.

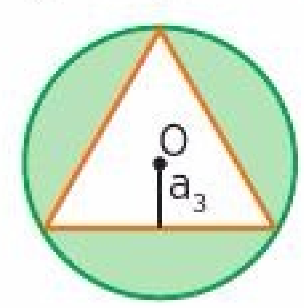


a) Determine o raio dessa circunferência. 30 cm

b) Qual é o perímetro de um quadrado inscrito nessa circunferência? $120\sqrt{2}$ cm

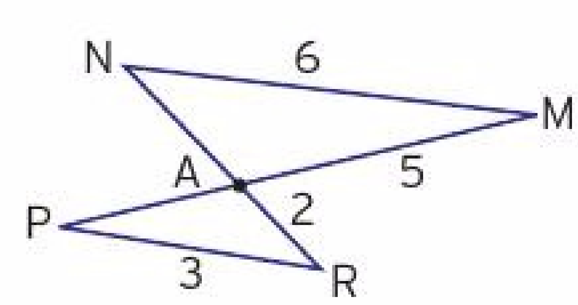
c) Qual é a medida do apótema de um hexágono regular inscrito nessa circunferência? $15\sqrt{3}$ cm

8. Nesta figura, determine a área da região pintada de verde, considerando o triângulo equilátero e $a_3 = 2\sqrt{6}$ cm. 175,2 cm²



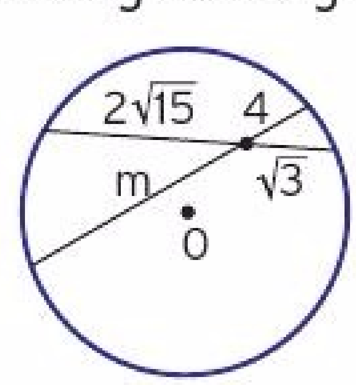
Use:
$\pi \cong 3,1$
$\sqrt{3} \cong 1,7$

9. Nesta figura, $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{RP}$ e as medidas estão indicadas em metros.



Calcule a medida de $\overline{AN}$. 4 m

10. O valor de **m** na figura a seguir é: b



a) $3\sqrt{5}$ m

b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ m

c) $8\sqrt{5}$ m

d) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ m

11. (Fuvest-SP) A equação $x^2 - x + c = 0$ para um conveniente valor de **c** admite raízes reais iguais a: d

a) -1 e 1 b) 0 e 2 c) 1 e -3 d) -1 e 2

12. (Saresp) Um quadrado tem lado de medida 6 cm. Diminuindo 3 cm de cada um dos lados, é correto afirmar: c

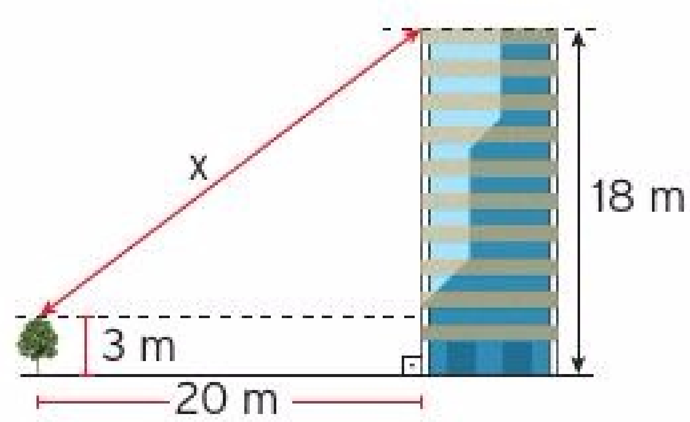
a) o perímetro do novo quadrado tem 12 cm a mais do que o perímetro do primeiro.

b) o perímetro do novo quadrado é a terça parte do perímetro do primeiro.

c) a área do novo quadrado é a quarta parte da área do primeiro.

d) a área do novo quadrado tem 9 cm a mais do que a área do primeiro.

13. (Saresp) A altura de uma árvore é 3 m e ela está a 20 m de um edifício cuja altura é 18 m. A distância entre o ponto mais alto da árvore e o ponto mais alto do edifício é: d



a) 15 m b) 18 m c) 20 m d) 25 m

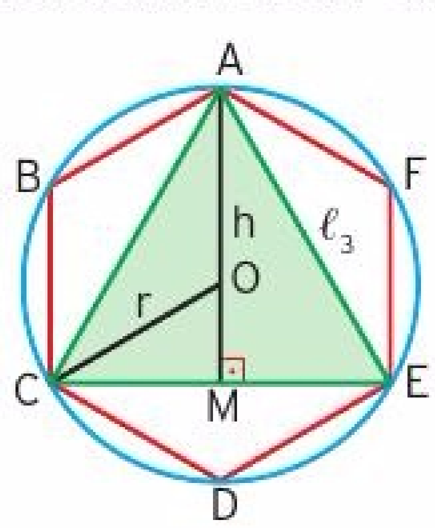
14. Considerando a equação na incógnita **x**, $kx^2 + (2k - 1)x + (k - 5) = 0$, com $k \neq 0$, atribua um valor a **k** e determine uma equação do 2º grau na incógnita **x** que tenha duas raízes:

a) reais diferentes. $k = 1$; $x^2 + x - 4 - 0$ Há outras respostas possíveis.

b) reais simétricas. $k = \frac{1}{2}$; $x^2 - 9 = 0$

c) duas raízes reais inversas. Não há solução.

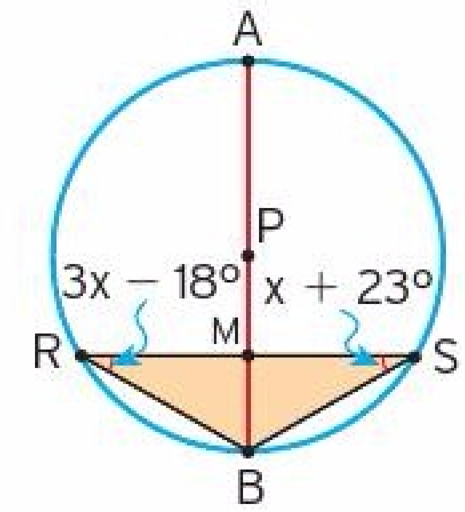
15. O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 24 cm.



a) Determine a medida de um lado de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. 48 cm

b) Qual é a área de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência? $576\sqrt{3}$ cm²

16. Nesta figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro perpendicular a $\overline{RS}$.



a) Em relação aos lados, que tipo de triângulo é o $\triangle RBS$? Triângulo isósceles.

b) Qual é o valor de **x**? 20° 30′

17. O cosseno de um ângulo agudo é, aproximadamente, 0,6. Podemos afirmar que o seno desse ângulo é aproximadamente: b

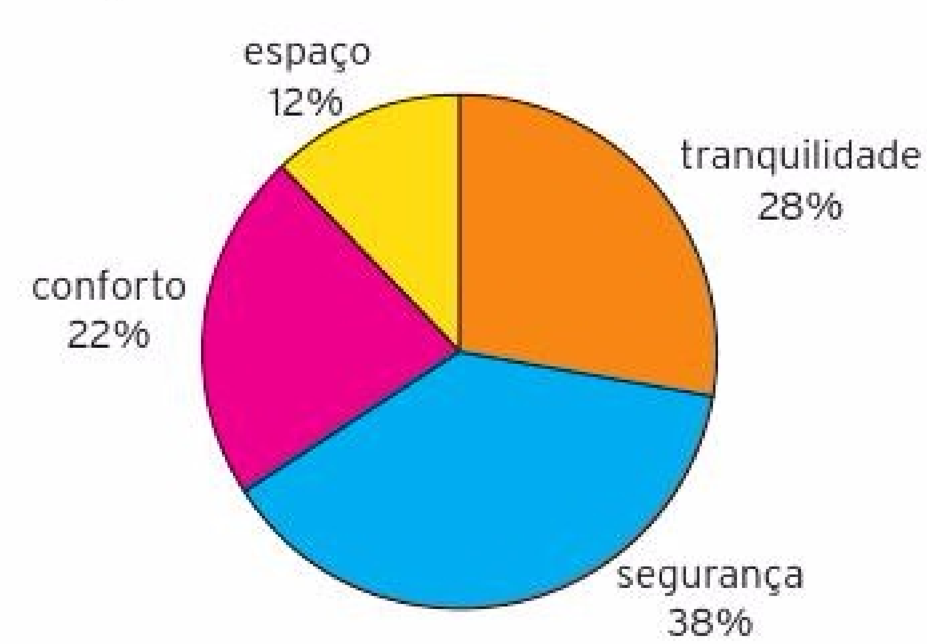
a) 0,64 b) 0,8 c) 0,36 d) 1

18. Atribuindo um valor a **m** na equação de 2º grau na incógnita **x**, $(m - 1)x^2 + (m + 1)x - (2m - 3) = 0$, obtêm-se raízes reais cuja soma é 2. Esse valor de **m** é: d

a) 3 b) 0 c) 2 d) $\frac{1}{3}$

19. (Secretaria de Educação do Paraná) Em uma pesquisa 2 673 pessoas foram entrevistadas com o seguinte questionamento: O que leva as pessoas a se mudarem para os condomínios fechados fora das grandes cidades?

As respostas foram organizadas no gráfico a seguir. Após análise do gráfico, pode-se afirmar que, aproximadamente: d



a) 321 pessoas mudam devido ao conforto.

b) 588 pessoas mudam devido à tranquilidade.

c) 749 pessoas mudam devido ao espaço.

d) 1 016 pessoas mudam devido à segurança.

Respostas

Unidade 1 — Números reais e potências

1. $(-13)^3 = -2\,197$; $\left(\frac{23}{40}\right)^1 = \frac{23}{40}$;
$(-0{,}9)^4 = 0{,}6561$; $\left(\frac{23}{40}\right)^2 = \frac{529}{1\,600}$;
$0{,}1^5 = 0{,}00001$; $(-1\,532)^0 = 1$

2. -8

3. $-\frac{1\,331}{125}$

4. $(-15)^2$

5. $-\frac{1}{32}$

6. Correta: a
Corrigindo:
b) $729 = 3^6$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3^0$

7. a) 1
b) 14 400

8. 1

9. 3

10. $-2\,197$

11. Há outras respostas possíveis.
a) Cada termo, a partir de $-\frac{1}{9}$, é o termo anterior multiplicado por $-\frac{1}{3}$.
b) $\frac{1}{2\,187}$

12. a) 8 cm
b) 384 cm^2
c) Resposta pessoal.

13. 16 cm^2

14. a) 0,1
b) $\frac{1}{1296}$
c) -243
d) $\frac{64}{729}$
e) $-\frac{10}{7}$
f) -125

15. a) 10^{-3}
b) -16^{-5}
c) $\left(\frac{16}{7}\right)^{-1}$
d) 10^{-2}
e) a^{-10}
f) $x^{-6}y^{-6}$

16. 15

17. 2: 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$.
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 4; 8; 16.
-1: 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1; 1.

18. a) 27
b) $\frac{225}{49}$
c) $\frac{900}{17}$

19. 27

Desafio p. 14

Pedro, o pintor

- Quarto dia: $\frac{1}{16}$; $1 - \frac{1}{16}$; $1 - \frac{1}{2^4}$.
  Sexto dia: $\frac{1}{64}$; $1 - \frac{1}{64}$; $1 - \frac{1}{2^6}$.
- $1 - \frac{1}{2^{10}}$
- 99,9%
- $1 - \frac{1}{2^n}$

20. 3^{-4}

21. 36

22. a) $(125)^{-1}$
b) 5^{-4}

23. Correta. $\frac{4}{17}$

24. a^2; 49.

Usando a calculadora p. 15

- 1 296; 6^4
- 6 × = = = = = = = ; 1679 616
- 1 ÷ 6 = = ; 0,0277777.
- a) 1296
  b) 0,0046296
  c) 0,0007716
  d) 0,0277777

25. 64; 34. São diferentes.

26. a) Verdadeira.
b) Falsa, se $n \neq 1$.

27. 1

28. Há outras respostas possíveis.
a) $10^n \cdot 10^{-2}$
b) $8^{-n} \cdot 8^6$

29. Corretas: **a** e **c**.
b) $0{,}2^5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2^6$
d) $m^{-4} : m^4 = m^{-8}$

30. Há outras respostas possíveis.
a) $\left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{3n}$
b) $a^{-9} \cdot b^{-6} \cdot c^{-3}$

31. 5^8

32. 196

33. a) 13^{-6}
b) 12^{-2}
c) 23^{-2}
d) a^2

34. a) $\frac{5}{9}$
b) 20
c) $3^{-14} \cdot 10^{-16}$
d) $\frac{1}{49}$

35. 300 000 000 m/s.

36. Há outras respostas possíveis.

$5 \cdot 10^{-3}$ mm; $1 \cdot 10^{-3}$ mm ou 10^{-3} mm.

37. a) 10^{10}; $0{,}1 \cdot 10^{11}$

b) $144 \cdot 10^{5}$; $14{,}4 \cdot 10^{6}$

c) $0{,}2 \cdot 10^{-7}$; $2 \cdot 10^{-6}$

d) $14 \cdot 10^{-7}$; $1{,}4 \cdot 10^{-8}$

38. Há outras respostas possíveis.

a) $191 \cdot 10^{6}$ habitantes.

b) $2 \cdot 10^{-3}$ mm

c) 10^{-6} m

39. 10^{-10} mm

40. $22 \cdot 10^{5}$ anos-luz.
Há outras respostas possíveis.

41. 0,000342

42. Há outras respostas possíveis.

a) $18 \cdot 10^{13}$

b) $8 \cdot 10^{-10}$

43. a) 8; 5

b) 7; 2; 3

c) 5; 6

d) -5; 3; -8

44. a) $7{,}5 \cdot 10^{9}$

b) $1{,}92 \cdot 10^{-5}$

45. a) 106 000 000

b) 0,000005024

46. $8 \cdot 10^{-4}$ mm

47. $3{,}3 \cdot 10^{8}$ m²

48. a) $3 \cdot 10^{5}$ km/s; $3 \cdot 10^{8}$ m/s

b) $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km; $9{,}46 \cdot 10^{15}$ m

49. a) $1{,}2756 \cdot 10^{4}$ km; $4{,}878 \cdot 10^{3}$ km; $1{,}466 \cdot 10^{8}$ km; $5{,}791 \cdot 10^{7}$ km

b) 164 °C

50. a) 204 milhões, 44 milhões e 21 milhões.

b) $2{,}04 \cdot 10^{8}$; $4{,}4 \cdot 10^{7}$; $2{,}1 \cdot 10^{7}$

c) 21,6%

d) 10,3%

Usando a calculadora p. 21

•

País	População (em milhões de habitantes)	Notação científica
China	1 394	$1{,}394 \cdot 10^{9}$
Índia	1 267	$1{,}267 \cdot 10^{9}$
EUA	322,6	$3{,}226 \cdot 10^{8}$
Indonésia	252,8	$2{,}528 \cdot 10^{8}$
Brasil	202,0	$2{,}02 \cdot 10^{8}$
Paquistão	185,1	$1{,}851 \cdot 10^{8}$
Nigéria	178,5	$1{,}785 \cdot 10^{8}$
Bangladesh	158,5	$1{,}585 \cdot 10^{8}$
Rússia	142,9	$1{,}429 \cdot 10^{8}$
Japão	127,0	$1{,}270 \cdot 10^{8}$

• a) 1,1 b) 0,63 c) 6,9 vezes.

51. $2{,}179 \cdot 10^{6}$; $7{,}297 \cdot 10^{6}$; $3{,}2 \cdot 10^{7}$

Desafio p. 22

Quadrado mágico

6^{0}	6^{5}	6^{-2}
6^{-1}	6	6^{3}
6^{4}	6^{-3}	6^{2}

52. -4

53. 1

54. 19

55. 324 cm³

Usando a calculadora p. 23

- A massa do próton.
- 1833

56. 2^{20} *bytes* e 2^{30} *bytes*.

57. 2^{21} *kilobytes*.

58. a) $5 \cdot 2^{32}$ *bytes*. b) 2 *gigabytes*.

59. 1 *terabyte* $= 2^{40}$ *bytes*;

1 *petabyte* $= 2^{50}$ *bytes*;

1 *exabyte* $= 2^{60}$ *bytes*;

1 *zettabyte* = $= 2^{70}$ *bytes*;

1 *yottabyte* $= 2^{80}$ *bytes*.

Unidade 2 — Radiciação: propriedades

1. a) 7

b) 5

c) 2

- Resposta pessoal.

2. Não, porque não existe um número real que elevado à quarta potência resulte em -81.

3. a) 729

b) -1

c) 18

d) -6

4. a) 4, 8

b) $\sqrt{80}$

- Não.

5. a) A: 3;
B: 5;
C: 64

b) Não.

6. a) $5^{\frac{2}{3}}$

b) $6^{\frac{3}{n}}$

c) $9^{-\frac{1}{3}}$

d) $(x + 10)^{\frac{1}{2}}$

7. a) $\sqrt[4]{11}$

b) $\sqrt{7^{n}}$

c) $\sqrt[3]{5^{2}}$ ou $\sqrt[3]{25}$

8. a) -14

b) 7

9.

a	b	c	$b^2 - 4ac$	$\sqrt{b^2 - 4ac}$
3	-2	-1	16	4
9	-6	1	0	0
1	-7	15	-11	Não é um número real.

10. $\sqrt[6]{a^{4}}$

11. a) $\sqrt{15^{3}}$

b) $\sqrt[5]{(xy^{3})^{4}}$

c) $\sqrt[5]{3^{3} \cdot 5}$

12. a) $\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[4]{12}$

b) $\sqrt[4]{a-b} \cdot \sqrt[4]{2a+b}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{8}}$

13. a: 9; c: 10

14. a) 80

b) 110

c) 300

d) $12ab^2$

15. $\dfrac{1}{20}$

Usando a calculadora p. 35

- 5,4772255; 3,2237098; 1,9940796
- $\sqrt{30}$

16. a) $5\sqrt{5}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{7}}{2}$

d) $6\sqrt[3]{11}$

17. a) $2ab^3c^4\sqrt{2ac}$

b) $2am^2\sqrt[4]{10}$

c) $0{,}6y\sqrt[3]{ay}$

18. a) $1 + 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{2} - 2}{4}$

19. a) $x + 3$

b) $13x + 4y$

20. $\dfrac{1}{y-3}$

21. a) $\dfrac{-11\sqrt[3]{2}}{12}$

b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

22. a) $-12\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

b) $3\sqrt[4]{6} + 27\sqrt[4]{3}$

23. a) $-16\sqrt{a} + 87\sqrt{b}$

b) $\dfrac{x}{6}\sqrt{y} - \dfrac{89}{10}\sqrt{x}$

24. a) $-25\sqrt{m}$

b) $-65\sqrt{m}$

c) $71\sqrt{m}$

25. $10\sqrt[3]{7}$

26. $14\sqrt{3}$ cm

27. a) $3\sqrt{2}$

b) $7\sqrt[4]{180}$

c) ay

28. a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{a-b}$

c) $\sqrt[10]{7}$

29. a) 99 cm^2

b) 10 cm^2

c) 120 cm^2

30. a) $3\sqrt{3} - 3$

b) $\sqrt{13} - 26$

c) $10 - 6\sqrt{3}$

d) $5 + \sqrt{6}$

31. a) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{10}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a(a+b)}{a-b}}$

32. a) $3\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[3]{49}$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{m}{n}}$

d) $\sqrt[8]{a^7}$

33. $\sqrt[3]{a^2b^2}$

34. a) $3\sqrt[4]{3}$

b) $2\sqrt[5]{2}$

c) $-972\sqrt{2}$

35. -68

36. a) 582

b) 282

37. a) $3\sqrt{5}$

b) $25\sqrt{ab}$

c) $4\sqrt[4]{27}$

d) $8\sqrt[3]{36}$

38. a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\dfrac{7\sqrt[5]{125}}{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{5a}}{8a}$

39. a) $\sqrt{11} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}$

c) $3 - 2\sqrt{2}$

d) $3 + \sqrt{2}$

40. a) Pedro

b) $-(12 + 6\sqrt{5})$

Desafio p. 44

Escolhendo um número

$-\sqrt{3}$. Há outras respostas possíveis.

41. a) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

b) $-\sqrt{m} - a$

c) $a - \sqrt{a^2 - 1}$

42. 90 cm^2

43. $14\sqrt{7}$ cm^2

44. $(10\sqrt{6} + 30)$ cm^2

Unidade 3 — Equações de 2º grau

1. $9x^2 = 0$. Há outras respostas possíveis.

2. a) t

b) 2

c) -3, -26 e 9.

3. b, c, d.

4. a) $a = -8$, $b = 5$, $c = 0$.

b) $a = -4$, $b = 0$, $c = 1$.

c) $a = -1$, $b = \dfrac{1}{12}$, $c = \dfrac{1}{2}$.

d) $a = -\dfrac{3}{5}$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = 0$.

5. -4 e -3.

6. a) $0; \frac{1}{2}$

b) $-3; 3$

c) $-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}$

d) Não tem raiz real.

7. a) $0; \frac{16}{3}$

b) $0; \frac{4}{21}$

8. -5

9. 1

10. 0; 16

11. a) Sim. Desenvolvendo os produtos e reduzindo os termos semelhantes obtém-se $x^2 + 4 = 0$.

b) A equação não tem raízes reais.

12. a) $-\frac{6}{5}; 0$

b) $0; \frac{2}{5}$

c) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$

d) Não tem raiz real.

13. a) $-10; 4$

b) $\frac{1}{5}; \frac{7}{5}$

14. $-1; \frac{2}{3}$

15. a) $-8; 12$

b) $-6; 8$

c) $-5; 4$

d) 1; 2

16. a) Edu e Alice.

b) $a = 4$, $b = 4$ e $c = -3$.

17. a, c.

18. a) $-7; 4$

b) 4; 5

c) **x** não representa um número real.

d) $\frac{1}{4}$

e) $-2; \frac{3}{5}$

f) $2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}$

19. Respostas pessoais.

20. a) Para $m \neq -4$ e $m \neq 4$.

b) Não.

21. a) Não possui raízes reais.

b) $-2; 6$

c) -1

d) $-\frac{3}{4}; 2$

Desafio p. 59

A fórmula de Bhaskara e as equações incompletas

- 0; 5 $\quad$ $0; -\frac{3}{4}$ $\quad$ $-5; 5$
- Sim, ela também vale para as equações incompletas.

Unidade 4 — Equações de 2º grau e formas redutíveis

1. a) $S = -3$ e $P = -4$

b) $S = 15$ e $P = 0$

c) $S = \frac{1}{2}$ e $P = -\frac{1}{2}$

d) $S = 2$ e $P = -\frac{7}{9}$

2. Há outras respostas possíveis.

a) $x^2 + 5x - 50 = 0$

b) $x^2 - 64 = 0$

c) $6x^2 + 3x - 2 = 0$

3. Há outras respostas possíveis.

a) $x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0$

b) $x^2 + 2x + \frac{5}{9} = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$

d) $x^2 + \frac{13}{6}x + 1 = 0$

e) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 30 = 0$

f) $x^2 - 4x + 1 = 0$

4. a) Sim, porque é um trinômio do 2º grau e $x^2 - 18x + 72 = 0$ tem duas raízes reais.

b) $(x - 12) \cdot (x - 6)$

5. $2x^2 + 11x + 14$ pode ser fatorado porque é um trinômio de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c$ e $2x^2 + 11x + 14 = 0$ tem duas raízes reais.

$\frac{x^2}{2} - 5x + 18$ não pode ser fatorado porque $\frac{x^2}{2} - 5x + 18 = 0$ não tem raiz real.

6. a) $(x + 9) \cdot (x + 7)$

b) $(x + 11) \cdot (x - 8)$

c) Não é possível fatorá-lo no conjunto dos números reais.

d) $(x - 9)^2$

e) $-(x - 4) \cdot (x - 15)$

f) $-3 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot (x + 3)$

7. -18 e -17.

8. 13 cm

9. Respostas pessoais.

10. -6 ou 9.

11. 8 e 25.

Desafio p. 70

De volta ao problema dos apertos de mãos

- 13 pessoas.

12. $\frac{1}{3}$ ou 5.

13. 8

14. a) $-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}$

b) Não há raízes em $\mathbb{R}$.

15. $\frac{31}{3}$ cm; $\frac{41}{3}$ cm

16. 30 m

17. a) $4t^2 - 9t + 2 = 0$

b) $\frac{1}{4}$ ou 2.

c) $-\sqrt{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ ou $\sqrt{2}$.

18. a) $-3; -1; 1; 3$

b) $-2; 2$

c) $-3; 3$

d) $-2\sqrt{3}; 0; 2\sqrt{3}$

e) $-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) Não tem raiz real.

19. a) $3y^4 + 12y^2 = 0$ ou $y^4 + 4y^2 = 0$

b) 0

20. a) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$

b) $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$

21. 17

22. a) -2; 3 b) 0

23. 0 ou -2

24. 3; 5

25. a) $4 - 4\sqrt{3x} + 3x = 7x + 4$

b) $-4\sqrt{3x} = 4x$

c) $x^2 - 3x = 0$

d) 0

26. a) 0

b) 20

27. 5

Unidade 5 — Tales e a proporcionalidade

1. a) Em cada grupo de 20 animais, 13 são coelhos.

b) Mais coelhos.

c) 70 patos.

2. $\frac{25}{9}$

3. a) Sim.

b) 20 pessoas.

4. Resposta pessoal.

5. a) 6

b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

6. $\frac{3}{5}$

7. a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{1}{2}$

8. a) $\frac{3}{1}$ ou 3.

b) $\frac{1}{3}$

c) 1

d) É sempre igual a 1.

9. a) 2

b) 2

c) 1

10. a) Carlos, João e Edu.

Itens **b**, **c** e **d**: respostas pessoais.

11. a) 6 cm

b) 16 cm

12. 31,5 cm

13. Aproximadamente, 1283,3 m.

14.

Medida (cm)		Perímetro (cm)	Área (cm²)
Comprimento (cm)	Largura (cm)		
3	2	10	6
6	4	20	24
7,5	5	25	37,5

a) Sim; $\frac{10}{2} = \frac{20}{4}$; $\frac{10}{2} = \frac{25}{5}$.
Há outras respostas possíveis.

b) Não, porque elas são iguais.

Desafio p. 84

Ampliando mapas

Respostas pessoais.

15. a) med $\overline{AM} = 2$ u; med $\overline{MB} = 6$ u; med $\overline{LX} = 4$ u.

b) 12 u

16. a) $\overline{AM}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AN}$ e $\overline{AB}$.

b) $\overline{MN}$ e $\overline{PB}$; $\overline{AN}$ e $\overline{NB}$.

c) $\overline{AN}$ e $\overline{AP}$; $\overline{MP}$ e $\overline{MB}$. Há outras respostas possíveis.

17. a) São proporcionais.

b) Divide $\overline{AE}$ na razão $\frac{2}{3}$.

c) São paralelos.

Desafio p. 85

Usando um foco para ampliar

- 2
- Sim.
- $\overline{DE} \equiv \overline{PD}$
- med $\overline{PC} > 2 \cdot$ med $\overline{PR}$

18. a) $\overline{RS}$

b) $\overline{PR}$

c) $\overline{MN}$

19. a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = 1$

b) $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{XN}}{\overline{NY}}$ (Teorema de Tales)

$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$

Então, $\frac{\overline{XN}}{\overline{NY}} = 1$ e $\overline{XN} \equiv \overline{NY}$. Portanto, **N** é o ponto médio de $\overline{XY}$.

20. 5,4 cm

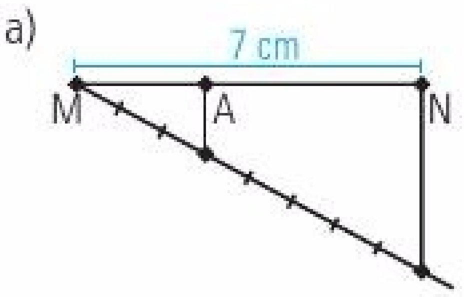
21. a) São proporcionais.

b) $\frac{1}{2}$

c) 3 cm; 5 cm

22. a) 6 cm b) 15 cm

23. a)



b) $\frac{\overline{MN}}{\overline{MA}} = \frac{7}{3}$

24. 4,5 cm; 12 cm

25. a) 2,5 cm

b) 2 cm; 5 cm

c) 7 cm

d) $\frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}$

e) $\overline{AN}$, $\overline{MN}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, nessa ordem, são proporcionais.

26. a) 6 km

b) 10 km

c) 6 km

d) Casa de Rita: (H, 2);
casa de Sérgio: (I, 2);
casa de Marcos: (P, 11);
praça: (E, 5);
igreja de São Pedro: (C, 7).

27. Quando se tem uma reta paralela a um dos lados do triângulo e que intercepta os outros dois.

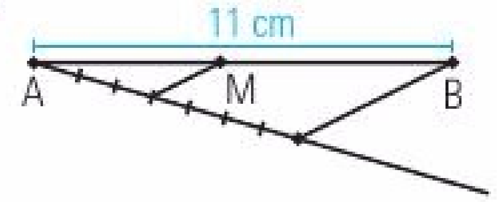
28. 32 m

29. a) $\overline{BM}$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}$; $\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}$; $\frac{\overline{NC}}{\overline{AC}}$.

b) $\frac{10}{8}$ ou $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{4}$.

30. 6 cm

31.



$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{3}{4}$

32. a) $\frac{7}{3}$

b) 3,5 cm

c) 6 cm; 4,5 cm

33. 18 m

34. 30 m

Unidade 6 — Semelhança e proporcionalidade

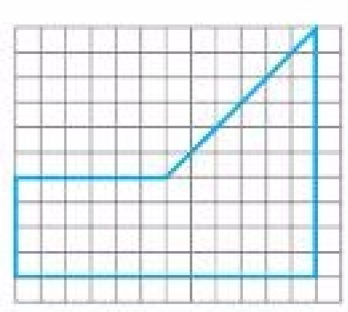
1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{NP}}$; $\frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{\overline{DE}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{TU}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{UR}}$; $\frac{30}{7,5} = \frac{40}{10} = 4$

4. a)



b) Sim; porque os segmentos de reta correspondentes são, respectivamente, proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes.

Desafio p. 106

Triângulos semelhantes

a) $\triangle ABC$ isósceles e base $\overline{BC}$:
$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ (L); $\hat{B} \equiv \hat{C}$ (A);
$\overline{AH}$ altura relativa a $\overline{BC}$; $\overline{AH}$ mediana relativa a $\overline{BC}$; H ponto médio de $\overline{BC}$;
$\overline{BH} \equiv \overline{HC}$ (L).
Portanto,
$\triangle ABH \equiv \triangle AHC$ (LAL).

b) Sim; porque os segmentos de reta correspondentes são, respectivamente, proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes.

5. Não.

6. ABCD ~ EFGH — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados correspondentes respectivamente proporcionais; $\frac{12}{7}$.

ABCD ~ IJLM — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados correspondentes respectivamente proporcionais; $\frac{2}{3}$.

EFGH ~ IJLM — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados homólogos proporcionais; $\frac{7}{18}$.

7. Resposta pessoal.

8. a) $\frac{4}{3}$ ou $\frac{3}{4}$

b) 32 cm

c) 184 cm; 138 cm

d) $\frac{4}{3}$

e) Resposta pessoal.

9. a) med $\overline{DA}$ = 30 cm; med $\overline{CD}$ = 18 cm; med $\overline{MN}$ = 7,2 cm; med $\overline{NP}$ = = 12 cm.

b) med $\hat{D}$ = 60°; med $\hat{A}$ = med $\hat{C}$ = = 120°; med $\hat{P}$ = 120°; med $\hat{N}$ = = med $\hat{R}$ = 60°.

c) Sim, porque os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são, respectivamente, proporcionais.

10. a) $\frac{3}{2}$

b) 2,4 cm

c) 115°

d) $\frac{3}{2}$

11. 35 cm

12. 210 cm

13. 14,56 cm

14. a) $\frac{4}{25}$

b) 75 m^2

15. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Não.

d) A razão das áreas é o quadrado da razão entre dois lados correspondentes.

16. a) Sim.

b) Não.

c) Sim.

17. a) Lado 6 cm.

b) 14,4 cm; 36 cm.

c) $\frac{2}{5}$

18. a) Sim.

b) Resposta pessoal.

19. a) Menor.

b) 6,3 cm

c) 65,4 cm

20. a) 77 cm

b) 35 cm

21. a) $\frac{5}{4}$

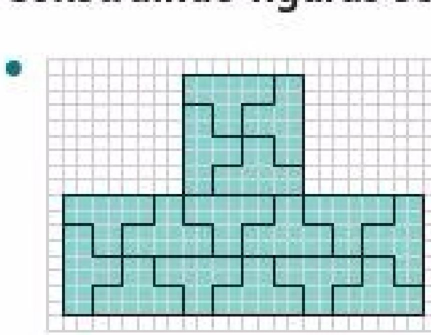
b) 12 cm; 14,4 cm.

c) 58 cm; 46,4 cm.

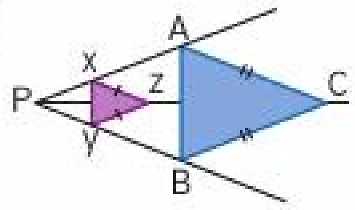
d) $\frac{5}{4}$

Desafio p. 117

Construindo figuras semelhantes

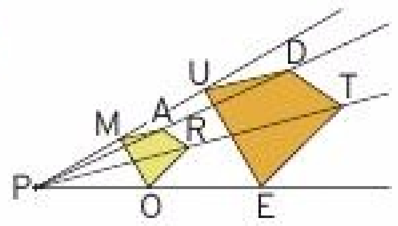
- 

22. a)



b) Isósceles.

23.



24. 3,9 cm

25. 288 cm

26. a) $\frac{9}{11}$

b) $\frac{81}{121}$

27. $\frac{2}{3}$

28. 30 cm, 20 cm e 35 cm.

29. 54 cm

30. 14,4 cm; 20 cm; 25,6 cm.

Desafio p. 119

Figuras semelhantes por homotetia

- Resposta pessoal.

31. a) $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$; $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$; $\overline{AO}$ e $\overline{DO}$.

b) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{AH}$ e $\overline{CA}$; $\overline{BH}$ e $\overline{BA}$.

32. $\hat{T} \equiv \hat{T}$ (ângulo comum)
$\hat{B} \equiv \hat{A}$ (ângulos retos) $\triangle TBC \sim \triangle TAM$

Então, x = 6 cm.

33. a) $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ — $A\hat{B}C \equiv A\hat{X}Y$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{AX}$, transversal — med $A\hat{B}C = 90°$; med $A\hat{X}Y = 90°$

Portanto, o $\triangle AXY$ é um triangulo retângulo.

b) 37,5 cm

Unidade 7 — Semelhança e medidas

1. a; b; d; e.

2. a) $b^2 = 5a$

b) 10 cm

c) $5\sqrt{3}$ cm

3. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) $6\sqrt{3}$ cm

4. 9,6 cm

5. a) 5,4 cm e 9,6 cm.

b) 7,2 cm

6. 6 cm

7. 48 m

8. c = 15 cm; b = 20 cm; h = 12 cm.

9. Sim, por causa do recíproco do teorema de Pitágoras.

10. Não, pois $15^2 \neq 12^2 + 10^2$.

11. a) 25 cm

b) $4\sqrt{2}$ cm

c) $2\sqrt{14}$ cm

12. a) x = 0,25 cm
Lados: 3 cm; 1,25 cm; 3,25 cm.

b) x = 4 cm
Lados: 5 cm; 12 cm; 13 cm.

c) x = 3 cm
Lados: 3 cm; 4 cm; 5 cm.

13. $5\sqrt{11}$ cm

14. a) $\frac{64}{17}$ cm

b) $\frac{120}{17}$ cm

15. a) 30 cm

b) $\frac{144}{13}$ cm

16. a) 32 cm e 18 cm.

b) 120 cm

c) 600 cm^2

17. 180 cm^2

18. 8 m

19. 2,5 m

20. $\sqrt{114}$ cm

21. $4\sqrt{17}$ cm

Desafio p. 138

"Não vale atravessar o lago!"

- 30 m

22. $c = 5\sqrt{3}$ cm; $h = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm;

m = 7,5 cm; n = 2,5 cm.

23. a) $6\sqrt{2}$ cm

b) $12\sqrt{2}$ cm

24. a) 40 cm

b) 32 cm

c) 19,2 cm

25. 7,5 cm; 4,5 cm

26. $\frac{25}{144}$ ou $\frac{144}{25}$.

27. n = 10 e a medida de $\overline{AC}$ é $12\sqrt{10}$ cm.

28. $5\sqrt{10}$ cm

29. a) $24\sqrt{13}$ cm^2

b) 450 cm^2

c) 19,2 cm^2

30. 45 cm e 60 cm.

31. 36 m

32. 14,4 m

33. 34 cm

34. 21 cm, 28 cm e 35 cm.

35. 2

Desafio p. 140

O teorema de Pitágoras e o cálculo de forças

- 20 kgf

36. a) 35,36 cm

b) 142 cm

37. 41,6 m

38. Aproximadamente 658 m.

39. $5\sqrt{3}$ cm; 12 cm

40. 15 cm

41. a) $15\sqrt{3}$ cm; 26 cm

b) Um losango.

c) 30 cm, 52 cm; 780 cm².

42. 46 cm

Usando a calculadora p. 144

- 14,7 m

43. 52 m

44. 72 cm

45. $(48 + 28\sqrt{3})$ cm²

46. $(36\sqrt{2} + 36)$ m

Desafio p. 146

Medindo com o "olho"... e com um esquadro

- São semelhantes.
- 1
- (medida da sua altura até a linha dos olhos) + (sua distância até o tronco da árvore)

Unidade 8 — Estatística e probabilidade

1. a) População: todos os alunos da escola; amostra: 180 alunos sorteados.

b) Sorteio.

c) Variável quantitativa.

d) Sim.

2. Variável qualitativa.

3. Quantitativas: idade, altura e número de irmãos; qualitativas: classe social, esporte que pratica e disciplina preferida.

4. a)

Notas de Português

Nota	Freq.	Freq. relativa	Freq. acum.	Freq. acum. relativa
6,5	3	7,5	3	7,5
7,0	4	10	7	17,5
7,5	5	12,5	12	30
8,0	7	17,5	19	47,5
8,5	6	15	25	62,5
9,0	10	25	35	87,5
9,5	5	12,5	40	100
Total	**40**	**100,0**		

b) Abaixo.

5. a)

Lançamento de um dado

Número	f	fr	fa	far
1	12	24	12	24
2	7	14	19	38
3	10	20	29	58
4	7	14	36	72
5	5	10	41	82
6	9	18	50	100
Total	**50**	**100**		

b) 1 c) 12 d) 20% e) 29 f) 38%

6. Resposta pessoal.

7. a) Viagem de turismo.

b) Frequência absoluta.

c)

Transporte de turistas

Meios de transporte	f	fr (%)	fa	far (%)
Carro próprio	360	36	360	36
Ônibus de linha	300	30	660	66
Avião	130	13	790	79
Carona	90	9	880	88
Ônibus de excursão	70	7	950	95
Outros	50	5	1 000	100
Total	**1 000**	**100**		

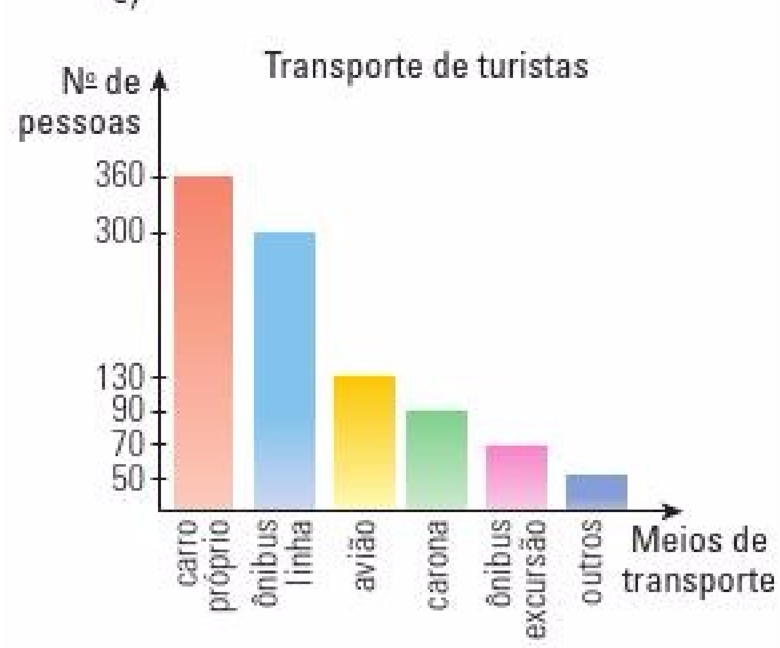
8. a) 660 pessoas.

b) 13%

c) 16%; 160 pessoas.

d) Variável qualitativa.

e)



9. a)

Idade dos alunos do 9º ano A

Idade	f	fr (%)	fa	far (%)
14	10	25,0	10	25,0
15	13	32,5	23	57,5
16	9	22,5	32	80,0
17	2	5,0	34	85,0
18	4	10,0	38	95,0
19	2	5,0	40	100,0
Total	**40**	**100,0**		

b) 40 alunos

c) 13

d) 23

e) 57,5%

f) 23 alunos

g) 57,5%

10. 7,0

11. a) 3 anos

b) 75 kg

12. Não, pois sua média foi menor do que 6,0.

13. a)

Time	Nº de vitórias	Nº de empates	Nº de derrotas	Total de pontos
A	5	4	3	23
B	6	2	4	22
C	2	9	1	24
D	5	6	1	27

b) Time D; 2,25 pontos.

c) 0,25 ponto.

14. 88,75 km/h

15. a) 45,55 cm

b) 3

c) 9

Usando a calculadora p. 160

- 11,74 °C

16. 1,86 m

17. 20 anos.

18. a) 45 kg

b) 3 ginastas.

c) 48,3 kg

d) 2 ginastas.

19. 12,5 segundos

20. 5

21. 6 pontos

22. Resposta pessoal.

23. 22,1 anos; 20 anos.

24. a) 50 alunos

Matemática – 9º ano

Nota	f	fr (%)	f · (nota)
1	5	10	5
2	5	10	10
3	3	6	9
4	5	10	20
5	6	12	30
6	7	14	42
7	6	12	42
8	4	8	32
9	5	10	45
10	4	8	40
Total	**50**	**100,0**	**275**

b) 8%

c) 5,5

d) 6

e) Resposta pessoal.

25. 36 jogos.

26. 550

Desafio p. 165

O reajuste

- R$ 1 790,00
- R$ 2 004,80; sim.

27. cara — cara — coroa — coroa;

cara — coroa — coroa — coroa;

coroa — coroa — coroa — coroa.

Há outras respostas possíveis.

28. 3 em 8, ou 37,5%.

29. a) 6: 3 verdes, 2 amarelos e 1 vermelho.

b) 2 em 6, ou 0,333, ou 33,3%.

c) Verde; 3 em 6; ou 0,5, ou 50%.

d) Vermelho; 1 em 6, ou aproximadamente 0,167, ou 16,7%.

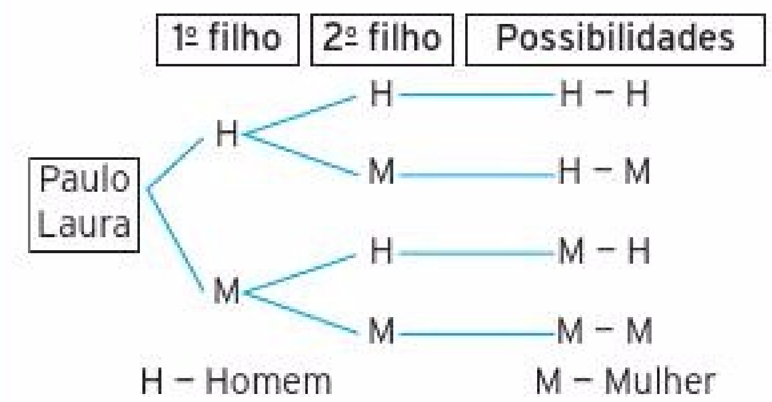
e) Resposta pessoal.

30. $\frac{3}{4}$ ou 0,75 ou 75%.

31. a) E = {(c,1); (c,2); (c,3); (c,4); (c,5); (c,6); (r,1); (r,2); (r,3); (r,4); (r,5); (r,6)}

b) $\frac{1}{12}$

32. a)



b) 1 em 4, ou $\frac{1}{4}$, ou 0,25, ou 25%.

c) 2 em 4, ou $\frac{2}{4}$, que é $\frac{1}{2}$, ou 0,5, ou 50%.

33. a) 6: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

b) 1 em 6, ou $\frac{1}{6}$, ou aproximadamente 0,1667, ou aproximadamente 16,67%; 5 em 6, ou $\frac{5}{6}$, ou aproximadamente 0,833, ou 83,3%.

c) 1 em 6, ou $\frac{1}{6}$, ou aproximadamente 0,1667, ou 16,67%; 5 em 6, ou $\frac{5}{6}$, ou aproximadamente 0,833, ou 83,3%.

d) 2 em 6, ou $\frac{2}{6}$, que é $\frac{1}{3}$, ou aproximadamente 0,333, ou 33,3%; 4 em 6, ou $\frac{4}{6}$, que é $\frac{2}{3}$, ou aproximadamente 0,667, ou 66,7%.

Desafio p. 169

Resultados ao lançar dois dados

a) 36 resultados.

b) 11 resultados.

c) $\frac{11}{36}$ ou 0,3055... ou 30,555%

Unidade 9 — Funções

1. Função.

2. a) 70 km

b)

Nº de dias	1	2	3	4	5	6	7
Percurso total (km)	14	28	42	56	70	84	98

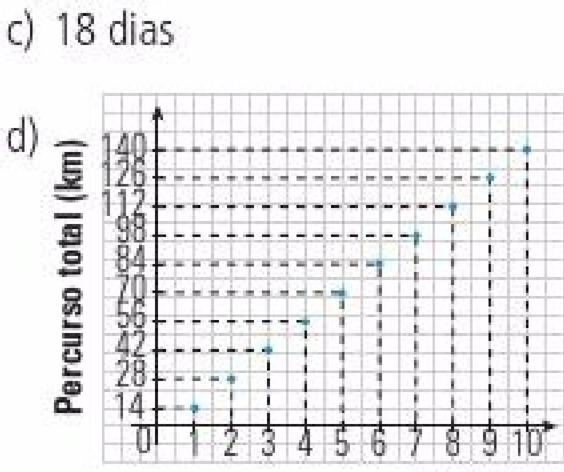
c) O percurso total depende do número de dias de treinamento.

3. a) y = 14x, em que **x** é o número de dias de treinamento e **y** é o percurso percorrido.

b) 140 km

c) 18 dias

d)



4. p = 6L + 12, em que **p** representa o perímetro em função da largura **L**.

a) 42 cm

b)

Largura	1	1,5	2	4	4,5	5	8,3
Comprimento	8	9	10	14	15	16	22,6
Perímetro	18	21	24	36	39	42	61,8

c) 13 cm e 32 cm.

5. a) $V = 25t$

b) Conjunto dos números reais positivos.

6.

x	$y = 11 - x^2$	y
-3	$11 - (-3)^2$	2
$-0,5$	$11 - (0,5)^2$	10,75
0	$11 - 0^2$	11
1	$11 - 1^2$	10
2	$11 - 2^2$	7

7. a) -5

b) 0,8

c) -8

d) $\frac{3}{4}$

8. a) $y = 4x^2 - 3x$ b) $24 - 3\sqrt{6}$

9. a) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

Há outras respostas possíveis.

b) 210 cm^2

c) 45 cm^2

d) 210

10. $y = 7x - 2$; $y = -x + 12$;

$y = \frac{x}{6} + 4$; $x - y = 0$

11. a) $y = -5$, para $x = \frac{3}{2}$

b) correta: b

c) $y = -2$, para $x = 6$.

12. a) $y = \frac{3x}{7} - 3$.

Há outras respostas possíveis.

b) 24

c) 7

13. a) $y = 0,8x$

b) O conjunto dos números reais positivos.

14. a) $y = (x - 2) \cdot 180°$ ou

$y = 180°\,x - 360°$; sim.

b) 1 080° c) Decágono.

Usando a calculadora p. 179

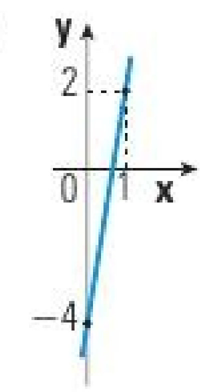
- 0,3x
- $y = 1,3x$
- R$ 37,70
- R$ 39,20

Desafio p. 179

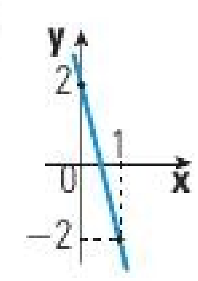
Cuidar-se bem!

- $q = 150 + 120m$
- Sim, porque é do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

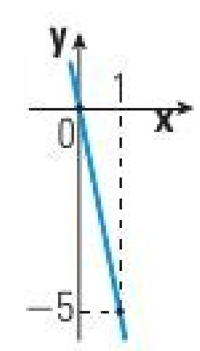
15. a)



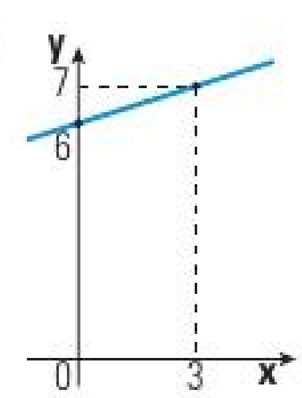
b)



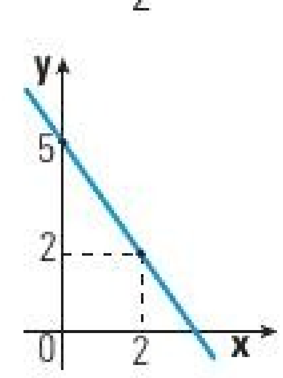
c)



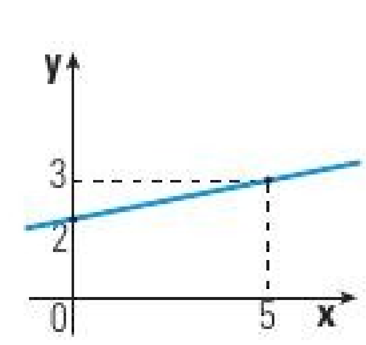
d)



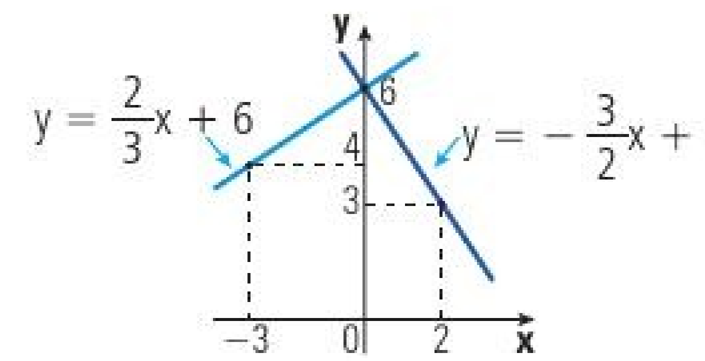
16. a) $y = -\frac{3}{2}x + 5$



b) $y = \frac{x}{5} + 2$



17. Elas são concorrentes e perpendiculares.



18. a) $y = x$

b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

19. a) $y = 23x + 4$; positivo.

b) Agudo.

20. $\frac{5}{2}$; 2; -12; 4

21. $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$

22. $(0, -1)$

23. a) -1; $(-1, 0)$; $(0, 1)$ c) 0; $(0, 0)$

b) $\frac{3}{2}$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; $(0, 2)$

24. $y = 5x - 10$

25. a) $x > -1$

b) $x = -1$

c) $x < -1$

26. a) Para $x > \frac{5}{2}$, $y > 0$; para $x < \frac{5}{2}$, $y < 0$;

e para $x = \frac{5}{2}$, $y = 0$.

b) Para $x > \frac{1}{3}$, $y < 0$; para $x < \frac{1}{3}$, $y > 0$;

e para $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$.

27. a) $x > \frac{3}{2}$

b) $x < -1$

28. $x > \frac{5}{2}$

29. $x < -\frac{1}{8}$

30. $\frac{1}{5}$

31. $x < -\frac{6}{5}$

32. a) $y = 0$ para $x = \frac{13}{6}$; $y > 0$ para $x > \frac{13}{6}$; $y < 0$ para $x < \frac{13}{6}$.

b) $y = 0$ para $x = 2$; $y > 0$ para $x < 2$; $y < 0$ para $x > 2$.

Unidade 10 — Função de 2º grau

1. -1

2. $-\frac{5}{2}$ e 0.

3. $x = 0$; $y = 1$.

Há outras respostas possíveis.

4. a) $y = \frac{3x^2}{2} + 2x$, sendo **y** a área do trapézio e **x** a medida da altura.

b) Porque é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a = \frac{3}{2} \neq 0$.

c) O conjunto dos números reais positivos.

5. a) $y = x^2 + 6x - 4$

b) -7 e 1.

6. a) $y = x^2 - 32$

b) 68 cm²

c) 12 cm

7. a) $y = -4x^2 + 64$

b) Sim.

Desafio p. 193

Região verde

- $y = 6x^2$ Há outras respostas possíveis.
- RODA: 20 m e 10 m; TIME: 10 m e 5 m.

8. Corretas: a, c.

9. a) Voltada para cima.

b) Voltada para baixo.

c) Voltada para baixo.

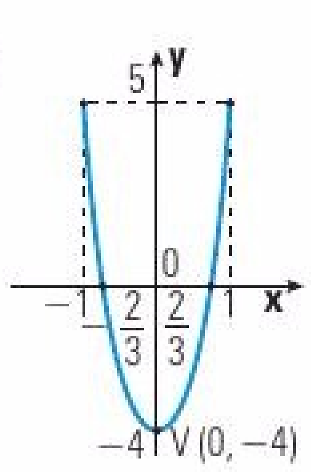
d) Voltada para cima.

10. a) $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.

b) $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$; $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

c) $(0, -4)$

d)



11. a) Voltada para cima.

b) -4, -2.

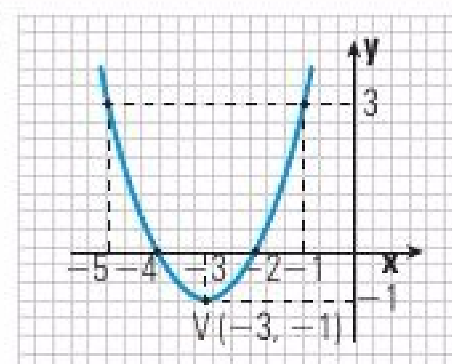
c) $(-4, 0)$; $(-2, 0)$.

d) $(-3, -1)$

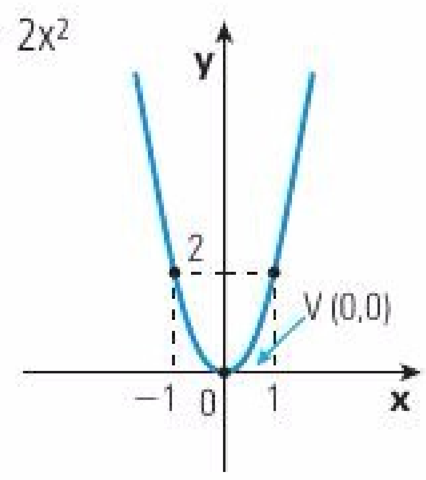
e)

x	y	(x, y)
−5	3	(−5, 3)
−4	0	(−4, 0)
−3	−1	(−3, −1)
−2	0	(−2, 0)
−1	3	(−1, 3)

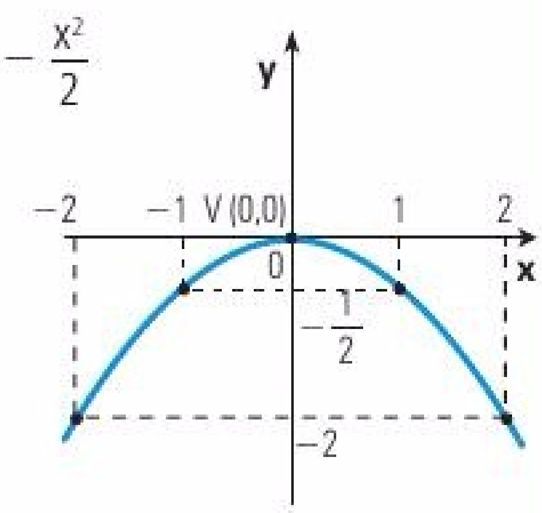
f)



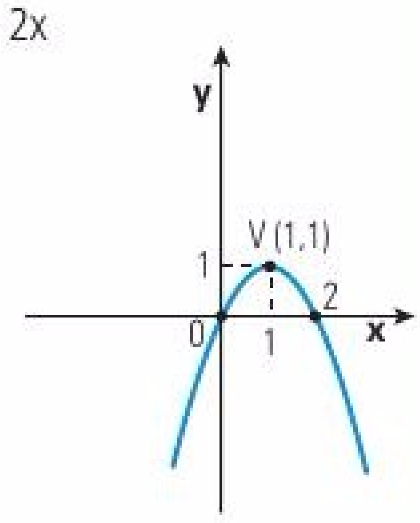
12. a) $y = 2x^2$



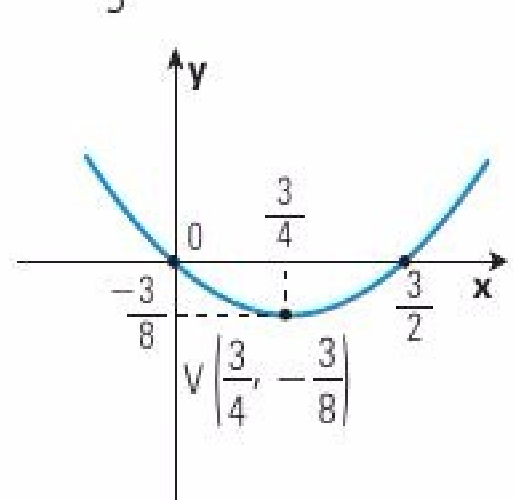
b) $y = -\frac{x^2}{2}$



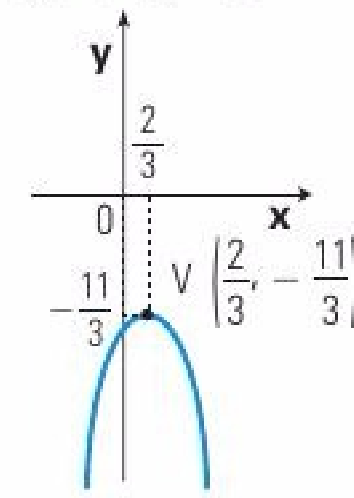
c) $y = -x^2 + 2x$



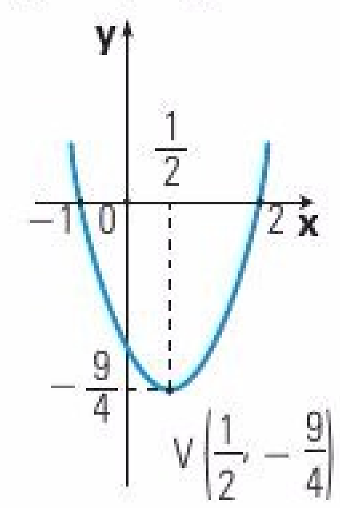
d) $y = \frac{2}{3}x^2 - x$



e) $y = -3x^2 + 4x - 5$



f) $y = x^2 - x - 2$



Desafio p. 198

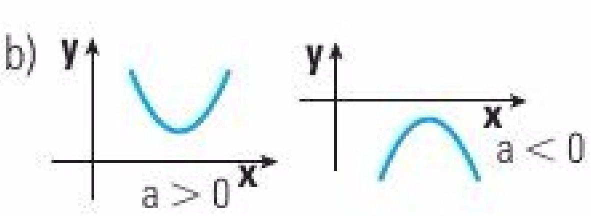
Quem está com a razão?

- As duas chegarão ao mesmo tempo. Na vertical, tanto a bola quanto a flecha têm velocidade inicial nula e caem com a mesma aceleração, devido à gravidade da Terra.

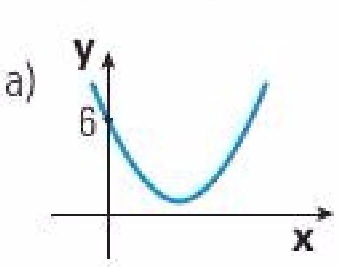
13. Tem concavidade voltada para cima, ponto de mínimo e dois pontos de intersecção com o eixo **x**.

14. a) Não há pontos de intersecção com o eixo **x**.

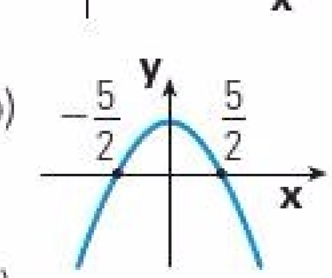
b)



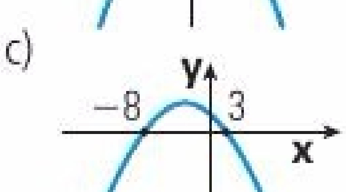
15. a)



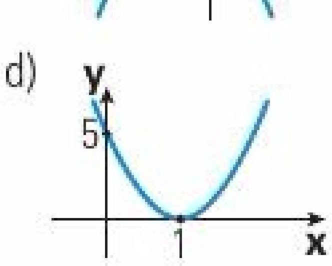
b)



c)

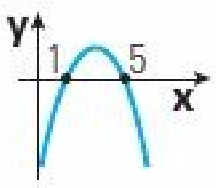


d)



16. É o seu ponto "mais baixo", porque $a = 3$ e $a > 0$; $(3, 23)$.

17. Valor máximo; $y = -10$.

18. a)


b) 2; 2,5; 4. Há outras respostas possíveis.

c) -1; 0,5; 6. Há outras respostas possíveis.

19. a) $\frac{1}{5}$ e 1.

b) $x < \frac{1}{5}$ ou $x > 1$.

c) $\frac{1}{5} < x < 1$

20. $\frac{1}{3} < x < 3$

21. a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3}$.

b) $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{4}{3}$

c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$

22. a) 0

b) Nenhum valor real de **x**.

c) Todo número real diferente de zero.

23. a) $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

b) $\frac{-3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

c) $x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ ou $x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

24. $y = 0$ para $x = \frac{2}{3}$; para $y > 0$ não existe valor de **x**; $y < 0$ para todo **x** real e $x \neq \frac{2}{3}$.

25. Não há valor real de **x** para o qual a função seja negativa.

26. Verdadeira. Como $\Delta < 0$ e $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e não tem pontos comuns com o eixo **x**, ou seja, ela está acima do eixo **x** e é por isso positiva para qualquer valor real de **x**.

27. $x \in \mathbb{R}$, $x < -\frac{1}{5}$ ou $x > 0$.

28. $x \in \mathbb{R}$, $-2 < x < \frac{1}{5}$.

29. Não há nenhum valor real de **x** para o qual se tenha $3x^2 - 2x + 4 < 0$.

30. $x \in \mathbb{R}$, $x < -2$ ou $x > 3$.

31. Todos os números reais.

32. $x \in \mathbb{R}$, $-6 < x < 0$.

33. $x \in \mathbb{R}$, $-2 < x < 0$.

34. $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$.

35. $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2}$.

36. Não existe solução.

Desafio p. 207

Problema de áreas e inequação

- med $\overline{RL} > 12$ cm

37. a) $a = x^2$

b) $p = 4x$

c) $a = \frac{p^2}{16}$

d) $8\sqrt{5}$ m

38. $m \in \mathbb{R}$, $m < -7$.

39. $x < -5$ ou $x > 2$

40. a) 103 m; 103 m

b) 10 609 m²

c) Quadrado.

Unidade 11 — Circunferências

1. a) $\overline{AO}$ e $\overline{OM}$. Há outras respostas possíveis.

b) 110°; 110°

c) 70°

d) 1,6 cm

2. a) 120°

b) 120°

3. a) 3,4 m; 3,4 m; são iguais.

b) O $\triangle OAB$ é isósceles, porque $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ (raios).

c) 40,8° ou 40° 48'

d) 307,2° ou 307°12'

4. a) 57°

b) 90°

c) 125°

5. $\overset{\frown}{DYC} = 303°$; $\overset{\frown}{FSE} = 270°$; $\overset{\frown}{NLM} = 235°$.

6. 42 cm

7. Traçam-se duas cordas e as mediatrizes dessas cordas. A interseção dessas mediatrizes é o centro.

8. a) médio

b) 3 cm

c) 9,8 cm

9. a) r

b) Um diâmetro.

c) 7 m

d) Mediatriz de $\overline{AB}$.

10. **d**, **r** e **s**, respectivamente. Há outras respostas possíveis.

11. 33°

12. $a = 16°\ 15'$; med $M\hat{A}B = 32°\ 15'$

13. 7,05 cm

14.

$\overline{RS}$ é diâmetro. **A** é ponto médio de $\overline{XY}$. $\overline{XY}$ é corda. $\Big\}$ $\overline{RS} \perp \overline{XY}$ e contém o ponto médio de $\overline{XY}$. Logo, $\overleftrightarrow{RS}$ é mediatriz de $\overline{XY}$.

R pertence à mediatriz de $\overline{XY}$.

Assim, med $\overline{RX}$ = med $\overline{RY}$ e $\overline{RX} \equiv \overline{RY}$. Portanto, $\triangle XRY$ é isósceles.

15. É um ângulo com vértice na circunferência e cujos lados são secantes a ela.

16. a) $S\hat{N}R$ e $S\hat{O}R$. Há outras respostas possíveis.

b) $T\hat{M}P$ e $T\hat{X}P$. Há outras respostas possíveis.

17. 68° 30' ou 68,5°

18. a) 75°

b) 76°

c) 56°

19. a) Triângulo retângulo.

b) 90°; 42°.

20. med $P\hat{M}N = 90°$; med $N\hat{P}M = 40° 30'$; med $M\hat{N}P = 49° 30'$.

21. a) $x = 120°$; $y = 160°$

b) $y = 90°$; $x = 20°$

22. $x = 34°$; $y = 68°$

23. a) 58° b) 13° 40′

24. 25 cm

25. a) 8 cm

b) $8\sqrt{3}$ cm

c) $(24 + 8\sqrt{3})$ cm

d) $32\sqrt{3}$ cm²

26. a) 4 cm b) 2,5 cm

27. a) med $P\hat{M}N$ é a metade da medida do ângulo central $P\hat{A}N$; logo med $P\hat{M}N = \frac{174°}{2} = 87°$; med $M\hat{N}P$ = med $M\hat{P}N = \frac{(180 - 87)}{2} = 46° 30'$.

b) med $\hat{M} = 87°$; med $\hat{N}$ = med $\hat{P} = 46° 30'$

c) Resposta pessoal.

28. a) 16°

b) 76°

29. $\overline{BC} = 9$ cm; $\overline{AC} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ cm; $\overline{AB} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm.

30. 12,5 cm

31. $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ cm

32. $13(\sqrt{2} + 1)$ cm e $\frac{169}{4}$ cm²

Desafio p. 225

Qual é o valor?

$$\left.\begin{array}{l}\triangle OAP \equiv \triangle OBP\\ \overline{OA} \equiv \overline{OB}\ \text{(raios)}\\ \overline{OP} \equiv \overline{OP}\ \text{(hipotenusa comum)}\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\overline{AP} \equiv \overline{BP}\\ \text{med}\ \overline{BP} = \text{med}\ \overline{AP}\end{array}$$

Como med $\overline{BP}$ = med $\overline{AP}$ e med $\overline{AP}$ = 5,8 cm, então x = 5,8 cm.

33. $C = 2\pi r$; $A = \pi r^2$.

34. Aproximadamente, 31,4 cm; 78,5 cm².

35. 50,24 cm; 200,96 cm².

36. 14,13 cm; 15,90 cm².

37. a) 14 cm b) 615,44 cm²

38. 4 cm

39. 4,19 cm

40. a) 6,28 cm

b) 3,14 cm

c) 4,71 cm

d) 12,56 cm

Usando a calculadora p. 229

- 21,3629 cm; 36,3169 cm².
- 32,6726 cm; 84,9489 cm².
- 47,1240 m; 176,7150 m².

Desafio p. 230

Quantos metros em quatro voltas?

- Aproximadamente, 2,07 m.
- Aproximadamente, 8,28 m.

41. a) 1 256 cm²

b) 7,065 cm²

c) 37,68 cm²

d) 39,25 cm²

42. $\frac{3}{4}$

43. $\frac{9}{25}$

44. a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) 3,8 cm

45. a) $x = 75°$; $y = 168°$

b) $x = 120°$; $y = 120°$

46. a) 45°

b) 22° 30′

c) 67° 30′

d) 135°

47. $x = y = 66°$

48. 38,88 cm²

49. a) 84,78 cm²

b) 102,665 cm²

c) 27,52 cm²

50. 64π cm² ≅ 200,96 cm²

51. 32π cm² ≅ 100,48 cm²

52. 36π cm² ≅ 113,04 cm²

Desafio p. 232

Babucha e seu pasto

- 88,705 m²

Unidade 12 — Relações trigonométricas

1. André e Célia.

Bianca e Danilo erraram porque $\cos \hat{H} = \frac{4}{5}$ e $\cos \hat{T} = \frac{3}{5}$.

2. a) $\sqrt{3}$ m; $2\sqrt{3}$ m; $4\sqrt{3}$ m.

b) 60°, porque, como MCR é um triângulo retângulo, med $\hat{M}$ + med $\hat{R}$ = 90°; como med $\hat{M}$ = 30°, temos med $\hat{R}$ = 90° − 30°, ou seja, med $\hat{R}$ = 60°.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$

3. a) 45°

b) $\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$

5. a) $2\sqrt{3}$ cm ≅ 3,5 cm

b) $\frac{\sqrt{33}}{6}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{6} \cong 0,3$

6. $\text{tg } \hat{P} = \frac{4}{5}$; $\text{tg } \hat{N} = \frac{5}{4}$

7. $\text{tg } \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\text{tg } \hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. a) $5\sqrt{3}$ cm

b) $\sqrt{91}$ cm

c) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

9. a) Triângulo retângulo isósceles.

b) 45°; 45°.

c) $4\sqrt{2}$ cm

d) $\overline{RO}$; $\overline{DR}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.

10. $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$; 1; $\sqrt{3}$

a) 45°

b) 45°; 60°

11. $25\sqrt{2}$ m, ou aproximadamente 35,25 m.

12. a) 10,5 cm

b) 18 cm

c) $5\sqrt{2}$ cm

13. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) 1

c) $\sqrt{3}$

Os valores são iguais.

14. a) $x = 30°$

b) $y = 60°$

Desafio p. 247
Qual é a altura da torre?

- 34,60 m.

15. 50 cm; $50\sqrt{3}$ cm

16. 60°; 30°

17. $4\sqrt{6}$ cm

18. $5\sqrt{3}$ dm; 5 dm

19. a) $60\sqrt{3}$ cm

b) $120\sqrt{3}$ cm

20. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ m

21. $\frac{1}{3}$

22. $30\sqrt{3}$ m

23. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

24. 12 m

25. 692 m^2

26. a) $x \cong 10{,}39$ cm; $y = 12$ cm

b) $x = 29{,}4$ cm; $y \cong 14{,}7$ cm

27. $\ell = r\sqrt{2}$

28. É um segmento de reta que tem como extremidades o centro da circunferência circunscrita a esse quadrado e o ponto médio de um dos seus lados.

29. $\ell = r\sqrt{3}$

30. a) $6\sqrt{2}$ cm

b) 6 cm

31. a) 8 cm

b) $8\sqrt{3}$ cm

32. a) $36\sqrt{2}$ cm

b) 72 cm

c) 648 cm^2

33. a) $1\,200\sqrt{3}$ cm^2

b) $400\sqrt{3}$ cm^2

c) $800\sqrt{3}$ cm^2

34. 36 cm

35. a) 30 cm

b) $30\sqrt{2}$ cm, $30\sqrt{3}$ cm e 30 cm.

c) 15 cm

36. a) 24 cm

b) $72\sqrt{3}$ cm

c) 36 cm

d) $432\sqrt{3}$ cm^2

37. 40 m

38. 692,84 cm

39. 62,35 cm

40. 216 cm^2

41. a) 8 cm

b) $4\sqrt{3}$ cm

c) $96\sqrt{3}$ cm^2

Indicação de leituras complementares para os alunos

Berloquin, P. *100 jogos lógicos*. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2002. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *100 jogos numéricos*. Lisboa: Gradiva, 1999. Coleção O Prazer da Matemática.

Bolt, B. *Actividades matemáticas*. Trad. Leonor Moreira. Lisboa: Gradiva, 1991. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *Mais actividades matemáticas*. Trad. Luisa Carreira. Lisboa: Gradiva, 1992. Coleção O Prazer da Matemática.

Cândido, Suzana Laino. *Formas num mundo de formas*. São Paulo: Moderna, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

Guelli, Oscar. *A invenção dos números*. 9. ed. São Paulo: Ática, 1998. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Equação*: o idioma da Álgebra. 11. ed. São Paulo: Ática, 1999. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *História da equação do 2º grau*. 10. ed. São Paulo: Ática, 1999. Coleção Contando a História da Matemática

______. *Jogando com a Matemática*. 8. ed. São Paulo: Ática, 2005. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Dando corda na trigonometria*. 9. ed. São Paulo: Ática, 2000. Coleção Contando a História da Matemática

______. *História de potências e raízes*. 9. ed. São Paulo: Ática, 2002. Coleção Contando a História da Matemática.

______. *Números com sinais*: uma grande invenção. São Paulo: Ática, 2013. Coleção Contando a História da Matemática.

Guzmán, M. de. *Contos com contas*. Trad. Jaime Carvalho e Silva. Lisboa: Gradiva, 1991. Coleção O Prazer da Matemática.

______. *Aventuras matemáticas*. Trad. João Filipe Queiró. Lisboa: Gradiva, 2004. Coleção O Prazer da Matemática.

Imenes, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Problemas curiosos*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 2001. Coleção Vivendo a Matemática.

Imenes, Luiz Márcio; Lellis, Marcelo. *Descobrindo o teorema de Pitágoras*. 13. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Geometria dos mosaicos*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Os números na história da civilização*. 12. ed. São Paulo: Scipione, 2006. Coleção Vivendo a Matemática.

Imenes, Luiz Márcio; Jakubo, José; Lellis, Marcelo. *Álgebra*. 16. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Equação do 2º grau*. 17. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Geometria*. 16. ed. São Paulo: Atual, 2004. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Ângulos*. 17. ed. São Paulo: Atual, 2005. Coleção Pra que Serve a Matemática?

______. *Semelhança*. 14. ed. São Paulo: Atual, 2005. Coleção Pra que Serve a Matemática?

Machado, Nilson José. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. 7. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Semelhança não é mera coincidência!* 6. ed. São Paulo: Scipione, 1999. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Polígonos, centopeias e outros bichos*. 9. ed. São Paulo: Scipione, 2000. Coleção Vivendo a Matemática.

______. *Lógica? É lógico!* 10. ed. São Paulo: Scipione, 2006.

Rosa Neto, Ernesto. *Em busca das coordenadas*. 11. ed. São Paulo: Ática, 2001. Coleção A Descoberta da Matemática.

Silva, Maria Cecília Costa e. *Padrões numéricos e sequências*. São Paulo: Moderna, 2000.

______. *Padrões numéricos e funções*. São Paulo: Moderna, 1999.

MANUAL DO PROFESSOR
Orientações Didáticas

Colegas,

Nesta edição da coleção para o Ensino Fundamental de 6º ao 9º ano, destacamos as múltiplas aplicações da Matemática nas ciências e no cotidiano, enriquecidas com fotografias e ilustrações. O desenvolvimento dos conceitos enfoca ora os acontecimentos históricos da Matemática, ora a resolução de situações-problema. Com uma abordagem mais atualizada, esperamos auxiliar os alunos a vencer o desafio de aprender Matemática e, dessa maneira, mudar a imagem estereotipada que se construiu sobre essa disciplina – "uma ciência para **poucos**" –, além de criar condições para a inserção dos alunos em um mundo marcado por mudanças sociais, econômicas, científicas e tecnológicas.

Procuramos também um projeto gráfico que proporcionasse um visual mais arejado e que tornasse a leitura dos textos mais eficiente, o que contribui para uma melhoria no aprendizado.

A abordagem dos conceitos é feita em espiral, explorando os temas e retomando-os ao longo dos quatro livros desta coleção. Às seções já existentes, como **Leitura**, **Troquem ideias e resolvam**, **Revisão cumulativa e testes**, foram acrescidas as seções **Para refletir e responder**, **Desafio** e **Investigue e explique**. Dessa forma, estamos certas de que o interesse e o envolvimento dos alunos, quando instigamos sua curiosidade, desafiando-os com problemas, convidando-os a raciocinar e a resolvê-los, levarão a um melhor desempenho e ao gosto por essa disciplina, tão importante no mundo de hoje.

Esperamos que esta coleção contribua para desenvolver nos alunos uma postura que os leve a se tornarem solucionadores de problemas, formuladores de hipóteses e questões, para que tenham chance de vencer desafios com os quais certamente se defrontarão durante e após os estudos e que demandam a utilização do raciocínio e do conhecimento matemático.

Acreditamos que tanto os professores quanto os alunos conseguirão otimizar a proposta desta coleção e alcançarão os objetivos maiores – melhorar o **pensar**, o **falar**, o **escrever** e o **produzir** Matemática.

Críticas que possam enriquecer esta proposta são bem-vindas, para que, juntos, busquemos novos caminhos para o ensino e o aprendizado da Matemática.

As autoras

Sumário

O que apresentamos neste Manual

As orientações apresentadas neste Manual pretendem torná-lo um material de apoio prático e eficiente, claro e objetivo ao trabalho docente a ser desenvolvido não só em períodos de planejamento escolar, mas também ao longo do ano em sala de aula. Elas visam, também, contribuir para o desenvolvimento pedagógico do dia a dia do professor, esclarecendo os pressupostos metodológicos adotados, apresentando informações, textos de aprofundamento e sugestões de atividades que possam enriquecer o trabalho do professor.

As orientações foram organizadas da seguinte forma:
- Pressupostos metodológicos;
- Conteúdos deste Manual;
- Estrutura da obra;
- Blocos de conteúdos e orientações didáticas;
- Avaliação em Matemática;
- Conteúdos propostos em cada ano;
- Indicações para a formação continuada do professor;
- Resolução de algumas atividades.

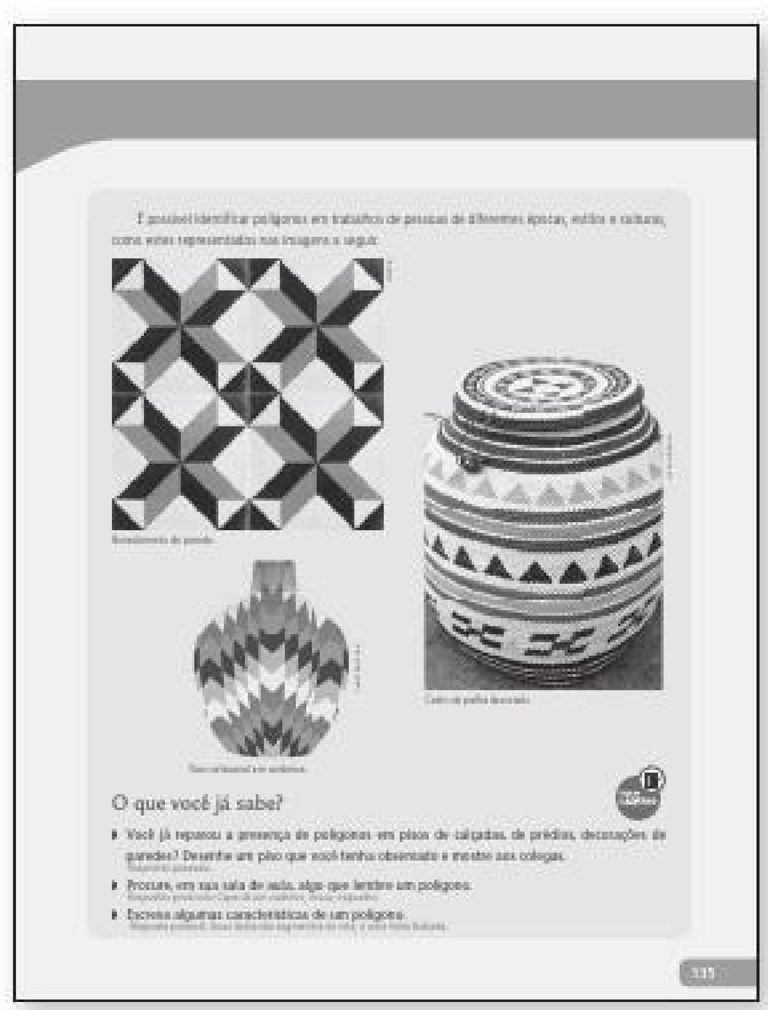
Pressupostos metodológicos

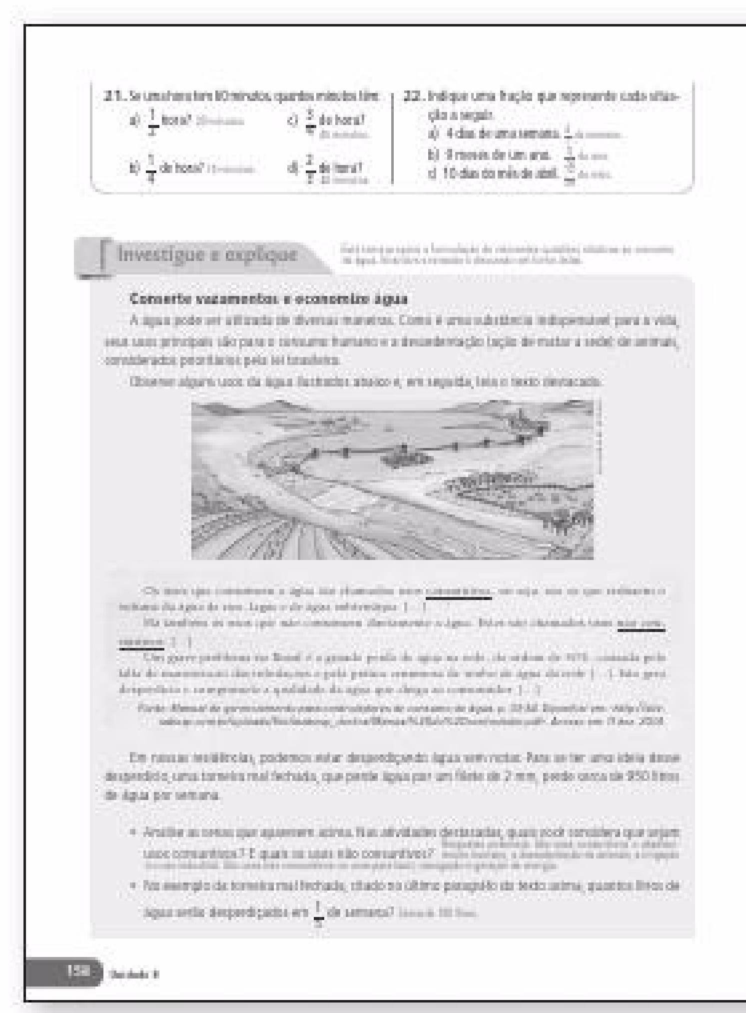
É consenso que não existe uma única metodologia identificada como a melhor para o ensino de qualquer disciplina e, em particular, da Matemática. Existem, sim, diversas possibilidades de trabalho em sala de aula. Mas, para que os alunos aprendam Matemática com significado, é importante que eles estabeleçam conexões entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento de maneira que possam mobilizar esses conhecimentos em situações escolares e no dia a dia.

Com esse propósito, esta coleção aborda temas relacionados a saúde, meio ambiente, sustentabilidade e pluralidade cultural, que são explorados e problematizados de forma a conduzir à reflexão, o que pode contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de exercício da cidadania.

A compreensão de questões sociais relacionadas à saúde, ao saneamento básico e às condições de trabalho, assim como o acompanhamento do próprio desenvolvimento físico, são alguns dos assuntos que poderão ser trabalhados para alcançar tal objetivo. É muito importante também o conhecimento de problemas envolvidos em questões ambientais, pois isso proporciona a conscientização e uma visão mais clara deles, além da tomada de decisões e de possíveis intervenções.

Esses temas, em geral, podem ser extraídos de jornais, revistas, internet e ampliados de acordo com o interesse dos alunos. Convide-os a selecionar os temas, permitindo que assumam responsabilidades e atuem de forma participativa, opinando, resolvendo conflitos e propondo possíveis soluções para os problemas encontrados.





Esta coleção procura desenvolver uma metodologia que almeja ser eficaz e atual, tanto em relação aos **conteúdos** do 6º ano ao 9º ano, quanto em relação à **abordagem metodológica** e às **atividades propostas**. Essa metodologia procura contemplar as necessidades dos alunos, tendo como pressupostos básicos os conhecimentos matemáticos e não matemáticos de que dispõem.

Espera-se que os alunos caminhem em direção a um processo constante de elaboração e reelaboração de conceitos, descoberta e redescoberta de conhecimentos matemáticos e de desenvolvimento de competências para analisar um problema ou desafio e tomar as decisões necessárias à sua resolução.

Com a elaboração e a reformulação desta coleção, procura-se responder a algumas questões:
- Qual Matemática é significativa na aprendizagem?
- O que é relevante no processo ensino-aprendizagem?
- Qual o encaminhamento metodológico?

Qual Matemática é significativa na aprendizagem?

A coleção tem como pressuposto que o conhecimento é resultado da compreensão e da vivência. Além disso, a Matemática também é resultado da resolução de situações-problema.

Os acontecimentos ao longo da história das ciências mostram que a produção teórica tem suas raízes nos problemas que surgem na prática, no dia a dia.

Atualmente, muitos matemáticos produzem conhecimentos puramente teóricos, mas não resta dúvida de que, muitas vezes, esses conhecimentos também subsidiam as soluções práticas, ainda que para o aluno isso venha a ocorrer apenas no futuro.

Um dos objetivos deste trabalho é a formação de um indivíduo autônomo, que externe suas opiniões e seja criativo, fruto da sua **capacidade** de pensar, raciocinar e resolver problemas. Busca-se a formação de um indivíduo que se apropria de um conhecimento matemático e usa esse conhecimento para **ler** o mundo à sua volta, **interferir** positivamente nesse mundo, **produzir** novos conhecimentos e também – por que não? – **produzir Matemática**, pois a Matemática tem pontos de conexão com todas as áreas do conhecimento humano, sejam elas de natureza física ou social.

O que é relevante no processo ensino-aprendizagem?

Partindo da premissa de que cabe ao professor pensar o planejamento didático das atividades e a avaliação do trabalho, em suas circunstâncias específicas, a coleção apresenta uma proposta metodológica em que:

- a técnica é desenvolvida com o apoio da **compreensão** e da **construção** dos procedimentos e conhecimentos matemáticos, aliadas a uma proposta metodológica que pode ser adequada a cada realidade;
- a resolução de problemas tem um destaque especial por meio da resolução de desafios e situações-problema;
- investe-se no desenvolvimento de algumas **ideias fundamentais**, como:
  - **padrões, regularidades e generalizações** – padrões que se repetem em fenômenos físicos, nas formas geométricas, em números e na Álgebra, resultando em propriedades matemáticas;
  - **proporcionalidade** – fundamental na análise da interdependência da variação de uma grandeza em relação a outra, em ampliações e reduções de figuras, mapas, plantas e especificamente no estudo da semelhança entre figuras;
  - **equivalência** – presente no estudo de números racionais, de equações, de áreas ou de volumes de figuras planas ou espaciais;
  - **ordem** – referência básica nos conjuntos numéricos, na construção de algoritmos, na representação geométrica de números;
  - **combinatória** – aparece especificamente na abordagem do princípio multiplicativo, nos problemas de contagem e de combinação. É um estudo inicial do bloco Estatística e Probabilidade.

Além disso, é recomendação atual que os alunos aprendam a **linguagem matemática** e seus **símbolos** e desenvolvam um procedimento de **comunicação de ideias matemáticas** por meio deles. Esse é um pressuposto básico que deverá compor qualquer planejamento conectado às tendências atuais em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Qual o encaminhamento metodológico?

Uma listagem de conteúdos por ano não garante a apreensão desses conteúdos por parte da maioria dos alunos. Assim, a coleção apresenta uma proposta que poderá complementar o que já é feito em sala de aula, pois é possível adaptar à sua realidade.

Além disso, empregando uma linguagem simples e acessível, propõe um tratamento diferenciado tanto para os novos conteúdos como para os tradicionais, como os pontos destacados a seguir.

PROBLEMAS E OPERAÇÕES – cada tema é introduzido com a proposta de uma ou mais situações-problema, que têm como objetivo despertar o interesse do aluno para o assunto. Esse é um momento de socialização do conhecimento e de participação ativa do aluno na construção dos conceitos. Sempre que possível, são situações-problema que fazem parte da realidade dos alunos e que poderão ser adaptadas de acordo com a classe.

Assim, exploramos o significado das operações de várias maneiras.

Ao estudarmos os números naturais ($\mathbb{N}$), sistematizamos o conhecimento que os alunos adquiriram nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No trabalho com números inteiros ($\mathbb{Z}$), utilizamos a representação geométrica na reta numerada como auxiliar na compreensão e construção das regras de sinais das operações, a partir de situações-problema concretizadas por essa representação.

No estudo dos números racionais ($\mathbb{Q}$), recorremos à composição e à decomposição de figuras, enfatizando o todo-referência ou inteiro, fundamental para a compreensão das novas regras de cálculo com números racionais na forma de fração. Damos destaque especial à multiplicação e à divisão, em que apenas regras sem o significado não resultam em aprendizagem. Não há necessidade de enfatizar cálculos trabalhosos com a forma de fração, mas é preciso um trabalho mais longo e profundo com a escrita numérica decimal. Isso é decorrente do desenvolvimento da tecnologia nos tempos atuais.

Iniciamos o estudo dos números reais (ℝ) com a exploração do teorema de Pitágoras, em uma proposta que percorre o caminho histórico do surgimento dos números irracionais. Recorremos mais uma vez à representação geométrica na reta numerada de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

GEOMETRIA E MEDIDAS — mereceram um tratamento exploratório e bastante intuitivo no início e uma sistematização gradativa dos conceitos e das propriedades, visando a uma formalização ao longo dos quatro livros. Exploramos inicialmente objetos e formas do espaço e mais tarde trabalhamos com a Geometria Euclidiana Plana, sem explicitar os axiomas. É uma proposta na qual as propriedades surgem de um trabalho empírico que tem como pressuposto o axioma da medição.

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE — foram abordadas, no início, partindo dos conhecimentos que os alunos possuem sobre o assunto, adquiridos por intermédio dos meios de comunicação. Em cada volume, esse conteúdo foi distribuído e interligado aos conteúdos propostos e às questões relacionadas aos Temas Transversais, como políticas públicas de saúde e educação, questões ambientais, consumo, migração e família.

O conteúdo foi desenvolvido de modo que os alunos percebam a importância desse tema atualmente, uma vez que favorece a integração com outras áreas e disciplinas.

ÁLGEBRA — iniciamos com a Pré-Álgebra no livro do 6º ano e a abordamos de forma gradativa a partir do volume do 7º ano, quando os alunos estão mais preparados para compreender e trabalhar uma Matemática mais formal. Demos ênfase à Álgebra como **generalização** da Aritmética, como **ferramenta** importante na resolução de problemas usando equações como **linguagem** que expressa com precisão o desenvolvimento do raciocínio no processo de resolução de um problema. É importante lembrar que o ser humano levou muitos séculos para generalizar a Aritmética e criar a Álgebra, mas, depois que ela foi criada, houve um grande avanço na Matemática e nas demais ciências.

CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVAS, ARREDONDAMENTOS E APROXIMAÇÕES — são abordados para oferecer aos alunos instrumentos e procedimentos de cálculo nas situações mais variadas do dia a dia e, também, para que possam desenvolver e sistematizar estratégias de verificação e controle de resultados. Pela diversidade dos caminhos possíveis, o uso frequente de procedimentos de cálculo mental, estimativas, arredondamentos e aproximações permite que os alunos desenvolvam ferramentas para manipular as propriedades das operações, apropriar-se delas e desenvolver instrumentos necessários às aquisições mais formalizadas.

Esperamos que esta proposta lhe permita — tendo diagnosticado sua realidade — aprofundar todas as ideias ou dar prioridade a uma em relação a outra. Cabe a você, professor, dirigir sua prática de sala de aula, tendo esta coleção como um material didático dentre outros, para que possa contribuir no processo de construção do conhecimento matemático dos alunos.

O conteúdo deste Manual

Aulas tradicionais versus *alunos sujeitos de sua aprendizagem*

Além das observações pedagógicas indicadas no Livro do Professor, expomos neste Manual:

- **estrutura da obra**, em que apresentamos cada seção do livro com comentários sobre suas funções;
- **blocos de conteúdo** e **orientações didáticas**, em que são abordados em espiral os temas desenvolvidos, ou seja, retomando-os várias vezes em níveis diferenciados de aprofundamento. Acreditamos que dessa forma os alunos poderão elaborar e reelaborar os conceitos, aprimorando seus conhecimentos matemáticos. Expomos, também, comentários sobre os pressupostos teóricos e algumas indicações metodológicas que poderão ser utilizadas com sucesso;
- **avaliação em Matemática**, em que apresentamos concepções teóricas e práticas sobre o tema, dentro de uma visão atual;
- **conteúdos propostos em cada ano,** em que sugerimos as expectativas de aprendizagem para cada unidade; orientações didáticas; resolução das seções **Desafios**, **Troque ideias e resolva, Investigue e explique**; textos de aprofundamento; sugestões de atividades complementares com subsídios específicos que esperamos que se somem ao seu trabalho;
- **indicações para a formação continuada do professor** e **contribuições para a ação em sala de aula**. Pensando na formação do educador como um processo que não termina com a graduação, mas se constitui em um contínuo aperfeiçoamento, recomendamos algumas obras de referência que contribuirão para sua prática de ensino, bem como algumas leituras complementares para os alunos.

Estrutura da obra

Para viabilizar esta proposta, cada volume da obra é composto por unidades: no volume 6, por exemplo, existem 12 unidades. Cada unidade começa com uma abertura em página dupla. De modo geral, na página par é apresentada uma imagem e a página ímpar é composta por um pequeno texto, ambos relacionados ao assunto que será desenvolvido, e a seção "O que você já sabe?".

No decorrer dessas unidades, os assuntos foram agrupados em **capítulos** e você encontrará as seções a seguir:

- Para refletir e responder
- Fazer e aprender
- Usando a calculadora
- Investigue e explique
- Troquem ideias e resolvam
- Exercícios complementares
- Desafio
- Leitura
- Revisão cumulativa e testes

Primeira seção de cada unidade

A seção **O que você já sabe?** é proposta na página ímpar após um pequeno texto e apresenta questões que têm como objetivo principal proporcionar espaço para que os alunos explicitem conhecimentos de que dispõem sobre o tema que será tratado ao longo da unidade. Essa seção poderá ser desenvolvida oralmente em forma de painel de discussões. Esse momento propicia um diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos e, por consequência, um ajuste do seu planejamento, caso seja necessário.

Desenvolvimento dos conceitos

De modo geral, os conceitos matemáticos são abordados por meio de situações-problema que envolvem temas do dia a dia em uma seção denominada **Para refletir e responder**. Acreditamos que, dessa forma, propiciam-se a reflexão e a discussão sobre o conceito em questão. As resoluções desses problemas constituem o ponto de partida para a construção dos conceitos.

Em um primeiro momento, os alunos são convidados a opinar sobre as situações propostas. Se preferir, peça aos alunos que leiam os problemas com antecedência em casa, ou que façam uma leitura silenciosa em sala de aula, e depois promova uma discussão, encerrando com uma síntese do tema tratado.

Em seguida, o aluno encontrará um pequeno texto, escrito em uma linguagem clara e acessível, com as conclusões sobre o conceito que foi abordado.

Acreditamos que melhorar a capacidade de ler, interpretar e resolver problemas faz parte da construção do conhecimento matemático, além de contribuir para o desenvolvimento da comunicação de ideias matemáticas. Além disso, explorar assuntos do interesse dos alunos despertará sua curiosidade, envolvendo-os na busca por novos conhecimentos e enriquecendo os já adquiridos.

Vamos lembrar que, nessa fase de aprendizagem, os conceitos matemáticos não são necessariamente expressos em uma linguagem formal, podendo-se usar um vocabulário mais próximo e acessível, sem abrir mão do rigor matemático necessário. Além disso, esses conceitos serão retomados e consolidados ao longo do período escolar.

Fazer e aprender

Nessa seção, apresentamos exercícios de fixação, de aplicação da teoria estudada e atividades dispostas em grau crescente de complexidade.

Sempre que possível, acompanhe os alunos no momento em que estiverem resolvendo essas atividades e problemas. Dessa observação resultarão indicadores dos avanços quanto à apropriação dos conhecimentos, que contribuirão para uma avaliação qualitativa e para o encaminhamento de seu trabalho.

Usando a calculadora

Nessa seção, a calculadora é utilizada como uma ferramenta de apoio para a resolução de atividades que envolvem problemas significativos, propostos com o objetivo de introduzir e consolidar conceitos e procedimentos.

Além de ser útil na resolução de problemas relacionados a situações reais, há outras vantagens no uso desse equipamento:

- constatar que o cálculo, por si só, não é importante, mas uma parte fundamental na resolução de um problema;
- explorar propriedades numéricas;
- observar padrões ou regularidades numéricas;
- utilizar diferentes métodos de cálculos numéricos, como na resolução de equações;
- possibilitar a comparação entre procedimentos e o levantamento de hipóteses.

Investigue e explique

Essa seção tem como objetivo principal explorar situações de natureza investigativa, em que os estudantes são solicitados a formular conjecturas sobre o que está sendo investigado.

"As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração".

Fonte: PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2006, p. 10.

A realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais:

- reconhecimento da situação;
- formulação de conjecturas;
- realização de testes;
- argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

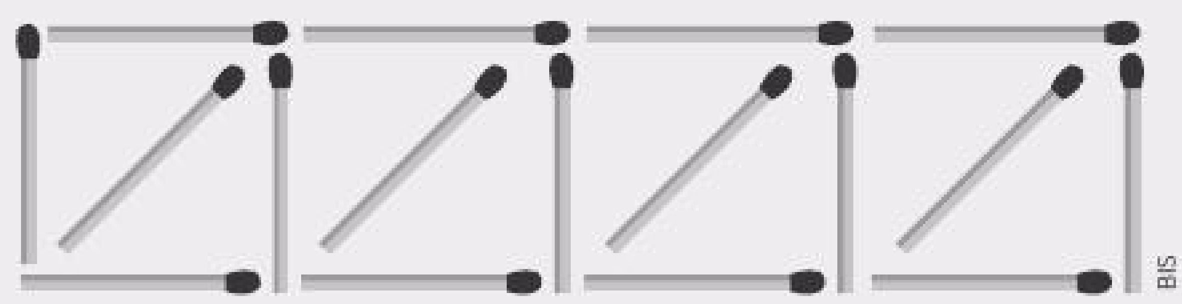
Veja um exemplo de uma situação de investigação com uma atividade proposta na página 19, do Volume do 6º ano.

Investigue e explique

Palitos e quadrados

Junte-se a um colega e reflitam sobre a questão a seguir:

Com 17 palitos de fósforo usados, pode-se montar quadrados com uma de suas diagonais como mostra a figura.



- Procedendo da mesma maneira, quantos quadrados como esses podem ser montados usando 85 palitos de fósforo? Expliquem como chegaram a esse resultado. Resposta possível: 21 quadrados.

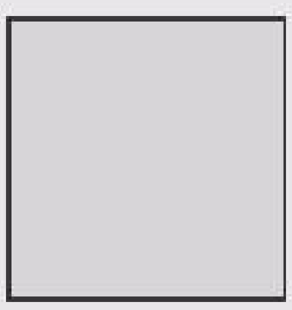
Troquem ideias e resolvam

Essas seções aparecem intercaladas às atividades. Nelas, as atividades propostas assumem um caráter dinâmico e de socialização, uma vez que possibilitam uma discussão em grupo (ou com a classe) em que ocorram troca de conhecimentos e descobertas entre os alunos.

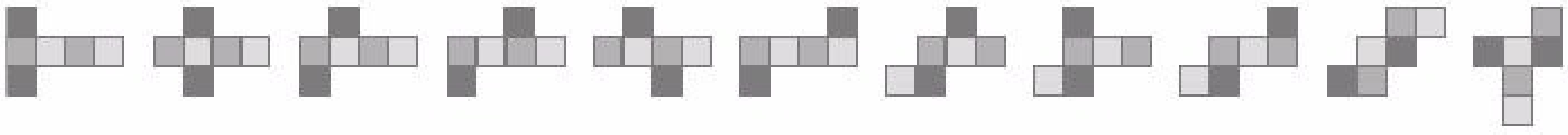
Um exemplo que ilustra essa seção pode ser visto na página 43 do volume do 6º ano.

Troquem ideias e resolvam

Junte-se a um colega e experimentem:



- Desenhem 6 quadrados em folhas avulsas e, usando a tesoura, obtenham recortes como este.
- Montem um cubo, utilizando os recortes. Usem fita adesiva para fechá-lo.
- Mudando a posição dos recortes quadrados, podemos obter diversas planificações do cubo. É possível obter 11 planificações diferentes.
- Desenhem, em uma folha quadriculada, todas as planificações possíveis de um cubo. Usem três cores em cada uma e pintem da mesma cor as faces opostas do cubo.



Exercícios complementares

Nessa seção, são propostos atividades e problemas que ampliam o estudo dos temas estudados, bem como questões de aprofundamento dos conteúdos tratados. Quando possível, eles estão inter-relacionados a outras disciplinas que aplicam conceitos da Matemática. Algumas atividades dessa sequência propõem situações novas que, para serem solucionadas, requerem que o aluno utilize conhecimentos já adquiridos em outras situações.

As atividades dessa seção poderão ser feitas em sala de aula ou em casa, individualmente ou em grupo, com intervenções adequadas sempre que necessário.

É importante ressaltar que a seção tem por função complementar as atividades desenvolvidas, contribuindo para que todos os alunos adquiram os conhecimentos fundamentais para cada ano, considerados imprescindíveis para a formação conceitual dos estudantes de Matemática.

Desafio

Na seção **Desafio** são propostas atividades de cálculo mental e estimativas, problemas não rotineiros, brincadeiras e jogos.

Os problemas não rotineiros costumam exigir dos alunos mais reflexão, suscitar discussões em sala de aula ou instigar a curiosidade e o interesse. As resoluções podem percorrer caminhos diferentes, às vezes surpreendentes. Observe as estratégias de seus alunos e socialize aquelas que achar interessantes.

Sugerimos que crie um programa "Problemas do Mês", por exemplo. Nesse caso, prepare-se para aceitar problemas que seus alunos trarão de outras fontes. Não se preocupe em ter as soluções prontas, pois haverá tempo para pesquisar e resolvê-los.

As atividades dessa seção são apropriadas para o trabalho em grupo.

Leitura

Nessa seção, tratamos de assuntos extracurriculares e interdisciplinares com temas que contam um pouco a história de pessoas que criaram a Matemática, os processos de construção dos conceitos matemáticos, lendas e fatos curiosos, além de mostrar as aplicações da Matemática nas demais ciências. Tratamos também de assuntos que envolvem Temas Transversais.

É conveniente planejar situações coletivas em que os estudantes possam expor e trocar interpretações sobre os textos lidos.

A seguir, algumas sugestões de abordagem dessa seção que poderão auxiliá-lo.

Solicite aos alunos que façam:

- Leitura em grupo na sala de aula, seguida de ampla discussão com a classe.
- Leitura em casa.
- Leitura complementada por anotações resultantes de pesquisas em revistas, jornais, livros e na internet e desenvolvimento de amplo painel em sala de aula ou exposição dos resultados das pesquisas realizadas.
- Leitura complementada por palestras, vídeos ou visitas a exposições e museus.
- Leitura e aprofundamento do tema tratado, fazendo um trabalho integrado com outras disciplinas.

Seguem comentários sobre alguns temas abordados ao longo dos quatro volumes desta coleção, nas seções **O que você já sabe?, Desafio, Leitura, Troquem ideias e resolvam** e **Investigue e explique**.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

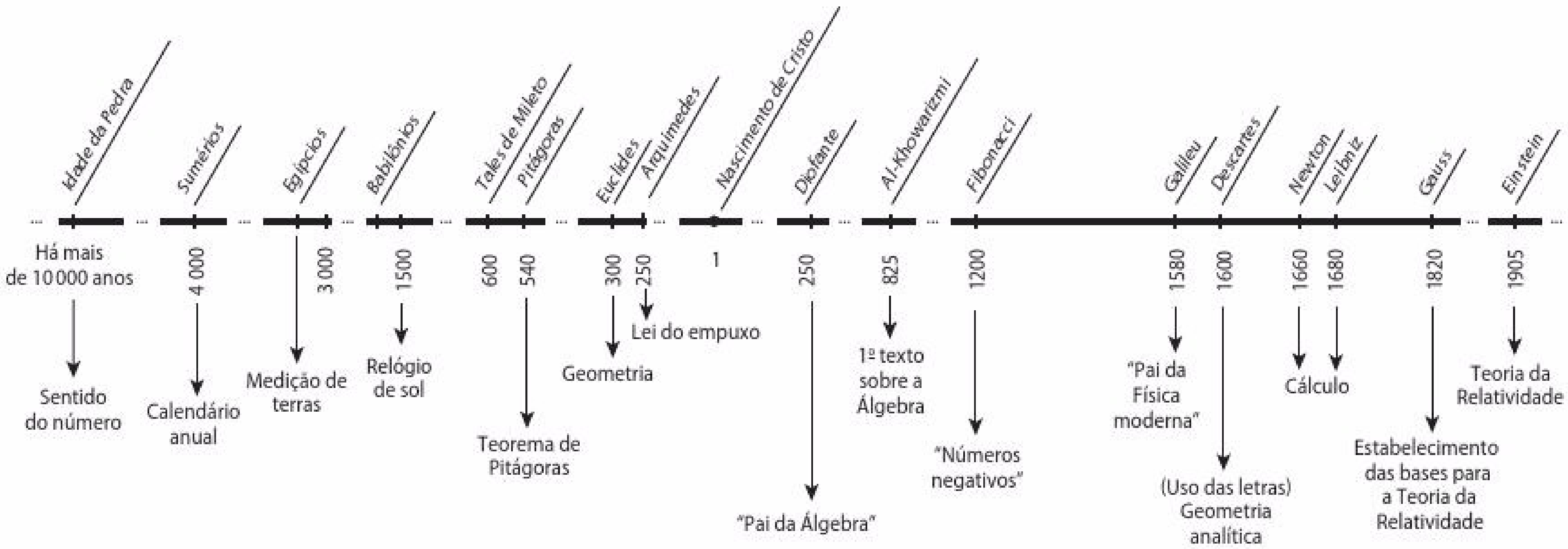
A Matemática faz parte da história do ser humano, pois foi construída por ele ao longo dos séculos e está viva e em constante transformação. Ao revelar a Matemática como construção do ser humano ao longo da história da humanidade, e não como um conhecimento pronto e acabado, mostrando as várias necessidades e preocupações de diversas culturas, em diferentes momentos históricos, são criadas condições para uma aprendizagem mais significativa por parte dos alunos.

Assim, a História da Matemática pode ser usada em sala de aula, destacando-se as relações existentes entre ela e as outras ciências. Por exemplo, na arte, na cultura e na vida dos povos, podemos observar:

– os conhecimentos de Geometria na época das construções de templos e pirâmides;
– o uso das razões áureas pelos gregos e na arte renascentista;
– a utilização da Astronomia para a elaboração de calendários e para o planejamento das viagens marítimas etc.

Dessa forma, a abordagem por meio da História da Matemática pode contribuir para motivar os alunos a observar o modo como se deu a evolução das ideias matemáticas e procurar reproduzir nas aulas como ocorreram as passagens dessa evolução. Afinal, a Matemática é construída continuamente pelos alunos a cada novo aprendizado.

Veja o desenvolvimento do conhecimento matemático na linha do tempo a seguir:



- **"É preciso contar: filhos, ovelhas, objetos"** – o ser humano inventou o número e um processo rudimentar de contagem – é o começo da Matemática.
- **Há 5000 anos – Egípcios** – As frequentes enchentes no rio Nilo fizeram com que fosse necessária a criação da medição de terras: é o começo da Geometria. Era uma Geometria preocupada apenas com as aplicações práticas.
- **Durante muitos séculos, a Aritmética** – a "ciência dos números" – **e a Geometria** – a "ciência das formas" – desenvolveram-se por meio de **padrões**, isto é, estudando as regularidades dos **fenômenos físicos**, das **formas** e das **ideias**, e foram os dois grandes eixos da Matemática.
- **Há mais de 3000 anos**, os babilônios dividiram o ano em 360 dias. Para os egípcios, um ano tinha 365 dias. O ano bissexto, a cada quatro anos, surgiu mais tarde no calendário egípcio.
- **1500 a.C.** – já se conhecia o relógio de sol: era possível medir o movimento aparente do Sol observando a sombra de um pedaço de madeira colocado verticalmente no chão.
- **600 a.C.** – **Tales de Mileto**, vendedor de azeite e grande matemático, foi o primeiro grego a pensar uma Geometria que trilhasse o **caminho da abstração**, das **demonstrações** e da **dedução lógica**.
- **540 a.C.** – **Pitágoras**, discípulo de Tales de Mileto, deixou grandes contribuições à Geometria e à Matemática, desde o fundamento das escalas musicais até o teorema de Pitágoras, além de uma descoberta que ele mesmo e a escola que ele fundou tentaram ignorar: o número irracional.
- **300 a.C.** – **Euclides**, de Alexandria, o grande mestre da Geometria, reuniu pela primeira vez os conhecimentos existentes sobre a Geometria e os organizou, estabelecendo seus axiomas e postulados e demonstrando seus teoremas, realizando, assim, o sonho de Tales de Mileto.
- **250 a.C.** – **Arquimedes**, de Siracusa, fez descobertas tão fantásticas e criativas que é considerado o "pai da Engenharia prática". Calculou o volume da esfera, formulou a Lei do empuxo, a Lei das alavancas, os métodos para determinar o centro da gravidade de um corpo, entre outros feitos.
- **Ano 1** – **Nascimento de Cristo**.
- **250** – **Diofante**, matemático grego, foi o primeiro a abreviar sistematicamente seu pensamento com símbolos matemáticos, por meio de equações. É considerado o "pai da Álgebra".
- **825** – **Al-Khowarizmi**, matemático árabe, além de divulgar a escrita numérica decimal, que usamos hoje, escreveu o primeiro texto sobre a Álgebra – uma Álgebra que já havia sido vislumbrada pelos egípcios há mais de 4000 anos.
- **1200** – **Fibonacci (Leonardo de Pisa)**, matemático italiano, desvendou os "mistérios dos números negativos". Admitiu a existência desses números como soluções de problemas que envolviam lucros e perdas.
- **1580** – **Galileu Galilei**, astrônomo e físico italiano, nasceu em Pisa. Sua grande contribuição à Ciência foi ter resgatado o método experimental, muito utilizado nos tempos de Arquimedes. É considerado por muitos o "pai da Física moderna". Seus estudos contribuíram decisivamente para as invenções do telescópio, do termômetro, do relógio de pêndulo etc. Fez grandes descobertas no campo da Astronomia e defendeu a teoria de Copérnico, na qual ele afirma que "a Terra não é o centro do universo".
- **1600** – **René Descartes**, filósofo e matemático francês, criou a notação de potência. Seu grande mérito foi unir a Aritmética, a Álgebra e a Geometria em um único campo de estudo – a **Geometria Analítica** –, o campo da representação dos números por meio de pontos em um plano, com a conversão de equações em gráficos e gráficos em equações. A partir disso, não houve mais limites para a produção do conhecimento matemático e da tecnologia: a Análise, o Cálculo, a Probabilidade, a Estatística, outras geometrias, a energia atômica, os computadores etc.
- **1660** – **Newton**, físico inglês, produziu uma das ideias mais fantásticas – o **Cálculo** –, que pela primeira vez permitiu medir e analisar os movimentos e as mudanças constantes de um mundo onde "nada escapa às mudanças". Elaborou as **Leis dos movimentos e da gravitação**, fundamentais na Física, e definiu a **aceleração** nos processos que envolvem movimentos físicos.
- **1680** – **Gottfried Leibniz**, matemático alemão, foi um gênio em várias áreas do conhecimento. Publicou sua versão do **Cálculo**, em 1684, sem conhecer os trabalhos de Newton.

- **1820** — **Carl Friedrich Gauss**, gênio alemão, dominou a Matemática do século XIX e, segundo alguns estudiosos, foi o "último gênio a dominar todas as matemáticas". Inovou na Análise e na Geometria e estabeleceu as bases para a **relatividade** e a **Teoria Atômica** do século XX. Inventou o telégrafo, junto com Weber, e cerca de dois anos antes de Morse. Encheu páginas e páginas de seus cadernos com uma Matemática de criação própria.
- **Por volta de 1900** — **Albert Einstein**, nascido na Alemanha, é considerado um dos maiores gênios da Física, "o fundador da Física moderna". Baseou-se nas ousadas ideias de Gauss e Riemann e produziu sua **Teoria da Relatividade** para descrever o universo real: "o tempo, o tamanho e o peso não são constantes, mas variam de acordo com a velocidade". Sugeriu, também, um universo com quatro dimensões, em que o **tempo** é a quarta dimensão. Criou a famosa equação da energia nuclear, $\mathbf{E = mc^2}$, em que "a energia **E**, em uma porção de matéria, é igual à massa **m** multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz, **c**".
- **Do final do século XIX até os dias de hoje** — o ritmo da evolução das ciências foi tão fantástico que fica difícil citar apenas alguns gênios, pois são muitos os grandes: Jules Henri Poincaré, que estudou sobre probabilidade e equações diferenciais; David Hilbert, que estudou espaços abstratos; Giuseppe Peano, que fundou o simbolismo formal; além de outros nomes, como Augustin Louis, Cauchy, Bernard Bolzano, Georg Cantor e Kurt Gödel, por exemplo.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Nesta coleção, a comunicação de ideias matemáticas foi feita de forma gradual e contextualizada. Diante das preocupações com a linguagem e a notação matemática, há a necessidade e a importância de os alunos compreenderem a notação científica, presente em textos e artigos que tratam de assuntos das ciências.

A necessidade de operar com números que, comparados com a unidade, são muito grandes ou muito pequenos e a inconveniência de representá-los com uma notação com muitas casas decimais levaram os cientistas a utilizar a notação científica. É uma forma de representação que usa um número entre 0 e 10 multiplicado por uma potência de base 10, que representa qualquer número real. Essa representação é vantajosa, pois ocupa menos espaço, elimina a necessidade de contar zeros e facilita os cálculos.

DESENHO GEOMÉTRICO

Além de sua contribuição no estudo da Geometria, o desenho geométrico é uma ferramenta importante para profissionais que, por exemplo, fazem projetos, desenham plantas e representam muitos objetos.

A construção de figuras geométricas requer o uso de materiais de desenho como régua, esquadro e compasso. Nesta coleção, são apresentadas diferentes atividades em que são necessários esses materiais, o que favorece a construção pelo aluno dos conceitos relacionados às noções básicas necessárias à aprendizagem de Geometria, além dos aspectos lúdicos que envolvem esse tipo de atividade.

CÁLCULO MENTAL, ESTIMATIVAS, ARREDONDAMENTOS E APROXIMAÇÕES

Os alunos podem se tornar aptos a efetuar rapidamente cálculos aproximados, medir, verificar se uma solução é razoável, examinar conjecturas ou tomar decisões, desenvolvendo habilidades de cálculo mental e recursos de estimativa.

Com isso, eles aprendem a conferir e validar suas respostas aos problemas. Às vezes, devido a erros aritméticos ou de outra natureza, os resultados de um problema matemático podem ser interpretados de forma equivocada.

Por meio de cálculo mental, estimativas, aproximações e arredondamentos, os alunos poderão rever os cálculos, constatar se as respostas são coerentes e decidir quando um resultado específico é suficientemente preciso para o objetivo desejado. Ao valorizarmos o hábito de verificar e controlar os resultados, podemos ajudá-los a ter confiança em suas possibilidades e a desenvolver a capacidade de perseverança na busca de resultados e uma postura crítica diante deles. Dessa maneira, conduzimos os alunos a um melhor desempenho em Matemática.

REGULARIDADES, PADRÕES NUMÉRICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS – GENERALIZAÇÕES

A importância do trabalho com padrões e com a observação de regularidades é reconhecida pela sua contribuição na construção do conceito de número, dos conceitos geométricos e na apreensão das propriedades numéricas e geométricas. O trabalho com regularidades também representa uma estratégia útil e difundida de resolução de problemas. Explorar sequências numéricas é um caminho para introduzir a Pré-Álgebra, assim como observar padrões geométricos facilita a compreensão dessa parte da Matemática devido ao apelo visual. Modificar e estender os padrões são atividades que ajudam no desenvolvimento da Álgebra.

À medida que os alunos buscam regularidades, eles aprendem a fazer suas próprias investigações sobre os conceitos matemáticos, ensaiam possíveis organizações e tentam verificar se elas são válidas em todos os casos.

A descoberta de regularidades, a análise e o uso de padrões tornam disponíveis aos alunos recursos que permitem formular leis gerais em um processo de busca de generalizações.

Nesta coleção, há uma preocupação em atender a todos esses aspectos, o que é feito de modo significativo ao longo dos quatro volumes. Atividades com esses objetivos serão encontradas em diferentes seções, em especial na seção **Investigue e explique**, e em atividades que envolvem a observação e a criação de padrões de repetição numéricos ou geométricos.

Essas atividades são bastante criativas e enriquecedoras na medida em que os alunos participam, criam seus próprios padrões e os associam a mosaicos e às sequências.

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

A resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática. Conceitos, ideias e procedimentos são abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. São situações que estimulam a curiosidade e a investigação, possibilitando que eles utilizem experiências anteriores e que adquiram novos conhecimentos ampliando, dessa forma, os que já possuem.

Resolver problemas é uma atividade complexa que envolve a coordenação de conhecimento, experiência anterior, intuição e confiança, entre outras habilidades. Não se reduz ao uso específico de um algoritmo pelo qual os alunos seguem regras preestabelecidas para chegar à solução. Envolve habilidades fundamentais como a capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler ideias matemáticas, interpretar significados e pensar de forma criativa.

Nesta coleção, são propostos problemas que fazem parte do dia a dia dos alunos: alguns de aplicação imediata dos conceitos e procedimentos abordados, outros relacionados a vários conceitos e procedimentos já estudados, além dos problemas não convencionais. Estes se caracterizam como diferenciadores e têm extrema relevância no processo de aprendizagem, pois desenvolvem a capacidade de planejar e elaborar estratégias variadas, permitem que os alunos aceitem as diversas soluções dos colegas e compreendam a lógica de outras soluções.

APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS

Nos diferentes meios de comunicação, são comuns assuntos que envolvem conceitos e procedimentos matemáticos, como problemas de economia, gastos com produção, despesas e lucros, comparação de preços cobrados em lojas e dados estatísticos.

Temas como Meio Ambiente, Saúde e Educação podem ser utilizados para envolver os alunos na discussão de problemas sociais e provocar sua mobilização em busca de soluções.

Muitas vezes, essas buscas incentivam os alunos a aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos, favorecendo a interdisciplinaridade.

Sabemos que a instrumentação para a vida depende, em uma democracia, de uma preparação para o pleno exercício da cidadania e, para isso, é necessário desenvolver a capacidade de analisar e interpretar dados estatísticos, possuir noções de Economia, resolver situações de conflito e ser capaz de tomar uma decisão. Nesse sentido, esta coleção é permeada por problemas que possibilitam essas discussões e o desenvolvimento dessas habilidades.

ATIVIDADES LÚDICAS E JOGOS

Atualmente, tem-se dado relevância às atividades lúdicas e aos jogos no ensino e na aprendizagem da Matemática. Nessas atividades, os alunos passam a lidar com regras que lhes permitem a compreensão do conjunto de conhecimentos veiculados socialmente, fornecendo-lhes novos elementos para apreenderem os conhecimentos futuros. Os jogos favorecem o aprendizado, pois sabemos que, ao brincar, os alunos apreendem a estrutura lógica do material e, desse modo, a estrutura matemática presente.

As atividades lúdicas e os jogos também favorecem o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Eles dão aos alunos a oportunidade de estabelecer um plano de ação para atingir determinados objetivos, executar jogadas segundo esse plano e avaliar a eficácia dessas jogadas nos resultados obtidos.

Algumas atividades lúdicas e alguns jogos realizados em grupo privilegiam o tratamento de aspectos afetivos e podem contribuir para a formação de atitudes que valorizam o trabalho coletivo.

Revisão cumulativa e testes

Seção apresentada ao final de cada unidade com o objetivo principal de rever conteúdos estudados em unidades anteriores, na própria unidade e até mesmo em anos anteriores. As questões são apresentadas em duas formas: discursivas e testes. A proposição de testes tem como objetivo principal preparar os alunos para os vários tipos de avaliação a que são submetidos, atualmente, nos sistemas educacionais municipais, estaduais e nacional.

O livro do aluno não traz as respostas desses testes, o que possibilita seu uso para avaliação. Essa coleção de respostas se encontra nas últimas páginas do Manual.

Blocos de conteúdo e orientações didáticas

Ao longo dos quatro livros da coleção, são abordados os blocos de conteúdos:

- Números e Operações;
- Geometria;
- Grandezas e Medidas;
- Álgebra;
- Estatística e Probabilidade.

Números e Operações

Qual é a idade da nossa linguagem numérica?

É quase impossível responder a essa pergunta. Existem muitos indícios de que ela é milhares de anos mais antiga que a linguagem escrita: a gênese do número perde-se nas idades pré-históricas.

Em algum momento da História, o ser humano aprendeu a **contar**, e foi a **contagem** que produziu extraordinários efeitos na evolução dos conhecimentos científico e não científico acumulados ao longo do tempo. Os números constituem ferramentas fundamentais nessa evolução.

As pessoas estão cercadas de números: número da cédula de identidade, horário de trabalho, estatísticas diversas, impostos, distâncias, velocidade do automóvel, recordes de jogos etc.

Os números são empregados em diversas situações e também têm diferentes finalidades. As principais funções dos números são: **contar**, **medir**, **ordenar** e **codificar**. Para responder à pergunta "Quantos alunos há na sala?", utilizamos um **número cardinal** depois de realizar a **contagem**. O resultado de algumas **medidas** também é expresso com números cardinais: distâncias entre cidades, capacidades etc.

Já a posição dos pilotos vencedores de uma corrida automobilística é indicada com **números ordinais**.

Os números são empregados ainda como **código** e, nesse caso, podem identificar pessoas ou objetos. Esses números não expressam necessariamente uma quantidade, são números convencionais. Por exemplo, os números das placas dos automóveis, os números de telefones, os números de documentos de identidade, os números das contas bancárias e os códigos de barras.

Ao longo dos quatro livros desta coleção, organizamos os números dentro de uma estrutura (não explícita) de conjuntos numéricos, partindo dos números naturais até chegar aos números reais. Da contagem resultaram os números naturais, da medição resultaram os números racionais e os reais e da formalização das operações surgiram os números inteiros, formando os quatro conjuntos numéricos que estudamos no Ensino Fundamental e Médio.

O objetivo é fazer com que os alunos percebam uma extensão do conceito de número, adquirido ao longo dos anos iniciais de estudo, e a ampliação que se faz de um conjunto numérico para outro. Nessas ampliações, mantêm-se as propriedades já estudadas em cada conjunto numérico, e cada um deles é inserido em outro, como subconjunto.

Com essa abordagem, esperamos que os alunos construam o conceito de número, compreendam o Sistema de Numeração Decimal, construam os algoritmos, desenvolvam as habilidades com o cálculo escrito, o cálculo mental e o uso da calculadora, aprendam a estimar resultados e desenvolvam habilidades para resolver problemas.

Os procedimentos de cálculo permitem que os alunos os percebam como ferramentas na resolução de problemas, enquanto as atividades numéricas proporcionam ocasiões para o desenvolvimento de algumas estratégias gerais.

Esses temas são ampliados quanto à abordagem e à profundidade ao longo dos quatro livros da coleção. Alguns deles serão sistematizados até o final do Ensino Fundamental.

Os itens a seguir fornecem elementos para poder esclarecer os alunos quanto à importância do tema e das habilidades numéricas, geométricas e algébricas à medida que forem adquiridas. O objetivo é levar os alunos a ampliar as aplicações dessas habilidades no dia a dia.

O estudo das propriedades das operações propõe levar os alunos a descobrir as regularidades, em procedimentos (compor e decompor, arredondar, estimar) e na aplicação de estratégias de cálculo mental e escrito, sem dar ênfase à nomenclatura.

Ainda nesse tema, tratamos das operações com números inteiros, números racionais nas formas fracionária e decimal, números irracionais na forma de radical, sugerindo-se que leve em conta o ritmo e as experiências dos alunos.

Os problemas propostos nesta coleção são variados e exploram os diferentes significados das operações, além de possibilitar o reconhecimento das relações entre os diferentes tipos de números e entre as diversas operações.

Além do cálculo escrito, que favorece a compreensão dos algoritmos e das propriedades, destaca-se o cálculo mental, que está diretamente ligado a aspectos da vida cotidiana, assim como a estimativa, que permite fazer previsões e tomar decisões.

Nessas situações, é conveniente que os alunos saibam usar outros recursos, como as calculadoras, para auxiliá-los na análise e checagem de resultados e na resolução de problemas com dados reais que, de modo geral, são mais complexos, pois nem sempre trabalham com valores exatos. Pode-se, desse modo, usar o tempo que seria destinado aos cálculos para análise e discussão dos resultados.

Antecipando a introdução da linguagem algébrica, para que os alunos se sintam familiarizados com o sentido dos números e com o significado das operações, são propostas situações-problema para que eles identifiquem as operações estudadas, apliquem propriedades e determinem o elemento desconhecido, de modo que expressem a relação entre as operações.

Por exemplo:

$72 - 13 = \mathbf{n}$ quer dizer o mesmo que $13 + n = 72$ e

$21 : 7 = \mathbf{n}$ quer dizer o mesmo que $7 \cdot n = 21$.

Geometria

A Geometria é, inicialmente, o conhecimento imediato da nossa relação com o espaço. Começa com a visão e caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido, e os problemas colocados por esse conhecimento nos levam à construção gradativa do saber geométrico.

Esse bloco está estruturado de modo a articular percepção e concepção, construção e representação, considerando a importância de uma inter-relação desses aspectos.

São realizadas atividades de manipulação, que se iniciam com formas tridimensionais.

Observando e experimentando objetos do mundo físico, idealizam-se esses objetos como formas geométricas. Descobrem-se relações e adquire-se um sentido espacial ao construir, desenhar, medir, visualizar, comparar, transformar e classificar formas geométricas.

As atividades geométricas proporcionam contextos adequados para o desenvolvimento de habilidades, procedimentos e estratégias de caráter geral, a partir:

- da percepção espacial, que é a habilidade de se orientar no espaço e coordenar diferentes ângulos de observação de objetos no espaço;
- da habilidade de observação do espaço tridimensional e da elaboração dos meios (representações) de se comunicar a respeito desse espaço;
- de habilidades do raciocínio lógico e de argumentação, buscando responder a questões como "o que acontecerá se...", que ajudam a aprender a analisar um argumento e a reconhecer os argumentos válidos e os não válidos no contexto das formas geométricas e, por extensão, nos problemas da vida diária;
- de habilidades de desenho e representações geométricas, utilizando modelos para visualizar certas propriedades, analisar e resolver problemas. As interpretações geométricas podem contribuir para que se entenda melhor uma representação abstrata (simbólica).

A integração e a aplicação da Geometria em outros campos do conhecimento permitem instigar ideias e propor aplicações práticas para que possamos enfrentar problemas reais, em geral, de natureza interdisciplinar. O trabalho feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, escultura e artesanato possibilitará que os alunos estabeleçam conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

O estudo de Geometria por meio das **construções geométricas** é desenvolvido a partir da resolução de problemas e com o uso de vários instrumentos e operações. A construção de figuras geométricas requer a manipulação de materiais de desenho como régua, esquadro e compasso.

É possível que essa manipulação subsidie a construção dos conceitos da Geometria, não de uma maneira axiomática, mas a partir de uma proposta que se inicia empiricamente — medindo, experimentando, analisando — até chegar a um trabalho que exige um raciocínio lógico-dedutivo.

É uma proposta que não implica uma falta de rigor conceitual, mas que tem como pressuposto básico que o conhecimento é adquirido em uma elaboração e reelaboração constante dos conceitos, como revela a própria história da Geometria.

Também é abordada a Geometria das transformações, que trata das translações, rotações, reflexões, enfim, dos movimentos, das isometrias e das homotetias.

O conceito de **transformação geométrica** é trabalhado com ênfase na intuição e na verificação experimental de algumas conjecturas. O trabalho proposto não se resume à transmissão de postulados, teoremas e definições logicamente organizados, apresentados de forma dogmática, sem possibilidade de discussão; ele é significativo e funcional no dia a dia.

Grandezas e Medidas

Medida é uma importante aplicação de número. Medir é uma habilidade que se origina nas atividades comuns do ser humano e está presente no pensamento matemático. Medir **grandezas** tem por objetivo quantificar o mundo que nos rodeia.

As atividades com medidas propostas nesta coleção são desenvolvidas por meio de relações com a proporcionalidade, os conceitos geométricos, as noções numéricas e as representações gráficas, vinculando, assim, Grandezas e Medidas com Números, com Geometria e com Estatística e Probabilidade, de modo simultâneo.

O trabalho com medidas também é desenvolvido de forma a ampliar a noção de números. Os números racionais (na forma decimal ou fracionária) estão ligados às medidas. As frações surgiram há muitos séculos para expressar medidas que não podiam ser indicadas por números naturais.

Para os pitagóricos, as frações eram apenas relações de tamanho entre grandezas de mesma espécie, pois consideravam números apenas os inteiros. Acreditavam que, dadas duas grandezas quaisquer, sempre seria possível encontrar uma unidade de medida que coubesse um número inteiro de vezes nas duas grandezas, ou seja, para eles só existiam grandezas comensuráveis. Mais tarde, descobriram que existiam grandezas incomensuráveis, não importando até que ponto fosse pequena a unidade de medida.

Os matemáticos da Antiguidade foram capazes de fazer medições de grandes distâncias, semelhantes às que são realizadas hoje por cientistas com seus poderosos e sofisticados instrumentos, obtendo resultados que surpreendem por sua exatidão. Para isso, era utilizada uma ideia simples, porém brilhante: a semelhança de triângulos.

Desde o momento em que o ser humano sentiu a necessidade de efetuar medidas, tentou estabelecer sistemas que possibilitassem medir comprimento, massa e volume.

De início, não se media, apenas comparavam-se volumes, comprimentos e massas. Com a evolução da humanidade, as necessidades foram mudando e buscou-se uma padronização de unidades, caracterizando o desenvolvimento da noção de medir.

Para unidades de comprimento usava-se o "pé", a "polegada" e a "jarda", unidades que na época derivavam do tamanho das partes do corpo do rei de cada região.

Essas unidades de medida não eram comuns a todos: o pé do rei de determinado lugar podia ser maior ou menor que o pé do rei de outro lugar. Isso acarretava uma série de dificuldades que prejudicavam tanto o comércio entre povos como as comparações de dados científicos já conhecidos na época. Começava-se, então, a pensar em unidades de medidas que fossem bem definidas e reconhecidas mundialmente.

Surge dessa forma a necessidade de se trabalhar com unidades convencionais relacionadas ao problema da comunicação. Para efetuar uma medição, escolhe-se uma unidade de medida de mesma natureza da grandeza que se deseja medir. Somente grandezas de mesma natureza são comparadas em situações de medição.

Ao construírem as unidades padrão, os alunos precisam perceber que certos comprimentos, ou outros tipos de medida, não são mensuráveis com apenas uma única unidade e que a partir de uma poderão ser criadas outras. Assim, eles começarão a perceber a adequação das unidades de medida às grandezas que se deseja medir e a descobrir as equivalências entre as unidades criadas em um mesmo sistema de medida.

As atividades propostas também procuram explicitar as diferenças de natureza entre medidas de comprimento, massa, capacidade, tempo, superfície e volume e levá-los a justificar a necessidade da unidade padrão. Ao apresentar as unidades padrão para essas grandezas, são propostas situações que possibilitam aos alunos estabelecerem relações entre unidades de medida e empregarem múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais. Procure enfatizar apenas as unidades mais comuns no dia a dia dos alunos.

As habilidades para o uso de instrumentos apropriados para medir diversas grandezas vão se refinando gradativamente.

Álgebra

A Álgebra caracteriza-se pelo conjunto de conceitos, propriedades e procedimentos que empregam letras e expressões literais para estabelecer relações e realizar operações.

Nas expressões algébricas, as letras desempenham funções muito diferentes: podem representar um número qualquer, um número desconhecido, uma variável ou uma relação entre conjuntos de números ou símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. As funções das expressões algébricas estão relacionadas com as várias interpretações possíveis da Álgebra:

- Álgebra como generalização da Aritmética;
- Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas;
- Álgebra como estudo de relações entre quantidades;
- Álgebra como estudo das estruturas.

O uso das letras facilita pensar em ideias matemáticas e permite representar, para qualquer número, ideias ou relações que valem para números específicos. Por exemplo, sabemos que, se $10 + 6 = 16$, então $16 - 6 = 10$ ou $16 - 10 = 6$. Se usarmos **a**, **b** e **c** para representar quaisquer números, poderemos dizer que, se $a + b = c$, então $c - b = a$ ou $c - a = b$.

Em Aritmética, buscamos respostas numéricas particulares; em Álgebra, procuramos estabelecer procedimentos e relações e expressá-los em uma forma geral.

Na concepção da **Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas**, o tema central é a resolução de equações. Nesse caso, as letras são incógnitas específicas.

Em seu manual de Álgebra *Aritmética universal*, Isaac Newton (1642-1727) escreveu: "O idioma da Álgebra é a equação. Para resolver um problema referente a números ou relações abstratas de quantidades, basta traduzir o tal problema, do inglês ou de outra língua, para o idioma algébrico".

No entanto, essa tradução não é tão simples, uma vez que exige uma explicitação prévia das relações matemáticas entre a incógnita e os demais dados do problema. Para resolvê-lo, depois de obtida a equação, é preciso aplicar sobre ela determinado algoritmo de cálculo para chegar ao valor da incógnita.

Por exemplo: "João tem 46 moedas. Se o dobro da quantidade de moedas de Mariana, adicionado à quantidade de moedas de João, for igual a 76, quantas moedas terá Mariana?".

Ao usarmos uma letra para representar a quantidade de moedas de Mariana, **x**, por exemplo, temos a equação:

$2x + 46 = 76$

Na concepção da **Álgebra como estudo de relações entre quantidades**, as letras não são incógnitas. Elas descrevem certos aspectos de um objeto ou um fenômeno, possibilitando compreender seu funcionamento ou mesmo deduzir novas propriedades.

Nessa interpretação, as letras assumem o sentido completo de variável, isto é, as variáveis "variam". Existem as noções de *variável independente* e *variável dependente*, e a relação entre elas pode ser uma função.

Por exemplo:

- a fórmula da área de um retângulo ($A = b \cdot h$) é uma relação entre as variáveis comprimento e largura;
- na função representada pela expressão $y = 5x - 3$, o valor de **y** depende de **x**.

Na concepção da **Álgebra como estudo das estruturas**, as letras são consideradas símbolos arbitrários de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Ou seja, elas constituem elementos pertencentes a estruturas algébricas, tais como grupos, anéis ou corpos, que fundamentam a teoria da Álgebra.

Nesta coleção, a Álgebra é explorada desde o 6º ano.

Estatística e Probabilidade

A importância de conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória é reconhecida hoje nos mais diversos campos, das pesquisas científicas e sociais ao mundo dos negócios, constituindo, assim, uma ferramenta para outras disciplinas.

Esse eixo de conteúdos permite que os professores tragam para a sala de aula o cotidiano presente nos diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e internet, e na vida dos cidadãos.

É possível que os alunos se sintam mais motivados a estudar as noções básicas de Estatística, já que a maioria dos assuntos referentes a esse bloco de conteúdos é veiculada pelos meios de comunicação e faz parte do cotidiano deles.

Como o mundo que nos rodeia é apresentado por meio de informações estatísticas, é indispensável que cada cidadão saiba selecioná-las e interpretá-las para desenvolver a capacidade de análise, crítica, tomada de decisões e intervenções. Disso depende a possibilidade de se obter um avanço na formação para a cidadania.

Com esse tema, esperamos subsidiar os alunos com uma pequena bagagem de conhecimentos para que possam fazer uma leitura mais crítica dos artigos que, muitas vezes, se utilizam da Estatística para manipular dados, induzindo o leitor a conclusões que interessam ao seu autor.

Nesse trabalho, são empregados gráficos e tabelas de textos jornalísticos e textos próprios para a formulação de questões e problemas.

Esse bloco de conteúdos envolve também possibilidades e chances, como elementos do estudo de Probabilidade, além de problemas de contagem que englobam o princípio multiplicativo.

Os problemas de contagem objetivam levar os alunos a lidar com situações que envolvem diferentes tipos de agrupamentos, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo.

Problemas que envolvem possibilidades são trabalhados desde o volume 6, como, por exemplo, o problema dos apertos de mãos, em que os alunos são levados a quantificar as possibilidades.

Com relação ao estudo de Probabilidade, a principal finalidade é a de que os alunos compreendam que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se pode identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da chance de ocorrência de um deles.

O ensino das noções sobre Probabilidade pode ser realizado mediante uma metodologia heurística e ativa, por meio de experimentação, como, por exemplo, lançando dados e moedas.

O que se pretende nessa etapa do Ensino Fundamental é que o conceito de Probabilidade seja entendido como a razão, nesta ordem, entre o número de resultados possíveis de um experimento e o número de todos os resultados possíveis, ao se realizar um experimento aleatório (espaço amostral).

A Teoria de Probabilidades é um assunto difícil, do ponto de vista teórico e do ponto de vista técnico.

Por causa das dificuldades inerentes ao estudo de Probabilidades, fazemos uma sugestão de trabalho em sala de aula com o objetivo de que as pessoas comecem a "pensar probabilisticamente".

Avaliação em Matemática

Avaliar significa ir além da busca de resultados, é um **processo** de observação e verificação de como os alunos apreendem os conhecimentos matemáticos e do que pensam sobre a Matemática.

Como parte do próprio processo de ensino/aprendizagem, o objetivo da avaliação é aprimorar a qualidade dessa aprendizagem. Ela deve ser contínua, dinâmica e, com frequência, informal, para que, por meio de uma série de observações sistemáticas, se possa emitir um juízo de valor sobre a evolução do aluno no aprendizado da Matemática e tomar as atitudes necessárias.

A avaliação do desempenho dos alunos tem como finalidades:

a) Em relação ao aluno:

- verificar e mensurar seu conhecimento matemático;
- acompanhar o desenvolvimento de seus procedimentos matemáticos;
- observar sua postura diante da Matemática;
- possibilitar a reflexão sobre seus êxitos e dificuldades.

b) Em relação ao professor:

- colher informações para orientação e tomada de decisões em relação à atuação docente;
- identificar as áreas em que alguns alunos apresentam dificuldades e reorientar o trabalho.

A avaliação centrada basicamente em provas, nas quais os alunos devem mostrar sua destreza nas técnicas adquiridas e a capacidade de memorizar regras, fatos e definições, tem função seletiva e promocional e não fornece todas as informações sobre a aprendizagem efetiva dos alunos.

Avaliar não é só construir um instrumento de verificação, mas também transformá-lo em registro adequado para acompanhar e comprovar o grau de aquisição da aprendizagem, tornando-se uma referência para a reflexão e a conscientização dos alunos e dos professores. Segundo essa concepção, destacamos os componentes da avaliação: conceitos matemáticos, procedimentos matemáticos, atitudes e raciocínios.

Componentes da avaliação	Espera-se que os alunos
Conceitos matemáticos	• nomeiem, identifiquem e definam os conceitos; • reconheçam os diversos significados e interpretações dos conceitos e os diferenciem; • identifiquem as propriedades; • apliquem os diversos conceitos em outras situações; • busquem interdependências entre conceitos.
Procedimentos matemáticos	Comunicação: • utilizem as mais variadas formas para representar situações matemáticas; • interpretem e utilizem diferentes linguagens: numérica, geométrica, gráfica e algébrica; • empreguem vocabulário matemático e notações para representar ideias e descrever relações. Algoritmos de cálculo: • estimem e comparem resultados; • utilizem os algoritmos tradicionais de cálculo; • reconheçam quando um algoritmo é adequado e eficaz. Construções geométricas: • estimem e comparem medidas; • utilizem de maneira correta os instrumentos de medida habituais; • realizem construções geométricas; • entendam os conceitos sobre os quais se apoia um processo de construção geométrica; • saibam quando aplicar as construções geométricas.

Componentes da avaliação	Espera-se que os alunos
Atitudes	Apreciação da Matemática: • reconheçam e valorizem os conhecimentos matemáticos para representar, comunicar ou resolver diferentes situações da vida cotidiana; • desenvolvam confiança na própria capacidade para resolver problemas matemáticos; • demonstrem curiosidade e interesse para resolver situações matemáticas; • desenvolvam a perseverança na busca de soluções; • demonstrem interesse em aprimorar a apresentação de seus trabalhos, de modo que facilitem a análise e a compreensão; • se interessem pelas diferentes estratégias de resolução de problemas; • desenvolvam a criticidade com relação ao seu trabalho e ao de seus colegas; • valorizem o trabalho coletivo.
Raciocínios	• realizem especulações; • busquem regularidades na ação existente por ocasião da apresentação ou construção de um conhecimento matemático; • analisem situações matemáticas e sintetizem fatos já analisados; • apliquem o método indutivo com o objetivo de buscar regularidades e generalizações; • apliquem o método dedutivo para determinar ou verificar resultados significativos; • formalizem conhecimentos por meio de evoluções dos códigos de linguagem criados ou construídos como um processo final na aquisição ou construção de um conhecimento.

E como avaliar?

PROCEDIMENTOS PARA COLETAR DADOS

É muito difícil observar diariamente todos os alunos de maneira sistemática. Porém, é necessário fazer observações com regularidade. Os registros precisam ser compreensíveis e ser mais do que um grupo de qualificações numéricas ou listagens. Podem incluir anotações breves ou amostras de trabalhos dos alunos.

O procedimento de registro precisa ser simples, rápido e ter como base:

- as respostas dos alunos, quando eles manifestarem de forma implícita ou explícita suas certezas, dúvidas e erros;
- as observações das ações e discussões efetuadas durante as tarefas individuais, em grupos pequenos ou com a classe toda;
- a análise de provas, tarefas feitas em casa, diários e trabalhos escritos.

No processo de construção do saber matemático, espera-se que os alunos façam inferências sobre o que observam, formulem hipóteses e não necessariamente encontrem uma resposta certa. Deve-se considerar na avaliação o processo, e não apenas o seu resultado. Nesta coleção, as aberturas e as seções **Desafio**, **Troquem ideias e resolvam**, **Investigue e explique** e **Revisão cumulativa e testes** podem proporcionar elementos para a avaliação continuada.

Instrumentos

A avaliação não pode se apoiar em um só instrumento ou em uma só técnica. O modo de avaliação pode ser escrito ou oral. As atividades que os alunos realizam proporcionam um amplo rol de possibilidades para demonstrar sua iniciativa e capacidade e, por isso, é conveniente que sejam utilizadas como fonte de informações para avaliá-los.

Tipos de instrumentos

- exercícios, problemas, pesquisas, resumos, esquemas, cadernos de classe;
- atividades extraclasse, como trabalhos em casa, projetos, dramatizações e exposições em feiras de ciências;
- provas de tipos variados com respostas discursivas curtas, abertas ou testes de múltipla escolha.

Conteúdos propostos em cada ano

Apresentaremos mais adiante os conteúdos, por unidades e expectativas de aprendizagem. Você encontrará também as seções:

Orientações didáticas

Nas orientações didáticas, sugerimos alguns cuidados que poderão ser tomados na introdução dos temas tratados em cada unidade. Também apontamos dificuldades que poderão ocorrer durante o processo de aprendizagem dos conteúdos propostos e sugerimos algumas alternativas que poderão auxiliá-lo a superá-las, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas.

Textos de aprofundamento

Reunimos textos relacionados à Matemática no dia a dia, à história da Matemática, à fundamentação teórica, à aplicação em outras disciplinas e a temas da Matemática que serão tratados formalmente em níveis mais avançados.

Os textos são subsídios que poderão complementar as suas aulas, instigando a curiosidade e despertando o interesse dos alunos.

Comentários e resolução de atividades

Neste espaço, são resolvidas e comentadas as atividades das seções **Investigue e explique**, **Troquem ideias e resolvam** e **Desafio**, destacando propostas e alguns desdobramentos que poderão ocorrer a partir das propostas apresentadas: problemas parecidos, outros problemas, investigações, generalizações e fórmulas. Fica a critério do professor decidir pelo aproveitamento ou não das situações sugeridas.

Observe todas as sugestões apresentadas pelos alunos. Converse com a classe sobre os vários caminhos que existem na solução de um problema. Isso mostrará a eles que a criatividade e a imaginação não são limitadas, sobretudo em Matemática. A percepção e a consciência da liberdade de pensamento em Matemática poderão melhorar o desenvolvimento do raciocínio de seus alunos.

Sugestões de atividades complementares

Nesta seção são propostos, como sugestões complementares, problemas não rotineiros, jogos e quebra-cabeças que poderão ser utilizados de acordo com a disponibilidade de tempo.

Indicações para a formação continuada do professor

BALDINO, R. R. *Ensino de Matemática ou educação matemática? Temas e debates*. Blumenau, SBEM, vol. IV, n. 3, 1991.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *Filosofia da Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais – Introdução. Temas transversais, 3º e 4º ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

____. *Parâmetros curriculares nacionais – Matemática, 1º e 2º ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1997.

____.*Parâmetros curriculares nacionais – Matemática, 3º e 4º ciclos.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

BUSHAW, D. *Aplicações da Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARRAHER, T. N. *Aprender pensando*. 19. ed. São Paulo: Vozes, 2008.

Coleção Matemática sem problemas. Rio de Janeiro/São Paulo: José Olympio/Melhoramentos, 1972.

D'AMBROSIO, Beatriz S. *Conteúdo e metodologia na formação de professores.* In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática:* investigando e teorizando a partir da prática. 1. ed. São Paulo: Musa Editora, 2005.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da resolução da Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

DANTZIG, T. *Número*: a linguagem da ciência. Trad. Sérgio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVIS, P. J. *A experiência matemática*. Trad. João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

____; HERSH, R. *O sonho de Descartes*. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação matemática*: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. As concepções de educação algébrica. In: *Proposições*. São Paulo: Cortez, v. 4, n. 1 (10): 39-54, mar. 1993.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. (Org.). *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Unicamp, 2001.

FIORENTINI, D. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*. Revista Zetetiké, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. São Paulo: Globo, 1970.

IFRAH, G. *Os números*: a história de uma grande invenção. 5. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1992.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1998.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, Romulo & GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática.)

LOPES, M. L. L.; NASSER, L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

____. *Matemática e realidade*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1987.

MOISE, E.; DOWNS, F. L. *Geometria moderna*. Trad. Renate Watanabe. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

MURRIE, Z. F (Org.). *Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/INEP, 2002.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 1988.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.)

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática* – pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática*: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

____. *Números naturais e operações*. São Paulo: Melhoramentos, 2013. (Coleção Como eu ensino.)

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciências, 1978.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PROPOSTAS CURRICULARES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA, 1º grau dos vários estados do Brasil.

SACRISTAN, J. G. *O currículo*: uma reflexão sobre a prática. Trad. Ernani F. da F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências matemáticas*. São Paulo: SE/CENP, 1984.

____. *Prática pedagógica*: Matemática 1º grau. São Paulo: SE/CENP, 1993. v. 4.

SOARES, M. G. (Coord.). *Geometria experimental*. São Paulo: MEC/IMECC/PREMEN/SE/CENP, 1980.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *A Educação Matemática em Revista*. Publicações de 1993 a 2005.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática*. Publicações de 1988 a 2005.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. de S. V. *Álgebra*: das variáveis às equações e funções. 2. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 1996.

STRUIK, D. J. *História concisa das Matemáticas*. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

TAHAN, M. *As maravilhas da Matemática*. 6. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

____. *Matemática divertida e curiosa*. 24. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

TINOCO, L. A. A. (Coord.). *Razões e proporções*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1996.

Centros de formação continuada

Caem – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Rua do Matão, 1010, Bloco B, sala 167, Cidade Universitária, São Paulo/SP, CEP 05508-900, tel./fax: (0xx11) 3091-6160; http://www.ime.usp.br/caem; e-mail: caem@ime.usp.br

Cempem – Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Rua Bertrand Russell, 801, Cidade Universitária, Campinas/SP, CEP 13083-970, tel.: (0xx19) 3788-5587; http://www.cempem.fae.unicamp.br; e-mail: cempem@grupos.com.br

CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Secretaria de Estado da Educação. Praça da República, 53, térreo, sala 63, São Paulo/SP, CEP 01045-903, tel.: (0xx11) 3237-2115; http://cenp.edunet.sp.gov.br; e-mail: cenpgabinete@edunet.sp.gov.br

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento de Educação. Diretoria de Ações Educacionais. Coordenação Geral dos Programas do Livro, SBS, Quadra 2, Bloco F, Edifício FNDE, sala 1401, Brasília/DF, CEP 70070-929, tels.: (0xx61) 3966-4919/4915; http://www.fnde.gov.br; e-mail: cac@fnde.gov.br

Gepem – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Instituto de Educação da UFRRJ, sala 30, Rod. BR 465, km 7, Seropédica/RJ, CEP 23890-000, tel./fax: (0xx21) 2682-1841; http://www.gepem.ufrrj.br; e-mail: gepem@ufrrj.br

LEM – Laboratório de Ensino de Matemática. Universidade Estadual de Campinas. Caixa Postal 6065, Campinas/SP, CEP 13083-970, tel.: (0xx19) 3521-6017; http://www.ime.unicamp.br; e-mail: lem@ime.unicamp.br

MEC – Secretaria de Educação Básica. Esplanada dos Ministérios, Bloco L, 5º andar, sala 510, Brasília/DF, CEP 70047-901, tel.: (0xx61) 2104-8612/8617, fax: (0xx61) 2104-9269; http://portal.mec.gov.br

Centro de Referência Virtual – Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. Avenida Amazonas, 5855, CEP: 30510-000, tel: (0xx31) 3379-8429; http://crv.educacao.mg.gov.br; e-mail: crv@educacao.mg.gov.br

Proem – Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Rua Marquês de Paranaguá, 111, Consolação, São Paulo/SP, CEP 013013-050, tel.: (0xx11) 3256-1622 – ramal 215; http://www.proem. pucsp.br; e-mail: proem@pucsp.br

Projeto Fundão – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Caixa Postal 68530, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22295-900, tel.: (0xx21) 2562-7511; http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica; e-mail: pfundao@im.ufrj.br

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Universidade de Brasília. *Campus* Darcy Ribeiro, Caixa Postal 4332 - AC UNB, CEP 70904-970; http://www.sbem.com.br; e-mail: sbem@sbem.com.br

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Estrada Dona Castorina, 110, sala 109 - Fone: (0xx21) 2529-5095, Rio de Janeiro/RJ, CEP 22460-320; http://www.sbm.org.br

____ Revista Professor de Matemática Online (PMO); http://pmo.sbm.org.br/pmo-h.html

____ Revista Professor de Matemática; http://rpm.org.br/

____ Coleção Explorando o Ensino; http://rpm.org.br/

Sites

- www.apm.pt. *Site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal, um grupo ativo de discussões sobre o ensino da Matemática.
- www.eduquenet.net/jogosmatematicos. Portal com jogos matemáticos.
- www.history.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html. Este *site* apresenta biografias de matemáticos.
- www.hsw.uol.com.br. *Site* que explica como tudo funciona. Além de texto, há infográficos e animações que analisam cada tópico de maneira clara, simples e objetiva.
- www.ibge.gov.br. *Site* do IBGE que apresenta seções voltadas ao uso de estatísticas.
- www.inep.gov.br/basica/saeb/matrizes/matematica. O *site* do Inep traz a Matriz de Referência de Matemática.
- www.pt.khanacademy.org. O *site* é estruturado para usuários individuais: crianças com conhecimentos iniciantes de Matemática, estudantes da educação básica, estudantes universitários, concurseiros e para professores usarem na sala de aula, acompanhando o progresso de cada aluno.

UNIDADE 1 Números reais e potências

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Potência de um número real Potência com expoente inteiro positivo Potência com expoente inteiro negativo Propriedade das potências Multiplicação de potências com bases iguais Divisão de potências com bases iguais Potência de potência Potência de um produto indicado Potência de um quociente indicado **2. Potências de base 10** Simplificando a escrita numérica Notação científica As potências e as medidas na informática **Leitura:** Grande ou pequeno? Depende	Espera-se que os alunos: • resolvam situações-problema que envolvam números reais e, a partir delas, consolidem, ampliem e construam os significados da potenciação; • compreendam potência como produto reiterado de fatores iguais e atribuam significados à potência de expoente 1, expoente 0 e expoente negativo; • construam procedimentos de cálculo de potências de números reais com expoentes inteiros, utilizando suas propriedades; • identifiquem e utilizem a notação científica na escrita de números com muitos zeros (números extremamente grandes ou extremamente pequenos); • reconheçam e relacionem as unidades de medidas na informática, como *bits*, *kilobytes*, *megabytes* e *gigabytes*.

Orientações didáticas

Nesta unidade, é retomado o estudo de potências com o objetivo principal de promover uma ampliação do conceito já apropriado sobre o assunto, explorando situações que envolvam potências de base qualquer, diferente de zero, com expoentes inteiros positivos e negativos.

Essas potências são amplamente utilizadas e aplicadas em diversas áreas de estudo, como Matemática Financeira e Estatística. Também está presente nas áreas das Ciências Biológicas, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento de experimentos laboratoriais, em que são utilizadas potências de base dez com expoentes negativos, facilitando registros de aferições de estruturas microscópicas.

Além do uso das potências nesses campos, elas também podem ser aplicadas em informática. Ao explorar alguns assuntos ligados a essa área, espera-se que os alunos reconheçam que a Matemática faz parte do saber científico e tecnológico e se faz necessário que eles estejam familiarizados com algumas ideias básicas da linguagem e dos conceitos utilizados em informática, para que possam compreender informações.

Texto de aprofundamento

Notação científica

Para facilitar a escrita e os cálculos que envolvem números com muitos zeros, podemos escrevê-los sob uma forma-padrão chamada **notação científica**.

Os números expressos em notação científica são escritos como o produto de um número entre 1 e 10 por uma potência de base 10, ou seja:

(número entre 1 e 10) · (potência de 10)

Por conveniência, escolhemos um número entre 1 e 10. Se não houvesse essa restrição, haveria muitas maneiras de escrever o número utilizando potência com expoente inteiro.

Essa notação tem aplicação em diversos campos, entre os quais Economia, Medicina, Astronomia, Biologia, Química, Física, Estatística e Geografia.

Veja, a seguir, alguns exemplos de aplicação da notação científica:

- na **Economia**:
  "O Brasil produz cerca de $1{,}3 \cdot 10^6$ barril de petróleo por dia."
  $1{,}3 \cdot 10^6$ corresponde a $1{,}3 \cdot 1\,000\,000$, ou seja, 1 300 000.
- na **Medicina**:
  "Uma análise de sangue de um paciente apresentou estes resultados:
  – glóbulos vermelhos: $4{,}5 \cdot 10^6$ por mm^3 de sangue;
  – glóbulos brancos: $8 \cdot 10^3$ por mm^3 de sangue."
  $4{,}5 \cdot 10^6$ correspondem a $4{,}5 \cdot 1\,000\,000$, ou seja, 4 500 000, e $8 \cdot 10^3$ correspondem a $8 \cdot 1\,000$, ou seja, 8 000.
- na **Astronomia**:
  "Além do Sol, não existe nenhuma estrela a menos de três anos-luz de distância da Terra, ou seja, a menos de vinte e oito trilhões e quinhentos bilhões de quilômetros ($2{,}85 \cdot 10^{13}$ km)."
  $2{,}85 \cdot 10^{13}$ correspondem a $2{,}85 \cdot 10\,000\,000\,000\,000$, ou seja, 28 500 000 000 000.
- na **Biologia**:
  "Se o coração pulsa setenta vezes por minuto, em média, isto significa $4{,}2 \cdot 10^3$ batimentos por hora ou $3{,}7 \cdot 10^7$ batimentos por ano."
  $4{,}2 \cdot 10^3$ correspondem a $4{,}2 \cdot 1000$, ou seja, 4200, e $3{,}7 \cdot 10^7$ correspondem a $3{,}7 \cdot 10\,000\,000$, ou seja, 37 000 000.

Os alunos poderão recorrer a pesquisas e encontrar em livros de Ciências da Natureza e Geografia, além de jornais, revistas e internet, outras situações em que se usa a notação científica.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 11)

Nesta atividade, espera-se que os alunos identifiquem padrões e realizem generalizações partindo da análise dos resultados.

Resolução

Os quatro amigos comunicaram a notícia para outros quatro amigos, que transmitiram para mais quatro pessoas e assim por diante. Isso ocorreu a cada 15 minutos. Observe o esquema que mostra a quantidade de pessoas que receberam a mensagem a cada intervalo de 15 minutos:

8 horas ———— 4 pessoas
8 horas e 15 minutos ———— $4 \cdot 4 = 4^2$
8 horas e 30 minutos ———— $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$
8 horas e 45 minutos ———— $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$
9 horas ———— $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

- Às 8 horas e 15 minutos, 4^2 pessoas receberam a notícia, ou seja, 16 pessoas.
- Às 8 horas e 30 minutos, 4^3 pessoas receberam a notícia, ou seja, 64 pessoas.
- Às 8 horas e 45 minutos, 4^4 pessoas receberam a notícia, ou seja, 256 pessoas.
- 4, 16, 64, 256. O padrão existente é que são potências de 4.
- Às 9 horas, 4^5 pessoas receberam a notícia, ou seja, 1 024 pessoas.

Adicionando a quantidade de pessoas que receberam a notícia até às 9 horas, temos:

$$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 = 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1364$$

Ao todo, 1364 pessoas receberam a notícia.

Desafio – Pedro o pintor (p. 14)

O objetivo desta atividade é buscar uma generalização a partir da observação de regularidades geométricas e numéricas. Obtida a expressão geral, o intuito é aplicá-la em uma situação particular, como na determinação da porcentagem correspondente à parte pintada no 10º dia.

Resolução

- Observando os resultados dos cálculos efetuados no completamento da tabela, espera-se que os alunos reconheçam que a parte pintada até o dia considerado pode ser dada pela diferença entre 1 e a fração do que foi pintado no dia.

2º dia: Pedro pintou $\frac{1}{2}$ do quadro no dia anterior e $\frac{1}{4}$ do quadro no segundo dia (metade do que pintou no dia anterior), então ele pintou até esse dia:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4}$ do quadro é igual a $1 - \frac{1}{4}$ do quadro. Como o número 4 pode ser escrito como 2^2, temos:

$$1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

3º dia: Pedro pintou $\frac{1}{8}$ do quadro no terceiro dia (metade de $\frac{1}{4}$ do quadro que foi o que ele pintou no segundo dia), então ele pintou até esse dia:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$$

$\frac{7}{8}$ do quadro é igual a $1 - \frac{1}{8}$ do quadro. Como o número 8 pode ser escrito como 2^3, temos:

$$1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

Então, temos:

Para o 4º dia:

Parte pintada no dia: $\frac{1}{16}$.

Parte pintada até esse dia: $1 - \frac{1}{16}$.

Usando potência: $1 - \frac{1}{2^4}$.

Para o 6º dia:

Parte pintada no dia: $\frac{1}{64}$.

Parte pintada até esse dia: $1 - \frac{1}{64}$.

Usando potência: $1 - \frac{1}{2^6}$.

- A parte pintada até o décimo dia corresponde a $\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$.
- A parte pintada até o 10º dia em porcentagem:
  $1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1024 - 1}{1024} = \frac{1023}{1024} = 0{,}999023 \cong 99{,}9\%$
- Nessa situação, um padrão existente é que a parte do quadro pintado até certo dia é igual à diferença entre 1 e a fração da tela pintada nesse dia. A fração pintada nesse dia é sempre o inverso de 2 elevado ao expoente que indica esse dia.

  Então, a parte pintada até o dia **n** é dado por $1 - \frac{1}{2^n}$.

Troquem ideias e resolvam (p. 17)

Resolução

$$\frac{\frac{1}{1000}}{\left[\left(\frac{1}{60}\right)^2\right]^2} = \frac{1}{10^3} : \left(\frac{1}{60}\right)^4 = 10^{-3} \cdot 60^4 =$$

$$= \frac{\frac{1}{1000}}{\left[\left(\frac{1}{60}\right)^2\right]^2} = 10^{-3} \cdot 6^4 \cdot 10^4 = 1296 \cdot 10^1 = 12\,960$$

Desafio – Quadrado mágico (p. 22)

Nesta atividade, espera-se que os alunos recorram às propriedades das potências de mesma base para completarem o quadrado mágico.

Resolução

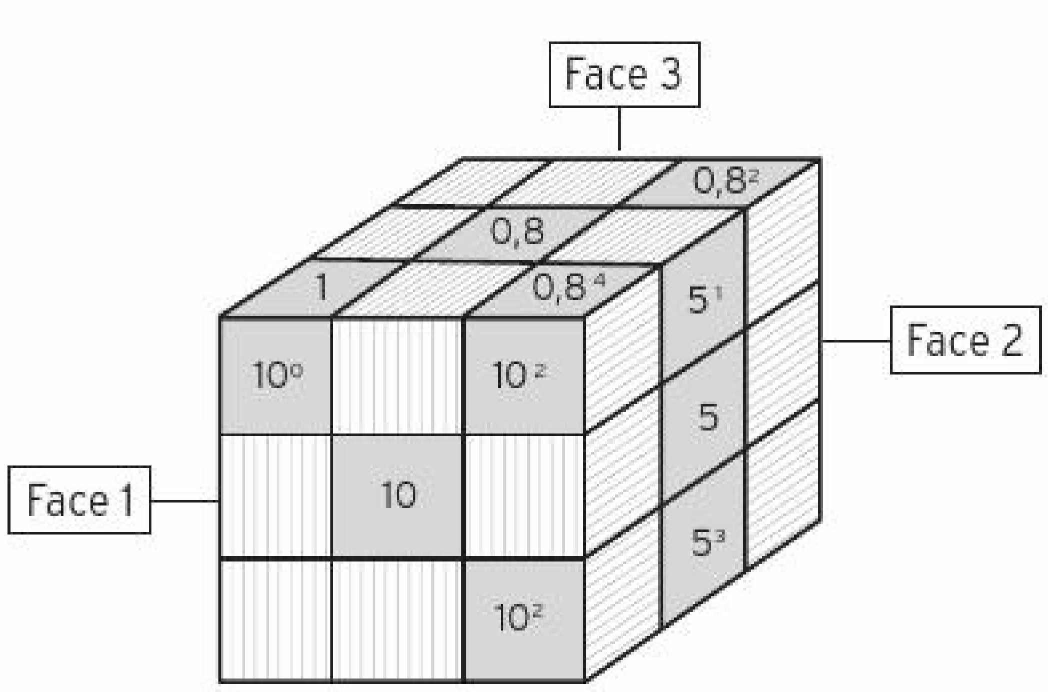
O produto mágico é uma potência de base 6 e expoente 3, então, ao adicionar os expoentes de cada linha, coluna ou diagonal, o resultado deve ser igual a 3.

- Na terceira coluna:
  $-2 + 2 = 0$; $3 - 0 = 3$; o termo desconhecido é igual a 6^3;
- Na primeira linha:
  $0 + (-2) = -2$; $3 - (-2) = 5$; o termo desconhecido é igual a 6^5;
- Na diagonal:
  $-2 + 1 = -1$; $3 - (-1) = 4$; o termo desconhecido é igual a 6^4;
- Na primeira coluna:
  $0 + 4 = 4$; $3 - 4 = -1$; o termo desconhecido é igual a 6^{-1};
- Na terceira linha:
  $4 + 2 = 6$; $3 - 6 = -3$; o termo desconhecido é igual a 6^{-3}.

6^0	6^5	6^{-2}
6^{-1}	6	6^3
6^4	6^{-3}	6^2

Investigue e explique (p. 23)

Considere as faces 1, 2 e 3 representadas a seguir.



Em cada face, o produto é o seguinte:

Face 1:

$10^0 \cdot 10 \cdot 10^2 = 10^3$

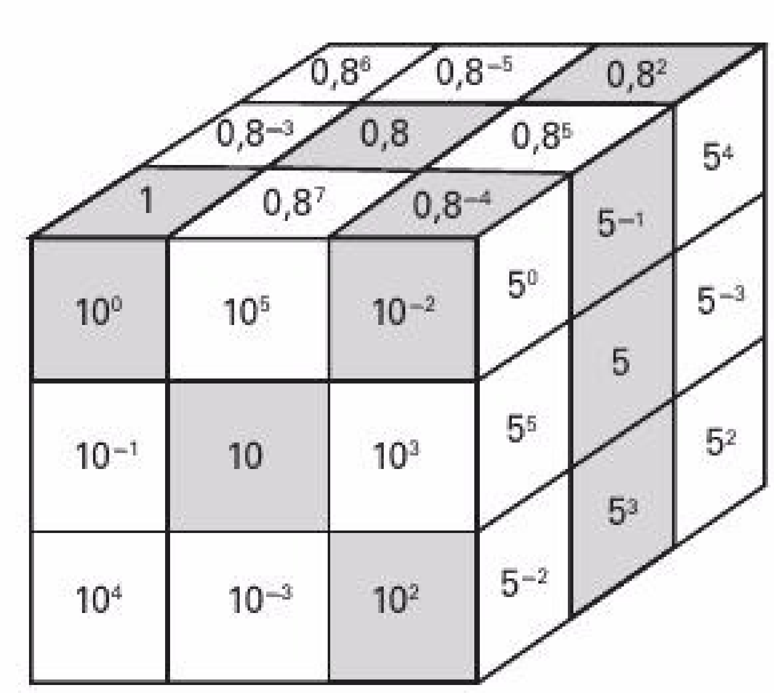
Face 2:

$5^1 \cdot 5 \cdot 5^3 = 5^5$

Face 3:

$1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}8^3$

Então, o cubo ficará como representado a seguir:



UNIDADE 2

Radiciação: propriedades

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Raiz n-ésima (enésima) Potenciação e radiciação: operações inversas Potências com expoentes fracionários **2. Outras propriedades dos radicais** Radicais equivalentes Outras propriedades Cálculo com expressões que envolvem radicais **3. Operações com radicais** Soma algébrica Multiplicação Divisão Introdução de fatores no radicando Potências com radicais Racionalização de denominadores	Espera-se que os alunos: • identifiquem potências com expoentes fracionários e as representem em forma de radicais; • atribuam significado aos radicais, identificando e aplicando as propriedades fundamentais; • identifiquem a potenciação e a radiciação como operações inversas; • efetuem cálculos com números reais em forma de radical e racionalizem os denominadores das frações com radicais, quando necessário.

Orientações didáticas

É conveniente que o trabalho com raiz quadrada esteja associado à potenciação. Por exemplo, é importante que os alunos percebam que uma raiz quadrada corresponde a uma potência com expoente $\frac{1}{2}$ ou 0,5. O contato deles com esses novos conhecimentos deve ocorrer em meio a contextos significativos, para que possa haver uma ampliação dos conceitos já construídos.

Antes de compreender as propriedades e técnicas de cálculo com radicais, é preciso identificar os radicais com potências de expoente fracionário. Inicialmente, os alunos poderão perceber que podemos associar duas operações: a potenciação e a radiciação, pois $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

A notação que utiliza expoentes fracionários também dá significado à generalização das propriedades estudadas para as potências de expoentes inteiros.

Comente com os alunos que $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{8}$ são números irracionais, mas que $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$ e $\sqrt[3]{27}$, por exemplo, não são, pois $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$ e $\sqrt[3]{27} = 3$. Mostre, também, que existem números irracionais que não têm representação sob a forma de radical, como é o caso do número π.

A aceitação da existência dos números irracionais e sua caracterização foram questões bastante complicadas para os matemáticos no decorrer dos tempos e são até hoje de difícil assimilação para nossos alunos.

Aconselhamos que não seja dedicado demasiado tempo de trabalho a esta unidade, uma vez que cálculos muito trabalhosos envolvendo radicais não serão exigidos posteriormente. Na Trigonometria, por exemplo, os radicais mais utilizados são $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Texto de aprofundamento

A incomensurabilidade entre duas grandezas

Há situações em que os números racionais se mostram ineficientes para determinar a medida de certas grandezas. Podemos destacar, por exemplo, a medida do comprimento de uma circunferência, tomando como unidade seu diâmetro. Esse comprimento é **incomensurável**. Não importa quão pequena seja a subdivisão do diâmetro a ser considerada nova unidade: ela não caberá um número inteiro de vezes no comprimento dessa circunferência. Isso também ocorre com a medida da diagonal de um quadrado, tomando como unidade seu lado.

O número decimal ilimitado que pertence à sucessão de intervalos associados às medidas referidas anteriormente é um número irracional. Esse número possui escrita decimal infinita e não periódica.

Não se sabe quando e como foi feita a descoberta da incomensurabilidade. Muitos questionamentos surgiram em torno dessa nova ideia. Uma das hipóteses é a de que a descoberta tivesse sido feita por pitagóricos, alunos da escola fundada por Pitágoras, em um período anterior a 410 a.C.

Hipasus de Metapontum é mencionado por alguns historiadores como o descobridor, mas há controvérsias em relação ao período em que viveu, o que acarretou distorções quanto à época da descoberta desse conceito.

Supõe-se que a primeira percepção da incomensurabilidade esteja relacionada à aplicação do teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles. Outra possibilidade está relacionada à medida da secção áurea.

Para os números irracionais, definimos operações que mantêm válidas as propriedades e operações já definidas para os números racionais. Dessa forma, ampliamos o conjunto dos números racionais criando o conjunto dos números reais, resolvendo, assim, a questão da incomensurabilidade entre duas grandezas.

Comentários e resolução de atividades

Troquem ideias e resolvam (p. 35)

Observe como os alunos interpretam o enunciado do problema e se utilizam o conceito de volume de um cubo para resolver. A situação apresentada permite que os alunos percebam que a radiciação é a operação inversa da potenciação.

Resolução

- O volume de um cubo é calculado pela fórmula: $V = x^3$, em que **V** representa o volume e **x**, a medida da aresta.

  $512a^3 = x^3$, então $x = \sqrt[3]{512a^3} = \sqrt[3]{8^3a^3} = 8a$

  A aresta do cubo mede 8a cm.

- A soma das áreas de todas as faces é também denominada **área total** do cubo.

  Área de cada face é igual ao quadrado da medida da aresta:

  $x^2 = (8a)^2 = 64a^2$

  Como são 6 faces, então a área total é dada por: $6 \cdot 64a^2 = 384a^2$.

  Assim, a soma das áreas de todas as faces é igual a $384a^2$ cm².

Investigue e explique (p. 38)

É importante que os alunos compreendam o enunciado do problema e elaborem planos para encontrar solução por meio de uma ou mais ações.

Incentive-os a buscar argumentos para justificar os procedimentos que utilizaram.

Resolução

- O $\triangle ABD$ é um triângulo retângulo e $\overline{BD}$ é a hipotenusa. Usando o teorema de Pitágoras, temos:

  $(\text{med } \overline{BD})^2 = a^2 + b^2$ —— $\text{med } \overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, pois $\sqrt{a^2 + b^2}$ é a medida da diagonal $\overline{BD}$ e, segundo a propriedade dos triângulos, é menor que $a + b$ (soma das medidas dos catetos do triângulo retângulo ABD).

  Outra resolução:

  $a + b = \sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \neq \sqrt{a^2 + b^2}$

Desafio – Escolhendo um número (p. 44)

É importante que a questão apresentada seja corrigida. Para isso, proponha uma correção coletiva, criando situações para que os estudantes comparem sua resolução com a dos colegas e analisem diferentes procedimentos de resolução.

Resolução

Vamos efetuar as operações indicadas na expressão:

$$\frac{(2+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}=\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}=\frac{(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})}$$

Racionalizamos o denominador da fração obtida:

$$\frac{(3+\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}=$$

$$=\frac{3^2+2(3)(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}{6}=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{6}=$$

$$=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=\frac{12}{6}+\frac{6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

Como a expressão $\frac{(2+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}$ resulta em $2+\sqrt{3}$ quando simplificada, para tornar esse resultado um número inteiro diferente de zero pode-se adicionar, por exemplo, o número $-\sqrt{3}$, isto é,

$$\frac{(2+\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}+(-\sqrt{3})=(2+\cancel{\sqrt{3}})+(-\cancel{\sqrt{3}})=2$$

O número 2 é um número inteiro.

Outro exemplo possível é o número $5-\sqrt{3}$, pois:

$2+\sqrt{3}+5-\sqrt{3}=7.$

Sugestão de atividade complementar

Usando a calculadora

Por meio da comparação de procedimentos que envolvem o uso da calculadora, os alunos poderão avaliar qual é o método mais adequado para resolver determinadas situações, optando por um ou outro caminho para resolver certos problemas.

Para determinar o valor de uma expressão sem racionalizar, podemos utilizar a memória da calculadora. No caso de uma calculadora simples, a memória é o local em que se armazenam os números a serem utilizados depois em outros cálculos.

Ao apertar a tecla pela primeira vez, a calculadora registra o valor exibido no visor na memória da máquina. São quatro teclas disponíveis:

- **MC** Apaga o que está armazenado na memória.
- **M+** Armazena um número que será somado depois.
- **M−** Subtrai o número do visor ao número na memória.
- **MR** Chama o valor armazenado na memória.

Por exemplo, para calcular frações com a calculadora, não é preciso racionalizar o denominador, basta usar a memória. Ao calcular o denominador, armazene o resultado do cálculo na memória. Em seguida, quando calcular o denominador, divida o valor encontrado pelo valor armazenado na memória.

Exemplo: Determinar o valor aproximado da expressão $\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2}$.

É possível calcular racionalizando o denominador da expressão. Assim, temos $\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-1$.

Com uma calculadora simples, determine o valor aproximado de $\sqrt{5}-1$. Você deve obter o valor 1,2360679.

Também é possível calcular sem racionalizar o denominador e utilizando a memória da calculadora. Veja a sequência de teclas a seguir:

5 **√** **+** **2** **M+** **5** **√** **+** **3** **÷** **MR** **=**

Com isso, também se obtém o resultado 1,2360679.

Agora é a sua vez de utilizar os dois métodos:

Determine, utilizando a calculadora, o valor aproximado da expressão $\frac{2\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$, racionalizando o denominador e sem racionalizá-lo.

Resolução

Racionalizando o denominador:

$$\frac{(2\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{5})}{(\sqrt{10}-\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{5})}=5+3\sqrt{2}$$

O valor aproximado é 9,2426407.

Sem racionalizar o denominador:

MC **1** **0** **√** **−** **5** **√** **M+** **2** **×** **1** **0** **√** **+** **5** **√** **÷** **MR** **=**

Observacão: em algumas calculadoras, em vez da tecla **MC**, aparece **M^R_C**.

Outra maneira:

MC **2** **×** **1** **0** **√** **+** **5** **√** **M+** **1** **0** **√** **−** **5** **√** **÷** **=** **×** **MR** **=**

Comentário

Incentive os estudantes a fazer as atividades recorrendo a estimativas e a utilizar a calculadora como ferramenta de verificação de resultados, independente de os valores serem exatos ou não.

Ao comparar diferentes formas de resolver os exercícios, os alunos poderão conhecer as várias formas e estratégias de resolver um mesmo problema. Isso contribui para uma compreensão significativa dos conteúdos abordados.

Por meio da comparação de procedimentos que envolvem o uso da calculadora, os alunos poderão avaliar qual é o método mais adequado para resolver determinadas situações, optando por um ou outro caminho para resolver certos problemas.

UNIDADE 3

Equações de 2º grau

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Equações de 2º grau com uma incógnita O que é uma equação de 2º grau com uma incógnita? Equações incompletas **2. Resolução de equações de 2º grau incompletas** Resolvendo equações de 2º grau incompletas **3. Resolução de equações de 2º grau completas** Resolvendo equações por meio de fatoração Resolvendo equações por completamento de quadrados Fórmula de Bhaskara e resolução de equações de 2º grau Discriminante e o número de raízes **Leitura:** Um pouco de história	Espera-se que os alunos: • reconheçam uma equação de 2º grau na forma reduzida; • identifiquem os termos e os coeficientes de uma equação de 2º grau na forma reduzida; • conceituem e identifiquem raízes de uma equação de 2º grau; • reconheçam e apliquem a fórmula de Bhaskara; • resolvam uma equação de 2º grau; • analisem uma equação de 2º grau conforme suas raízes reais; • utilizem equações de 2º grau para resolver problemas.

Orientações didáticas

A abordagem inicial da resolução de equações de 2º grau, neste trabalho, foi desenvolvida por meio de decomposição em um produto (fatoração) e por completamento de quadrados. Espera-se que dessa maneira sejam oferecidas alternativas de resolução de equações de 2º grau além da fórmula de Bhaskara. O método de determinação de raízes por completamento de quadrados propicia melhor compreensão do procedimento de determinação das raízes de uma equação de 2º grau por meio da fórmula de Bhaskara, além de resgatar seu contexto histórico.

Texto de aprofundamento

Alguns obstáculos na aprendizagem da Álgebra

Na tentativa de descobrir dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra, alguns educadores matemáticos fizeram pesquisas em diferentes países para identificar os erros mais comuns e investigar as razões desses erros.

Foram constatados vários obstáculos na área cognitiva, entre os quais:

- **Falta de referência numérica no uso das letras** (Davis, 1975; Wagner, 1981)
  "Se os alunos não veem as letras como representações dos números, então efetuar operações aritméticas com essas letras torna-se uma tarefa sem sentido."

  Por exemplo: $5a - 2a = 1$
  $3a = 1$
- **Incapacidade de aceitar a ausência de fechamento** (Collis, 1974)
  "Os alunos têm dificuldade de manter suspensas operações não efetuadas."
  Por exemplo, em Aritmética, $4 + 6$ é igual ao número 10, mas a expressão $x + 6$ não pode ser substituída por um número.
- **Dilema nome-processo** (Davis, 1975)
  "Na Aritmética, $4 + 6$ é o problema e 10, a resposta.
  Na Álgebra, $x + 6$ descreve um processo (adiciona 6 a **x**) e também dá nome à resposta."
- **A justaposição em Álgebra** (Matz, 1979)
  "Em Aritmética, a justaposição de dois números denota adição.
  Exemplo: $37 = 30 + 7$ ou $3\frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{7}$.
  Em Álgebra, denota multiplicação.
  Exemplo: $3a = 3 \cdot a$."

Fonte: CHALOUH, Louise; HERSCOVICS, Nicolas. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual.

Comentários e resolução de atividades

Troquem ideias e resolvam (p. 53)

Nesta atividade os alunos terão a oportunidade de recorrer à álgebra e a equações de 2º grau solucionar o problema apresentado. Oriente os alunos para que façam um desenho simplificado do refeitório retangular e procurem equacionar o problema usando uma letra para representar um dos lados desse refeitório.

Resolução

- Vamos indicar as seguintes medidas para o refeitório:
  x, $x \neq 0$ —— medida, em metros, da largura do refeitório
  $x + 15$ —— medida, em metros, do comprimento do refeitório

$x \cdot (x + 15) = x^2 + 15x$ —— área do refeitório

$2x$ —— medida, em metros, do comprimento da cozinha

$2x \cdot 2x = 4x^2$ —— área da cozinha

Equação:

$x^2 + 15x = 4x^2$ —— $3x^2 - 15x = 0$

Resolvendo a equação por meio da fatoração do primeiro membro:

$3x^2 - 15x = 0$ —— $x \cdot (3x - 15x) = 0$

Como $x \neq 0$, temos:

$3x - 15 = 0$ —— $x = 5$ e $x + 15 = 20$

As dimensões do refeitório são 5 m e 20 m.

- Área de cada ambiente:
  ✓ Área do refeitório:
  $5 \cdot 20$ —— Área $= 100\ m^2$
  ✓ Medida do lado da cozinha: $2x = 2 \cdot 5 = 10$
- Área da cozinha:
  $10 \cdot 10$ —— Área $= 100\ m^2$
- Perímetro de cada ambiente:
  ✓ Perímetro do refeitório:
  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 20 = 10 + 40$ —— Perímetro do refeitório $=$
  $= 50$ m
  ✓ Perímetro da cozinha:
  $4 \cdot 10 = 40$ —— Perímetro da cozinha $= 40$ m

Desafio – A fórmula de Bhaskara e as equações incompletas (p. 59)

Com essa atividade, espera-se que os alunos reconheçam que a fórmula de Bhaskara pode ser utilizada na resolução de qualquer tipo de equação de 2º grau, ou seja, que compreendam o significado de generalização de regularidades (padrões) observadas em situações particulares.

Resolução

- Resolvendo por Bhaskara:

✓ $x^2 - 5x = 0$ —— $a = 1$, $b = -5$ e $c = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 25$ —— $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x = \frac{-(-5) \pm 5}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = \dfrac{5 + 5}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x = \dfrac{5 - 5}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

As raízes são 0 e 5.

✓ $4x^2 + 3x = 0$ —— $a = 4$, $b = 3$ e $c = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 = 9$ —— $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x = \frac{-3 \pm 3}{2 \cdot 4} = \begin{cases} x = \dfrac{-3 + 3}{8} = \dfrac{0}{8} = 0 \\ x = \dfrac{-3 - 3}{8} = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

As raízes são $-\frac{3}{4}$ e 0.

✓ $-3x^2 + 75 = 0$ —— $a = -3$, $b = 0$ e $c = 75$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 75 = 900$ —— $\sqrt{\Delta} = \sqrt{900} = 30$

$$x = \frac{0 \pm 30}{2 \cdot (-3)} = \frac{\pm 30}{-6} \begin{cases} x = \dfrac{+30}{-6} = -5 \\ x = \dfrac{-30}{-6} = 5 \end{cases}$$

As raízes são -5 e 5.

- Resolvendo por fatoração:

✓ $x^2 - 5x = 0$

$$x \cdot (x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \text{ —— } x = 5 \end{cases}$$

As raízes são iguais às que foram encontradas usando a fórmula de Bhaskara.

✓ $4x^2 + 3x = 0$

$$x \cdot (4x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4x + 3 = 0 \text{ —— } x = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

As raízes são iguais às que foram encontradas usando a fórmula de Bhaskara.

✓ $-3x^2 + 75 = 0$

$-3x^2 = -75$

$x^2 = 25$

$$x = \pm 5 \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

As raízes são iguais às que foram encontradas usando a fórmula de Bhaskara.

- A fórmula de Bhaskara pode ser usada também para resolver equações de 2º grau incompletas.

Sugestões de atividades complementares

Área do retângulo

A área de um retângulo é 60 cm^2, e seu comprimento mede 4 cm a mais que sua largura. Escreva uma equação de 2º grau com uma incógnita envolvendo as dimensões e a área desse retângulo.

Resposta

$x^2 + 4x - 60 = 0$

Obtendo diferentes equações

Considere a equação de 2º grau com incógnita **x**:

a) Para que valores de **m** essa equação terá raízes iguais?

b) Escreva as equações que se obtêm substituindo **m** pelos valores encontrados no item anterior.

c) Resolva as equações do item anterior.

Resposta

a) -6 ou 0.

b) $x^2 - 34x + 289 = 0$; $x^2 + 2x + 1 = 0$.

c) 17; -1.

Problema chinês

Este problema era muito popular na China, no século IX.

"Se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento, de modo que a ponta se encontre no plano do solo a 16 cúbitos da base, a que altura a partir do solo ele foi quebrado?"

a) Escreva uma equação para expressar o enunciado do problema. Essa é uma equação de 2º grau?

b) Apresente uma resposta.

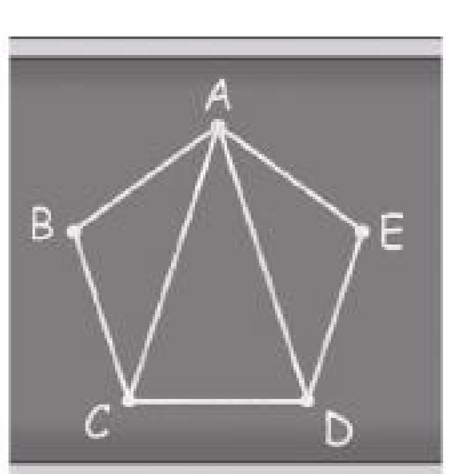
Resposta

a) $64x = 768$. Não é uma equação do 2º grau.

b) 12 cúbitos

Número de diagonais

Os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são diagonais do pentágono ABCDE.



a) Quantas diagonais há nesse pentágono? Lembrando que:

Número de diagonais: $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

n representa o número de lados.

b) Um decágono convexo tem 35 diagonais. Verifique se a fórmula anterior pode ser aplicada a esse polígono.

c) Agora, resolva este problema: um polígono convexo tem 170 diagonais. Quantos lados há nesse polígono?

Resposta

a) 5 diagonais.

b) $35 = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2}$; $35 = 35$

A fórmula é válida para decágono convexo.

c) 20 lados.

UNIDADE 4

Equações de 2º grau e formas redutíveis

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Equações de 2º grau: relações particulares Relações entre raízes e coeficientes Soma e produto de raízes Equação de 2º grau expressa em função da soma e do produto de raízes **2. Aplicações de equações de 2º grau** Forma fatorada de trinômios de 2º grau Trinômio do tipo $x^2 + bx + c$ Trinômio do tipo $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ Resolução de problemas **3 Explorando outras equações** Equações biquadradas Equações irracionais **Leitura:** A equação de 2º grau e o dia a dia	Espera-se que os alunos: • reconheçam relações entre os coeficientes de uma equação de 2º grau e suas raízes; • determinem uma equação de 2º grau conhecendo suas raízes; • reconheçam equações que são redutíveis a uma equação de 2º grau; • resolvam equações biquadradas e irracionais.

Orientações didáticas

Nesta unidade, são exploradas equações como as biquadradas e as irracionais. Entendemos que nesta fase não é muito simples para os alunos reconhecerem equações biquadradas como equações redutíveis a uma equação de 2º grau por meio de um artifício algébrico, mas espera-se que com um pouco de prática e variados exemplos, eles cheguem aos objetivos colocados nesta unidade. Equações irracionais também demandam procedimentos de resolução de difícil entendimento nesta fase, devido às próprias particularidades inerentes ao assunto, como elevar ao quadrado uma igualdade que possui raízes quadradas.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 66)

Nesta atividade, os alunos têm oportunidade de aplicar o conhecimento apropriado sobre as relações entre coeficientes de uma equação de 2º grau e suas raízes.

Oriente-os a identificar o que precisa ser investigado lendo os balões de fala do professor e as questões apresentadas.

Resolução

- Se uma das raízes é zero, então o produto delas é zero, ou seja, se uma das raízes é **r** (número real qualquer) e a outra é zero, então $\mathbf{r} \cdot 0$ é igual a zero.
- Se as raízes são simétricas, uma delas poderá ser indicada por **r** (número real qualquer) e a outra por $-\mathbf{r}$.
  $\mathbf{r} + (-\mathbf{r}) = 0$
  Ou seja, se as raízes são simétricas, a soma delas é igual a zero.
- Equações comentadas
  ✓ Uma das raízes é zero, então o produto delas é zero:
  $P = \frac{c}{a}$ —— $\frac{c}{a} = 0$, ou seja, $c = 0$.
  O coeficiente **c** é zero apenas na equação **A**.
  ✓ As raízes são simétricas, então a soma delas é zero:
  $S = -\frac{b}{a}$ —— $-\frac{b}{a} = 0$, ou seja, $b = 0$.
  O coeficiente **b** é zero apenas na equação **C**.
  As equações comentadas pelo professor são **A** e **C**.

Desafio – De volta ao problema dos apertos de mãos (p. 70)

Oriente os alunos para que iniciem a resolução do problema apresentado analisando encontros em que comparecem 4 pessoas, 5 pessoas e 6 pessoas (problema resolvido nos volumes anteriores), encontrem um padrão e generalizem escrevendo uma fórmula, caso isso ainda não tenha sido feito. Incentive-os a utilizarem a fórmula encontrada na resolução deste problema.

Resolução

Procura-se uma fórmula por meio da qual se possa calcular o total de apertos de mão em uma festa como a descrita no problema apresentado.

✓ Com 4 pessoas, cada uma dá 3 apertos de mão, totalizando $4 \cdot 3$, ou seja, 12 apertos de mão. Cada aperto foi contado 2 vezes, então, o total de apertos de mão deve ser dividido por 2:

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

✓ Com 5 pessoas, cada uma dá 4 apertos de mão, totalizando $5 \cdot 4$, ou seja, 20 apertos de mão. Cada aperto foi contado 2 vezes, então, o total de apertos de mão é:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

✓ Com 6 pessoas, cada uma dá 5 apertos de mão, totalizando $6 \cdot 5$, ou seja, 30 apertos de mão. Cada aperto foi contado 2 vezes, então, o total de apertos de mão é:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Analisando os casos, chegamos à conclusão de que se forem **n** pessoas, o total de apertos é dado por:

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Foram contados 78 apertos de mão.

Equação:

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} = 78 \text{ ——— } n^2 - n = 2 \cdot 78 \text{ ——— } n^2 - n - 156 = 0$$

As raízes dessa equação são -12 e 13.

Como **n** deve ser um número natural, tem-se **n** = 13, ou seja, havia 13 pessoas na festa.

Troquem ideias e resolvam (p. 72)

Nesta atividade, espera-se que os alunos reconheçam um triângulo retângulo e se lembrem da relação de Pitágoras.

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(2\sqrt{5})^2 = x^2 + (x^2)^2$$

$$20 = x^2 + x^4$$

$$x^4 + x^2 - 20 = 0$$

Representando x^2 por **t**, temos:

$$t^2 + t - 20 = 0 \begin{cases} t = 4 \\ \text{ou} \\ t = -5 \end{cases}$$

$t = 4$ ——— $x^2 = 4$ ——— $x = \pm 2$

$t = -5$ ——— $x^2 = -5$ (não é conveniente)

Como **x** é a medida do lado do retângulo, então $x > 0$:

Comprimento: $x^2 = 4$ cm ——— comprimento: 4 cm

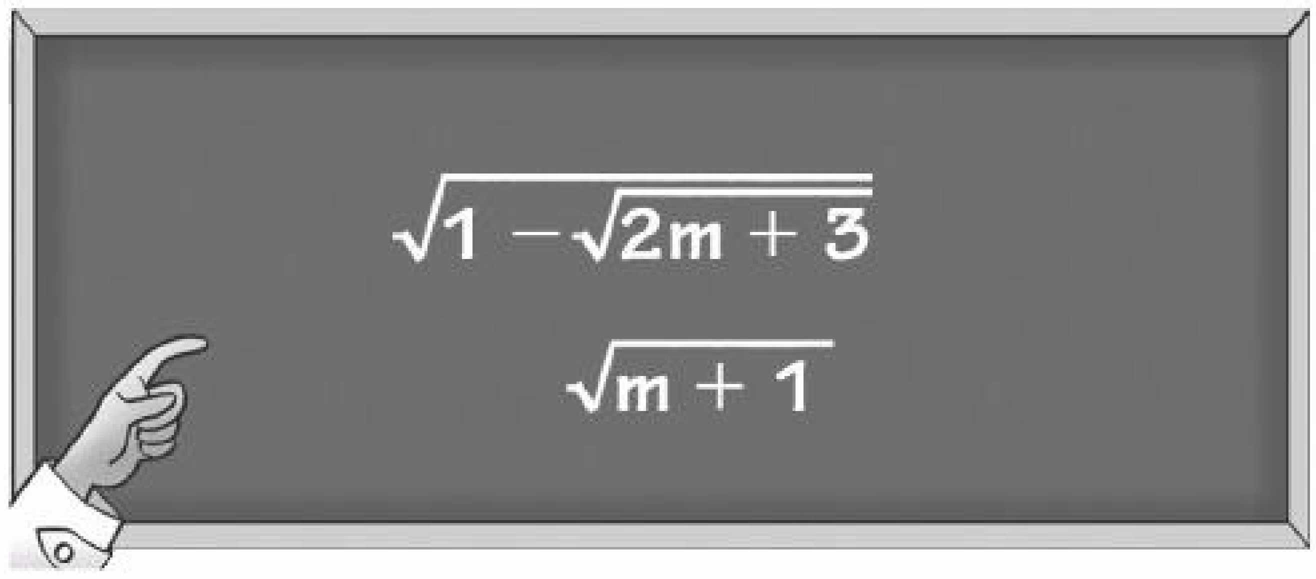
Largura: $x = 2$ cm ——— largura: 2 cm

Portanto, as medidas do retângulo são 4 cm e 2 cm.

Sugestões de atividades complementares

Equações irracionais

Para que valores de **m** as expressões são iguais?

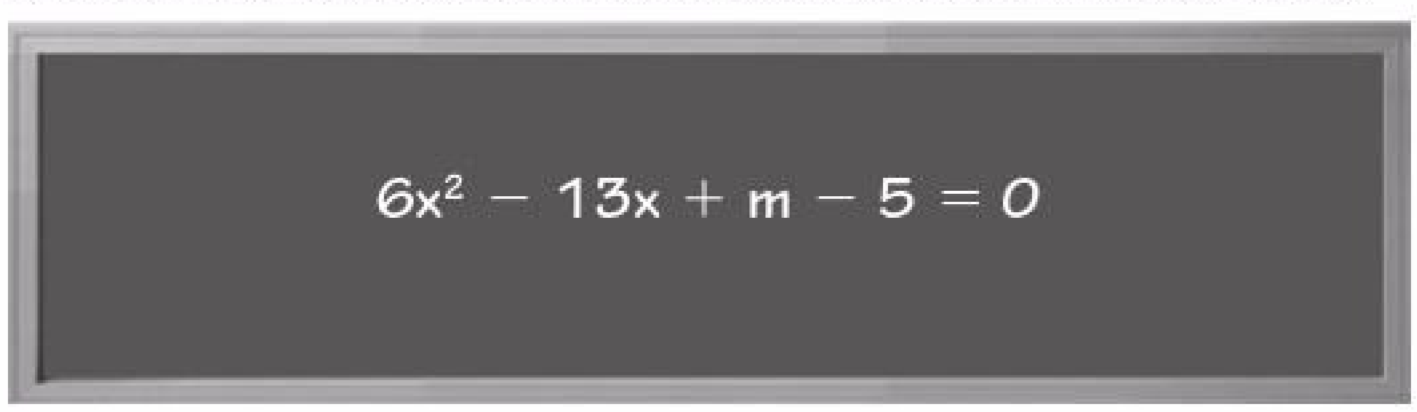


Resposta

Para $m = -1$.

Raízes inversas

Para que valores reais de **m** a equação apresentada no quadro abaixo tem raízes inversas?



Pista: raízes inversas, produto igual a 1.

Resolução

Se as raízes são inversas, então, o produto delas é igual a 1.

$a = 6$; $b = -13$; $c = m - 5$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m - 5}{6}$$

$$\frac{m - 5}{6} = 1 \text{ ——— } m - 5 = 6 \text{ ——— } m = 11$$

Verificação

Atribuindo a **m** o valor 11, tem-se a equação: $6x^2 - 13x + 6 = 0$.

Resolvendo a equação, têm-se as raízes: $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Portanto, para $m = 11$, a equação apresentada terá raízes inversas.

UNIDADE 5 Tales e a proporcionalidade

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Proporcionalidade A ideia de proporcionalidade **2. Proporcionalidade entre segmentos de reta** Razões entre segmentos de reta Proporção entre segmentos de reta Números irracionais e razões entre segmentos de reta **3. Tales e retas paralelas** Feixe de retas paralelas Teorema de Tales Divisão de segmentos de reta em partes proporcionais **4. Aplicações do teorema de Tales** O teorema de Tales e os triângulos **Leitura:** Harmonia e proporcionalidade caminham juntas	Espera-se que os alunos: • identifiquem a razão e a proporção entre números reais; • reconheçam a razão e a proporção entre medidas de segmentos de reta; • reconheçam a ampliação e a redução de figuras segundo uma razão; • se apropriem do conceito de divisão de um segmento de reta em partes proporcionais segundo uma razão conhecida; • identifiquem ampliações e reduções de figuras utilizando procedimentos variados, como a homotetia; • reconheçam a proporcionalidade entre segmentos de reta em um feixe de retas paralelas e em triângulos quaisquer (teorema de Tales); • compreendam e justifiquem o teorema de Tales; • analisem, interpretem, formulem e resolvam problemas geométricos que envolvam proporcionalidade.

Orientações didáticas

Situações que envolvem ampliação e redução de imagens e objetos são comuns em nosso dia a dia: em fotografias, mapas, desenhos, miniaturas de objetos e outros. Elas poderão motivar os alunos a estudar a proporcionalidade presente nesse tipo de trabalho. Esse assunto torna-se particularmente rico quando integrado às disciplinas de Geografia e Arte.

Sugerimos a realização de trabalhos com ampliações e reduções de figuras desenhadas em malhas quadriculadas. Os resultados podem ser obtidos ampliando ou reduzindo as malhas segundo um fator de proporcionalidade, aumentando ou diminuindo as dimensões da figura segundo esse fator. Modificar uma malha quadrada para uma formada por losangos, por exemplo, transforma um desenho de modo bastante interessante. Os alunos poderão discutir em que casos há deformação da figura e em que casos as figuras são semelhantes (têm a mesma forma).

Atividades de ampliação e redução evidenciam a importância de se conservar os ângulos e a proporcionalidade entre os segmentos de reta, quando se deseja manter a semelhança entre a figura dada e a obtida.

É importante lembrar que experimentar, explorar intuitivamente, visualizar e contextualizar são procedimentos que auxiliam no processo de construção do raciocínio lógico-dedutivo e na explicitação formal desse raciocínio.

Nesta unidade, também são apresentadas demonstrações formais de propriedades geométricas relacionadas a um feixe de retas paralelas e ao teorema de Tales. Procure realizar, com os estudantes, o reconhecimento da situação, a formulação de conjecturas e a argumentação, ou seja, a demonstração que é desenvolvida para validar a conjectura considerada.

Texto de aprofundamento

Tales e as pirâmides do Egito

A viagem que Tales fez ao Egito, no século VI a.C., marcou o início da Geometria grega, deixando registrado para a História o deslumbramento do sábio de Mileto diante da imponência da "grande pirâmide", a pirâmide de Quéops, construída por volta de 2600 a.C., com cerca de 2 milhões de blocos de pedra calcária, alguns deles com 20 toneladas. A pirâmide eleva-se a uma altura de 146 metros, aproximadamente, sobre as areias do vale do Nilo.

Certamente foram os questionamentos acerca da altura desse monumento que levaram Tales a usar um método criado por ele, que ainda hoje nos fascina pela simplicidade e precisão, para determinar a altura da pirâmide.

Tales fincou verticalmente na areia um bastão de madeira, cujo comprimento era conhecido, e mediu sua sombra. Mediu também a sombra da pirâmide e deduziu sua altura, afirmando que sombras e alturas, tanto em pirâmides quanto em bastões, quaisquer que sejam seus tamanhos, são sempre proporcionais. Por essa conclusão, no momento em que a altura de um bastão fosse igual à sua sombra, a altura da pirâmide também seria igual à sombra por ela projetada.

Essa proporcionalidade entre alturas e sombras constitui a essência do teorema de Tales. Vinte e seis séculos depois, durante a corrida espacial, os cientistas da Nasa ainda avaliam a altura de montanhas na Lua e em Marte por meio de suas respectivas sombras obtidas em fotografias.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Ampliando mapas (p. 84)

As respostas das questões propostas neste desafio são pessoais.

Exemplo: escolhendo a razão 1:2 entre a figura dada (figura 1) e a figura a ser obtida (figura 2), pode-se utilizar uma malha em que a medida dos lados dos quadrados seja o dobro das medidas da malha apresentada.

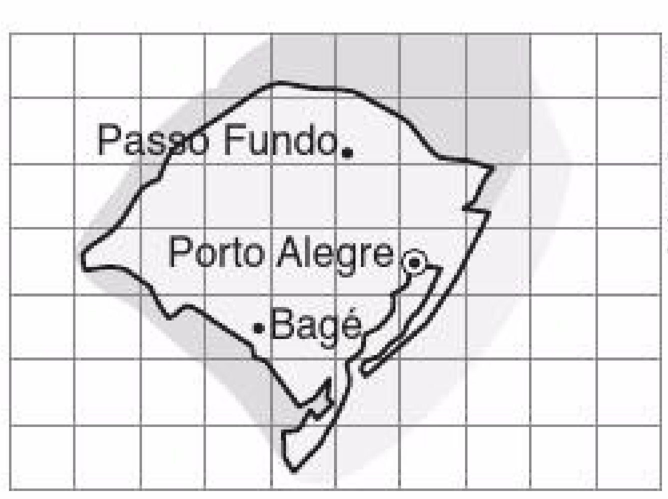


Figura 1

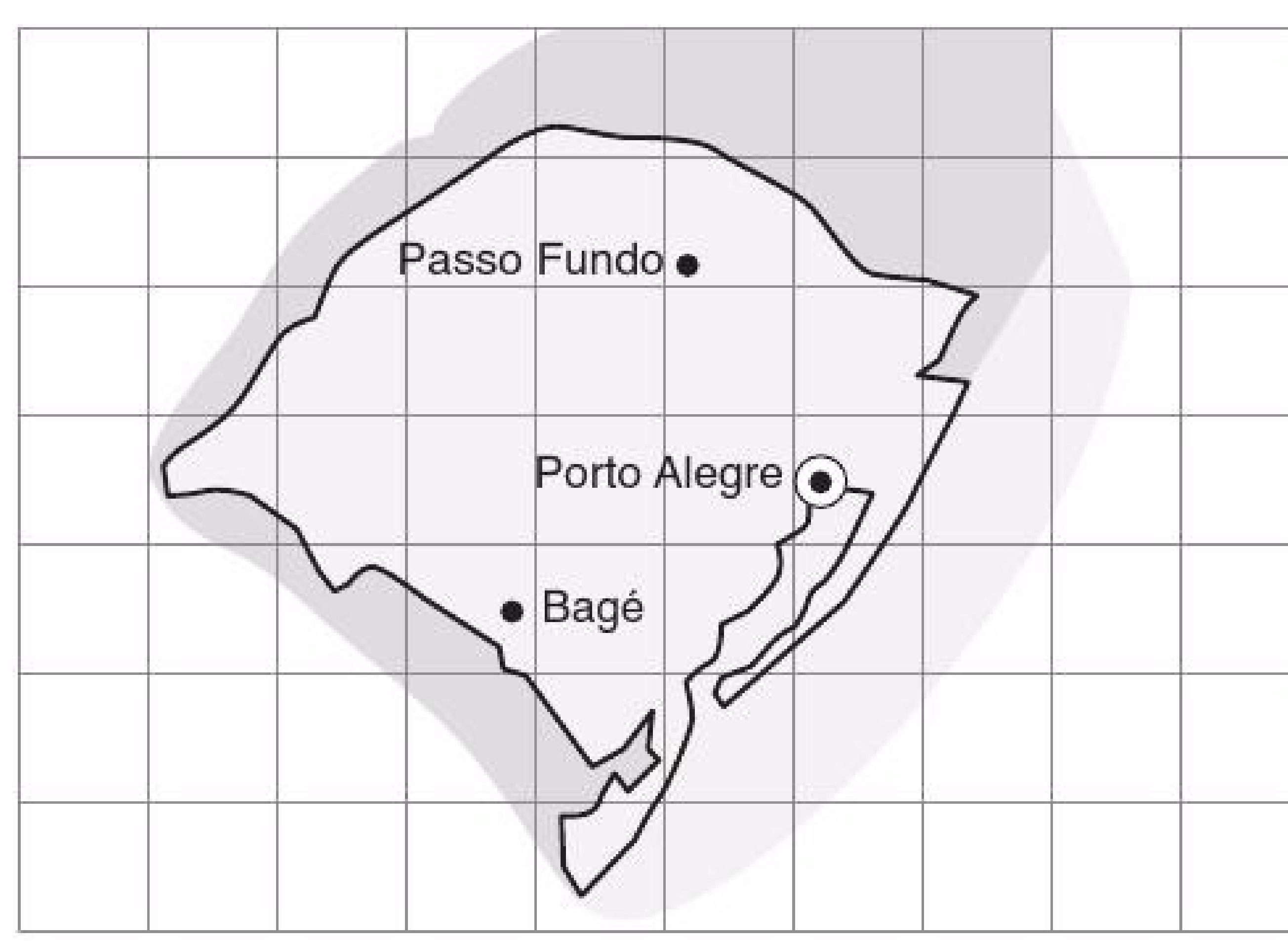


Figura 2

Desafio – Usando um foco para ampliar (p. 85)

Nesta atividade, os alunos produzirão figuras semelhantes. Para isso, é necessário que compreendam a ideia de semelhança e se lembrem de que existe uma razão constante entre lados correspondentes. A transformação realizada é conhecida como homotetia e favorece a compreensão e construção do conceito de semelhança.

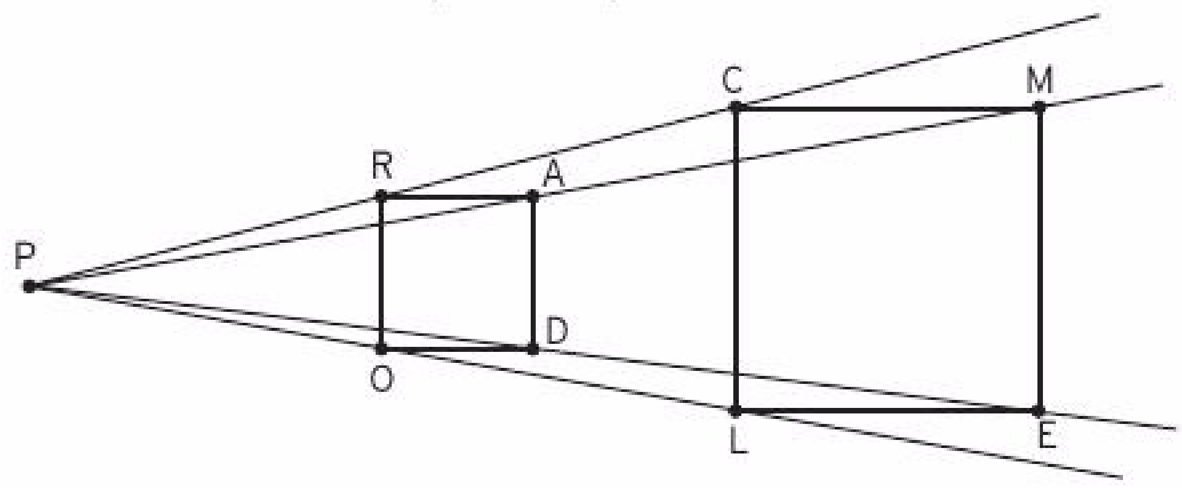
Resolução

- Como med $\overline{PC} = 2 \cdot$ med $\overline{PR}$, med $\overline{PM} = 2 \cdot$ med $\overline{PA}$ e med $\overline{PL} = 2 \cdot$ med $\overline{PO}$, as razões $\frac{\overline{PC}}{\overline{PR}}$, $\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}}$ e $\frac{\overline{PL}}{\overline{PO}}$ são iguais a 2. Assim, $\frac{\overline{CM}}{\overline{RA}}$ e $\frac{\overline{CL}}{\overline{RO}}$ também são iguais a 2.
- Portanto, $\frac{\overline{CM}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{CL}}{\overline{RO}}$ (os segmentos são proporcionais).

- Temos três resoluções diferentes para marcar um ponto **E** na semirreta $\overline{PD}$, de modo que o quadrado CLEM seja uma ampliação do quadrado RODA:

Resolução 1: Determinamos o ponto **E** na semirreta PD de modo que med $\overline{PE} = 2 \cdot$ med $\overline{PD}$ ou med $\overline{PD} = \frac{\text{med } \overline{PE}}{2}$.

Resolução 2: Traçamos uma reta paralela à reta CM, que passe pelo ponto **L**. Essa reta interceptará a semirreta PD no vértice **E** do quadrado procurado.

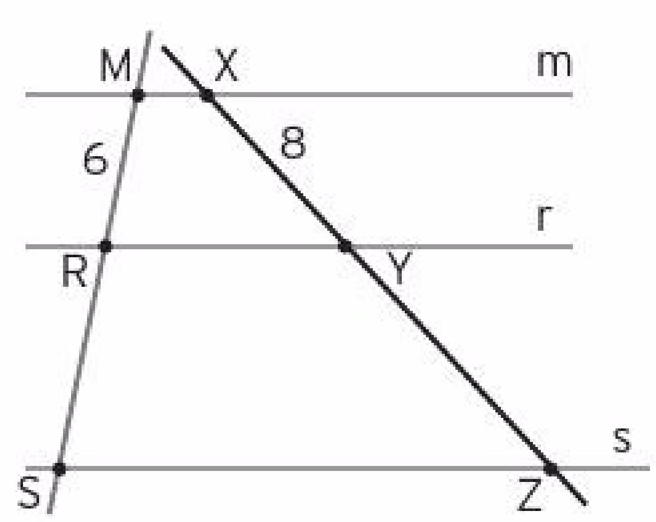


Resolução 3: Análoga à anterior, nesta resolução traçamos uma reta paralela à reta CL, que passe pelo ponto **M**. Essa reta interceptará a semirreta PD no vértice **E** do quadrado procurado.

- Para construir um quadrado maior do que CLEM é necessário que med $\overline{PC} > 2 \cdot$ med $\overline{PR}$.

Troquem ideias e resolvam (p. 92)

Resolução



med $\overline{RS}$ = med $\overline{MS}$ − med $\overline{MR}$ = (15 − 6) cm = 9 cm

m, **r** e **s** formam um feixe de retas paralelas, então $\overline{MS}$ e $\overline{XZ}$ são retas transversais.

Pelo teorema de Tales, $\overline{MR}$, $\overline{RS}$, $\overline{XY}$ e $\overline{YZ}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais.

$\frac{\overline{MR}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$ —— $\frac{6}{9} = \frac{8}{\text{med } \overline{YZ}}$ —— med $\overline{YZ}$ = 12 cm

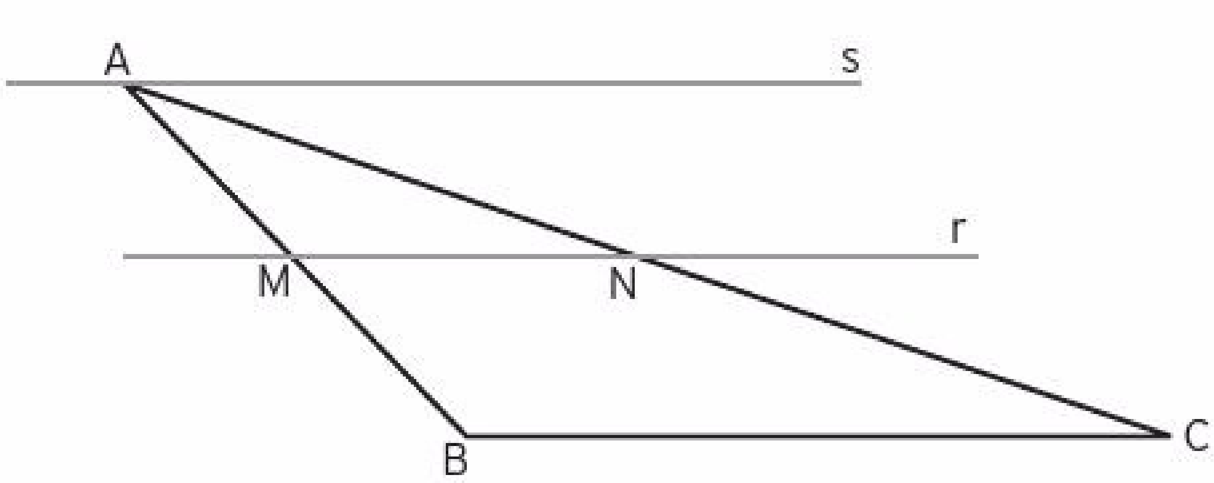
med $\overline{XZ}$ = med $\overline{XY}$ + med $\overline{YZ}$ = 8 + 12 —— med $\overline{XZ}$ = 20 cm

Investigue e explique (p. 95)

Nesta atividade, espera-se que os alunos formulem conjecturas sobre particularidades do ponto **N** em relação ao segmento de reta $\overline{AC}$. Oriente-os no desenvolvimento da demonstração de que **N** é ponto médio de $\overline{AC}$.

Resolução

- Traçamos a reta **s** paralela a $\overline{BC}$ e passando pelo ponto **A**. As retas **s**, **r** e $\overline{BC}$ formam um feixe de retas paralelas.

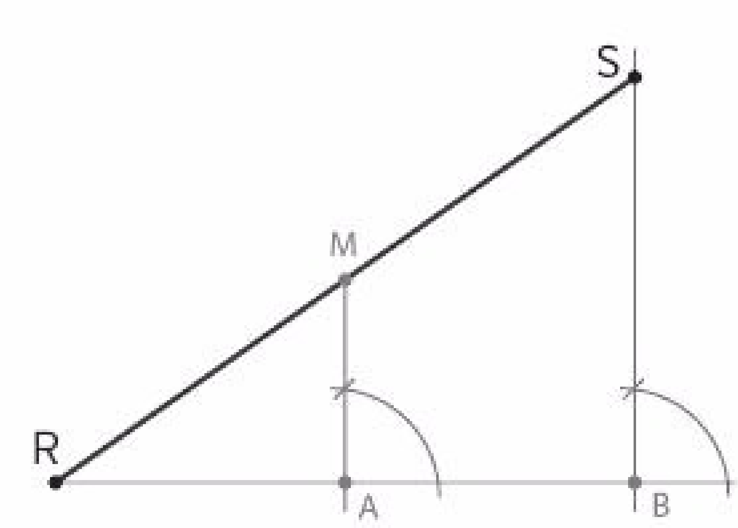


M é ponto médio de $\overline{AB}$ —— $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$

Se $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, então $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$

Assim, **N** é ponto médio de $\overline{AC}$.

- Para determinar o ponto médio do segmento de reta:
  - ✓ Traçamos uma semirreta com origem em **R**, não contida em $\overline{RS}$.
  - ✓ Marcamos **A** e **B** tais que med $\overline{RA}$ = med $\overline{AB}$.
  - ✓ Traçamos a reta.
  - ✓ Traçamos por **A** uma reta paralela a $\overline{BS}$.
  - ✓ O ponto médio de $\overline{RS}$ está na intersecção dessa paralela com $\overrightarrow{RS}$.



Sugestão de atividade complementar

Determinando a altura

Sempre que Zeca passava as férias no sítio de seu tio, ficava olhando para um coqueiro e imaginando qual seria sua altura. Certa vez, seu tio desafiou-o a resolver esse problema.

Zeca matutava ainda sobre o problema quando, certo dia, olhando para a sombra do coqueiro projetada no chão, ele achou que ela estava quase do mesmo comprimento do coqueiro. Logo, pensou: "Se a sombra começa cedinho muito grande e vai diminuindo até o meio-dia, vai chegar um instante em que seu comprimento será igual ao do coqueiro. Nesse momento, se eu medir a sombra, saberei a altura do coqueiro".

Agora, a dificuldade se resumia em saber o instante em que ocorreria tal coincidência. Você tem ideia?

Zeca resolveu o problema da seguinte maneira: fincou uma vareta de 30 cm no chão, em posição vertical, e começou a medir a sua sombra.

Na primeira vez, obteve 50 cm. Esperou um pouco e fez sucessivas medições, encontrando 46 cm, 42 cm e 35 cm. Quando a sombra da vareta ficou com 30 cm, mediu a sombra do coqueiro e encontrou 5,60 m.

Conclusão: se a vareta com 30 cm de sombra tem 30 cm de altura, então o coqueiro com 5,60 m de sombra tem 5,60 m de altura. Você concorda com ele?

Zeca foi correndo dar a resposta ao tio. Este duvidou e pediu ao sobrinho que mostrasse como havia obtido tal resultado. Zeca levou o tio ao local onde havia fincado a vareta e notou, decepcionado, que já havia passado o momento em que a sombra tinha o mesmo comprimento da vareta. E agora?

Depois de muita hesitação, Zeca teve uma ideia: esperou que a sombra da vareta, que ia diminuindo com o passar das horas, tivesse um comprimento igual à metade da vareta (15 cm) e mediu a sombra do coqueiro. Usou um raciocínio semelhante ao anterior e convenceu o tio. Qual foi o argumento usado por Zeca? Qual foi a medida encontrada por ele?

Faça como Zeca e tente medir a altura do mastro da bandeira de sua escola, a altura de uma árvore ou a altura de um poste próximo à escola.

UNIDADE 6 Semelhança e proporcionalidade

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Figuras semelhantes Semelhança em Geometria **2. Polígonos semelhantes** Identificando semelhança entre polígonos Polígonos semelhantes e perímetro Polígonos semelhantes e área O que é homotetia? **3. Os triângulos e a semelhança** O teorema fundamental da semelhança entre triângulos Casos de semelhança entre triângulos **Leitura:** Cálculo de distâncias inacessíveis	Espera-se que os alunos: • reconheçam situações que envolvem a proporcionalidade; • desenvolvam o conceito de semelhança entre figuras planas a partir de ampliações e reduções de figuras, identificando as medidas que não se alteram; • reconheçam e identifiquem polígonos semelhantes; • reconheçam as condições necessárias e suficientes que definem a semelhança entre dois triângulos; • reconheçam e identifiquem os casos de semelhança entre dois triângulos; • apliquem os casos de semelhança entre triângulos em demonstrações de propriedades e em resolução de problemas; • desenvolvam habilidades em resolver problemas que envolvem a semelhança entre triângulos.

Orientações didáticas

A origem histórica da semelhança entre triângulos na medição de distâncias inacessíveis pode ser recuperada ao se propor uma atividade de medição dessa natureza. Os alunos poderão até encontrar soluções semelhantes às obtidas por Tales.

Esse processo de cálculo está presente em vários projetos de Engenharia e em estudos de Astronomia, mostrando a importância de se conhecer em que condições se estabelece a semelhança entre dois triângulos, de se obter as razões que podem ser escritas como resultados dessa semelhança e de se aprender a utilizar esse conhecimento na resolução de situações-problema.

Os alunos também encontram no dia a dia, nas disciplinas de Ciências da Natureza e Geografia, situações que envolvem o cálculo de áreas, medidas indiretas e outros conceitos relacionados à semelhança. Por isso, é importante adquirir procedimentos para desenvolver habilidades e se apropriar do conceito de semelhança para se ter a compreensão geométrica do meio e da ideia de proporção nele presente.

Texto de aprofundamento

Ideias de semelhança

Em Matemática, **semelhança**, qualidade de **ser semelhante**, designa tudo o que tem a mesma forma:

- dois círculos são sempre **semelhantes**;
- dois cubos são sempre **semelhantes**;
- dois quadrados são sempre **semelhantes**.

Apesar desses exemplos, há casos em que é necessário relacionar alguns elementos para ter definida a semelhança:

- dois triângulos nem sempre são semelhantes, pois eles podem ter formas diferentes;
- já dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes;
- dois triângulos que têm dois ângulos respectivamente congruentes são sempre semelhantes.

Em outras palavras, duas figuras serão semelhantes se tiverem exatamente a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Outra maneira de expressar essa ideia é dizer que duas figuras são semelhantes se uma delas é, em escala, um modelo exato da outra.

- A noção de semelhança de figuras planas pode ser analisada sob dois aspectos:

1º) em relação aos triângulos, é suficiente que dois de seus ângulos sejam respectivamente congruentes para serem semelhantes;

2º) quanto aos outros polígonos: dois polígonos são semelhantes quando os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

A ideia de semelhança pode também ser explorada por meio de construções com régua, compasso e transferidor, principalmente ao se estudar as homotetias. Homotetia é uma relação que pode ser estabelecida entre todos os pontos correspondentes de duas figuras, em que uma representa a ampliação ou redução da outra, segundo determinada razão.

Em relação às isometrias, a contribuição está na proposição de que a congruência é um caso particular de semelhança.

A noção de semelhança, como vimos, pode ser percebida intuitivamente ao observarmos quadrados, cubos e esferas de tamanhos diferentes.

Essa noção tem muitas aplicações na vida prática, como na ampliação de fotografias, na elaboração de plantas baixas de construções, na confecção de maquetes de prédios etc. Ela também é muito utilizada pelos desenhistas em diferentes situações, inclusive na que se refere ao **cânone da beleza**.

Existem algumas proporções entre as medidas de partes do corpo humano que foram consideradas ideais por Leonardo da Vinci. Os desenhistas costumam conhecer e usar tais proporções, pois isso facilita a realização de seus trabalhos. Tomando, por exemplo, a altura da cabeça como unidade de medida, a altura total do corpo deverá ser aproximadamente igual a sete cabeças e meia.

Essa ideia de semelhança, porém, consequência da constância de todas as razões entre comprimentos correspondentes, não garante a semelhança entre pessoas.

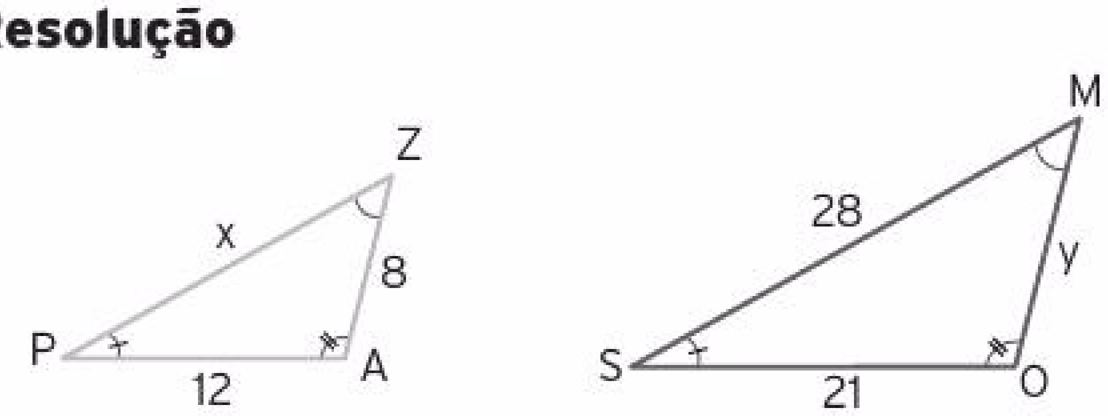
Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 116)

Nesta atividade, os alunos terão a oportunidade de aplicar os conhecimentos sobre semelhança de triângulos. Oriente-os na identificação de lados homólogos entre os elementos das figuras apresentadas.

As duas primeiras questões conduzem à resolução das outras perguntas colocadas: a determinação do valor de **x** e de **y** que representam medidas de lados de triângulos. Espera-se que os alunos reconheçam que as respostas poderão ser encontradas uma vez que se conheça a razão de semelhança.

Resolução



- Não, porque 8 cm é a medida de $\overline{AZ}$, 28 cm é a medida de $\overline{SM}$ e $\overline{AZ}$ e $\overline{SM}$ não são lados homólogos.
- O lado homólogo a $\overline{PA}$ é $\overline{SO}$.
- $\overline{PA}$ e $\overline{SO}$ são lados homólogos, e a razão de semelhança da figura menor para a maior é:

  $\frac{\overline{PA}}{\overline{SO}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
- Determinando os valores de **x** e **y**:

  Cálculo de **x**:

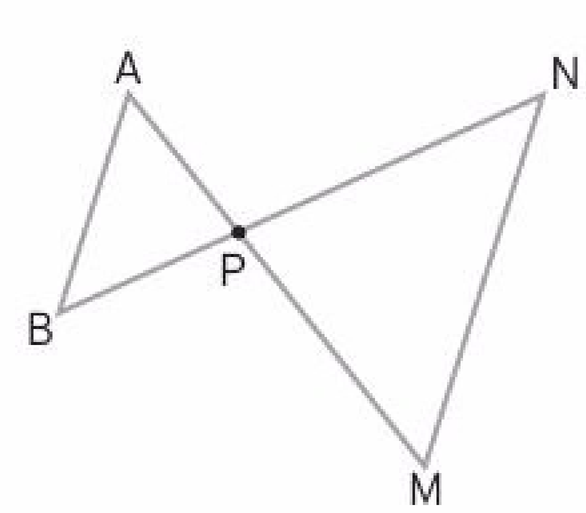
  $\frac{x}{28} = \frac{4}{7}$ —— $7x = 4 \cdot 28$ —— $x = 16$ cm

  Cálculo de **y**:

  $\frac{8}{y} = \frac{4}{7}$ —— $4y = 8 \cdot 7$ —— $y = 14$ cm

Troquem ideias e resolvam (p. 117)

Resolução



Se $\overline{AB} // \overline{MN}$, então $\overline{AM}$ é transversal. Assim, $\hat{A} \equiv M$ (alternos internos).

Se $\overline{AB} // \overline{MN}$, então $\overline{BN}$ é transversal. Assim, $\hat{B} \equiv \hat{N}$ (alternos internos) e $B\hat{P}A \equiv N\hat{P}M$ (o.p.v.).

Portanto, $\triangle ABP \sim \triangle MNP$, pois têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

Desafio – Construindo figuras semelhantes (p. 117)

Resolução

Nesta atividade, os alunos poderão verificar que é possível obter uma figura ampliada de outra por meio da composição de figuras iguais a uma delas.

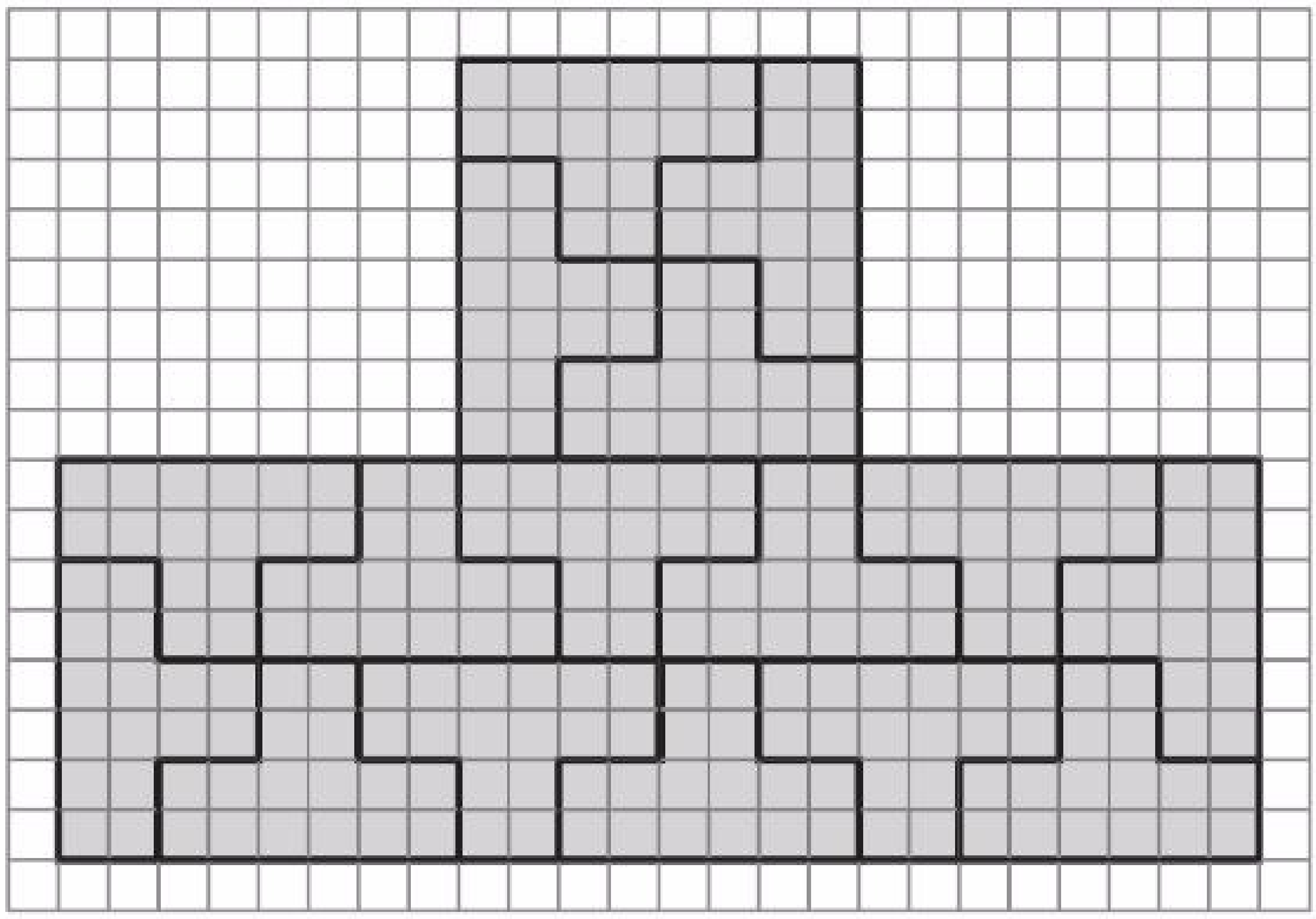
Chame a atenção deles para o fato de que a figura obtida nessa composição é semelhante à figura original.

Os alunos deverão observar que:

✓ os pontos continuam alinhados;

✓ a medida dos ângulos não se altera;

✓ os segmentos de reta homotéticos são proporcionais na razão definida.



Sugestões de atividades complementares

Obtendo um triângulo equilátero a partir de outros triângulos equiláteros

Desenhe triângulos equiláteros congruentes em uma folha de papel à parte e recorte-os. Ajuste lado com lado um triângulo a outro, sem sobrepô-los, até obter outro triângulo equilátero.

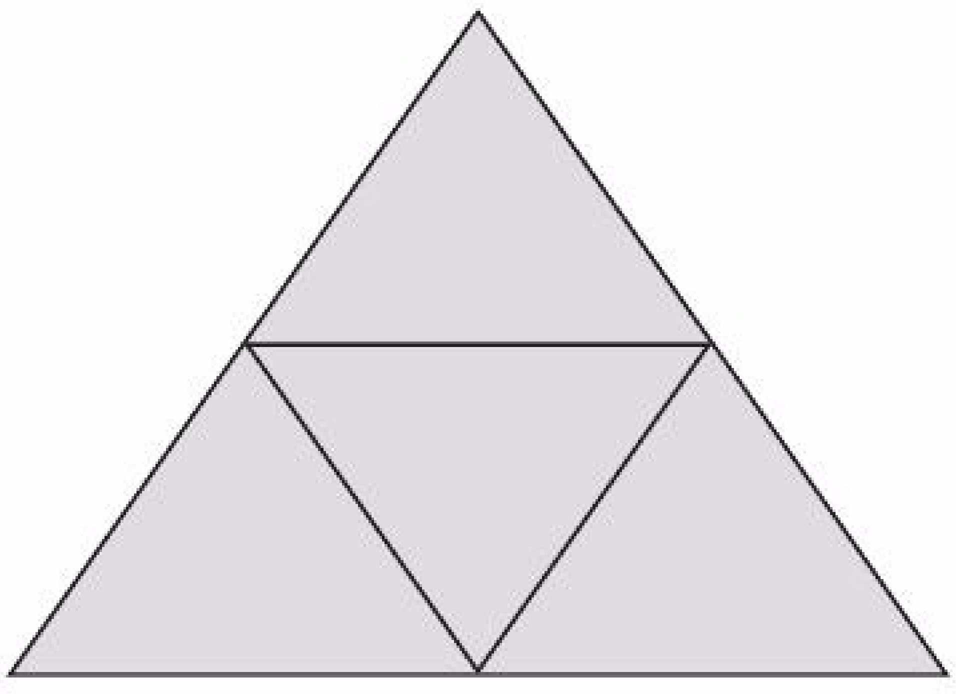
a) O que você observa em relação aos ângulos correspondentes aos ângulos do triângulo original?

b) Qual o menor número de triângulos necessários para se obter outro triângulo equilátero?

Resolução

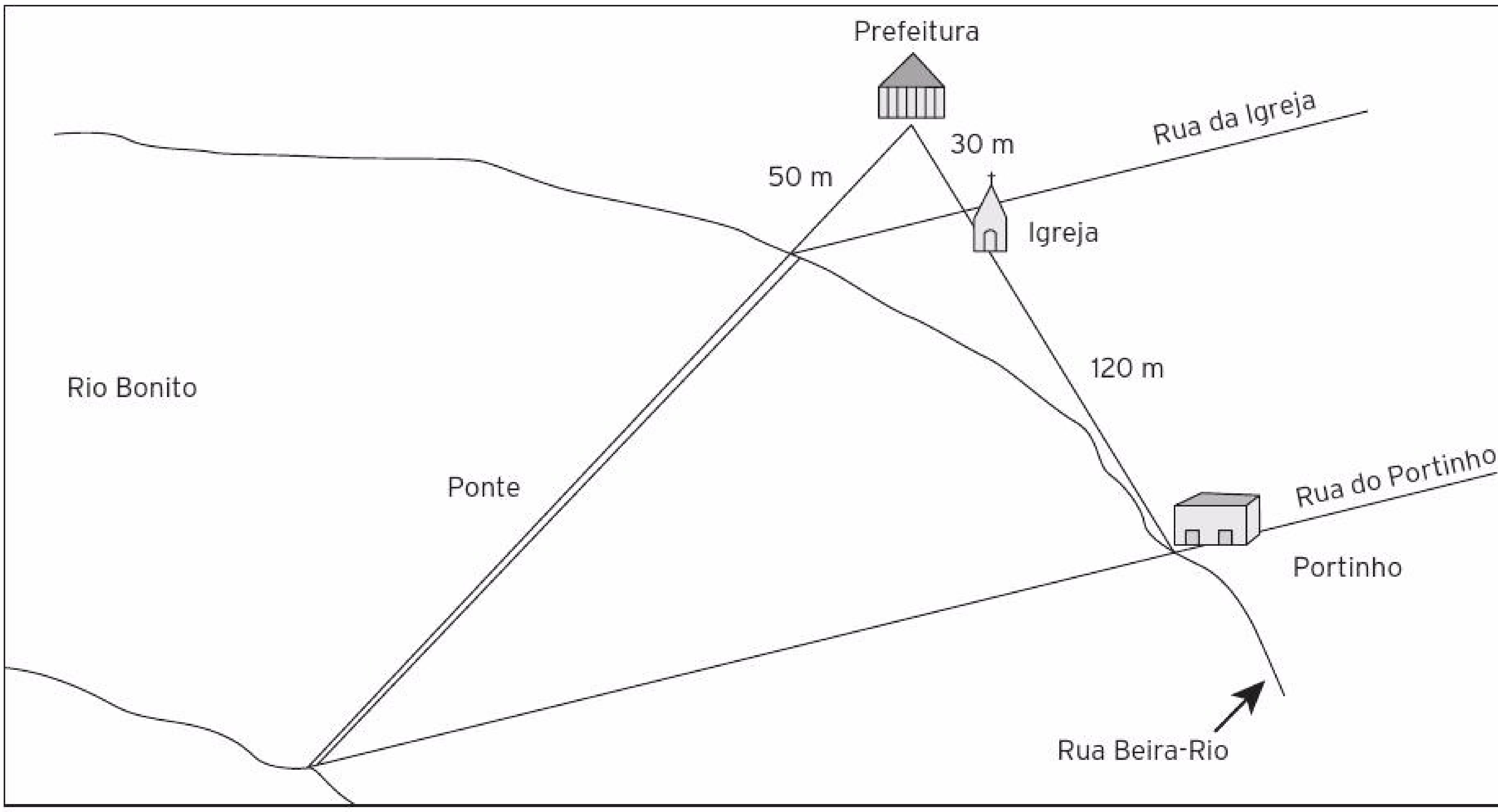
a) Os ângulos dos triângulos formados continuam congruentes e iguais a 60°.

b) 4 triângulos.



Obtendo o comprimento da ponte por semelhança de triângulos

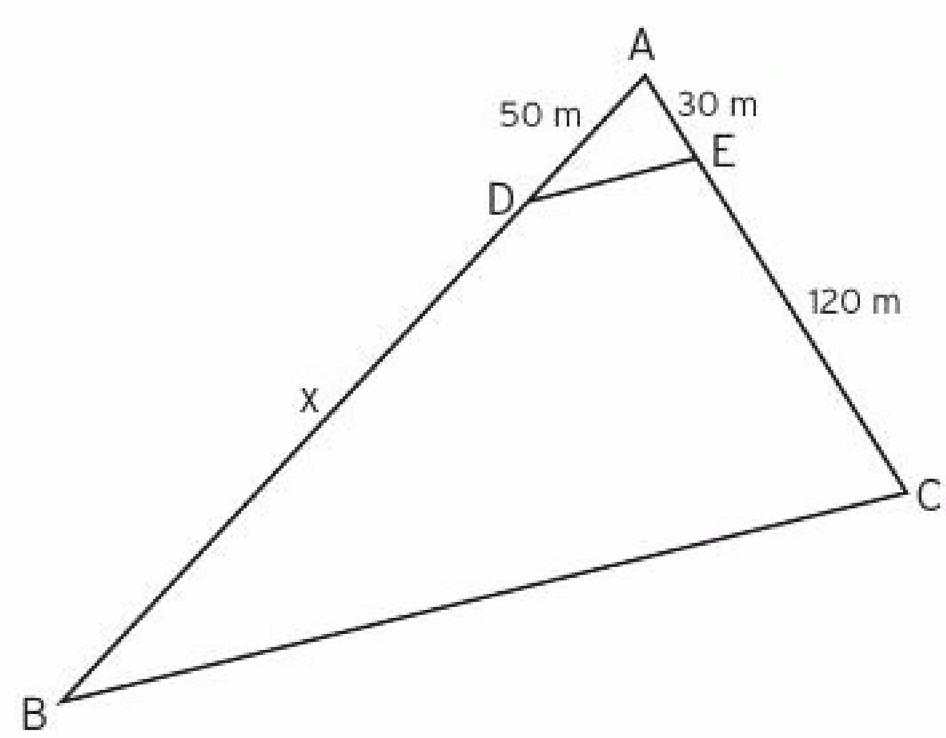
O prefeito de Vila Caiçara vai contratar empreiteiros para construir uma ponte sobre o rio Bonito. Para determinar o comprimento da ponte, foi feito o esboço a seguir:



Sabendo que a rua da Igreja e a rua do Portinho são paralelas, determine o comprimento da ponte que será construída.

Resolução

Como a rua da Igreja e a rua do Portinho são paralelas, então, no desenho a seguir, $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são segmentos paralelos.



Se $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, os triângulos ADE e ABC são semelhantes, pois $\hat{B} \equiv \hat{D}$ e $\hat{C} \equiv \hat{E}$. Sendo **x** o comprimento da ponte, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \text{ ——— } \frac{50}{50 + x} = \frac{30}{150}$$

$7500 = 1500 + 30x$ ——— $x = 200$ m

O comprimento da ponte que será construída deverá ser de 200 m.

UNIDADE 7 Semelhança e medidas

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Relações métricas nos triângulos retângulos Semelhanças em um triângulo retângulo As relações métricas e a resolução de problemas O teorema de Pitágoras **2. Quadrados, triângulos e o teorema de Pitágoras** Quadrados e o teorema de Pitágoras Triângulos equiláteros e o teorema de Pitágoras **Leitura:** "A proporção é linda!"	Espera-se que os alunos: • identifiquem as relações métricas em um triângulo retângulo; • utilizem as relações métricas nos triângulos retângulos em resolução de problemas; • compreendam a demonstração algébrica do teorema de Pitágoras; • apliquem o teorema de Pitágoras em várias situações de cálculo de medida de lado, altura e diagonal de figuras geométricas e em resolução de problemas.

Orientações didáticas

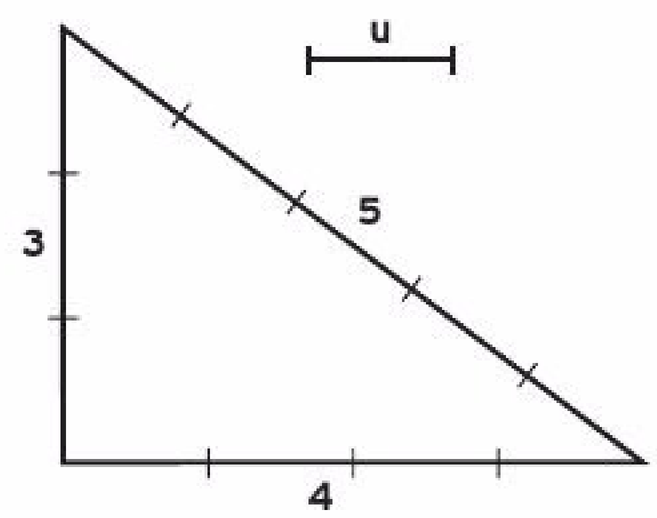
Os triângulos retângulos e suas propriedades merecem destaque devido à utilização frequente das relações métricas que resultam de seu estudo na resolução de várias situações-problema.

A altura relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo decompõe-no em dois outros triângulos retângulos. A semelhança entre eles determina algumas fórmulas chamadas de **relações métricas no triângulo retângulo**. São essas as relações usadas na resolução de vários outros problemas. Dentre elas, o teorema de Pitágoras é o mais utilizado e também o mais famoso: aplicando-o, podemos resolver muitos problemas de cálculo que envolvem medida de segmentos de reta. Observa-se também sua aplicação no estudo relacionado à semelhança e medidas de polígonos regulares e circunferências. Esse estudo contribui para a construção de conceitos e propriedades relevantes para o ensino de Geometria.

Texto de aprofundamento

Os números pitagóricos

Ao construir um triângulo cujos lados medem **3 u**, **4 u** e **5 u**, de acordo com a recíproca do teorema de Pitágoras, como $3^2 + 4^2 = 5^2$ (9 + 16 = 25), um triângulo com lados medindo **3 u**, **4 u** e **5 u** será um triângulo retângulo.



Essa propriedade é conhecida há muito tempo e foi utilizada por vários povos antigos. Diversos documentos escritos na época da construção das grandes pirâmides do Egito revelam que os construtores egípcios já utilizavam uma corda com 13 nós igualmente espaçados para construir triângulos e, dessa forma, obter um ângulo reto. No entanto, foi somente no século VI a.C., com Pitágoras, que essa propriedade fundamental tornou-se parte de um estudo mais amplo sobre os triângulos retângulos.

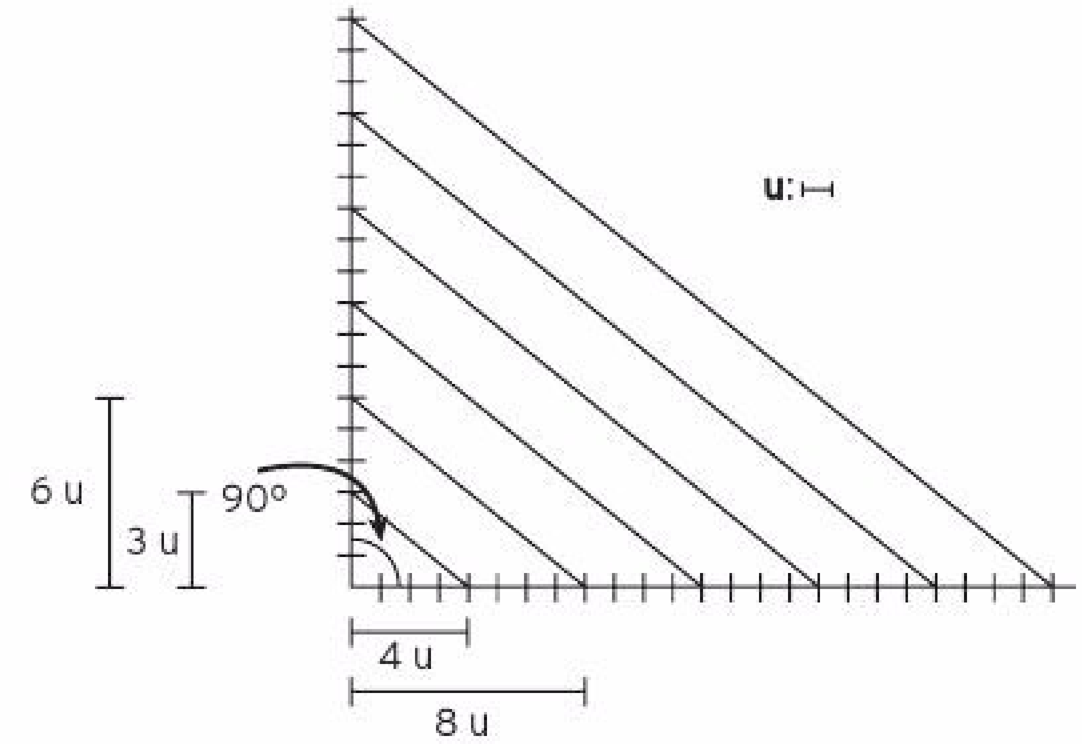
Pitágoras foi o fundador da Escola Pitagórica e, para aqueles que faziam parte dela, *"a harmonia do Universo, o movimento dos planetas, a vida animal e a vegetal, o som, a luz só podiam ser explicados através dos números"*, no caso, os números inteiros positivos.

Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo são expressas por três números inteiros, esses números são chamados de **números pitagóricos**.

Como exemplo, temos os números 3, 4 e 5, mas eles não são únicos. Ao multiplicarmos esses números por 2, 3, 4, 5, 6, ..., e assim sucessivamente, obteremos uma infinidade de termos de números pitagóricos. Observe na tabela a seguir:

3	4	5	Números pitagóricos
3×2	4×2	5×2	6, 8, 10
3×3	4×3	5×3	9, 12, 15
3×4	4×4	5×4	12, 16, 20
3×5	4×5	5×5	15, 20, 25
3×6	4×6	5×6	18, 24, 30
...	...	...	...

Na figura a seguir, os triângulos sobrepostos têm lados medidos na unidade **u**. Observe que, ao desenhá-los nessa situação, as retas suportes das hipotenusas são retas paralelas.



De modo geral:

Se **a**, **b** e **c** são três números inteiros e positivos, tais que $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$, dizemos que **a**, **b** e **c** são números pitagóricos.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 137)

O objetivo principal desta atividade é desenvolver uma demonstração do teorema de Pitágoras recorrendo à decomposição de quadrados em triângulos e outros quadrados. Oriente seus alunos a reconhecerem que na figura 1, o quadrado ABCD foi decomposto em triângulos retângulos e um quadrado de lado **a** e que parte da figura 2 resulta da composição de triângulos presentes na decomposição da figura 1.

Resolução

Figura 1

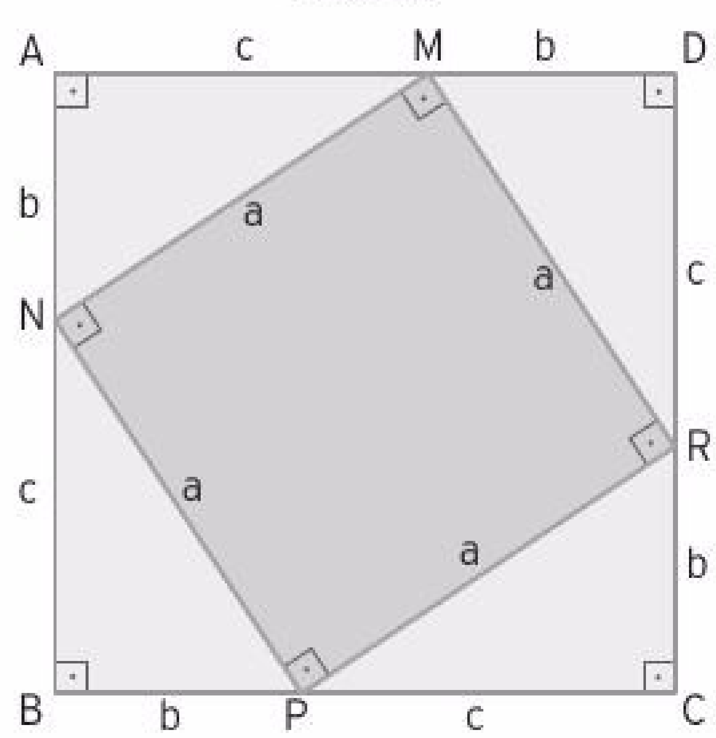
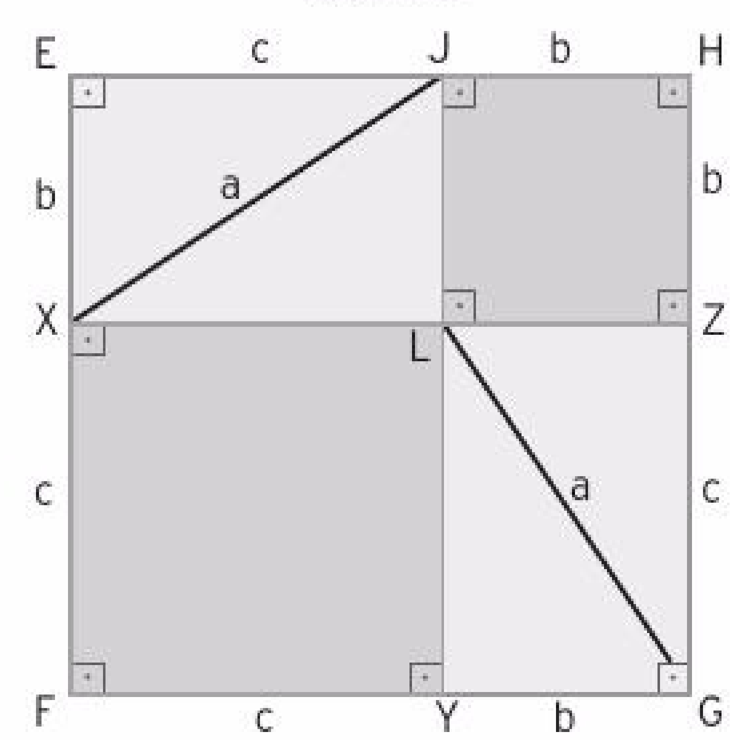


Figura 2



Na figura 1, o quadrado ABCD foi decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes de lados **a**, **b** e **c** e um quadrado de lado **a**. Portanto a área de ABCD é a soma das áreas dessas figuras.

Área ABCD = Área MNPR + 4 · Área ANM

Na figura 2, o quadrado EFGH foi composto por quatro triângulos retângulos congruentes de lados **a**, **b** e **c**, um quadrado de lado **b** e outro de lado **c**. Portanto a área de EFGH é a soma das áreas dessas figuras.

Área EFGH = Área HJLZ + Área XFYL + 4 Área EXJ

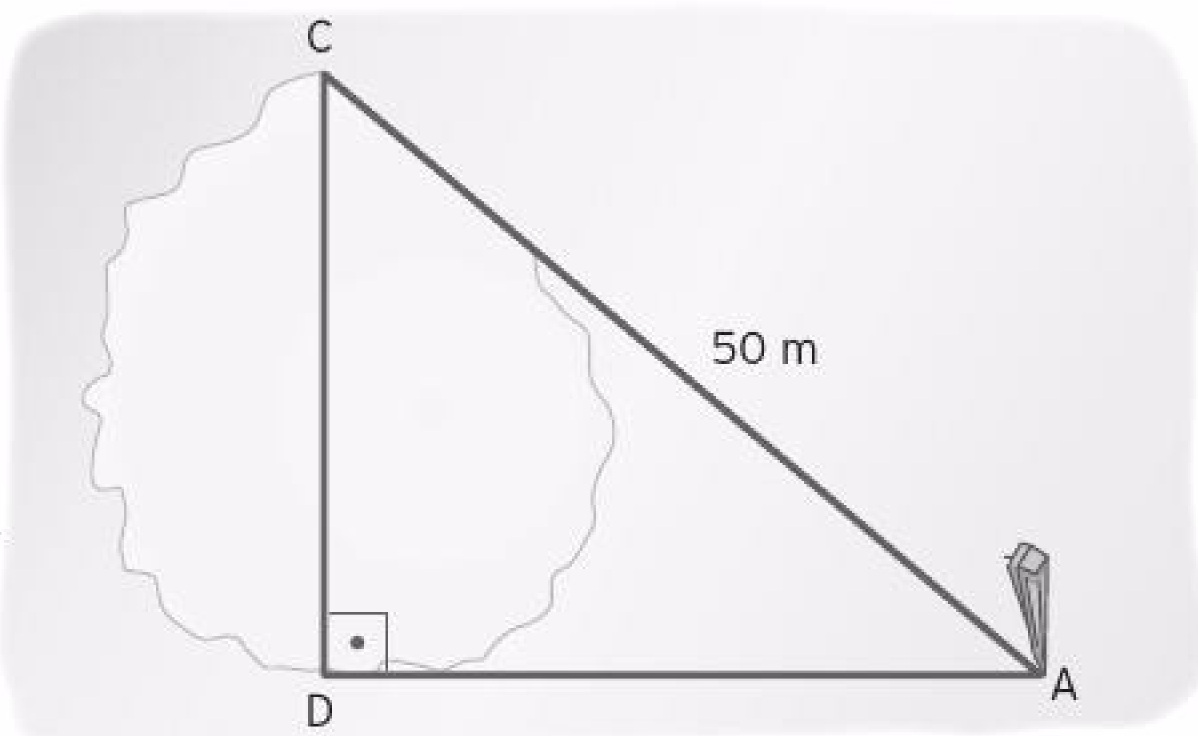
$$\left.\begin{array}{l}\text{Área ABCD} = (b + c)^2 \\ \text{Área EFGH} = (b + c)^2\end{array}\right] \text{Área ABCD} = \text{Área EFGH}$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ANM \equiv \triangle EXJ \\ \triangle CRP \equiv \triangle LJX \\ \triangle DMP \equiv \triangle ZLG \\ \triangle NBP \equiv \triangle YGL\end{array}\right] \underbrace{\text{Área NPRM}}_{a^2} = \underbrace{\text{Área JLZH}}_{b^2} + \underbrace{\text{Área XFYL}}_{c^2}$$

Logo, $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Desafio – "Não vale atravessar o lago!" (p. 138)

Resolução



Zapt

Das informações dadas, temos:

med $\overline{DA} = \frac{4}{5} \cdot$ med $\overline{AC} = \frac{4}{5} \cdot 50$ —— med $\overline{DA} = 40$ m

No $\triangle ACD$, pelo teorema de Pitágoras tem-se:

$(\text{med } \overline{AC})^2 = (\text{med } \overline{CD})^2 + (\text{med } \overline{DC})^2$

$50^2 = (\text{med } \overline{CD})^2 + 40^2$

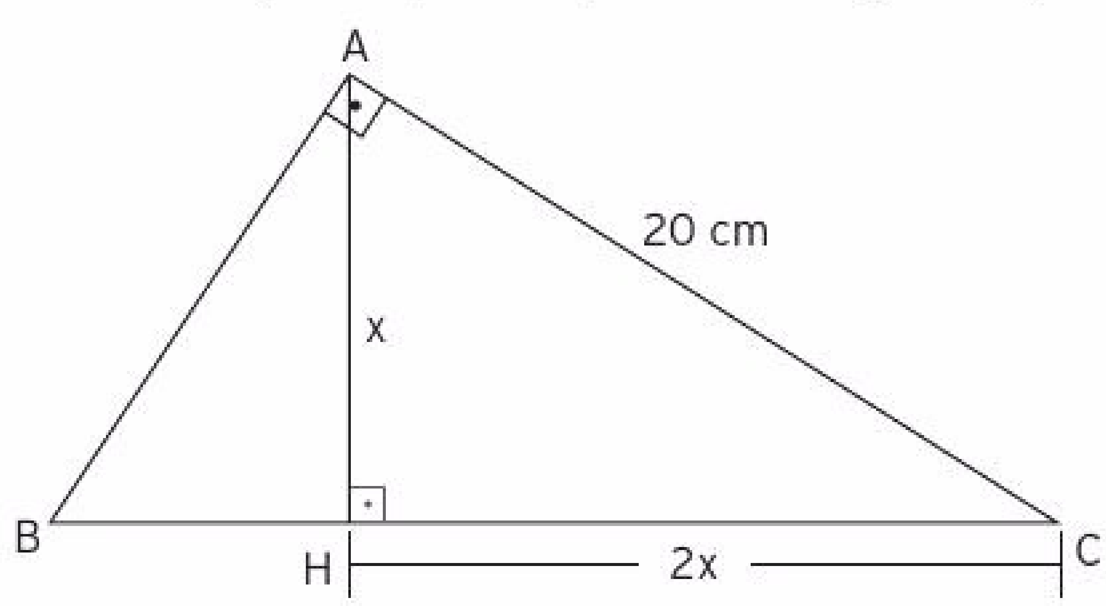
$2500 = (\text{med } \overline{CD})^2 + 1600$ —— med $\overline{CD} = \sqrt{900}$ m $= 30$ m

A distância de **C** a **D** é de 30 m.

Troquem ideias e resolvam (p. 140)

Resolução

Pelas informações do problema, obtemos a seguinte figura:



med $\overline{CA} = 20$ cm

med $\overline{HC} = 2 \cdot$ med $\overline{AH} = 2x$

No $\triangle AHC$, temos:

$20^2 = (2x)^2 + x^2$

$x^2 + 4x^2 = 400$

$5x^2 = 400$ —— $x = \pm\sqrt{80}$ —— $x = \pm 4\sqrt{5}$

Como **x** representa uma medida, $x = 4\sqrt{5}$ cm, ou seja, $\overline{AH}$ é igual $4\sqrt{5}$ cm.

No $\triangle ABC$, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$(\text{med } \overline{BC})^2 = y^2 + 20^2$

med $\overline{BC} = \sqrt{y^2 + 400}$

Das relações métricas no $\triangle ABC$ conclui-se que:

med $\overline{AB} \cdot$ med $\overline{CA} =$ med $\overline{BC} \cdot$ med $\overline{AH}$

$y \cdot 20 = \sqrt{y^2 + 400} \cdot 4\sqrt{5}$

$(y \cdot 20)^2 = (\sqrt{y^2 + 400} \cdot 4\sqrt{5})^2$

$400y^2 = (y^2 + 400) \cdot 16 \cdot 5$

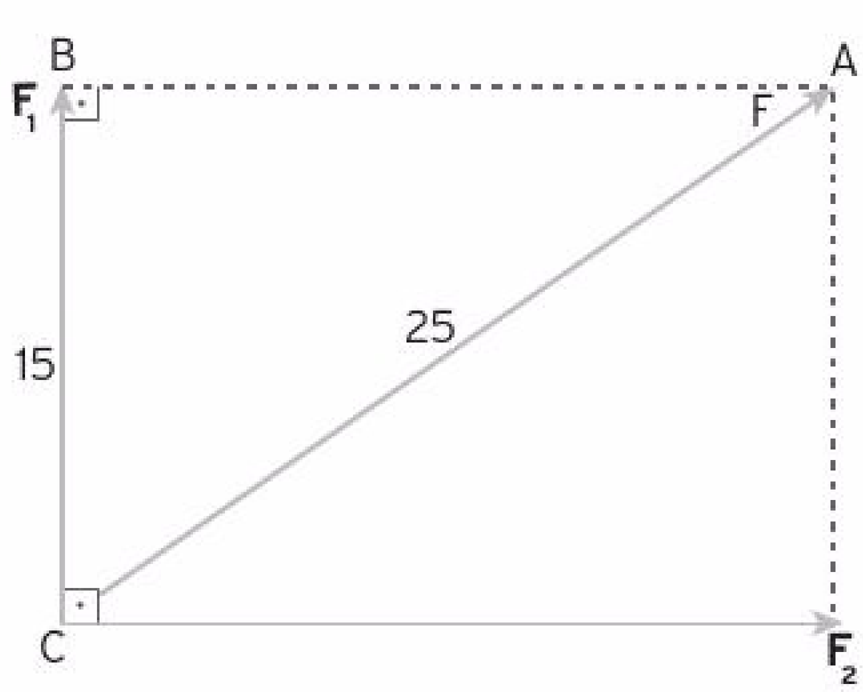
$400y^2 - 80y^2 = 32\,000$

$320y^2 = 32\,000$ $y = 10$ cm

Como o cateto $\overline{CA}$ mede 20 cm e o cateto $\overline{AB}$ mede 10 cm, o cateto menor mede 10 cm.

Desafio – O teorema de Pitágoras e o cálculo de forças (p. 140)

Resolução



O $\triangle ABC$ é retângulo em $\hat{B}$ e med $\overline{AB} = F_2$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(\text{med } \overline{AC})^2 = (\text{med } \overline{AB})^2 + (\text{med } \overline{BC})^2$

$25^2 = 15^2 + (F_2)^2$

$(F_2)^2 = 625 - 225$

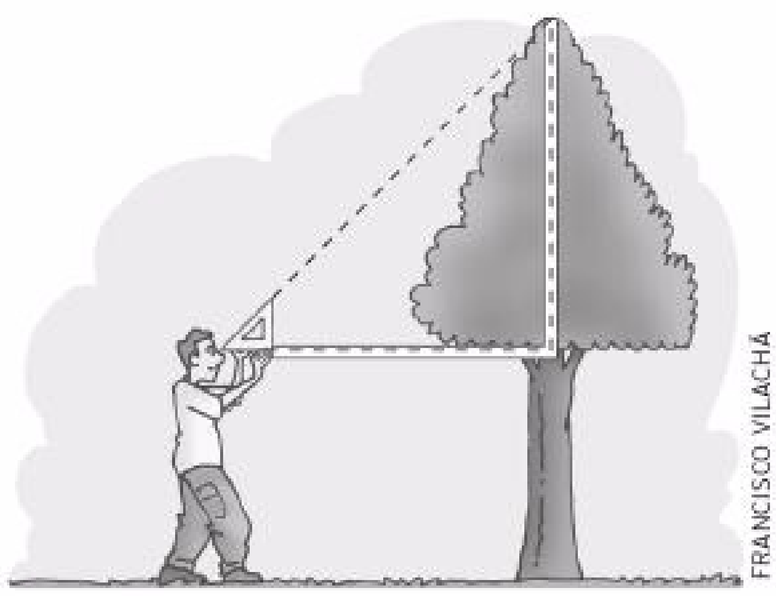
$F_2 = \sqrt{400}$ —— $F_2 = 20$

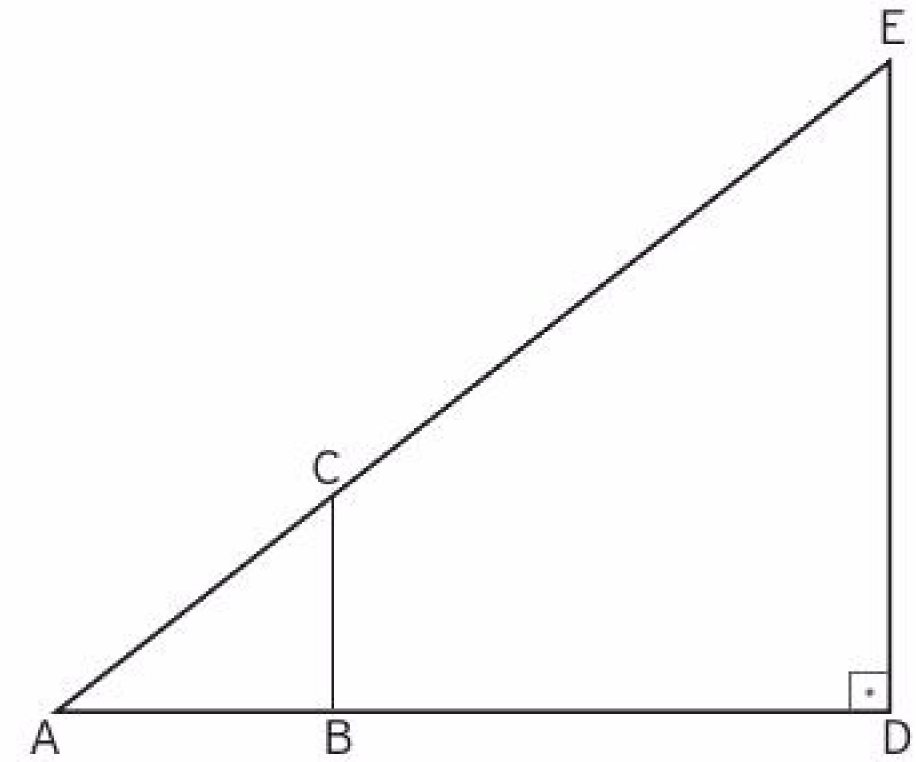
A intensidade da outra força componente é 20 kgf.

Desafio – Medindo com o "olho" ... e com um esquadro (p. 146)

Resolução

Da situação obtemos os seguintes triângulos:

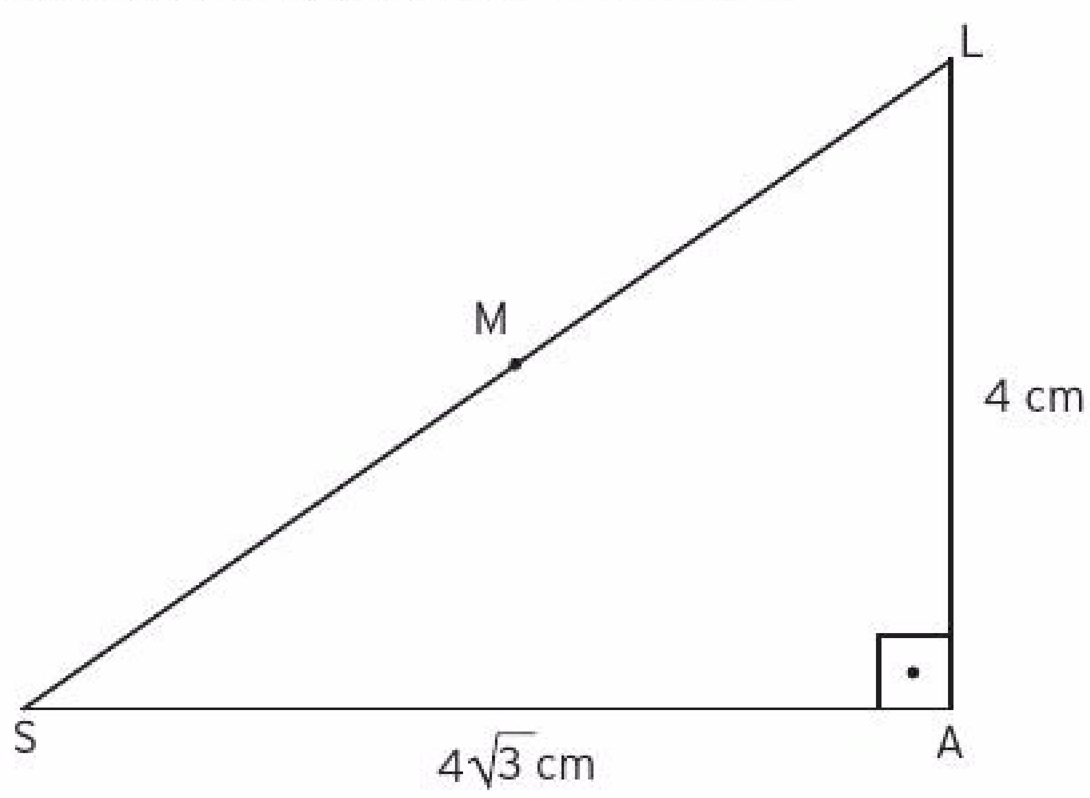




Temos que o $\triangle ABC$ e o $\triangle ADE$ são triângulos retângulos e têm um ângulo agudo comum ($\hat{A}$), portanto, eles **são semelhantes**.

Sugestão de atividade complementar

O Na figura abaixo, $\triangle SAL$ é um triângulo retângulo, **M** é ponto médio da hipotenusa desse triângulo.



Mostre que $\triangle MAL$ é um triângulo equilátero.

Resolução

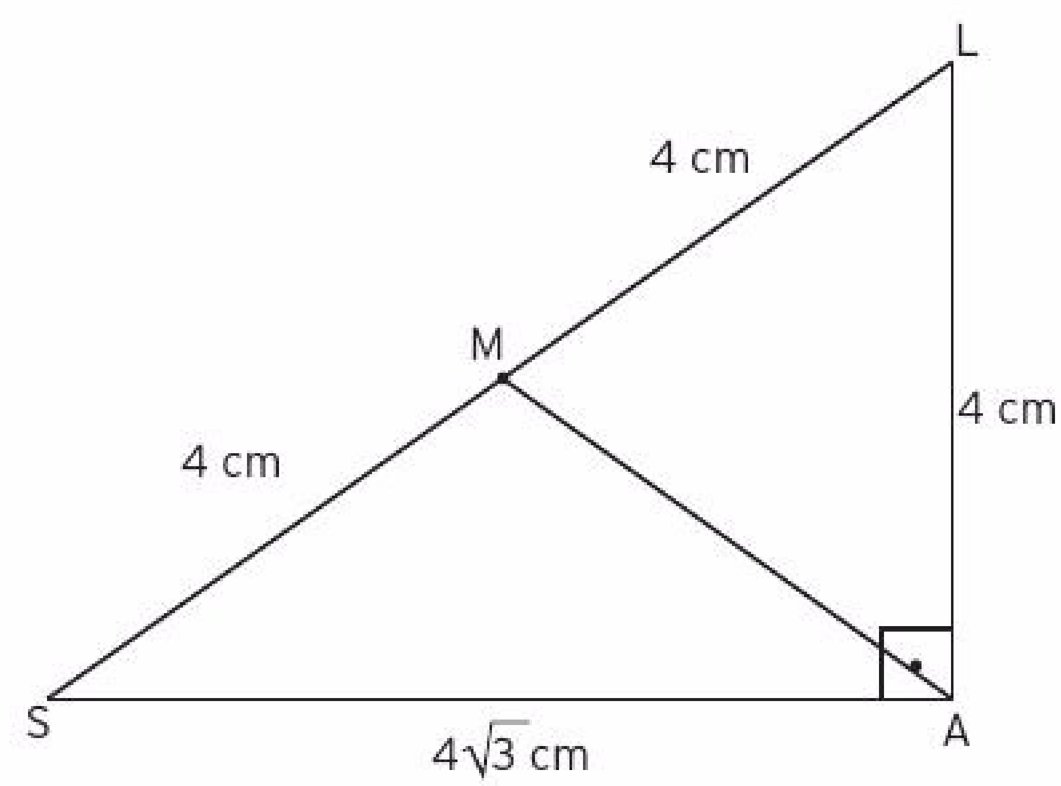
$(\text{med } \overline{SL})^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2$

$(\text{med } \overline{SL})^2 = 64$ —— med $\overline{SL}$ = 8 cm

Como **M** é ponto médio de $\overline{SL}$, med $\overline{ML}$ =

$= \dfrac{\text{med } \overline{SL}}{2}$ —— med $\overline{ML}$ = 4 cm

No triângulo $\triangle SAL$, temos:



$(\text{med } \overline{MA})^2 = 4 \cdot 4 = 16$ —— med $\overline{MA}$ = 4 cm

Como todos os lados do triângulo MAL medem 4 cm, o triângulo é equilátero.

UNIDADE 8 Estatística e probabilidade

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Informações estatísticas Variável estatística Distribuição de frequências **2. Médias** Moda Média aritmética Média aritmética em uma tabela de distribuição de frequências Média ponderada Mediana Mediana em uma tabela de distribuição de frequências Comparando moda, média e mediana **3. Probabilidade** Experimentos aleatórios Calculando probabilidade	Espera-se que os alunos: • representem e analisem dados em tabelas de frequências e gráficos, fazendo prognósticos a partir deles; • construam tabelas de distribuição de frequências; • comparem, diferenciem e determinem média, mediana e moda; • estimem possibilidades e verifiquem as chances de ocorrência de um evento em um experimento.

Orientações didáticas

Com este tema espera-se que os alunos percebam que a maioria das ações cotidianas está condicionada ao planejamento prévio. Em contrapartida, poderão avaliar que a maioria das surpresas, das imprevisíveis ocorrências e dos inevitáveis fatores decorre da falta de um planejamento. A postura de planejar, prever e tomar decisões faz parte do ensino de Estatística e Probabilidades.

Espera-se que os alunos percebam que o Tratamento da Informação, desde a pesquisa até a apresentação dos resultados, é uma tarefa complexa e que exige compreensão.

O planejamento da coleta de dados e o tratamento de determinada informação são fundamentais e constituem a base do estudo de Estatística.

É importante proporcionar aos alunos acesso à literatura existente sobre o assunto. Auxilie-os também na seleção dos processos de coleta, certificando-se de que os objetivos estejam claros e que o âmbito da pesquisa esteja delimitado.

A coleta de dados pode ser feita por amostras. Os alunos deverão compreender que a amostragem representa unidades elementares de um universo definido, tendo como objetivo revelar algo sobre esse universo. O trabalho por amostras leva menos tempo e as informações são, frequentemente, fiéis.

A apresentação de resultados estatísticos exige conhecimento do assunto, organização e bom senso. O gráfico é uma das formas mais comuns de apresentação estatística, cujo objetivo é representar resultados numéricos de forma visual simples, clara e interessante.

Todo gráfico deve ter título bem claro que conceitue o assunto em pauta, de forma a excluir notas explicativas sobre o fenômeno abordado. Outros itens importantes são a legenda e a fonte. A legenda indica cada variável e a fonte indica a origem dos dados apresentados no gráfico. Esses itens garantem a autenticidade das informações.

Texto de aprofundamento

Chances e riscos

Quase tudo em nossa vida é, em maior ou menor grau, uma questão de "chance". Como podemos saber qual será nossa sorte?

Assim, por exemplo, nossas características como seres humanos são determinadas por um agrupamento imprevisível de genes; a carreira que seguimos é, algumas vezes, influenciada por fatores casuais; e até um encontro "ao acaso" pode mudar nosso destino.

Ao lançarmos uma moeda sobre uma mesa, qual face ficará para cima: cara ou coroa? Ao lançarmos dois dados, qual será a soma dos pontos das faces superiores: 2, 3, 4, ... ou 12? Ao utilizarmos uma lâmpada incandescente, quanto tempo ela funcionará até queimar: 100, 200, 300, 400 ou 500 horas? Ao testarmos um aparelho eletrônico em uma linha de produção, ele apresentará 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 defeitos? Ao aplicarmos uma nova vacina para combater uma doença grave de determinada população, ela curará "mais" ou "menos" da metade desses doentes?

Há uma imensa quantidade de situações, como as mencionadas, que podem ser classificadas como "imprevisíveis" por não podermos dizer, com certeza, qual será o resultado ao realizarmos cada uma delas.

Em casos como esses, em que há várias opções **possíveis** de resultado, podemos estimar ("medir") as "chances" de ocorrência de cada um desses resultados.

Com isso surgiu a Teoria da Probabilidade, um ramo da Matemática com aplicações que vão desde experimentos em Física Nuclear até pesquisas de mercado.

Por meio da Probabilidade, é possível prever as chances de sucesso de um grande número de eventos e antecipar soluções para possíveis problemas.

Comentários e resolução de atividades

Troquem ideias e resolvam (p. 155)

Os conceitos importantes aqui trabalhados são os de **frequência absoluta** e **frequência relativa** de um experimento, tendo em vista a organização das informações obtidas em tabelas, para facilitar a interpretação dos dados.

Explique aos alunos que numa tabela é importante constar:

- título ou cabeçalho com informações que resumem o que está sendo apresentado;
- os dados representados por colunas e/ou linhas;
- no rodapé, a fonte, que é o local de onde a informação foi retirada.

Desafio – O reajuste (p. 165)

Antes de iniciar o trabalho, procure levantar suas hipóteses a respeito dos conhecimentos que supõe que a turma já dispõe a respeito do assunto ou do próprio texto. Essa reflexão possibilita construir um repertório possível de intervenções didáticas.

Resolução

- A tabela dada representa uma distribuição de frequências. Para encontrar o valor do salário médio é preciso calcular a média aritmética dessa distribuição, isto é, o quociente entre a soma dos produtos (produto do valor da variável pela frequência) e o total das frequências:

média ponderada =

$$= \frac{4 \cdot 3000 + 1 \cdot 6000 + 4 \cdot 1800 + 3 \cdot 1400 + 8 \cdot 800}{20} =$$

$$= \frac{12000 + 6000 + 7200 + 4200 + 6400}{20} =$$

$$= \frac{35\,800}{20} = 1790$$

O salário médio é de R$ 1790,00.

- Com o reajuste de 12%, o novo salário passará a ser:

novo salário = salário antigo + 12% do salário antigo
novo salário = salário antigo + 0,12 do salário antigo
novo salário = 1,12 do salário antigo

Salário antigo (R$)	Novo salário (R$)	Nº de funcionários
3000	$1{,}12 \cdot 3000 = 3360$	4
6000	$1{,}12 \cdot 6000 = 6720$	1
1800	$1{,}12 \cdot 1800 = 2016$	4
1400	$1{,}12 \cdot 1400 = 1568$	3
800	$1{,}12 \cdot 800 = 896$	8

nova média aritmética =

$$= \frac{3\,360 \cdot 4 + 6\,720 \cdot 1 + 2\,016 \cdot 4 + 1568 \cdot 3 + 896 \cdot 8}{20} =$$

$$= \frac{13\,440 + 6\,720 + 8\,064 + 4\,704 + 7\,168}{20} =$$

$$= \frac{40\,096}{20} = 2004{,}80$$

$$\frac{\text{nova média}}{\text{média anterior}} = \frac{2004{,}80}{1790} = 1{,}12$$

nova média = 1,12 média anterior = 1 média anterior + + 0,12 média anterior

A nova média aritmética corresponde a 12% a mais em relação à média anterior.

Investigue e explique (p. 165)

Esta é uma atividade em que são utilizadas as noções de cálculo de média aritmética e mediana, além da compreensão dos sentidos dessas palavras em outros contextos.

Desafio – Resultados ao lançar dois dados (p. 169)

No lançamento de um dado comum, os resultados possíveis e a probabilidade de cada caso ocorrer são conhecidos, mas não é possível saber o resultado exato que sairá no dado.

Com isso, são introduzidos os conceitos de "experimento aleatório" e "espaço amostral".

Um modo "inicial" de entendimento do que significa **probabilidade de ocorrência de um evento** consiste em realizar uma espécie de "contagem" dos resultados ocorridos ou desejados na realização do experimento e dividi-lo pelo número total de resultados possíveis.

Resolução

a) Observando a tabela, é possível contar 36 pares ordenados que representam o conjunto dos resultados possíveis, ou seja, o espaço amostral.

b) Evento "sair 3": resultados que aparecem na 3ª linha e 3ª coluna.

Vermelho \ Azul	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	**(1, 3)**	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	**(2, 3)**	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	**(3, 1)**	**(3, 2)**	**(3, 3)**	**(3, 4)**	**(3, 5)**	**(3, 6)**
4	(4, 1)	(4, 2)	**(4, 3)**	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	**(5, 3)**	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	**(6, 3)**	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

São 11 resultados possíveis.

c) A probabilidade de "sair 3" em pelo menos um dos dados é $\frac{11}{36}$ ou 0,3055... ou 30,55%.

Sugestões de atividades complementares

Contando possibilidades

Utilize o diagrama árvore para contar as possibilidades nas situações indicadas:

- Ao lançar três vezes uma moeda, qual é a probabilidade de sair "cara" no primeiro lançamento?
- Responda às questões a seguir sobre as possibilidades de soma dos números obtidos nas faces de dois dados lançados simultaneamente.
  a) Quais são as possibilidades de ocorrer soma 5?
  b) Quais são as possibilidades de ocorrer soma menor que 5?
  c) Quais são as possibilidades de ocorrer soma menor ou igual a 5?

Resposta

- $\frac{1}{2}$
- Observe no quadro as possibilidades de somas obtidas no lançamento de dois dados:

Dado 2 \ Dado 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) $\frac{4}{36}$ ou $\frac{1}{9}$

b) $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$

c) $\frac{10}{36}$ ou $\frac{5}{18}$

UNIDADE 9 Funções

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Funções: significados e registros O que é função? Funções: registros **2. Função de 1º grau** O que é uma função de 1º grau? Representação gráfica Retas e ângulos Zero de uma função de 1º grau **3. Função de 1º grau: estudo de sinais** Estudando os sinais	Espera-se que os alunos: • compreendam o significado de função e identifiquem variáveis independentes e dependentes; • identifiquem, analisem e representem graficamente a função de 1º grau.

Orientações didáticas

É nesse momento que os alunos têm o primeiro contato com as funções, um contato que deve iniciar-se pela compreensão do significado e pela percepção da interdependência entre duas grandezas, pois essas são questões muito mais relevantes que as definições formais e abstratas.

A construção do conceito de função é um processo demorado, e o nível de compreensão varia de um aluno para outro. Assim, partimos de situações-problema concretas e próximas da realidade dos alunos, o que subsidia a compreensão e o significado de uma relação de interdependência entre duas grandezas (quando uma grandeza varia, a outra também varia segundo uma lei). No caso da função de 1º grau, essa variação mantém uma proporcionalidade.

Este é o momento em que relacionamos a Álgebra com a Geometria por meio da Geometria Analítica, campo da Matemática em que é possível fazer um estudo algébrico das curvas geométricas.

Ao fazerem as atividades propostas, os alunos devem chegar à conclusão de que os gráficos da função de 1º grau $y = ax + b$, para **x** com valores reais, são sempre retas. Assim, certifique-se de que eles conseguem perceber que para construir gráficos dessa função não é necessário atribuir muitos valores para **x**: bastam apenas dois. Com eles calculamos os valores correspondentes de **y**, determinamos os dois pontos do plano cartesiano que representam os pares calculados e traçamos a reta que contém esses dois pontos.

É fundamental destacar o significado da equação de 1º grau no contexto de uma função de 1º grau: é a equação que determina o zero da função. Graficamente ela é a abscissa do ponto de intersecção da reta que a representa com o eixo das abscissas.

O estudo dos sinais da função de 1º grau subsidia a resolução de inequações de 1º grau.

Texto de aprofundamento

Funções

O conceito de função é um dos mais importantes não só em Matemática como também em outras áreas. Uma função pode expressar a interdependência entre duas grandezas segundo determinada lei, uma relação de causa e efeito ou a correspondência definida entre as grandezas envolvidas.

A interdependência entre duas grandezas pode ser representada pela expressão: $\mathbf{w = f(z)}$.

Chamamos **z** de variável independente ou variável arbitrária e **w** de variável dependente.

A maioria das funções possui várias representações, como, por exemplo, gráfica, algébrica, tabular ou por meio de diagramas. Essas representações podem ser utilizadas para analisar fenômenos e registrar regularidades, fazer generalizações e estabelecer dependências.

O gráfico é a representação geométrica de uma função. Ele é composto de um conjunto de pontos que podem definir a função.

As ideias básicas envolvidas no estudo de funções são as de variável, dependência, regularidade e generalização. Os instrumentos utilizados são o plano cartesiano e o cálculo algébrico. Esse estudo relaciona-se com inúmeros outros assuntos desenvolvidos ao longo do período escolar, principalmente o trabalho com o pré-cálculo e o estudo de proporções neste nível de ensino, e mais tarde se apresentará de modo mais sistemático.

Comentários e resolução de atividades

Desafio – Cuidar-se bem! (p. 179)

Resolução

Espera-se que os alunos percebam que, quanto mais meses um usuário fizer aulas de natação, maior será o valor total pago para a escola. A fórmula que expressa essa situação e a relação entre a quantia **q** que Nino pagará e o número de meses **m** que frequentará a escola é dada por $q = 150 + 120\ m$.

Como há proporcionalidade entre a quantia **q** e número **m** de meses, então a função entre essas grandezas é de 1º grau do tipo $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

Investigue e explique (p. 180)

Esta atividade tem como objetivo trabalhar o conceito de variável e escrever uma variável em função de outra.

Pode-se começar, por exemplo, destacando as grandezas envolvidas na atividade: **gasto mensal total** e **quantidade de suco**. Em seguida, relacionamos essas variáveis de acordo com as informações conhecidas.

Essa etapa pode ser entendida como uma espécie de tradução de um texto em linguagem corrente para um texto em linguagem simbólica: gasto mensal é igual a uma despesa fixa mais a quantia gasta para produzir cada litro de suco vezes a quantidade de suco produzido.

Gasto mensal = despesa fixa + quantia gasta · quantidade de suco produzido.

É conveniente destacar a estrutura "gramatical" do texto simbólico: sujeito (gasto mensal), verbo ou ação (é igual a) e predicado **(despesa fixa + quantia gasta · quantidade de suco produzido)**.

Embora no ensino das primeiras noções de Álgebra seja bastante frequente uma excessiva simplificação simbólica inicial do tipo $\mathbf{G = 3\,000 + 0{,}20 \cdot q}$, essas simplificações podem ser feitas após todos os símbolos utilizados se tornarem significativos para os alunos.

A partir daí, pode-se solicitar aos alunos que deem respostas específicas à atividade proposta, atribuindo valores particulares a uma das variáveis.

Se Antônio vender 5 000 a R$ 2,00 o litro:

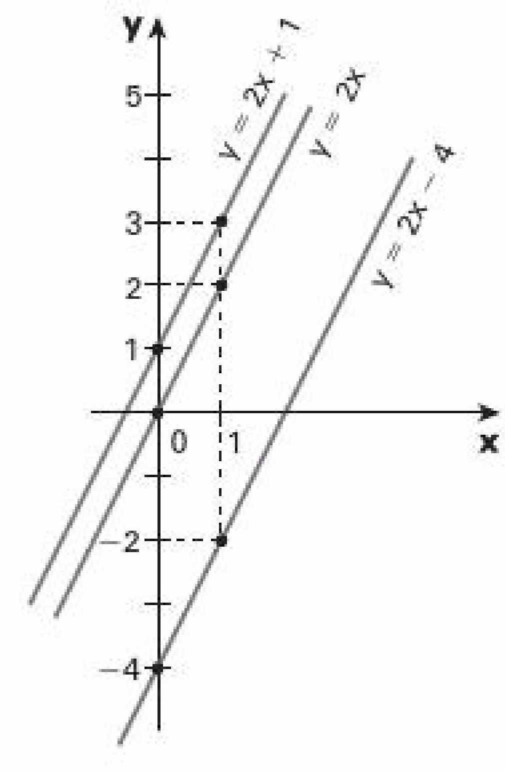
- o faturamento será: 5000 × R$ 2,00 = R$ 10000,00;
- o gasto será: 3000 + 0,20 × 5 000 = R$ 4000,00;
- o lucro será: R$ 10000,00 − R$ 4000,00 = R$ 6000,00;
- a porcentagem de lucro será: $\dfrac{6000}{4000} = 1{,}5$ ou 150%.

Troquem ideias e resolvam (p. 182)

Comece perguntando: Quantos pontos são convenientes para representar geometricamente cada uma das funções?

Certificar-se que os alunos percebam que, para construir gráficos desse tipo de função, não há necessidade de determinar "muitos" pontos dela. Basta determinar dois pontos para que se possa traçar uma reta, ou seja, basta atribuir dois valores para **x**, calcular os valores correspondentes para **y**, localizar os dois pontos no plano cartesiano cujas coordenadas são os pares calculados e desenhar a reta que contém esses dois pontos.

Resolução

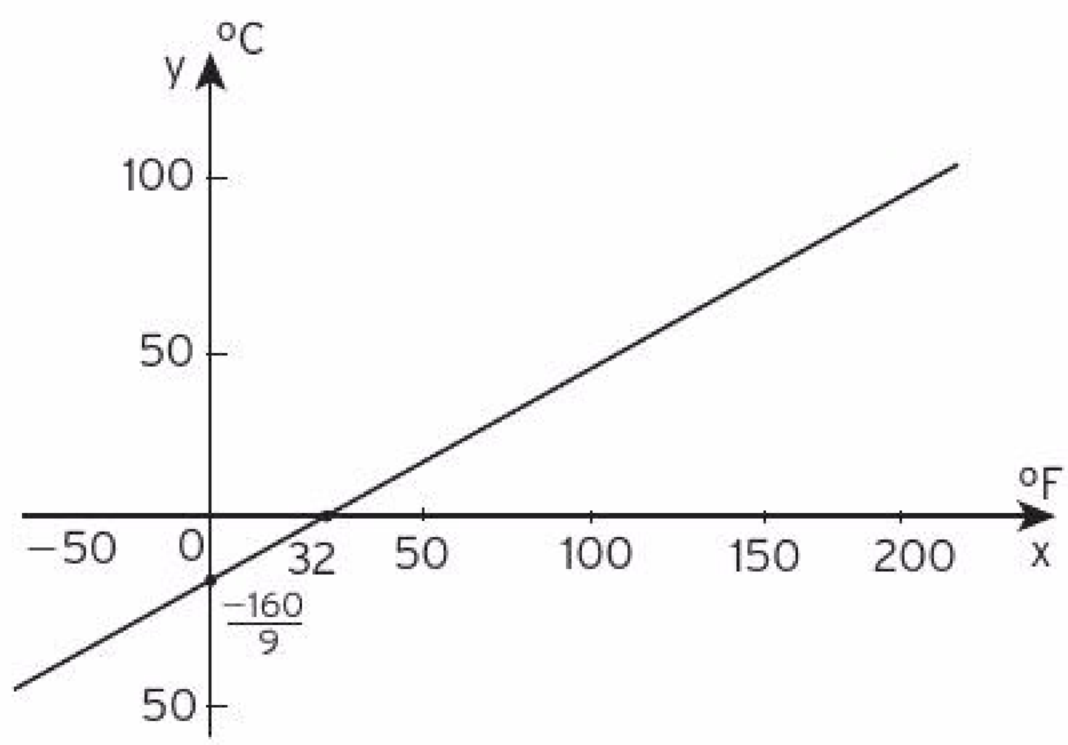


- Espera-se que os estudantes percebam que a inclinação de uma reta é identificada pelo coeficiente de **x** e que, neste caso, todas as três funções têm o mesmo coeficiente e, portanto, são paralelas.
- Se tivermos uma função do tipo $y = 2x + b$, em que **b** é qualquer número real, o gráfico dessa função será uma reta paralela às retas construídas nessa atividade. Um exemplo é a função $y = 2x + 6$.

Sugestão de atividade complementar

Lendo gráficos

O gráfico a seguir relaciona a temperatura **y**, em graus Celsius, e a temperatura **x**, em graus Fahrenheit.



Responda às questões a seguir.

- Quantos graus Celsius correspondem a 50 °F?
- Qual é a temperatura em graus Fahrenheit correspondente a −15 °C?

Resolução

Inicialmente, devemos determinar qual é a função de 1º grau representada pelo gráfico dado. Pelo gráfico, os pontos $(32, 0)$ e $\left(0, -\frac{160}{9}\right)$ pertencem a ele. Sendo **y** a temperatura em graus Celsius e **x** a temperatura em graus Fahrenheit, temos:

Para $\left(0, -\frac{160}{9}\right)$: $y = ax + b$ —— $-\frac{160}{9} = a \cdot 0 + b$ ——

b) $= -\frac{160}{9}$

Para $(32, 0)$: $y = ax + b$ —— $0 = 32a - \frac{160}{9}$ —— $a = \frac{5}{9}$

A função representada no gráfico é $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$.

- Para x = 50 °F, temos:

  $y = \frac{5}{9} \cdot 50 - \frac{160}{9} = 10$ —— $y = 10$ °C

- Para y = −15 °C, temos:

  $-15 = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$ —— $x = 5$ °F

UNIDADE 10 Função de 2º grau

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Função de 2º grau Fórmula da função de 2º grau ou função quadrática. **2. Representação gráfica de uma função de 2º grau** Desenhando parábola Zeros de uma função de 2º grau Vértice de uma parábola Um pouco mais sobre construção de parábolas **3. Estudando parábolas** Discriminantes e tipos de gráficos Máximos e mínimos **4. Função de 2º grau e o estudo dos sinais** Estudando os sinais **5. Inequação de 2º grau** Desigualdades que envolvem expressões de 2º grau Resolução de inequações de 2º grau	Espera-se que os alunos: • identifiquem, analisem e representem graficamente uma função quadrática; • estabeleçam relações entre os coeficientes de uma função quadrática e suas raízes; • resolvam inequações de 2º grau.

Orientações didáticas

Nesta unidade, buscamos, sempre que possível, abordar funções quadráticas de modo concreto, por exemplo, quando propomos a utilização de fórmulas para o cálculo da área de figuras compostas de quadrados e retângulos. Existem outras situações-problema em Física que também poderão ser utilizadas em um trabalho integrado com os professores de Ciências da Natureza.

No caso dessas funções, a construção de gráficos reduz-se à obtenção de esboços, dada a impossibilidade de os gráficos serem construídos com exatidão. Nesses esboços, basta considerar as seguintes características a seguir:

- os **zeros da função**, ou seja, as raízes da equação de 2º grau associada à função; eles determinam as abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo **x**;
- a **concavidade da parábola**, relacionada ao sinal do coeficiente do termo de grau 2;
- o **termo independente c**, que determina a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo **y**;
- o **vértice** da parábola, que determina o ponto de máximo ou de mínimo da função.

Texto de aprofundamento

As funções e as ciências

Quando os cientistas estudam um fenômeno físico, químico, biológico, econômico ou social, procuram primeiro detectar quais as grandezas representativas desse fenômeno e que estão inter-relacionadas, isto é, que são interdependentes. Uma das maneiras de verificar se duas grandezas estão inter-relacionadas é variar uma das grandezas e observar se há ou não variação da outra.

Uma vez determinadas essas grandezas, os cientistas procuram estabelecer uma **lei** que expresse uma relação entre elas. Com essa finalidade, colhem dados experimentais ou observacionais, que transportam para uma **tabela** ou um **gráfico**.

Em seguida, por processos matemáticos ou estatísticos, procuram descobrir uma **fórmula** ou um enunciado que exprima a lei do modo mais fiel possível. Essa fórmula é dada, em geral, sob a forma de uma equação que inter-relaciona as **variáveis** que representam as grandezas envolvidas.

Muitas vezes, é possível isolar uma das variáveis e colocá-la em **função** das demais. Nesse caso, essa variável é a dependente e as outras são as independentes, ou seja, essa variável é uma função das outras. De acordo com a lei de queda livre dos corpos, descoberta por Galileu (1564-1642), "na queda de um corpo, a distância percorrida cresce proporcionalmente ao quadrado do tempo".

Essa lei é precisamente expressa pela fórmula $d = \frac{gt^2}{2}$, em que **g** é uma constante que vale aproximadamente 9,8 m/s^2. Nesse exemplo, dizemos que **d** é uma função de **t**.

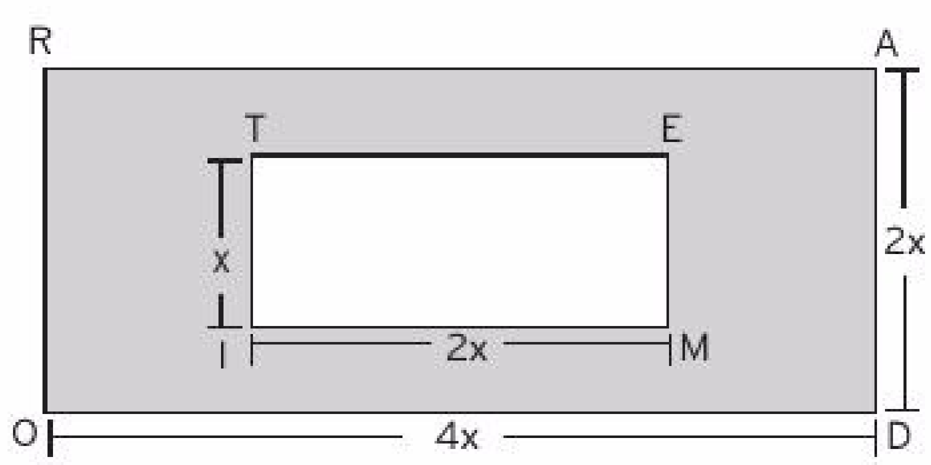
Comentários e resolução de atividades

Desafio – Região verde (p. 193)

Esta atividade contribui para que os alunos possam deduzir uma fórmula que generalize a relação de interdependência entre as medidas das áreas dos retângulos, tenham uma melhor compreensão do conceito de função e apliquem o conceito de função quadrática em situações-problema.

Resolução

- Seja **x** a medida do segmento $\overline{TI}$; pelas informações do enunciado, temos:



Ao representarmos por **y** a área verde, teremos:

y = área do retângulo RODA − área do retângulo TIME

$y = 4x \cdot 2x - 2x \cdot x$

$y = 8x^2 - 2x^2$ —— $y = 6x^2$

- Se a área em verde for igual a 150 m^2, então substituímos **y** por 150 na fórmula:

  $y = 6x^2$

  $150 = 6x^2$

  $x^2 = 25$ —— $x = 5$ cm

Logo, as medidas do lado do retângulo RODA são 10 m e 20 m, e as do retângulo TIME são 5 m e 10 m.

Desafio – Quem está com a razão? (p. 198)

Nesta atividade, incentive os alunos a buscarem argumentos para as justificativas apresentadas.

Resolução

A bola e a flecha chegarão ao mesmo tempo. Na vertical, tanto a bola quanto a flecha têm velocidade inicial nula e caem com a mesma aceleração, devido à gravidade da Terra. Essa atividade pode ser resolvida em parceria com a disciplina de Ciências da Natureza.

Investigue e explique (p. 201)

A atividade proposta parte de uma situação-problema "concreta" que tem como objetivo levar os alunos à compreensão, mesmo que intuitiva, da " imagem" de uma parábola, do significado da expressão "concavidade voltada para baixo" e de ponto máximo.

Resolução

Nesta situação, já é conhecida a lei que relaciona a variável **h** (em metros), que representa a grandeza altura, à variável **t** (em segundos), que expressa a grandeza tempo.

- $h = 12t - 8t^2$

  Para t = 0,5, temos: $h = 12 \cdot 0,5 - 8 \cdot 0,5^2 = 6 - 2 = 4$ —— h = 4 m

  Para t = 1, temos: $h = 12 \cdot 1 - 8 \cdot 1^2 = 12 - 8 = 4$ —— h = 4 m

  A bola se encontrava a 4 m do chão após 0,5 segundo e, após 1 segundo, voltou a se encontrar a 4 m do chão.

- A altura da bola quando cai no chão é igual a zero.

Para $h = 0$, temos:

$0 = 12t - 8t^2$

$4t \cdot (3 - 2t) = 0$

$t = 0$ ou $3 - 2t = 0$ —— $t = 0$ s ou $t = 1{,}5$ s

A bola leva 1,5 segundo para cair no chão novamente.

- Para determinar a altura máxima, é preciso encontrar a ordenada do vértice. Para isso, determinamos primeiramente a abscissa:

$t = x_v = \dfrac{-12}{2 \cdot (-8)} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ —— $t = 0{,}75$ s

Substituindo o valor para determinar a ordenada:

$h = y_v = 12 \cdot \dfrac{3}{4} - 8 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$ —— $h = 4{,}5$ m

A altura máxima é de 4,5 m e a bola atinge essa altura após 0,75 s.

Troquem ideias e resolvam (p. 207)

Peça aos alunos que comentem quais caminhos adotaram para resolver o problema. Assim, é possível interpretar as dificuldades que os estudantes possam ter tido. Valorize os erros e incentive o aluno a tentar, sem receio de errar.

Resolução

A área do triângulo é maior que 6, então

$\dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} > 6$

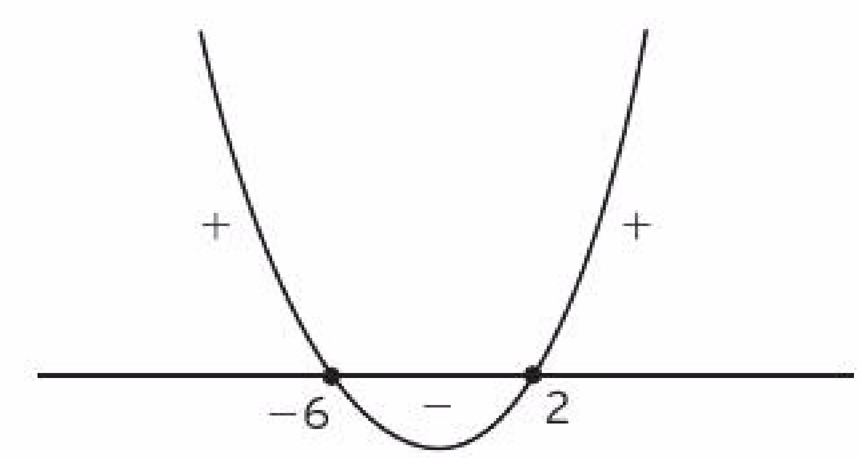
Medida da base: $x + 4$.

Medida da altura relativa a essa base: **x**.

Logo:

$\dfrac{(x + 4) \cdot x}{2} > 6$ —— $x^2 + 4x - 12 > 0$

Analisando os sinais da função $y = x^2 + 4x - 12$ no esboço a seguir, obtemos:



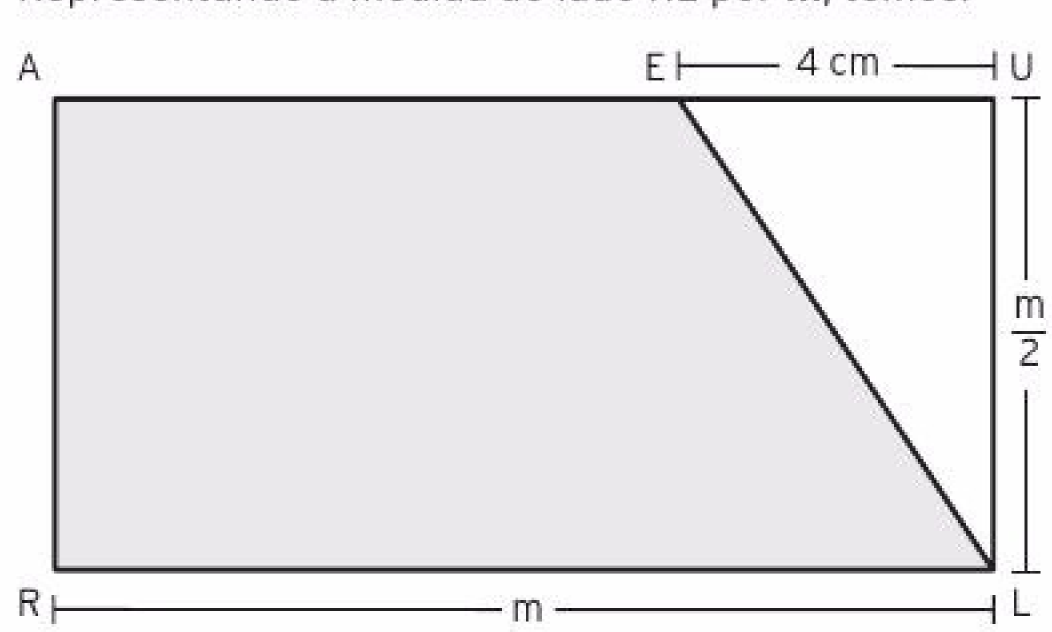
Como **x** é uma medida, o valor de **x** é um número real positivo. Então, $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$.

Desafio – Problemas de áreas e inequação (p. 207)

Nesta atividade, espera-se que os alunos observem que a área procurada resulta da diferença entre as outras áreas e que as condições do problema encaminham para a resolução de inequações de 2º grau, como mostrado a seguir.

Resolução

Representando a medida do lado $\overline{RL}$ por **m**, temos:



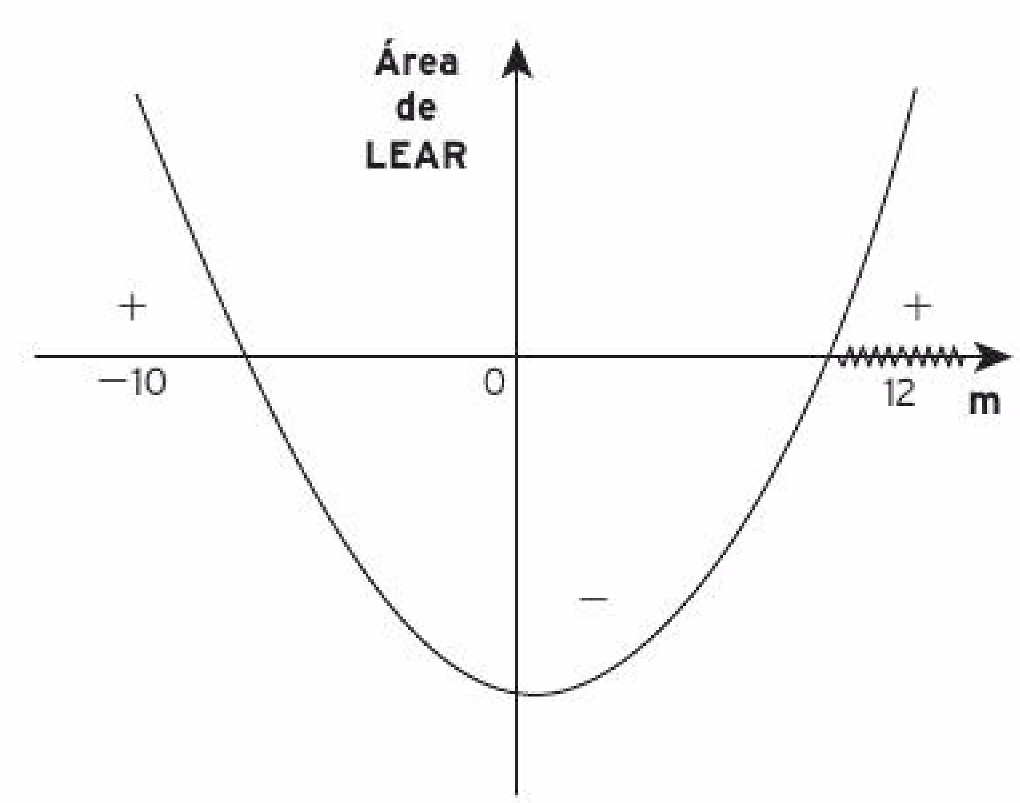
$A_{LEAR} = A_{LUAR} - A_{LUE}$

$A_{LEAR} = m \cdot \dfrac{m}{2} - \dfrac{\dfrac{m}{2} \cdot 4}{2} = \dfrac{m^2}{2} - m$

$\dfrac{m^2}{2} - m > 60$

$m^2 - 2m - 120 > 0$

Analisando os sinais da função $y = m^2 - 2m - 120$ no esboço a seguir, para resolver a inequação proposta, obtemos:



Como **m** é uma medida, o valor de **m** é um número real positivo. Então, para que a área do quadrilátero LEAR seja maior que 60 cm², as medidas do lado $\overline{RL}$ devem ser maiores que 12 cm.

Sugestões de atividades complementares

Reta e parábola

(UFPE) Planeja-se construir duas estradas em uma região plana. Colocando coordenadas cartesianas na região, as estradas ficam representadas pelas partes dos gráficos da parábola $y = -x^2 + 10x$ e da reta $y = 4x + 5$, com $2 \leqslant x \leqslant 8$. Qual a soma das coordenadas do ponto representando a interseção das estradas?

Resposta

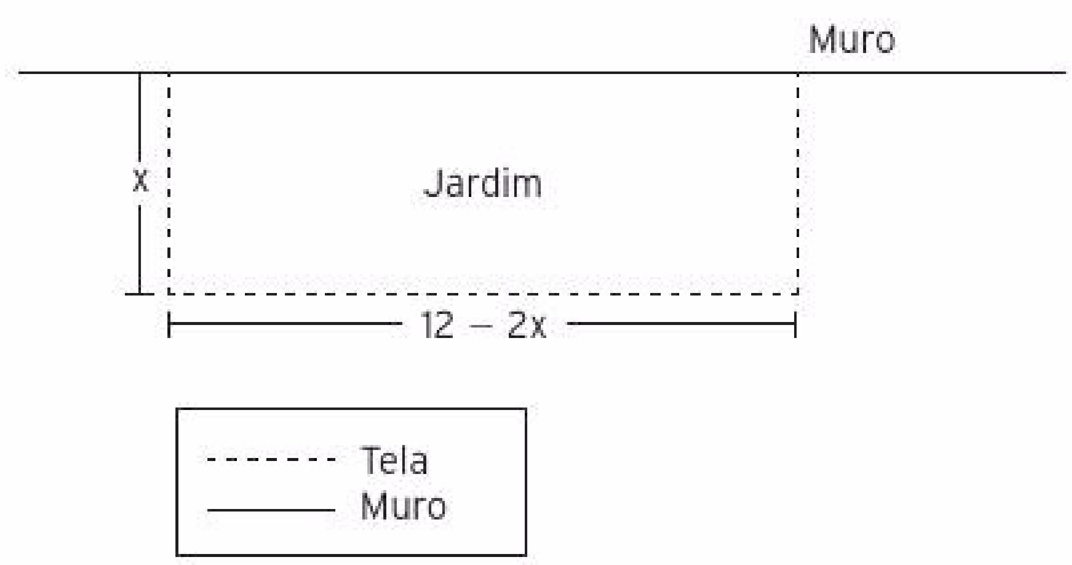
30

Área máxima

Um jardineiro vai construir um jardim retangular junto a um muro e para isso deverá usar 12 metros de tela. Expresse a área desse jardim em função da medida **x** de um dos lados. Em seguida, determine o valor de **x** para que a área do jardim seja a máxima possível.

Resposta

3 m



UNIDADE 11

Circunferências

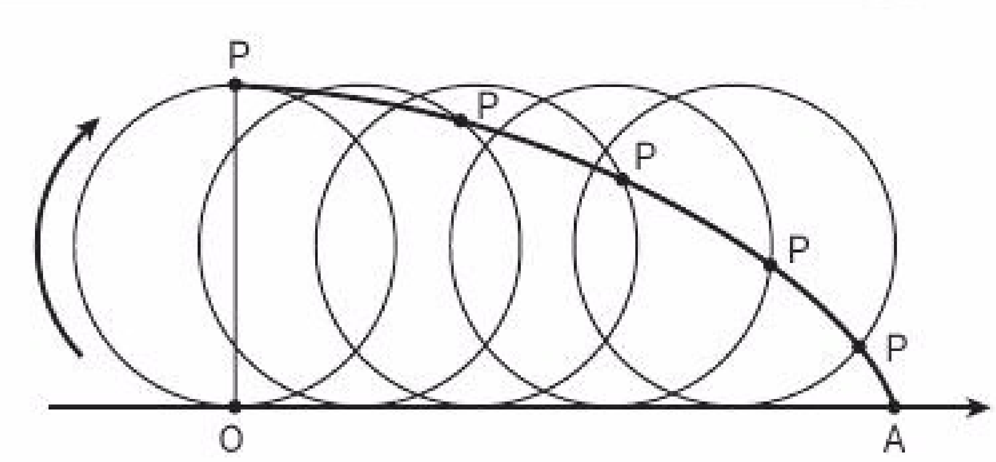
Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Circunferências e propriedades Revendo conceitos Propriedade das cordas **2. Circunferências e retas em um plano** Propriedade das tangentes **3. Ângulos com vértice em uma circunferência** Ângulos inscritos em uma circunferência Ângulos inscritos em uma semicircunferência Cordas de uma circunferência que se interceptam **4. Comprimento e área** Comprimento de uma circunferência	Espera-se que os alunos: • reconheçam que todos os pontos de uma circunferência têm uma propriedade comum: estão à mesma distância de um ponto fixo do plano; • reconheçam que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que têm a mesma distância de um ponto fixo; • identifiquem e calculem a medida de um ângulo central; • estabeleçam relações entre cordas e diâmetros de uma circunferência; • utilizem a noção de posições relativas entre reta e circunferência (tangente) na resolução de problemas; • estabeleçam relações métricas entre um ângulo inscrito em uma circunferência e o ângulo central a ele correspondente; • identifiquem e resolvam problemas que envolvam medida de ângulos inscritos em uma circunferência; • determinem o perímetro de uma circunferência e a área de um círculo e resolvam problemas que envolvam esses conceitos.

Orientações didáticas

Nesta unidade, pode-se propor um trabalho de pesquisa sobre os procedimentos para a determinação de fórmula de cálculo do perímetro de uma circunferência. Peça aos alunos, por exemplo, que pesquisem sobre o número π e o cálculo do perímetro de uma circunferência, destacando fatos contemporâneos que incluam a utilização de computadores nesses estudos.

Pode-se propor também um trabalho empírico para determinar a localização aproximada do número π em uma reta numerada, procedendo da seguinte forma:

- solicite aos alunos que confeccionem, em cartolina ou papelão, um disco de raio igual a 1 unidade (pode ser 5 cm, 10 cm etc.) e desenhem sobre ele um diâmetro $\overline{OP}$;
- peça para que tracem uma reta e nela marquem um ponto **O**, fazendo-o coincidir com o ponto **O** do disco;
- sem deixá-lo deslizar, os alunos deverão girar o disco no sentido indicado na figura a seguir.



O ponto **P**, que está na outra extremidade do diâmetro, percorre a curva indicada e, ao fim de meia-volta, chega à reta no ponto **A**.

Como a **circunferência de raio 1 unidade** tem **2 · π unidades de comprimento**, ou seja, **2π** unidades, a metade da circunferência tem π unidades de comprimento. Dessa forma, localizamos o número π em uma reta numerada considerando a unidade escolhida.

Texto de aprofundamento

O número e sua história

A circunferência sempre chamou muito a atenção por ser a figura mais regular e perfeita na Geometria. Dada sua aplicação imediata no cotidiano, apresentaram-se continuamente problemas com questionamentos acerca do seu perímetro.

Há muito tempo já se sabe que a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro é constante e igual a π. Por isso, esse número ficou conhecido como "o número da circunferência".

Os primeiros vestígios de uma estimativa próxima do valor atual de π foram deixados há quase 4000 anos pelos antigos egípcios, que usavam a fração $\frac{256}{81} = 3{,}16$, obtida pelo escriba Ahmes, autor do famoso *Papiro de Rhind*.

Também os babilônios, há cerca de 4000 anos, já tinham observado que o valor de π situava-se entre $\frac{25}{8}$ e $\frac{22}{7}$, isto é, $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$ ou $3{,}125 < \pi < 3{,}142$.

Arquimedes (287-212 a.C.) foi um dos primeiros matemáticos a apresentar cálculos coerentes para o valor de π. Em seu livro *A medida do círculo*, ele se propõe a descobrir um processo para a determinação de π. Ele sugere para π um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, aproximadamente igual a 3,1418, e demonstra como chegou a esse resultado.

De acordo com seu método, ele inscreveu e circunscreveu sucessivamente polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, ... até 96 lados em uma circunferência e conseguiu chegar a um valor médio aproximado para seu perímetro. Em outras palavras, ele determinou um limite superior e um inferior para o comprimento da circunferência e obteve um valor médio para π.

A partir disso, as aproximações para π ficaram cada vez mais precisas. Hoje em dia, com a utilização do computador, π já é conhecido com milhões de casas decimais.

A notação desse número pela letra grega π, equivalente ao nosso **p**, foi introduzida pelo matemático suíço Leonard Euler (1707-1783), que a princípio usava **p** ou **c**, mas que, a partir de 1737, passou a adotar sistematicamente o símbolo π.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 216)

Este problema é análogo ao problema de apertos de mão e ao do número de diagonais de um polígono, que envolve o processo de generalização. O desenvolvimento dessa competência representa um fator indispensável e útil não só para a formação matemática do estudante, mas também para a resolução de problemas na vida prática.

Resolução

- Para 5 pontos na circunferência:

  De cada ponto poderão ser traçadas $(5 - 1)$ cordas. Como são 5 pontos, então temos $5 \cdot (5 - 1)$ cordas.

  Cada corda foi contada 2 vezes, então temos: $\frac{5 \cdot (5 - 1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

  Então, podem ser traçadas 10 cordas.
- Para 6 pontos na circunferência:

  De cada ponto poderão ser traçadas $(6 - 1)$ cordas. Como são 6 pontos, então temos $6 \cdot (6 - 1)$ cordas.

  Como cada corda foi contada 2 vezes, temos: $\frac{6 \cdot (6 - 1)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

  Então, podem ser traçadas 15 cordas.
- Para 10 pontos na circunferência:

  De cada ponto poderão ser traçadas $(10 - 1)$ cordas. Como são 10 pontos, então temos $10 \cdot (10 - 1)$ cordas.

  Cada corda foi contada 2 vezes, então temos: $\frac{10 \cdot (10 - 1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

  Então, podem ser traçadas 45 cordas.
- Para **n** pontos na circunferência:

  De cada ponto poderão ser traçadas $(n - 1)$ cordas. Como são **n** pontos, então temos $n \cdot (n - 1)$ cordas. Como cada corda foi contada 2 vezes, então temos: $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$.

Para **n** pontos na circunferência, podem ser traçadas $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ cordas.

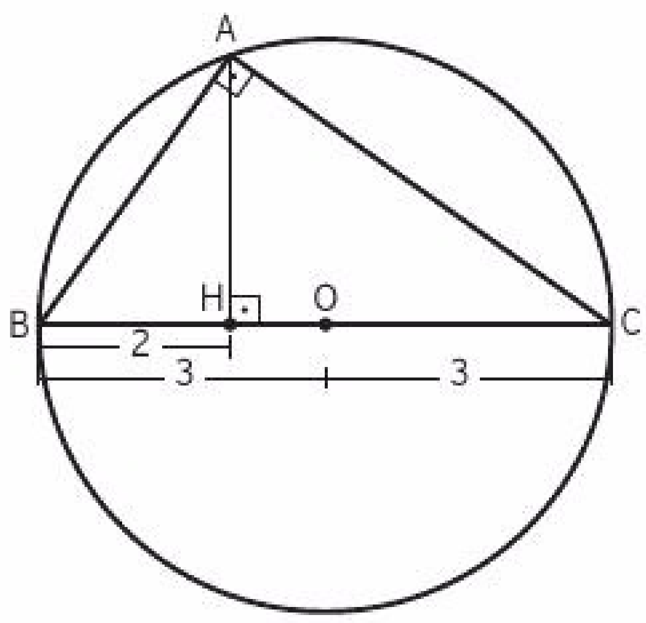
Troquem ideias e resolvam (p. 223)

Resolução

O $\triangle ABC$ está inscrito em uma semicircunferência, portanto é um triângulo retângulo.

med $\hat{A} = 90°$

med $\overline{OB}$ = med $\overline{OC}$ = 3 cm, pois $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são raios.



med $\overline{OH}$ = med $\overline{OB}$ − med $\overline{BH}$ = 3 cm − 2 cm = 1 cm

No triângulo retângulo ABC, utilizamos a relação métrica: o quadrado de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida de sua projeção sobre a hipotenusa.

(med $\overline{AC}$)^2 = med $\overline{BC}$ · med $\overline{HC}$ ($\overline{HC}$) é a projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre o diâmetro BC)

(med $\overline{AC}$)^2 = 6 · 4

med $\overline{AC} = \sqrt{24}$ ——— med $\overline{AC} = 2\sqrt{6}$ cm

O cateto $\overline{AC}$ mede $2\sqrt{6}$ cm.

Desafio – Qual é o valor? (p. 225)

Ao longo da atividade observe se os alunos interpretam corretamente o enunciado do problema e identificam dois triângulos retângulos congruentes na figura.

Resolução

As retas **t** e **m** são tangentes à circunferência e perpendiculares aos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, nos respectivos pontos de tangência.

$\triangle PAO \equiv \triangle PBO$, pelo caso LAL, pois são triângulos retângulos (ambos têm um ângulo de 90°) e têm outros dois pares de lados correspondentes congruentes:

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{B} \\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \text{ (raios da circunferência)} \\ \overline{OP} \text{ (hipotenusa comum)} \end{cases}$$

Então, $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$.

med $\overline{BP}$ = med $\overline{AP}$ = 5,8 cm

Assim, x = 5,8 cm.

Desafio – Quantos metros em quatro voltas? (p. 230)

Nesta atividade, observe se os alunos conseguem selecionar as informações importantes e se conseguem expressar verbalmente em que consiste o problema.

Se for conveniente, retome o significado de polegada (*inch*, em inglês), recuperando a origem dessa unidade de comprimento.

Aparelhos de TV e monitores de computador costumam ser vendidos com medidas da diagonal em polegadas. Essa medida também é utilizada em aros de pneus, tanto de bicicletas quanto de veículos automotores, e algumas ferramentas.

Resolução

Medida do diâmetro da roda de 26 polegadas: 26 · 2,54 cm = 66,04 cm

- Quando a roda completar uma volta, João terá percorrido a distância equivalente ao comprimento da roda, ou seja:
  $C = d \cdot \pi \cong 66{,}04 \cdot 3{,}14$ cm = 207,3656 cm

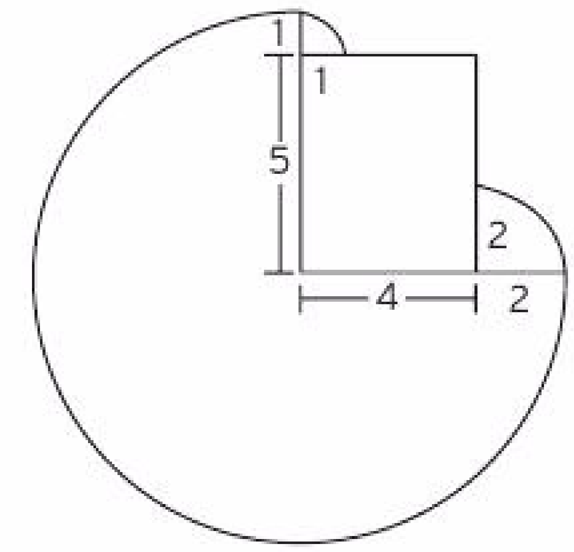
  João terá percorrido aproximadamente 2,07 m.
- Quando a roda completar 4 voltas, João terá percorrido 4 vezes a distância equivalente ao comprimento da roda, ou seja:
  4 · 2,07 m = 8,28 m

João terá percorrido aproximadamente 8,28 m.

Desafio – Babucha e seu pasto (p. 232)

Este Desafio pode propiciar aos alunos a integração entre fração, área e Geometria. Eles poderão recorrer ao desenho para representar o percurso que poderá ser realizado por Babucha e, em seguida, analisar cada parte da figura. O mapeamento do percurso máximo realizado por ela requer que o aluno tenha conhecimento de construções geométricas. Esse mapeamento poderá ser representado com o auxílio de régua e compasso.

Nesta atividade, o percurso realizado por Babucha forma arcos de diferentes raios. Para resolver o problema, os alunos deverão compor uma figura determinada por esses arcos, como está mostrada ao lado.



Resolução

Seja A_1 a área do círculo de raio 6 m, A_2 a área do círculo de raio 2 m, e A_3 a área do círculo de raio 1 m, então a área em que Babucha consegue pastar é igual a:

$$\frac{3}{4} \cdot A_1 + \frac{1}{4} \cdot A_2 + \frac{1}{4} \cdot A_3 = \frac{3}{4} \cdot 36 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{113}{4}\pi \cong 88{,}705$$

A área em que Babucha poderá pastar é de aproximadamente 88,705 m².

Sugestões de atividades complementares

Se achar oportuno, escolha uma das duas atividades para realizar com os estudantes.

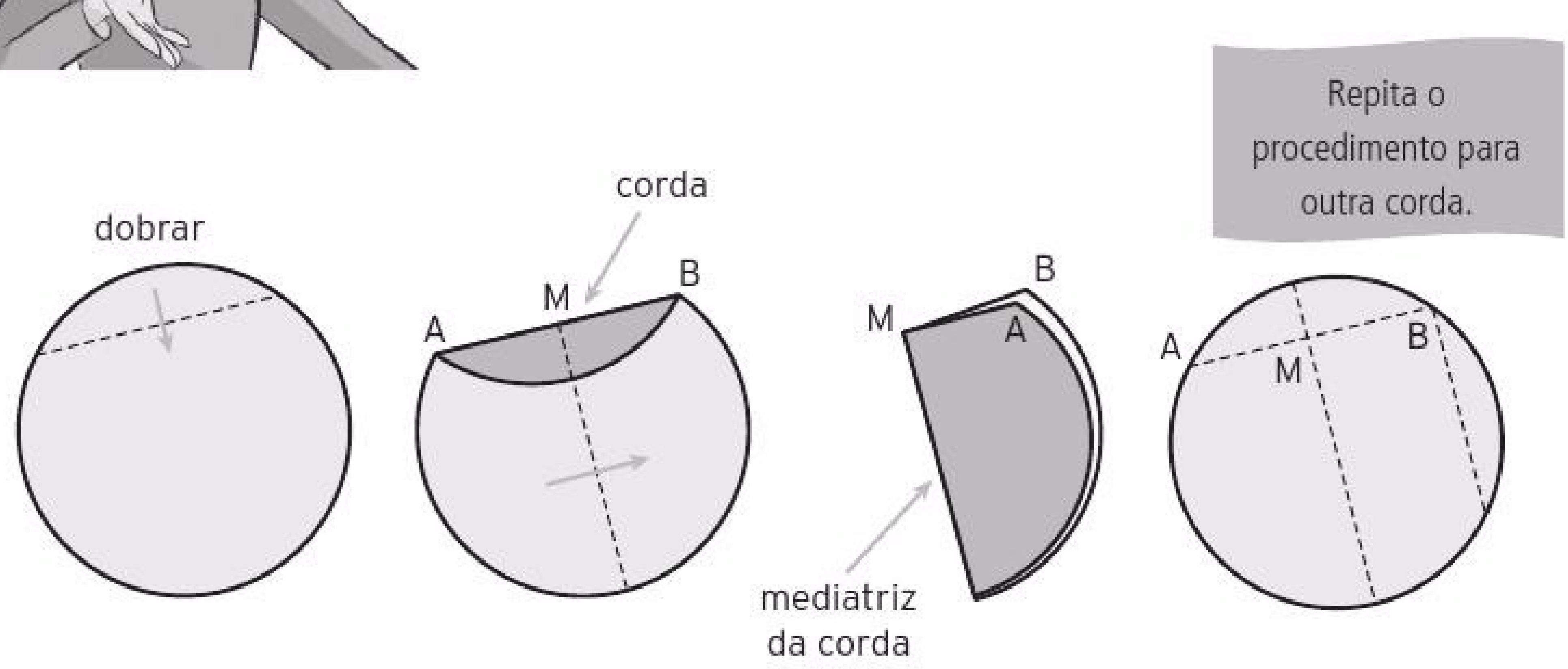
Brincando com circunferências e dobras

Pegue um copo, uma caixinha ou uma lata de base circular. Coloque esse objeto sobre um pedaço de papel e contorne-o com um lápis, obtendo, assim, uma circunferência.

Em seguida, recorte-a.

Como encontrar o centro dessa circunferência usando dobraduras?

Ilustrações: Vagner de Farias



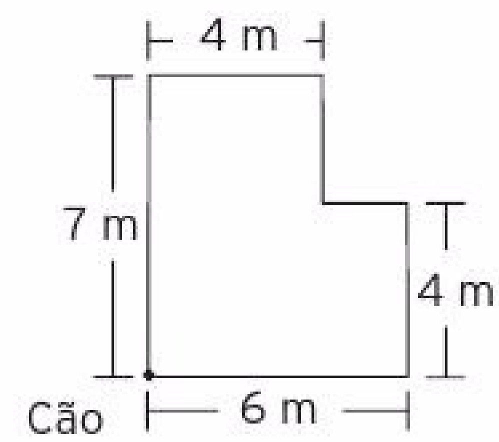
- Que ponto é o encontro das mediatrizes dessas duas cordas em relação à circunferência? Indique esse ponto e verifique sua conclusão.

Resposta

O centro.

O cão de guarda

Uma casa em formato de **L** é vigiada por um cão preso a uma corda de 12 m de comprimento no canto da casa, conforme mostra a figura. Observe as dimensões da casa e descubra qual é a área vigiada pelo cão.



Resposta

Aproximadamente 503,97 m².

UNIDADE 12 Relações trigonométricas

Conteúdos	Expectativas de aprendizagem
1. Relações trigonométricas nos triângulos retângulos Seno de um ângulo agudo Cosseno de um ângulo agudo Tangente de um ângulo agudo Ângulos de 30°, 45° e 60° Ângulos de 45° Ângulos de 30° e 60° **2. Relações métricas em polígonos regulares** Polígono regular inscrito e circunferência circunscrita Apótema de um polígono regular Quadrados inscritos em uma circunferência Triângulos equiláteros inscritos em uma circunferência Hexágonos regulares inscritos em uma circunferência	Espera-se que os alunos: • reconheçam e identifiquem as razões trigonométricas em um triângulo retângulo; • identifiquem e resolvam situações-problema que envolvam a aplicação de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos de um triângulo retângulo; • resolvam problemas utilizando seno, cosseno e tangente de ângulos de 30°, 45° e 60° e as tabelas trigonométricas; • apliquem, em problemas, relações métricas entre apótemas, lados de polígonos inscritos em uma circunferência (quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares) e raios da circunferência; • apliquem conceitos e utilizem procedimentos adquiridos para a resolução de problemas que envolvam área de figuras planas.

Orientações didáticas

Durante o 9º ano, o trabalho com as razões trigonométricas em um triângulo retângulo mostra mais uma aplicação prática e imediata do estudo da semelhança de triângulos e serve como subsídio para alguns cálculos no estudo da Física.

Algumas atividades propostas no texto podem ser efetivamente realizadas para incentivar e despertar o interesse dos alunos para esse tema:

- a medição de distâncias inacessíveis envolvendo elementos presentes no meio ambiente próximo;
- a construção de um instrumento e sua utilização para determinar o seno e o cosseno de um ângulo agudo.

Texto de aprofundamento

A Astronomia e a Trigonometria

A Astronomia é a mais antiga das ciências. Aos poucos o ser humano percebeu que, ao observar as estrelas e outros astros, poderia se orientar em viagens marítimas e terrestres. Na tentativa de compreender os movimentos dos astros, suas órbitas e posições relativas, nossos antepassados chegaram a processos que permitiram determinar a distância da Terra à Lua, o raio da Terra e outras medidas, dando início à Trigonometria.

A determinação de distâncias dessa natureza, que chamamos de distâncias inacessíveis, sempre fascinou o ser humano. A História considera Hiparco (180-125 a.C.) um dos primeiros astrônomos a utilizar relações trigonométricas (mesmo não explicitadas como tal) em seus cálculos. Ele calculou a distância da Terra à Lua, estimando-a em 402 500 km, cometendo um erro de apenas 5%.

Historicamente, a Trigonometria surgiu do estudo das medidas de triângulos retângulos semelhantes: as razões entre as medidas dos lados são constantes para um determinado ângulo agudo. Isso permite considerar as razões como características desse ângulo agudo. Assim, o principal aspecto da Trigonometria consiste em associar a cada ângulo agudo alguns números reais, como seno e cosseno, que representam, de certo modo, uma espécie de "medida" do ângulo.

Com esses números, ampliou-se o estudo das relações métricas nos triângulos, acrescentando às fórmulas, que relacionam entre si comprimentos de segmentos (como lados, alturas, bissetrizes), as relações entre ângulos e lados.

Usando as relações trigonométricas, foi possível medir distâncias indiretamente, tais como a altura de um precipício e a distância da Terra à Lua.

Posteriormente, a Trigonometria estendeu-se a uma variedade de triângulos, não se restringindo apenas aos triângulos retângulos. Por meio dela, estabeleceram-se relações e fórmulas muito úteis no estudo de padrões, como os que são utilizados em eletricidade, som e energia atômica.

A Trigonometria é, portanto, outro ramo da Matemática que envolve mensuração, espaço e forma.

Comentários e resolução de atividades

Investigue e explique (p. 246)

Resolução

- No triângulo ABC, temos: $\text{tg}\ \hat{B} = \frac{b}{c}$ e $\text{tg}\ \hat{C} = \frac{c}{b}$, então:
  $\text{tg}\ \hat{B} \cdot \text{tg}\ \hat{C} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$
- Como o triângulo **ABC** é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:
  $a^2 = b^2 + c^2$

Vamos dividir os dois membros dessa equação por $\mathbf{a^2}$:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$1 = (\text{sen}\ \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 \longrightarrow \text{sen}^2\ \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$$

Desafio – Qual é a altura da torre? (p. 247)

A atividade proposta possibilita perceber a importância das relações trigonométricas para a resolução de problemas práticos, como determinação de uma medida inacessível (que traz alguns obstáculos em sua obtenção).

Resolução

Como a altura **h** é o cateto oposto ao ângulo de 60° e 20 m é a medida do cateto adjacente a esse ângulo, utilizamos a razão tangente para calcular **h**

$$\text{tg}\ 60° = \frac{\text{cateto oposto a } 60°}{\text{cateto adjacente a } 60°} = \frac{h}{20}$$

Como $\text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$, temos que:

$\sqrt{3} = \frac{h}{20} \longrightarrow h = 20 \cdot \sqrt{3}$ m

Usando $\sqrt{3} = 1{,}73$, temos que $h \cong 20 \cdot 1{,}73 = 34{,}60$.

Então, a altura da torre de transmissão é igual a 34,60 m.

Troquem ideias e resolvam (p. 248)

Nesta atividade, o triângulo retângulo está posicionado de forma diferente das situações anteriores. A exploração de triângulos em posições variadas é importante.

Mais uma vez, a proposta é interpretar uma situação que envolve o uso das relações trigonométricas em triângulos retângulos para calcular medidas ainda não determinadas.

Resolução

No triângulo retângulo ABC, representamos a medida aproximada da largura do rio por **x**.

Temos que med $\overline{BA} = x + 3$ e med $\overline{BC} = 100$.

Como nessa situação estão envolvidas as medidas dos dois catetos e um ângulo, a relação trigonométrica conveniente é a tangente.

$$\text{tg}\ 60° = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x + 3}{100}$$

$$x + 3 = 100 \cdot \sqrt{3}$$

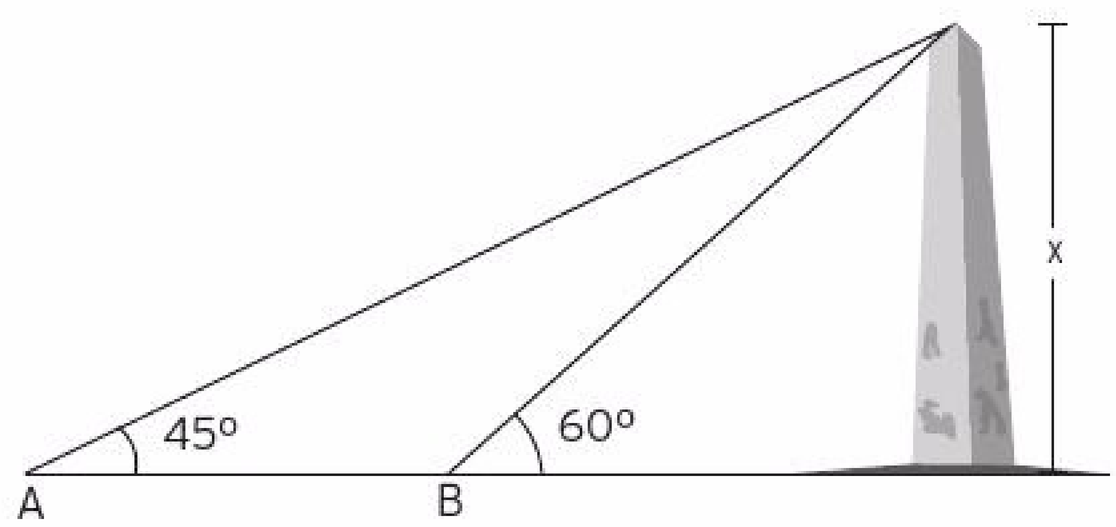
$$x \cong 170{,}21 \text{ m.}$$

O rio tem largura aproximada de 170,21 m.

Sugestões de atividades complementares

Medindo obelisco

De um ponto **A**, uma pessoa enxerga o topo de um obelisco, segundo um ângulo de 45º. Ao se aproximar 50 m do obelisco, ela passa a ver o topo sob um ângulo de 60º. Qual é a altura desse obelisco?



Resposta

$25(3 + \sqrt{3})$ m