Cálculo Integral

organizadora Daniela Barude Fernandes

BUP

ALWAYS LEARNING

PEARSON

CÁLCULO INTEGRAL

CÁLCULO INTEGRAL

Organizadora
Daniela Barude Fernandes
Mestre em telecomunicações pelo Instituto Nacional de Telecomunicações
Graduada em engenharia elétrica com ênfase em telecomunicações
Professora assistente do Instituto Nacional de Telecomunicações

PEARSON

Supervisora de produção editorial: Silvana Afonso
Coordenação de produção editorial: Sérgio Nascimento
Editor: Casa de Ideias
Editor assistente: Marcos Guimarães
Redação: Maria Caroline Trovo e Marcelo Recco
Projeto gráfico e diagramação: Casa de Ideias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Cálculo integral. -- São Paulo : Pearson Education do Brasil, 2014. -- (Coleção Bibliografia Universitária Pearson)

1. Cálculo diferencial – Estudo e ensino 2. Cálculo integral – Estudo e ensino I. Série.

14-11449 CDD-515.4307

Índice para catálogo sistemático:
1. Cálculo integral : Matemática : Estudo e ensino 515.4307

2015
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Rua Nelson Francisco, 26 – Limão
CEP: 02712-100, São Paulo – SP
Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearson.com

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Nos catálogos de livros universitários, há vários títulos cuja primeira edição saiu há 40, 50 anos, ou mais. São livros que, graças à identificação da edição na capa (e somente a ela), têm sua idade revelada. E, ao contrário do que muitos podem imaginar, isso não é um problema. Pelo contrário, são obras conhecidas, adotadas em diversas instituições de ensino, usadas por estudantes dos mais diferentes perfis e reverenciadas pelo que representam para o ensino.

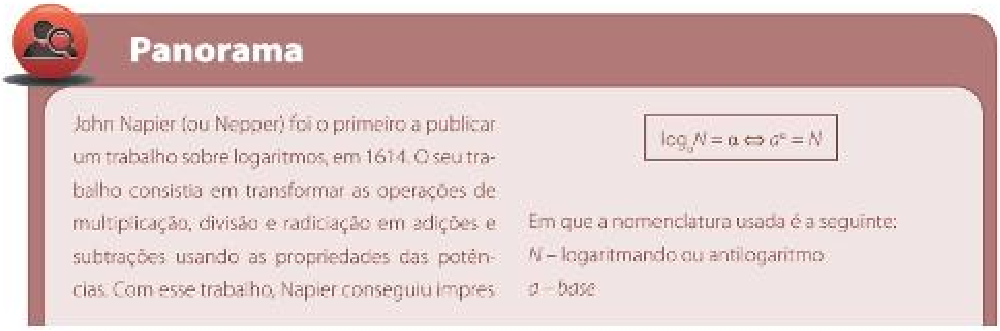
Qual o segredo de sucesso desses livros? O que eles têm de diferente de vários outros que, embora tenham tido boa aceitação em um primeiro momento, não foram tão longe? Em poucas palavras, esses livros se adaptaram às novas realidades ao longo do tempo, entendendo as mudanças pelas quais a sociedade – e, consequentemente, as pessoas – passava e as novas necessidades que se apresentavam.

Para que isso fique mais claro, vamos pensar no seguinte: a maneira como as pessoas aprendiam matemática na década de 1990 é igual ao modo como elas aprendem hoje? Embora os alicerces da disciplina permaneçam os mesmos, a resposta é: não! Nesse intervalo de tempo, ocorreram mudanças significativas – a Internet se consolidou, os celulares se popularizaram, as redes sociais surgiram etc. E todas essas mudanças repercutiram no modo de vida das pessoas, que se tornou mais rápido e desafiador, mudando os fundamentos do processo de ensino/aprendizagem.

Foi com base nisso que nasceu a Bibliografia Universitária Pearson (BUP). Concisos sem serem rasos e simples sem serem simplistas, os livros que compõem esta série são baseados na premissa de que, para atender sob medida às necessidades tanto dos alunos de graduação como das instituições de ensino – independentemente de eles estarem envolvidos com ensino presencial ou a distância –, é preciso um processo amplo e flexível de construção do saber, que leve em conta a realidade em que vivemos.

Assim, as obras apresentam de maneira clara os principais conceitos dos temas propostos, trazendo exatamente aquilo que o estudante precisa saber, complementado com aprofundamentos e discussões para reflexão. Além disso, possuem uma estrutura didática que propõe uma dinâmica única, a qual convida o leitor a levar para seu dia a dia os aspectos teóricos apresentados. Veja como isso funciona na prática:

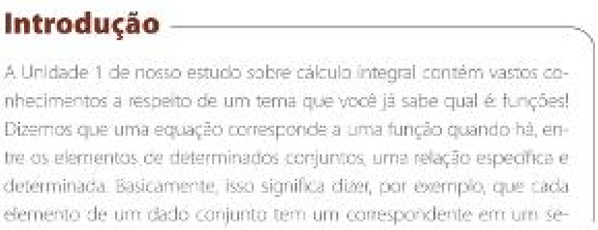
A seção “Panorama” aprofunda os tópicos abordados ao mostrar como eles funcionam na prática, promovendo interessantes reflexões.


Panorama

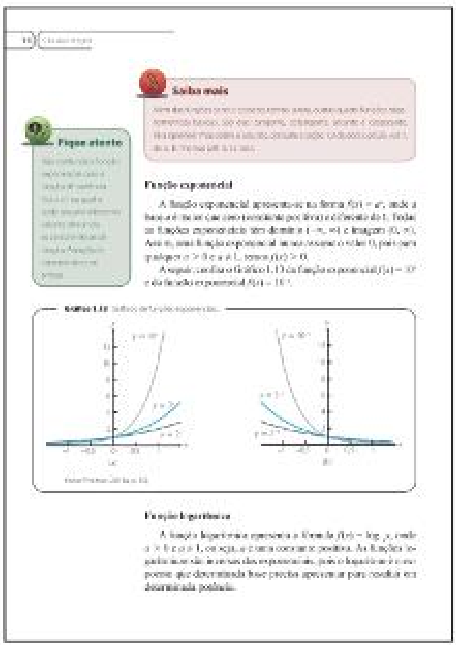
John Napier (ou Nepper) foi o primeiro a publicar um trabalho sobre logaritmos, em 1614. O seu trabalho consistia em transformar as operações de multiplicação, divisão e radiciação em adições e subtrações usando as propriedades das potências. Com esse trabalho, Napier conseguiu impres

$\log_a N = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = N$

Em que a nomenclatura usada é a seguinte:
N – logaritmando ou antilogaritmo
a – base


Introdução

A Unidade 1 de nosso estudo sobre cálculo integral contém vastos conhecimentos a respeito de um tema que você já sabe qual é: funções! Dizemos que uma equação corresponde a uma função quando há, entre os elementos de determinados conjuntos, uma relação específica e determinada. Basicamente, isso significa dizer, por exemplo, que cada elemento de um dado conjunto tem um correspondente em um se-



Ao longo do livro, o leitor se depara com vários hipertextos. Classificados como “Saiba mais”, “Exemplo”, “Fique atento” e “Link”, esses hipertextos permitem ao aluno ir além em suas pesquisas, oferecendo-lhe amplas possibilidades de aprofundamento.

A *linguagem dialógica* aproxima o estudante dos temas abordados, eliminando qualquer obstáculo para seu entendimento e incentivando o estudo.

A *diagramação* contribui para que o estudante registre ideias e faça anotações, interagindo com o conteúdo.

Todas essas características deixam claro que os livros da Bibliografia Universitária Pearson constituem um importante aliado para estudantes conectados e professores objetivos – ou seja, para o mundo de hoje – e certamente serão lembrados (e usados) por muito tempo.

Boa leitura!

PREFÁCIO

O livro *Cálculo integral* é um complemento da obra *Cálculo diferencial*. Ambos seguem o formato da série Bibliografia Universitária Pearson (BUP), que apresenta os temas propostos de maneira bastante clara e objetiva.

Historicamente, o cálculo foi desenvolvido em trabalhos independentes por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Em termos gerais, é fundamentado em três conceitos: o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de funções. Cálculo diferencial e cálculo integral estão estritamente relacionados, pois a derivação e a integração são processos inversos.

Este livro está dividido em quatro unidades e explora os três conceitos anteriores: limites, derivadas e integral, sempre com vários exemplos e exercícios, tópicos essenciais para o aprendizado. Somente com exercícios o aluno pode avaliar seus conhecimentos, fixar conceitos e desenvolver confiança para seus trabalhos futuros.

Na Unidade 1 é feita uma revisão das principais características das funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, para então explorar o estudo da derivada dessas funções. Também são apresentados alguns limites especiais, entre eles o limite fundamental exponencial e o limite fundamental trigonométrico. Com o conceito de derivadas, a Unidade 2 traz a Regra de L´Hospital, importante para o cálculo de limites e a introdução ao cálculo de integrais, definindo suas propriedades elementares e chamando a atenção para a operação inversa da derivada. Na Unidade 3, solidifica-se o cálculo das integrais indefinidas explorando as regras imediatas de integração e o método de integração por partes. Para finalizar, na Unidade 4, são apresentados mais três métodos de integração: substituição trigonométrica, expansão em frações parciais e outras substituições especiais. Também é mostrado o conceito de Somas de Riemann, fundamental para a teoria de integral definida, e diversas aplicações do cálculo integral, ampliando o conhecimento sobre o assunto.

Bom aprendizado!

UNIDADE 1

Funções exponenciais e logarítmicas: generalidades e aplicações

Objetivos de aprendizagem

- Identificar funções explícitas e implícitas.
- Entender funções logarítmicas e funções exponenciais.
- Aprender regras de derivação de funções.
- Calcular a derivada das funções logarítmicas e exponenciais.
- Compreender o que é limite exponencial fundamental.

Temas

- **1 – Funções explícitas e implícitas**
  Iniciaremos o estudo pelas funções explícitas e implícitas, apresentando exemplos que apoiem nossa aprendizagem. Além disso, conheceremos inúmeros tipos de função e suas propriedades.
- **2 – Considerações sobre a 7ª operação em matemática: a logaritmação**
  Neste tema, estudaremos as definições e as propriedades da logaritmação – ou 7ª operação matemática. Apresentaremos gráficos que permitam a visualização dos conteúdos apresentados.
- **3 – O limite exponencial fundamental**
  Entenderemos os conceitos de limite e continuidade. Buscaremos compreender o limite fundamental das funções exponenciais e também a base do sistema neperiano.
- **4 – Limites especiais**
  Aqui aprofundaremos o estudo dos limites, conhecendo outros limites especiais de funções.

- **5 – A derivada da função exponencial e da função logarítmica**
  O objeto de estudo deste tema é a derivação de algumas funções elementares. Estudaremos a derivada da função exponencial e da função logarítmica.
- **6 – Derivada da função exponencial composta**
  Encerraremos a Unidade 1 conhecendo a derivada da função exponencial composta por meio de exemplos que facilitem nossa aquisição de conhecimento.

Introdução

A Unidade 1 de nosso estudo sobre cálculo integral contém vastos conhecimentos a respeito de um tema que você já sabe qual é: funções! Dizemos que uma equação corresponde a uma função quando há, entre os elementos de determinados conjuntos, uma relação específica e determinada. Basicamente, isso significa dizer, por exemplo, que cada elemento de um dado conjunto tem um correspondente em um segundo conjunto de elementos. Já percebeu que, assim que definimos o que é função, apresentamos também os conceitos, que certamente você conhece, de domínio, contradomínio e imagem de uma função? Do mesmo modo, é bom relembrarmos a definição de função derivada. Trata-se de uma função auxiliar, que apresenta a taxa de variação de determinada função. A taxa de variação, por sua vez, é aquela que nos mostra o "comportamento" de uma função em relação a uma variável. Por exemplo: como a velocidade varia em função do tempo; como a potência de um gerador varia com a temperatura; como o custo de produção de aço varia em relação à quantidade de toneladas produzidas. Resumindo, a função derivada nos ajuda a alcançar um conhecimento mais aprofundado dos fenômenos. Trata-se de conceitos básicos, mas que norteiam o conhecimento avançado que você encontrará neste livro. Nesta unidade, estudaremos alguns tipos de função derivada e suas características, tais como a derivada da função exponencial, da função logarítmica e da função exponencial composta.

Mas, antes das funções derivadas, veremos as chamadas explícitas e implícitas. Na função explícita, os valores assumidos, isto é, os valores do conjunto imagem, estão explicitamente ligados aos elementos do domínio. Por sua vez, funções implícitas, como o próprio nome diz, definem uma relação implícita entre as variáveis x e y. Além disso, estudaremos a derivação das funções transcendentes e o limite fundamental exponencial, assim como outros limites especiais. Compreenderemos a base do chamado sistema neperiano, criado pelo matemático, físico, astrônomo e teólogo escocês John Neper (1550-1617) e ampliaremos muito nosso conhecimento dessa área tão fundamental e ao mesmo tempo tão temida da matemática que é o cálculo integral. Nas demais unidades do livro, estudaremos a integração de funções com cuidado e dedicação, sempre fornecendo exemplos que facilitem a aprendizagem. Para chegar lá, temos de começar. Vamos, então, ver o que nos espera na Unidade 1?

Funções explícitas e implícitas

Generalidades sobre a equação de uma função

Estamos acostumados a ver funções definidas como $f(x) = y$, não é? Saiba que, em funções desse tipo, existe uma relação explícita entre as duas variáveis. Alterando o valor de x, alteramos o valor de y, que está condicionado ao valor de x.

Mas agora considere a equação $f(x, y) = 0$. Note que o valor assumido pela função – ou, em outras palavras, o conjunto imagem – depende de duas variáveis, de modo que existe entre ambas uma relação implícita. Vejamos agora exemplos de funções na forma implícita.

Fique atento

Como você pode observar, ao transformarmos uma equação do tipo $f(x, y) = 0$ em uma função do tipo $y = f(x)$, estamos convertendo a função em explícita. Quando esse procedimento for possível, a derivação segue as regras conhecidas. Quando não, é necessário usarmos o método da derivação implícita, que permite a derivação da função sem que seja preciso torná-la explícita.

Exemplos

a. A equação $x^2 + 1/2\ y - 1 = 0$ define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$. Ao isolarmos y por meio de operações matemáticas básicas, obtemos a função explícita $y = 2(1 - x^2)$.

Note que, ao substituirmos y por $2(1 - x^2)$ na equação $x^2 + 1/2\ y - 1 = 0$, obtemos a identidade $x^2 + 1/2 \cdot 2(1 - x^2) - 1 = 0$. Desenvolva a equação e você encontrará $0 = 0$.

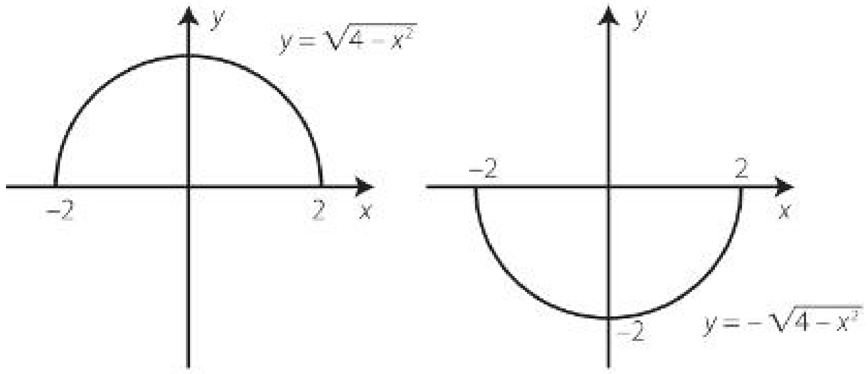
b. A equação $x^2 + y^2 = 4$ define, implicitamente, uma infinidade de funções. Resolvendo a equação para y como função de x, temos:

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Desse modo, a equação $x^2 + y^2 = 4$ define implicitamente as funções $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$

Os gráficos dessas funções mostram, respectivamente, uma semicircunferência superior e uma inferior, ambas com centro no ponto de origem e raio 2. Observe no Gráfico 1.1:

Gráfico 1.1



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 165).

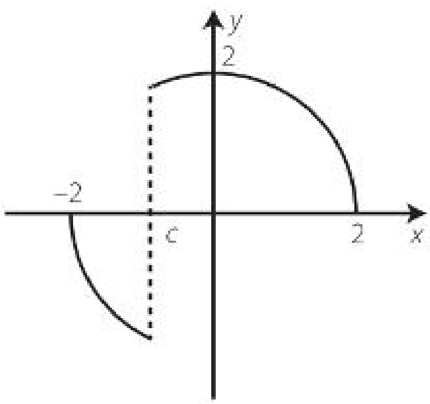
c. A equação $x^2 + y^2 = 4$ define implicitamente outras funções. Considerando um número real c entre –2 e 2, podemos definir a função

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & \text{para } x \geqslant c \\ -\sqrt{4-x^2}, & \text{para } x < c \end{cases}$$

A função $h(x)$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$. Se considerarmos $y = h(x)$, temos que a função $h(x)$ também é definida implicitamente pela equação para todo valor de x no domínio de h, pois $x^2 + [h(x)]^2 = 4$.

Veja o Gráfico 1.2 da função h. Note que, no ponto c, ela não é contínua e, portanto, não é derivável.

Gráfico 1.2



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 166).

Atribuindo diferentes valores a c, podemos obter a quantidade de funções que quisermos. Assim, a equação $x^2 + y^2 = 4$ é um exemplo de equação que define implicitamente uma infinidade de funções!

A derivada de uma função na forma implícita

Imagine que $f(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Nos exemplos que se seguem, veja que, utilizando a regra da cadeia, podemos encontrar a derivada y' sem encontrar y:

Fique atento

Consulte na página 23 a proposição da regra da cadeia.

Exemplo

a. Determinar y', sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$.

Como $x^2 + y^2 = 4$ define $y = f(x)$ implicitamente, podemos considerá-la uma identidade válida para todo x no domínio de f. Derivando os membros dessa identidade em relação a x, temos:

$$(x^2 + y^2)' = (4)'$$

ou

$$(x^2)' + (y^2)' = 0$$

Como $y = f(x)$, usando a regra da cadeia, temos: $2x + 2yy' = 0$. Isolando y', temos: $y' = -x/y$.

Fique atento

Note que, nesse exemplo, usamos o fato de que $y = f(x)$ é uma função *derivável* definida implicitamente. Esse resultado não é válido para a função $h(x)$, representada no Gráfico 1.2, pois ainda que essa função também seja definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, ela não é contínua no ponto $x = c$ e, portanto, não é derivável nesse ponto.

Fique atento

Para que uma função seja contínua em um ponto específico, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

a. f é definida no ponto específico, ou seja, conhecemos sua imagem;

b. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

c. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Veja que no ponto c a função não é contínua, pois não atende às condições acima.

Considerações sobre a derivação das funções transcendentes

Funções comuns

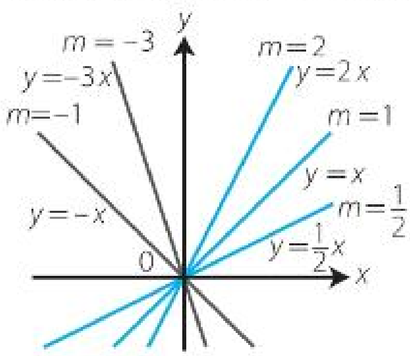
Em cálculo, encontramos frequentemente certos tipos de função. Sendo assim, é muito importante saber identificá-los e conhecer suas características. Vamos, então, estudá-los.

Função linear

A função linear apresenta a forma $f(x) = mx + b$, sendo m e b constantes, tal como no exemplo $f(x) = 2x + 4$. É importante ressaltar aqui que m é chamado de coeficiente angular e b de coeficiente linear. Faça o teste, atribuindo valores diversos a x e encontrando o valor da função. Em seguida, construa o gráfico e veja que o comportamento da função é linear.

O Gráfico 1.3 apresenta vários exemplos de função linear da forma $f(x) = mx$, sendo $b = 0$. Ela mostra os valores assumidos por y de acordo com cada valor atribuído a m.

Gráfico 1.3 As retas passam pela origem com coeficiente angular m.

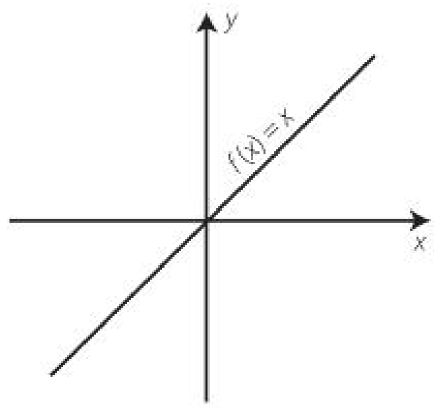


Fonte: Thomas (2013a, p. 7).

Função identidade

A função do tipo $f(x) = x$, na qual m é igual a 1 e b é igual a 0, é chamada de função identidade. Em resumo, $y = x$. Assim, na função identidade o conjunto domínio é idêntico ao conjunto imagem (Gráfico 1.4).

Gráfico 1.4



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 25).

Saiba mais

Temos funções constantes quando o coeficiente angular $m = 0$. Se uma função apresenta coeficiente angular positivo e seu gráfico passa pela origem, temos caracterizada uma função chamada relação de proporcionalidade. Em outras palavras, as variáveis x e y são proporcionais entre si, tal como na função $y = kx$, onde $k \neq 0$. Podemos também encontrar funções inversamente proporcionais, nas quais a variável y corresponde a $1/x$.

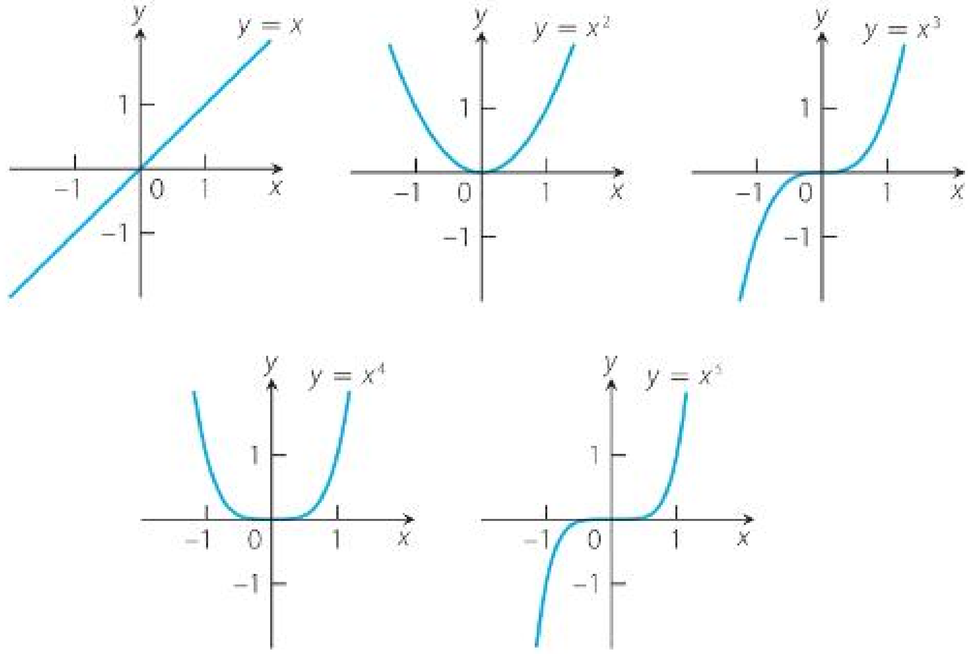
Função de potência

Uma função do tipo $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada de função de potência. Mas preste atenção! Há vários casos de função de potência que devemos conhecer. São eles:

a. $a = n$, onde n é um número inteiro positivo

Observe os gráficos a seguir. São gráficos de funções do tipo $f(x) = x^n$, onde $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Gráfico 1.5 Gráficos de $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, definidos para $-\infty < x < \infty$.



Fonte: Thomas (2013a, p. 8).

Fique atento

Intervalos abertos são expressos por parênteses ou colchetes, da seguinte forma: (...) ou]...[. Intervalos fechados são representados por [...]. Como você sabe, intervalos podem ser abertos de um lado e fechados de outro. Por isso, preste muita atenção em sua representação.

Tais funções são definidas para todos os valores reais de x. Veja nos gráficos que, à medida que o valor da potência aumenta, as curvas tendem a se achatar sobre o eixo x no intervalo $(-1, 1)$. Como você pode observar, quando $n = 1$, o gráfico não mostra uma curva, mas uma reta! Observe também que conforme o valor de n aumenta, as curvas sobem mais verticalmente. Todas elas passam pelo ponto $(1, 1)$ e pela origem.

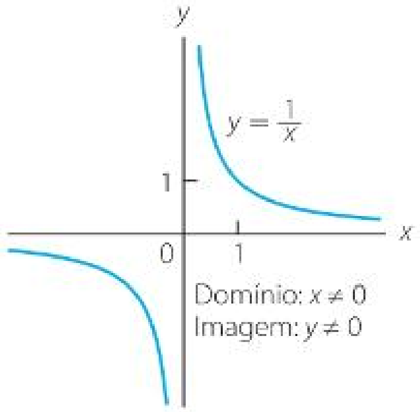
Sobre as funções de potência nas quais o expoente é um número inteiro positivo, você ainda deve saber que:

- **Funções com potências pares** são simétricas em relação ao eixo y, tal como demonstrado no Gráfico 1.5, onde $y = x^2$ e $y = x^4$. São decrescentes no intervalo $(-\infty, 0)$.
- **Funções com potências ímpares** são simétricas em relação à origem, como demonstrado em $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$. São crescentes ao longo de toda a reta real $(-\infty, \infty)$.

b. $A = -1$ ou $a = -2$

Veja o Gráfico 1.6 da função $f(x) = x^{-1} = 1/x$:

Gráfico 1.6 Gráfico da função de potência $f(x) = x^a$ para a parte $a = -1$.

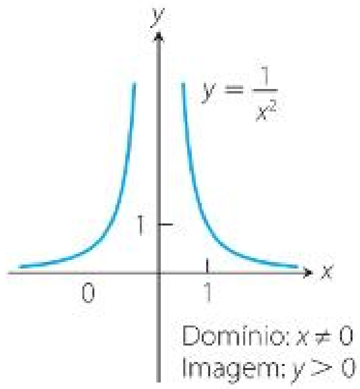


Fonte: Thomas (2013a, p. 8).

Veja que a função é definida para todos os valores de $x \neq 0$, pois em matemática não existe divisão por 0. O gráfico de $y = 1/x$, onde $xy = 1$, aproxima-se dos eixos coordenados, mas se afasta da origem.

Agora, considere a função $f(x) = x^{-2} = 1/x^2$. Observe o Gráfico 1.7:

Gráfico 1.7 Gráfico da função de potência $f(x) = x^a$ para a parte $a = -2$.



Fonte: Thomas (2013a, p. 8).

Como você pode notar, o gráfico da função $y = 1/x^2$ também se aproxima dos eixos coordenados. Comparando os gráficos, note que:

- O Gráfico 1.6 da função f é simétrico em relação à origem e decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.
- O Gráfico 1.7 da função f é simétrico em relação ao eixo y, crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$.

c. $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$

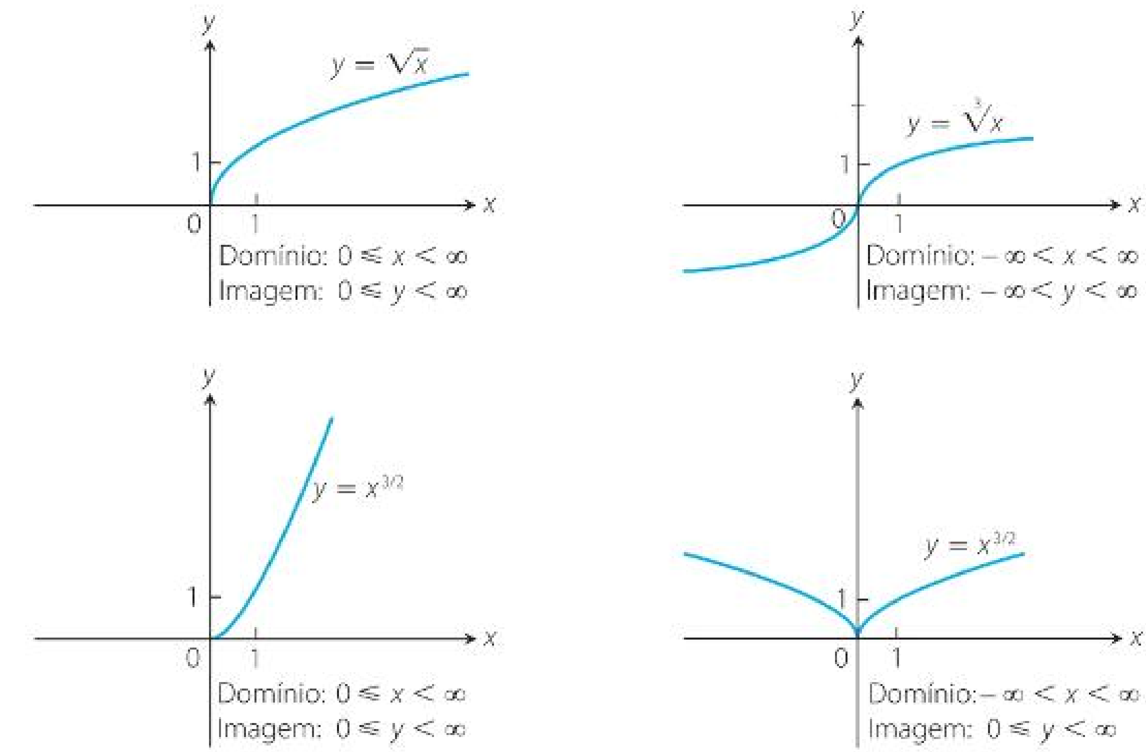
Fique atento

Lembre-se de que, de acordo com as normas de exponenciação e radiciação de equações, $x^{3/2} = x^{1/2}$ elevado a 3 e $x^{2/3} = x^{1/3}$ elevado a 2.

Na função $f(x) = x^{1/2}$, temos $y = \sqrt{x}$. Da mesma forma, na função $f(x) = x^{1/3}$, temos $y = \sqrt[3]{x}$. São as funções chamadas de raiz quadrada e raiz cúbica, respectivamente.

O gráfico delas e das funções $y = x^{3/2}$ e $y = x^{2/3}$ pode ser observado a seguir. Note que o domínio da função raiz quadrada é $[0, \infty]$ e que a raiz cúbica é definida para todos os números reais.

Gráfico 1.8 Gráficos das funções de potência $f(x) = x^a$ para $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.



Fonte: Thomas (2013a, p. 8).

Função polinômio

Uma função é um polinômio se

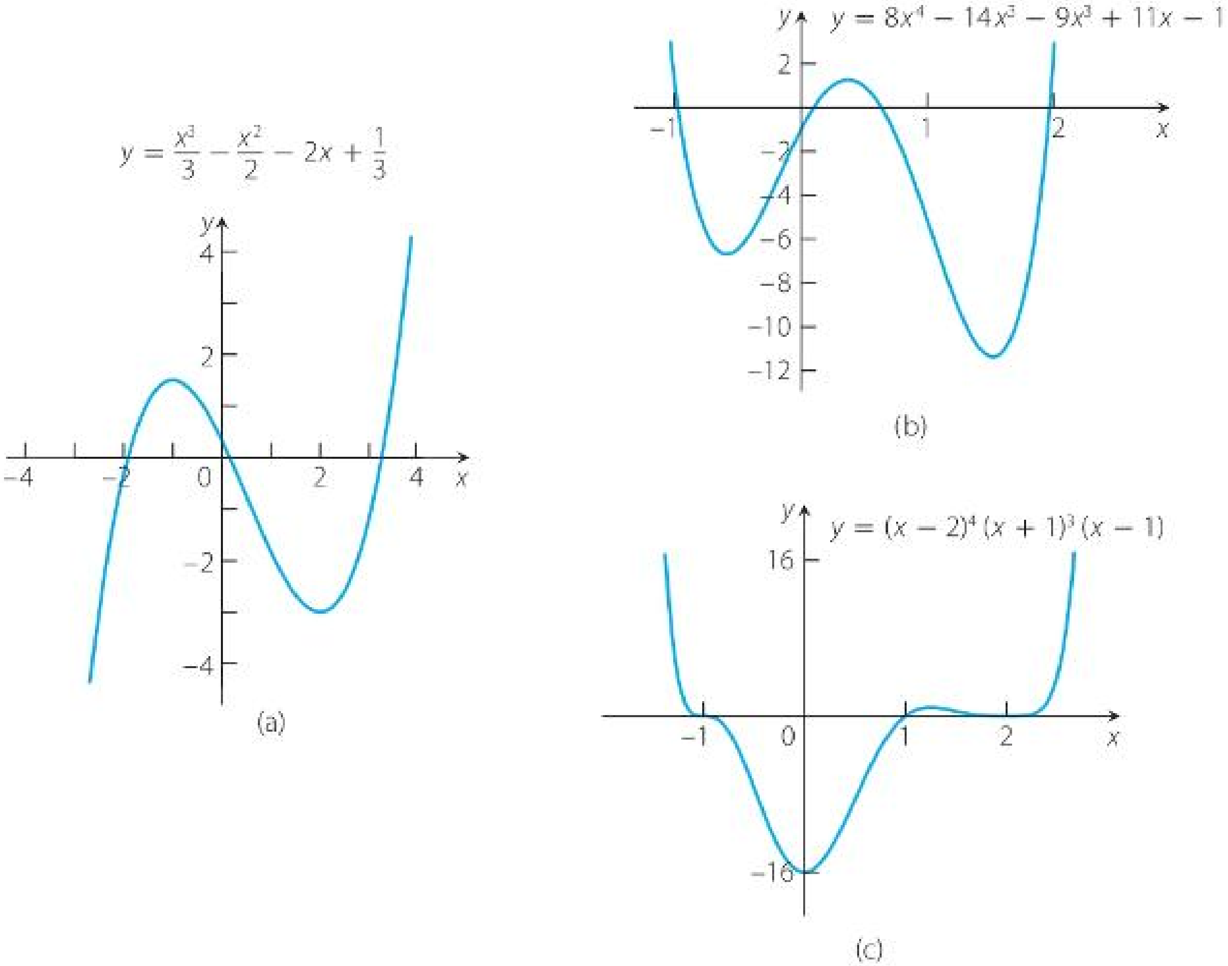
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + x\, a_1 + a_0$$

Na função polinômio, n é um número inteiro não negativo e os números a_0, a_1, a_2, ... a_n são constantes reais. Tais constantes são chamadas de coeficientes de polinômio. É importante lembrarmo-nos de que todos os polinômios têm como domínio o intervalo $(-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$ e $n > 0$, então n é chamado de grau de polinômio. Assim, funções lineares com $m \neq 0$ são polinômios de grau 1.

Polinômios de grau 2 são chamados de funções quadráticas. Geralmente, são indicados por $p(x) = ax^2 + bx + c$. Da mesma forma, funções cúbicas são polinômios de grau 3, indicadas por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

No Gráfico 1.9, apresentamos exemplos de gráficos de funções polinomiais de diferentes graus:

Gráfico 1.9 Gráficos de três funções polinomiais.

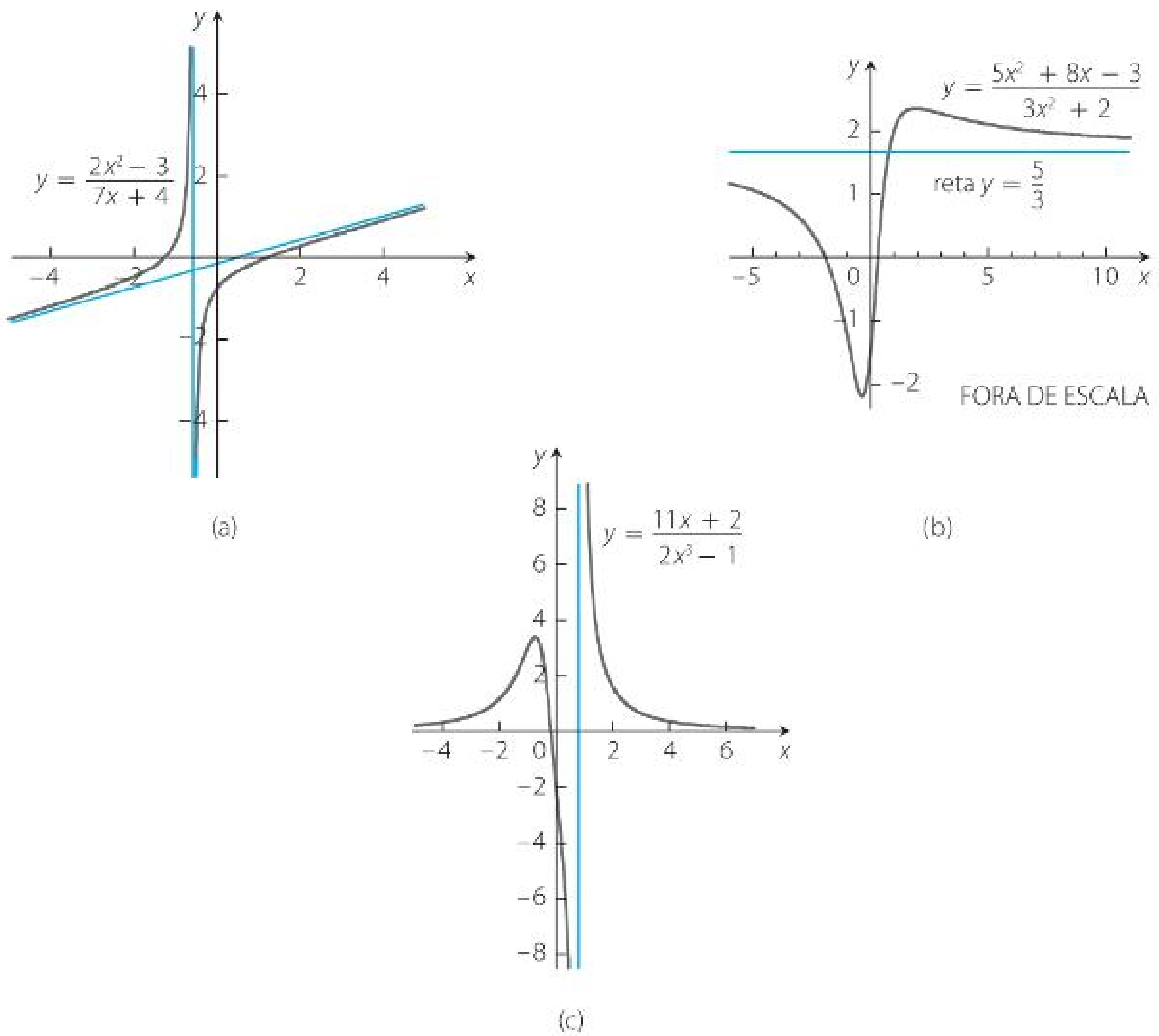


Fonte: Thomas (2013a, p. 9).

Função racional

Considere a função $f(x) = p(x)/q(x)$, onde p e q são polinômios. Nesse caso, dizemos que a função é racional. Ela tem como domínio o conjunto de todos os x reais para os quais $q(x) \neq 0$. Os gráficos seguintes trazem diversos exemplos de funções racionais. Veja:

Gráfico 1.10 Gráficos de três funções racionais. As linhas retas em cinza claro são chamadas *assíntotas* e não fazem parte do gráfico.

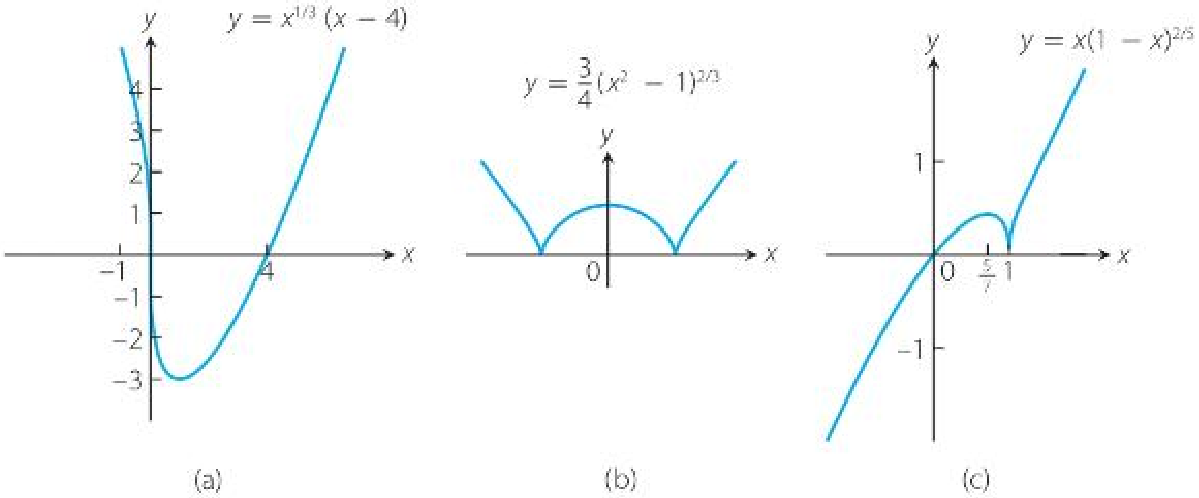


Fonte: Thomas (2013a, p. 9).

Função algébrica

Toda função construída a partir de polinômios ligados entre si por meio de operações algébricas (adição, subtração, divisão, multiplicação ou extração de raízes) é chamada de função algébrica. Todas as funções racionais, por exemplo, são funções algébricas. Veja exemplos de funções algébricas demonstradas no Gráficos 1.11.

Gráfico 1.11 Gráficos de três funções algébricas.



Fonte: Thomas (2013a, p. 9).

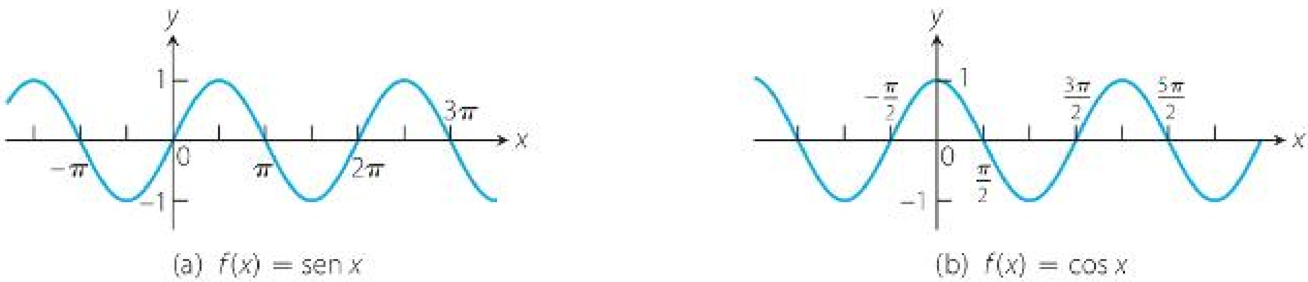
Fique atento

As funções algébricas também incluem funções mais complexas, que apresentam derivadas implícitas. Por exemplo: $y^3 - 9xy + x^3 = 0$. Para aprender mais sobre o assunto, consulte a seção 3.7 da obra *Cálculo*, vol. 1, de G. B. Thomas.

Funções trigonométricas (seno e cosseno)

Veja o Gráfico 1.12 com exemplos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \cos x$:

Gráfico 1.12 Gráficos das funções seno e cosseno.



Fonte: Thomas (2013a, p. 10).

Saiba mais

Além das funções seno e cosseno, temos, ainda, outras quatro funções trigonométricas básicas. São elas: tangente, cotangente, secante e cossecante. Para aprender mais sobre o assunto, consulte a seção 1.3 da obra *Cálculo*, vol. 1, de G. B. Thomas (2013, 12. ed.).

Fique atento

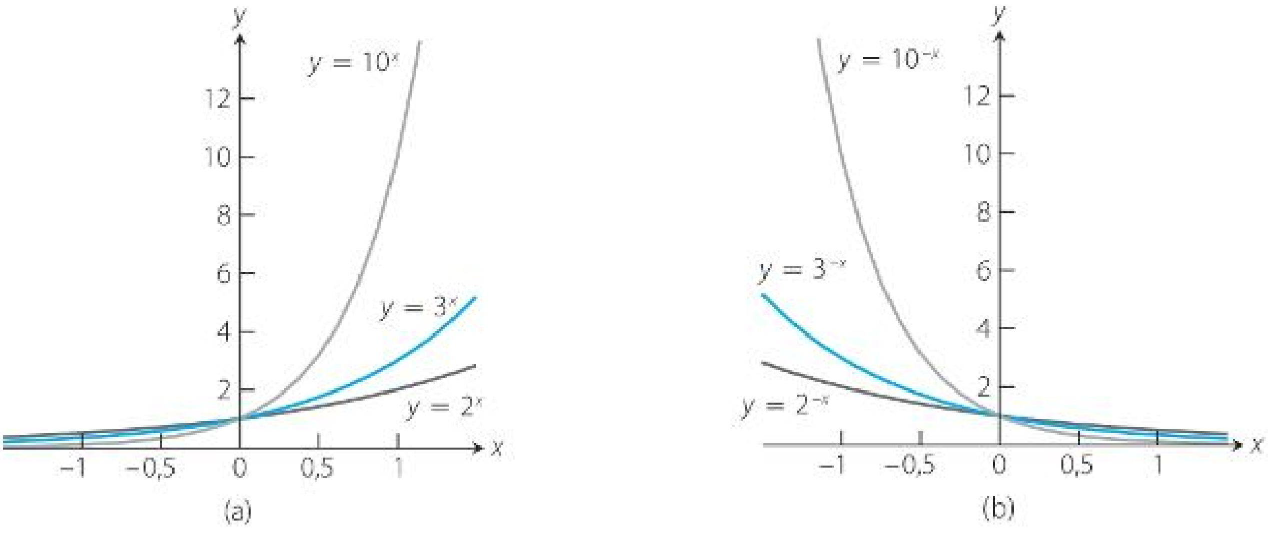
Não confunda a função exponencial com a função de potência $f(x) = x^a$, na qual a pode assumir diferentes valores, alterando as características da função. Atenção às características de ambas.

Função exponencial

A função exponencial apresenta-se na forma $f(x) = a^x$, onde a base a é maior que zero (constante positiva) e diferente de 1. Todas as funções exponenciais têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $(0, \infty)$. Assim, uma função exponencial nunca assume o valor 0, pois para qualquer $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f(x) > 0$.

A seguir, confira o Gráfico 1.13 da função exponencial $f(x) = 10^x$ e da função exponencial $f(x) = 10^{-x}$.

Gráfico 1.13 Gráficos de funções exponenciais.



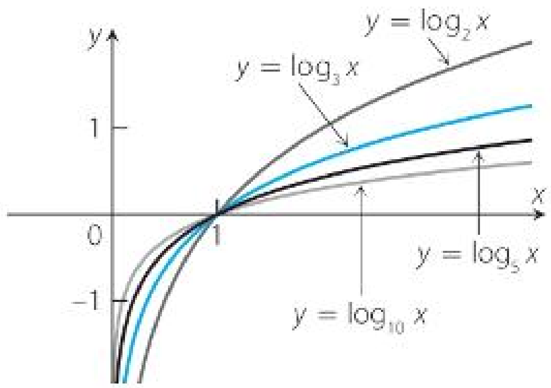
Fonte: Thomas (2013a, p. 10).

Função logarítmica

A função logarítmica apresenta a fórmula $f(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, ou seja, a é uma constante positiva. As funções logarítmicas são inversas das exponenciais, pois o logaritmo é o expoente que determinada base precisa apresentar para resultar em determinada potência.

Veja no Gráfico 1.14 exemplos de funções logarítmicas com bases variadas. Em todos os casos, a função logarítmica tem como domínio $(0, \infty)$ e imagem $(-\infty, \infty)$.

Gráfico 1.14 Gráfico de quatro funções logarítmicas.



Fonte: Thomas (2013a, p. 10).

Função transcendente

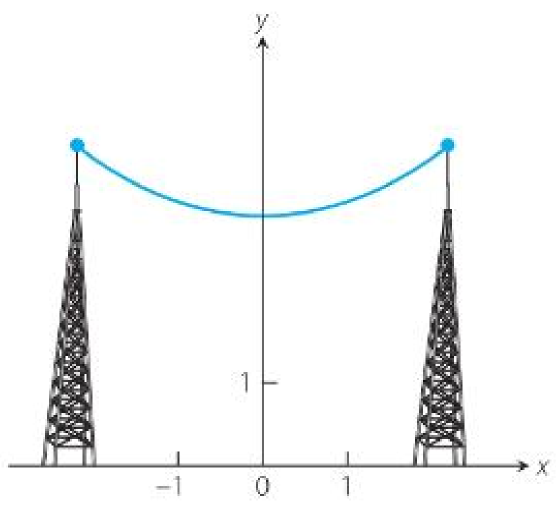
Lembra-se da definição de função algébrica? Funções transcendentes são funções não algébricas, isto é, aquelas que incluem operações matemáticas não algébricas. São funções transcendentes, por exemplo, as trigonométricas, as trigonométricas inversas, as exponenciais e as logarítmicas, dentre outras.

Veja no Gráfico 1.15 um exemplo de função transcendente denominada catenária, cujo gráfico assume a forma de um cabo pendente estendido entre dois suportes.

Fique atento

Se quiser saber mais sobre a função catenária e suas propriedades, consulte a seção 7.3 da obra *Cálculo*, vol. 1, de G. B. Thomas (2013, 12. ed.).

Gráfico 1.15 Gráfico de uma catenária ou cabo pendente (a palavra latina *catena* significa "corrente").



Fonte: Thomas (2013a, p. 10).

Considerações sobre a 7ª operação em matemática: a logaritmação

Funções logarítmicas (inversas das funções exponenciais)

A função exponencial $f(x) = b^x$ tem uma função inversa denominada função logarítmica de base b. É expressa da seguinte forma: $\log_b x$, isto é, se a função $f(x) = b^x$ com $b > 0$ e $b \neq 1$ (tal como você aprendeu no tópico sobre função exponencial anteriormente), então $f^{-1}(x) = \log_b x$.

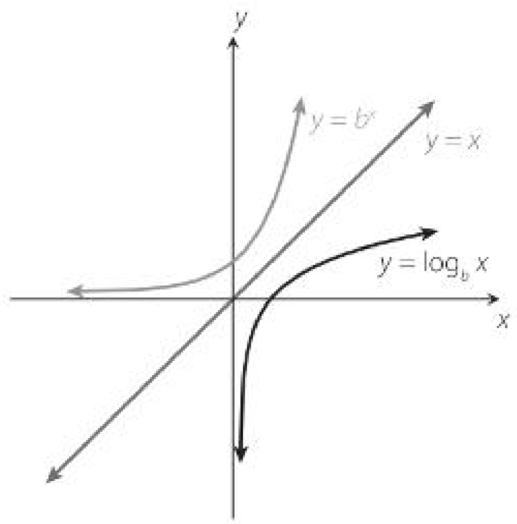
O que significa essa inversão? Significa que um logaritmo está vinculado a uma potência. Em outras palavras, o logaritmo é o expoente da potência. Desse modo, podemos desenvolver expressões logarítmicas usando nossos conhecimentos sobre potenciação, certo?

Veja o Gráfico 1.16 da função exponencial $f(x) = b^x$ e sua inversa:

Saiba mais

Transformação entre a forma logarítmica e a forma exponencial: se $x > 0$ e $0 < b \neq 1$, então $y = \log_b x$ se e somente se $b^y = x$.

Gráfico 1.16 A função exponencial e sua inversa que é a função logarítmica (no caso de função crescente).



Fonte: Demana et al. (2009, p. 143).

Exemplo 1. Cálculo de logaritmos

a. $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

b. $\log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$ porque $3^{1/2} = \sqrt{3}$

c. $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$ porque $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

d. $\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$
e. $\log_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$

Propriedades básicas dos logaritmos

As propriedades dos logaritmos dão suporte para calcularmos logaritmos e algumas equações exponenciais. Por isso, é fundamental que você as conheça!

Para $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ e y um número real qualquer, temos que:

a. $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$
b. $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$
c. $\log_b b^y = y$ porque $b^y = b^y$
d. $b^{\log_b x} = x$ porque $\log_b x = \log_b x$

Exemplo 2. Cálculo de logaritmos

a. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
b. $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{1/2} = \dfrac{1}{2}$
c. $6^{\log_6 11} = 11$

Para treinar sua habilidade de calcular o valor da função logarítmica a partir da exponencial, observe cuidadosamente a Tabela 1.1 e aprenda a calcular a função inversa. Considere $f(x) = 2^x$ e $f^{-1}(x) = \log_2 x$:

Tabela 1.1 Uma função exponencial e sua inversa.

x	$f(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Fonte: Demana et al. (2009, p. 144).

Logaritmos com base 10

Quando a base do logaritmo é 10, não precisamos escrevê-lo. Uma função do tipo $f(x) = \log x$ é uma função logarítmica com base 10. Lembre que essa função é a inversa da exponencial $f(x) = 10^x$.

Assim, $y = \log x$ se e somente $10^y = x$.

Propriedades básicas para logaritmos com base 10

Sejam x e y números reais, sendo que x é maior que 0.

a. $\log 1 = 0$ porque $10^0 = 1$

b. $\log 10 = 1$ porque $10^1 = 10$

c. $\log 10^y = y$ porque $10^y = 10^y$

d. $10^{\log x} = x$ porque $\log x = \log x$

Exemplo. Cálculo de logaritmos com base 10

a. $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$

b. $\log \sqrt[5]{10} = \log 10^{1/5} = \dfrac{1}{5}$

c. $\log \dfrac{1}{1000} = \log \dfrac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$

d. $10^{\log 6} = 6$

Saiba mais

A letra *e* é a inicial do último nome do alemão Leonhard Euler (1707-1783), que foi quem introduziu a notação. O logaritmo de base *e* é um número irracional, igual a aproximadamente 2,718281828459... A base *e* é considerada a base natural da função exponencial natural

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Vamos estudá-la no próximo tema, mas você pode consultar também o capítulo 11 da obra *Pré-cálculo*, de Franklin Demana e colaboradores (2009, 2. ed.).

Logaritmos com base e

Logaritmos com base e são chamados também de logaritmos naturais. Assim como as funções logarítmicas que estudamos até agora, a logarítmica com base e, muitas vezes expressa apenas com a sigla "ln", é a inversa da função exponencial $f(x) = e^x$.

Assim, $y = \ln x$ se e somente se $e^y = x$.

Propriedades básicas para logaritmos com base *e* (logaritmos naturais)

Sejam x e y números reais, sendo que x é maior que 0.

a. $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$

b. $\ln e = 1$ porque $e^1 = e$

c. $\ln e^y = y$ porque $e^y = e^y$

d. $e^{\ln x} = x$ porque $\ln x = \ln x$

Exemplo. Cálculo de logaritmos com base *e*

a. $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$ porque $e^{1/2} = \sqrt{e}$

b. $\ln e^5 = \log_e e^5 = 5$

c. $e^{\ln 4} = 4$

O limite exponencial fundamental

Proposição do limite exponencial fundamental

A base natural $e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ tem como valor o número irracional 2,718281828459...

Isso significa que, quando x tende ao infinito, o limite da função exponencial aproxima-se do número irracional 2,718281828459... Apesar de o escocês John Neper (1550-1617) ser considerado o inventor do logaritmo, Leonhard Euler foi quem calculou o valor do número e.

Para facilitar a compreensão, observe a Tabela 1.2 e veja como o aumento do valor de x faz o valor da função tender ao limite e:

Tabela 1.2

x	$e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Exemplos

a. Provar que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

Em primeiro lugar, provaremos que $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = e$.

De fato, fazendo $x = 1/t$ temos que $t \to +\infty$ quando $x \to 0^+$.

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to\infty}(1+1/t)^t = e$$

Da mesma forma, prova-se que $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 + x)^{1/x} = e$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

b. Determinar $\lim\limits_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t}$

Usando a proposição segundo a qual $\lim\limits_{x \to a} \ln [f(x)] = \ln [\lim\limits_{x \to a} f(x)]$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t} &= \ln [\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t}] \\ &= \ln e \\ &= 1 \end{aligned}$$

Limites especiais

Após estudarmos o limite da função exponencial, veremos agora mais um exemplo de cálculo de limite especial.

Considere a proposição: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0,\ a \neq 1)$.

Fazendo $t = a^x - 1$, temos:

$$a^x = t + 1$$

Aplicando os logaritmos na igualdade, vem:

$$\begin{aligned} \ln a^x &= \ln (t + 1) \\ x \ln a &= \ln (t + 1) \\ x &= \frac{\ln (t + 1)}{\ln a} \end{aligned}$$

Quando $x \to 0$, $x \neq 0$ temos que $t \to 0$, $t \neq 0$ e, então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\dfrac{\ln(t + 1)}{\ln a}} \\ &= \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(t + 1)}{t}} \\ &= \ln a \cdot \frac{\lim\limits_{t \to 0} 1}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(t + 1)}{t}} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Exemplo

Considere $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

Temos,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{b^x \left[\dfrac{a^x}{b^x} - 1 \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} b^x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{a}{b} \right)^x - 1}{x}$$

$$= 1 \cdot \ln \frac{a}{b}$$

$$= \ln a/b$$

A derivada da função exponencial e da função logarítmica

A derivada da função exponencial

Se $y = a^x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, então:

$$y' = a^x \ln a \; (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Confira a demonstração da proposição anterior:

Seja $y = a^x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$.

Considerando-se que a derivada de uma função $y = f(x)$ é dada por $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,temos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{x} - 1}{x}$ é o limite fundamental provado no Tema 4 de nosso estudo, vem:

$$y' = a^x \cdot \ln a$$

A derivada da função logarítmica

Se $y = \log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), então:

$y' = \frac{1}{x} \log_a e$ ($a > 0$ e $a \neq 1$)

Demonstração:

Aplicando-se a proposição da derivada, temos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x}$$

Usando a proposição segundo a qual $\lim\limits_{x \to a} \ln [f(x)] = \ln [\lim\limits_{x \to a} f(x)]$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$, podemos escrever:

$$y' = \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{1/\Delta x} \right]$$

$$= \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x / \Delta x}{x / \Delta x} \right)^{1/\Delta x} \right]$$

$$= \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x / \Delta x} \right)^{1/\Delta x \cdot x/x} \right]$$

$$= \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x / \Delta x} \right)^{x/\Delta x} \right]^{1/x}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x / \Delta x} \right)^{x/\Delta x} \right]$$

Usando o limite fundamental, tal como aprendemos no Tema 3 desta unidade, temos:

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

Derivada da função exponencial composta

A função composta e a regra da cadeia

Antes de aprendermos a calcular a derivada da função exponencial composta, vale a pena recuperarmos alguns conceitos. Você sabe o que é função composta? É aquela formada por mais de uma função simples. Em outras palavras, trata-se de uma função formada pela junção de outras funções. Simples, não é? Na derivação das funções compostas, utilizamos a chamada regra da cadeia.

A regra da cadeia

Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$. Se a derivada de y em relação a u [denota-se: dy/du] e a derivada de u em relação a x [denota-se: du/dx] existem, então a derivada da função y, composta por g e u, expressa por $y = g[f(x)]$, é determinada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ou } y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$$

Exemplo

Dada a função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$, determinar dy/dx, sendo $y = g(u) = u^7$ e $u = x^2 + 5x + 2$.

Pela regra da cadeia, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Aplicando as regras de derivação já conhecidas, temos que $y' = 7u^6$. Derivando os termos da função $u = x^2 + 5x + 2$, temos que $u' = 2x + 5(1) + 0 = 2x + 5$.

Ou seja, $dy/dx = 7(x^2 + 5x + 2)^6\,(2x + 5)$

Derivada da função exponencial geral

Agora, considere a proposição:

Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$, deriváveis em um intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall\, x \in$ I, então $y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

Com base nas propriedades dos logaritmos que estudamos no Tema 2, podemos escrever:

$$y = u^v = e^{v \cdot \ln u}$$

Portanto, $y = (g_0 f\,)(x)$, onde $g(w) = e^w$ e $w = f(x) = v \cdot \ln u$

Tabela geral de derivadas

Como existem inúmeros tipos de função e cada um segue normas distintas de derivação, a Tabela 1.3 pode ajudar muito no cálculo da derivada. Ela reúne as fórmulas das derivadas de cada função. Nela, u e v são funções deriváveis de x e c, α e a são constantes. Confira:

Tabela 1.3 Tabela geral de derivadas.

(1) $y = c \Rightarrow y' = 0$	(2) $y = x \Rightarrow y' = 1$
(3) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$	(4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
(5) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$	(6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
(7) $y = u^{\alpha}$, $(\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$	(8) $y = a^u (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
(9) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$	(10) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e.$
(11) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$	(12) $\underset{(u>0)}{y = u^v} \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$
(13) $y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$	(14) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\text{sen}\, u \cdot u'$
(15) $y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$	(16) $y = \text{cotg}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$
(17) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \text{tg}\, u \cdot u'$	(18) $y = \text{cosec}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}\, u \cdot \text{cotg}\, u \cdot u'$
(19) $y = \text{arc sen}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	(20) $y = \text{arc cos}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
(21) $y = \text{arc tg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$	(22) $y = \text{arc cotg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$
(23) $y = \text{arc sec}\, u,\ \lvert u \rvert \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}},\ \lvert u \rvert > 1$	
(24) $y = \text{arc cosec}\, u,\ \lvert u \rvert \geq 1 \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}},\ \lvert u \rvert > 1$	
(25) $y = \text{senh}\, u \Rightarrow y' = \cosh u \cdot u'$	(26) $y = \cosh u \Rightarrow y' = \text{senh}\, u \cdot u'$
(27) $y = \text{tgh}\, u \Rightarrow y' = \text{sech}^2 u \cdot u'$	(28) $y = \text{cotgh}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2 u \cdot u'$
(29) $y = \text{sech}\, u \Rightarrow y' = -\text{sech}\, u \cdot \text{tgh}\, u \cdot u'$	(30) $y = \text{cosech}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}\, u \cdot \text{cotgh}\, u \cdot u'$
(31) $y = \text{arg senh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$	(32) $y = \text{arg cosh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}},\ u > 1$
(33) $y = \text{arg tgh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2},\ \lvert u \rvert < 1$	(34) $y = \text{arg cotgh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1 - u^2},\ \lvert u \rvert > 1$
(35) $y = \text{arg sech}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}},\ 0 < u < 1$	(36) $y = \text{arg cosech}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{1 + u^2}},\ u \neq 0.$

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 158-159).

Exemplos

Determinar a derivada das funções:

a. $y = 3^{2x^2+3x-1}$

Fazendo $u = 2x^2 + 3x - 1$, temos $y = 3^u$. Portanto,

$$\begin{aligned} y' &= 3^u \cdot \ln 3 \cdot u' \\ &= 3^{2x^2+3x-1} \cdot \ln 3 \cdot (4x + 3). \end{aligned}$$

b. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$

Temos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$, onde $u = \sqrt{x}$. Assim,

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot u' \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c. $y = e^{x \cdot \ln x}$

Neste caso fazemos $y = e^u$, onde $u = x \cdot \ln x$. Então,

$$\begin{aligned} y' &= e^u \cdot u' \\ &= e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \ln x)' \\ &= e^{x \cdot \ln x}\left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1\right] \\ &= e^{x \cdot \ln x}(1 + \ln x) \end{aligned}$$

d. $y = \log_2 u$, onde $u = 3x^2 + 7x - 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'}{u} \cdot \log_2 e \\ &= \frac{6x + 7}{3x^2 + 7x - 1} \cdot \log_2 e \end{aligned}$$

Exercícios de fixação

1. Defina função explícita e função implícita.

2. Apresente a fórmula das seguintes funções:

a. Função linear.

b. Função identidade.

c. Função de potência – de acordo com cada valor assumido pela constante a.

d. Função polinômio.

e. Função racional.

f. Funções seno e cosseno.
g. Função exponencial.
h. Função logarítmica.

3. O que é função transcendente? Apresente exemplos.
4. O que é logaritmo?
5. Por que dizemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial?
6. Explique o que é limite exponencial fundamental, apresentando a definição e o valor da base *e*.
7. Resolva as equações transformando para a forma exponencial:
   a. $\log x = 3$ b. $\log 2x = 5$
8. Apresente a derivada implícita das equações:
   a. $x^2 + 2y + 3 = 0$ b. $x^2 + y^2 = 9$
9. Apresente a fórmula da derivada da função exponencial $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ e $\neq 1$.
10. Apresente a fórmula da derivada da função logarítmica $f(x) = \log a^x$, sendo $a > 0$ e $\neq 1$.

Panorama

John Napier (ou Nepper) foi o primeiro a publicar um trabalho sobre logaritmos, em 1614. O seu trabalho consistia em transformar as operações de multiplicação, divisão e radiciação em adições e subtrações usando as propriedades das potências. Com esse trabalho, Napier conseguiu impressionar Henry Briggs, professor em Oxford, e juntos (em 1615) discutiram a possibilidade de aperfeiçoarem o método. Decidiram preparar novas tabelas que teriam os logaritmos com base 10. Esse trabalho foi concluído por Briggs, pois Napier veio a morrer em 1617. Desde então percebe-se a utilidade dos logaritmos nos cálculos numéricos, razão pela qual estaremos, neste nosso próximo capítulo, estudando um pouco de *logaritmo*.

1. Definição

Dados os números reais N, a e α com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, dizemos que α é o expoente que colocamos em a para obtermos o número N. α é chamado *logaritmo* de N na base a.

$$\boxed{\log_a N = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = N}$$

Em que a nomenclatura usada é a seguinte:
N – logaritmando ou antilogaritmo
a – *base*
α – *logaritmo*

Exemplos

a. $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$
b. $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$
c. $\log_{1/4} 4 = -1$, pois $(1/4)^{-1} = 4$
d. $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$
e. $\log_3 (-9) \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no 3 para obtermos resultado igual a (–9).
f. $\log_{(-2)} 8 \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no (–2) para obtermos resultado igual a 8.
g. $\log_1 12 \Rightarrow$ não existe expoente que se coloque no 1 para obtermos resultado igual a 12.

Exemplos resolvidos

1º exemplo

Determinar o valor de $\log_{1/4} 32$

Fazendo $\log_{1/4} 32 = \beta$, podemos aplicar a definição: $(1/4)^{\beta} = 32$.

Passamos a ter uma equação exponencial, com resolução conhecida:

$(2^{-2})^{\beta} = 2^5 \Rightarrow 2^{-2\beta} = 2^5 \Rightarrow -2\beta = 5$

$\therefore \beta = -5/2$

2º exemplo

Determinar o valor de $\log_3 \sqrt{27}$.

Fazendo $\log_3 \sqrt{27} = \beta$, podemos aplicar a definição de logaritmo: $3^{\beta} = \sqrt{27}$.

Agora é só resolver essa equação exponencial:

$3^{\beta} = \sqrt{(3^3)} \Rightarrow 3^{\beta} = 3^{3/2} \Rightarrow \beta = 3/2 \Rightarrow \log_3 \sqrt{27} = 3/2$

Resolução

$(1/2)\log^2 x < (1/2)^3$

$\log_2 x > 3 \Rightarrow \log_2 x > \log_2 8 \Rightarrow x > 8$

Condição de existência: $x > 0$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 8 \\ \text{e} \\ x > 0 \end{array}\right\rangle \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 8\}$

1. Seja $f(x) = -\log_{1/2}(x^2 - 1)$. Determine os valores reais de x para os quais:

a. $f(x)$ existe

b. $f(x) < 3$

Resolução

a. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow -\log_{1/2}(x^2 - 1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou > 1

b. $f(x < 3) \Leftrightarrow -\log_{1/2}(x^2 - 1) < 3 \Leftrightarrow \log_2 (x^2 - 1) < 3$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - 1) < \log_2 2^3 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 1 < 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 < x^2 < 9 \left| \begin{array}{l} -3 < x < -1 \\ \text{ou} \\ 1 < x < 3 \end{array} \right.$

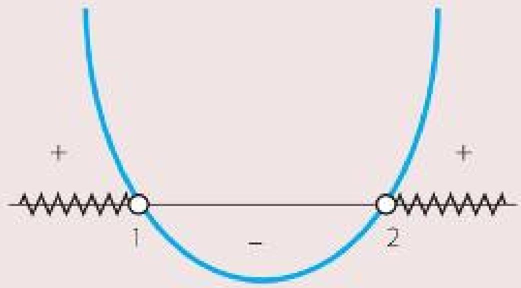
c. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$\log^2 x - 3 \log x + 2 > 0$

Resolução

Condição de existência: $x > 0$

Fazendo $\log x = m$, temos: $m^2 - 3m + 2 > 0$



Assim, $m < 1$ ou $m > 2$, ou seja:

$$\begin{cases} \log x < 1 \Rightarrow \log x < \log 10 \Rightarrow x < 10 \\ \log x < 2 \Rightarrow \log x < \log 100 \Rightarrow x < 100 \end{cases}$$

Portanto, $V = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 10$ ou $x > 100\}$

Problemas com logaritmos

Com o surgimento, desenvolvimento e popularização das calculadoras, a importância dos logaritmos como ferramenta de cálculo diminuiu.

Todavia, as aplicações dos logaritmos em praticamente todas as ciências são ainda muito vastas.

Selecionamos problemas de vestibulares para mostrar algumas dessas aplicações.

Exercício resolvido

1. (Vunesp) Os biólogos dizem que há uma alometria entre duas variáveis, x e y, quando é possível determinar duas constantes, c e n, de maneira que $y = c \cdot x^n$. Nos casos de alometria, pode ser conveniente determinar c e por meio de dados experimentais. Consideremos uma experiência hipotética na qual se obtiveram os dados da tabela a seguir.

Supondo que haja uma relação de alometria entre x e y e considerando $\log 2 = 0{,}301$, determine o valor de n.

x	y
2	16
20	40

Resolução

$y = c \cdot x^n$

$16 = c \cdot 2^n$

$\log 16 = \log c \cdot 2^n$

$\log 2^4 = \log c + \log 2^n$

$4 \cdot \log^2 = \log c + n \cdot \log 2$ (I)

$40 = c \cdot (20)^n \log 40 = \log [c \cdot (20)^n]$

$\log 4 \cdot 10 = \log c + \log (20)^n$

$\log 4 + \log 10 = \log c + n \cdot \log 20$

$\log 2^2 + 1 = \log c + n \cdot \log (2 \cdot 10)$

$2 \cdot \log 2 + 1 = \log c + n \cdot (\log 2 + \log 10)$

$2 \cdot \log 2 + 1 = \log c + n \cdot \log 2 + n$ (II)

Fazendo (I) – (II), temos:

$2 \cdot \log 2 - 1 = -n$

$n = 1 - 2 \cdot \log 2 = 0{,}398$

Resposta: $n = 0{,}398$

Fonte: COC Educação (2014).

Recapitulando

Na unidade de abertura de nosso estudo sobre cálculo integral, dedicamos atenção a temas fundamentais que darão suporte ao entendimento dos assuntos que vêm pela frente. Afinal, é importante que nosso edifício de conhecimentos seja sólido! Para isso, tivemos de retomar alguns temas e conceitos que você certamente conhece, mas sem os quais não poderíamos avançar! Assim, iniciamos nossa trajetória de aprendizagem pelas denominadas funções explícitas e implícitas, sendo estas últimas as que trazem em si mais de uma variável, tal como se expressa em f(x,y) = 0. Desse modo, podemos isolar algebricamente uma das variáveis e obter uma segunda função, inicialmente implícita na primeira. Pudemos verificar também os tipos mais comuns de função, conhecendo suas fórmulas e propriedades, além de visualizar seu comportamento gráfico. Nesse percurso, conhecemos a denominação função transcendente, ou funções que envolvem operações não algébricas, das quais as funções trigonométricas e trigonométricas inversas são os exemplos mais comuns. Outro tema crucial que estudamos nesta unidade foi a inter-relação entre as funções logarítmicas e as funções exponenciais, inversas às logarítmicas. Com os conhecimentos que obtivemos, você agora é capaz de resolvê-las transformando uma na outra. Em tal processo, foi essencial o entendimento do que é o logaritmo e conhecer suas propriedades. Compreendemos também a chamada base *e*, calculada pelo matemático alemão Leonhard Euler. A base *e* representa o limite fundamental da função exponencial, calculado pela função. Em outras palavras, quando o valor de *n* tende ao infinito, o valor da função aproxima-se do número irracional $e = 2{,}71828$. Em seguida, conhecemos a proposição da derivada das funções logarítmica e da exponencial, sendo elas fundamentais no estudo de cálculo. Em alguns momentos, para tratarmos adequadamente dos temas desta Unidade 1, tivemos de introduzir temas que os embasam e apoiam, tal como a tabela geral de derivadas e a proposição da regra da cadeia, regra de derivação de funções compostas. Estamos agora prontos para continuar!

UNIDADE 2

Limite e derivada de funções trigonométricas, regra de L'Hospital e conceitos iniciais do cálculo integral

Objetivos de aprendizagem

- Compreender o limite trigonométrico fundamental.
- Calcular a derivada das funções trigonométricas diretas e inversas.
- Estudar a regra de L'Hospital.
- Entender as generalidades e propriedades elementares da integração.
- Conhecer a integral de monômios e polinômios.

Temas

- **1 – Limites fundamentais**
  Iniciaremos esta unidade buscando entender o limite fundamental das funções trigonométricas.
- **2 – Derivadas das funções trigonométricas diretas e inversas**
  Aqui, estudaremos a derivada das funções trigonométricas e a das funções trigonométricas inversas.
- **3 – Aplicações das regras de L'Hospital no levantamento de limites indeterminados**
  Nesta etapa do estudo, veremos a regra de L'Hospital e sua aplicação no levantamento de limites indeterminados.
- **4 – Considerações iniciais para o estudo da função auxiliar integral**
  Trataremos dos denominados acréscimos e da interpretação geométrica da função derivada e da função diferencial.

- **5 – Integral indefinida**
  No Tema 5, conheceremos a integral indefinida, suas generalidades e propriedades elementares.
- **6 – Integrais de monômios e polinômios**
  Encerraremos a Unidade 2 com o estudo da regra geral de integração para monômios e polinômios, apresentando exemplos que colaboram com o aprendizado.

Introdução

Além de dar continuidade ao estudo da derivada, aprofundando nosso conhecimento sobre o tema, a Unidade 2 introduz a integração de funções. Começaremos nosso estudo pela integração indefinida. Como você sabe, a integração indefinida é considerada a operação inversa à derivação. Na próxima unidade, veremos a integração definida e suas generalidades.

A etapa atual de nosso estudo, contudo, inicia-se avançando no estudo dos limites. Entenderemos agora o limite fundamental das funções trigonométricas. Em seguida, veremos a derivada de tais funções, assim como a das denominadas funções trigonométricas inversas, das quais são exemplo as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente, dentre outras.

Ainda nesta unidade, retornaremos ao estudo dos limites, apresentando a chamada regra de L'Hospital, utilizada no cálculo de limites de funções indeterminadas. Essa regra foi manifestada pela primeira vez em um estudo sobre cálculo no final do século XVII pelo matemático francês Guillaume François Antoine – o Marquês de L'Hospital (1661-1704). Além disso, dedicaremos atenção também à interpretação geométrica da função derivada e da função diferencial, compartilhando gráficos e exemplos que demonstrem as proposições apresentadas e favoreçam a incorporação do conhecimento. Para isso, abordaremos previamente o entendimento da diferencial. Parece muito conteúdo ao mesmo tempo? Aos poucos nos apropriaremos de todos esses saberes e faremos uso deles ao continuar nosso percurso.

No encerramento da Unidade 2, estudaremos a regra geral para a integral de monômios e polinômios. Veremos também a tabela de integrais imediatas. Trata-se de um excelente auxílio, e você poderá consultá-la sempre que precisar! Na sequência, veremos exemplos de aplicações de integral conhecendo sua importância no cálculo de

áreas. A apresentação de casos tornará mais fácil a compreensão da aplicação prática de seus novos conhecimentos.
Nas seções finais, você encontrará exercícios de fixação que vão ajudar a consolidar sua aprendizagem. Agora, é só começarmos!

Limites fundamentais

O limite trigonométrico fundamental

Considere a proposição a seguir. Ela expressa o limite fundamental da função seno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \text{ é igual a 1.}$$

Agora que conhece a proposição, vejamos alguns exemplos.

Exemplos

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{x}$

Podemos calcular limites do tipo

$$\lim_{u \to 0} \frac{\text{sen } u}{u}$$

onde u é uma função em x.
Neste exemplo, $u = 2x$ e $u \to 0$ quando $x \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen } u}{u/2} = 2 \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 2 \cdot 1 = 2$$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x}$

Neste caso, inicialmente lançaremos mão de alguns artifícios de cálculo, como segue:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot 3x}{\dfrac{\text{sen } 4x}{4x} \cdot 4x}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{3x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{4x}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

Fique atento

Para verificar a prova da proposição do limite fundamental da função seno, procure a obra *Cálculo A*, de D. M. Flemming e M. B. Gonçalves (2007a) e consulte a seção "Limites fundamentais".

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

Temos neste caso,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Derivadas das funções trigonométricas diretas e inversas

Derivadas das funções trigonométricas

Derivada das funções seno e cosseno

Considere a proposição:

Se $y = \text{sen } x$, então $y' = \cos x$

Ou seja, a derivada da função seno é a função cosseno. Fácil de recordar, não é mesmo?

Agora, veja a proposição da função cosseno:

Se $y = \cos x$, então $y' = -\text{ sen } x$

A derivada da função cosseno é a função $y = -\text{ sen } x$

Derivadas das demais funções trigonométricas

Como sabemos, as funções trigonométricas são definidas a partir do seno e do cosseno. O mesmo vale para a derivação das funções trigonométricas! Ou seja, elas também são definidas a partir do seno e do cosseno. Dessa forma, para encontrarmos a derivada das demais funções trigonométricas, basta aplicarmos a regra de derivação necessária.

Por exemplo:

Se $y = \text{tg } x = \text{sen } x/\cos x$, então $y' = \sec^2 x$

Saiba mais

Para verificar a prova da proposição da derivada das funções seno e cosseno, consulte a obra de D. M. Flemming e M. B. Gonçalves – *Cálculo A* (2007, 6. ed.).

Fique atento

Derivação de um quociente: sejam f e g funções e h a função definida pela divisão entre elas: $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então: $h'(x) = g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)/[g(x)]^2$

Conheça outras regras de derivação na obra *Cálculo A*.

Como você pode notar, utilizamos a regra do quociente para encontrar a derivada da função tangente.

Aplicando as regras de derivação, encontramos:

1. Se $y = \text{cotg } x$, então $y' = -\text{cosec}^2 x$
2. Se $y = \sec x$, então $y' = \sec x \cdot \text{tg } x$
3. Se $y = \text{cosec } x$, então $y' = -\text{cosec } x \cdot \text{cotg } x$

Pela regra da cadeia – cuja proposição vimos na Unidade 1 de nosso estudo –, obtemos as fórmulas gerais:

$$y = \text{sen } u \quad \Rightarrow \quad y' = \cos u \cdot u'$$
$$y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -\text{sen } u \cdot u'$$
$$y = \text{tg } u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2 u \cdot u'$$
$$y = \text{cotg } u \quad \Rightarrow \quad y' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$$
$$y = \sec u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec u \cdot \text{tg } u \cdot u'$$
$$y = \text{cosec } u \quad \Rightarrow \quad y' = -\text{cosec } u \cdot \text{cotg } u \cdot u'$$

Vejamos agora alguns exemplos de cálculo de derivadas:

a. $y = \text{sen } (x^2)$

$$y = \text{sen } u,\ u = x^2$$
$$y' = (\cos u)u'$$
$$= [\cos (x^2)] \cdot 2x$$
$$= 2x \cos (x^2)$$

b. $y = \cos (1/x)$

$$y = \cos u,\ u = (1/x)$$
$$y' = (-\text{sen } u) \cdot u'$$
$$= [-\text{sen } (1/x)] \cdot -1/x^2$$
$$= \frac{1}{x^2} \text{sen } (1/x)$$

c. $y = 3 \text{ tg } \sqrt{x} + \text{cotg } 3x$

$$y' = (3 \text{ tg } \sqrt{x})' + (\text{cotg } 3x)$$
$$= 3 \cdot \sec^2 \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' + (-\text{cosec}^2 3x) \cdot (3x)'$$
$$= 3 \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\text{cosec}^2 3x)3$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas

Derivada das funções arco seno, arco cosseno e arco tangente

Proposição da derivada da função arco seno: seja f: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ definida por $f(x) = \text{arc sen } x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Saiba mais

Para verificar a prova da proposição da derivada das funções arco seno, arco cosseno e arco tangente, consulte a obra *Cálculo A*, de D. M. Flemming e M. B. Gonçalves.

Proposição da derivada da função arco cosseno: seja f: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por $f(x) = \text{arc cos } x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Proposição da derivada da função arco tangente: seja f: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ definida por $f(x)$ arc tg x. Então $y = f(x)$ é derivável e $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Derivadas das demais funções trigonométricas inversas

Saiba mais

Para verificar a prova da proposição da derivada das funções arco cotangente, arco secante e arco cossecante, consulte a obra *Cálculo A*.

Veja a seguir as proposições das derivadas das demais funções trigonométricas inversas:

Proposição da derivada função arco cotangente: se $y = \text{arc cotg } x$, então $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

Proposição da derivada da função arco secante: se $y = \text{arc sec } x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, |x| > 1$

Proposição da derivada da função arco cossecante: se $y = \text{arc cosec } x$, $|x| \geq 1$, então $y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| > 1$

Em seguida, veja alguns exemplos de cálculo dessas derivadas.

Exemplos

a. $y = \text{arc sen } (x + 1)$

$$y = \text{arc sen } u, u = x + 1$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}}$$

$$y = \text{arc tg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

b.

$$y = \text{arc tg } u, \ \ u = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y' = \frac{\dfrac{(1+x^2)\cdot(-2x)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Aplicações das regras de L'Hospital no levantamento de limites indeterminados

Regras de L'Hospital

Apresentaremos agora o método geral utilizado no levantamento de indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞. Esse método é dado pelas regras de L'Hospital. Para demonstrá-las, precisamos da proposição a seguir, conhecida como fórmula de Cauchy:

Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b), e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número inteiro $\in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto, possivelmente, em um ponto a $\in$ I. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I, temos então pelas regras de L'Hospital que:

a. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

b. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Nesse caso, apresentaremos a prova das proposições:

Suponhamos que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tome a forma indeterminada 0/0 e que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Queremos provar que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Consideremos as duas funções F e G tais que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases} \quad e \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

e

$$\lim_{x\to a} G(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 = G(a)$$

Assim, as funções F e G são contínuas no ponto a e, portanto, em todo o intervalo I.

Exemplos

a. Determinar $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$

Quando $x \to 0$, o quociente $\frac{2x}{e^x - 1}$ toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2$$

b. Determinar $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

O limite toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 3} = 5$$

c. Determinar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital uma vez, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}}$$

Como o último limite ainda toma a forma indeterminada 0/0, podemos aplicar novamente a regra de L'Hospital. Temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen } x}{e^x + e^{-x}} = \frac{-0}{2} = 0$$

Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = 0$

d. Determinar $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital sucessivas vezes, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 4} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Considerações iniciais para o estudo da função auxiliar integral

Acréscimos

Seja $y = f(x)$. Podemos sempre considerar uma variação da variável independente x. Assim, se x varia de x_1 a x_2, definimos o acréscimo de x, que é expresso por Δx, da seguinte maneira:

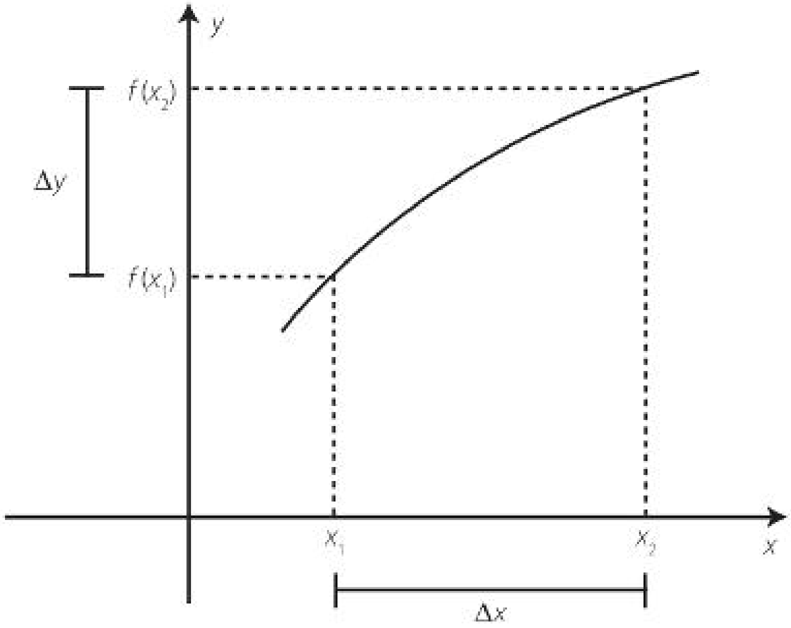
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

A variação de x dá origem a uma variação correspondente em y. Essa variação é dada por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{ou} \qquad \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Observe o Gráfico 2.1 e comprove que a variação de y (Δy) é dada pela variação de x (Δx):

Gráfico 2.1 Variação de y e x.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 173).

Diferencial

Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x. Assim, podemos definir:

1. A diferencial da variável independente x é expressa por $dx = \Delta x$.
2. A diferencial da variável dependente y, denotada por dy, é expressa por $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Como $f'(x) = dy/dx$, podemos reescrever a definição de dy, de modo que temos:

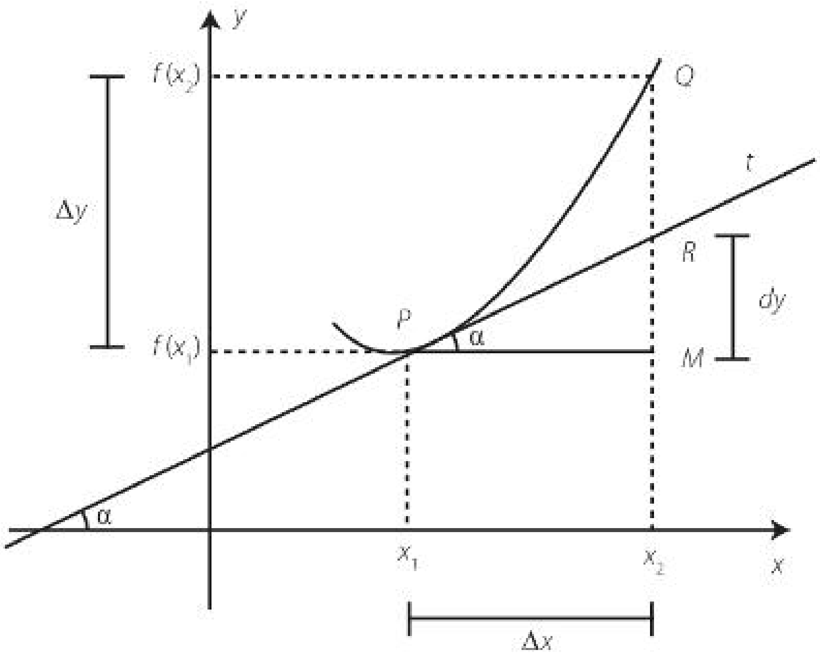
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Assim, podemos concluir que $f'(x)$ expressa uma divisão entre duas funções diferenciais.

Interpretação geométrica

O Gráfico 2.2 representa o gráfico de uma função $y = f(x)$ derivável. O acréscimo Δx, que define a diferencial dx, está representado pela medida do segmento PM. Já o acréscimo Δy está representado pela medida do segmento MQ. Observe:

Gráfico 2.2 Gráfico de uma função $y = f(x)$ derivável.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 174).

Note que a reta t é tangente à curva no ponto P. Essa reta corta a reta $x = x_2$ no ponto R, formando o triângulo retângulo PMR. A inclinação da reta t é dada por $f'(x)$. Observando o triângulo retângulo PMR, podemos escrever:

$$f'(x) = MR/PM$$

Onde MR é a medida do segmento MR e PM a medida do segmento PM. Considerando que $f'(x) = dy/dx$, concluímos que $dy = MR$, já que $PM = dx$. Podemos considerar também que, quando Δx torna-se muito pequeno, o mesmo acontece com a diferença $\Delta y - dy$. Usamos esse fato em exemplos práticos, tomando Δy aproximadamente igual a dy, nos casos em que Δx é um valor muito pequeno.

Exemplos

a. Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo Δy para $x = 3$ e $\Delta x = 0{,}01$.

Usando a definição de Δy, escrevemos:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)\\ &= f(3 + 0{,}01) - f(3)\\ &= f(3{,}01) - f(3)\\ &= [2 \cdot (3{,}01)^2 - 6 \cdot 3{,}01 + 5] - [2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 5]\\ &= 5{,}0602 - 5\\ &= 0{,}0602\end{aligned}$$

b. Se $y = 6x^2 - 4$ calcule Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$.

Usando a definição de Δy, temos:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)\\ &= f(2 + 0{,}001) - f(2)\\ &= [6 \cdot (2{,}001)^2 - 4] - [6 \cdot 2^2 - 4]\\ &= 20{,}024006 - 20\\ &= 0{,}024006\end{aligned}$$

Usando a definição de dy, temos:

$$\begin{aligned}dy &= f'(x) \cdot \Delta x\\ &= 12x \cdot \Delta x\\ &= 12 \cdot 2 \cdot 0{,}001\\ &= 0{,}024\end{aligned}$$

Observamos que a diferença $\Delta y - dy = 0{,}000006$ seria menor caso usássemos um valor menor que 0,001 para Δx.

Integral indefinida

Generalidades da integral indefinida

Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$, se, para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

Observamos que, de acordo com nossa definição, as primitivas de uma função $f(x)$ estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não especificamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função f, entendemos que essas funções são primitivas de f no mesmo intervalo I.

Exemplos

Tendo em vista a definição anterior, considere os exemplos a seguir:

a. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$, pois

$$F'(x) = 1/3 \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

b. As funções $G(x) = x^3/3 + 4$, $H(x) = 1/3\ (x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$.

c. A função $F(x) = 1/2$ sen $2x + c$, onde c é uma constante, é primitiva da função $f(x)$ cos $2x$.

d. A função $F(x) = 1/2x^2$ é uma primitiva da função $f(x) = -1/x^3$ em qualquer intervalo que não contém a origem, pois, para todo $x \neq 0$, temos $F'(x) = f(x)$.

Proposições

a. Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

b. Se $f'(x)$ anula-se em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I.

c. Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I, então existe uma constante c tal que $G(x) - F(x) = c$, para todo $x \in I$. Por exemplo:

Como estudamos no início desta unidade, a derivada da função sen x é a função cos x. Assim, $F(x) =$ sen x é uma primitiva da função $f(x) =$ cos x e toda primitiva de $f(x) =$ cos x é da forma $G(x) =$ sen $x + c$, para alguma constante c.

Saiba mais

Para verificar a prova das proposições anteriores, consulte a obra de D. M. Flemming e M. B. Gonçalves, *Cálculo A*.

Definição da integral indefinida

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada integral indefinida da $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

O processo que nos permite encontrar a integral indefinida é chamado de integração. Esse processo exige muita intuição, pois, conhecendo apenas a derivada de uma dada função, queremos descobrir a função.

A partir da definição de integral indefinida, temos que:

1. $\int f(x)dx = F(x) + c \leftrightarrow F'(x) = f(x)$

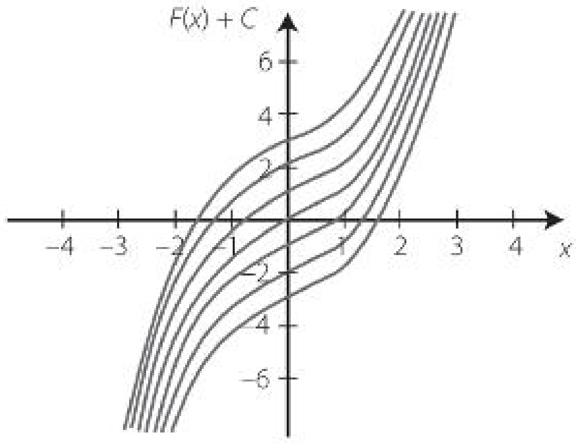
2. $\int f(x)dx$ representa uma família de funções – a família de todas as primitivas da função integrando, ou seja, a função $f(x)$.

Fique atento

O símbolo $\int$ é chamado de sinal de integração. A função $f(x)$ é chamada de função integrando e $f(x)dx$ integrando. O símbolo dx que aparece no integrando serve para identificarmos a variável de integração.

O Gráfico 2.3 mostra uma família de primitivas da função integrando $f(x) = x^2 + 1$. Veja que o valor da constante assumiu valores $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$:

Gráfico 2.3 Família de primitivas da função integrando $f(x) = x^2 + 1$.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 242).

Saiba mais

Consulte o passo a passo da prova das proposições na obra *Cálculo A*.

Propriedades elementares da integral indefinida

Sejam $f, g\colon I \to R$ e K uma constante. Então:

1. $\int K f(x)dx = K\int f(x)dx$

2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Exemplos

a. Sabemos que $(\text{sen } x') = \cos x$. Então $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + c$

b. Como $(-\cos\theta)' = \text{sen }\theta$, então $\int \text{sen }\theta \, d\theta = -\cos\theta + c$

Integrais de monômios e polinômios

Integração de monômios e polinômios

Considere as integrais imediatas a seguir. Elas demonstram a regra geral de integração de monômios e de polinômios:

1. $\int du = u + c$

2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (α é constante $\neq -1$)

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u/ + c$

Vejamos agora alguns exemplos para sua melhor compreensão:

a. $\int (3x^2 + 5 + \sqrt{x})\ dx$

Usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integrais, temos:

$$\int (3x^2 + 5 + \sqrt{x})\ dx = 3\int x^2 dx + 5\int dx + \int x^{1/2} dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} + 5x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= x^3 + 5x + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

b. $\int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x)\, dx$

Temos:

$$\int (\sqrt[3]{x^2} + 1/3x)\, dx = \int \sqrt[3]{x^2} dx + \int 1/3x\ dx$$

$$= \int x^{2/3} dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{5/3}}{5/3} + \frac{1}{3}\ln|x| + c$$

$$= \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{1}{3}\ln|x| + c$$

c. $\int \dfrac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

Temos:

$$\int \frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3x^{-1/2}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$= \int (x^{11/3} + 3x^{-5/6} + 4x^{-1/3})\,dx$$

$$= \int x^{11/3}dx + 3\int x^{-5/6}dx + 4\int x^{-1/3}dx$$

$$= \frac{x^{14/3}}{14/3} + 3 \cdot \frac{x^{1/6}}{1/6} + 4 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} + c$$

$$= \frac{3}{14}x^{14/3} + 18x^{1/6} + 6x^{2/3} + c$$

Saiba mais

Quando não conseguimos reconhecer a primitiva, podemos encontrá-la termo a termo, utilizando as regras da soma, da diferença e da multiplicação por constantes. No cálculo da integral, considere sempre a primitiva mais simples possível para cada termo e, ao final, adicione a constante arbitrária.

Fique atento

Monômios são definidos pela multiplicação entre uma constante e o coeficiente literal ($3x$, $2ak$, $20x^2$, $10xyz$, $10abc$, $2z$, y, b^3), já os polinômios são compostos por operações algébricas entre dois ou mais monômios ($x^2 + 3x - 1$, $7x^3 + x^2 - x$, $x + 5$).

Veja um exemplo de cálculo da integral de uma função:

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx$$

Primeiro, devemos reconhecer $x^3/3 - x^2 + 5x$ como função primitiva de $x^2 - 2x + 5$. Então, podemos calcular a integral como:

$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = x^3/3 - x^2 + 5x + C$, sendo C uma constante arbitrária.

Exercícios de fixação

1. Expresse a proposição do limite fundamental trigonométrico.

2. Determine a derivada das seguintes funções trigonométricas:

a. f sen(x);

b. f cos(x);

c. f tg(x);

d. f cotg(x);

e. f sec(x);

f. f cosec(x).

3. Determine a derivada das seguintes funções trigonométricas inversas:

a. f arco sen(x);

b. f arco cos(x);

c. f arco tg(x).

4. Qual é a aplicação da regra de L'Hospital? Apresente um exemplo de limite que possa ser calculado por meio de sua utilização.

5. Defina acréscimos e função diferencial.

6. Defina função primitiva.

7. Defina função integral indefinida.

8. O que é integração?

9. Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

I. a. $2x$ **b.** x^2 **c.** $x^2 - 2x + 1$

II. a. $6x$ **b.** x^7 **c.** $x^7 - 6x + 8$

III. a. $-3x^{-4}$ **b.** x^{-4} **c.** $x^{-4} + 2x + 3$

IV. a. $2x^{-3}$ **b.** $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ **c.** $-x^{-3} + x - 1$

V. a. $\frac{1}{x^2}$ **b.** $\frac{5}{x^2}$ **c.** $2 - \frac{5}{x^2}$

10. Determine a integral indefinida das seguintes funções:

a. $\int (x + 1)\, dx$

b. $\int (5 - 6x)\, dx$

c. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2} \right) dt$

d. $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3 \right) dt$

e. $\int (2x^3 - 5x + 7)\, dx$

Panorama

Se a matemática é considerada uma disciplina difícil, o que dizer, então, a respeito de cálculo? No entanto, algumas dicas podem ser úteis:

- Familiarize-se com os símbolos. Faça uma lista e formule frases que traduzam seu significado. Desse modo, quando deparar com eles em uma fórmula enorme, você a compreenderá mais rapidamente.
- Não tem jeito, matemática não se aprende apenas na teoria. Quanto mais exercícios resolver, melhor! Utilize também exercícios resolvidos e acompanhe o passo a passo da resolução.
- Conhecer aspectos da biografia dos grandes teóricos da área pode ajudar. Ao mesmo tempo que esse conhecimento o leva a aprender um pouco da história da matemática, pois os

estudiosos apoiam-se nas teorias uns dos outros, pode despertar sua curiosidade e tornar o estudo mais estimulante.

Você conhece, por exemplo, a curiosidade que cerca a regra de L'Hospital? Publicada no livro *Análise dos Infinitamente Pequenos*, do Marquês de L'Hospital, a autoria da regra foi posteriormente reivindicada por Johann Bernoulli, pertencente a uma família de várias gerações de matemáticos. O Marquês pagava a Bernoulli para que ele lhe enviasse suas descobertas científicas. Na introdução de seu livro, L'Hospital reconhece ter aprendido muito com Bernoulli, mas exige para si a autoria das ideias da obra. Em tempos de disputas por direitos autorais, essa questão renderia uma boa polêmica!

Outras dicas poderiam ser citadas, mas cada um possui sua maneira de estudar. Alguns aprendem melhor estudando em grupos, enquanto outros preferem estudar sozinhos. É importante que você descubra a melhor maneira de conduzir seus estudos.

Exercício

Pesquise a respeito da biografia de um matemático e apresente-a aos colegas, buscando relacionar sua teoria com o contexto histórico no qual ela foi desenvolvida.

Recapitulando

A Unidade 2 deste estudo é bastante densa. Ela traz temas complexos, mas busca resumi-los de maneira didática e proveitosa. A demonstração das proposições apresentadas, longas e dificultosas, muitas vezes foi apenas indicada para consulta. Demos prioridade à apresentação de exemplos que tornassem clara a aplicação das fórmulas apresentadas.

No Tema 1, conhecemos a proposição usada na determinação do limite trigonométrico fundamental. Em seguida, no segundo tema desta unidade, estudamos a derivada das funções trigonométricas diretas e inversas. É recomendável que você construa uma tabela com tais derivadas, a ser utilizada para consultas futuras, mas que também auxiliará na memorização. No Tema 3, conhecemos a proposição da chamada regra de L'Hospital. Como sabemos, essa regra é aplicada na determinação de limites indeterminados, tais como $0/0$ e ∞/∞. O Tema 4 trouxe conhecimentos necessários ao estudo da função derivada, como as definições de acréscimo e função diferencial. Realizamos também a interpretação geométrica desses conceitos, visualizando-os em gráficos. No Tema 5, já entramos no estudo da função integral indefinida e da função primitiva. Vimos sua definição, generalidades e características elementares. Fechando a unidade, no Tema 6 conhecemos a regra geral de integração de monômios e de polinômios.

Nas próximas unidades de nosso estudo, vamos nos aprofundar no cálculo integral. Por isso, é fundamental que sejam assimilados os conhecimentos que chegaram até você na Unidade 2, pois ela introduz a função integral. No entanto, não se preocupe se, mais adiante, sentir a necessidade de retomar temas já estudados. A aprendizagem se realiza processualmente. Todavia, para aprendermos cálculo integral, é preciso esforço e dedicação contínuos. Ao deparar com dificuldades em meio ao processo de aprendizagem, não desanime. Se você chegou até aqui, isso significa que seu conhecimento sobre o assunto vem crescendo. E, com isso, chegamos à metade do estudo.

UNIDADE 3

Integrais imediatas e integral definida

Objetivos de aprendizagem

- Conhecer a integral de vários tipos de função.
- Aprender casos de integração envolvendo potências do seno e do cosseno.
- Compreender a soma de Riemann e a integral definida.
- Dominar o método de integração por partes.

Temas

- **1 – Integral das funções logarítmica, exponencial, trigonométricas diretas e inversas**
  Apresentaremos uma breve tabela de integrais imediatas. Veremos por meio de exemplos o cálculo da integral de funções logarítmicas e exponenciais, trigonométricas diretas e inversas.
- **2 – Casos de integração envolvendo potências do seno e do cosseno com situações diversas**
  Aqui estudaremos casos de integração envolvendo as funções trigonométricas seno e cosseno, como a integração de potências dessas funções.
- **3 – Soma de Riemann e integral definida**
  Conheceremos a integral definida e a soma de Riemann, sendo esta fundamental para a compreensão da teoria da integral definida.
- **4 – Técnicas de integração**
  Este tema apresenta o método da integração por partes. Veremos a fórmula da integração por partes e sua aplicação em exemplos.

Introdução

Na unidade anterior deste estudo, conhecemos a integral indefinida, suas propriedades e características elementares. Como pudemos aprender, a integral indefinida é considerada a operação inversa da derivação. Agora que possuímos noções básicas a respeito do assunto, podemos avançar no estudo. Nesta unidade, aprenderemos a integral das funções logarítmica, exponencial, trigonométricas diretas e inversas. Você já sabe que poderá contar com exemplos que facilitem sua caminhada rumo à aprendizagem. Nas unidades anteriores, conhecemos a derivada de tais funções, de modo que estamos preparados para entender a integração. Assim, o primeiro tema desta unidade é dedicado ao cálculo da integral indefinida das funções citadas.

Em seguida, veremos diferentes casos de integração de funções envolvendo funções trigonométricas, tais como potências do seno e do cosseno. As técnicas de integração utilizadas diferem de acordo com o valor assumido pela potência ou potências. Desse modo, apresentaremos diferentes casos e os artifícios de integração usados em cada um deles.

Conhecidos alguns casos de integração envolvendo potência de seno e cosseno, buscaremos entender a chamada integral definida. Esta é uma integral que se restringe a valores específicos. Assim, a integral definida é uma integral restrita a um intervalo, tal como $a \leqslant x \leqslant b$. Nesta unidade, conheceremos a definição da integral definida e suas características elementares. Além disso, introduziremos o conceito de somas de Riemann, fundamental para a teoria da integral definida. Os estudos do matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) geraram importantes contribuições para o cálculo integral, dentre outras esferas da matemática. Nesta etapa, compreenderemos uma parte delas; nas páginas finais, conheceremos o método da integração por partes.

A Unidade 3 é inteiramente dedicada ao estudo da integração de funções. Deste ponto até o encerramento da Unidade 4, ampliaremos muito nosso conhecimento sobre o assunto. Veremos, inclusive, aplicações práticas do cálculo da integral. Vamos continuar?

Integral das funções logarítmica, exponencial, trigonométricas diretas e inversas

Tabela de integrais imediatas

Lembra-se de que na Unidade 1 estudamos a derivada da função logarítmica e da função exponencial? Como você sabe, uma é considerada a inversa da outra e, por isso, sempre as estudamos em conjunto! Agora, conheceremos a integral dessas funções e também das funções trigonométricas diretas. Considere esta lista de integrais imediatas:

1. $\int du = u + c$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$

3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + c$ (α é constante $\neq -1$)

4. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + c$

5. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \text{arc sec } u + c$

6. $\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \text{arg senh } u + c = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| + c$

7. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \text{arg cosh } u + c = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + c$

Por meio dessas fórmulas e das propriedades da integral indefinida, podemos calcular a integral indefinida de inúmeras funções. Consulte-as sempre que precisar!

Fique atento

Mais adiante retomaremos o assunto e você entenderá facilmente a definição, as características e as propriedades elementares da integral definida. Aguarde!

Fique atento

Atenção às integrais 1 e 3. A regra de derivação utilizada nelas foi tratada na unidade anterior. Consulte-a, se necessário, pois mais adiante precisaremos novamente delas!

Exemplos

a. $\int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x)\, dx$

Temos:

$$\int (3 \sec x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{cosec}^2 x)\, dx = 3 \int \sec x \operatorname{tg} x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$$

$$= 3 \sec x - \operatorname{cotg} x + c$$

b. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x}\, dx$

Nesse caso, temos:

$$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec x\, dx = \sec x + c$$

c. $\int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

Temos:

$$\int \left(2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 2 \cos x dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \int 2 \cos x dx + \int x^{-1/2} dx$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + \frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= 2 \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x} + c$$

d. $\int \left(2e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7}\right) dx$

Temos:

$$\int \left(2e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7}\right) dx = \int 2e^x dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{2\, dx}{x^7}$$

$$= 2 \int e^x dx - \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx + 2 \int x^{-7} dx$$

$$= 2e^x - \sec x + 2 \cdot \frac{x^{-6}}{-6} + c$$

$$= 2e^x - \sec x - \frac{1}{3x^6} + c$$

Casos de integração envolvendo potências do seno e do cosseno com situações diversas

Integração de algumas funções envolvendo funções trigonométricas

Considere as integrais $\int \operatorname{sen}^n u \, du$ e $\int \cos^n u \, du$, onde n é um número inteiro e positivo. Podemos usar técnicas de cálculo com auxílio das identidades trigonométricas. A ideia é aplicar o método da substituição.

São elas:

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

3. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Nos exemplos a seguir, ilustramos dois possíveis casos: n é um número ímpar ou n é um número par:

a. Quando n é número ímpar

$$\int \cos^5 dx$$

O primeiro passo é preparar o integrando para a aplicação do método da substituição. Mas, atenção: esse método é válido sempre que o expoente n for um número ímpar. Fatorando o integrando e aplicando a identidade 1 ($\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) temos:

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \\
&= (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \\
&= (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) \cos x \\
&= \cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x + \operatorname{sen}^4 x \cos x
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \cos^5 x \, dx = \int (\cos x - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x + \operatorname{sen}^4 x \cos x) \, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - 2\int \text{sen}^2 x \cos x\, dx + \int \text{sen}^4 x \cos x\ dx$$

$$= \text{sen}\ x - \frac{2}{3}\text{sen}^3 x + \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C$$

b. Quando *n* é número par

$$\int \text{sen}^4 x\, dx$$

Nesse exemplo, n é um número par. Na preparação do integrando, usamos as identidades trigonométricas 2 e 3. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\text{sen}^4 x &= (\text{sen}^2 x)^2 \\
&= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(1 - 2\ \cos\ 2x + \cos^2 2x) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\ \cos\ 2x + \frac{1+\ \cos\ 4x}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^4 x\, dx &= \int\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ \cos 2x + \frac{1}{8}\ \cos 4x\right) dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\ \text{sen}\ 2x + \frac{1}{32}\ \text{sen}\ 4x + C
\end{aligned}$$

Observamos que o raciocínio usado neste exemplo é válido para as potências pares.

Nas integrais $\text{sen}^m u \cos^n u\ du$, onde m e n são inteiros positivos, a preparação do integrando deve ser feita visando-se à aplicação do método da substituição, do mesmo modo que nos exemplos anteriores.

Quando pelo menos um dos expoentes é ímpar, usamos a identidade 1. Quando os dois expoentes são pares, usamos as identidades 2 e 3 e, às vezes, também a identidade 1. Vejamos agora alguns casos:

a. Quando *m* ímpar e *n* par

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^2 x \; dx$$

Preparando o integrando, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^5 x \ \cos^2 x &= (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \\
&= (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \\
&= (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\operatorname{sen} x \cos^2 x \\
&= \cos^2 x \operatorname{sen} x - 2\cos^4 x \operatorname{sen} x + \cos^6 x \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \; dx &= \int (\cos^2 x \operatorname{sen} x - 2\cos^4 x \operatorname{sen} x + \cos^6 x \operatorname{sen} x)\, dx \\
&= \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx - 2\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&\quad + \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \frac{-1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

b. Quando *m* e *n* são pares

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \; dx$$

Preparando o integrando, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \ \cos^4 x &= \operatorname{sen}^2 x \cdot (\cos^2 x)^2 \\
&= \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \\
&= \frac{1}{8}\left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\right] \\
&= \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 2x \cos 2x
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \; dx &= \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C
\end{aligned}$$

c. Quando m e n são iguais

$$\int \operatorname{sen}^4 x \ \cos^4 x \ dx$$

Quando m e n são iguais, também podemos usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)^4 \\
&= \frac{1}{16} (\operatorname{sen}^2 2x)^2 \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{64} (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) \\
&= \frac{1}{64} \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2}\right) \\
&= \frac{3}{128} - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{128} \cos 8x
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{3}{128} - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{128} \cos 8x\right) dx \\
&= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{1024} \operatorname{sen} 8x + C
\end{aligned}$$

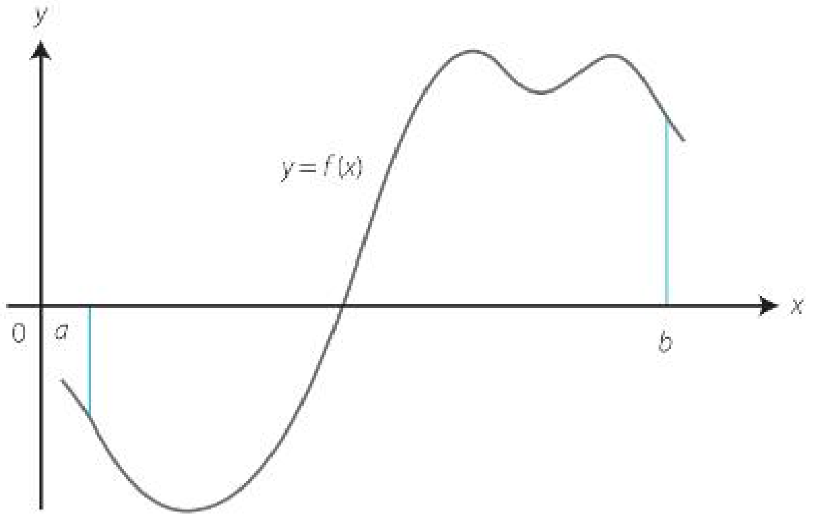
Soma de Riemann e integral definida

Integração por somas de Riemann

O matemático alemão Bernhard Riemann tornou mais precisa a teoria dos limites de aproximações finitas. Agora, veremos o conceito de somas de Riemann. Esse conceito é muito importante na teoria da integral definida, que logo estudaremos.

Começaremos com uma função arbitrária f definida em um intervalo fechado $[a, b]$.

Gráfico 3.1 Função contínua típica $y = f(x)$ ao longo de um intervalo fechado $[a, b]$.



Fonte: Thomas (2013a, p. 299).

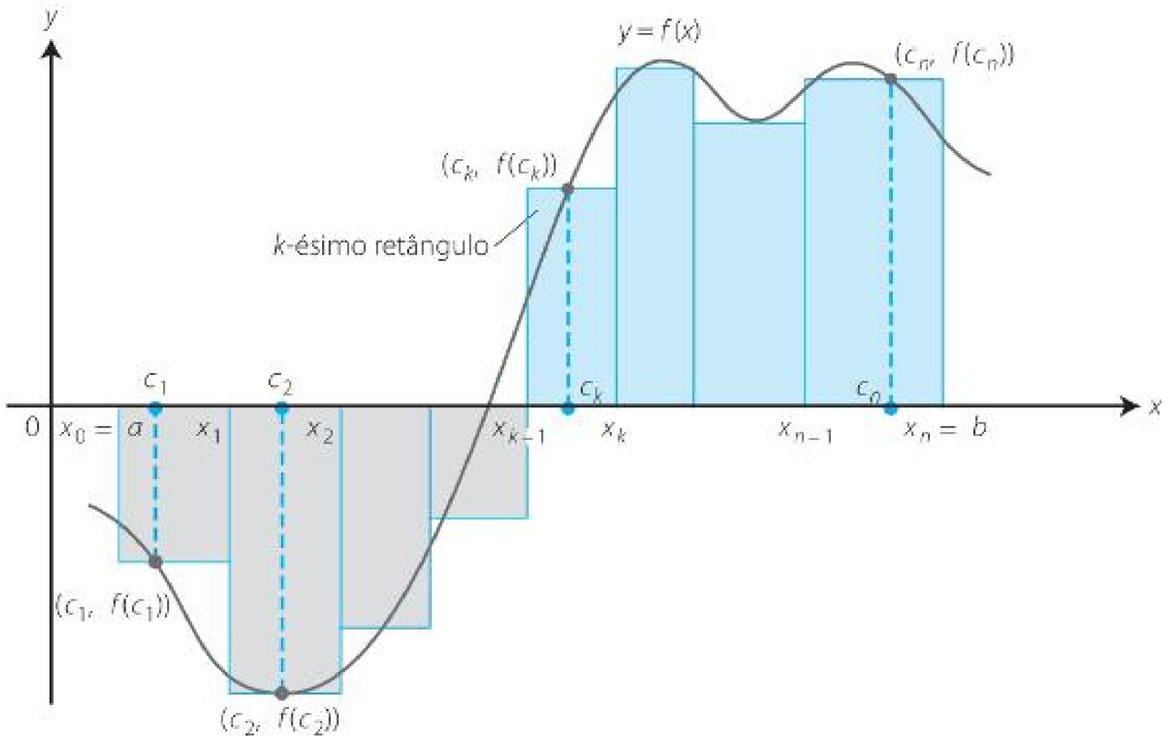
Assim como a função traçada no Gráfico 3.1, f pode assumir valores negativos e positivos. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos, não necessariamente do mesmo tamanho em largura e extensão, e formamos somas com esses subintervalos. Escolhemos $n - 1$ pontos $\{x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}\}$ entre a e b que satisfaçam $a < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < b$.

O conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n\}$ é chamado de partição de $[a, b]$.

O primeiro desses subintervalos é $[x_0, x_1]$ e o segundo $[x_1, x_2]$. A largura do primeiro é indicada por Δx_1 e a largura do segundo por Δx_2. Se todos os n intervalos tiverem largura igual, então a largura Δx será igual a $(b - a) / n$.

Em cada subintervalo selecionamos um ponto. Chamamos o ponto escolhido do k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de c_k. Depois, em cada subintervalo construímos um retângulo vertical que tem base no eixo x e toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo x, dependendo se $f(c_k)$ é positivo ou negativo. Podem também estar sobre ele se $f(c_k) = 0$. Comprove isso observando o gráfico a seguir:

Gráfico 3.2 Os retângulos aproximam a região que fica entre o gráfico da função $y = f(x)$ e o eixo x.



Fonte: Thomas (2013a, p. 299).

Em cada subintervalo formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do sinal de $f(c_k)$. Quando $f(c_k) > 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é a área de um retângulo com altura $f(c_k)$ e largura Δx_k. Quando $f(c_k) < 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é um número negativo, o oposto da área de um retângulo com largura Δx_k que sai do eixo x para o número negativo $f(c_k)$.

Por fim, somamos todos esses produtos para obter

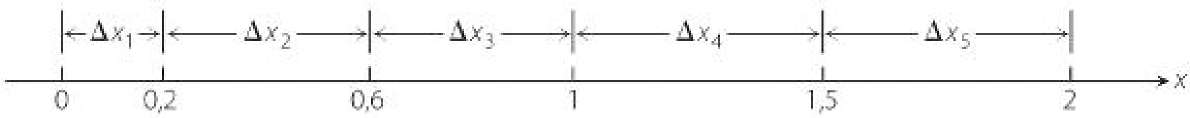
$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k$$

A soma S_P é chamada de soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$.

Exemplo

O conjunto $P = \{0; 0{,}2; 0{,}6; 1; 1{,}5; 2\}$ é uma partição de $[0, 2]$. Existem cinco subintervalos de $P = [0; 0{,}2]$; $[0{,}2; 0{,}6]$; $[0{,}6; 1]$; $[1; 1{,}5]$ e $[1{,}5; 2]$:

Gráfico 3.3 Subintervalos.

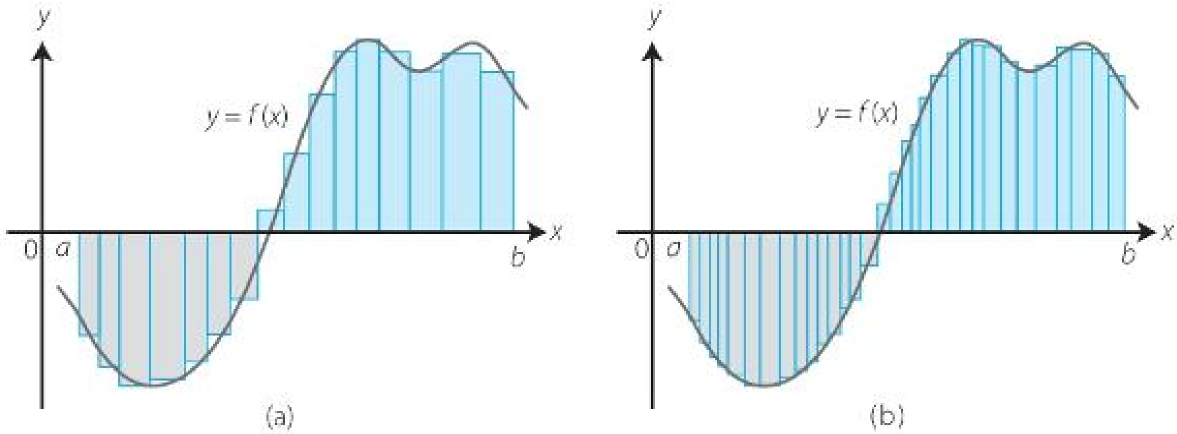


Fonte: Thomas (2013a, p. 300).

Os comprimentos dos subintervalos no Gráfico 3.3 são $\Delta x_1 = 0{,}2$; $\Delta x_2 = 0{,}4$; $\Delta x_3 = 0{,}4$; $\Delta x_4 = 0{,}5$ e $\Delta x_5 = 0{,}5$. Definimos a *norma* de uma partição P, escrita $||P||$, como a maior de todas as larguras dos subintervalos. No exemplo dado, o comprimento do subintervalo mais longo é 0,5. Logo, a norma da partição $||P||$ é 0,5. Existem dois subintervalos com esse comprimento.

Qualquer soma de Riemann associada a uma partição de um intervalo fechado $[a, b]$ define retângulos que aproximam a região entre o gráfico de uma função contínua f e o eixo x. Partições cuja norma tende a zero levam a conjuntos de retângulos que aproximam a área da região com uma precisão cada vez maior. Observe como isso ocorre no Gráfico 3.4:

Gráfico 3.4 Curvas com retângulos com partições cada vez mais finas.



Fonte: Thomas (2013a, p. 300).

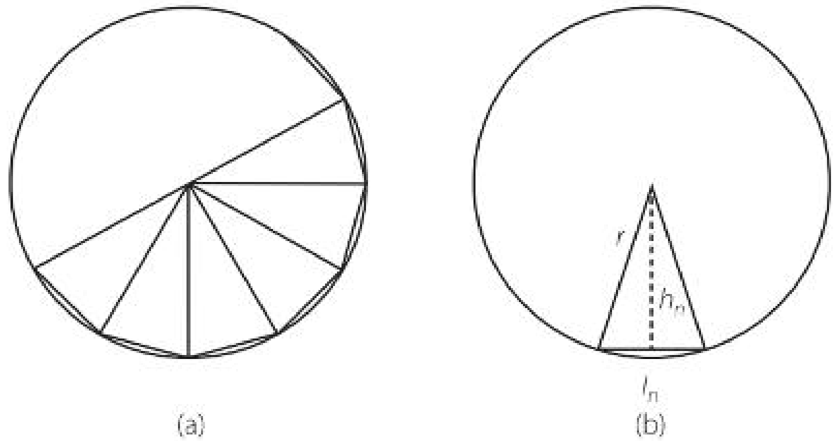
Áreas

Desde os tempos mais antigos, os matemáticos preocuparam-se com o seguinte problema: como determinar a área de uma figura plana? O procedimento mais usado foi o método da exaustão, que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras, cujas áreas são conhecidas.

Consideremos o exemplo do círculo. Como definimos sua área? Considerando um polígono regular inscrito de n lados, que denotamos por P_n.

Veja a imagem *a* da Figura 3.1. Seja A_n a área do polígono P_n. Então, $A_n = n.\ A_{Tn}$, onde A_{Tn} é a área do triângulo de base l_n e altura h_n.

Figura 3.1 Definição da área de um círculo usando um polígono regular inscrito.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 256).

Como $A_{T_n} = \dfrac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro do polígono P_n é dado por $p_n = nl_n$, vem:

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n \cdot h_n}{2}$$

Fazendo n crescer cada vez mais, isto é, $n \to +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo. O perímetro p_n aproxima-se do comprimento da circunferência $2\pi r$ e a altura h_n aproxima-se do raio r.

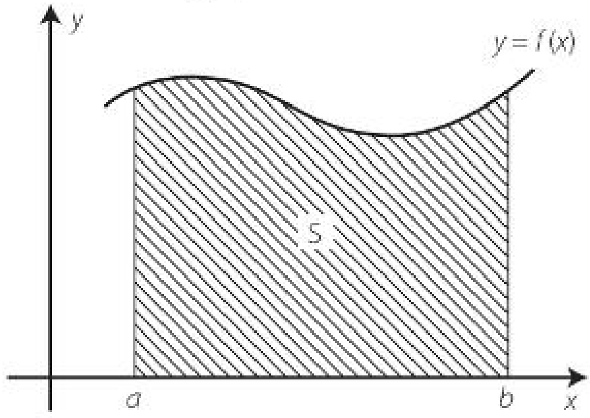
Temos:

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \dfrac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$, que é a área do círculo.

Para definirmos a área de uma figura plana qualquer, procedemos de maneira parecida. Aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Vejamos agora como definir a área de uma região plana S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo dos x e por duas retas $x = a$ e $x = b$, tal como demonstrado no Gráfico 3.5:

Gráfico 3.5 Área da região plana S.



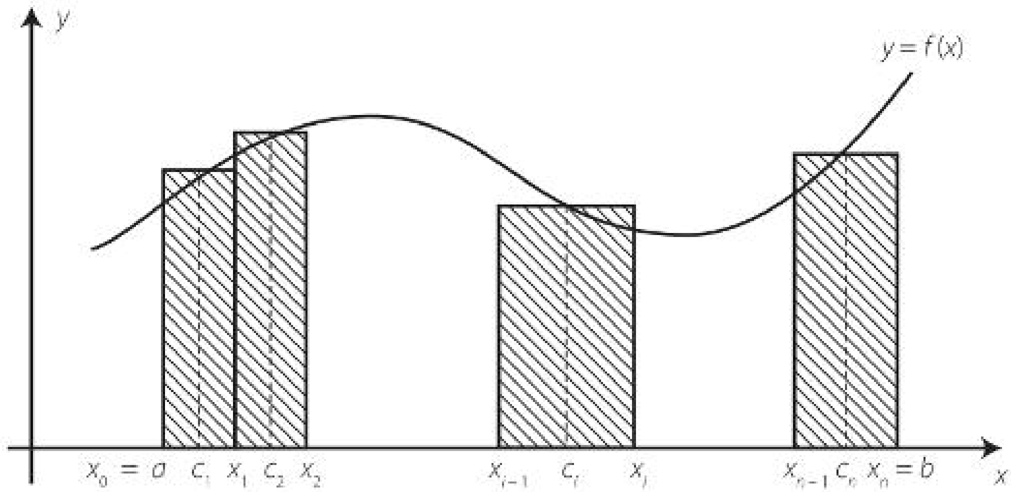
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 257).

Para isso, fazemos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos, escolhendo os pontos:

$$A = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_1]$. Em cada um desses intervalos $[x_{i-1}, x_1]$, escolhemos um ponto qualquer c_i. Para cada i, $i = 1, ... n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Veja no Gráfico 3.6.

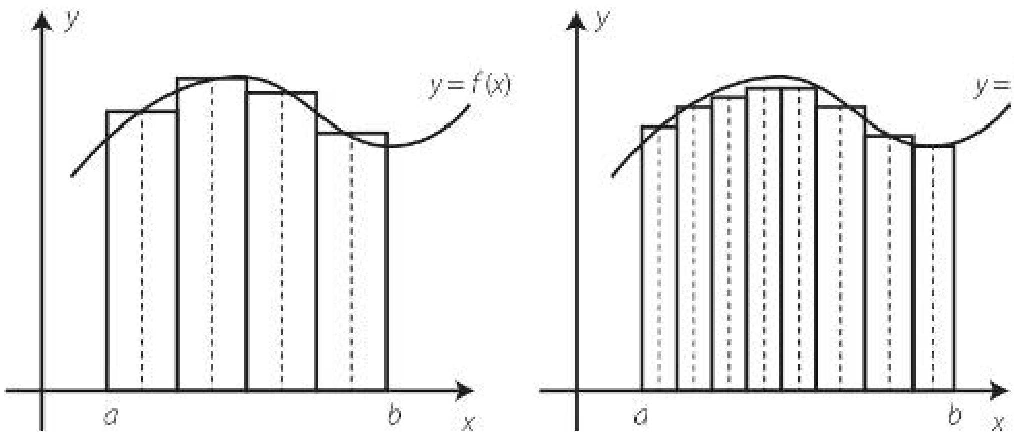
Gráfico 3.6 Partição da área S em retângulos.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 257).

O Gráfico 3.7 ilustra esses retângulos nos casos $n = 4$ e $n = 8$:

Gráfico 3.7 Representação da área S com um número diferentes de retângulos.



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 257).

A soma das áreas dos retângulos, que representamos por S_n, é dada por

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ ... \ + f(c_n)\,\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

Essa soma é chamada de soma de Riemann da função $f(x)$. Podemos observar que à medida que n cresce muito e que cada Δx_i, $i = 1, ... n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área de S.

Definição

Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por

$$A = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

onde para cada $i = 1, ... n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

A integral definida

Partindo da definição de limite como uma soma finita para a função definida em um intervalo fechado $[a, b]$, com n subintervalos da mesma largura ou comprimento, conheceremos o limite de somas de Riemann mais gerais, quando a norma de partições de $[a, b]$ tende a zero. Para as normas de Riemann mais gerais, os subintervalos não precisam ter a mesma largura. O processo de limite leva, então, a uma definição de integral definida de uma função ao longo de um intervalo fechado $[a, b]$.

Assim, a definição de integral definida é baseada na ideia de que, para determinadas funções, à medida que a norma das partições de $[a, b]$ tende a zero, os valores correspondentes tendem a um valor limite J. Esse limite significa que uma soma de Riemann ficará próxima do número fornecido J, desde que a norma de sua partição seja pequena o bastante para que todos os seus subintervalos sejam suficientemente pequenos.

O símbolo ϵ significa um número positivo pequeno que especifica quão perto de J a soma de Riemann deve ficar. O símbolo δ corresponde a um segundo número positivo pequeno que especifica quão pequena a norma de uma partição deve ser para que isso aconteça.

O símbolo para o número J na definição da integral definida é

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

Lê-se "integral de a até b de f de x e dx" ou "integral de a até b de f de x em relação a x". Os outros componentes do símbolo da integral também têm nomes:

$\int$ = sinal de integral

b = limite superior de integração

a = limite inferior de integração

$f(x)$ = integrando

x = variável da integração

$f(x)\,dx$ = integral de f de a até b.

Quando encontramos o valor da integral, calculamos a integral.

Definições

- Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$, supondo-se $a < b$, ou seja, casos nos quais o limite superior é maior que o limite inferior.

A integral definida de f de a até b é denotada por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

desde que o limite do 2º membro exista.

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$

Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$ os números a e b são chamados *limites de integração* (a = limite inferior e b = limite superior).

Se f é integrável em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$$

isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Fique atento

Quando a função f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área. Nesse caso, a integral definida é a área da região sob o gráfico de f de a até b.

- Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$, supondo-se $a > b$, ou seja, casos nos quais o limite inferior é maior que o limite superior.
  A integral definida de f de a até b é denotada por

  $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

  se a integral à direita existir.

- Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$, se $a = b$ e $f(a)$ existe. A integral definida de a até b é denotada por

  $$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Técnicas de integração

Método da integração por partes

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I. Temos:

1. $[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$ ou
2. $f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x)$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = \int [f(x) \cdot g(x)]'dx - \int g(x) \cdot f'(x)dx$$

ou ainda,

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx$$

Observe que na primeira equação deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c, que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer $u = f(x) \rightarrow du = f'(x)\ dx$ e $v = g(x) \rightarrow dv = g'(x)\ dx$.

Substituindo na primeira expressão, temos:

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

Essa é a fórmula da integração por partes. Guarde-a bem! Vamos agora ver alguns exemplos?

Exemplos

a. Calcular $\int xe^{-2x}dx$

Antes de resolver essa integral, queremos salientar que a escolha de u e dv é feita convenientemente.

Nesse exemplo, escolhemos $u = x$ e $dv = e^{-2x}\ dv$. Temos:

$$u = x \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$$

$$dv = e^{-2x}\ dx \qquad \Rightarrow \qquad v = \int e^{-2x}\ dx = \frac{-1}{2}e^{-2x}$$

Aplicamos, então, a fórmula

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

e obtemos:

$$\int x\ e^{-2x}\ dx = x \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2x} - \int \frac{-1}{2}e^{-2x}\ dx$$

Calculando a última integral, vem:

$$\int x \cdot e^{-2x}\ dx = \frac{-1}{2}x\ e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

Observamos que, se tivéssemos escolhido $u = e^{-2x}$ e $dv = x\,dx$, o processo nos levaria a uma integral mais complicada.

b. Calcular $\int \ln x\ dx$

Seja:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = 1/x\ dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

Integrando por partes, vem:

$$\int \ln x\,dx = (\ln x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

c. Calcular $\int x^2 \operatorname{sen} x\ dx$

Neste exemplo, vamos aplicar o método duas vezes. Seja:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\ dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x$$

Integrando por partes, vem:

$$\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x\ dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)\,2x\ dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

A integral $\int x \cos x\,dx$ deve ser resolvida também por partes. Fazemos,

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos x\ dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

Temos:

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ dx$$

Logo:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \; dx = -x^2 \cos x + 2[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \; dx]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c$$

Exercícios de fixação

1. Calcule a integral e, em seguida, derive as respostas para conferir os resultados:

a. $\int \frac{dx}{x^3}$

b. $\int (ax^4 + bx^3 + 3c)\, dx$

c. $\int (2x^2 - 3)^2\, dx$

d. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

2. As funções a seguir envolvem potências do seno e do cosseno. Calcule-as:

a. $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x\, dx$

b. $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^6 x\, dx$

c. $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$

3. Explique integral definida e expresse a fórmula da integração por somas de Riemann.

4. Qual foi a questão matemática que levou ao desenvolvimento do conceito de integral definida?

5. Resolva as integrais a seguir usando a técnica da integração por partes:

a. $\int x \operatorname{sen} 5x\, dx$

b. $\int \ln (1 - x)\, dx$

c. $\int t e^{4t} dt$

d. $\int (x + 1) \cos 2x\, dx$

e. $\int x \ln 3x\, dx$

f. $\int \cos^3 x\, dx$

Panorama

Os matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), criadores do Cálculo Diferencial, construíram também as bases e fundamentos do Cálculo Integral. Leibniz, por exemplo, criou uma notação para a integral definida que capta sua construção como um limite de somas de Riemann. Ele imaginou as somas finitas $\Sigma n/k = 1$ e $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ tornando-se uma soma infinita dos valores da função $f(x)$ multiplicada por larguras de subintervalos $d(x)$ "infinitesimais". O símbolo do somatório Σ é substituído no limite pelo símbolo da integral $\int$, cuja origem é a letra "S". Os valores da função $f(c_i)$ são substituídos por uma seleção contínua de valores da função $f(x)$. As larguras dos intervalos Δx passam a ser a diferencial dx. É como se somássemos todos os produtos da forma $f(x) \cdot dx$ à medida que x se move de a para b. Ainda que essa noção capte o processo de construção da integral, é com Riemann que o conceito de integral é definido com rigor e precisão. O problema que levou à definição da integral por Riemann foi o cálculo de áreas.

Atualmente, muitos autores consideram a integral como pressuposto para o desenvolvimento da integral do matemático francês Henry Lebesgue (1875-1941). Após o amadurecimento do conceito de integral de Riemann, algumas deficiências ficaram visíveis. O francês Lebesgue foi o matemático que reformulou a integral de Riemann. Seu teorema caracteriza o que denominamos funções Riemann-integráveis. A integral de Lebesgue contempla a teoria de Riemann, e resolve suas deficiências. Em sua tese de doutorado, de 1902, Lebesgue publicou uma nova noção de integral. Inicialmente muito criticada, hoje em dia sua contribuição é reconhecidamente importante.

Exercícios

1. Pesquise sobre a biografia de Lebesgue e compartilhe seu conhecimento com colegas.
2. Pesquise sobre o teorema de Lebesgue e demonstre como ele sana as deficiências da integral de Riemann.

Recapitulando

Ao iniciar este estudo, certamente você encontrou dificuldades. Ainda as sente, não é? Isso é perfeitamente normal. Porém, analise o quanto seu conhecimento de cálculo integral cresceu da Unidade 1 até agora. Passo a passo, vencemos as dificuldades e a aprendizagem vai se tornando sólida.

Iniciamos a Unidade 3 conhecendo a integral de vários tipos de função. No Tema 1, vimos uma tabela de integrais imediatas bastante útil, que deve ser sempre consultada. Por meio de exemplos, aprendemos a integral das funções logarítmica e exponencial e das trigonométricas diretas e inversas. No Tema 2, entramos em casos de integração de funções envolvendo potências do seno e do cosseno, com situações diversas. Estudamos casos nos quais o expoente é ímpar e casos nos quais ele é par. Dependendo do número de expoentes e de serem ímpares ou pares, utilizamos determinados procedimentos para obter a integral. No Tema 3, conhecemos o conceito de integral definida e estudamos a integral de Riemann, matemático alemão que deu precisão ao conceito de integral. Utilizada no cálculo de áreas, problemática que levou ao seu desenvolvimento, seu conhecimento é indispensável à formação do estudante de cálculo integral.

O Tema 4, tema que encerra a Unidade 3, apresenta o método da integração por partes. Antes de encontrar a integral final, integramos separadamente as funções que a compõem. Como você pôde observar pela fórmula da integração por partes, esta utiliza a regra do produto para derivadas.

A unidade que iniciaremos a seguir encerrará este estudo. Nela, conheceremos outros métodos de integração de funções. Veremos ainda, com a utilização de exercícios, aplicações da integral definida no cálculo de áreas e volumes. O problema do comprimento de arcos e as denominadas coordenadas polares fecharão nosso estudo de cálculo.

A resolução de exercícios é uma prática muito importante no estudo da matemática. Por isso, não deixe de resolver os exercícios apresentados em cada unidade. Eles são elaborados especialmente para ajudar na fixação de seus conhecimentos. Bons estudos!

UNIDADE 4

Outros métodos de integração, coordenadas e aplicações de integral definida

Objetivos de aprendizagem

- Conhecer distintos métodos de integração.
- Utilizar a integral definida no cálculo de áreas e volumes.
- Entender outras aplicações da integral definida.
- Compreender o sistema de coordenadas polares.

Temas

- **1 – O método da integração por substituições trigonométricas**
  Veremos o método de integração por substituição trigonométrica. Utilizado em casos nos quais o integrando envolve as expressões $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, tal método de integração facilita o cálculo de determinadas integrais.
- **2 – O método da integração de funções racionais por frações parciais**
  Iniciando pela definição de função racional, o Tema 2 apresenta a integração de funções racionais por frações parciais.
- **3 – Integração por substituições especiais**
  Traz a demonstração do cálculo de integrais que envolvem a forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$) e enumera as substituições especiais que podem ser aplicadas em sua resolução.
- **4 – Integrais impróprias com limites de integração infinitos**
  Tem como assunto as denominadas integrais impróprias. A partir de sua definição, estudaremos as integrais impróprias com limites de integração infinitos e as com integrandos infinitos.

- **5 – Aplicações da integral definida**
  Aqui nos deteremos no estudo das aplicações da integral definida. Aprenderemos o cálculo de áreas e volumes, dando especial atenção aos métodos gerais de cálculo.
- **6 – Outras aplicações da integral definida**
  Este tema dá continuidade ao estudo das aplicações da integral definida. Estudaremos o comprimento de arcos de curvas planas usando a equação cartesiana.
- **7 – Coordenadas polares**
  Vamos conhecer um sistema de coordenadas bastante utilizado em cálculo: o sistema de coordenadas polares.

Introdução

Enfim, chegamos! Eis a última etapa de nosso estudo de Cálculo Integral. Dividindo-se em sete temas, esta unidade é abrangente e traz conhecimentos fundamentais ao estudante. Começaremos estudando distintos métodos de integração de funções. No Tema 1, veremos o método da integração por substituição trigonométrica, muito utilizado em casos nos quais o integrando envolve operações algébricas. Em tais casos, a substituição permite o cálculo da integral de maneira mais fácil. Na sequência, o Tema 2 demonstra a integração de funções racionais por frações parciais, cujo método se fundamenta em um importante resultado da álgebra. Como veremos mais adiante, tal método consiste basicamente em reescrevermos a função racional dada como uma soma de frações mais simples. Por sua vez, o Tema 3 traz a integração por substituições especiais e apresenta, assim como os temas anteriores, exemplos que tornam mais clara a aplicação desses métodos.

No Tema 4, conheceremos as denominadas integrais impróprias. Trata-se de funções com intervalos infinitos e limites de integração infinitos ou, então, funções descontínuas em um determinado ponto c tal que $c \in [a, b]$. Como constataremos mais adiante, as integrais impróprias se classificam em convergentes e divergentes, de acordo com a existência ou não de limites. Em seguida, no Tema 5, identificaremos as aplicações da integral definida no cálculo de áreas e volumes, enfatizando métodos gerais e resolução de exercícios. No Tema 6, veremos ainda outra aplicação da integral definida, tal como no cálculo do comprimento de arcos de curvas planas com utilização da equação cartesiana. No fechamento da Unidade 4, buscaremos a compreensão do sistema de coordenadas polares. Diferentemente do sistema de coordenadas cartesianas, no sistema de coordenadas polares localizamos um ponto no plano por meio da distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semirreta fixa. Com esse passo, concluímos o estudo de Cálculo Integral. É importante que você saiba que a divisão em unidades não significa graus maiores ou menores de dificuldade. Tal divisão deve-se à necessidade de sistematização dos conteúdos para sua melhor aprendizagem e aos conhecimentos prévios que são requisitados em cada passo à frente. Dessa forma, todos os temas estudados são igualmente importantes neste ramo da matemática que chamamos de Cálculo. Retome, reveja e consolide sua aprendizagem!

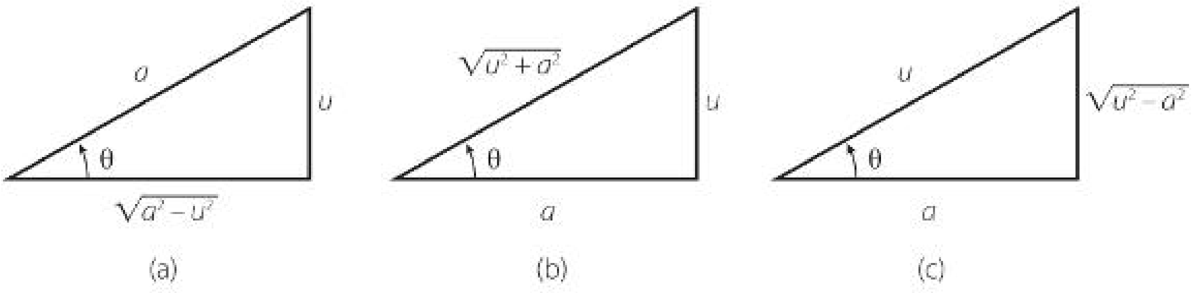
O método da integração por substituições trigonométricas

Integração por substituição trigonométrica

Muitas vezes, substituições trigonométricas convenientes nos permitem resolver uma integral. Se o integrando contém funções envolvendo as expressões $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, podemos fazer uma substituição trigonométrica.

Os gráficos a seguir nos sugerem tal substituição. Observe:

Gráfico 4.1



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 306).

Acompanhe agora a resolução das integrais pelo método de substituição trigonométrica:

1. A função integrando envolve $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \operatorname{sen} \theta$. Então, $du = a \cos \theta \, d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{\mathrm{a}^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta\end{aligned}$$

2. A função integrando envolve $\sqrt{a^2 + u^2}$

Neste caso, usamos $u = a \operatorname{tg} \theta$. Então, $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} \\ &= a \sec \theta\end{aligned}$$

3. A função integrando envolve $\sqrt{u^2 - a^2}$

Neste caso, usamos $u = a \sec \theta$. Então, $du = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$. Supondo θ tal que $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\ &= \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a \operatorname{tg} \theta\end{aligned}$$

Fique atento

Não se esqueça da fórmula fundamental da trigonometria: $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Exemplo

Considere $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}\,dx$

4. Neste exemplo, usamos $x = 3 \text{ sen } \theta$. Então, $dx = 3 \cos \theta d\theta$.
Assim: $\sqrt{9-x^2} = 3 \cos \theta$, para $\frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3\cos\theta}{9\text{ sen}^2\theta}\cdot 3\cos\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \text{cotg}^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int (\text{cosec}^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}(-\text{ cotg } \theta - \theta) + C$$

Devemos, agora, escrever este resultado em termos da variável original x. Sabemos que, se $x = 3 \text{ sen } \theta, \frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, então $\theta = \text{arc sen } \frac{x}{3}$.

Observando o Gráfico 4.1, vemos que:

$$\text{cotg } \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \text{arc sen } \frac{x}{3}\right) + C$$

Fique atento

Como você pôde observar, o método da substituição trigonométrica é muito útil nos casos em que o integrando envolve operações algébricas, facilitando muito o cálculo da integral.

O método da integração de funções racionais por frações parciais

Integração de funções racionais

Uma função racional $f(x)$ é definida como uma divisão entre duas funções polinomiais, ou seja: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios. Veremos agora um método que permite calcular a integral de qualquer função racional. A ideia básica é escrever a função racional dada como uma soma de frações mais simples.

Para tal, usaremos a seguinte proposição:

Se $q(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $q(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares ou quadráticos, todos com coeficientes reais. Veja a demonstração nos exemplos a seguir.

Exemplos

a. O polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$ pode ser escrito como o produto dos fatores lineares $x - 2$ e $x - 1$, ou seja: $q(x) = (x - 2) \cdot (x - 1)$

b. O polinômio $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ pode ser expresso como o produto do fator linear $x - 1$ pelo fator quadrático $x^2 + 1$, isto é: $q(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 1)$

c. O polinômio $q(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 3x + 4)$ é uma decomposição do polinômio $q(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 7x + 4$

A decomposição da função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples está subordinada ao modo como o denominador $q(x)$ se decompõe nos fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis. Nos exemplos a seguir, consideraremos diversos casos.

Para o desenvolvimento do método, vamos considerar que o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio do denominador $q(x)$ é 1. Se não for assim, dividimos o numerador e o denominador da função racional $f(x)$ por esse coeficiente. Podemos supor, também, que o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$. Caso isso não ocorra, devemos primeiramente efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

Exemplos

Caso 1. Os fatores de $q(x)$ são lineares e distintos. Nesse caso, podemos escrever $q(x)$ na forma $q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \ldots (x - a_n)$, onde os a_i, $i = 1, \ldots n$, são distintos dois a dois. A decomposição da função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples é dada por

$f(x) = \dfrac{A_1}{x - a_1} + \dfrac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{x - a_n}$, onde $A_1, A_2, \ldots A_n$ são constantes que devem ser determinadas.

a. Calcular $I = \displaystyle\int \frac{x - 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,dx$

Solução:

Temos:

$$\frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x-3}$$

Reduzindo novamente ao mesmo denominador, vem:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)A_1+(x-1)(x-3)A_2+(x-1)(x+1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{(x^2-2x-3)A_1+(x^2-4x+3)A_2+(x^2-1)A_3}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_1-4A_2)x+(-3A_1+3A_2-A_3)}{(x-1)(x+1)(x-3)}$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$x-2=(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_1-4A_2)x+(-3A_1+3A_2-A_3)$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, segue que

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=0 \\ -2A_1-4A_2=1 \\ -3A_1+3A_2-A_3=-2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$A_1=\frac{1}{4}, A_2=\frac{-3}{8} \text{ e } A_3=\frac{1}{8}$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{1/4}{x-1}+\frac{-3/8}{x+1}+\frac{1/8}{x-3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-3}$$

e, então,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-3}$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln|x-3| + C$$

Observamos que existe outra maneira prática para determinar os valores das constantes A_1, A_2, e A_3. Eliminando os denominadores na igualdade

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}$$

obtemos

$$x - 2 = (x+1)(x-3)A_1 + (x-1)(x-3)A_2 - (x-1)(x+1)A_3$$

Podemos, agora, determinar A_1, A_2 e A_3 tomando valores de x que anulem os diversos fatores, como segue:

$$x = 1 \to 1 - 2 = (1+1)(1-3)A_1 + (1-1)(1-3)A_2$$
$$+ (1-1)(1+1)A_3 \quad -1 = -4A_1$$
$$A_1 = \frac{1}{4};$$

$$x = -1 \to -1 - 2 = (-1+1)(-1-3)A_1$$
$$+ (-1-1)(-1-3)A_2 + (-1-1)(-1+1)A_3$$
$$-3 = 8A_2$$
$$A_2 = \frac{-3}{8};$$

$$x = 3 \to 3 - 2 = (3+1)(3-3)A_1 + (3-1)(3-3)A_2$$
$$+ (3-1)(3+1)A_3$$
$$1 = 8A_3$$
$$A_3 = \frac{1}{8}$$

Caso 2. Os fatores de $q(x)$ são lineares, e alguns deles se repetem. Se um fator $x - a_i$, de $q(x)$ tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma a seguir:

$$\frac{B_1}{(x-a_i)^r} + \frac{B_2}{(x+a_i)^{r-1}} + \ldots + \frac{B_r}{(x-a_i)},$$ onde B_1, B_2, ... B_r são constantes que devem ser determinadas.

a. Calcular $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2}\,dx$

Solução: as raízes $q(x)$ são $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$, sendo que $x = 0$ tem multiplicidade 2. Assim, o integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{x^3 + 3x - 1}{(x-2)(x+2)x^2}$$

$$= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x}$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$x^3 + 3x - 1 = (x+2)x^2 A_1 + (x-2)x^2 A_2 + (x-2)(x+2)B_1 + (x-2)(x+2)xB_2$$

Atribuindo a x os valores $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$, vem:

$$x = 2 \quad \to 13 \quad = 4 \cdot 4A_1 \qquad A_1 = \frac{13}{16}$$

$$x = -2 \quad \to -15 \quad = -4 \cdot 4A_2 \qquad A_2 = \frac{15}{16}$$

$$x = 0 \quad \to -1 \quad = -2 \cdot 2B_1 \qquad B_1 = \frac{1}{4}$$

Por esse procedimento não conseguimos determinar o valor B_2. Para determiná-lo, tomamos uma equação conveniente do sistema obtido igualando os coeficientes das mesmas potências de x. Usando a igualdade dos coeficientes de x^3, obtemos:

$$1 = A_1 + A_2 + B_2$$

$$1 = \frac{13}{16} + \frac{15}{16} + B_2$$

$$B_2 = -\frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{13}{16} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x}$$

e, então,

$$\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2}\,dx = \frac{13}{16}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{15}{16}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{13}{16}\ln|x-2| + \frac{15}{16}\ln|x+2| - \frac{1}{4x} - \frac{3}{4}\ln|x| + C$$

Caso 3. Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, e os fatores quadráticos não se repetem. A cada fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ corresponderá uma fração parcial da forma:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}$$

a. Calcular $I = \displaystyle\int \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3}\, dx$

O polinômio tem $q(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ apenas uma raiz real, $x = 1$. Sua decomposição em fatores lineares e quadráticos é dada por:

$$q(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$$

Podemos, então, expressar o integrando na forma

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}$$

Eliminando os denominadores, vem:

$$2x^2 + 5x + 4 = A(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x - 1)$$

$$= (A + C)x^2 + (2A - C + D)x + 3A - D$$

e, então,

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ 2A - C + D = 5 \\ 3A - D = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$A = \frac{11}{6};\, C = \frac{1}{6} \text{ e } D = \frac{9}{6}$$

Portanto,

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3}$$

e, dessa forma,

$$I = \frac{11}{6}\int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{6}\int \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3}\, dx$$

$$= \frac{11}{6} \ln|x - 1| + \frac{1}{6} I_1 + C$$

onde,

$$I_1 = \int \frac{x + 9}{x^2 + 2x + 3}\, dx$$

O integrando de I_1 é uma função racional cujo denominador é um polinômio quadrático irredutível. Integrais dessa forma aparecem frequentemente na integração das funções racionais e podem ser resolvidas completando o quadrado do denominador e fazendo substituições convenientes.

Temos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 + 3 \\ &= (x+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$I_1 = \int \frac{x+9}{(x+1)^2 + 2}\, dx$$

Fazendo a substituição $u = x + 1$, temos $x = u - 1$ e $dx = du$. Então,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{u - 1 + 9}{u^2 + 2}\, du = \int \frac{u+8}{u^2+2}\, du \\ &= \int \frac{u\, du}{u^2+2} + 8\int \frac{du}{u^2+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(u^2+2) + \frac{8}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Logo,

$$I = \frac{11}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{8}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + C$$

Caso 4. Os fatores de $q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, e alguns dos fatores quadráticos se repetem.

Se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade s, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2+bx+c)^s} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+bx+c)^{s-1}} + \dots + \frac{C_sx + D_s}{x^2+bx+c}$$

a. Calcular $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2}\, dx$

O integrando pode ser escrito na forma

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{C_1x + D_1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+2x+3)}$$

Eliminando os denominadores, vem:

$$x+1 = A(x^2+2x+3)^2 + x(C_1x+D_1) + x(x^2+2x+3)(C_2x+D_2)$$

$$= (A+C_2)x^4 + (4A+2C_2+D_2)x^3 + (10A+C_1+3C_2+2D_2)x^2$$

$$+ (12A+D_1+3D_2)x + 9A$$

e, então,

$$\begin{cases} A + C_2 = 0 \\ 4A + 2C_2 + D_2 = 0 \\ 10A + C_1 + 3C_2 + 2D_2 = 0 \\ 12A + D_1 + 3D_2 = 1 \\ 9A = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$A = \frac{1}{9}; C_1 = -\frac{1}{3}; D_1 = \frac{1}{3}; C_2 = \frac{-1}{9}; D_2 = \frac{-2}{9}$$

e, assim,

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{-x-2}{x^2+2x+3}$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2}dx - \frac{1}{9}\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{3}I_1 - \frac{1}{9}I_2$$

onde $I_1 = \displaystyle\int\frac{-x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$ e $I_2 = \displaystyle\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}dx$

A integral I_2 é análoga às que foram resolvidas no decorrer dos exemplos do Caso 3. Como naqueles exemplos, para resolvê-la, completamos o quadrado do denominador e fazemos uma substituição conveniente. Temos:

$$I_2 = \int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \int\frac{x+2}{(x+1)^2+2}\,dx$$

Fazendo a substituição $u = x+1$; $x = u-1$ e $dx = du$, vem:

$$I_2 = \int\frac{u+1}{u^2+2}du$$

$$= \int\frac{u}{u^2+2}du + \int\frac{du}{u^2+2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln (u^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C$$

Uma integral como I_1 não foi vista anteriormente. Para calculá-la, inicialmente, completamos o quadrado do denominador e fazemos a mesma substituição que fizemos para calcular I_2. Temos:

$$I_1 = \int \frac{-x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$$

$$= \int \frac{-x + 1}{[(x + 1)^2 + 2]^2} dx$$

$$= \int \frac{-u + 2}{(u^2 + 2)^2} du \qquad \text{(onde } u = x + 1\text{)}$$

$$= \int \frac{-u}{(u^2 + 2)^2} du + 2 \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{1}{2(u^2 + 2)} + 2 \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2}$$

Para resolver a integral $\int \frac{du}{(u^2 + 2)^2}$, podemos recorrer a uma substituição trigonométrica. Fazemos $u = \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta$. Então, $du = \sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta$. Assim:

$$\int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} = \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta \, d\theta}{(2 \operatorname{tg}^2 \theta + 2)^2}$$

$$= \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta \, d\theta}{4 \sec^4 \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta}$$

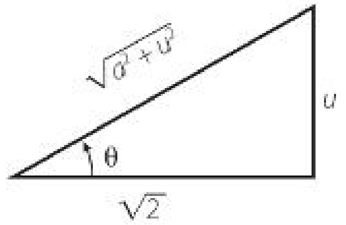
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{2} \cos \theta \text{ sen } \theta + \frac{1}{2} \theta \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} (\cos \theta \text{sen } \theta + \theta)$$

Para retornar à variável anterior u, observamos o Gráfico 4.2. Temos:

Gráfico 4.2



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 323).

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+u^2}}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{u}{\sqrt{2+u^2}}$$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{u}{\sqrt{2}}$$

Portanto,

$$\int \frac{du}{(u^2+2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{\sqrt{2}u}{2+u^2} + \text{arc tg}\frac{u}{\sqrt{2}}\right] + C$$

e, então,

$$I_1 = \frac{1}{2(u^2+2)} + \frac{2\sqrt{2}}{8}\left[\frac{\sqrt{2}\,u}{2+u^2} + \text{arc tg}\frac{u}{\sqrt{2}}\right] + C$$

Retornando à variável original x, vem:

$$I_1 = \frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\sqrt{2}(x+1)}{x^2+2x+3} + \text{arc tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + C$$

Substituindo os resultados obtidos para I_1 e I_2 na integral I, obtemos:

$$I = \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+3} + \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$-\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{9}\ln|x|+\frac{x+2}{6(x^2+2x+3)}+\frac{\sqrt{2}}{36}\text{arc tg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{18}\ln(x^2+2x+3)+C$$

Na resolução das integrais de funções racionais que se enquadram no Caso 4, normalmente aparecem integrais da forma

$$\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n},\ n\geqslant 1$$

Se $n = 1$, esta integral nos dá arco tangente. No exemplo a seguir, encontramos uma fórmula de recorrência para essa integral, para $n > 1$.

Integração por substituições especiais

Integrais envolvendo expressões da forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$

Algumas integrais que envolvem a expressão $\sqrt{ax^2+bx+c}$ podem ser resolvidas por meio da substituição. Podemos completar o quadrado do trinômio $ax^2 + bx + c$ para visualizar a substituição. Nos exemplos a seguir, veja que após a substituição adequada a integral que encontramos é uma integral tabelada, ou em um dos tipos já apresentados, tornando-se assim muito mais fácil de ser resolvida.

Exemplos

a. Calcular $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+15}}$.

Vamos completar o quadrado do trinômio $x^2 + 8x + 15$. Temos:

$$x^2+8x+15=(x+4)^2-1$$

Neste caso, a substituição conveniente é

$$u=x+4;\ du=dx$$

que transforma a integral I numa integral tabelada (ver Tabela de Integrais Imediatas da Unidade 3, subitem 7, p. 53).

Temos:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$
$$= \arg\cosh\ u + C$$
$$= \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$$

Portanto,

$$I = \arg\cosh\ (x + 4) + C \text{ ou}$$
$$I = \ln |x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 15}| + C$$

b. Calcular $I = \displaystyle\int \frac{3x + 2}{\sqrt{9 - 16x - 4x^2}}\, dx$

Temos:

$$9 - 16x - 4x^2 = 25 - (2x + 4)^2$$

Logo,

$$I = \int \frac{3x + 2}{\sqrt{25 - (2x + 4)^2}}\, dx$$

Para resolver essa integral, podemos usar uma substituição trigonométrica (ver Tema 1 desta Unidade). Temos:

$$2x + 4 = 5 \text{ sen } \theta, \frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$dx = \frac{5}{2} \cos\theta\ d\theta \text{ e}$$
$$\sqrt{25 - (2x + 4)^2} = 5 \cos\theta$$

Logo,

$$I = \int \frac{3(5/2 \text{ sen } \theta - 2) + 2}{5 \cos\theta} \cdot \frac{5}{2} \cos\theta d\theta$$
$$= \int \left(\frac{15}{4} \text{ sen } \theta - 2\right) d\theta$$
$$= -\frac{15}{4} \cos\theta - 2\theta + C$$

Como $2x + 4 = 5 \text{ sen } \theta$, temos que $\text{sen } \theta = \dfrac{2x + 4}{5}$;

$\theta = \text{arc sen } \dfrac{2x + 4}{5}$ e $\cos\theta = \dfrac{1}{5}\sqrt{25 - (2x + 4)^2}$

Portanto,

$$I = -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{25 - (2x + 4)^2} - 2 \text{ arc sen}\left(\frac{2x + 4}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{9 - 16x - 4x^2} - 2 \text{ arc sen}\left(\frac{2x + 4}{5}\right) + C$$

Outras substituições

A seguir, veja outras substituições que podem ser usadas para a resolução de integrais da forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

- O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta $a > 0$.
  Nesse caso, podemos usar $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$.
- O trinômio $ax^2 + bx + c$ apresenta $c > 0$.
  Nesse caso, podemos usar $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$.
- O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem raízes reais.
  Usamos, para esse caso, a substituição $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r)t$, onde r é qualquer uma das raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Exemplos

a. Calcular $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + x - 3}}$

Nesse caso, o trinômio apresenta $a = 4 > 0$ e raízes reais. Portanto, podemos escolher entre as substituições dos casos a e c.

Vamos escolher o caso a, usando o sinal positivo de (1).

Temos:

$$\sqrt{4x^2 + x - 3} = 2x + t$$

Então,

$$4x^2 + x - 3 = (2x + t)^2$$

$$4x^2 + x - 3 = 4x^2 + 4xt + t^2$$

$$x - 4xt = t^2 + 3$$

$$x(1 - 4t) = t^2 + 3$$

$$x = \frac{t^2 + 3}{1 - 4t}$$

$$dx = \frac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)}\,dt$$

e

$$\sqrt{4x^2 + x - 3} = 2 \cdot \frac{t^2 + 3}{1 - 4t} + t$$

$$= \frac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}$$

Substituindo essas expressões na integral, vem:

$$I = \int \frac{\dfrac{-4t^2 + 2t + 12}{(1 - 4t)^2}}{\dfrac{t^2 + 3}{1 - 4t} \cdot \dfrac{-2t^2 + t + 6}{1 - 4t}}\, dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2 + 3}\, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + x - 3} - 2x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

b. Calcular $I = \dfrac{dx}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 4x + 9}}$

O trinômio $x^2 + 4x + 9$ tem $a = 1 > 0$ e $c = 9 > 0$. Portanto, podemos escolher entre os casos (a) e (b). Vamos usar (2) com o sinal positivo. Temos:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = xt + 3$$

$$x^2 + 4x + 9 = (xt + 3)^2$$

$$x = \frac{6t - 4}{1 - t^2}$$

$$dx = \frac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}$$

e

$$\sqrt{x^2 + 4x + 9} = \frac{6t - 4}{1 - t^2}\, t + 3$$

$$= \frac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}$$

Substituindo esses resultados na integral, vem:

$$I = \int \frac{\dfrac{6t^2 - 8t + 6}{(1 - t^2)^2}}{\left(\dfrac{6t - 4}{1 - t^2} + 4\right) \cdot \dfrac{3t^2 - 4t + 3}{1 - t^2}} dt$$

$$= \int \frac{dt}{-2t^2 + 3t}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3/2t}$$

Essa integral pode ser resolvida por frações parciais.

Como as raízes de $q(x) = t^2 - \dfrac{3}{2}t$ são $t = 0$ e t = 3/2, vem:

$$\frac{1}{t^2 - \dfrac{3}{2}t} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t - \dfrac{3}{2}}$$

Eliminando os denominadores, obtemos:

$$1 = A_1 (t - 3/2) + A_2 t$$

Substituindo t pelos valores $t = 0$ e t = 3/2, vem:

$$t = 0 \rightarrow 1 = -\frac{3}{2}A_1$$

$$A_1 = -\frac{2}{3}$$

$$t = \frac{3}{2} \rightarrow 1 = \frac{3}{2}A_2$$

$$A_2 = \frac{2}{3}$$

Logo,

$$I = -\frac{1}{2}\left[\int \frac{-2/3}{t} dt + \int \frac{2/3}{t - 3/2} dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \ln |t| - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ln |t - 3/2| + C_1$$

$$= \frac{1}{3} \ln |t| - \frac{1}{3} \ln |2t - 3| + C$$

Voltando à variável x, temos:

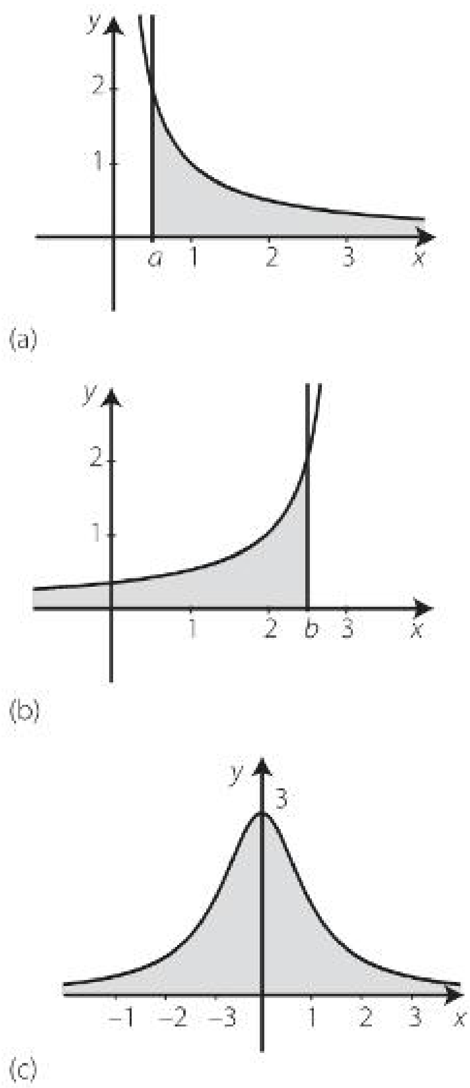
$$I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}-3}{x}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+4x+9}-3x-6}{x}\right| + C$$

Integrais impróprias com limites de integração infinitos

Definição

Em algumas circunstâncias, precisamos considerar a área de uma região que se estende indefinidamente para a direita ou para a esquerda ao longo do eixo dos x. Nos gráficos a seguir ilustramos diversas situações como essa. Observe:

Gráfico 4.3



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 282-283).

Como procedemos, então, nesses casos? As áreas de tais regiões "infinitas" podem ser calculadas usando-se as integrais impróprias. Estas são definidas assim:

a. Se f é contínua para todo $x \geqslant a$, definimos $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ se este limite existir.

b. Se f é contínua para todo $x \leqslant b$, definimos $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ se este limite existir.

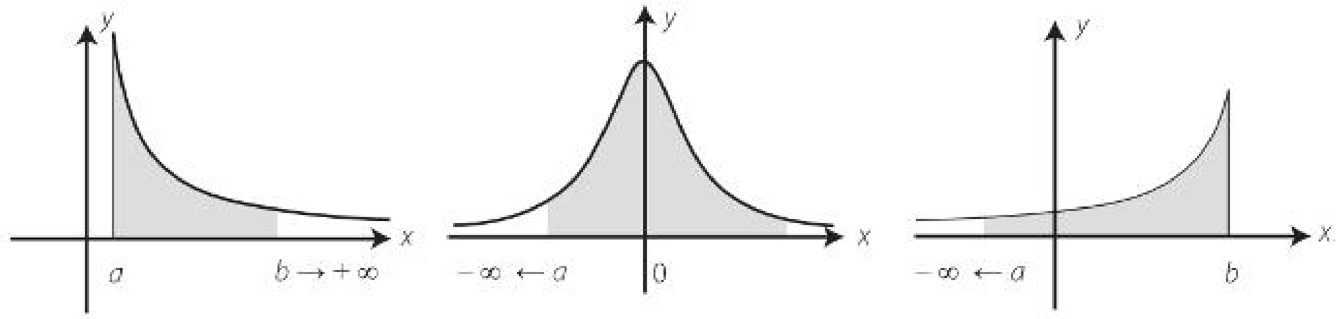
c. Se f é contínua para todo x, definimos $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\,dx$ se ambos os limites existirem.

Para os itens a e b temos que, se o limite existir, a integral imprópria é dita *convergente*. Caso contrário, é chamada de *divergente*. No caso do item c, se ambos os limites existirem, a integral imprópria é dita *convergente*. Se pelo menos um dos limites não existir, é chamada de *divergente*.

Mas atenção! O cálculo das integrais impróprias reduz-se apenas ao cálculo de integrais definidas e de limites. No item a, por exemplo, calculamos a integral definida no intervalo $[a, b]$, considerando que o limite inferior a é fixo e o limite superior b é variável. A seguir, fazemos b mover-se indefinidamente para a direita, isto é: $b \to \infty$.

O Gráfico 4.4 ilustra as diversas situações:

Gráfico 4.4



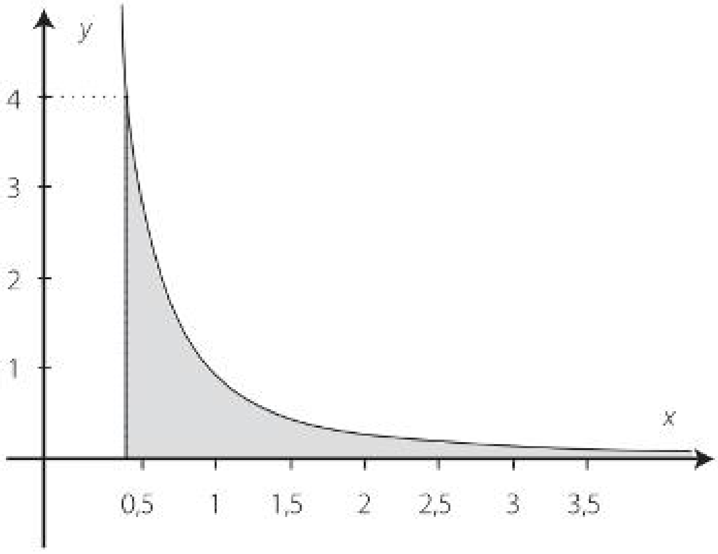
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 283).

Exemplos

a. Calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$ à direita de $x = \frac{1}{2}$

O Gráfico 4.5 mostra a área que desejamos calcular.

Gráfico 4.5



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 284).

Temos:

$$I = \int_{1/2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_{1/2}^{b} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{x}\Bigg|_{1/2}^{b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{1/2}\right]$$

$$= 2$$

Portanto, a integral I converge e a área procurada é dada por $A = 2$ u.a.

b. Calcular, se convergir, a integral $I = \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$

Temos:

$$I = \lim_{a \to -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$$

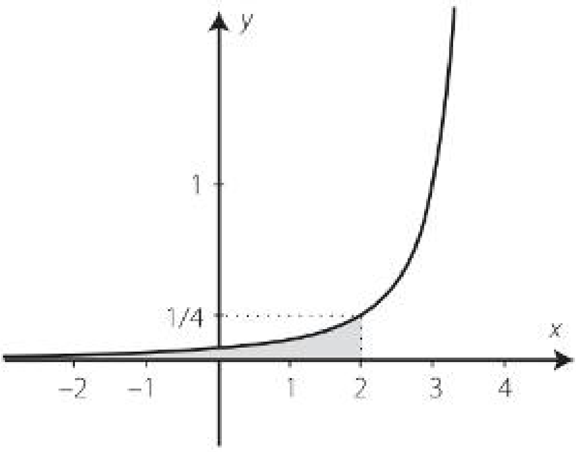
$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{4-x}\Big|_a^2$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4-a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Logo, a integral I converge e seu valor é $I = \frac{1}{2}$. No Gráfico 4.6 ilustramos este exemplo. É interessante observar que o resultado obtido representa a área da região ilimitada, situada abaixo da curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, à esquerda de $x = 2$

Gráfico 4.6



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 285).

c. É possível encontrarmos um número finito que representa a área da região abaixo da curva $y = \frac{1}{x}, x \geqslant 1$?

Devemos verificar se a integral imprópria $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ converge ou diverge.

Temos,

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln |x| \Big|_1^b$$

$$I = \lim_{b \to +\infty} [\ln b - \ln 1]$$

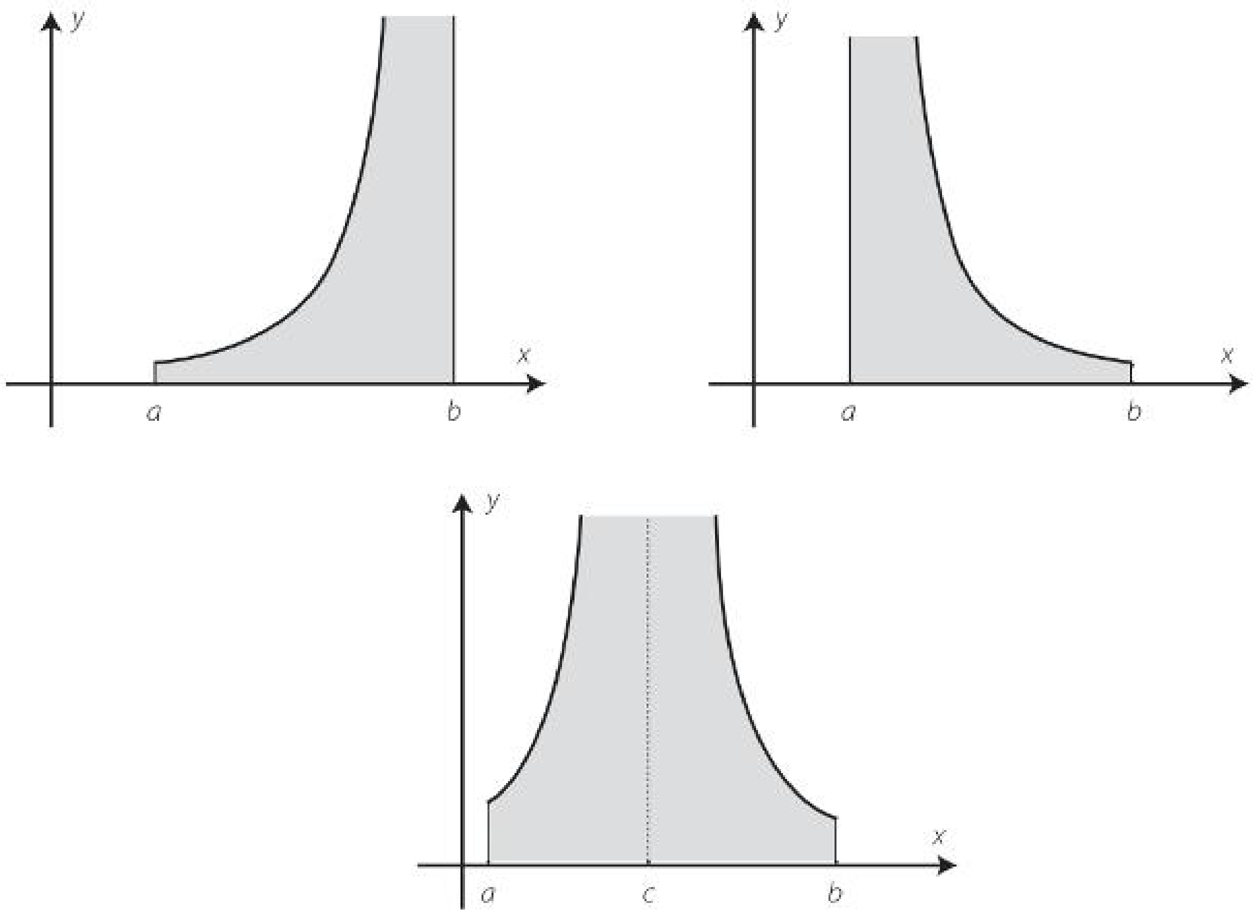
$$= +\infty$$

Logo, a integral imprópria diverge e, dessa forma, a resposta à pergunta formulada é não.

Integrais impróprias com integrandos infinitos

Vimos que as integrais impróprias com limites de integração infinitos permitem calcular a área de regiões ilimitadas. Observemos agora outras regiões ilimitadas cuja área, em alguns casos, pode ser calculada por meio de integrais impróprias. Os gráficos a seguir trazem alguns exemplos:

Gráfico 4.7



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 287).

Para as integrais impróprias com integrandos infinitos, temos a seguinte definição:

a. Se f é contínua em $[a, b)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s \to b^-} \int_a^s f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

b. Se f é contínua em $(a, b]$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

c. Se f é contínua para todo $x \in [a, b]$, exceto para $x = c \in (a, b)$, e tem limites laterais infinitos em c, definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s \to c^-} \int_a^s f(x)\,dx + \lim_{r \to c^+} \int_r^b f(x)\,dx$$

se ambos os limites existirem.

Para os itens a e b, temos que, se o limite existir, a integral imprópria é dita *convergente*. Em caso contrário, ela é dita *divergente*. No caso do item c, se ambos os limites existirem, a integral imprópria é dita *convergente*. Se pelo menos um dos limites não existir, ela é dita *divergente*.

Fique atento

As integrais impróprias com integrandos infinitos têm a mesma notação que as integrais definidas. Na prática, sempre que deparamos com uma integral definida, devemos analisar a função integrando para verificar se não estamos diante de uma integral imprópria.

Exemplos

a. É possível encontrar um número finito que representa a área da região abaixo da curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, no intervalo $(0,16]$?

Devemos verificar se a integral imprópria $I = \displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge ou diverge.

Temos:

$$I = \lim_{r \to 0^+} \int_r^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{r \to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_r^{16}$$

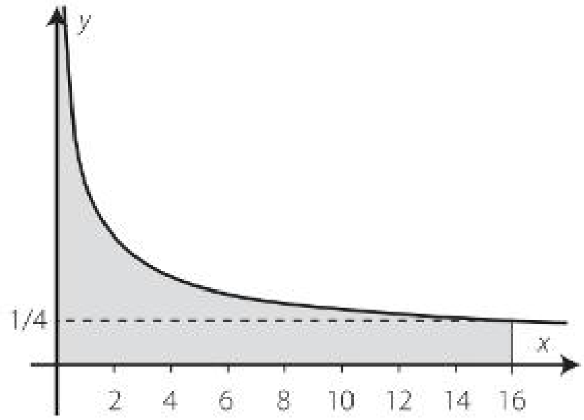
$$I = \lim_{r \to 0^+} (8 - 2\sqrt{r})$$

$$= 8$$

Logo, a integral imprópria converge e a área da região dada é A = 8 u.a.

O Gráfico 4.8 ilustra este exemplo.

Gráfico 4.8

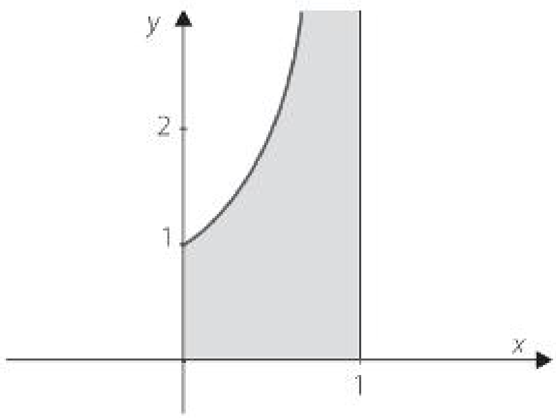


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 288).

b. É possível encontrar um número finito que representa a área da região abaixo da curva para $y = \dfrac{1}{1-x}$, no intervalo [0, 1)?

No Gráfico 4.9 apresentamos a região dada.

Gráfico 4.9



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 289).

Devemos investigar se a integral imprópria $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ converge ou diverge.

Temos:

$$I = \lim_{s \to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{1-x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s \to 1^-} - \ln(1-x)\Big|_0^s \\
&= \lim_{s \to 1^-} [-\ln(1-s) + \ln 1] \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

Portanto, a integral imprópria diverge, não sendo possível encontrar um número finito que representa a área da região dada.

c. Investigar a integral $I = \int_{-2}^{7} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

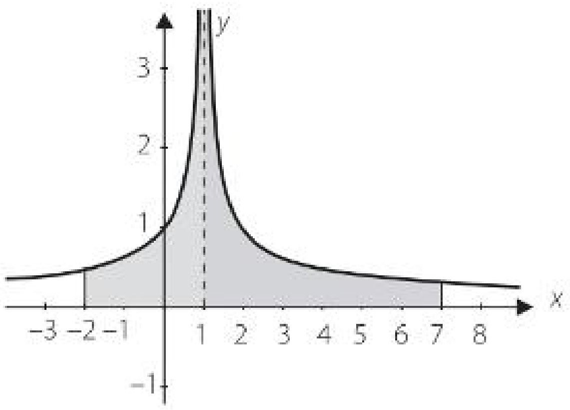
Nesse exemplo a função integrando é contínua, exceto no ponto $x = 1$. Além disso, ela tem limites laterais infinitos nesse ponto.

Temos, então,

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{s \to 1^-} \int_{-2}^{s} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{r \to 1^+} \int_{r}^{7} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\
&= \lim_{s \to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{-2}^{s} + \lim_{r \to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_{r}^{7} \\
&= \lim_{s \to 1^-} [3(s-1)^{1/3} - 3(-3)^{1/3}] + \lim_{r \to 1^+} [3 \cdot 6^{1/3} - 3(r-1)^{1/3}] \\
&= (0 + 3\sqrt[3]{3}) + (3\sqrt[3]{6} - 0) \\
&= 3(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}).
\end{aligned}
$$

Logo, a integral imprópria converge e seu valor é $3(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6})$. O Gráfico 4.10 ilustra este exemplo.

Gráfico 4.10



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 290).

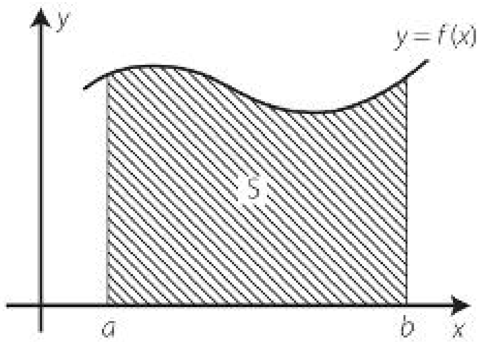
Aplicações da integral definida

Cálculo de áreas

O cálculo de áreas de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos agora situações que ocorrem com frequência, seguidas de exemplos que mostram sua aplicação:

Caso 1. Cálculo da área do gráfico plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a, b]$. Observe:

Gráfico 4.11



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 272).

Nesse caso, a área é dada por

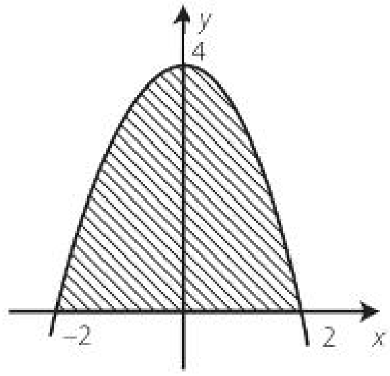
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemplo

Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2, conforme demonstrado no Gráfico 4.12:

Gráfico 4.12



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 272).

No intervalo $[-2, 2]$, $y = 4 - x^2 \geqslant 0$. Assim, a área procurada é aquela sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2. Temos:

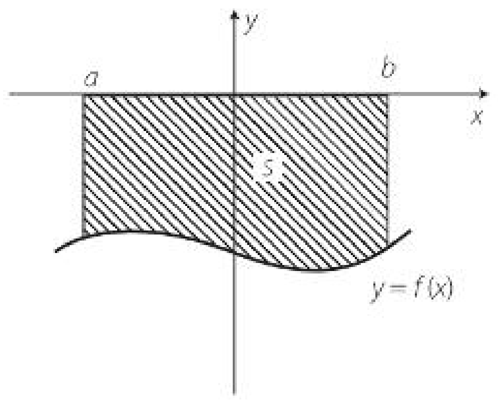
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] = \frac{32}{3}$$

Portanto, $A = 32/3$ (32/3 unidades de área).

Caso 2. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \leqslant 0$, $\forall\, x \in [a, b]$. Veja o Gráfico 4.13:

Gráfico 4.13



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 273).

É fácil ver que nesse caso basta usarmos o módulo da integral:

$\int_a^b f(x)\,dx$, ou seja,

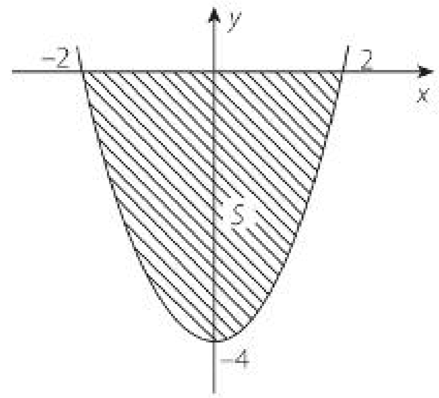
$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

Exemplos

a. Encontre a área limitada pela curva $y = x^2 - 4$ e o eixo dos x.

A curva $y = x^2 - 4$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Gráfico 4.14).

Gráfico 4.14



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 273).

No intervalo $[-2, 2]$, $y = x^2 - 4 \leqslant 0$. Assim:

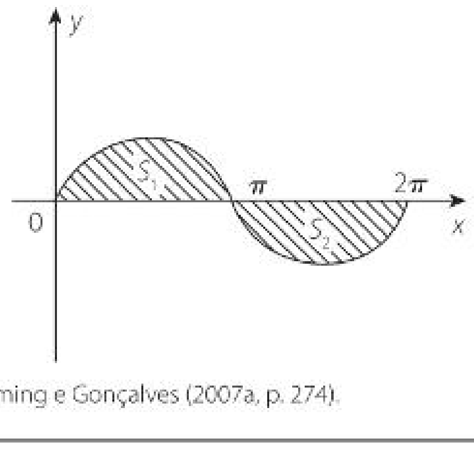
$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right|$$

$$= \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

b. Encontre a área da região S, limitada pela curva $y = \text{sen } x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π.

Precisamos dividir a região S em duas sub-regiões: S_1 e S_2 (ver Gráfico 4.15).

Gráfico 4.15



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 274).

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \text{sen } x \geqslant 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \text{sen } x \leqslant 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, temos:

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \right|$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + |-\cos 2\pi + \cos \pi|$$

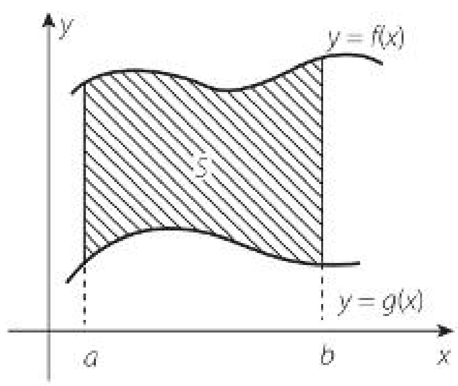
$$= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)|$$

$$= 4 \text{ u.a.}$$

Caso 3. Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Nesse caso, pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$. Veja:

Gráfico 4.16



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 274).

Então, a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g, ou ainda:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

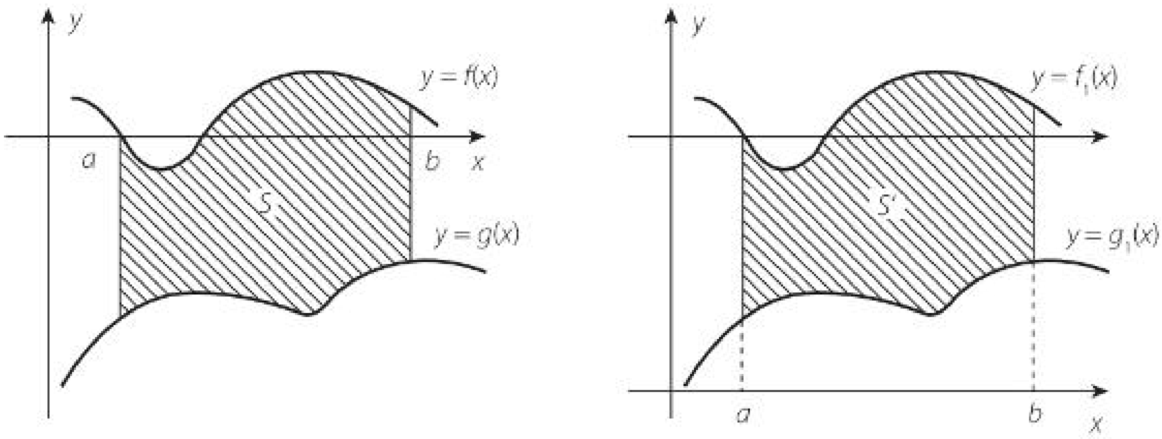
Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos x deslocado de tal maneira que as funções se tornem não negativas, $\forall\, x \in [a, b]$.

Observando o gráfico a seguir, podemos concluir que:

$$A' = A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Gráfico 4.17



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 275).

Exemplos

a. Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Gráfico 4.18).

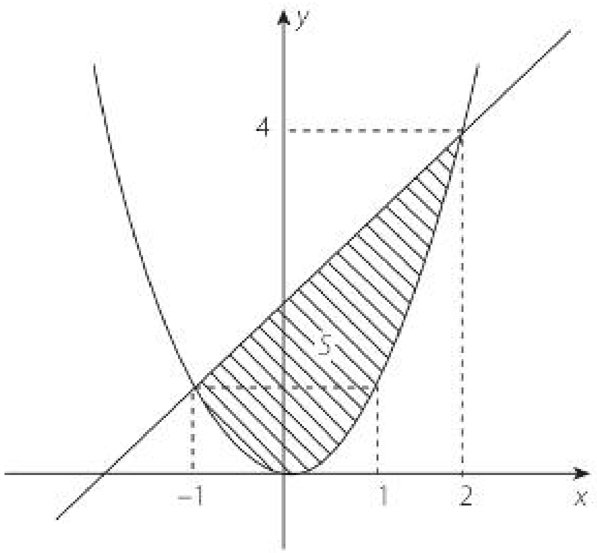
No intervalo $[-1, 2]$ temos $x + 2 \geqslant x^2$. Então,

$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Gráfico 4.18

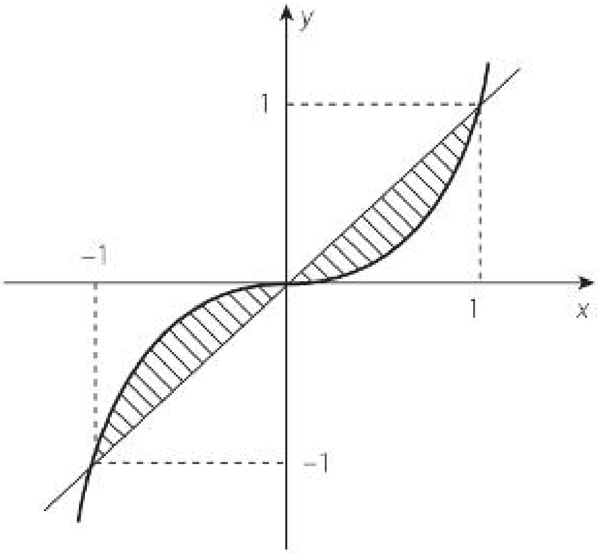


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 275).

b. Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas e $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa –1, 0 e 1 (ver Gráfico 4.19).

Gráfico 4.19



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 276).

No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e, no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$. Logo,

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

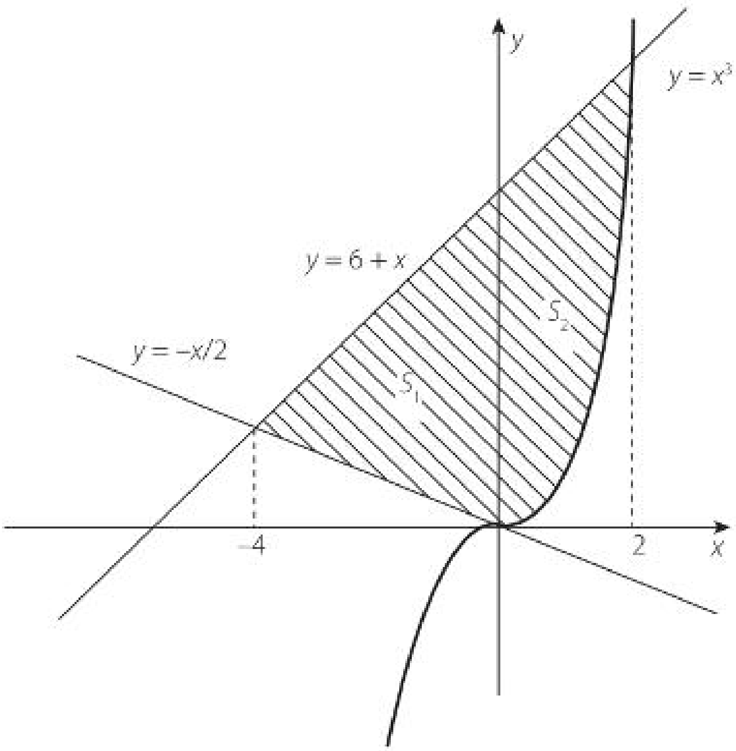
$$A = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

pois a área à esquerda do eixo dos y é igual à que se encontra à sua direita.

c. Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Devemos dividir a região em duas sub-regiões S_1 e S_2 (ver Gráfico 4.20).

Gráfico 4.20



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 277).

No intervalo [–4, 0], a região está compreendida entre os gráficos de $y = \dfrac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo [0, 2], está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de A_1: No intervalo [–4, 0], $6 + x \geqslant -\dfrac{x}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-4}^{0} [(6+x) - (-x/2)]\,dx \\ &= \int_{-4}^{0} \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx \\ &= \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{0} \\ &= 12 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Cálculo de A_2: No intervalo [0, 2], $6 + x \geqslant x^3$. Então,

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{2} [(6+x) - x^3]\,dx \\ &= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} \\ &= 10 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$ u.a.

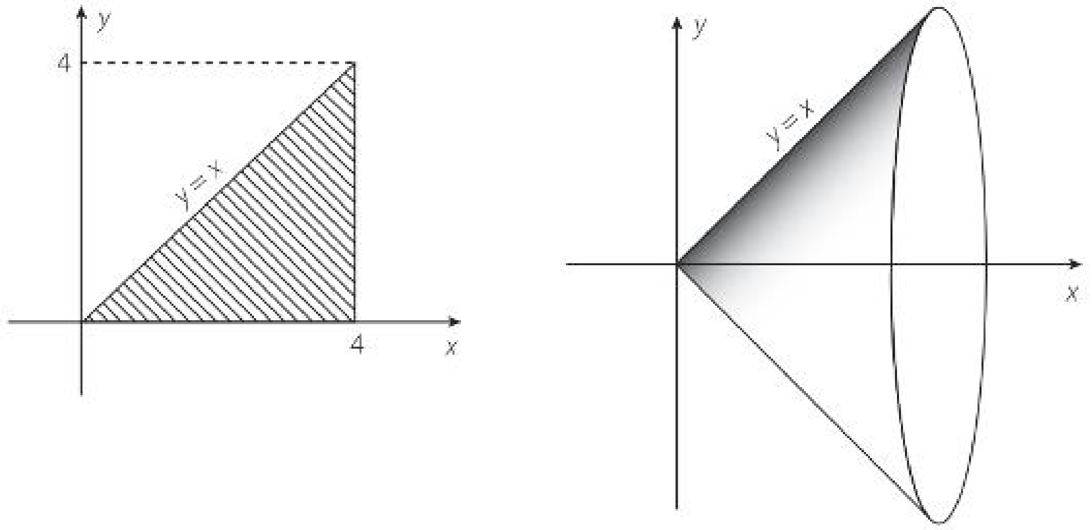
Cálculo de volumes

Volume de um sólido de revolução

Fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido. Este é chamado de *sólido de revolução*. A reta ao redor da qual a região gira é chamada *eixo de revolução*.

Por exemplo, fazendo a região limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$ girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cone. Comprove observando o Gráfico 4.21:

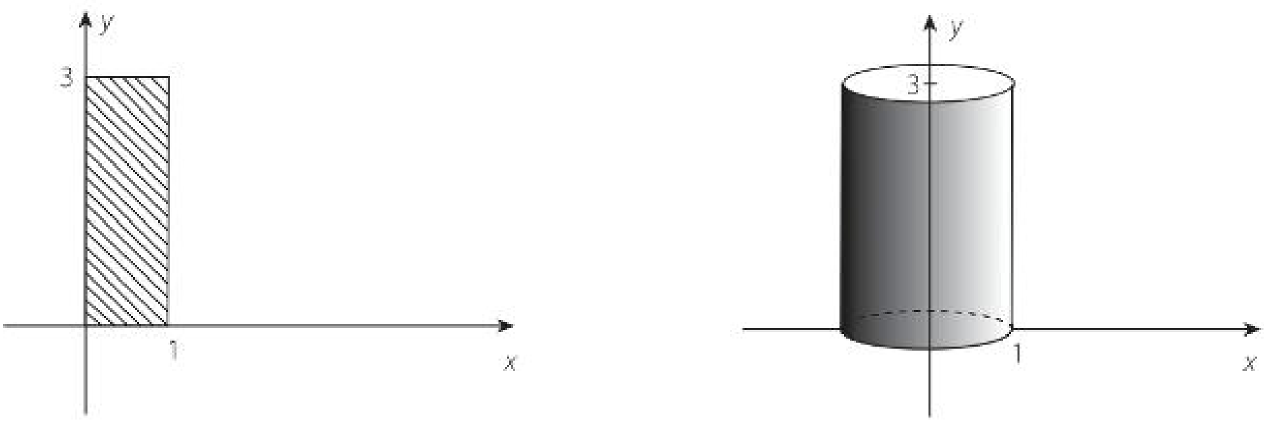
Gráfico 4.21



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 346).

Se o retângulo delimitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 3$ girar em torno do eixo dos y, temos um cilindro. Veja:

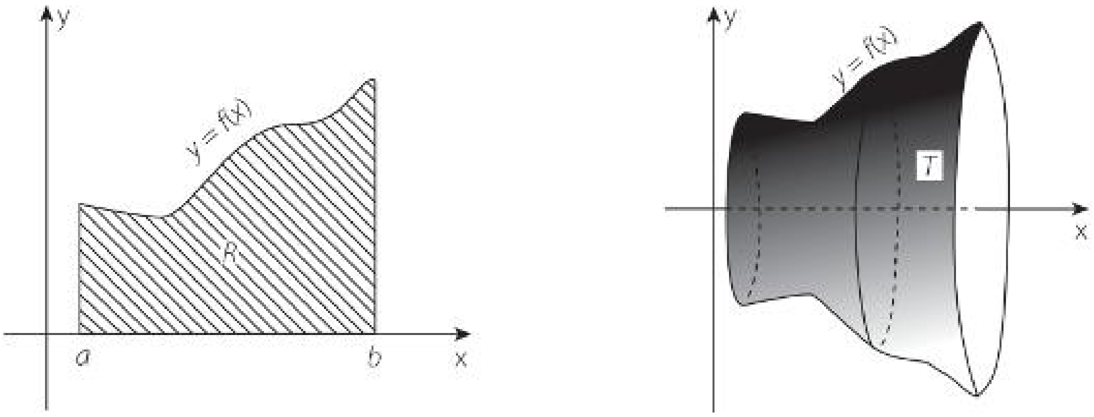
Gráfico 4.22



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 346).

Agora, considere o problema de definir o volume do sólido T, gerado pela rotação em torno do eixo dos x, da região plana vista no Gráfico 4.23:

Gráfico 4.23



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 347).

Suponhamos que $f(x)$ é contínua e não negativa em $[a, b]$. Consideremos uma partição de P de $[a, b]$, dada por:

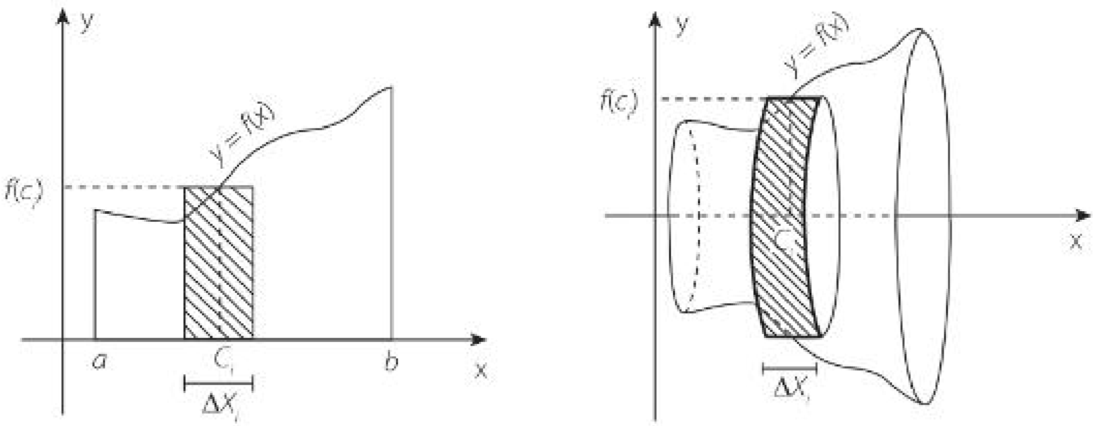
$$a = x_0 < x_1 < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

Seja $\Delta = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i.

Para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um retângulo R_i, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo dos x, o sólido de revolução obtido é um cilindro, tal como demonstrado no Gráfico 4.24:

Gráfico 4.24

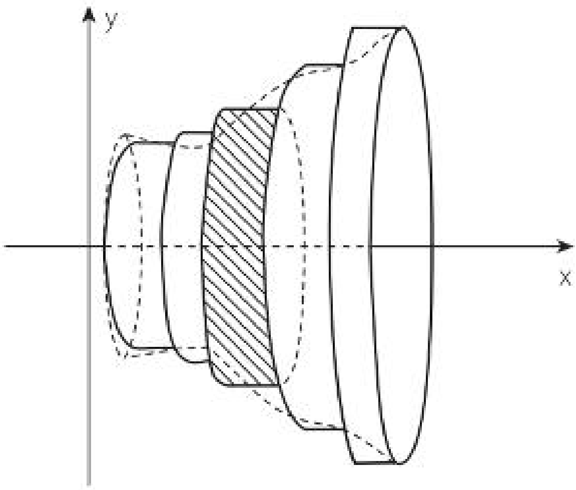


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 347).

Seu volume é dado por: $\pi[f(c_i)]^2\Delta x_i$.

Observe agora a soma dos volumes dos n cilindros, representados nesta figura:

Gráfico 4.25



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 348).

Essa soma, representada por V_n, nos dá uma aproximação do volume do sólido T. Como podemos observar, à medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1, ..., n$, torna-se muito pequeno, a soma dos volumes dos n cilindros aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como o volume do sólido T.

Definição

Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo dos x, é definido por:

$$V = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

A soma que aparece nessa fórmula é uma soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua, o limite existe. Então, pela definição da integral definida, temos:

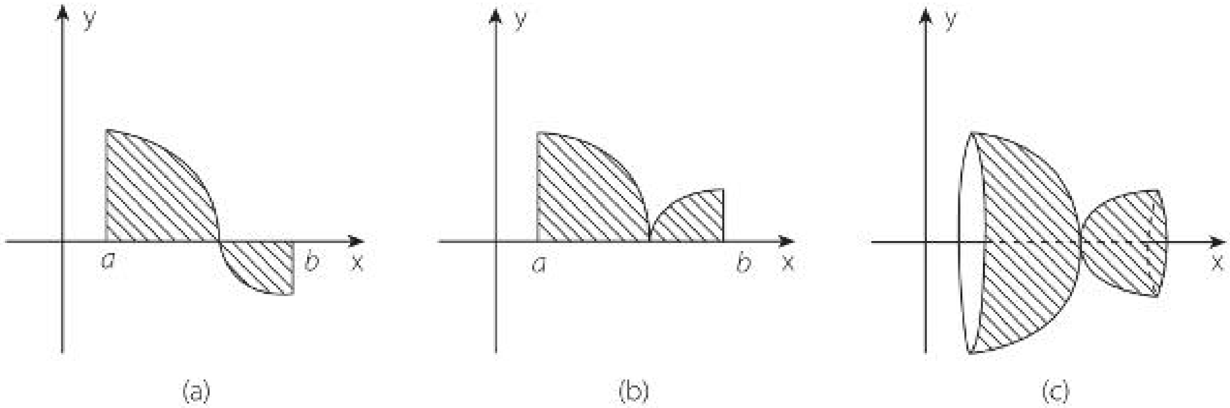
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Essa segunda fórmula pode ser generalizada para outras situações:

1. A função $f(x)$ é negativa em alguns pontos de $[a, b]$

O Gráfico 4.26 (c) mostra o sólido gerado pela rotação do Gráfico 4.26 (a), ao redor do eixo dos x, que coincide com o sólido gerado pela rotação, ao redor do eixo dos x, da região sob o gráfico da função $|f(x)|$ de a até b (ver Gráfico 4.26 (b)). Como $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, a segunda fórmula permanece válida neste caso.

Gráfico 4.26



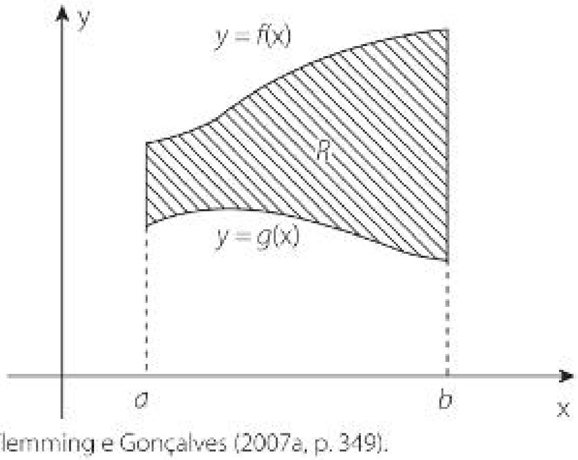
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 348).

2. A região R está entre os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ de a até b, como mostra o Gráfico 4.27

Supondo $f(x) \geqslant g(x), \forall x \in [a, b]$, o volume do sólido T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x, é dado por:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$

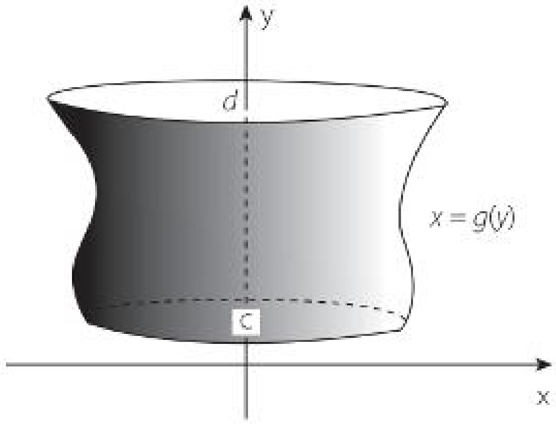
Gráfico 4.27



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 349).

3. Em vez de girar ao redor do eixo dos *x*, a região *R* gira em torno do eixo dos *y* (ver Gráfico 4.28)

Gráfico 4.28



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 349).

Nesse caso, temos:

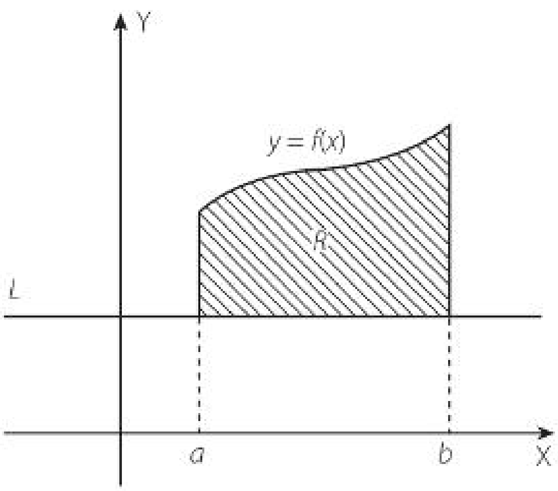
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

4. A rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados

Se o eixo de revolução for a reta $y = L$ (ver Gráfico 4.29), temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx$$

Gráfico 4.29

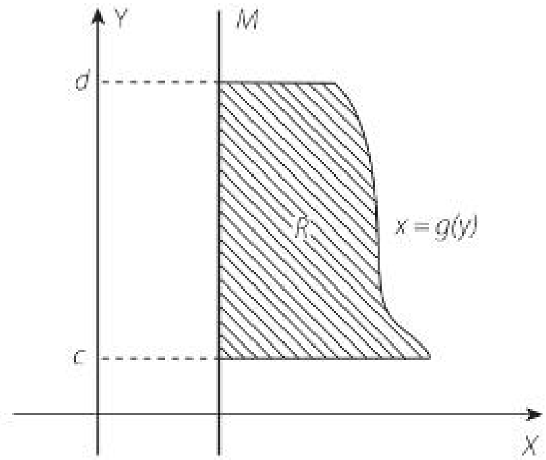


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 349).

Se o eixo de revolução for a reta $x = M$ (ver Gráfico 4.30), temos:

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy$$

Gráfico 4.30



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 350).

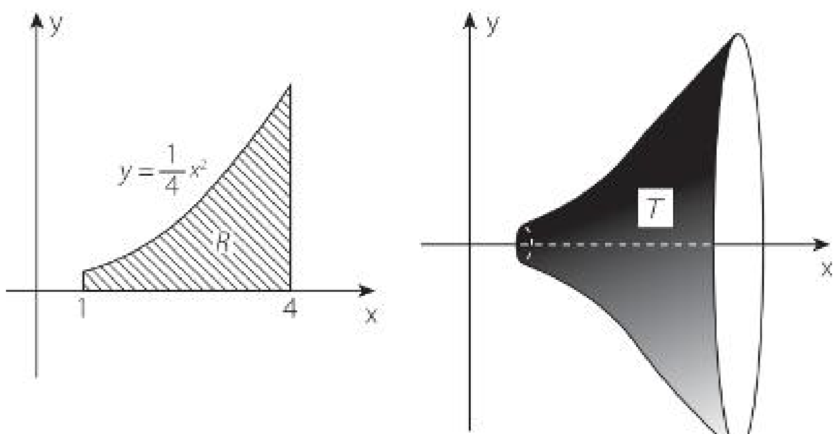
Exemplos

a. A região R, limitada pela curva $y = \frac{1}{4}x^2$, o eixo dos x e as retas $x = 1$ e $x = 4$, gira em torno do eixo dos x.

Encontrar o volume do sólido de revolução gerado.

No Gráfico 4.31 vemos a região R e o sólido T gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

Gráfico 4.31



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 350).

Aplicando a fórmula (2), temos:

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_1^4$$

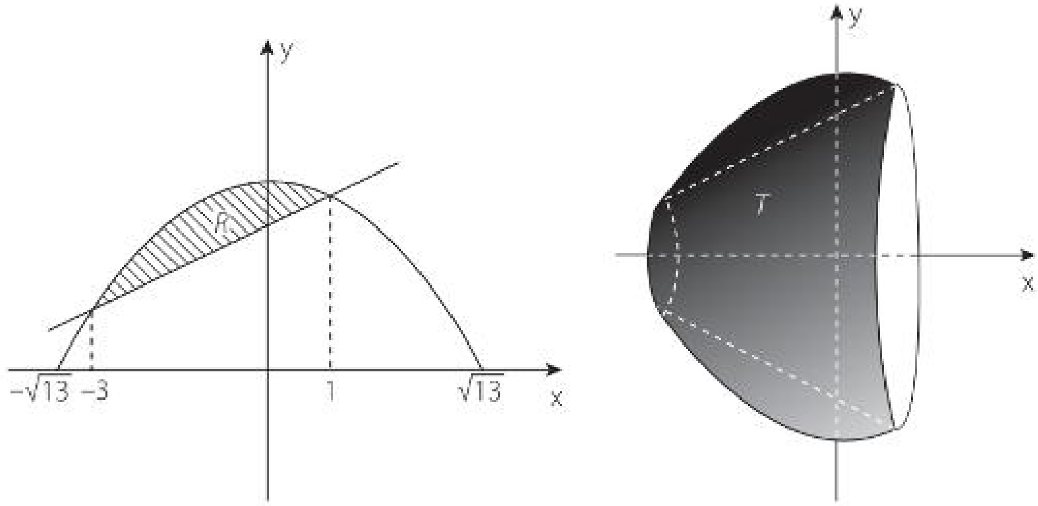
$$= \frac{\pi}{80}[4^5 - 1^5]$$

$$= \frac{1.023}{80}\pi \text{ unidades de volume (u.v.)}$$

b. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada pela parábola $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$ e pela reta $y = \frac{1}{2}(x + 5)$.

No Gráfico 4.32 podemos ver a região R e o sólido T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

Gráfico 4.32



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 351).

Aplicando a fórmula (3), vem

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left\{\left[\frac{1}{4}(13 - x^2)\right]^2 - \left[\frac{1}{4}(x + 5)\right]^2\right\} dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{1} \left[\frac{1}{16}(169 - 26x^2 + x^4) - \frac{1}{4}(x^2 + 10x + 25\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_{-3}^{1} (69 - 40x - 30x^2 + x4)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[69x - 20x^2 - 10x^3 + \frac{x^5}{5} \right] \Bigg|_{-3}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{16} \left[69 - 20 - 10 + \frac{1}{5} + 207 + 180 - 270 + \frac{243}{5} \right]$$

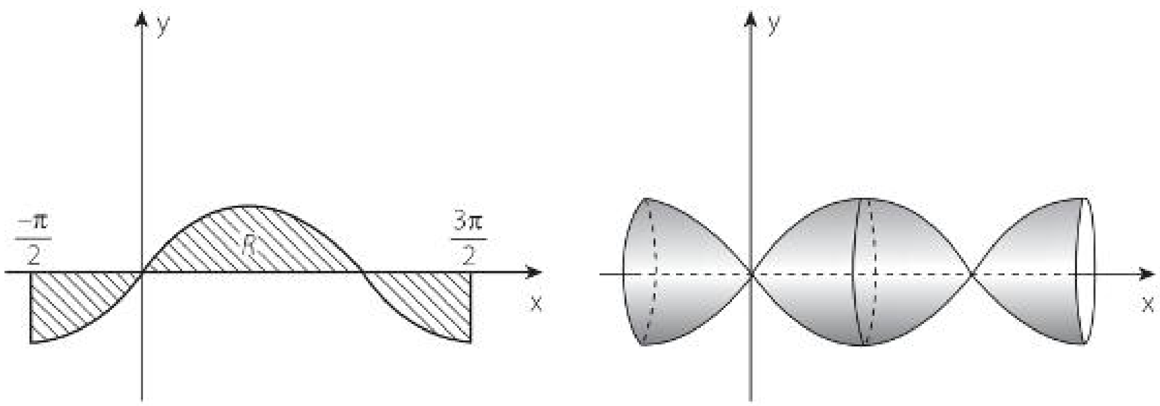
$$= \frac{1.024\pi}{80}$$

$$= 24{,}05 \text{ u.v.}$$

c. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região entre o gráfico da função $y = \text{sen } x$ e o eixo dos x, de $\frac{-\pi}{2}$ até $\frac{3\pi}{2}$.

O Gráfico 4.33 mostra a região R e o sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo dos x.

Gráfico 4.33



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 351).

Aplicando a fórmula (2), temos:

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (\text{sen } x)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\frac{3\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} + 0\right)$$

$$= \pi^2 \text{ u.v.}$$

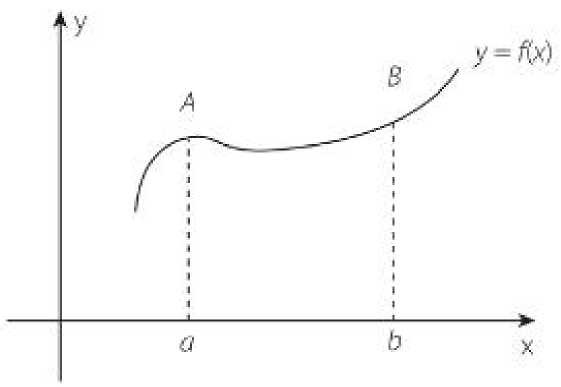
Outras aplicações da integral definida

O problema do comprimento de arcos

No tema anterior, estudamos a integral definida e sua aplicação no cálculo de áreas de regiões planas e volumes. Agora, veremos sua aplicação no cálculo do comprimento de arcos de áreas de curvas planas usando sua equação cartesiana.

A representação gráfica de uma função $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$ pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção da curva do ponto A $(a, f(a))$ ao ponto B $(b, f(b))$ é chamada de arco. Queremos encontrar um número s que, intuitivamente, entendemos ser o comprimento de tal arco. Observe:

Gráfico 4.34



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 335).

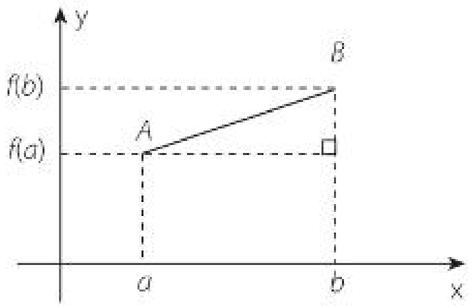
Exemplos

Caso 1. O gráfico de $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$ é um segmento de reta.

Neste caso, observando o Gráfico 4.35, vemos que:

$$s = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$$

Gráfico 4.35



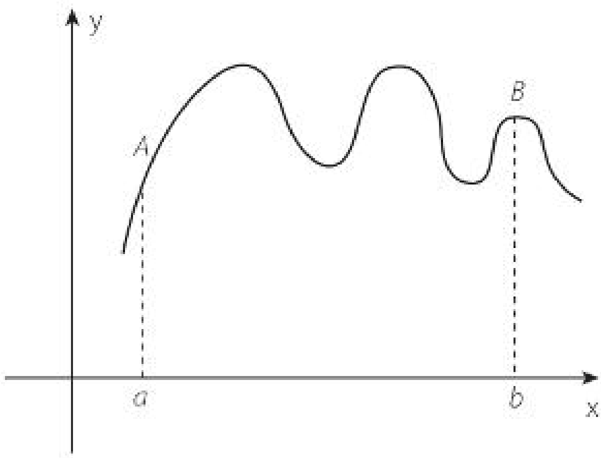
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 335).

Caso 2. O gráfico de $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$ é uma curva qualquer.

Como nos ensina a geometria, o perímetro de uma circunferência é definido como o limite dos perímetros dos polígonos regulares nele inscritos. Para outras curvas, podemos proceder de maneira parecida.

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f é contínua e derivável em $[a, b]$. Queremos determinar o comprimento do arco da curva C, de A até B. Para melhor compreensão, observe o Gráfico 4.36:

Gráfico 4.36



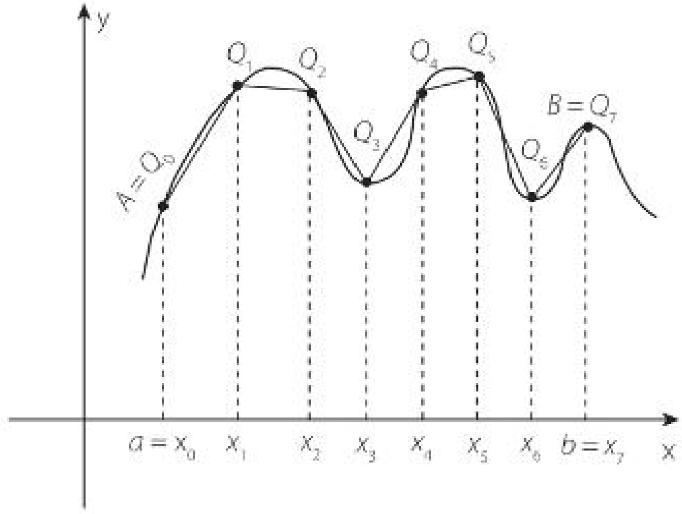
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 336).

Seja P uma partição de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

Sejam Q_0, Q_1, ... Q_n os correspondentes pontos sobre a curva C. Unindo os pontos Q_0, Q_1, ... Q_n, obtemos uma poligonal cujo comprimento nos dá uma aproximação do comprimento do arco da curva C, de A até B. O Gráfico 4.37 mostra essa poligonal para $n = 7$. Veja:

Gráfico 4.37



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 336).

O comprimento da poligonal, expresso por l_n, é dado por:

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Como f é derivável em $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ... n$, e escrever $f(x_1) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$, onde c_i é um ponto do intervalo (x_{i-1}, x_i). Substituindo esse intervalo em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

A soma que aparece em (2) é uma soma de Riemann da função

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Podemos observar que à medida que n cresce muito e cada Δx_i, $i = 1, 2, ..., n$, torna-se muito pequeno, aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como o comprimento do arco da curva C, de A até B.

Definição

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua e derivável em $[a, b]$. O comprimento do arco da curva C, do ponto A $(a, f(a))$ ao ponto B $(b, f(b))$, que denotamos por S, é dado por:

$$s = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i$$

se o limite à direita existir.

Pode-se provar que, $f'(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite em (3) existe. Então, pela definição da integral definida, temos:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

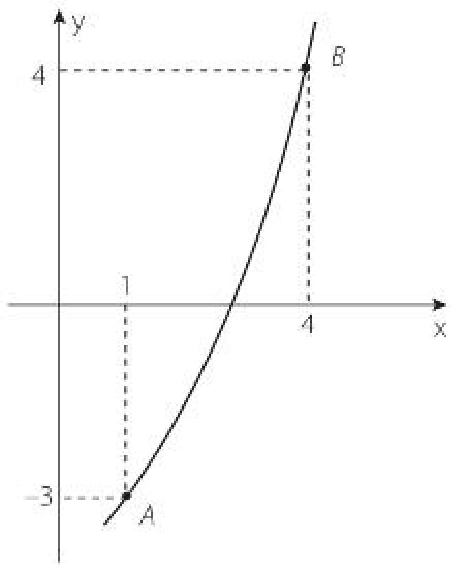
Fique atento

Segundo o Teorema do Valor Médio, se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe então um número c no intervalo (a, b) tal que $f'(c) = f(b) - f(a)/b-a$. Para verificar a prova dessa proposição, consulte a obra *Cálculo A*, de Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves.

Exemplos

a. Calcular o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{3/2} - 4$, de $A(1, -3)$ até $B(4, 4)$.
Solução: o Gráfico 4.38 ilustra este exemplo.

Gráfico 4.38



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 337).

Temos: $y = x^{3/2} - 4$ e $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$. Aplicando (4), vem:

$$\begin{aligned} s &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\right|_1^4 \\ &= \frac{8}{27}10^{3/2} - \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} \\ &= \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27} \text{ unidades de comprimento} \end{aligned}$$

Observamos que poucos exemplos apresentam no integrando uma função tal que a integral possa ser resolvida por um dos métodos apresentados nos capítulos anteriores. Os métodos que dão uma solução aproximada estão além dos objetivos deste livro.

b. Obter uma integral definida que nos dá o comprimento da curva $y = \cos 2x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

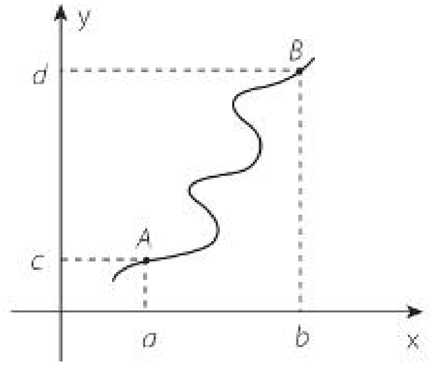
Temos: $y = \cos 2x$ e $y' = -2 \operatorname{sen} 2x$. Portanto,

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen}^2 2x}\ dx$$

Podem ocorrer situações em que a curva C é dada por $x = g(y)$, em vez de $y = f(x)$. Nesse caso, o comprimento do arco da curva C de $A(g(c), c)$ até $B(g(d), d)$ (ver Gráfico 4.39), é dado por:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy$$

Gráfico 4.39



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 338).

c. Calcular o comprimento do arco dado por

$$x = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1, 1 \leqslant y \leqslant 3$$

Neste exemplo,vamos usar (5). Temos:

$$g(y) = \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{6y} - 1 \text{ e } g'(y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
s &= \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{6y^2}\right)^2}\, dy \\
&= \int_1^3 \sqrt{\frac{(9y^4 + 1)^2}{36y^4}}\, dy \\
&= \int_1^3 \frac{9y^4 + 1}{6y^2}\, dy \\
&= \int_1^3 \left(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^{-2}\right) dy \\
&= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^3 \\
&= \frac{118}{9}
\end{aligned}$$

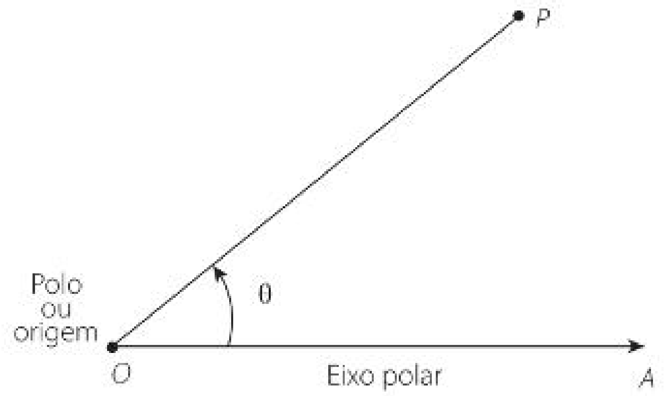
Coordenadas polares

Sistema de coordenadas polares

Além do sistema de coordenadas cartesianas retangulares, é importante também conhecermos o sistema de coordenadas polares. Nesse sistema, as coordenadas consistem em uma distância e em uma medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semirreta fixa.

No Gráfico 4.40, você pode conferir um ponto P em um sistema de coordenadas polares:

Gráfico 4.40



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 360).

O ponto fixo, denotado por O, é chamado de polo ou origem. A semirreta $\overrightarrow{OA}$ é chamada de eixo polar.

O ponto P fica bem determinado pelo par ordenado (r, θ), onde $|r|$ representa a distância entre a origem e o ponto P, e θ representa a medida, em radianos, do ângulo orientado AÔP.

Usaremos as seguintes convenções:

a. Se o ângulo AÔP for descrito no sentido anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, teremos $\theta < 0$.

b. Se $r < 0$, o ponto P estará localizado na extensão do lado terminal do ângulo AÔP.

c. No par ordenado $(0, \theta)$, θ qualquer representará o polo.

O segmento $\overline{OP}$ é, muitas vezes, chamado de raio.

Exemplo

a. Representar em um sistema de coordenadas polares os seguintes pontos:

1. $P_1(2, \pi/4)$

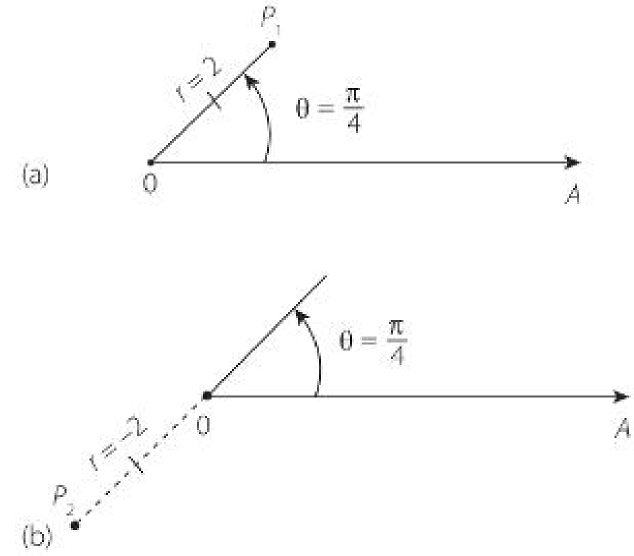
2. $P_2(-2, -\pi/4)$

3. $P_3(-2, -\pi/4)$

4. $P_4(2, -\pi/4)$

O Gráfico 4.41 (a) e (b) representa os pontos P_1 e P_2, respectivamente.

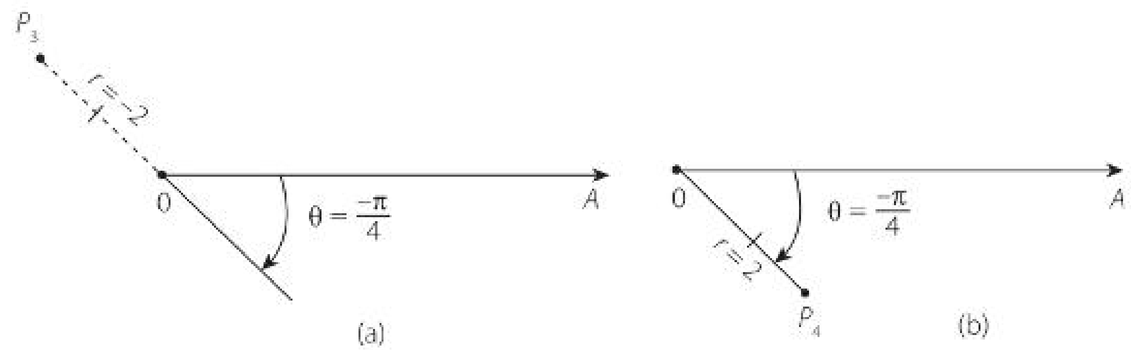
Gráfico 4.41



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 361).

O Gráfico 4.42 (a) e (b) mostra os pontos P_3 e P_4, respectivamente.

Gráfico 4.42

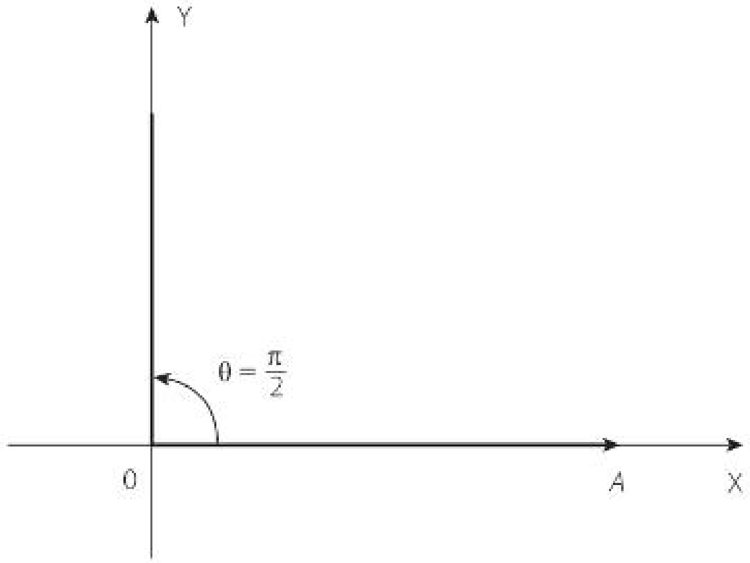


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 361).

Relação entre o sistema de coordenadas cartesianas retangulares e o sistema de coordenadas polares

Em algumas situações, precisamos nos referir a ambos os sistemas de coordenadas de um determinado ponto P. Para isso, devemos fazer coincidir os dois sistemas. O eixo polar deverá coincidir com o eixo positivo dos x e o raio para o qual $\theta = \pi/2$ com o eixo positivo dos y. Veja o Gráfico 4.43:

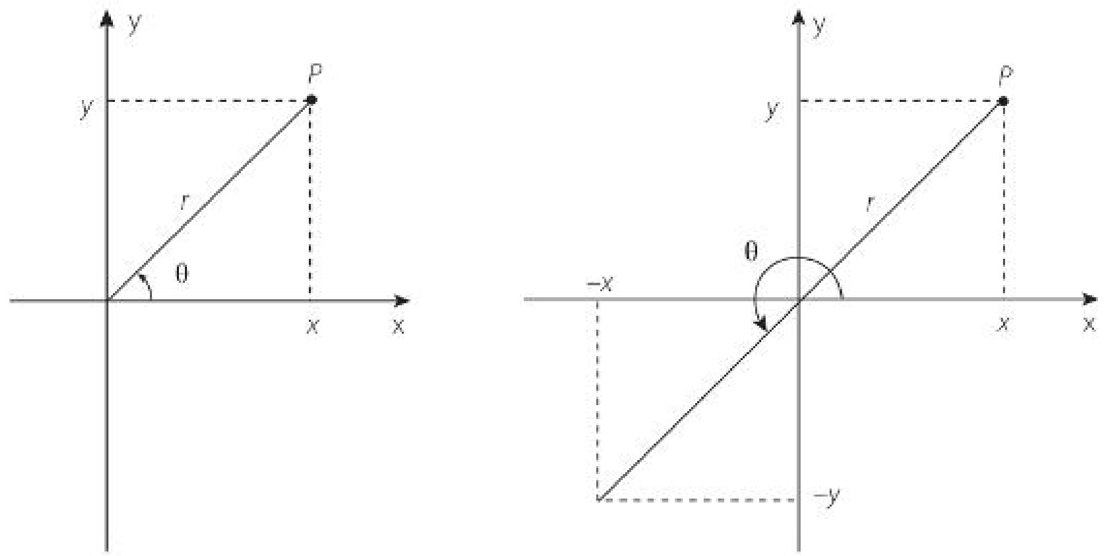
Gráfico 4.43



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 362).

Supondo que P seja um ponto com coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), vamos analisar o caso em que o ponto P está no primeiro quadrante. A seguir, você pode conferir a ilustração desse caso para $r > 0$ e $r < 0$ (Gráfico 4.44 (a) e (b), respectivamente):

Gráfico 4.44



(a) $r > 0$ (b) $r < 0$

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 363).

Podemos observar que:

a. Para $r > 0$, temos $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ e $\text{sen}\ \theta = \dfrac{y}{r}$

b. Para $r < 0$, temos $\cos\theta = \dfrac{-x}{-r} = \dfrac{x}{r}$ e $\text{sen}\ \theta = \dfrac{-y}{-r} = \dfrac{y}{r}$

Portanto:

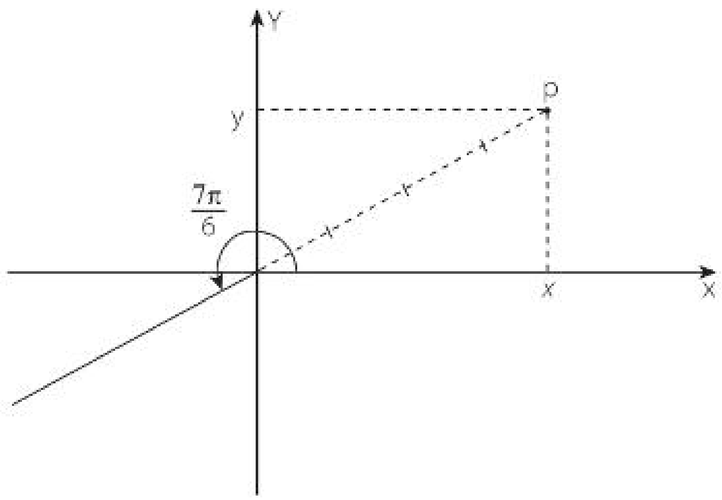
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Exemplos

a. Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são $(-4, 7\pi/6)$.

Solução: o Gráfico 4.45 ilustra este ponto.

Gráfico 4.45



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 364).

Temos:

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$= -4\cos\frac{7\pi}{6} \qquad\qquad = -4\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}$$

$$= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad\qquad = -4\left(-\frac{1}{2}\right)$$

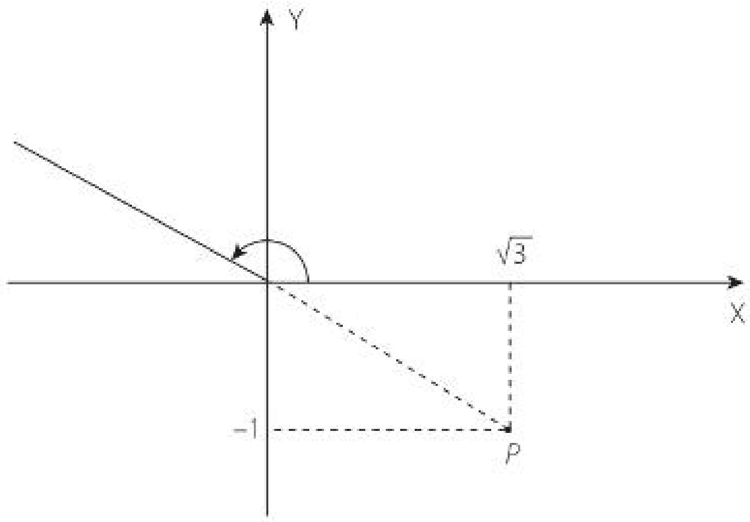
$$= 2\sqrt{3} \qquad\qquad = 2$$

Portanto, $(2\sqrt{3}, 2)$ são as coordenadas cartesianas do ponto dado.

b. Encontrar (r, θ), supondo $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$ para o ponto P, cujas coordenadas cartesianas são $(\sqrt{3}, -1)$.

Solução: o Gráfico 4.46 ilustra o ponto P.

Gráfico 4.46



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 364).

Temos:

$$r = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= -\sqrt{3 + 1}$$

$$= -2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Portanto, } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Gráficos de equações em coordenadas polares

O gráfico de $F(r, \theta) = 0$ é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação. É comum apresentarmos a equação em uma forma explícita, isto é: $r = f(\theta)$.

Na prática, os seguintes procedimentos ajudam na construção do gráfico:

a. Calcular os pontos máximos e/ou mínimos.

b. Encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pelo polo – ou seja, pela origem.

c. Verificar simetrias. Se:

- a equação não se altera quando substituímos r por $-r$, existe simetria em relação à origem;
- a equação não se altera quando substituímos θ por $-\theta$, existe simetria em relação ao eixo polar – ou eixo dos x;
- a equação não se altera quando substituímos θ por $\pi - \theta$, existe simetria em relação ao eixo $\theta = \pi/2$ – eixo dos y.

Exemplo

a. Esboçar a curva $r = 2\ (1 - \cos\theta)$.

Como a equação não se altera ao substituirmos θ por $-\theta$, isto é,

$$r = 2\ (1 - \cos\theta) = 2\ (1 - \cos(-\theta))$$

concluímos que existe simetria em relação ao eixo polar. Logo, basta analisar valores de θ tais que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, encontramos um ponto de máximo $(4, \pi)$ e um ponto de mínimo $(0, 0)$. Observamos que, considerando $r = f(\theta)$, os pontos de máximos e mínimos podem ser encontrados.

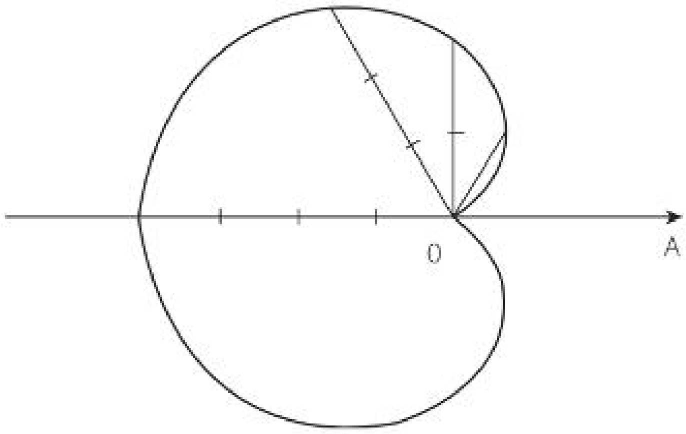
A Tabela 4.1 mostra alguns pontos da curva, cujo esboço é mostrado no Gráfico 4.47.

Tabela 4.1

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	3
π	4

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 365).

Gráfico 4.47



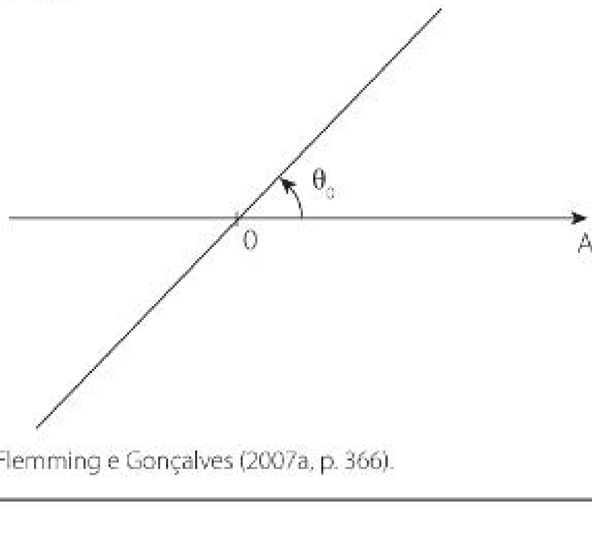
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 365).

Algumas equações em coordenadas polares e seus respectivos gráficos

1. Equações de retas

a. $\theta = \theta_0$ ou $\theta_0 \pm n\pi$, $n \in Z$ é uma reta que passa pelo polo e faz um ângulo θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar. Observe o Gráfico 4.48:

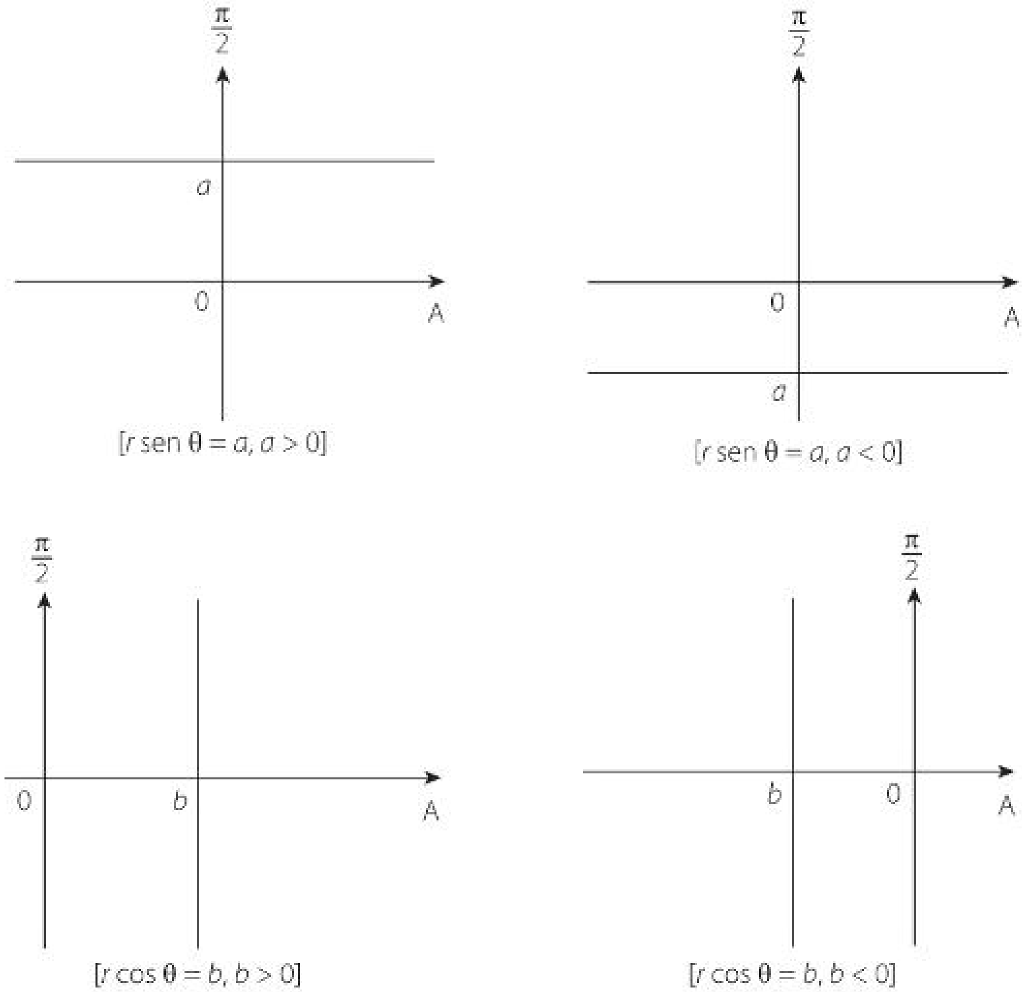
Gráfico 4.48



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 366).

b. R sen $\theta = a$ e $r \cos \theta = b$, $a, b \in R$ são retas paralelas aos eixos polar e $\pi/2$, respectivamente.

Gráfico 4.49

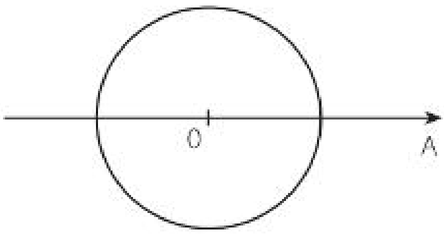


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 367).

2. Circunferências

a. $r = c$, $c \in R$ é uma circunferência centrada no polo e raio $|c|$. Observe:

Gráfico 4.50



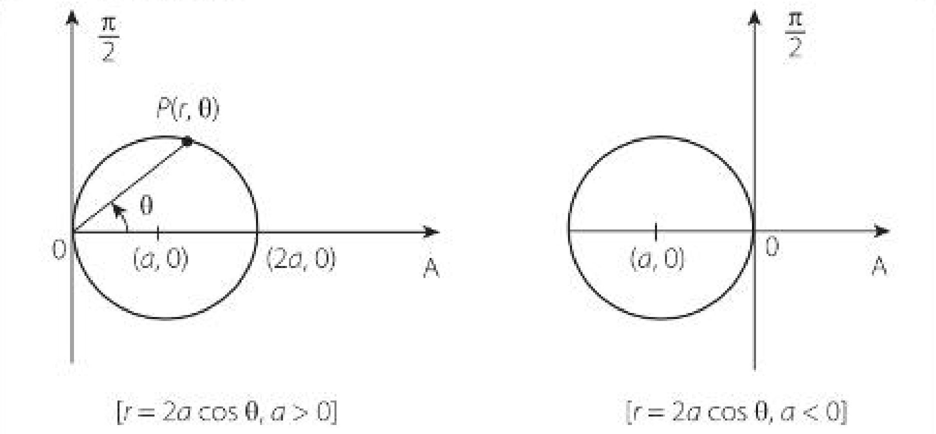
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 367).

b. $r = 2a \cos \theta$ é uma circunferência de centro no eixo polar, tangente ao eixo $\theta = \pi/2$:

- se $a > 0$, o gráfico está à direita do polo;
- se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do polo.

Observe o Gráfico 4.51 e comprove:

Gráfico 4.51



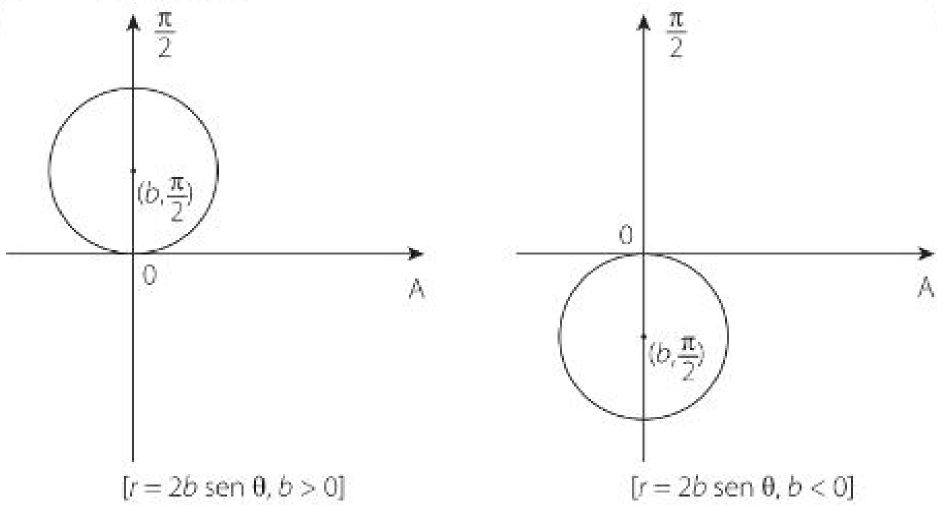
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 367).

c. $r = 2b$ sen θ é uma circunferência de centro no eixo $\pi/2$ e que tangencia o eixo polar:

- se $b > 0$, o gráfico está acima do polo;
- se $b < 0$, o gráfico está abaixo do polo.

Comprove:

Gráfico 4.52



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 368).

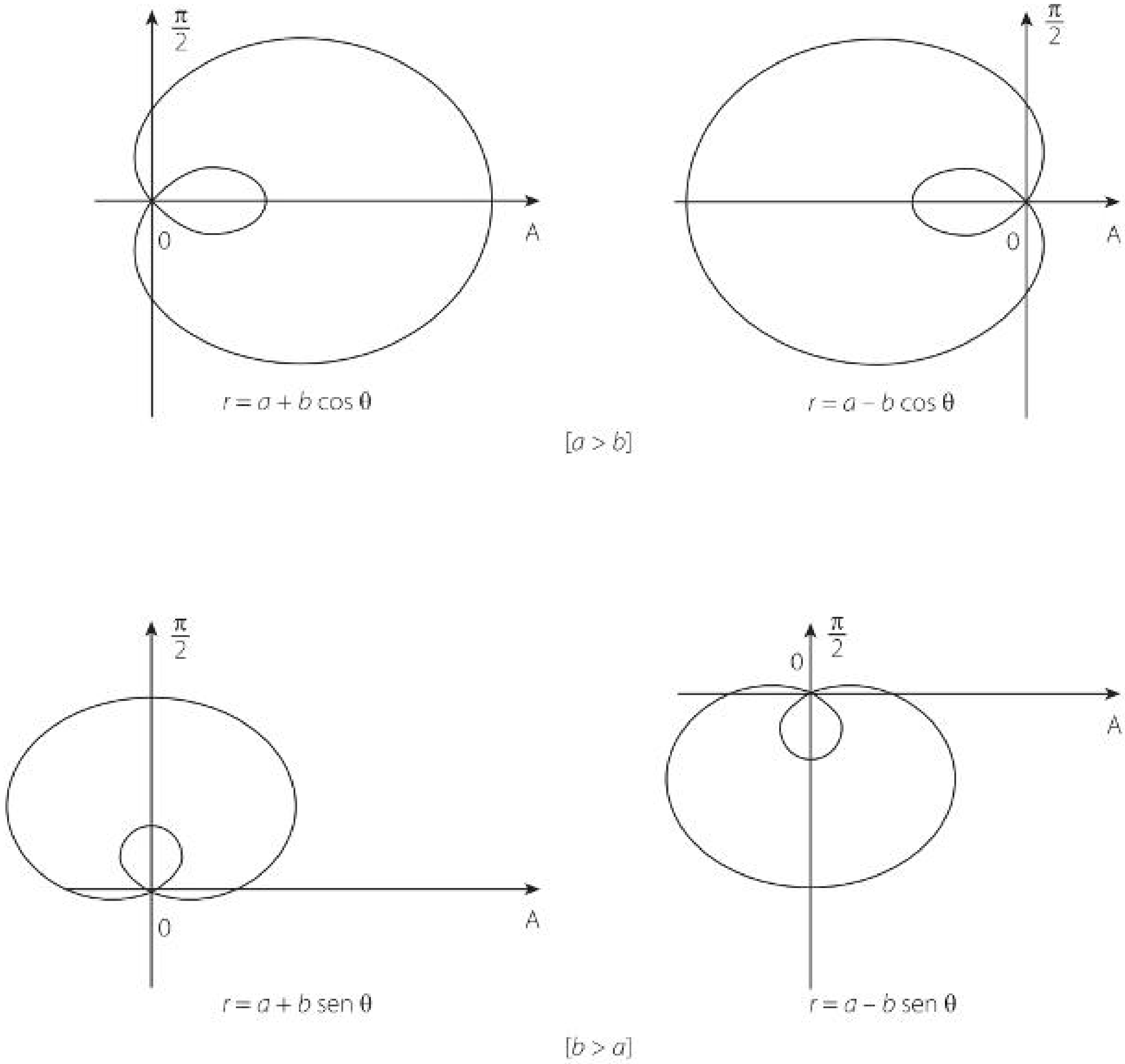
3. Limaçons

$r = a \pm b \cos \theta$ ou $r = a = \pm b \operatorname{sen} \theta$, onde $a, b \in R$ são limaçons.

Temos:

- se $b > a$, então o gráfico tem um laço. Veja o Gráfico 4.53:

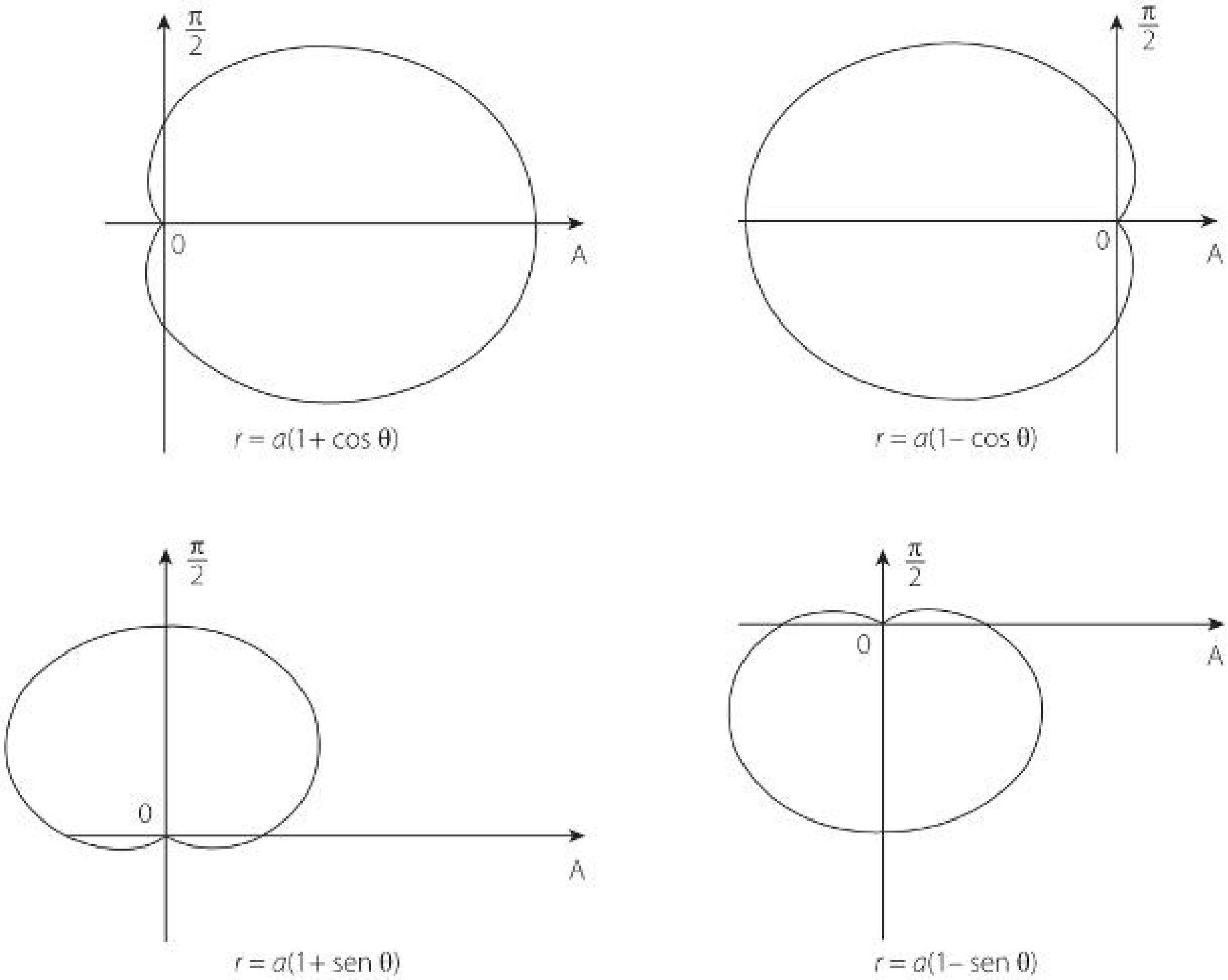
Gráfico 4.53



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 368).

- se $b = a$, então, o gráfico tem o formato de um coração. Por isso, é conhecido como cardioide. Veja:

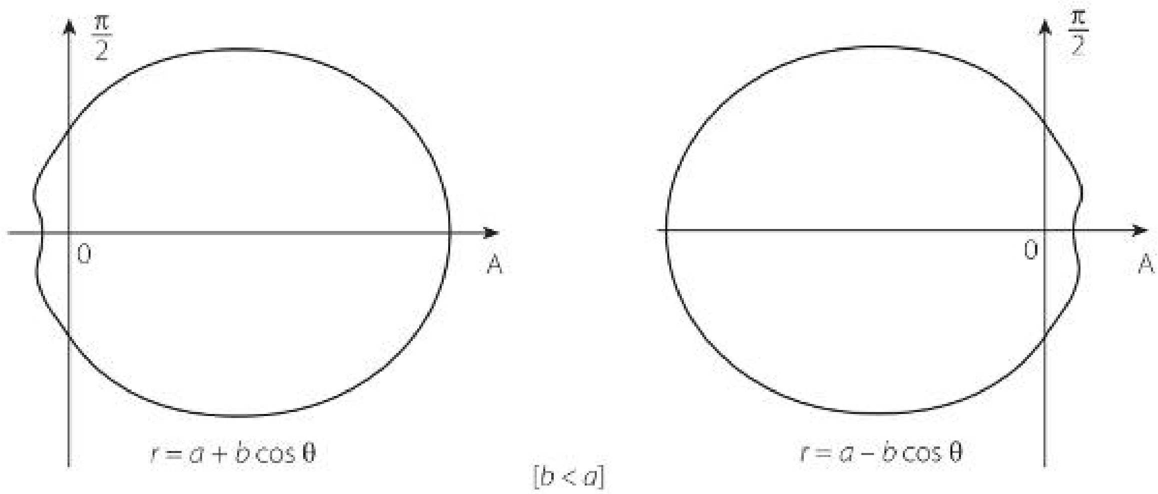
Gráfico 4.54

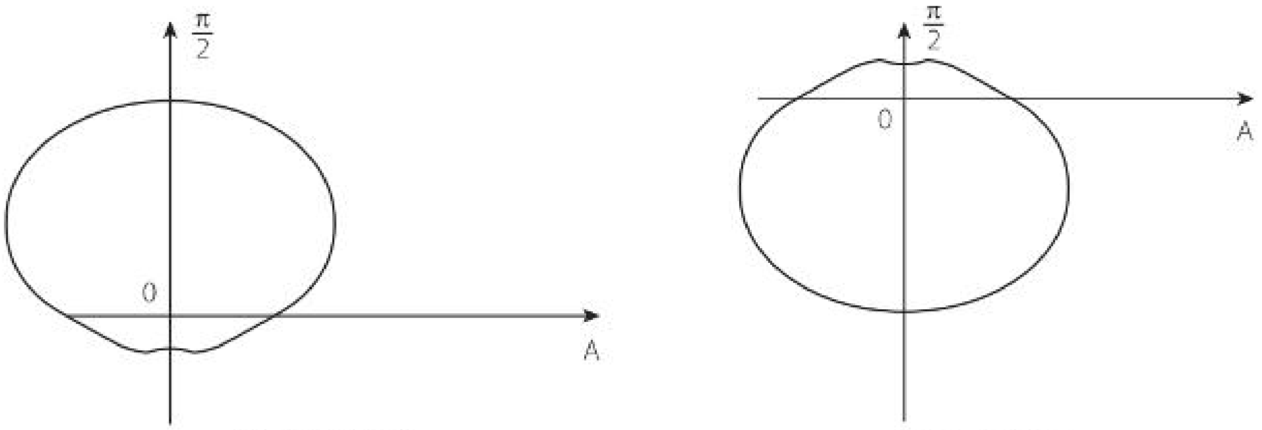


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 369).

- se $b < a$, então, o gráfico não tem laço. Observe:

Gráfico 4.55





$[b < a]$

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 369).

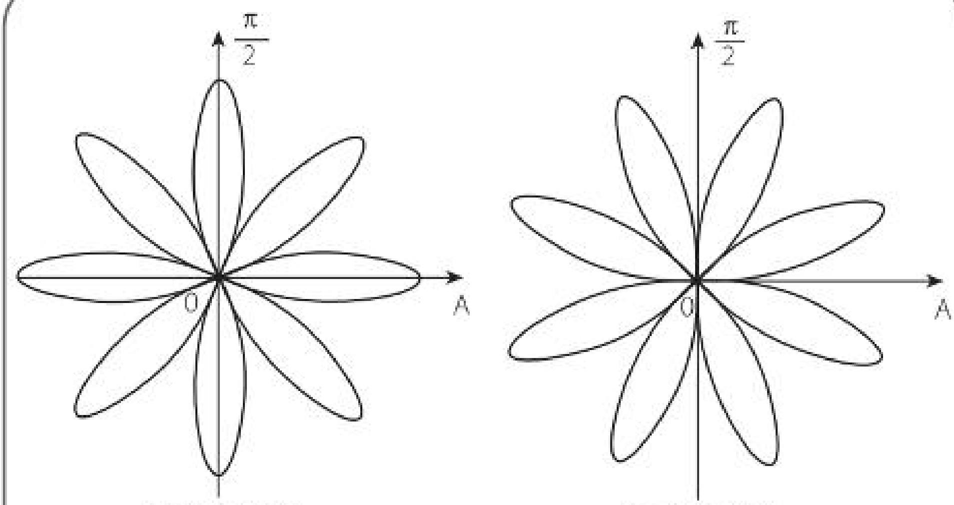
4. Rosáceas

- $r = a \cos n\,\theta$ ou $r = a$ sen θ, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ são rosáceas;
- se n é par, temos uma rosácea de $2n$ pétalas. Veja:

Fique atento

No Gráfico 4.53, usamos $a = 1$ e $b = 2$. No Gráfico 4.54, usamos $a = b = 1$ e no Gráfico 4.55, usamos $a = 3$ e $b = 2$.

Gráfico 4.56



[n par]

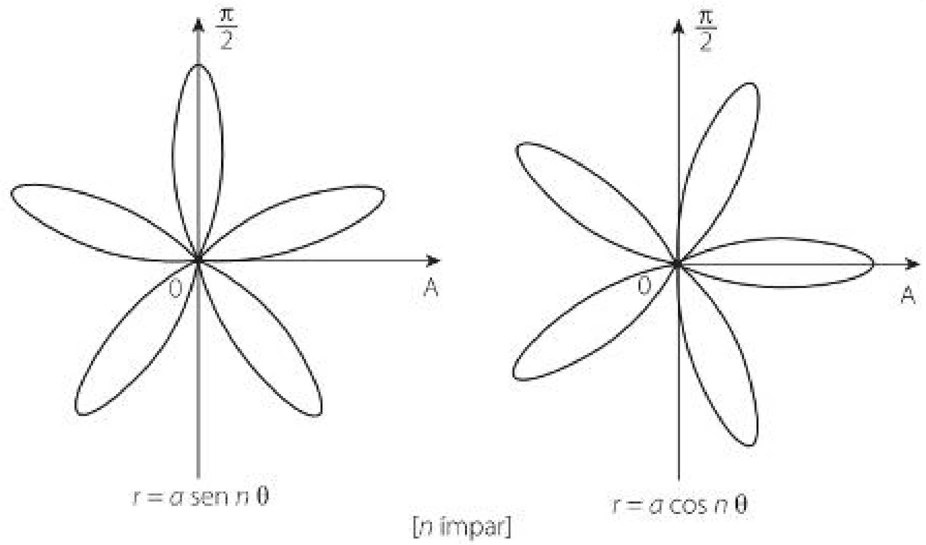
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 370).

- se n é ímpar, temos uma rosácea de n pétalas:

Fique atento

No Gráfico 4.56, usamos $a = 1$ e $n = 4$. No Gráfico 4.57, usamos $a = 1$ e $n = 5$.

Gráfico 4.57

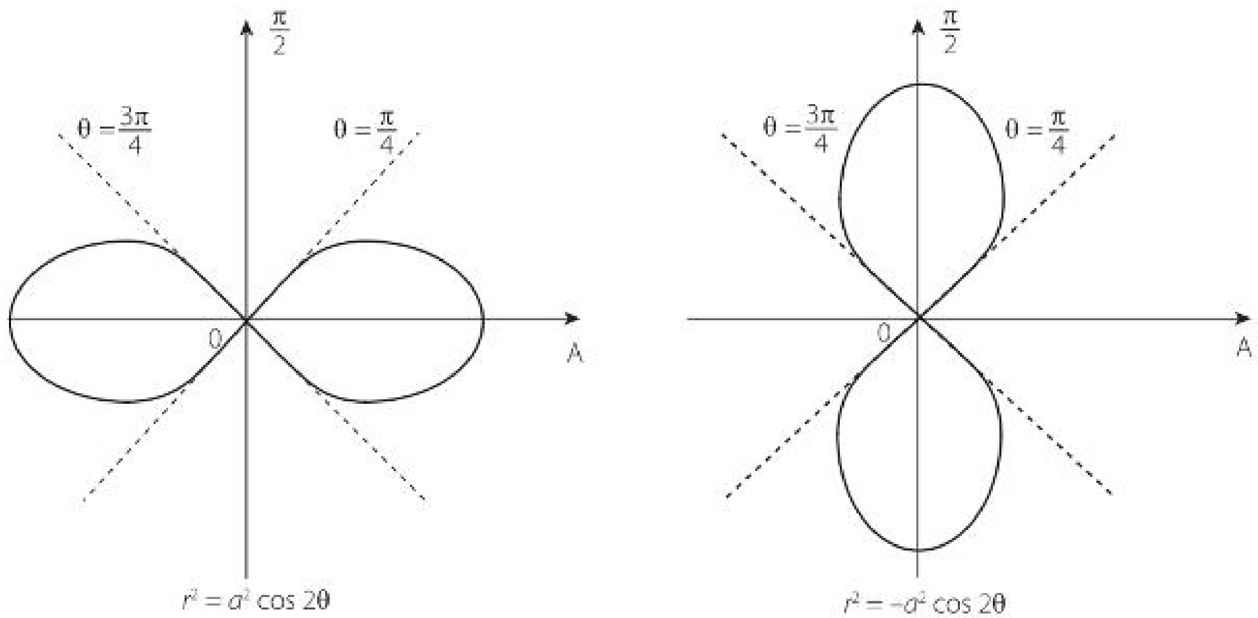


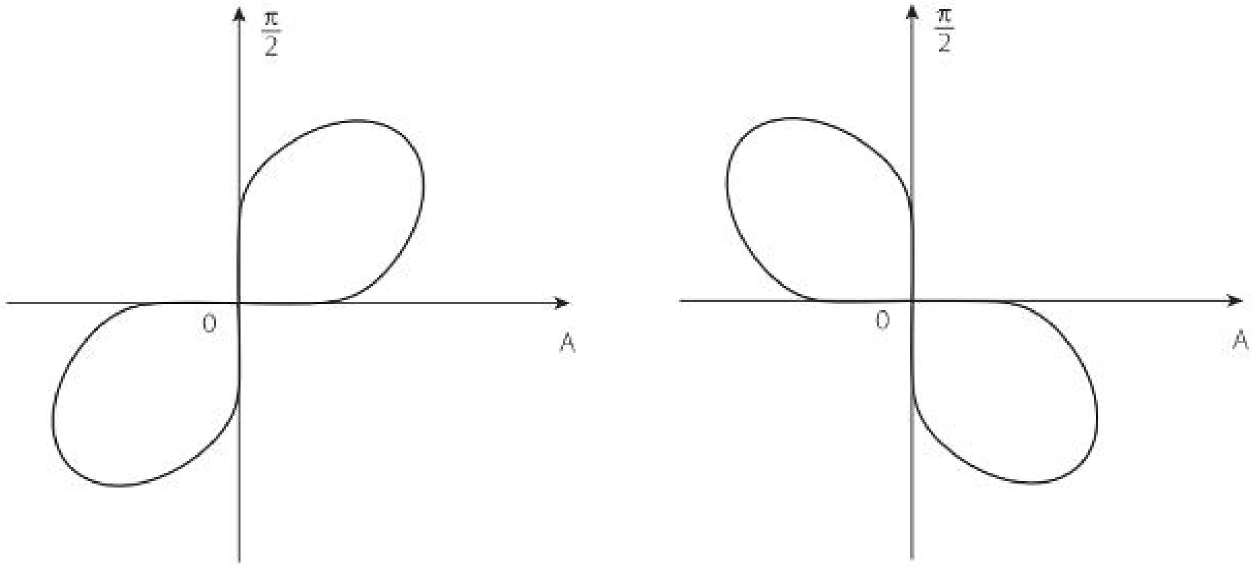
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 370).

5. Lemniscatas

$r^2 = \pm\, a^2 \cos 2\,\theta$ ou $r^2 = \pm\, a^2 \operatorname{sen} 2\,\theta$, onde $a \in R$ são lemniscatas. No Gráfico 4.58, utilizamos $a = 1$. Observe:

Gráfico 4.58





$r^2 = a^2$ sen 2θ $\qquad$ $r^2 = -a^2$ sen 2θ

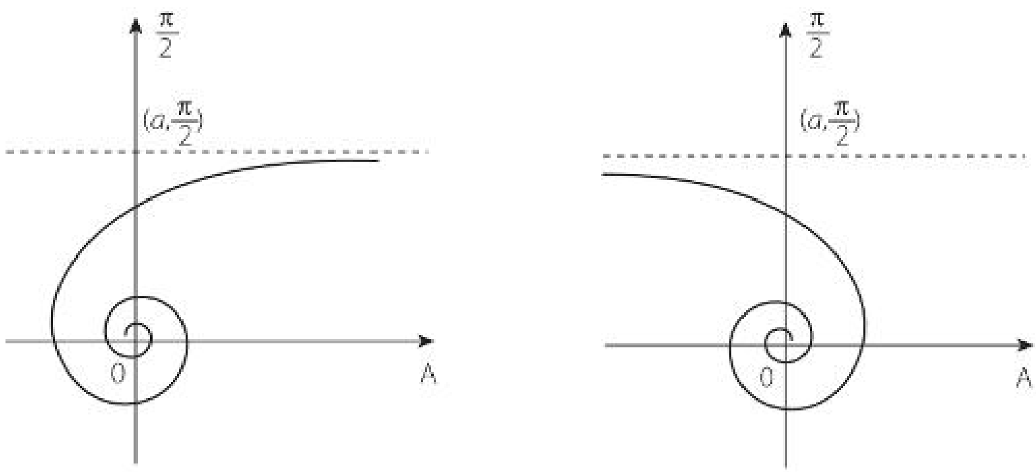
Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 371).

6. Espirais

Existem vários tipos de espiral. As equações a seguir representam algumas delas. Nos gráficos sequentes, você pode observar o aspecto de cada uma delas. Assim:

- **a.** $r\,\theta = a$, $a > 0$ (espiral hiperbólica);
- **b.** $r = a\,\theta$, $a > 0$ (espiral de Arquimedes);
- **c.** $r = e^{a\theta}$ (espiral logarítmica);
- **d.** $r^2 = \theta$ (espiral parabólica).

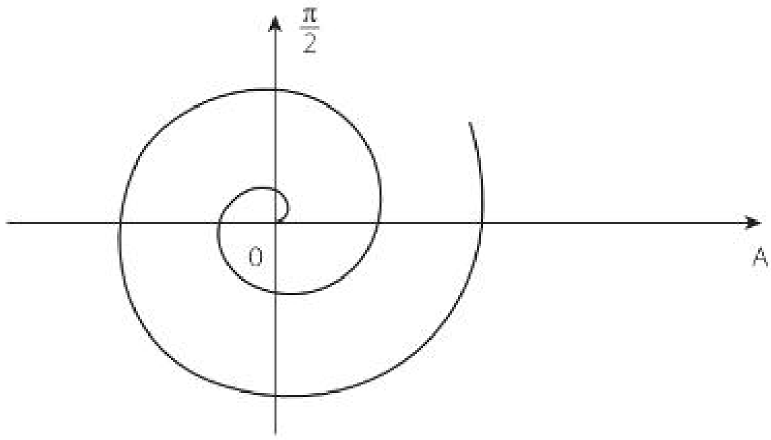
Gráfico 4.59



$r\theta = a(\theta > 0)$ $\qquad$ $r\theta = a(\theta < 0)$

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 372).

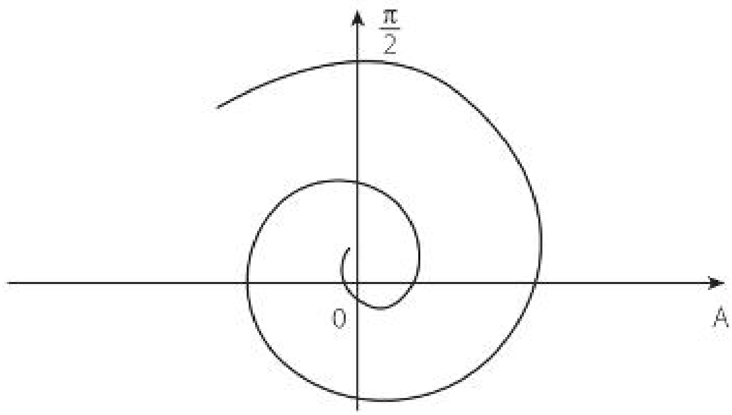
Gráfico 4.60



$r = a\theta (\theta \geq 0)$

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 372).

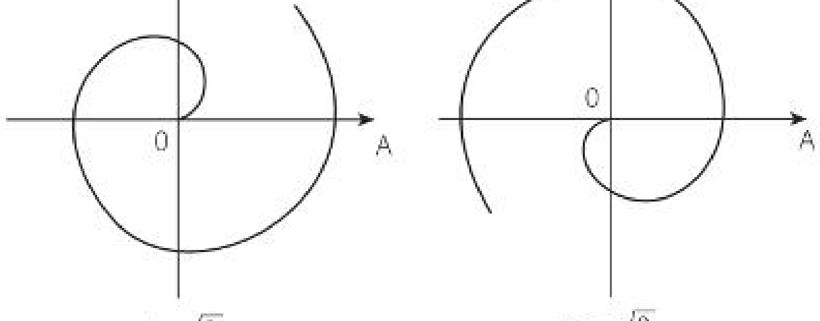
Gráfico 4.61



$r = e^{a\theta}$

Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 372).

Gráfico 4.62



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007a, p. 372).

Exercícios de fixação

Nos exercícios de 1 a 10, calcule a integral indefinida:

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \cos x \cdot \cos(\operatorname{sen} x)\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\,dx$

4. $\displaystyle\int x \operatorname{tg}(x^2+1)\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg}(1/x)}{x^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int \sec(x+1)\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$

9. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\operatorname{sen} x+\operatorname{tg} x}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+5\cos x}$

11. Verificar se a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{5x}\,dx$ converge. Em caso positivo, determinar seu valor.

12. Dar um exemplo de uma função f, tal que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx$ existe, mas a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

13. Calcule a integral indefinida:
   - **a.** $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2+x}\,dx$
   - **b.** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}\,dx$
   - **c.** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$
   - **d.** $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2x^3-x^2-2x+1}\,dx$

14. Nos exercícios a seguir, encontre a área da região limitada pelas curvas dadas:
   - **a.** $x = 1/2, x = \sqrt{y}$ e $y = -x+2$
   - **b.** $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$
   - **c.** $y = 5 - x^2$ e $y = x+3$
   - **d.** $y = \frac{1}{6}x^2$ e $y = 6$

Panorama

No artigo "Cálculo Diferencial e Integral I: superando barreiras para promover a aprendizagem", Azambuja, Müller e Gonçalves partem da constatação de que as disciplinas de matemática são responsáveis por altos índices de reprovação e evasão nas Instituições de Ensino Superior (IES) no país. Para além da dificuldade inerente às disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I, as autoras destacam o déficit de aprendizagem do aluno no Ensino Médio. Trata-se de uma situação que, ao invés de melhorar, vem demonstrando piora nos últimos anos. Como, então, garantir que tais alunos aprendam Cálculo?

> Como demonstram as autoras, docentes da Faculdade de Matemática (FAMAT) deram início, em 2006, a um projeto de atendimento especial aos alunos dessas disciplinas. Um grupo de monitores acompanha os alunos com dificuldades em horário fora da grade curricular. Segundo elas, projetos de ensino paralelos vêm se mostrando boas alternativas no sentido de sanar a defasagem na aprendizagem de conteúdos básicos. Desde sua criação, alguns resultados já podem ser percebidos, demonstrando assim que grande parcela da dificuldade dos alunos em aprender Cálculo pode ser atribuída à deficiência do ensino de matemática no Ensino Médio. Nesse sentido, a solução parece ser "[...] implementar ações visando reduzir o desnível existente entre a bagagem de matemática que o aluno traz do Ensino Médio e a que necessita para um bom desempenho em Cálculo" (DOERING; NÁCUL; DOERING, 2004, p. 216).

Fonte: Azambuja, Müller e Gonçalves, 2008.

Exercício

Você tem alguma experiência com projetos de ensino paralelos à grade curricular? Em caso positivo, descreva tal experiência, destacando os avanços obtidos. Em caso negativo, responda: você acredita que tais projetos podem efetivamente levar ao melhor aproveitamento das disciplinas de matemática?

Recapitulando

Iniciamos esta jornada pelo estudo das funções explícitas e implícitas e pelo exame de regras de derivação de funções. A Unidade 1 deste estudo representou, portanto, o primeiro passo da trajetória que nos colocou em meio ao estudo do cálculo integral. Na Unidade 2, avançamos no estudo da função derivada. Conhecemos a regra de L'Hospital e nos iniciamos no estudo da integração, entendendo suas generalidades e propriedades elementares. Na sequência, a Unidade 3 apresentou uma tabela de integrais imediatas que facilitam, em inúmeros casos, o encontro da integral. Vimos também casos especiais de integração, envolvendo potências do seno e do cosseno, assim como a denominada integral de Riemann e o método de integração por partes. No encerramento deste estudo, a Unidade 4 condensou muitos temas. Exploramos o método da integração por substituição trigonométrica, acompanhados de exemplos que demonstraram sua aplicabilidade. Em seguida, conhecemos o método de integração de funções racionais por frações parciais e a integração por substituições especiais. Trata-se de métodos de integração de funções que devem ser do conhecimento do estudante de cálculo, pois constituem ferramentas que permitem a resolução do cálculo. Além disso, incluímos no estudo as chamadas integrais impróprias, cuja definição e demais aspectos você encontra no Tema 4 desta unidade.

Nos temas finais da Unidade 4, além do sistema de coordenadas polares e sua relação com o sistema de coordenadas cartesianas retangulares, bem como o gráfico de equações no sistema de coordenadas polares, estudamos as aplicações da integral definida no cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução, obtidos por meio da rotação em torno de uma reta no plano. Percebemos também a aplicação da integral definida no cálculo do comprimento de arcos de curvas planas usando sua equação cartesiana.

Como em todas as áreas do conhecimento, no cálculo integral precisamos nos exercitar a todo instante. Caso contrário, mesmo o conhecimento mais sólido pode ceder. Por isso, busque sempre resolver exercícios e colocar em prática suas competências!

REFERÊNCIAS

AZAMBUJA, C. R. J.; MÜLLER, M. J.; GONÇALVES, N. S. Cálculo diferencial e integral I: superando barreiras para promover a aprendizagem. In: AUDY, J. L. N; Morosini, M. C. (Orgs.). *Inovação e qualidade na universidade:* boas práticas na PUCRS. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2008. Disponível em: <www.pucrs.br/edipucrs/online/inovacaoequalidade/inovacao/pag23.html>. Acesso em: 31 ago. 2014.

COC Educação. Exponencial e logaritmos. Disponível em: <interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/6348.htm> e <interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/7672.htm>. Acesso em: 9 out. 2014.

DEMANA, Franklin D. et al. *Pré-cálculo*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A*: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007a.

_______. *Cálculo B*: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007b.

MELLO, José Luiz Pastore. Resumão/Matemática: Logaritmo – "para que serve mesmo?". *Folha de S.Paulo*. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u552.shtml>. Acesso em: 25 set. 2014.

THOMAS, George B. *Cálculo*. Vol. 1. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013a.

_______. *Cálculo*. Vol. 2. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

Cálculo Integral

organizadora Daniela Barude Fernandes

ISBN 978-85-430-0976-6

www.pearson.com.br