Moderna PLUS

MATEMÁTICA 2

PAIVA

CADERNO DO ESTUDANTE

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editora Executiva:
Juliane Matsubara Barroso

Exemplar do professor

Moderna PLUS

Coordenação editorial: Juliane Matsubara Barroso
Elaboração de originais: Daniel Teodoro
Edição de texto: Débora Regina Yogui, Fabio Martins de Leonardo, Juliane Matsubara Barroso, Marilu Maranho Tassetto
Assistência editorial: Thais Toldo Antonagi
Preparação de texto: Solange Gonçalves Guerra Martins
Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Homma
Projeto gráfico e capa: Everson de Paula, Marta Cerqueira Leite
Fotos: Carlos Luvizari/CID
Coordenação de produção gráfica: André Monteiro, Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Ilustrações: Faustino, Paulo Manzi
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Elaine Cristina del Nero
Revisão: Alexandra Costa, Fernanda Marcelino, Ivana Alves
Coordenação de pesquisa iconográfica: Ana Lucia Soares
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Marcia Sato
As imagens identificadas com a sigla CID foram fornecidas pelo Centro de Informação e Documentação da Editora Moderna.
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Fabio N. Precendo, Rodrigo Fragoso, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira Silva, Helio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wilson Aparecido Troque
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel Rodrigues
Matemática : Paiva / Manoel Rodrigues Paiva. — 2. ed. — São Paulo : Moderna, 2010 .

Obra em 3v. para alunos do 1º ao 3º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Título

10-07085 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

ISBN 978-85-16-06832-5 (LA)
ISBN 978-85-16-06833-2 (LP)

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2010
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Caro estudante

Este material foi produzido para auxiliá-lo em seus estudos. O objetivo do *Caderno do estudante* é dinamizar o estudo dos principais conceitos do livro-texto com base em resumos, no destaque, na organização desses conceitos e na conexão entre eles, tornando-se, assim, um guia de estudo. Para isso, este caderno está organizado em capítulos correspondentes aos do livro-texto.

No início de cada capítulo deste caderno, há atividades contextualizadas que exploram os conteúdos dos capítulos, a interpretação de situações e a leitura de imagens.

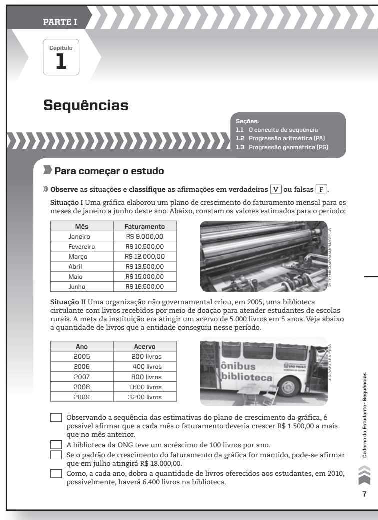
A seguir, propõem-se atividades correspondentes às seções do livro-texto. Nessas atividades, os termos e conceitos específicos da disciplina são destacados e trabalhados. Há também ferramentas diferenciadas, os organizadores gráficos, que facilitam a retomada dos assuntos estudados por meio de recursos visuais, favorecendo a compreensão e a fixação dos conceitos. Assim, você organiza as ideias e faz associações entre elas.

No final de cada capítulo, você elabora uma síntese e avalia o que aprendeu no livro-texto.

O *Caderno do estudante* pode ser usado para retomar os conteúdos abordados nas aulas, como um dos instrumentos de estudo e de revisão para as avaliações.

Bons estudos!

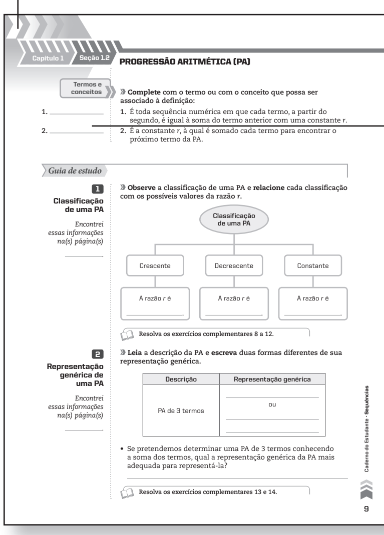
Organização do *Caderno*



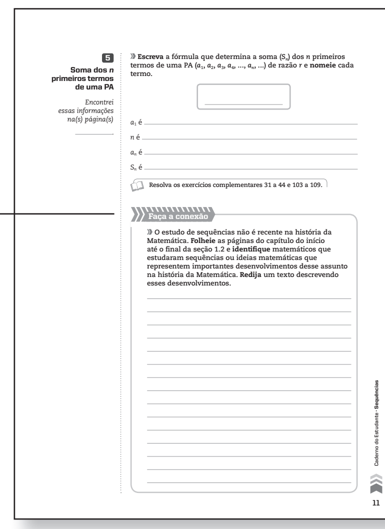
Para começar o estudo

No início de cada capítulo, você vai encontrar uma atividade contextualizada que aborda os conteúdos do capítulo e explora a interpretação de situações e a leitura de imagens.

Com a ajuda do *Caderno do estudante*, você pode estudar os principais conceitos do seu livro-texto, após a leitura de cada seção.



Você vai identificar ou definir os termos e conceitos mais importantes de cada seção.

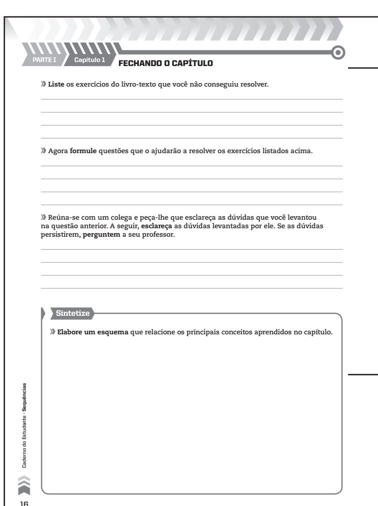


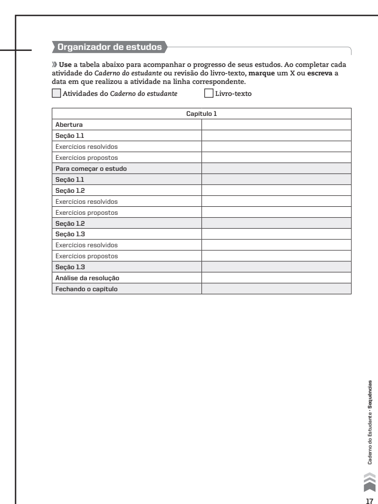
Faça a conexão

Algumas atividades favorecem as conexões entre o conteúdo da seção e outros conhecimentos.

Fechando o capítulo

No final de cada capítulo, você avalia o que aprendeu e retoma os temas em que ainda tenha dúvidas, além de esclarecê-las com colegas e professor.





Organizador de estudos

O quadro, na última página de cada capítulo, possibilita o monitoramento do seu avanço nos diferentes assuntos e recursos que compõem o *Moderna Plus Matemática*.

Sintetize

Para terminar, você escreve uma síntese das principais ideias estudadas no capítulo.

Sumário

PARTE I

Capítulo
1

Sequências

Seções:

Para começar o estudo

Observe as situações e **classifique** as afirmações em verdadeiras [V] ou falsas [F].

Situação I Uma gráfica elaborou um plano de crescimento do faturamento mensal para os meses de janeiro a junho deste ano. Abaixo, constam os valores estimados para o período:

Mês	Faturamento
Janeiro	R$ 9.000,00
Fevereiro	R$ 10.500,00
Março	R$ 12.000,00
Abril	R$ 13.500,00
Maio	R$ 15.000,00
Junho	R$ 16.500,00


DMITRY NIKOLAEV/ALAMY/IMAGEPLUS

Situação II Uma organização não governamental criou, em 2005, uma biblioteca circulante com livros recebidos por meio de doação para atender estudantes de escolas rurais. A meta da instituição era atingir um acervo de 5.000 livros em 5 anos. Veja abaixo a quantidade de livros que a entidade conseguiu nesse período.

Ano	Acervo
2005	200 livros
2006	400 livros
2007	800 livros
2008	1.600 livros
2009	3.200 livros

JL SILVA/FUTURA PRESS

[V] Observando a sequência das estimativas do plano de crescimento da gráfica, é possível afirmar que a cada mês o faturamento deveria crescer R$ 1.500,00 a mais que no mês anterior.

[F] A biblioteca da ONG teve um acréscimo de 100 livros por ano.

[V] Se o padrão de crescimento do faturamento da gráfica for mantido, pode-se afirmar que em julho atingirá R$ 18.000,00.

[V] Como, a cada ano, dobra a quantidade de livros oferecidos aos estudantes, em 2010, possivelmente, haverá 6.400 livros na biblioteca.

O CONCEITO DE SEQUÊNCIA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

sequência finita: É toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, com A contido em $\mathbb{N}^*$, e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

sequência infinita: É toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

termo de uma sequência: É cada elemento de uma sequência.

lei de formação de uma sequência: É um conjunto de informações que determina todos os termos de uma sequência e a ordem em que eles são apresentados.

Guia de estudo

1

Termos de uma sequência

Encontrei essas informações na(s) página(s) 15 e 16.

Explique o que representa o índice n do termo a_n de uma sequência.

O índice n indica a posição que o termo a_n ocupa na sequência.

Analise a sequência finita abaixo e **identifique** a afirmativa que aplica corretamente o conceito de termo(s) *equidistante(s) dos extremos*.

(2, 4, 6, 8, 10, 12)

- [ ] O termo 8 é equidistante dos extremos.
- [ ] Os números 6 e 10 são equidistantes dos extremos.
- [x] Os números 6 e 8 são equidistantes dos extremos.

Dê um exemplo de sequência finita cujo termo médio seja 15.

resposta pessoal

Resolva os exercícios complementares 1 a 7 e 89 a 94.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Termos e conceitos

1. progressão aritmética (PA)

2. razão de uma PA

Complete com o termo ou com o conceito que possa ser associado à definição:

1. É toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante *r*.
2. É a constante *r*, à qual é somado cada termo para encontrar o próximo termo da PA.

Guia de estudo

1 Classificação de uma PA

Encontrei essas informações na(s) página(s) 19.

Observe a classificação de uma PA e **relacione** cada classificação com os possíveis valores da razão *r*.

Classificação de uma PA

- Crescente: A razão *r* é positiva.
- Decrescente: A razão *r* é negativa.
- Constante: A razão *r* é nula.

Resolva os exercícios complementares 8 a 12.

2 Representação genérica de uma PA

Encontrei essas informações na(s) página(s) 20.

Leia a descrição da PA e **escreva** duas formas diferentes de sua representação genérica.

Descrição	Representação genérica
PA de 3 termos	$(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$ com x e r números reais.

- Se pretendemos determinar uma PA de 3 termos conhecendo a soma dos termos, qual a representação genérica da PA mais adequada para representá-la?
  $(x - r, x, x + r)$

Resolva os exercícios complementares 13 e 14.

3 Termo geral de uma PA

Encontrei essas informações na(s) página(s) 21.

Escreva a fórmula do termo geral a_n de uma PA (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...) de razão r e **nomeie** cada termo.

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

a_1 é o primeiro termo da PA.

n é o índice do termo procurado.

r é a razão da PA.

a_n é o n-ésimo termo.

Resolva os exercícios complementares 15 a 25 e 95 a 102.

4 Propriedades das progressões aritméticas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 25.

Escreva as propriedades das progressões aritméticas e **aplique-as** para resolver as situações propostas nos exemplos:

Propriedades das progressões aritméticas

P1. Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Exemplo

Observe a sequência de 5 termos abaixo. Determine o valor de x.

(3, 10, 17, x, 31)

A soma dos extremos é: $3 + 31 = 34$.
Pela propriedade P1, a soma de dois termos equidistantes é igual à soma dos extremos.
Então, $10 + x = 34$. Portanto, $x = 24$.

P2. Uma sequência de três termos é PA se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois.

Exemplo

Determine o valor de x para que a sequência $(4x + 2, 3x + 3, 6x - 4)$ seja uma PA.

Pela propriedade P2, temos:

$3x + 3 = \dfrac{4x + 2 + 6x - 4}{2} \Rightarrow x = 2$

Resolva os exercícios complementares 26 a 30.

5

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Encontrei essas informações na(s) página(s) 27.

» **Escreva** a fórmula que determina a soma (S_n) dos n primeiros termos de uma PA (a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...) de razão r e **nomeie** cada termo.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

a_1 é o primeiro termo da PA.

n é o número de termos a serem somados.

a_n é o termo que ocupa a posição n.

S_n é a soma dos n primeiros termos.

Resolva os exercícios complementares 31 a 44 e 103 a 109.

Faça a conexão

» O estudo de sequências não é recente na história da Matemática. **Folheie** as páginas do capítulo do início até o final da seção 1.2 e **identifique** matemáticos que estudaram sequências ou ideias matemáticas que representem importantes desenvolvimentos desse assunto na história da Matemática. **Redija** um texto descrevendo esses desenvolvimentos.

respostas possíveis: A sequência proposta por Fibonacci (matemático italiano que viveu por volta de 1180 a 1250) é uma sequência numérica aplicada em diversas áreas, como Economia, Biologia, Química etc. O raciocínio proposto por Carl Friedrich Gauss, desenvolvendo a soma de n termos de uma PA, possibilitou a generalização da fórmula da soma de uma PA.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

progressão geométrica (PG): É toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q.

razão de uma PG: É a constante q pela qual se multiplica cada termo para se obter o termo seguinte da PG.

Guia de estudo

1

Classificação de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 31.

» **Analise** as classificações e **complete** as lacunas com as condições que devem ser obedecidas pelo primeiro termo a_1 e pela razão q para cada PG.

Classificação de uma PG

Uma PG é crescente

quando:

a_1 é maior que zero e

q é maior que um,

ou

a_1 é menor que zero e

q é um número entre zero e um.

Uma PG é decrescente

quando:

a_1 é maior que zero e

q é um número entre zero e um,

ou

a_1 é menor que zero e

q é maior que um.

Uma PG é constante

quando:

q é igual a um ou todos os seus termos são nulos.

Uma PG é oscilante

quando:

o primeiro termo é diferente de zero e q é menor que zero.

Uma PG é quase nula

quando:

o primeiro termo é diferente de zero e q é igual a zero.

Resolva os exercícios complementares 45 a 50.

2
Representação genérica de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 32.

» **Leia** a descrição da PG e **escreva** duas formas diferentes de sua representação genérica.

Descrição	Representação genérica
PG de 3 termos	(x, xq, xq^2) ou $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ com x e q números reais e q diferente de zero

- Se pretendemos determinar uma PG de 3 termos não nulos conhecendo o produto dos termos, qual a representação genérica da PG mais adequada para representá-la?
  $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

Resolva os exercícios complementares 51 e 52.

3
Termo geral de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 34.

» **Escreva** a fórmula do termo geral a_n de uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão q e **nomeie** cada termo.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a_1 é o primeiro termo da PG.

n é o índice do termo procurado.

r é a razão da PG.

a_n é o n-ésimo termo.

Resolva os exercícios complementares 53 a 62 e 110 a 113.

Faça a conexão

» **Folheie** seu livro do início do capítulo ao fim e **identifique** as situações do cotidiano que contêm ideias de PA ou de PG.

resposta pessoal

4

Representação gráfica de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 37.

» A representação gráfica de uma PG é formada por pontos do gráfico de uma função. **Escreva** qual é essa função e qual é sua lei.

A representação gráfica de uma PG (a_1, a_2, a_3, ...), de razão $q > 0$ e $q \neq 1$, é formada por pontos do gráfico da função exponencial, cuja lei é $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$.

Resolva o exercício complementar 63.

5

Propriedades das progressões geométricas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 38.

» **Escreva** as propriedades das progressões geométricas e **aplique-as** para resolver as situações propostas nos exemplos.

Propriedades das progressões geométricas

P1. Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Exemplo

Observe a sequência de 5 termos abaixo. Determine o valor de x.
$(2, -6, 18, x, 162)$

O produto dos extremos é: $2 \cdot 162 = 324$
Pela propriedade P1, o produto de dois termos equidistantes é igual ao produto dos extremos.
Então, $(-6) \cdot x = 324$. Portanto, $x = -54$.

P2. Uma sequência de três termos (em que o primeiro é diferente de zero) é PG se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

Exemplo

Determine o valor de x para que a sequência $(2, 2x, 10x - 12)$ seja uma PG.

Pela propriedade P2, temos:
$(2x)^2 = 2 \cdot (10x - 12) \Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0$
$\therefore x = 3$ ou $x = 2$.

Resolva os exercícios complementares 64 a 72.

6

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 40.

Escreva a fórmula da soma (S_n) dos n primeiros termos de uma PG de razão q, com $q \neq 1$, e **nomeie** cada termo.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

a_1 é o primeiro termo da PG.

n é o número de termos a serem somados.

q é a razão da PG.

S_n é a soma dos *n* primeiros termos.

Resolva os exercícios complementares 73 a 78 e 114 a 117.

7

Produto dos *n* primeiros termos de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 42.

Escreva a fórmula do produto (P_n) dos n primeiros termos de uma PG de razão q e **nomeie** cada termo.

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

a_1 é o primeiro termo da PG.

n é o número de termos a serem multiplicados.

q é a razão da PG.

P_n é o produto dos *n* primeiros termos.

Resolva os exercícios complementares 79 a 82 e 118.

8

Soma dos infinitos termos de uma PG

Encontrei essas informações na(s) página(s) 43 e 44.

Escreva a fórmula da soma S_∞ dos infinitos termos de uma PG (a_1, a_2, a_3, ...) de razão q, com $-1 < q < 1$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

a_1 é o primeiro termo da PG.

q é a razão da PG.

S_∞ é a soma dos infinitos termos.

Resolva os exercícios complementares 83 a 88, 119 e 120.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

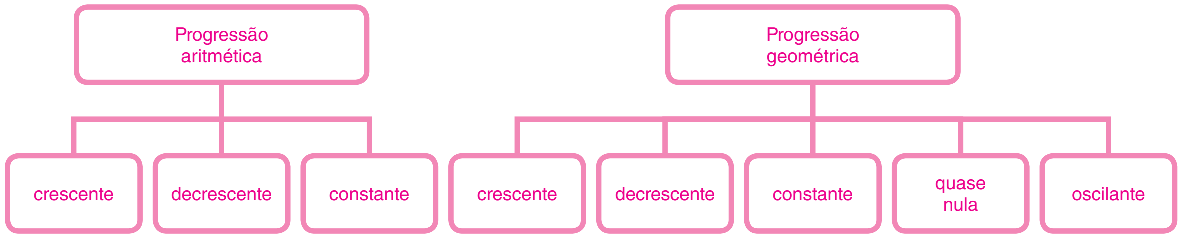
resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Elabore um esquema** que relacione os principais conceitos aprendidos no capítulo.



Os alunos poderão elaborar outros esquemas, por exemplo, destacando as fórmulas.

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 1	
Abertura	
Seção 1.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 1.1	
Seção 1.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 1.2	
Seção 1.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 1.3	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE I

Capítulo 2

Trigonometria no triângulo retângulo

Seções:

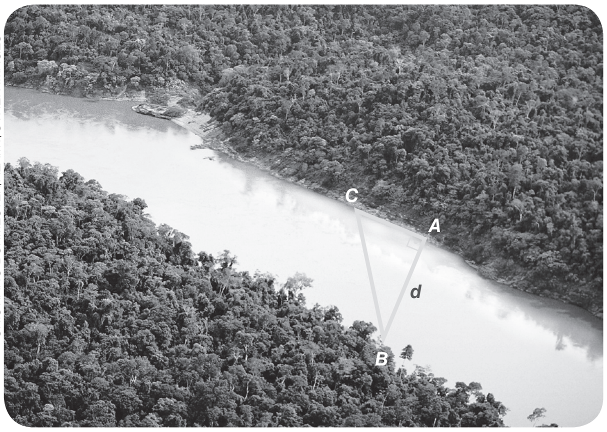
2.1 Estudo da Trigonometria no triângulo retângulo

2.2 Transformações trigonométricas

Para começar o estudo

Nas situações I e II, abaixo, as medidas d e x são desconhecidas e representam, respectivamente, a largura AB do rio e a distância MN percorrida pela cadeirinha do teleférico. Na primeira situação, são conhecidas as medidas do segmento $\overline{AC}$ e do ângulo $A\hat{C}B$, e na segunda são conhecidas as medidas do segmento $\overline{MP}$ e do ângulo $M\hat{N}P$. Aplicando o conceito de semelhança de triângulos em cada uma das situações, **descreva um procedimento** possível para determinar a medida desconhecida.

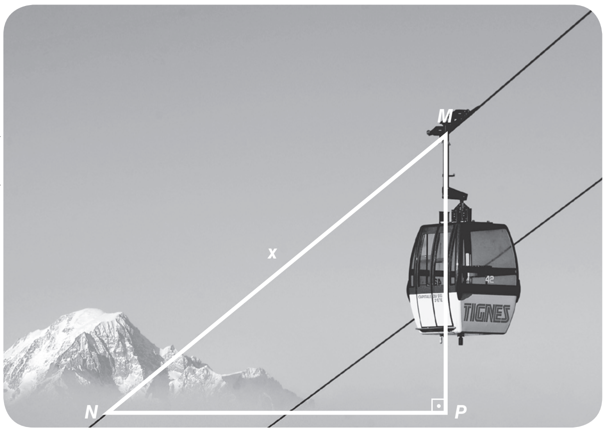
Situação I



CRISTIANO BURMESTER/ALAMY/OTHER IMAGES

Construir um triângulo DEF semelhante ao triângulo ABC de tal forma que seja possível medir os lados $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DE}$. Depois, escrever uma proporção entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos, para determinar a medida de $\overline{AB}$.

Situação II



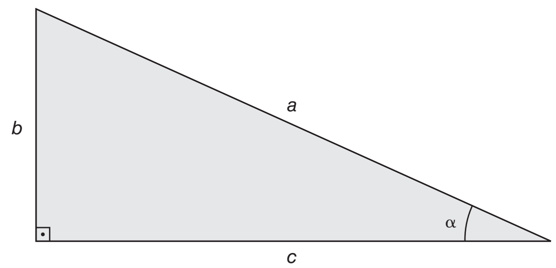
BLICKWINKEL/ALAMY/OTHER IMAGES

Construir um triângulo TOQ semelhante ao triângulo NMP de tal forma que seja possível medir os lados $\overline{TO}$, $\overline{TQ}$ e $\overline{OQ}$. Depois, escrever uma proporção entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos, para determinar a medida de $\overline{NM}$.

ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Termos e conceitos

» Considerando o triângulo retângulo abaixo, **defina** os conceitos a seguir.



seno do ângulo agudo α: É a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa, ou seja, $\frac{b}{a}$.

cosseno do ângulo agudo α: É a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa, ou seja, $\frac{c}{a}$.

tangente do ângulo agudo α: É a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente, ou seja, $\frac{b}{c}$.

Guia de estudo

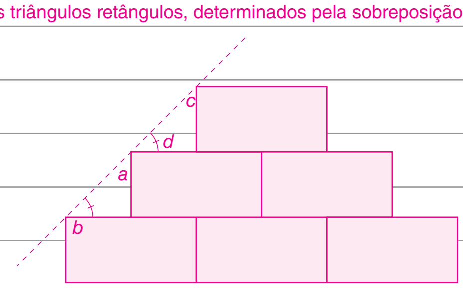
1

A origem da Trigonometria

Encontrei essas informações na(s) página(s) 56.

» O papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C., é um dos documentos mais antigos que se conhece a registrar usos da Trigonometria. **Leia** na página 56 do livro-texto o trecho sobre esse documento e, por meio de um esquema, **explique** como os construtores mantinham constante a inclinação das faces das pirâmides.

Para manter a mesma inclinação de todas as faces, os construtores mantinham constantes as razões entre as medidas dos catetos dos triângulos retângulos, determinados pela sobreposição de blocos de pedras.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Resolva os exercícios complementares 1 a 3 e 13 a 21.

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Guia de estudo

1 Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 62 e 63.

» **Escreva** a relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo α.

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$

» **Escreva** a relação entre o seno e o cosseno de ângulos agudos complementares α e 90° − α.

$\text{sen}\ \alpha = \cos (90° - \alpha)$

$\cos \alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$

Resolva os exercícios complementares 4 a 8 e 22 a 24.

2 A Trigonometria e o teorema de Pitágoras

Encontrei essas informações na(s) página(s) 64.

» **Retome** o exercício resolvido 7 do livro-texto.
Analise novamente a resolução e **responda** à questão a seguir.
No início da resolução, considerou-se a existência de um triângulo com o cateto oposto medindo 4 e a hipotenusa medindo 5. Com essas medidas, encontraram-se: $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{3}$. Se fosse considerado um triângulo semelhante ao primeiro, os valores do cosseno e da tangente seriam outros? Por quê?

Não. O cosseno de um ângulo agudo é uma razão entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Portanto, caso fosse considerado outro triângulo semelhante ao primeiro, essa razão seria a mesma. Isso também vale para a tangente.

Resolva os exercícios complementares 9 a 11.

3 Ângulos notáveis

Encontrei essas informações na(s) página(s) 66.

» **Escreva** os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos notáveis, completando a tabela.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Resolva os exercícios complementares 12 e 25 a 31.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Verifique** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver e **formule** questões que o ajudem a resolver esses exercícios.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Resuma** as ideias principais deste capítulo.

resposta pessoal

Organizador de estudos

Use a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 2	
Abertura	
Seção 2.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 2.1	
Conteúdo digital	
Seção 2.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 2.2	
Conteúdo digital	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

Capítulo 3

A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente

Seções:

Para começar o estudo

» **Veja** abaixo alguns termos e conceitos que você encontrará no capítulo. **Marque** X naqueles que você julga que estão relacionados às imagens. Justifique sua(s) escolha(s).

P. NARAYAN/AGE/OTHER IMAGES

Número de voltas da roda-gigante ao girar 3π rad.

GERSON SOBREIRA

Setor irrigado quando o pivô gira 30°.

- [x] Medida de arco ou ângulo
- [ ] Seno de um ângulo
- [ ] Cosseno de um ângulo
- [ ] Tangente de um ângulo

Justificativa

RADIANO

Termo e conceito

» **Defina** com suas próprias palavras o conceito a seguir.

radiano: Um radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Guia de estudo

1 Medida da circunferência em radiano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 76 e 77.

» **Escreva a equivalência** entre as medidas em grau e em radiano, completando a tabela a seguir.

	Grau	Radiano
Uma volta completa	360°	2π rad
Meia-volta	180°	π rad
Um quarto de volta	90°	$\frac{\pi}{2}$ rad

2 Transformação de unidades

Encontrei essas informações na(s) página(s) 77.

» Abaixo, há um exercício e sua resolução. **Escreva** comentários à direita explicando as etapas da resolução.

Exercício

Determine a medida, em radiano, equivalente a 120°.

Resolução

grau		radiano
180°	———	π rad
120°	———	x rad

1. As medidas em radianos e suas correspondentes medidas em graus são diretamente proporcionais. Assim, partindo da equivalência entre π rad e 180°, montamos a regra de três ao lado.

$180x = 120\pi$

$x = \dfrac{120\pi}{180}$

$x = \dfrac{2\pi}{3}$

2. Calculamos o valor de x resolvendo a regra de três.

Dessa forma, $\dfrac{2\pi}{3}$ rad é equivalente a 120°.

Resolva os exercícios complementares 1 a 2 e 87 a 98.

Capítulo 3 Seção 3.2

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Termos e conceitos

» **Identifique** o termo ou o conceito que pode ser associado à definição:

1. É uma circunferência do plano cartesiano cujo centro é a origem do sistema de eixos e o raio é unitário, isto é, tem medida 1.
2. É o nome dado a cada uma das quatro regiões do plano cartesiano separadas pelos eixos coordenados.
3. É o nome dado ao ponto de coordenadas $A(1, 0)$ da circunferência trigonométrica.
4. É um arco da circunferência trigonométrica, orientado no sentido horário ou anti-horário a partir do ponto $A(1, 0)$.
5. É o nome dado a dois arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade; por exemplo, os arcos trigonométricos de medidas 60° e 420°.

1. circunferência trigonométrica
2. quadrante
3. origem dos arcos
4. arco trigonométrico
5. arcos côngruos

Guia de estudo

1

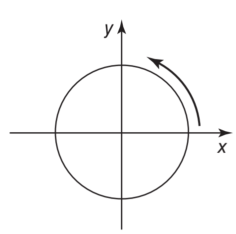
Arcos trigonométricos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 79.

» **Observe** o esquema a seguir e **relacione** cada caso com os possíveis sinais associados à medida dos arcos.

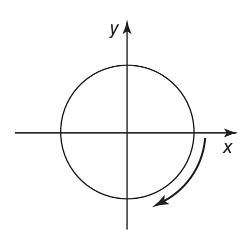
Arco trigonométrico

Sentido anti-horário



O sinal da medida do arco é positivo.

Sentido horário



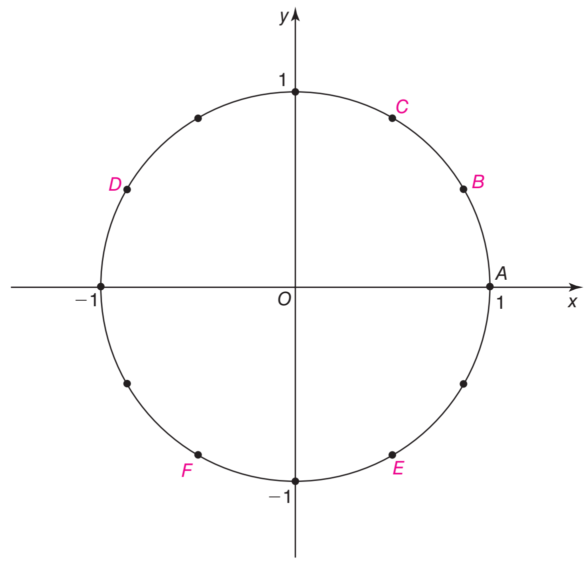
O sinal da medida do arco é negativo.

2

Representação de arcos na circunferência trigonométrica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 79 e 80.

» A circunferência trigonométrica da figura abaixo está dividida em 12 partes iguais pelos pontos assinalados. Nessa figura, **nomeie** por *B*, *C*, *D*, *E* e *F* as extremidades dos arcos trigonométricos de 30°, 60°, 150°, −60° e −120°, respectivamente.



» Complete a tabela a seguir **identificando** o quadrante a que pertencem as extremidades *B*, *C*, *D*, *E* e *F* dos arcos trigonométricos do exercício anterior e **determine** uma medida positiva de um arco côngruo a cada um deles.

Ponto	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Quadrante	Primeiro	Primeiro	Segundo	Quarto	Terceiro
Arco côngruo	390°	420°	510°	300°	240°

Resolva os exercícios complementares 3 a 5.

3

Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 81.

» **Imagine** uma circunferência trigonométrica. **Identifique** em que quadrante estão localizados os pontos da circunferência trigonométrica associados aos números reais abaixo. (Lembre-se: $\pi \approx 3{,}14$)

- O ponto associado ao número 1 está no primeiro quadrante.
- O ponto associado ao número 3 está no segundo quadrante.
- O ponto associado ao número 4 está no terceiro quadrante.
- O ponto associado ao número 6 está no quarto quadrante.

Resolva o exercício complementar 6.

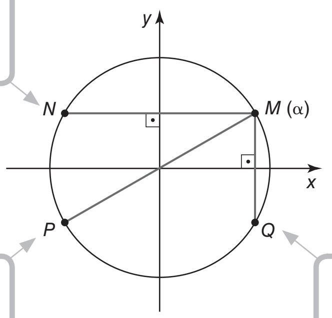
4

Simetrias

Encontrei essas informações na(s) página(s) 83.

» O ponto *M* da circunferência trigonométrica abaixo é extremidade de um arco trigonométrico de medida α. Complete os quadros a seguir **determinando** as possíveis medidas dos arcos com extremidades nos pontos N, P e Q, simétricos do ponto M, conforme mostra a figura.

Em grau: $180° - \alpha$
Em radiano: $\pi - \alpha$



Em grau: $180° + \alpha$
Em radiano: $\pi + \alpha$

Em grau: $360° - \alpha$
Em radiano: $2\pi - \alpha$

Resolva os exercícios complementares 7 e 8.

Capítulo 3 | Seção 3.3

SENO E COSSENO DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os conceitos a seguir.

seno de α: É a ordenada da extremidade do arco trigonométrico de medida α.

cosseno de α: É a abscissa da extremidade do arco trigonométrico de medida α.

Guia de estudo

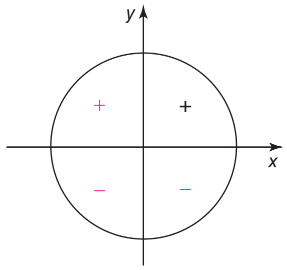
1

Variação de sinal do seno e do cosseno

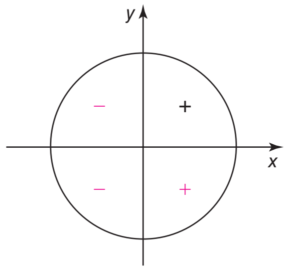
Encontrei essas informações na(s) página(s) 86 e 87.

» Na circunferência trigonométrica da esquerda, **escreva** o sinal (+ ou −) do seno em cada quadrante. E, na circunferência trigonométrica da direita, o sinal do cosseno.

Seno



Cosseno



2 Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

Encontrei essas informações na(s) página(s) 87.

» **Escreva**, na tabela a seguir, os valores do seno e do cosseno dos arcos trigonométricos indicados.

	$30°$ ou $\frac{\pi}{6}$ rad	$45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ rad	$60°$ ou $\frac{\pi}{3}$ rad
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Resolva os exercícios complementares 9 a 13.

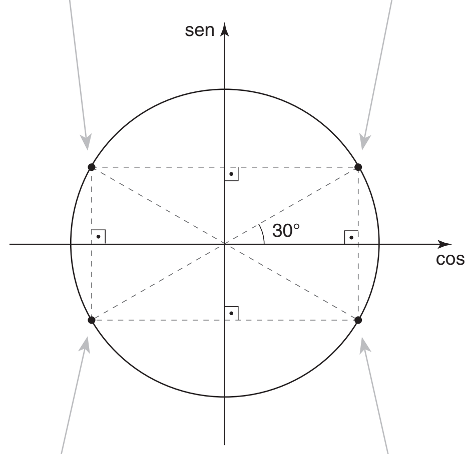
3 Redução ao 1º quadrante

Encontrei essas informações na(s) página(s) 88 a 90.

» **Analise** os arcos trigonométricos nas figuras e, a seguir, **complete** as lacunas com a medida do arco, com o valor do seno ou com o valor do cosseno de cada arco trigonométrico.

Arco: 150° ou $\frac{5\pi}{6}$ rad
Seno: $\frac{1}{2}$
Cosseno: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Arco: 30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad
Seno: $\frac{1}{2}$
Cosseno: $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Arco: 210° ou $\frac{7\pi}{6}$ rad
Seno: $-\frac{1}{2}$
Cosseno: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Arco: 330° ou $\frac{11\pi}{6}$ rad
Seno: $-\frac{1}{2}$
Cosseno: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Arco: 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ rad

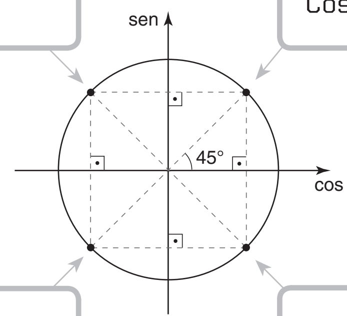
Seno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cosseno: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Arco: 45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad

Seno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cosseno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Arco: 225° ou $\frac{5\pi}{4}$ rad

Seno: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cosseno: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Arco: 315° ou $\frac{7\pi}{4}$ rad

Seno: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cosseno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Arco: 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ rad

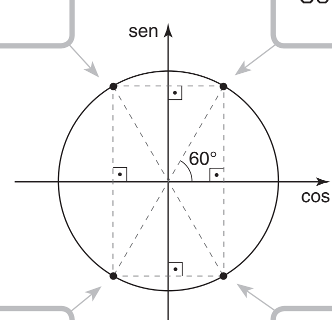
Seno: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cosseno: $-\frac{1}{2}$

Arco: 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad

Seno: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cosseno: $\frac{1}{2}$



Arco: 240° ou $\frac{4\pi}{3}$ rad

Seno: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cosseno: $-\frac{1}{2}$

Arco: 300° ou $\frac{5\pi}{3}$ rad

Seno: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Cosseno: $\frac{1}{2}$

Resolva os exercícios complementares 14 a 20, 97 e 98.

4 Relação fundamental da Trigonometria

Encontrei essas informações na(s) página(s) 92 e 93.

» **Escreva** a relação fundamental da Trigonometria no quadro a seguir.

$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$

» Abaixo, há um exercício e sua resolução. Os boxes à esquerda explicam as etapas da resolução. **Faça** a resolução desse exercício seguindo os boxes laterais.

Exercício

Se um arco trigonométrico de medida α tem extremidade no segundo quadrante e $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, determine $\cos\alpha$.

Resolução

1. Utilizando a relação fundamental da Trigonometria, determinamos $\cos\alpha$.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$

2. Observando o quadrante ao qual pertence a extremidade do arco, determinamos o sinal do cosseno.

Como α é uma medida do segundo quadrante, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Resolva os exercícios complementares 21 a 27.

Capítulo 3 Seção 3.4

TANGENTE DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

eixo das tangentes: É o eixo real de origem no ponto A (a origem dos arcos da circunferência trigonométrica) e que possui mesma direção e sentido que o eixo Oy.

tangente de α (admitindo a condição de existência): É a ordenada do ponto de intersecção do eixo das tangentes com a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica e pela extremidade do arco de medida α.

Guia de estudo

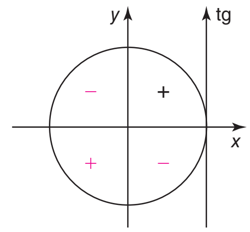
1

Variação de sinal da tangente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 96.

» Na circunferência trigonométrica do quadro abaixo, **escreva** o sinal (+ ou −) da tangente em cada quadrante.

Tangente



2

A tangente como razão do seno pelo cosseno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 97 e 98.

» **Escreva** a tangente de α como a razão do seno pelo cosseno e **dê um exemplo** de um exercício que seja resolvido por essa fórmula.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Exemplo:

resposta pessoal

Resolva os exercícios complementares 28 a 35.

3

Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

Encontrei essas informações na(s) página(s) 99.

» **Escreva** na tabela a seguir os valores da tangente dos arcos trigonométricos indicados.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad	45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad	60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4

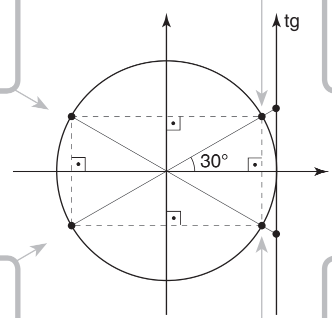
Redução ao 1º quadrante

Encontrei essas informações na(s) página(s) 100 e 101.

Analise os arcos trigonométricos nas figuras e, a seguir, **complete** as lacunas com a medida do arco ou com o valor da tangente de cada arco trigonométrico.

Arco: 150° ou $\frac{5\pi}{6}$ rad
Tangente: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Arco: 30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad
Tangente: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

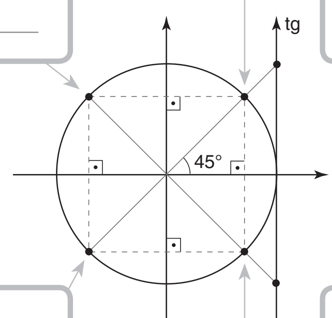


Arco: 210° ou $\frac{7\pi}{6}$ rad
Tangente: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Arco: 330° ou $\frac{11\pi}{6}$ rad
Tangente: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Arco: 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ rad
Tangente: -1

Arco: 45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad
Tangente: 1

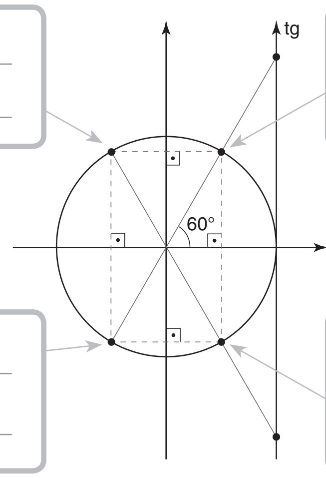


Arco: 225° ou $\frac{5\pi}{4}$ rad
Tangente: 1

Arco: 315° ou $\frac{7\pi}{4}$ rad
Tangente: -1

Arco: 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ rad
Tangente: $-\sqrt{3}$

Arco: 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad
Tangente: $\sqrt{3}$



Arco: 240° ou $\frac{4\pi}{3}$ rad
Tangente: $\sqrt{3}$

Arco: 300° ou $\frac{5\pi}{3}$ rad
Tangente: $-\sqrt{3}$

Resolva os exercícios complementares 36 a 42.

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Guia de estudo

1

Resolução de uma equação trigonométrica imediata

Encontrei essas informações na(s) página(s) 102 e 103.

» Abaixo, há um exercício e etapas da sua resolução. **Complete** a resolução desse exercício seguindo os boxes laterais.

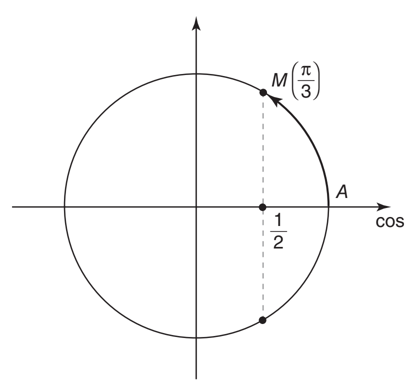
Exercício

Resolva a equação $\cos x = \frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

1. Lembrando que o valor de cos *x* é a abscissa do ponto *M* do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida *x*, fazemos o esquema ao lado.

Os pontos da circunferência trigonométrica cuja abscissa é $\frac{1}{2}$, na primeira volta positiva, podem ser observados na figura a seguir:



2. Com base no esquema, determinamos os valores de *x* no intervalo considerado.

Os valores de *x* para os quais $\cos x = \frac{1}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$, são, portanto:

$x = \frac{\pi}{3}$ ou

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Resolva os exercícios complementares 43 a 54.

2

Resolução de uma equação trigonométrica na forma fatorada

Encontrei essas informações na(s) página(s) 105 e 106.

» Abaixo, há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos boxes laterais.

Exercício

Resolva a equação $(2\cos^2 x - 1)\left(2\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\right) = 0$ para $0 \leqslant x < \pi$.

Resolução

Pela propriedade do produto nulo, temos:

1. Igualamos cada fator a zero (pela propriedade do produto nulo).

$$(2\cos^2 x - 1)\left(2\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 = 0 \\ 2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

Portanto:

$2\cos^2 x - 1 = 0$

2. Resolvemos a primeira equação e, observando o conjunto universo dela, encontramos os valores de *x*.

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolvendo a equação acima para $0 \leqslant x < \pi$, obtemos $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$.

E ainda:

$2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$

3. Resolvemos a segunda equação encontrando os outros valores de *x*.

$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolvendo a equação acima para $0 \leqslant x < \pi$,

obtemos $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{2\pi}{3}$.

4. Determinamos o conjunto solução, que é a união dos conjuntos solução das equações resolvidas em (2) e (3).

Dessa forma, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Resolva os exercícios complementares 55 a 65.

3

Resolução de uma equação trigonométrica por meio de equações polinomiais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 107 e 108.

» Abaixo, há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Resolva a equação $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

1. Mudando a variável, substituímos cos x por t, obtendo uma equação do 2º grau.

$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

Resolvendo essa equação:

2. Resolvemos a equação do 2º grau.

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t - 1)^2 = 0$

$t - 1 = 0$

$t = 1$

3. Retornamos à variável original.

Lembrando que $\cos x = t$, temos:

$\cos x =$ 1

4. Resolvemos a equação obtida na 1ª volta positiva.

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$

Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é: $S =$ {0}

Resolva os exercícios complementares 66 a 76.

INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Guia de estudo

1

Resolução de uma inequação trigonométrica imediata

Encontrei essas informações na(s) página(s) 110 e 111.

» Abaixo, há um exercício e parte de sua resolução. **Complete** a resolução desse exercício seguindo os boxes laterais.

Exercício

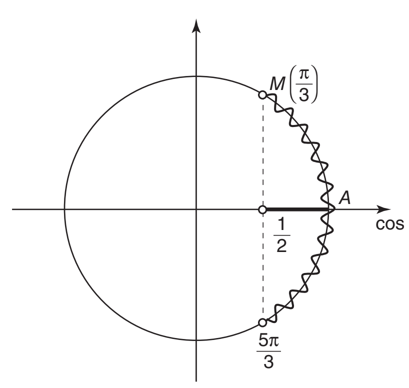
Resolva a equação cos $x > \frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

1. Lembramos que o valor de cos *x* é a abscissa do ponto *M* do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida *x*.

Os pontos da circunferência trigonométrica cuja abscissa é maior que $\frac{1}{2}$, na primeira volta positiva, podem ser observados na figura a seguir:

2. Em um esquema, destacamos o intervalo em que o cosseno de *x* é maior que $\frac{1}{2}$.



Os valores de *x* para os quais cos $x > \frac{1}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$, são: $0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

3. Escrevemos o conjunto solução, que é formado pelos valores de *x* obtidos em (2).

Logo, S = $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

Resolva os exercícios complementares 77 a 82, 99 e 100.

2

Resolução de uma inequação trigonométrica por meio de inequações polinomiais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 113 e 114.

» Abaixo, há um exercício e sua resolução. **Escreva à direita explicações** das etapas da resolução e **termine-a.**

Exercício

Resolva a inequação $2 \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x \leqslant 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Substituindo sen x por t, obtemos: $2t^2 - \sqrt{3}t \leqslant 0$

1. Transformamos a inequação trigonométrica em uma inequação polinomial, efetuando uma mudança de variável.

Para resolver essa inequação, devemos estudar o sinal de $f(t) = 2t^2 - \sqrt{3}t$:

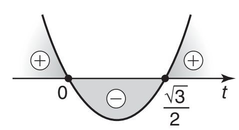
$2t^2 - \sqrt{3}t = 0 \Rightarrow t\left(2t - \sqrt{3}\right) = 0$

$\therefore t = 0$ ou $2t - \sqrt{3} = 0$

$\therefore t = 0$ ou $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo:

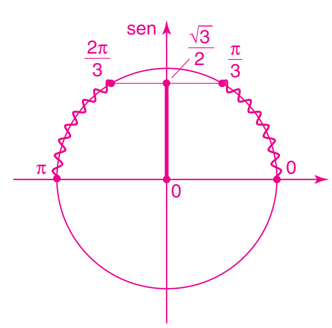
2. Resolvemos a inequação obtida.



Observamos que $f(t) \leqslant 0$ para $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Voltamos à variável original.



4. Em um esquema, destacamos os valores de x cujo seno está no intervalo obtido.

Os valores de x para os quais $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$, são:

$0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi\right\}$.

5. Escrevemos o conjunto solução.

Resolva os exercícios complementares 83 a 86.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **relacione** os exercícios do item anterior aos conteúdos correspondentes vistos no capítulo.

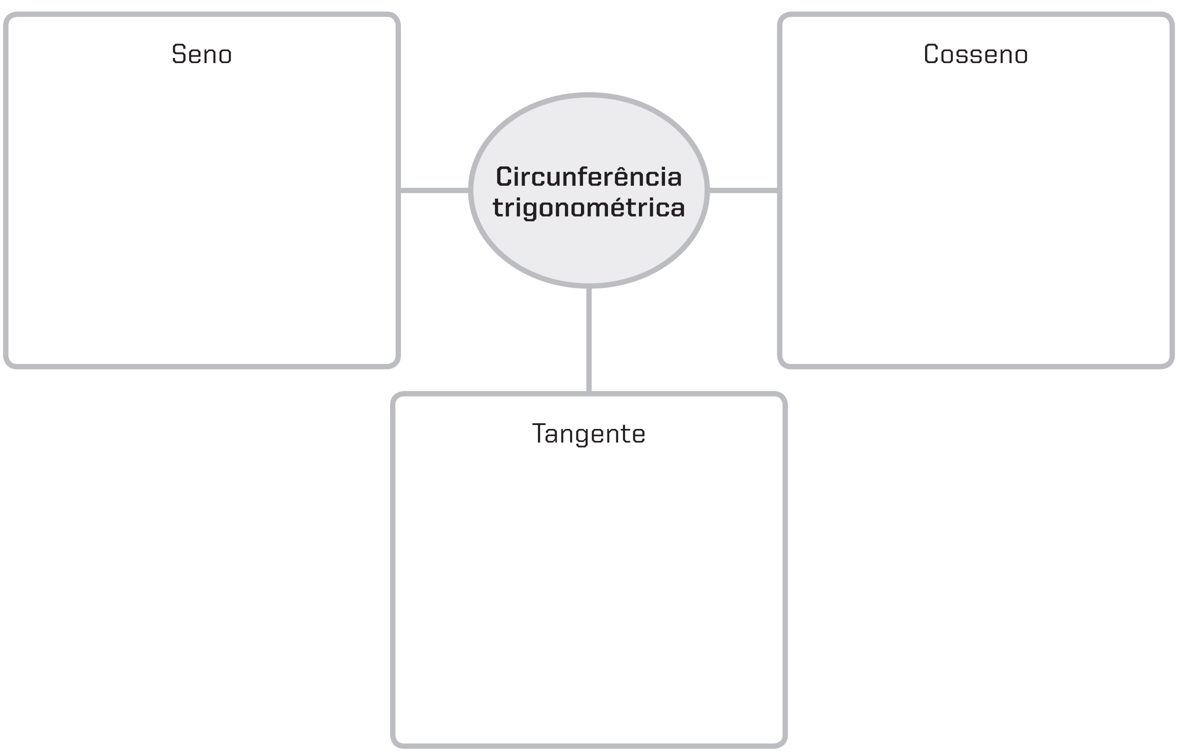
resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e **resolvam** os exercícios que listaram. Se as dúvidas persistirem, **formulem** questões para o professor a fim de esclarecê-las.

resposta pessoal

Sintetize

» **Resuma** as ideias principais de cada conceito preenchendo os quadros do esquema a seguir. resposta pessoal



Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 3	
Abertura	
Seção 3.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 3.1	
Seção 3.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.2	
Seção 3.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.3	
Seção 3.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.4	
Seção 3.5	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.5	
Seção 3.6	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 3.6	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE I

Capítulo
4

Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Seções:

Para começar o estudo

Observe a situação e **classifique** as afirmações em verdadeiras [V] ou falsas [F].


BRYAN BUSOVICKI/SHUTTERSTOCK

Uma das maiores rodas-gigantes do mundo, a London Eye, foi construída em Londres em 1999 para comemorar a chegada do ano 2000. A London Eye tem 32 cabines igualmente espaçadas em torno de sua circunferência. Sua altura de 135 metros permite uma visão privilegiada de Londres.

[V] Quando uma cabine descreve um arco de 90°, a partir de um ponto da plataforma de embarque, ela estará a 67,5 metros de altura em relação à plataforma.

[F] Quando uma cabine descreve um ângulo de 45°, a partir de um ponto da plataforma de embarque, ela estará a 33,75 metros de altura em relação à plataforma.

[F] Enumerando as cabines, de 1 a 32, em um mesmo sentido de rotação, o ângulo com vértice no centro da roda e que passa pela primeira e pela 16ª cabine é reto.

[V] Uma cabine está a 33,75 metros de altura em relação à plataforma de embarque, quando descrever um arco de 60° a partir do ponto de embarque.

SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os conceitos a seguir, referentes a um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

secante: É a razão inversa do cosseno, dada pelo quociente entre as medidas da hipotenusa e do cateto adjacente a um ângulo agudo num triângulo retângulo.

cossecante: É a razão inversa do seno, dada pelo quociente entre as medidas da hipotenusa e do cateto oposto a um ângulo agudo num triângulo retângulo.

cotangente: É a razão inversa da tangente, dada pelo quociente entre as medidas do cateto adjacente e do cateto oposto a um ângulo agudo num triângulo retângulo.

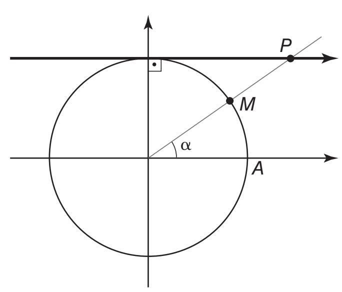
Guia de estudo

1

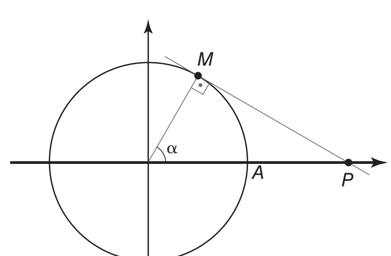
Eixos das razões inversas no ciclo trigonométrico

Encontrei essas informações na(s) página(s) 125 a 127.

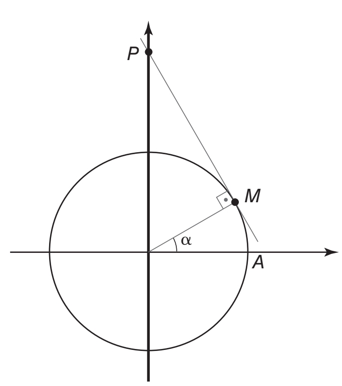
» Em cada uma das circunferências trigonométricas a seguir há um eixo em destaque. **Nomeie** cada um deles empregando o termo correspondente: eixo das secantes, eixo das cossecantes ou eixo das cotangentes.



eixo das cotangentes



eixo das secantes



eixo das cossecantes

2 Valores das razões inversas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 124 a 129.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. Leia os comentários à esquerda e **complete** as etapas da resolução.

Exercício

Dado sen x $= \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine sec x, cossec x e cotg x.

Resolução

1. Aplicamos a relação fundamental da Trigonometria ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) para determinar cos x.

Considerando a relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\cos x = \pm\frac{4}{5}$

2. Observando em qual quadrante a medida x está, determinamos o sinal do cosseno de x.

Como x pertence ao primeiro quadrante, cos x = $\frac{4}{5}$.

3. Aplicando as relações trigonométricas, calculamos o valor da secante de x, da cossecante de x e da cotangente de x.

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4}$

$\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} = \frac{5}{3}$

$\text{cotg} x = \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

Resolva os exercícios complementares 1 a 9, 29 e 30.

IDENTIDADES

Termo e conceito

Defina com suas próprias palavras o termo a seguir.

identidade: Identidade em um universo U é uma igualdade entre duas expressões, que se verifica para todo valor de U atribuído à(s) variável(eis) que essas expressões contêm.

Guia de estudo

1 Técnicas para demonstração de identidades

Encontrei essas informações na(s) página(s) 130 a 132.

Descreva os passos necessários para demonstrar que $f(x) = g(x)$ é uma identidade num universo U utilizando a primeira técnica apresentada no livro-texto.

Primeiro, provamos que f e g estão definidas em U. A seguir, efetuamos simplificações algébricas e utilizamos identidades já conhecidas em um dos membros, até obter a mesma expressão do outro membro.

Descreva os passos necessários para demonstrar que $f(x) = g(x)$ é uma identidade num universo U empregando a segunda técnica apresentada no livro-texto.

Transformamos a igualdade em $f(x) - g(x) = 0$ e aplicamos a primeira técnica.

Descreva os passos necessários para demonstrar uma identidade em um conjunto universo U por meio da terceira técnica apresentada no livro-texto.

Podemos considerar outra identidade válida em U e, por simplificações algébricas e identidades já conhecidas, transformá-la na igualdade inicial.

Resolva os exercícios complementares 10 a 12.

ADIÇÃO DE ARCOS

Guia de estudo

1

Fórmulas de adição de arcos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 133 a 136.

» **Escreva** as fórmulas de adição de arcos.

sen $(a + b) =$ $\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

sen $(a - b) =$ $\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

cos $(a + b) =$ $\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

cos $(a - b) =$ $\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

tg $(a + b) =$ $\dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

tg $(a - b) =$ $\dfrac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

» **Represente** os arcos a seguir como uma soma ou diferença dos arcos notáveis (30°, 45° e 60°).

$15° =$ $45° - 30°$ ou $60° - 45°$

$75° =$ $30° + 45°$

$105° =$ $45° + 60°$

Resolva os exercícios complementares 13 a 21, 31 e 32.

ARCO DUPLO

Guia de estudo

1

Fórmulas de arcos duplos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 138 a 139.

» **Escreva** as fórmulas dos arcos duplos enunciados a seguir.

sen $2x =$ $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

cos $2x =$ $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

tg $2x =$ $\dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

» **Expresse** cos $2x$ em função de cos x.

cos $2x =$ $2 \cos^2 x - 1$

» **Expresse** cos $2x$ em função de sen x.

cos $2x =$ $1 - 2 \text{ sen}^2 x$

Resolva os exercícios complementares 33 a 34.

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

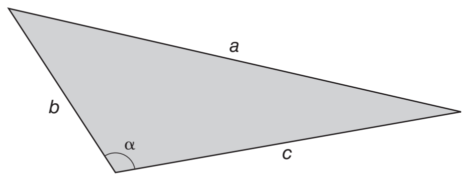
Guia de estudo

1

Lei dos cossenos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 143.

» **Escreva** a lei dos cossenos para o triângulo da figura a seguir.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$

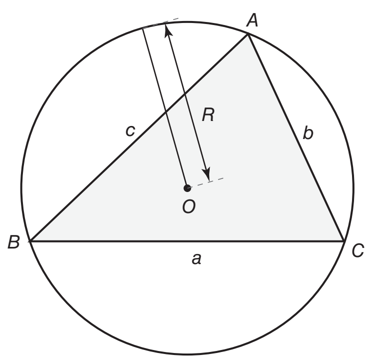
Resolva os exercícios complementares 22 a 28 e 35.

2

Lei dos senos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 146.

» **Escreva** a lei dos senos para o triângulo da figura a seguir.



$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$

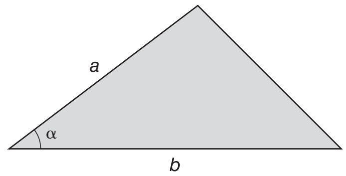
Resolva os exercícios complementares 36 e 37.

3

Área de um triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido entre eles

Encontrei essas informações na(s) página(s) 149.

» **Escreva** a fórmula do cálculo da área do triângulo *ABC* abaixo em função de *a*, *b* e α:



$A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen } \alpha$

Resolva os exercícios complementares 38 e 39.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **relacione** os exercícios do item anterior aos conteúdos correspondentes vistos no capítulo.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e **resolvam** os exercícios que listaram. Se as dúvidas persistirem, **formulem** questões para o professor a fim de esclarecê-las.

resposta pessoal

Sintetize

» **Releia** os conceitos estudados e **escreva** as ideias principais deste capítulo.

resposta pessoal

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 4	
Abertura	
Seção 4.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 4.1	
Conteúdo digital	
Seção 4.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 4.2	
Seção 4.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 4.3	
Seção 4.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 4.5	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

CAD_EST_MAT_CAP 04.indd 47 08/09/10 08:43:40

PARTE I

Capítulo 5

Funções trigonométricas

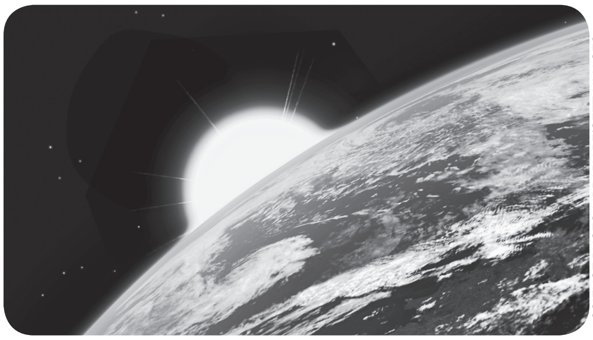
Para começar o estudo

» **Observe** a situação e **classifique** as afirmações como verdadeiras $\boxed{V}$ ou falsas $\boxed{F}$.

Em muitas situações de nosso cotidiano estão presentes movimentos periódicos, isto é, que se repetem em intervalos de tempo iguais. Um relógio, por exemplo, executa um movimento periódico, assim como a Terra girando em torno do Sol ou dela mesma, ou ainda o nível do mar subindo e descendo de acordo com as marés.

ROY OOMS/MASTERFILE/ OTHER IMAGES

MULTIART/SHUTTERSTOCK



SCIENCE PHOTO LIBRARY RF/GETTY IMAGES

SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

- [F] A roda de um carro em movimento descreve sempre um movimento periódico.
- [V] O ponteiro das horas de um relógio em funcionamento dá $\frac{1}{12}$ de volta a cada hora.
- [F] Se um planeta dá uma volta em torno de seu Sol a cada 3 anos, ele dará 3 voltas em 6 anos.
- [V] Se o coração de uma pessoa dá 70 batimentos em 1 minuto, o intervalo entre dois batimentos é de $\frac{1}{70}$ de minuto.

AS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

função seno: É a função que associa a cada número real *x* o valor do seno desse número.

função cosseno: É a função que associa a cada número real *x* o valor do cosseno desse número.

período: É o menor intervalo no qual uma função periódica repete todos os valores possíveis de sua imagem. É também o intervalo de tempo entre dois estados idênticos de um movimento periódico.

Guia de estudo

1

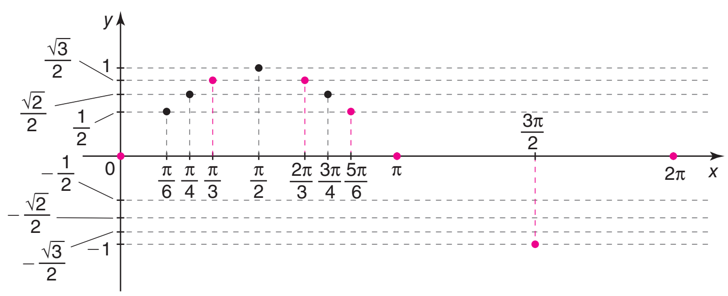
O gráfico da função seno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 158 e 159.

» **Determine** os valores de $f(x) = \text{sen } x$ para cada x indicado a seguir e complete a tabela.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

» Com base na tabela anterior, **represente** no plano cartesiano a seguir os pares ordenados (x, y), em que $y = \text{sen } x$.



» **Responda** com suas palavras:

- Existe o valor de $f(x) = \text{sen } x$ para qualquer valor real de x?

  Existe o valor de $f(x) = \text{sen } x$ para qualquer valor real de x.

- Se sua resposta à questão anterior foi "não existe", quais são os valores reais de x para os quais não existe $f(x) = \text{sen } x$?

» **Observe** o gráfico da função seno no livro-texto e **escreva** no quadro a seguir o valor mínimo e o valor máximo dessa função.

Função seno

Valor mínimo: -1

Valor máximo: 1

» **Escreva** o domínio e a imagem da função seno.

$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

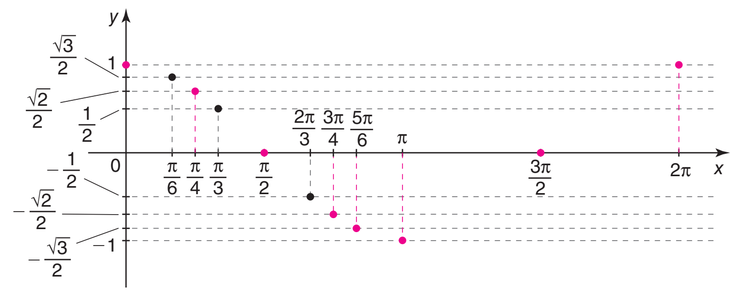
2
O gráfico da função cosseno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 163

» Determine os valores de $f(x) = \cos x$ para cada x indicado a seguir e complete a tabela.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

» Com base na tabela anterior, **represente** no plano cartesiano a seguir os pares ordenados (x, y), em que $y = \cos x$.



» **Compare** o domínio e o conjunto imagem das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$.

	$f(x) = \text{sen } x$	$g(x) = \cos x$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Conjunto imagem	$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

» **Imagine** os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$. Eles têm a mesma forma? **Descreva** um procedimento para obter o gráfico de f como uma transformação do gráfico de g.

Sim. Como $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } x$, temos que o gráfico da função f pode ser obtido por uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ para a direita do gráfico de g.

3
Período das funções seno e cosseno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 167

» **Explique** por que podemos afirmar que as funções seno e cosseno são periódicas e determine o período dessas funções.

Essas funções são periódicas porque $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen } x$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, com $k \in \mathbb{Z}$, para qualquer x real. O período dessas funções é 2π.

Resolva os exercícios complementares 1 a 13 e 49.

CAD_EST_MAT_CAP 05.indd 50 08/09/10 08:45:00

MOVIMENTOS PERIÓDICOS

Termo e conceito

Defina com suas próprias palavras o termo a seguir.

movimento periódico: É um mesmo movimento realizado, repetidas vezes, em intervalos de tempo iguais.

Guia de estudo

1

Movimentos periódicos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 170 e 171.

Leia a definição e **identifique** o conceito completando a lacuna.

O intervalo de tempo necessário para a realização de cada um dos movimentos periódicos recebe o nome de período.

O número de movimentos periódicos realizados em determinada unidade de tempo é chamado de frequência do movimento.

Escreva a expressão matemática que relaciona o período p e a frequência f de um movimento periódico.

$$p = \frac{1}{f}$$

A seguir há um exercício parcialmente resolvido. Nos quadros à esquerda, há comentários explicando as etapas da resolução. **Complete** a resolução do exercício.

Exercício

Um sistema cartesiano ortogonal é associado ao plano de uma circunferência de raio 3, de modo que o centro da circunferência coincida com a origem do sistema de eixos. Um ponto P gira sobre essa circunferência no sentido anti-horário com velocidade constante de 2 rotações por minuto. Determine as coordenadas de P cinco segundos depois de passar pelo ponto $A(3, 0)$.

1. Efetuamos a conversão da unidade de frequência: de rotação por minuto para rotação por segundo.

Resolução

2 rotações por minuto equivalem a $\frac{1}{30}$ rotação por segundo.

Assim, o período p do movimento periódico é dado por:

2. Calculamos o período p.

$$p = \frac{1}{\frac{1}{30}} = 30$$

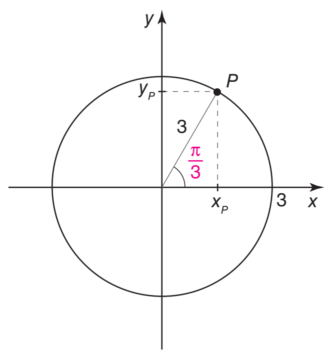
Sendo α a medida, em radiano, do arco percorrido pelo ponto P em 5 segundos, temos, pela regra de três:

3. Determinamos a medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$, por meio de uma regra de três.

Medida do arco (rad)	Tempo (segundo)
2π	30
α	5

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ rad

4. Para facilitar a visualização, representamos P em um esquema.



Assim, a abscissa x_P e a ordenada y_P do ponto P no instante considerado são dadas por:

5. Determinamos as coordenadas do ponto P.

- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{x_P}{3} \Rightarrow$ $x_P = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $\text{sen}\, \frac{\pi}{3} = \frac{y_P}{3} \Rightarrow$ $y_P = 3 \,\text{sen}\, \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Portanto, as coordenadas de P são $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Resolva os exercícios complementares 50 a 65.

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os conceitos a seguir.

função tangente:

Sendo D o conjunto dos números reais x para os quais existe tg x, a função que associa cada número x do conjunto D ao valor tg x é chamada de função tangente ($y = \text{tg } x$).

função cotangente:

Sendo D o conjunto dos números reais x para os quais existe cotg x, a função que associa cada número x do conjunto D ao valor cotg x é chamada de função cotangente ($y = \text{cotg } x$).

função cossecante:

Sendo D o conjunto dos números reais x para os quais existe cossec x, a função que associa cada número x do conjunto D ao valor cossec x é chamada de função cossecante ($y = \text{cossec } x$).

função secante:

Sendo D o conjunto dos números reais x para os quais existe sec x, a função que associa cada número x do conjunto D ao valor sec x é chamada de função secante ($y = \text{sec } x$).

Guia de estudo

1

Função tangente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 176 e 177.

» **Représente** a seguir a relação que expressa a tangente de um arco trigonométrico x em função do seno e do cosseno de x.

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

» **Explique** com suas palavras por que não é possível determinar o valor de $y = \text{tg } x$ para alguns valores de x e cite alguns desses valores.

Como a tangente de x é o quociente entre o seno de x e o cosseno de x, não podemos determinar o valor de $y = \text{tg } x$ para os valores de x em que $\cos x = 0$, pois não é possível dividir por zero. Alguns desses valores são $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{2}$.

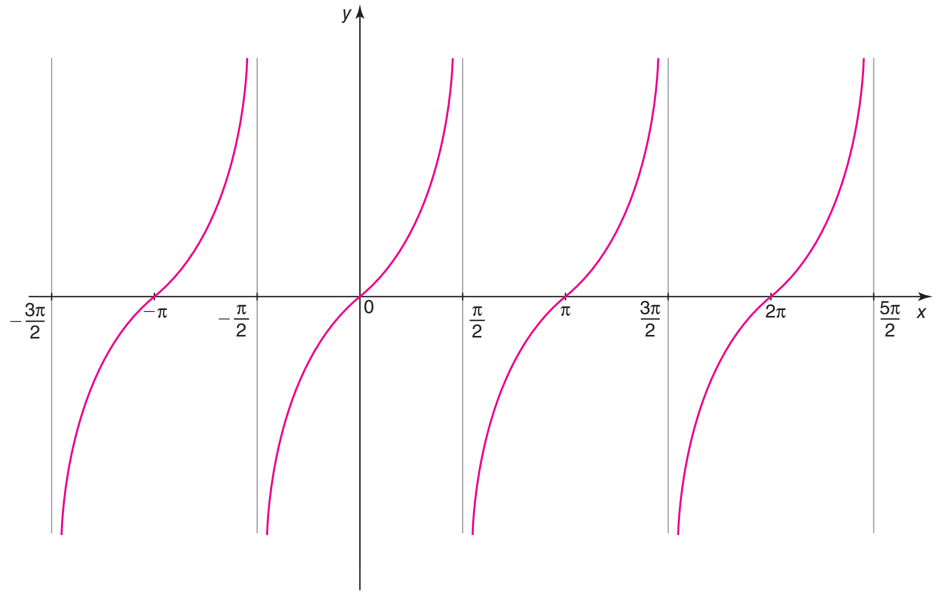
» **Descreva** o domínio, o conjunto imagem e o período da função tangente ($y = \text{tg } x$).

Domínio: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem: $\mathbb{R}$

Período: π

» **Trace** o esboço do gráfico da função tangente $y = \text{tg } x$.



2

Função cotangente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 182.

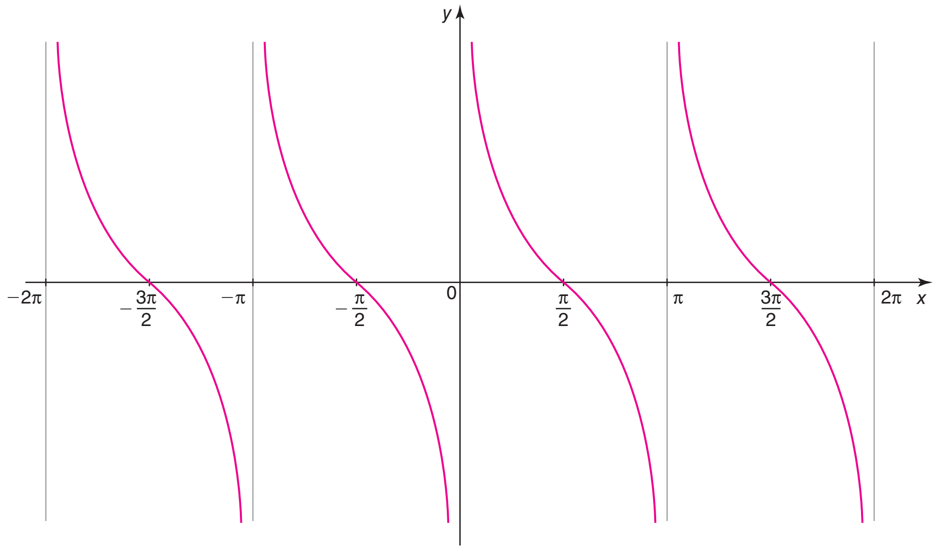
» **Represente** a seguir a relação que expressa a cotangente de um arco trigonométrico x em função do seno e do cosseno de x.

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

» **Observe** o gráfico de $y = \text{cotg } x$ no livro-texto e **explique** por que o domínio dessa função é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

Como a cotangente de x é o quociente do cosseno pelo seno de x, deduzimos que a condição de existência da cotg x é sen $x \neq 0$. Assim, o domínio da função $y = \text{cotg } x$ é o conjunto cujos elementos são as soluções reais da inequação $\cos x \neq 0$.

Trace o esboço da função cotangente $y = \text{cotg } x$.



Resolva os exercícios complementares 14 a 21.

3 Função cossecante

Encontrei essas informações na(s) página(s) 185.

Observe no livro-texto o gráfico da função $y = \text{cossec } x$ e **explique** se há solução para a equação $\text{cossec } x = 0$. Justifique sua resposta.

A equação não tem solução porque a função $y = \text{cossec } x$ não possui o zero em sua imagem.

A função $y = \text{cossec } x$ é definida para $x = \pi$? Justifique sua resposta.

Como cossec x pode ser dada pelo inverso de sen x, desde que sen $x \neq 0$, não podemos determinar cossec π porque sen $\pi = 0$.

4 Função secante

Encontrei essas informações na(s) página(s) 185 e 187.

Imagine os gráficos das funções $f(x) = \text{cossec } x$ e $g(x) = \text{sec } x$. Eles têm a mesma forma? **Descreva** um procedimento para obter o gráfico de g como uma transformação do gráfico de f.

Sim. Como $\text{cossec}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sec } x$, temos que o gráfico da função $g(x) = \text{sec } x$ pode ser obtido por uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda do gráfico de f.

Resolva os exercícios complementares 22 a 27.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os conceitos a seguir.

função arco-seno: É a função que associa cada número real x do intervalo $[-1, 1]$ ao número real y tal que sen $y = x$.

função arco-cosseno: É a função que associa cada número real x do intervalo $[-1, 1]$ ao número real y tal que cos $y = x$.

função arco-tangente: É a função que associa cada número real x ao número real y tal que tg $y = x$.

Guia de estudo

1 Função arco-seno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 191 e 192.

Complete a tabela, **escrevendo** os valores dos arcos-senos indicados.

arcsen -1	arcsen $-\frac{1}{2}$	arcsen 0	arcsen $\frac{1}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$

arcsen $\frac{\sqrt{2}}{2}$	arcsen $\frac{\sqrt{3}}{2}$	arcsen 1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Descreva o domínio e o conjunto imagem da função $y = \text{arcsen } x$.

Domínio: $[1, -1]$

Imagem: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Resolva os exercícios complementares 28 a 34.

2 Função arco-cosseno

Encontrei essas informações na(s) página(s) 194 e 195.

Descreva o domínio e o conjunto imagem da função $y = \text{arccos } x$.

Domínio: $[1, -1]$

Imagem: $[0, \pi]$

Resolva os exercícios complementares 35 a 41.

3 Função arco-tangente

Encontrei essas informações na(s) página(s) 197.

Descreva o domínio e o conjunto imagem da função $y = \text{arctg } x$.

Domínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Resolva os exercícios complementares 42 a 48.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Complete o esquema** a seguir que relaciona os principais conceitos aprendidos no capítulo.

Função	$y = \text{sen } x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg } x$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
Imagem	$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$	$\mathbb{R}$
Período	2π	2π	2π

Função	$y = \text{cotg } x$	$y = \text{cossec } x$	$y = \sec x$
Domínio	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
Imagem	$\mathbb{R}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$
Período	π	2π	2π

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 5	
Abertura	
Seção 5.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 5.1	
Conteúdo digital	
Seção 5.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 5.2	
Conteúdo digital	
Seção 5.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 5.3	
Seção 5.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 5.4	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE II

Capítulo 6

Matrizes

Seções:
6.1 O conceito de matriz
6.2 Operações entre matrizes

Para começar o estudo

Analise a situação e **classifique** as afirmações em verdadeiras V ou falsas F.

Uma vacina está sendo testada em pacientes de três capitais brasileiras: São Paulo, Rio de Janeiro e Porto Alegre. Essa vacinação atinge três faixas etárias, conforme a tabela a seguir:

Faixa	Idade (em anos)
1	20 a 29
2	30 a 39
3	40 a 49


BOB PARDUE/MEDICAL LIFESTYLE/ALAMY/OTHER IMAGES

O número de pacientes a serem vacinados, em cada faixa etária e por cidade, é dado pela tabela ao lado:

	Faixa 1	Faixa 2	Faixa 3
São Paulo	1.230	2.085	561
Rio de Janeiro	842	916	484
Porto Alegre	975	652	568

A dosagem da vacina vai ser medida com base na faixa etária do paciente. A dose a ser aplicada em cada faixa é dada pela tabela ao lado:

Faixa	Dosagem (em mL)
1	3
2	5
3	7

- V O total de pacientes que pertencem à faixa 3 é 1.613 pessoas.
- V Do total de pacientes, 3.876 são de São Paulo.
- V Ao todo serão necessários aproximadamente 9 litros dessa vacina para atender os pacientes da Faixa 1.
- V Para atender todos os pacientes da cidade do Rio de Janeiro serão necessários aproximadamente 10 litros dessa vacina.
- F Em Porto Alegre serão utilizados cerca de 14 litros de vacina.

O CONCEITO DE MATRIZ

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

matriz $m \times n$: É toda tabela de números dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

matriz quadrada: É toda matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.

matriz identidade: É o nome dado à matriz [1] e a toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a zero.

matriz nula: É toda matriz cujos elementos são iguais a zero.

matriz transposta: A transposta de uma matriz *A* é a matriz A^t tal que os números que formam cada coluna *i* de A^t são ordenadamente iguais aos números que formam a linha *i* de *A*.

Guia de estudo

1

Definição

Encontrei essas informações na(s) página(s) 229.

Escreva o que representam os termos das notações a seguir.

matriz

$A_{m \times n}$

m representa o número de linhas da matriz *A*.

n representa o número de colunas da matriz *A*.

elemento

a_{ij}

i representa a linha em que está localizado o elemento *a*.

j representa a coluna em que está localizado o elemento *a*.

Dê um exemplo de uma matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $b_{32} = 5$.

resposta possível:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2

Igualdade de matrizes

Encontrei essas informações na(s) página(s)

231 e 232.

» Abaixo há um exercício e etapas da sua resolução. Nos quadros à esquerda, alguns comentários explicam parte da resolução. Baseie-se nas informações dadas e **complete** o exercício.

Exercício

Determine o número real x tal que

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & x^2-1 \end{pmatrix}.$$

Resolução

Temos:

1. Igualamos os elementos correspondentes e resolvemos as equações obtidas.

$$\begin{cases} x+1=3 \\ 2=2 \\ -1=-1 \\ x^2-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ x^2-1=3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ x^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

2. Determinamos a solução, que é o valor que satisfaz todas as equações.

Portanto, a solução é $x =$ 2.

Resolva os exercícios complementares 1 a 6 e 29 a 31.

Faça a conexão

» **Identifique** aplicações dos conceitos estudados nesta seção em situações do dia a dia. **Selecione** uma e **descreva-a** abaixo.

resposta possível: organização de dados em tabela.

OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos a seguir.

matriz oposta: Duas matrizes do mesmo tipo são opostas entre si quando cada elemento de uma delas é o oposto de seu correspondente na outra. Indica-se a oposta da matriz A por $-A$.

matriz inversa: Duas matrizes quadradas de mesma ordem são inversas entre si quando o produto delas é a matriz identidade. Indica-se a inversa de A por A^{-1}.

Guia de estudo

1 Adição e subtração de matrizes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 233 e 234.

Determine a matriz soma e a matriz diferença dos itens a seguir.

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}-e_{11} & d_{12}-e_{12} & d_{13}-e_{13} \\ d_{21}-e_{21} & d_{22}-e_{22} & d_{23}-e_{23} \\ d_{31}-e_{31} & d_{32}-e_{32} & d_{33}-e_{33} \end{pmatrix}$

Complete o esquema com os nomes das propriedades da adição de matrizes e **dê exemplos** utilizando matrizes de mesmo tipo, A, B, C e O (em que O é a matriz nula).

Propriedades da adição de matrizes

P1. Associativa
Exemplo
$(A + B) + C = A + (B + C)$

P2. Comutativa
Exemplo
$A + B = B + A$

P3. Elemento Neutro
Exemplo
$A + O = O + A = A$

P4. Elemento Oposto
Exemplo
$A + (-A) = (-A) + A = O$

2 Multiplicação de um número real por uma matriz

Encontrei essas informações na(s) página(s) 235.

» Multiplicando-se um número k por uma matriz A, obtém-se uma matriz B. **Descreva** o procedimento para a obtenção da matriz B por meio dessa multiplicação.

Cada elemento da matriz B é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

Resolva os exercícios complementares 7 a 10 e 32.

3 Produto de linha por coluna

Encontrei essas informações na(s) página(s) 237.

» Marque com um X o termo que completa a frase abaixo corretamente.

O produto de uma linha de uma matriz por uma coluna de outra matriz, quando existe, resulta em __________.

- [ ] uma matriz
- [x] um número
- [ ] uma coluna
- [ ] uma linha

» Abaixo há um esquema que ajuda a visualizar a multiplicação da 3ª linha de uma matriz M pela 2ª coluna de uma matriz N. Complete o esquema **escrevendo a expressão** que resulta dessa multiplicação.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \\ m_{41} & m_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$$

$m_{31} \cdot n_{12} + m_{32} \cdot n_{22}$

4

Multiplicação de matrizes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 238.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. Nos quadros à esquerda, alguns comentários explicam as etapas da resolução. **Leia-os** e **complete** o exercício.

Exercício

Determine o produto da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ pela matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução

1. Verificamos se o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B e determinamos o tipo da matriz produto.

Como a matriz A é 2×2 e a matriz B é 2×3, a matriz $A \cdot B$ será 2×3.
Ou seja, ela terá 2 linhas e 3 colunas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} é dado pelo produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B. Dessa forma:

2. Efetuamos o produto de cada linha da matriz A por cada coluna da matriz B.

$a_{11} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = -2 - 6 = -8$

$a_{12} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13$

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$

$a_{21} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = -1 - 8 = -9$

$a_{22} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 2 + 12 = 14$

$a_{23} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$

3. Escrevemos a matriz produto.

O produto é, portanto, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & 13 & 2 \\ -9 & 14 & 1 \end{pmatrix}$.

» Nas expressões enumeradas de 1 a 5, abaixo, admita que sejam possíveis as operações entre as matrizes A, B, C e I, em que I é a matriz identidade. **Escreva** esses números nos quadrinhos da direita, **associando** o nome da propriedade da multiplicação de matrizes à expressão.

1	$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$	1	distributiva à esquerda
2	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	3	associativa
3	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	4	elemento neutro
4	$A \cdot I = I \cdot A = A$	5	transposta do produto
5	$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$	2	distributiva à direita

Resolva os exercícios complementares 11 a 24 e 33 a 39.

5

Matriz inversa

Encontrei essas informações na(s) página(s) 240 e 241.

» **Abaixo há um exercício e etapas de sua resolução. À esquerda, há comentários explicando essas etapas. Leia a resolução e complete-a.**

Exercício

Determine a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução

1. Inicialmente escrevemos a suposta matriz inversa de A na forma genérica e aplicamos a igualdade $A \cdot A^{-1} = I$.

Sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz inversa de A,

temos que $A \cdot A^{-1} = I_2$, portanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Efetuamos o produto da matriz dada pela sua suposta inversa na forma genérica.

Efetuando o produto acima, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Pela igualdade entre a matriz obtida e a matriz identidade montamos um sistema.

Obtemos assim o sistema:

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 0 \\ 3a = 0 \\ 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -1 \\ d = \frac{2}{3} \end{cases}$$

A matriz inversa de A é, portanto, $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Resolva os exercícios complementares 25 a 28.

FECHANDO O CAPÍTULO

» Liste os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Complete o esquema** organizando os conceitos principais aprendidos no capítulo.

- Matriz $A_{m \times n}$
  - Operações com matrizes
    - Adição
    - Subtração
    - Multiplicação
      - Matriz por um número real
      - Matriz por outra matriz
      - Matriz inversa é a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$

Organizador de estudos

Use a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 6	
Abertura	
Seção 6.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 6.1	
Seção 6.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 6.2	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE II

Capítulo
7

Sistemas lineares e determinantes

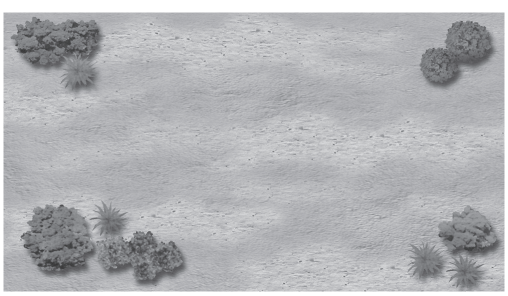
Para começar o estudo

Observe as equações obtidas das situações a seguir.


DIOMEDIA

A soma das idades de dois amigos é igual a 65 anos. Se as suas idades forem representadas por x e y, podemos afirmar que $x + y = 65$. **(equação 1)**

A diferença entre dois números reais positivos é igual a 5. Se esses números são x e y, com $x > y$, temos $x - y = 5$. **(equação 2)**



O perímetro de um terreno retangular mede 130 metros. Se as medidas do comprimento e da largura, em metro, são representadas por x e y, temos $2x + 2y = 130$. **(equação 3)**


DIOMEDIA

Paula e Fabiana colecionam CDs de música. Juntas, elas têm 78 CDs. Sendo x e y o número de CDs de Paula e Fabiana, respectivamente, elas têm $x + y = 78$. **(equação 4)**

Cada uma das equações apresentadas acima admite como soluções pares ordenados (x, y). Sobre essas soluções, classifique cada afirmação como verdadeira $\boxed{V}$ **ou falsa** $\boxed{F}$**.**

- $\boxed{F}$ A equação 1 tem apenas uma solução.
- $\boxed{V}$ A equação 2 possui várias soluções.
- $\boxed{V}$ O par (35, 30) é, ao mesmo tempo, solução das equações 1 e 2.
- $\boxed{F}$ As equações 1 e 4 têm uma solução em comum.
- $\boxed{V}$ As equações 1 e 3 têm exatamente as mesmas soluções.

SISTEMAS LINEARES

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

equação linear:

É toda equação de incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, com $a_1, a_2, ..., a_n$ e b reais.

solução de uma equação linear:

Toda sequência $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de n números é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, quando a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ é verdadeira.

equação linear homogênea:

É toda equação linear cujo termo independente das variáveis é zero.

solução trivial:

É a ênupla (0, 0, 0,...,0), solução de uma equação homogênea.

sistema linear:

É um sistema de equações formado apenas por equações lineares.

sistema linear homogêneo:

É um sistema de equações formado apenas por equações lineares homogêneas.

solução de um sistema linear:

É uma solução comum a todas as equações de um sistema linear.

conjunto solução:

É o conjunto formado por todas as soluções de um sistema linear.

Guia de estudo

1

Equação linear

Encontrei essas informações na(s) página(s) 248 e 249.

» **Verifique** se os pares (x, y) a seguir são soluções da equação $x + y = 4$. **Justifique** sua resposta conforme os exemplos.

a) (1, 3): sim, pois $1 + 3 = 4$

b) (2, 5): não, pois $2 + 5 \neq 4$

c) (0, 4): sim, pois $0 + 4 = 4$

d) (−2, 6): sim, pois $-2 + 6 = 4$

e) (5, −2): não, pois $5 + (-2) \neq 4$

f) (8, −4): sim, pois $8 + (-4) = 4$

- Quantas soluções tem a equação acima?

  infinitas

» **Escreva** algumas soluções da equação $0x + 0y = 10$. **Justifique** sua resposta.

A equação não tem soluções, pois o primeiro membro da igualdade será zero, independentemente dos valores de *x* e de *y*.

2

Equação homogênea

Encontrei essas informações na(s) página(s) 250.

» Toda equação linear homogênea admite pelo menos uma solução. **Determine** essa solução.

Uma equação linear homogênea é a que possui termo independente igual a zero e sempre tem como solução a solução trivial, isto é, a ênupla (0, 0, 0,..., 0).

Resolva os exercícios complementares 1, 2 e 84 a 89.

3

Sistema linear

Encontrei essas informações na(s) página(s) 251 e 252.

» **Verifique** se os pares (x, y) a seguir são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

Justifique sua resposta conforme o exemplo.

a) (2, 2): Não, pois não é solução da segunda equação $(3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \neq 6)$.

b) $\left(3, -\frac{3}{2}\right)$: Não, pois não é solução da primeira equação $\left(3 + \left(-\frac{3}{2}\right) \neq 4\right)$.

c) (0, 4): Não, pois não é solução da segunda equação $(0 + 8 \neq 6)$.

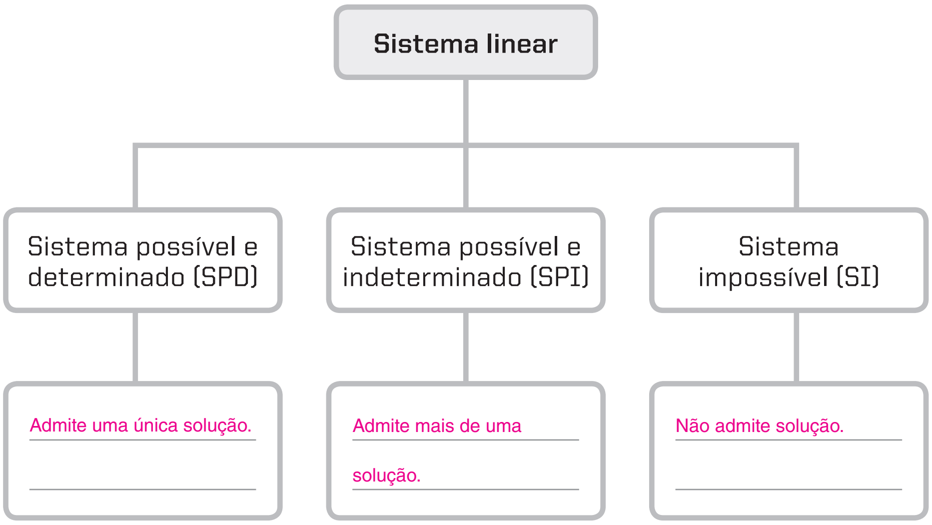
d) (−2, 6): Sim, pois é solução da primeira e da segunda equação.

4

Classificação de um sistema linear

Encontrei essas informações na(s) página(s) 253.

» No esquema abaixo, há a classificação de um sistema linear. Complete cada quadro **escrevendo** a quantidade de soluções do sistema.



» **Complete** a frase.

Todo sistema linear homogêneo é possível, pois admite pelo menos a solução trivial. Se essa for a única solução do sistema, ele será classificado como SPD; e se houver outras soluções, além dessa, o sistema será classificado como SPI.

Resolva os exercícios complementares 3 a 9.

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Termo e conceito

sistema linear escalonado:

Defina com suas próprias palavras o termo a seguir.

É um sistema linear que tem as seguintes características: todas as equações possuem as incógnitas na mesma ordem; em cada equação existe ao menos um coeficiente, de alguma incógnita, não nulo; e existe uma ordem para as equações de tal forma que, de uma equação para a outra, aumenta o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo.

Guia de estudo

1 Tipos de sistema linear escalonado

Encontrei essas informações na(s) página(s) 256 e 257.

Explique com suas palavras quais são as diferenças entre os sistemas lineares escalonados do primeiro tipo e os do segundo tipo.

O sistema linear escalonado de primeiro tipo é aquele que tem o número de equações igual ao número de incógnitas. Esse tipo de sistema é sempre possível e determinado. Já o do segundo tipo é aquele que tem o número de equações menor que o de incógnitas. Esse tipo de sistema é sempre possível e indeterminado.

2 Resolução do sistema linear escalonado do 1º tipo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 256.

Abaixo há um exercício e sua resolução. **Escreva** comentários, à esquerda, explicando as etapas da resolução.

Exercício

Resolva o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 1 & \text{(I)} \\ \quad\ \ 3y - \ \ z = 2 & \text{(II)} \\ \qquad\quad\ \ 2z = 8 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolução

Da equação (III), temos:

$2z = 8 \Rightarrow z = 4$

Substituindo o valor de z na equação (II), temos:

$3y - 4 = 2 \Rightarrow 3y = 6 \therefore y = 2$

Substituindo os valores de z e de y na equação (I), temos:

$x + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 1 \Rightarrow x + 8 - 12 = 1 \therefore x = 5$

Logo, a solução do sistema é (5, 2, 4).

1. Resolvemos a equação que tem uma única incógnita, obtendo o valor de *z*.

2. Resolvemos a equação que tem duas incógnitas, substituindo *z* pelo valor obtido.

3. Para determinar o valor de *x*, substituímos os valores de *z* e de *y* na equação (I).

3 Resolução do sistema linear escalonado do 2º tipo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 256 e 257.

» **Complete** a frase sobre a classificação do sistema.

Todo sistema linear escalonado do 2º tipo é possível e indeterminado.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Resolva o sistema linear a seguir utilizando y como variável livre:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 & \text{(I)} \\ \quad 3y + z = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolução

A partir da equação (II), escrevemos *z* em função de *y*.

$3y + z = 3 \Rightarrow z = 3 - 3y$

Substituímos a expressão encontrada para *z* na equação (I).

$2x - y + z = 5 \Rightarrow 2x - y + (3 - 3y) = 5 \Rightarrow x = 1 + 2y$

Escrevemos a solução do sistema em função de *y*.

O conjunto solução do sistema é, portanto,

$S = \{(1 + 2y, y, 3 - 3y), \text{com } y \in \mathbb{R}\}$.

Resolva os exercícios complementares 10 e 11.

4 Escalonamento de um sistema linear

Encontrei essas informações na(s) página(s) 258 a 260.

» Numere de 1 a 4 os quadrinhos abaixo e **ordene** os procedimentos para escalonar o sistema a seguir. Depois, **complete** as etapas da resolução.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 8 & \text{(I)} \\ 3x - y - 2z = 1 & \text{(II)} \\ 4x + 4y + z = 7 & \text{(III)} \end{cases}$$

[3] Substitui-se a equação (III) do novo sistema pela soma dela com a equação (II) multiplicada por −2, obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 8 & \text{(I)} \\ \quad 8y - 5z = -23 & \text{(II)} \\ \quad\quad 7z = 21 & \text{(III)} \end{cases}$$

4 No sistema linear escalonado, isola-se *z* na equação (III), substitui-se *z* na equação (II) para determinar *y* e substitui-se *y* e *z* na equação (I) para determinar *x*.

De (III): $z = 3$
De (II): $8y - 5 \cdot 3 = -23 \Rightarrow 8y = -8 \therefore y = -1$
De (I): $x - 3 \cdot (-1) + 3 = 8 \Rightarrow x = 2$
Logo, $S = \{(2, -1, 3)\}$.

1 ou 2 Substitui-se a equação (III) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por −4, obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 8 & \text{(I)} \\ 3x - y - 2z = 1 & \text{(II)} \\ 16y - 3z = -25 & \text{(III)} \end{cases}$$

2 ou 1 Substitui-se a equação (II) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por −3, obtendo-se o sistema:

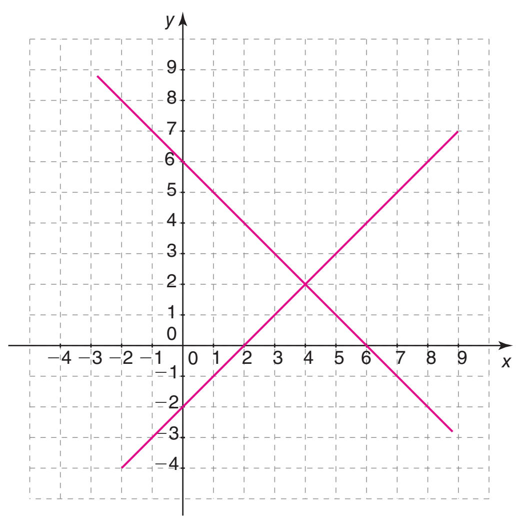
$$\begin{cases} x - 3y + z = 8 & \text{(I)} \\ 8y - 5z = -23 & \text{(II)} \\ 16y - 3z = -25 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolva os exercícios complementares 12 a 21 e 90 a 112.

5 Interpretação geométrica de um sistema linear com duas incógnitas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 262 a 264.

» **Represente** no plano cartesiano a seguir os gráficos das funções $x + y = 6$ e $x - y = 2$.



» **Resolva** o sistema abaixo e **interprete** graficamente a solução.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

A solução desse sistema é o par (4, 2), pois essas são as coordenadas do ponto de intersecção entre as retas que representam as duas equações do sistema.

Resolva os exercícios complementares 22 e 23.

OS SISTEMAS LINEARES E O CONCEITO DE DETERMINANTE

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos a seguir.

determinante de ordem 2:

É um número real associado a uma matriz de ordem 2 por meio de adições e multiplicações entre seus elementos. Precisamente, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos: det $A = ad - cb$

determinante de ordem 3:

É um número real associado a uma matriz de ordem 3 por meio de adições e multiplicações entre seus elementos. Precisamente, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, temos: det $A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Guia de estudo

1

Determinante de ordem 2

Encontrei essas informações na(s) página(s) 265 e 266.

» **Represente** a seguir a expressão do determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

2

Determinante de ordem 3

Encontrei essas informações na(s) página(s) 266 e 267.

» **Represente** a seguir a expressão do determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

» Abaixo, há um exercício e parte de sua resolução. Nos quadros à esquerda, alguns comentários explicam as etapas da resolução. **Complete-a** finalizando o exercício.

Exercício

Calcule o determinante dos coeficientes do sistema a seguir e verifique se este sistema é possível e determinado.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ 5x + y + z = -2 \end{cases}$$

Resolução

1. Inicialmente, escrevemos o determinante dos coeficientes das equações do sistema.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Utilizando a regra de Sarrus, calculamos o determinante.

$D = 2 + 20 + 6 - 20 + 1 + 12 = 21$

3. Classificamos o sistema como possível e determinado (SPD) se $D \neq 0$. Se $D = 0$, o sistema pode ser SPI ou SI.

Concluímos, portanto, que o sistema é possível e determinado.

Resolva os exercícios complementares 24 a 34.

3 Discussão de um sistema linear

Encontrei essas informações na(s) página(s) 269 a 273.

» **Responda** à seguinte questão: O que podemos afirmar sobre a classificação do seguinte sistema em função do parâmetro real *k*? Justifique sua resposta.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + ky = -3 \end{cases}$$

Como o determinante dos coeficientes é $D = 2k + 4$, o sistema é SPD se $k \neq -2$, pois assim temos $D \neq 0$.

Se $k = -2$, escalonamos o sistema e descobrimos que ele é impossível (SI).

Resolva os exercícios complementares 35 a 45 e 113 a 115.

» **Descreva** o procedimento para discutir um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas.

Escalonamos o sistema em função do(s) parâmetro(s). Encontramos os valores dos parâmetros para que o sistema seja possível (1º ou 2º tipo) ou impossível.

Resolva os exercícios complementares 46 a 51 e 116.

AMPLIANDO O CONCEITO DE DETERMINANTE

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos a seguir.

cofator:

O cofator de um elemento a_{ij} da matriz A é dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, onde D_{ij} é o determinante da submatriz obtida com a eliminação, na matriz A, da linha e da coluna do elemento a_{ij}.

determinante de ordem n:

O determinante da matriz de ordem 1, $A = (a_{11})$, é o número a_{11}. O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha pelos respectivos cofatores.

Guia de estudo

1

Determinante de ordem 1

Encontrei essas informações na(s) página(s) 274.

» **Responda:** Qual é o determinante de uma matriz unitária $A = [a_{ij}]$? Justifique sua resposta.

O determinante dessa matriz é det $A = a_{ij}$, pois o determinante de uma matriz de ordem 1 é igual ao seu único elemento.

2

Cofator

Encontrei essas informações na(s) página(s) 274 e 275.

» **Determine** os cofatores dos elementos da primeira linha da matriz a seguir:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- cofator do a_{11}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

- cofator do a_{12}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2$$

- cofator do a_{13}:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

3

Determinante de ordem *n*

Encontrei essas informações na(s) página(s) 276.

» **Utilize** os resultados obtidos no exercício anterior e **responda** às questões: De que forma podemos calcular o determinante da matriz a seguir sem utilizar a regra de Sarrus? Quanto vale esse determinante?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

O determinante dessa matriz pode ser calculado pela soma dos produtos de cada elemento da primeira linha por seu respectivo cofator. Dessa forma, o determinante é: $2 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = -19$

4

Teorema de Laplace

Encontrei essas informações na(s) página(s) 277.

» Numere de 1 a 3 os quadrinhos abaixo e **ordene** os procedimentos para calcular, pelo teorema de Laplace, o determinante da matriz a seguir, de forma a efetuar o menor número possível de cálculos, e **complete** a resolução.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Calculamos os cofatores dos elementos não nulos da linha escolhida.

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3$ e $A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -42$

$\boxed{1}$ Escolhemos a fila (linha ou coluna) com o maior número de elementos iguais a zero. Nesse caso, a linha 3.

$\boxed{3}$ Multiplicamos os elementos não nulos pelos seus respectivos cofatores e somamos os produtos.

$D = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-42) = -120$

Resolva os exercícios complementares 52 a 57 e 117.

5 Propriedades dos determinantes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 278 a 288.

» **Complete** o esquema a seguir sobre as propriedades dos determinantes, **exemplificando** a aplicação de cada uma.

Propriedades dos determinantes

respostas possíveis:

P1. Matrizes transpostas

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

P2. Fila nula

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

P3. Permutação de filas paralelas

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

P4. Produto de um número por um determinante

Exemplo

$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

P5. Filas paralelas iguais

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

P6. Filas paralelas múltiplas

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

P7. Determinante de uma matriz triangular

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$

P8. Soma de determinantes

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

P9. Combinação linear

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0$

P10. Teorema de Jacobi

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix}$

P11. Teorema de Cauchy

Exemplo

Seja: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$5 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} = 0$

P12. Teorema de Binet

Exemplo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 15 & 4 \end{vmatrix}$

Resolva os exercícios complementares 58 a 77 e 118.

6 Obtenção da matriz inversa

Encontrei essas informações na(s) página(s) 290 a 292.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Utilize o método apresentado no livro-texto para determinar a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolução

1. Calculamos o determinante da matriz A.

det A = $1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 6$

Como det $A \neq 0$, concluímos que existe A^{-1}.

2. Obtemos a matriz dos cofatores dos elementos de A, isto é, cof A.

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Obtemos a matriz adjunta de A, que é a transposta da matriz cof A.

$$\overline{A} = (\text{cof } A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Finalmente, determinamos a matriz A^{-1} utilizando a fórmula.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Resolva os exercícios complementares 78 a 83.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Complete o esquema** a seguir que relaciona os principais conceitos aprendidos no capítulo.

Classificação dos sistemas:

Sistema possível
- determinado (SPD): apenas uma solução
- indeterminado (SPI): mais de uma solução

Sistema impossível (SI): nenhuma solução

Cálculo de determinantes:

Matriz 2 × 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

det $A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Matriz 3 × 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

det $A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 7	
Abertura	
Seção 7.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 7.1	
Seção 7.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 7.2	
Conteúdo digital	
Seção 7.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 7.3	
Seção 7.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 7.4	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE II

Capítulo 8

Análise combinatória e binômio de Newton

Para começar o estudo

Observe a situação:

Um *shopping center* divide seus estacionamentos para automóveis em dois setores, A e B. O setor A é composto de três andares. Em cada andar, existem 28 filas paralelas com capacidade para 30 carros cada uma. O setor B é térreo e composto de 45 filas paralelas com capacidade para 42 carros cada uma.

JINYOUNG LEE/SHUTTERSTOCK

- **De acordo com esses dados, classifique cada afirmação como verdadeira V ou falsa F.**

V O setor A tem 2.520 vagas para automóveis.
F O estacionamento desse *shopping* comporta mais de 5.000 automóveis.
V O setor A tem 630 vagas a mais que o setor B.
F O setor B possui mais vagas que o setor A.
V O *shopping* possui um total de 4.410 vagas para automóveis.

O QUE É ANÁLISE COMBINATÓRIA

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos a seguir.

Análise combinatória: É o conjunto de métodos utilizados para resolver problemas de contagem de elementos a fim de atingir os resultados mais rapidamente do que contando-os um a um.

princípio fundamental da contagem: É o princípio que afirma que se um experimento *E* pode apresentar *n* resultados distintos e um experimento *F* pode apresentar *k* resultados distintos, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de *E* e *F*, nessa ordem, é dado pelo produto $n \cdot k$. Esse princípio pode ser generalizado para qualquer número finito de experimentos.

Guia de estudo

1 Princípio fundamental da contagem

Encontrei essas informações na(s) página(s) 306 a 310.

» **Complete** com a expressão cujo resultado é o número de possibilidades de escolha em cada uma das situações a seguir, conforme o exemplo:

Escolher um carro para comprar entre 6 opções de modelos e 8 opções de cores: $6 \cdot 8 = 48$

Escolher um sabor de sorvete e uma cobertura de um total de 12 sabores e 5 coberturas: $12 \cdot 5 = 60$

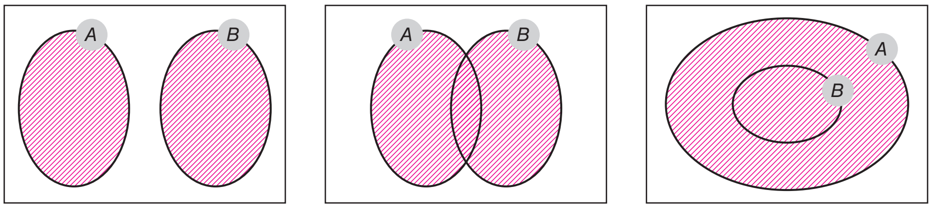
Escolher uma calça, uma camisa e um cinto entre 4 opções de calça, 8 opções de camisa e 3 opções de cinto: $4 \cdot 8 \cdot 3 = 96$

Resolva os exercícios complementares 34 a 52.

2 Princípio aditivo da contagem

Encontrei essas informações na(s) página(s) 312 e 313.

» Em cada um dos casos abaixo, **hachure** a região que representa a união dos conjuntos *A* e *B*, isto é, $A \cup B$.



» **Complete** a igualdade abaixo, em que *A* e *B* são dois conjuntos finitos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Faça a conexão

Folheie a seção 8.1 do livro-texto, relendo a parte teórica, as seções de exercícios resolvidos e de exercícios propostos e **identifique** problemas do dia a dia que podem ser resolvidos por meio do uso do princípio fundamental da contagem.

resposta possível: Determinar o número de possibilidades de combinações entre os números de uma loteria, contar as opções de placas de automóveis, determinar o número de cadeiras em um teatro, calcular a quantidade de possibilidades de combinações de peças de roupa.

Resolva os exercícios complementares 53 a 62.

Capítulo 8 Seção 8.2

FATORIAL

Termo e conceito

Defina com suas próprias palavras o conceito a seguir.

fatorial de *n*: O fatorial de um número natural n, com $n \geqslant 2$, é o produto de todos os números naturais de 1 até n. Os fatoriais de 0 e de 1 são iguais a 1.

Guia de estudo

1

Fatorial

Encontrei essas informações na(s) página(s) 315 e 317.

Escreva o valor dos fatoriais.

$1! =$ 1 $0! =$ 1

Escreva a propriedade fundamental dos fatoriais, para todo número natural n, com $n \geqslant 1$.

$n! = n \cdot (n - 1)!$

Dê um exemplo de aplicação da propriedade fundamental dos fatoriais na simplificação de frações.

resposta possível:

$\dfrac{(n+1)!}{n!} = n + 1$

Resolva os exercícios complementares 1 a 8.

CLASSIFICAÇÃO DOS AGRUPAMENTOS

Termos e conceitos

Identifique o termo ou o conceito que pode ser associado à definição:

1. É todo agrupamento em que não se considera a ordem dos elementos, isto é, mudanças na ordem não alteram o agrupamento. — combinação
2. É todo agrupamento em que se considera a ordem dos elementos, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento. — arranjo
3. É todo arranjo simples que pode ser formado com n elementos distintos tomados n a n. — permutação

Guia de estudo

1 Classificação dos agrupamentos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 318 e 319.

Classifique os agrupamentos descritos nas situações a seguir como arranjo ou combinação.

Formar um grupo de 5 alunos numa classe de 30 alunos.	combinação
Criar uma senha de quatro dígitos usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.	arranjo
Premiar com medalhas de ouro, prata ou bronze os três melhores atletas entre 10 que participam de uma competição.	arranjo
Escolher 6 números entre 60 para apostar numa loteria.	combinação

2 Arranjo simples

Encontrei essas informações na(s) página(s) 320.

Escreva o que representa cada um dos termos destacados a seguir.

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n representa o número de elementos do conjunto

p representa o número de elementos em cada agrupamento

Resolva os exercícios complementares 9 a 11 e 63 a 68.

3 Permutações simples

Encontrei essas informações na(s) página(s) 322 e 323.

Explique com suas palavras a diferença entre arranjo simples e permutação simples.

A permutação é um caso particular de arranjo simples de p elementos de um conjunto com n elementos.

No arranjo, o número de elementos é menor ou igual ao total de elementos do conjunto ($p \leq n$), enquanto na permutação o número de elementos em cada agrupamento é igual ao total de elementos do conjunto, isto é, $n = p$.

Escreva a fórmula do cálculo do número de permutações simples de *n* elementos.

$$P_n = n!$$

Resolva os exercícios complementares 12, 13 e 69 a 78.

4 Permutações com elementos repetidos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 326 a 328.

Abaixo há um exercício e algumas etapas de sua resolução e, à esquerda, alguns comentários. **Complete** a resolução do exercício.

Exercício

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MARMELADA?

Resolução

1. Contamos o total de letras e quantas vezes cada letra repetida aparece.

A palavra tem 9 letras, sendo duas letras M, três letras A, e as demais sem repetição. Assim, o número de anagramas é dado por:

2. Aplicamos a fórmula.

$$P_9^{(2,\,3)} = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 30.240$$

Portanto, podemos formar 30.240 anagramas.

Resolva os exercícios complementares 14 e 79 a 85.

5 Combinação simples

Encontrei essas informações na(s) página(s) 331 e 332.

Explique com suas palavras a diferença entre arranjo simples e combinação simples.

No arranjo simples, a ordem dos elementos é relevante no agrupamento, enquanto na combinação não é.

Escreva a fórmula do cálculo do número de combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*.

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Resolva os exercícios complementares 15, 16 e 86 a 106.

Capítulo 8 | Seção 8.4

O BINÔMIO DE NEWTON

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

binômio com expoente natural: É toda expressão algébrica da forma $(x + a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\{x, a\} \subset \mathbb{R}$.

números binomiais: É o número representado por $\binom{n}{p}$, que é igual ao número de combinações simples de n elementos tomados p a p, isto é, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n - p!)}$

Guia de estudo

1 O binômio de Newton

Encontrei essas informações na(s) página(s) 331, 336 e 337.

» **Represente** a seguir a expressão demonstrada por Newton para o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e os expoentes de x em ordem crescente.

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \dots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \dots + \binom{n}{n}x^na^0$$

» **Escreva** a fórmula do número binomial n sobre p.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Resolva os exercícios complementares 17 a 26.

2 Termo geral do binômio de Newton

Encontrei essas informações na(s) página(s) 340.

» **Complete** o quadro abaixo com o termo geral do binômio $(x + a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$, de acordo com a ordem dos expoentes de x.

Expoentes de x

Ordem crescente: $T = \binom{n}{p}x^pa^{n-p}$

Ordem decrescente: $T = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$

Resolva os exercícios complementares 27 a 33.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» Abaixo, há um resumo das ideias principais do capítulo. **Escreva** a explicação e a fórmula de cada conceito a seguir.

Explicações

Arranjo simples: a ordem dos elementos é considerada no agrupamento.

Combinação simples: a ordem dos elementos não é considerada no agrupamento.

Fórmulas

Arranjo simples	Combinação simples	Permutação simples	Permutação com repetição
$A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	$P_n = n!$	$P_n^{(n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k)} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

Binômio de Newton

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

ou

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}x^0a^n$$

Permutação com repetição

$$T = \binom{n}{p}x^pa^{n-p}$$

ou

$$T = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 8	
Abertura	
Seção 8.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 8.1	
Seção 8.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 8.2	
Seção 8.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 8.3	
Seção 8.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 8.4	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE II

Capítulo 9

Probabilidade

Para começar o estudo

Observe a situação.

Um baralho é formado por 52 cartas divididas em quatro grupos identificados pelos símbolos ♣, ♦, ♠ e ♥, chamados de **naipes**: paus, ouros, espadas e copas, respectivamente. Cada naipe é composto de 13 cartas: ás (A), valete (J), dama (Q), rei (K) e cartas numeradas de 2 a 10. Por exemplo, as cartas de espadas são:

OLGA POPOVA/ SHUTTERSTOCK

Assim, para cada número ou letra há quatro cartas, uma de cada naipe. Por exemplo, os quatro ases são:

ROMAN SIGAEV/ SHUTTERSTOCK

Sorteando-se ao acaso uma carta desse baralho, **classifique** as sentenças como verdadeiras V ou falsas F.

F A probabilidade de a carta escolhida ser um 2 é maior que a de ser um ás.

V A probabilidade de a carta escolhida ser numerada é maior do que a da carta ter uma letra.

F A probabilidade de se sortear um ás é igual a $\frac{1}{4}$.

F A probabilidade de se escolher um valete é menor que a de se escolher uma dama.

O CONCEITO DE PROBABILIDADE

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

experimento aleatório: É todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

espaço amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

evento: É o nome dado a cada subconjunto de um espaço amostral.

probabilidade: É o quociente entre o número de elementos de determinado evento e o número de elementos do espaço amostral, finito e não vazio, do qual esse evento é subconjunto.

evento complementar: O complementar de um evento A é o evento $\overline{A}$ formado pelos elementos do espaço amostral que não pertencem a A.

evento impossível: É um evento que nunca ocorre. É o evento vazio.

evento certo: É um evento que sempre ocorre. É o próprio espaço amostral.

Guia de estudo

1

Experimento aleatório

Encontrei essas informações na(s) página(s) 352 e 353.

» **Cite** dois exemplos de experimentos aleatórios, diferentes dos usados no livro.

resposta possível: Escolher uma pessoa ao acaso em um grupo ou retirar uma carta qualquer de um baralho.

2

Espaço amostral

Encontrei essas informações na(s) página(s) 353 e 354.

» Observe os experimentos aleatórios a seguir e **descreva** o espaço amostral de cada um deles.

Experimento 1: Prever o sexo de um bebê antes do nascimento.

Espaço amostral: masculino ou feminino

Experimento 2: Escolher um dia da semana para marcar um compromisso.

Espaço amostral: segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado ou domingo

Experimento 3: Adivinhar o mês de aniversário de alguém.

Espaço amostral: janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro ou dezembro

Experimento 4: Escolher um número natural ímpar menor que 10.

Espaço amostral: 1, 3, 5, 7 ou 9

3

Espaço amostral equiprovável

Encontrei essas informações na(s) página(s) 354.

Crie uma situação em que o espaço amostral seja equiprovável. **Crie** outra situação em que o espaço amostral não seja equiprovável. **Escreva** cada situação no respectivo quadro.

Espaço amostral equiprovável	Espaço amostral não equiprovável
resposta possível: Um cubo de madeira apresenta as letras A, B, C, D, E e F, estampadas uma em cada face. Lançando-se esse cubo sobre uma mesa, considera-se como resultado do experimento a letra da face voltada para cima. A probabilidade de sair uma letra é a mesma de sair qualquer outra; por isso o espaço amostral é equiprovável.	resposta possível: Um cubo de madeira tem a letra A estampada em cinco faces e a letra B estampada em uma face. Lançando-se esse cubo sobre uma mesa, considera-se como resultado do experimento a letra da face voltada para cima. É mais provável que saia a letra A do que a letra B; por isso, o espaço amostral não é equiprovável.

4 Definição de probabilidade

Encontrei essas informações na(s) página(s) 354.

» **Escreva** a fórmula do cálculo da probabilidade de ocorrer um evento *A* em um espaço amostral equiprovável *E*, finito e não vazio.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

» **Analisando** a fórmula anterior **classifique** as afirmações como V ou F.

- V A probabilidade de ocorrer um evento *A* de um espaço amostral *E* sempre é um número do intervalo [0, 1].
- F Quando um evento é certo, sua probabilidade é maior que 100%.
- V A probabilidade de um evento *A* pode ser expressa na forma de porcentagem.
- F Quando um evento é impossível de ocorrer, sua probabilidade é um número próximo do zero, mas não é zero.

Resolva os exercícios complementares 5 a 31.

5 Eventos complementares

Encontrei essas informações na(s) página(s) 357 e 358.

» **Determine** o evento complementar de cada um dos eventos citados nos experimentos a seguir.

Experimento 1: Prever o sexo de um bebê antes do nascimento.
Evento: O bebê ser do sexo masculino.
Evento complementar: O bebê ser do sexo feminino.

Experimento 2: Lançamento de um dado.
Evento: Obter um número menor que 3 na face superior.
Evento complementar: Obter um número maior ou igual a 3 na face superior.

6 Propriedades das probabilidades

Encontrei essas informações na(s) página(s) 358.

» **Leia** a frase e **complete** a lacuna.

Se a probabilidade de ocorrer um evento *A* é *x*, a probabilidade de ocorrer o complementar de *A* é $1 - x$.

Resolva os exercícios complementares 32 a 44.

ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Termo e conceito

» **Identifique** o termo ou o conceito que pode ser associado à definição:

São dois eventos que não podem ocorrer simultaneamente, isto é, a ocorrência de um implica a não ocorrência do outro.

eventos mutuamente exclusivos

Guia de estudo

1 Teorema da adição de probabilidades

Encontrei essas informações na(s) página(s) 361 e 362.

» **Escreva** o teorema da adição de probabilidades, em que A e B são dois eventos de um espaço amostral E:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

» **Abaixo há um exercício e partes de sua resolução. À esquerda, alguns comentários explicam etapas da resolução. Com base nos dados indicados, complete** o exercício.

Observamos que o conectivo **ou** indica a união dos dois eventos: praticar natação ou praticar futebol.

Exercício

De um grupo de 50 alunos do Ensino Médio, 32 praticam futebol, 26 praticam natação e 15 praticam os dois esportes. Se escolhermos ao acaso um aluno desse grupo, qual é a probabilidade de que ele pratique natação ou futebol?

1. Calculamos a probabilidade de que o aluno escolhido pratique futebol; pratique natação; e pratique futebol e natação.

2. Calculamos a probabilidade de que o aluno escolhido pratique futebol ou natação.

Resolução

$P(F) = \frac{32}{50}$ $\quad P(N) = \frac{26}{50}$ $\quad P(N \cap F) = \frac{15}{50}$

$P(N \cup F) = P(N) + P(F) - P(N \cap F)$

$\therefore P(N \cup F) = \frac{32}{50} + \frac{26}{50} - \frac{15}{50} = \frac{43}{50} = 86\%$

A probabilidade é, portanto, de 86%.

2 Eventos mutuamente exclusivos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 362.

» **Escreva** a fórmula de cálculo da probabilidade de eventos mutuamente exclusivos A e B pertencentes a um mesmo espaço amostral E.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Resolva os exercícios complementares 1 e 45 a 57.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Termo e conceito

eventos independentes:

Defina com suas próprias palavras o termo a seguir.

Dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral finito e não vazio são independentes se $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.

Guia de estudo

1 Probabilidade condicional

Encontrei essas informações na(s) página(s) 365 e 366.

Escreva a fórmula da probabilidade de ocorrer um evento B, dado que já ocorreu o evento A.

$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ ou $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Abaixo há um exercício e sua resolução. Escreva comentários, à esquerda, explicando as etapas da resolução.

Exercício

Ao escolher de forma aleatória um número natural de 1 a 10, qual é a probabilidade de se obter um número par, quando se sabe que o número sorteado é maior que 3?

Resolução

1. Nomeamos os eventos.

No espaço amostral $E = \{1, 2, 3, \ldots 10\}$, sendo A o evento "escolher um número maior que 3" e B o evento "escolher um número par maior que 3", temos:

2. Calculamos $P(A)$ e $P(A \cap B)$.

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3. Aplicamos a fórmula.

$$P(B/A) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{4}{7}$$

Resolva os exercícios complementares 2 e 58 a 66.

2 Eventos independentes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 368.

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral. **Escreva** a condição necessária e suficiente para que esses eventos sejam independentes.

$P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$

Resolva os exercícios complementares 3, 4 e 67 a 70.

MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Guia de estudo

1

Teorema da multiplicação de probabilidades

Encontrei essas informações na(s) página(s) 370 a 372.

» **Escreva** o teorema da multiplicação de probabilidades, que permite calcular a ocorrência dos eventos A e B.

$P(A \cap B) =$ $P(A) \cdot P(B/A)$

» **Abaixo há um exercício e algumas etapas de sua resolução. À esquerda, estão alguns comentários sobre essas etapas. Complete-as**, finalizando o exercício.

Exercício

Um baralho comum, com 52 cartas, possui 4 ases. Qual é a probabilidade de se retirar duas cartas simultaneamente e as duas serem ases?

Resolução

A probabilidade de se sortear dois ases simultaneamente é a mesma de sortear um ás num primeiro sorteio e outro no segundo, sem reposição. Dessa forma, sendo A o evento "sortear um ás no primeiro sorteio" e B "sortear um ás no segundo sorteio", temos:

1. Calculamos a probabilidade de se sortear um ás no primeiro sorteio.

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

2. Calculamos a probabilidade de se sortear um ás no segundo sorteio, considerando que um já foi sorteado.

$P(B/A) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

3. Aplicamos a fórmula.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$

A probabilidade pedida é, portanto, igual a $\frac{1}{221}$.

» **Complete** as lacunas.

Se A e B são eventos independentes, temos: $P(B/A) =$ $P(B)$.
Então, o teorema da multiplicação de probabilidades para eventos independentes é dado por:

$P(A \cap B) =$ $P(A) \cdot P(B)$

Resolva os exercícios complementares 71 a 93.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Identifique** as ideias principais do capítulo. Faça um esquema ou redija um texto que sintetize essas ideias.

Probabilidade de ocorrência de um evento A num espaço amostral E: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)}$

Eventos complementares A e $\overline{A}$:

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ e $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Adição de probabilidades: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidade condicional: $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ou $\dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

Multiplicação de probabilidades de eventos independentes:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 9	
Abertura	
Seção 9.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 9.1	
Conteúdo digital	
Seção 9.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 9.2	
Seção 9.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 9.3	
Seção 9.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 9.4	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE III

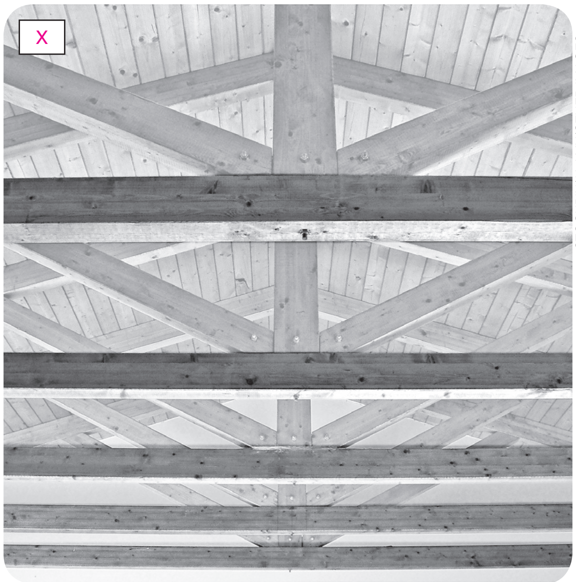
Capítulo 10

Geometria de posição

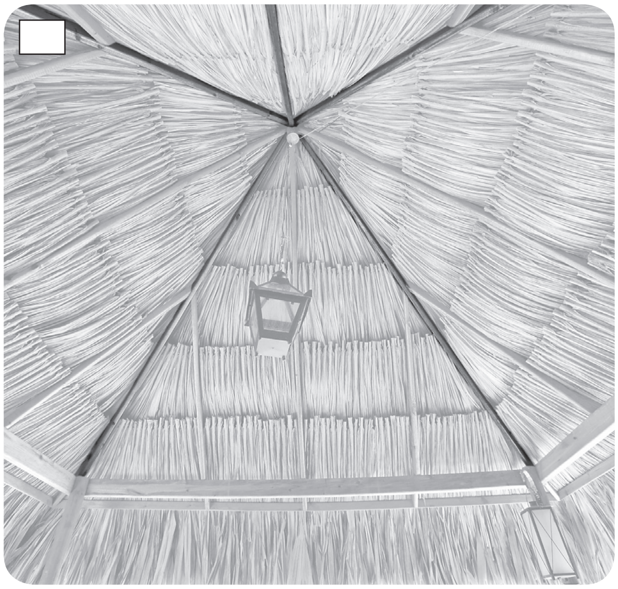
Seções:

Para começar o estudo

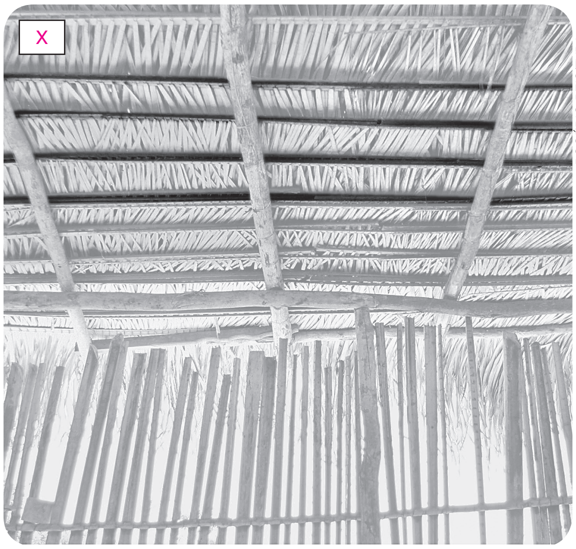
» **Observe** as vigas destacadas e **identifique** aquelas que dão ideia de retas paralelas.



STOCKPIX/ALAMY/OTHER IMAGES



PAUL PIEBINGA/PHOTODISC/GETTY IMAGES



ROGÉRIO REIS/TYBA

DAVID BUFFINGTON/GETTY IMAGES

ASPECTOS PRELIMINARES DA GEOMETRIA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

conceitos primitivos: São alguns conceitos de Geometria que não têm definição, porque constituem o início da teoria e, portanto, não há recursos para defini-los. Ponto, reta e plano são conceitos primitivos da Geometria.

espaço: É o conjunto de todos os pontos.

segmento de reta: Dados dois pontos A e B, chama-se segmento de reta $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$) a reunião do conjunto $\{A, B\}$ com o conjunto de pontos que estão entre A e B. Se A e B forem pontos coincidentes, então $\overline{AB}$ é o segmento nulo.
Nota: "estar entre" é um conceito primitivo.

conjunto convexo: É o conjunto de pontos em que dois pontos quaisquer pertencentes a esse conjunto são extremos de um segmento de reta contido nesse conjunto.

semirreta: Todo ponto A de uma reta separa-a em dois conjuntos convexos disjuntos. A reunião de $\{A\}$ com qualquer um desses conjuntos é uma semirreta de origem A.

semiplano: Toda reta r de um plano separa-o em dois conjuntos convexos disjuntos. A reunião da reta r com qualquer um desses conjuntos é um semiplano de origem r.

semiespaço: Todo plano α separa o espaço em dois conjuntos convexos disjuntos. A reunião do plano α com qualquer um desses conjuntos é um semiespaço de origem em α.

figuras geométricas: É qualquer conjunto não vazio de pontos.

Guia de estudo

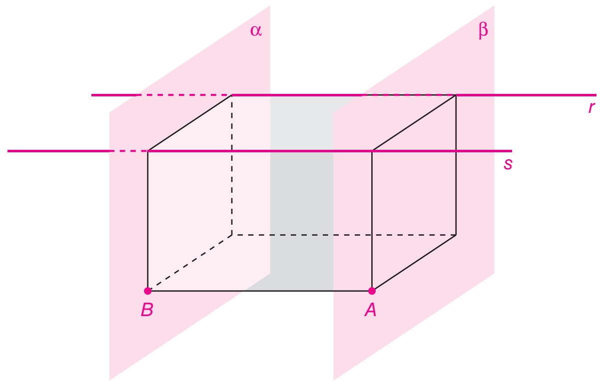
1

Uma técnica de desenho

Encontrei essas informações na(s) página(s) 397.

Represente, no paralelepípedo reto-retângulo abaixo, dois pontos A e B distintos, um par de retas r e s paralelas distintas e um par de planos α e β paralelos distintos.

resposta possível:



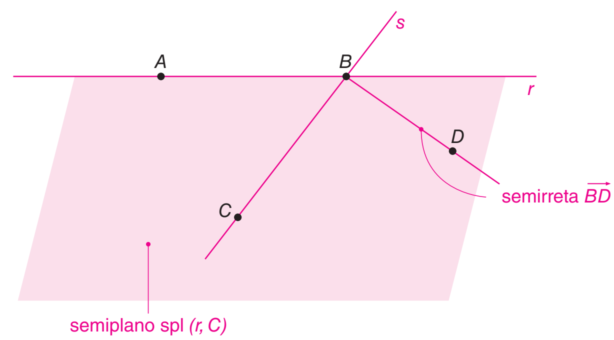
2
O espaço e seus elementos

Encontrei essas informações na(s) página(s)

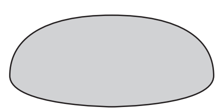
398 a 404

» Considere os pontos A, B, C e D a seguir, pertencentes a um mesmo plano, e **represente**:

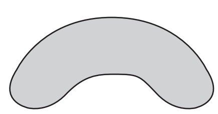
- a reta r que passa pelos pontos A e B;
- a reta s que passa pelos pontos B e C;
- a semirreta $\overrightarrow{BD}$;
- o semiplano spl(r, C).



» Cada um dos conjuntos a seguir representa uma superfície plana, que é a reunião da linha de contorno com o conjunto dos pontos interiores. **Classifique** cada conjunto como convexo ou não convexo e **justifique** sua resposta.



Convexo, pois todo segmento de reta que tem seus extremos na superfície está contido nela.



Não convexo, pois existe um segmento de reta que tem seus extremos na superfície e não está contido nela.

» **Explique** com suas próprias palavras o que são figuras geométricas planas e figuras geométricas reversas.

A figura geométrica plana é aquela cujos pontos são coplanares. Já a figura geométrica reversa é aquela cujos pontos não são coplanares.

» **Complete** o quadro a seguir **escrevendo** os nove primeiros postulados da Geometria estudados neste capítulo.

Postulados da Geometria

P.1 Existem infinitos pontos.

P.2 Existe reta. Uma reta é um conjunto r de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a r.

P.3 Existe plano. Um plano é um conjunto α de infinitos pontos, e há infinitos pontos que não pertencem a α.

P.4 Dois pontos distintos determinam uma reta.

P.5 Três pontos não colineares determinam um plano.

P.6 Todo ponto *A* de uma reta *r* separa essa reta em dois conjuntos convexos e disjuntos, r' e r'', tal que o segmento de reta que liga um ponto qualquer de r' a um ponto qualquer de r'' passa por *A*.

P.7 Toda reta *r* de um plano α separa esse plano em dois conjuntos convexos e disjuntos, α' e α'', tal que o segmento de reta que liga um ponto qualquer de α' a um ponto qualquer de α'' tem um único ponto em comum com *r*.

P.8 Todo plano α divide o espaço *E* em dois conjuntos convexos e disjuntos, E' e E'', tal que o segmento de reta que liga um ponto qualquer de E' a um ponto qualquer de E'' tem um único ponto em comum com α.

P.9 Se dois pontos distintos de uma reta *r* pertencem a um plano α, então todos os pontos de *r* pertencem a α, isto é, *r* está contida em α.

» **Complete** o quadro a seguir **escrevendo** os quatro primeiros teoremas da Geometria estudados neste capítulo.

Teoremas da Geometria

T.1 Dado um plano α, existe uma reta que não está contida α.

T.2 Por um ponto passam infinitas retas.

T.3 Três pontos não colineares são necessariamente distintos entre si.

T.4 Um plano contém infinitas retas.

Resolva os exercícios complementares 2 a 4, 8 a 11 e 59.

Capítulo 10 | Seção 10.2

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS, PLANOS E ENTRE RETA E PLANO

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

retas paralelas: São duas retas coplanares que não possuem nenhum ponto em comum ou possuem todos os seus pontos em comum.

retas concorrentes: São duas retas que possuem um único ponto em comum.

retas reversas: São duas retas não coplanares.

reta paralela a um plano: É uma reta que não tem nenhum ponto em comum com o plano.

reta secante a um plano: É uma reta que possui um único ponto em comum com o plano.

reta contida em um plano: É uma reta que possui todos os seus pontos pertencentes ao plano.

planos paralelos: São dois planos que não possuem nenhum ponto em comum ou possuem todos os seus pontos em comum.

planos secantes: São dois planos que possuem uma única reta em comum.

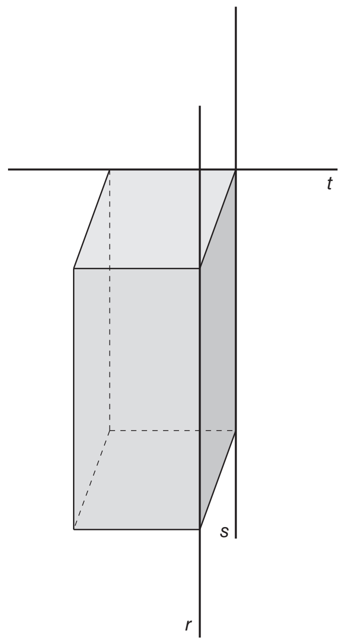
Guia de estudo

1

Posições relativas entre duas retas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 407.

» A figura a seguir representa um paralelepípedo reto-retângulo e três retas, *r*, *s* e *t*. **Identifique**, entre essas retas, os pares de retas paralelas, concorrentes ou reversas.



Paralelas: r e s

Concorrentes: s e t

Reversas: r e t

» **Complete** o quadro abaixo com mais um dos postulados da Geometria estudados neste capítulo.

Postulados da Geometria

P.10 Dada uma reta *r* e um ponto *A*, existe uma única reta que passa por *A* e é paralela a *r*.

» **Complete** os quadros a seguir com mais alguns teoremas da Geometria estudados neste capítulo.

Teoremas da Geometria

T.5 Uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano.

T.6 Duas retas concorrentes determinam um plano.

T.7 Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

T.8 Por uma reta passam infinitos planos.

T.9 Se *r*, *s* e *t* são retas coplanares tais que *r* e *t* são concorrentes e $r \parallel s$, então *s* e *t* são concorrentes.

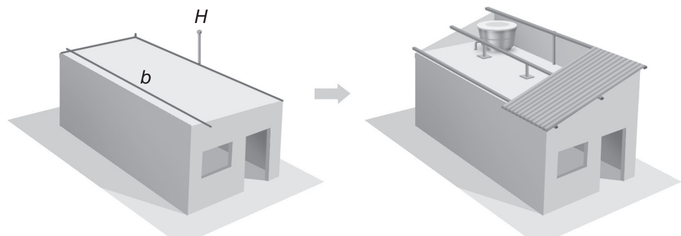
2 Determinação de um plano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 408 e 409.

» Para construir a estrutura de um telhado, um marceneiro esticou sobre a laje um barbante horizontal *b* e fixou uma haste vertical de extremo superior *H*, afastada do barbante, conforme mostra a figura. Desse modo, ele determinou a posição do plano do telhado, que deve passar pelo barbante *b* e pelo extremo *H* da haste.

Responda à pergunta a seguir:

Que teorema da Geometria garante a determinação da posição do plano do telhado?



Podemos considerar o barbante como uma reta e o extremo *H* como um ponto e, pelo teorema T.5, uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano.

Resolva os exercícios complementares 1, 5 a 7, 12 a 14 e 67 a 69.

3 Posições relativas entre reta e plano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 412 a 414.

» Considere um ponto A, uma reta r e um plano α e **complete** as afirmações a seguir sobre as posições relativas entre r e α.

- se $r \cap \alpha = A$, então r é secante a α.
- se $r \cap \alpha = r$, então r está contida em α.
- se $r \cap \alpha = \varnothing$, então r é paralela a α.

» **Complete** o quadro abaixo com mais um dos postulados da Geometria estudados neste capítulo.

Postulados da Geometria

P.11 Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles têm pelo menos dois pontos distintos em comum.

» **Complete** os quadros a seguir com mais alguns teoremas da Geometria estudados neste capítulo.

Teoremas da Geometria

T.10 Se dois planos distintos α e β têm um ponto A em comum, então $\alpha \cap \beta$ é uma reta.

T.11 Dados um plano α e um ponto P, com $P \notin \alpha$, existe pelo menos uma reta que passa por P e é paralela a α.

T.12 Uma reta r, não contida em um plano α, é paralela a α se, e somente se, r é paralela a uma reta s contida em α.

T.13 Se uma reta r é paralela a um plano α ou está contida em α, e um ponto A pertence a α, então a reta s que passa por A e é paralela a r está contida em α.

T.14 Se uma reta r é paralela a dois planos secantes α e β, então r é paralela à reta t comum a α e β.

T.15 Se r e s são retas reversas, então existe um único plano α que contém s e é paralelo a r.

Resolva os exercícios complementares 15 a 20 e 70.

4

Posições relativas entre dois planos

Encontrei essas informações na(s) página(s) 417 a 421.

» **Complete** o esquema a seguir **descrevendo** as posições relativas entre dois planos e **cite uma situação** do cotidiano que exemplifique cada uma das situações.

Posições relativas entre dois planos

Planos paralelos	Planos secantes
Definição: São planos que não possuem ponto em comum ou têm todos seus pontos em comum.	Definição: São planos que possuem uma única reta em comum.
Situação do cotidiano: resposta possível: plano do teto e plano do piso de uma sala	Situação do cotidiano: resposta possível: plano do teto e plano da parede de uma sala

» **Complete** os quadros a seguir com mais alguns teoremas da Geometria estudados neste capítulo, referentes às posições relativas entre planos.

Teoremas da Geometria

T.16 Se dois planos α e β são paralelos e uma reta *r* é secante a α, então *r* é secante a β.

T.17 Se dois planos α e β são paralelos e um plano γ é secante a α, então γ é secante a β.

T.18 Dados um plano α e um ponto *P*, existe e é único o plano β que passa por *P* e é paralelo a α.

T.19 Se dois planos distintos α e β são paralelos, então toda reta *r* contida em α é paralela a β.

T.20 Dois planos distintos α e β são paralelos se, e somente se, existem duas retas concorrentes contidas num deles e paralelas ao outro.

T.21 Se um plano γ é secante a dois planos paralelos α e β, então a reta *r*, comum a γ e a α, é paralela à reta *s*, comum a γ e a β.

T.22 Se *r* e *s* são retas paralelas e *r* é secante a um plano α, então *s* é secante a α.

T.23 Se três retas *a*, *b* e *c* são tais que $a \parallel b$ e $b \parallel c$, então $a \parallel c$.

Resolva os exercícios complementares 21 a 28, 60 e 61.

PERPENDICULARIDADE

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

retas perpendiculares: São retas concorrentes que determinam um ângulo reto entre si.

retas ortogonais: São retas reversas que formam ângulos retos entre si.

reta perpendicular a um plano: Uma reta r secante a um plano α é perpendicular a α se, e somente se, r é perpendicular a todas as retas contidas em α que concorrem com r.

planos perpendiculares: São dois planos tais que um contém uma reta perpendicular ao outro.

projeção ortogonal de um ponto sobre um plano: A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o ponto P' do plano α, com $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a α.

Guia de estudo

1

Retas perpendiculares e retas ortogonais

Encontrei essas informações na(s) página(s) 424 a 426.

» **Explique** com suas próprias palavras o que são retas perpendiculares e retas ortogonais.

Para que duas retas sejam perpendiculares ou ortogonais, elas devem formar um ângulo de 90° entre si. Porém, para que sejam perpendiculares, as retas têm que ser concorrentes, já para serem ortogonais devem ser reversas.

» **Complete** o quadro a seguir com mais alguns teoremas da Geometria estudados neste capítulo, relacionados a retas perpendiculares e ortogonais.

Teoremas da Geometria

T.24 Dados um ponto P e uma reta r, com $P \notin r$, existe uma única reta s que passa por P e é perpendicular a r.

T.26 Se duas retas, r e s, são paralelas e uma reta t é perpendicular a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s.

T.25 Se r e s são retas ortogonais, então toda reta paralela a r e concorrente com s é perpendicular a s.

T.27 Se duas retas, r e s, são paralelas e uma reta t é ortogonal a r, então t é perpendicular ou ortogonal a s.

2

Reta perpendicular a um plano

Encontrei essas informações na(s) página(s) 427 a 429.

» **Cite** um exemplo, diferente dos usados no livro-texto, de uma situação do cotidiano que possa representar uma reta perpendicular a um plano.

respostas possíveis: Um poste vertical de luz é perpendicular ao plano horizontal do chão, o pé de uma mesa é perpendicular ao seu tampo ou a intersecção entre duas paredes é perpendicular aos planos do teto e do chão.

» **Complete** o quadro a seguir com mais alguns teoremas da Geometria estudados neste capítulo, relacionados a retas perpendiculares a planos.

Teoremas da Geometria

T.28 Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então *r* forma ângulo reto com todas as retas contidas em α.

T.29 Se uma reta *r* é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então *r* é perpendicular a α.

T.30 Se uma reta *r* forma ângulo reto com duas retas concorrentes *s* e *t* de um plano α, então *r* é perpendicular a α.

T.31 Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então toda reta *s*, paralela a *r*, é perpendicular a α.

T.32 Dados um ponto *P* e um plano α, existe uma única reta que passa por *P* e é perpendicular a α.

T.33 Se *r* é uma reta perpendicular a um plano α em um ponto *A*, *s* é uma reta contida em α e não passa por *A*, e *t* é uma reta que passa por *A* e é perpendicular a *s* no ponto *B*, então toda reta *u* que passa por *B* e concorre com *r* é perpendicular a *s*.

Resolva os exercícios complementares 29 a 37 e 62 a 65.

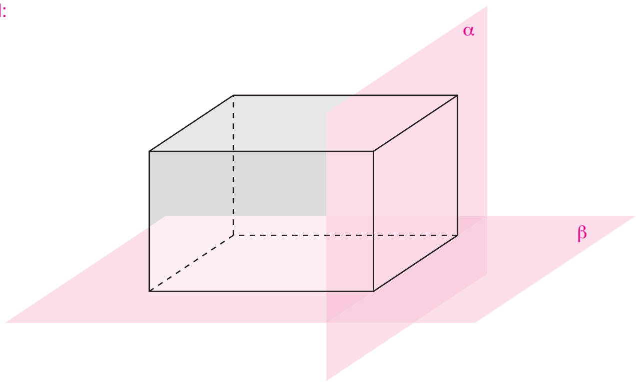
3

Planos perpendiculares

Encontrei essas informações na(s) página(s) 432 e 433.

» **Represente**, no paralelepípedo reto-retângulo a seguir, dois planos perpendiculares α e β.

resposta possível:



» **Complete** o quadro a seguir com mais alguns teoremas da Geometria estudados neste capítulo.

T.34 Se α e β são planos perpendiculares tais que $\alpha \cap \beta = r$, e uma reta *s*, contida em α, é perpendicular a *r*, então *s* é perpendicular a β.

T.35 Se α e β são planos perpendiculares e uma reta *r* é perpendicular a β, então $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$.

T.36 Se uma reta *r* não é perpendicular a um plano α, então existe um único plano β que contém *r* e é perpendicular a α.

T.37 Se dois planos secantes α e β são perpendiculares a um plano γ, então a reta *t*, comum a α e β, é perpendicular a γ.

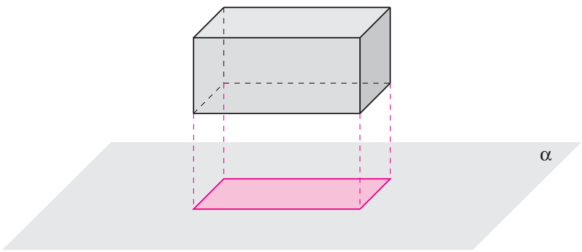
Resolva os exercícios complementares 38 a 53 e 66.

4

Projeção ortogonal sobre um plano

Encontrei essas informações na(s) página(s) ______.

» Na figura abaixo estão representados um plano α e um paralelepípedo reto-retângulo com a base paralela a α. **Represente** a projeção ortogonal do paralelepípedo sobre o plano α.



Resolva os exercícios complementares 54 a 58.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Liste** a seguir alguns dos principais teoremas referentes a cada um dos assuntos abaixo. resposta possível:

Posições relativas entre reta e ponto: T.2, T.3

Posições relativas entre duas retas: T.9, T.24, T.25, T.26, T.27

Posições relativas entre uma reta e um plano: T.1, T.4, T.5, T.6, T.7, T.8, T.10, T.11, T.12, T.13, T.14, T.15, T.16, T.28, T.29, T.30, T.31, T.32, T.33

Posições relativas entre dois planos: T.10, T.16, T.17, T.18, T.19, T.20, T.21, T.22, T.23, T.34, T.35, T.36, T.37

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 10	
Abertura	
Seção 10.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 10.1	
Seção 10.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 10.2	
Conteúdo digital	
Seção 10.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 10.3	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE III

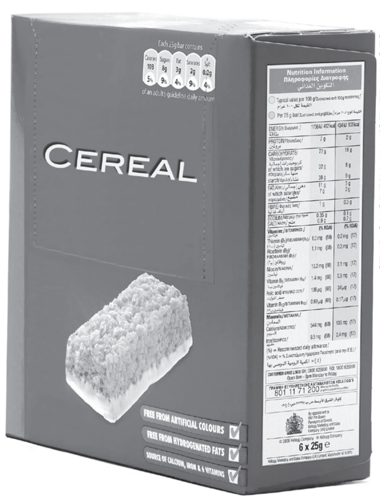
Capítulo
11

Geometria métrica: poliedros

Para começar o estudo

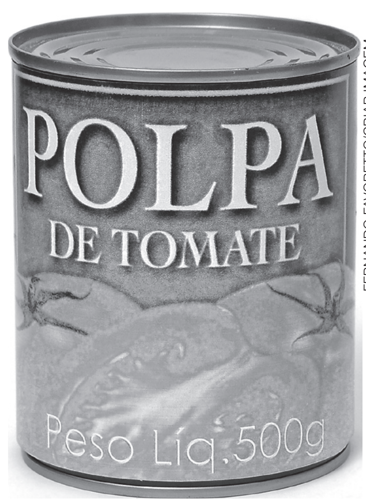
» **Observe** as fotos e marque com um X as que reproduzem objetos com a forma de um prisma.

[X]



STUDIOMODE/ALAMY/OTHER IMAGES

[ ]



FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

[X]

STUDIOMODE/ALAMY/ OTHER IMAGES

[ ]

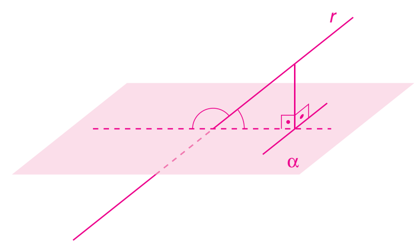

PHOTOCUISINE/OTHER IMAGES

ÂNGULOS E DISTÂNCIAS

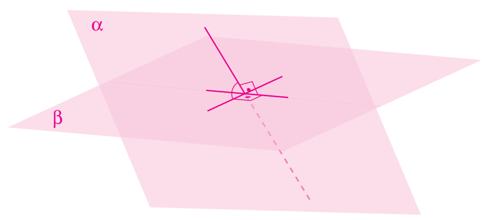
Termos e conceitos

» **Represente** por meio de desenhos as ideias expressas a seguir.

ângulos entre reta e plano:



ângulos entre dois planos:



distância entre duas figuras geométricas:

» **Defina** com suas próprias palavras o conceito a seguir.

É a medida do menor segmento de reta que tem um extremo em uma figura e o outro extremo na outra.

Resolva os exercícios complementares 1 e 2.

Guia de estudo

Faça a conexão

» **Identifique** situações do dia a dia em que é possível medir o ângulo entre dois planos. **Descreva-as.**

respostas possíveis: ângulo entre o plano da parede e o plano do chão, ângulo entre uma rampa e o plano horizontal

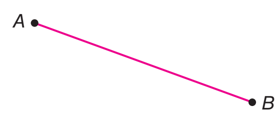
1 Distâncias

Encontrei essas informações na(s) página(s)

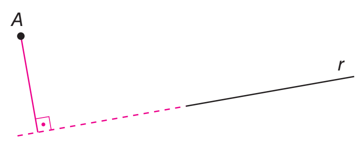
451 a 453

» **Desenhe** um segmento de reta cuja medida seja a distância entre as figuras, em cada caso.

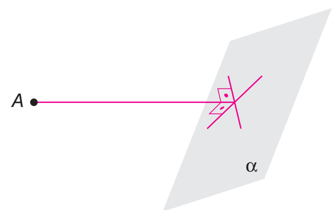
Os pontos *A* e *B*.



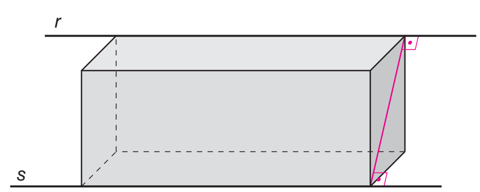
O ponto *A* e a reta *r*.



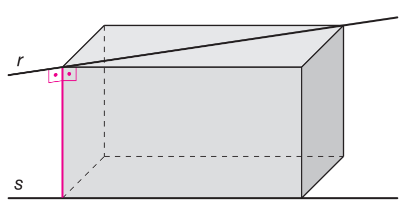
O ponto *A* e o plano α.



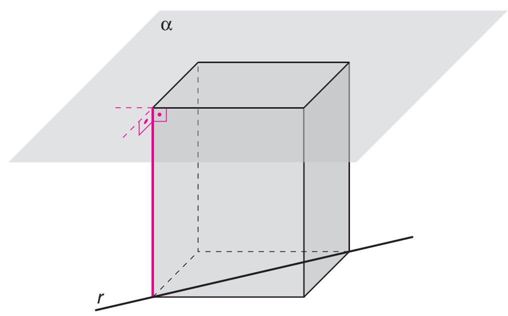
A reta *r* e a reta *s* (retas paralelas).



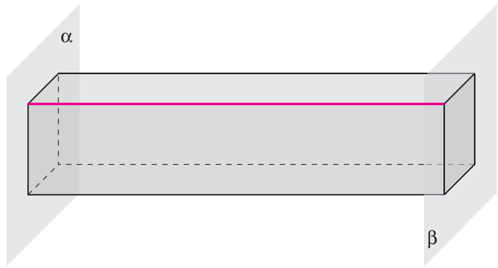
A reta *r* e a reta *s* (retas reversas).



A reta *r* e o plano α (reta e plano paralelos).



O plano α e o plano β (planos paralelos).



Resolva os exercícios complementares 3 a 7.

POLIEDROS

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

poliedro: É a reunião de uma superfície poliédrica com a região do espaço limitada por essa superfície.

face de um poliedro: É qualquer um dos polígonos que compõem a superfície de um poliedro.

aresta de um poliedro: É o nome dado a cada lado de uma face de um poliedro.

vértice de um poliedro: É o nome dado a cada vértice de uma face do poliedro.

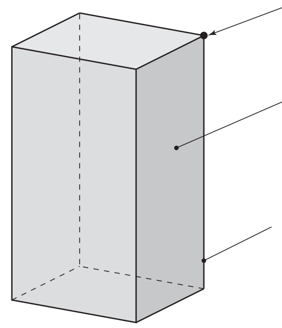
Guia de estudo

1

Elementos de um poliedro

Encontrei essas informações na(s) página(s) 456.

» **Identifique** no poliedro representado a seguir os elementos destacados.



vértice

face

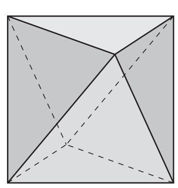
aresta

2

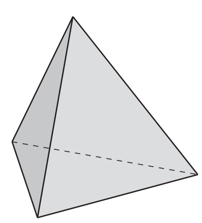
Nomenclatura dos poliedros

Encontrei essas informações na(s) página(s) 457.

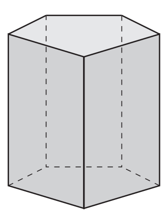
» **Nomeie** cada um dos poliedros representados a seguir de acordo com o número de faces.



octaedro



tetraedro



heptaedro

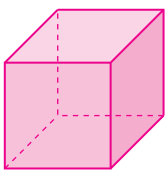
3

Poliedros convexos

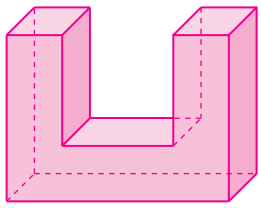
Encontrei essas informações na(s) página(s) 457 e 458.

» **Represente** por um desenho um poliedro convexo e um poliedro não convexo.

Poliedro convexo



Poliedro não convexo

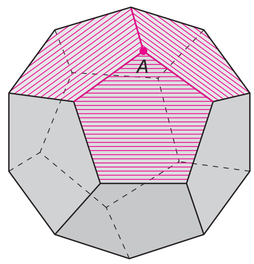


4

Ângulo poliédrico convexo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 458 e 459.

» No poliedro representado ao lado, **destaque** o ângulo poliédrico de vértice A, colorindo o vértice, as arestas e as faces desse ângulo.



» **Escreva a condição** para que dois ângulos poliédricos sejam congruentes.

Dois ângulos poliédricos são congruentes se existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das faces de um deles e o conjunto das faces do outro, de modo que:

- faces correspondentes sejam congruentes;
- diedros determinados por faces correspondentes sejam congruentes.

5

Relação de Euler

Encontrei essas informações na(s) página(s) 460.

» **Complete** a frase abaixo.

O matemático Leonhard Euler demonstrou que, para todo poliedro convexo cujo número de vértices, arestas e faces são V, A e F, respectivamente, vale a relação $V - A + F = 2$.

Resolva os exercícios complementares 8 a 17 e 79 a 81.

6

Poliedros regulares

Encontrei essas informações na(s) página(s) 462 e 463.

» **Explique** com suas palavras o que é um poliedro regular e **cite** as cinco classes de poliedros regulares existentes.

Poliedro regular é todo poliedro cujas faces são polígonos regulares congruentes entre si e que possui todos os ângulos poliédricos congruentes entre si. As classes de poliedros regulares são: tetraedros regulares, hexaedros regulares (ou cubos), octaedros regulares, dodecaedros regulares e icosaedros regulares.

» **Descreva** as formas das faces dos poliedros regulares preenchendo a lacuna correspondente.

Poliedro: tetraedro regular
Face: triângulo equilátero

Poliedro: hexaedro regular
Face: quadrada

Poliedro: octaedro regular
Face: triângulo equilátero

Poliedro: dodecaedro regular
Face: pentágono regular

Poliedro: icosaedro regular
Face: triângulo equilátero

Resolva os exercícios complementares 18 a 20.

PRISMAS

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

prisma: É todo poliedro que possui duas faces congruentes e paralelas, sendo as demais faces paralelogramos.

prisma reto: É todo prisma cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

prisma oblíquo: É todo prisma que não é reto.

prisma regular: É todo prisma reto que possui como bases polígonos regulares.

paralelepípedo reto-retângulo: É todo prisma reto cujas bases são retângulos.

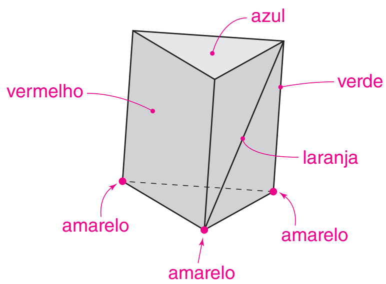
Guia de estudo

1 Elementos de um prisma

Encontrei essas informações na(s) página(s) 465.

Destaque conforme indicado o que se pede no prisma a seguir: resposta possível:

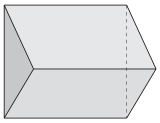
- pinte de vermelho uma face lateral;
- pinte de azul uma das bases;
- pinte de amarelo todos os vértices de uma base;
- pinte de laranja uma diagonal;
- pinte de verde uma aresta lateral.



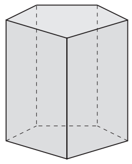
2 Nomenclatura dos prismas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 465.

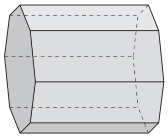
Nomeie cada um dos prismas a seguir de acordo com o número de lados de sua base.



prisma triangular



prisma pentagonal



prisma octagonal

3 Secção transversal de um prisma

Encontrei essas informações na(s) página(s) 466.

Responda: Que tipo de prisma tem um hexágono como secção transversal? Justifique sua resposta.

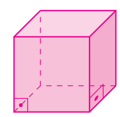
O prisma hexagonal, pois a secção transversal de um prisma é sempre um polígono congruente à base, portanto, a base desse prisma deve ser um hexágono.

4 Prisma reto e prisma oblíquo

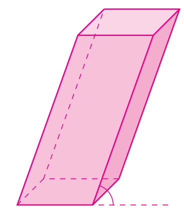
Encontrei essas informações na(s) página(s) 466.

» **Represente** por um desenho um prisma reto e um prisma oblíquo.

Prisma reto



Prisma oblíquo

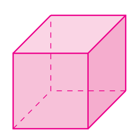


5 Prisma regular

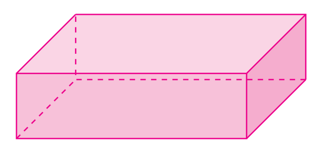
Encontrei essas informações na(s) página(s) 466.

» **Represente** por um desenho um prisma regular e um prisma que não seja regular.

Prisma regular



Prisma que não é regular



Resolva os exercícios complementares 21 a 25, 82 e 83.

6 Paralelepípedo reto-retângulo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 469.

» **No diagrama abaixo estão representados os seguintes conjuntos:**

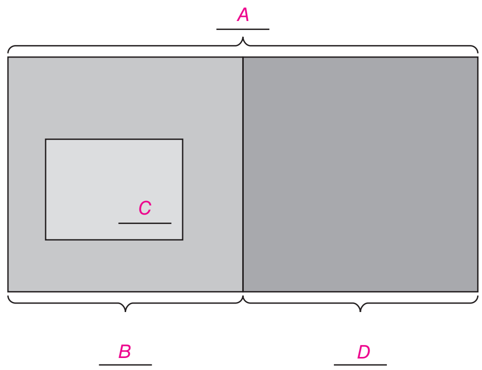
A: prismas cujas bases são paralelogramos;

B: prismas cujas bases são paralelogramos e as arestas laterais são perpendiculares às bases;

C: prismas retos cujas bases são retângulos;

D: prismas cujas bases são paralelogramos e as arestas laterais são oblíquas às bases.

- **Complete** cada lacuna com o nome do respectivo conjunto:



» **Complete** as frases a seguir com um dos nomes *A*, *B*, *C* ou *D*, dos conjuntos do exercício anterior.

A é o conjunto de todos os paralelepípedos.

D é o conjunto de todos os paralelepípedos oblíquos.

C é o conjunto de todos os paralelepípedos reto-retângulos.

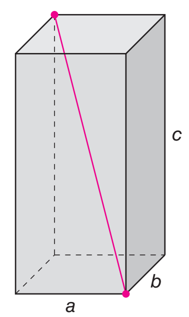
B é o conjunto de todos os paralelepípedos retos.

7

Medida da diagonal do paralelepípedo reto-retângulo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 470.

» **Trace** uma diagonal do paralelepípedo reto-retângulo abaixo. **Escreva a fórmula** para determinar a medida dessa diagonal.



$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

8

Área total de um paralelepípedo reto-retângulo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 471.

» **Escreva a expressão** que determina a área total de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*.

$A_T = 2(ab + ac + bc)$

Resolva os exercícios complementares 26 a 30.

Faça a conexão

» **Folheie** a seção 11.3 do livro-texto. Observe a parte teórica, as seções de exercícios resolvidos e de exercícios propostos e **identifique** problemas do dia a dia que possam ser resolvidos pelo uso de prismas.

respostas possíveis: Calcular áreas de figuras espaciais, determinar a medida da diagonal de cubos ou paralelepípedos reto-retângulos, determinar medidas em embalagens.

Caderno do Estudante • Geometria métrica: poliedros

VOLUME DE UM PRISMA

Guia de estudo

1

Unidades de medida de volume

Encontrei essas informações na(s) página(s) 473 e 474.

» **Transforme** o valor e complete as equivalências entre as unidades de medida a seguir.

a) 100 $dm^3 = 100$ L

b) $1\ m^3 =$ 1.000 L

c) $1\ dam^3 =$ 1.000.000.000 $dm^3 =$ 1.000.000.000 L

d) 1.000 $m^3 = 1\ .000.000\ dm^3 =$ 1.000.000 L

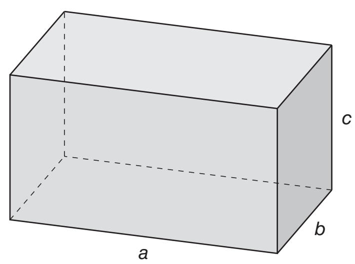
2

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 474.

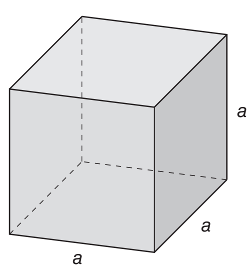
» **Escreva a fórmula** do cálculo do volume de cada uma das figuras representadas a seguir.

Paralelepípedo reto-retângulo



$V =$ $a \cdot b \cdot c$

Cubo



$V =$ a^3

Resolva os exercícios complementares 31 a 36 e 84 a 96.

3

Volume de um prisma

Encontrei essas informações na(s) página(s) 477.

» **Escreva a fórmula** que determina o volume de um prisma cuja área da base é B e a altura é H.

$V =$ $B \cdot H$

Resolva os exercícios complementares 37 a 45 e 97 a 101.

PIRÂMIDES

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

pirâmide: É a união de todos os segmentos de reta com uma extremidade em um polígono contido num plano e a outra extremidade em um ponto fora desse plano.

pirâmide regular: É toda pirâmide que tem como base um polígono regular e cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base.

apótema de uma pirâmide regular: É o segmento de reta que tem um extremo no vértice da pirâmide e outro no ponto médio de uma aresta da base.

apótema da base de uma pirâmide regular: É o segmento de reta que tem um extremo no centro da base e outro no ponto médio de uma aresta da base.

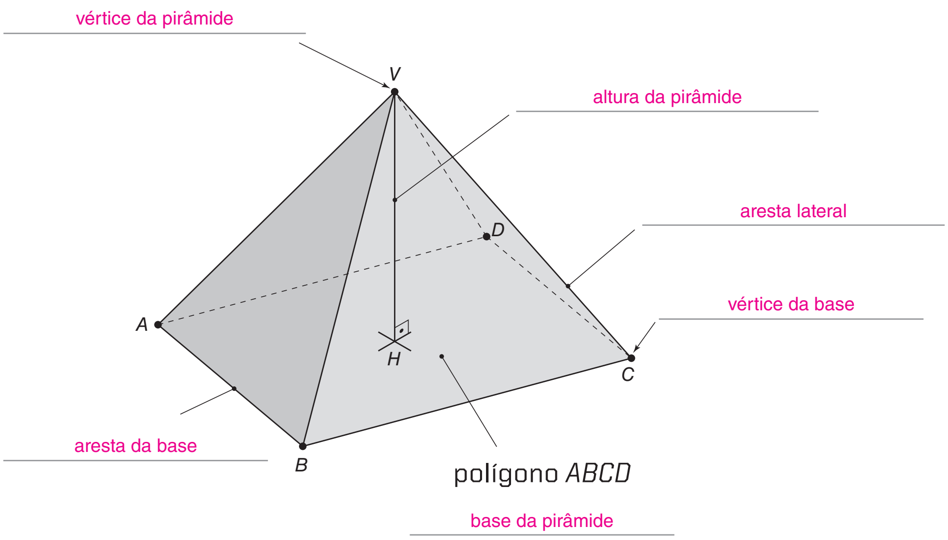
Guia de estudo

1 Elementos de uma pirâmide

Encontrei essas informações na(s) página(s) 480 e 481.

» **Nomeie** os elementos destacados na pirâmide a seguir.

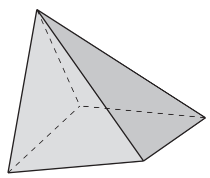
(Considere que a reta suporte do segmento $\overline{VH}$ é perpendicular ao plano que contém o polígono *ABCD*.)

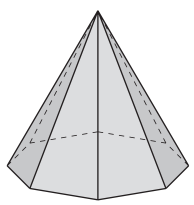


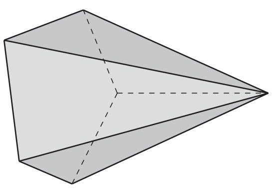
2 Nomenclatura das pirâmides

Encontrei essas informações na(s) página(s) 481.

» **Nomeie** cada uma das pirâmides a seguir de acordo com o número de lados de sua base.


pirâmide quadrangular


pirâmide octogonal


pirâmide pentagonal

3

Secção transversal de uma pirâmide

Encontrei essas informações na(s) página(s) 481.

» **Responda:** As secções transversais de uma pirâmide são sempre polígonos congruentes? Justifique sua resposta.

As secções transversais de uma pirâmide não são polígonos congruentes entre si, pois quanto menor for a distância do vértice ao plano que determina essa secção, menor será a área dessa secção. Essas secções são semelhantes entre si.

4

Pirâmide regular

Encontrei essas informações na(s) página(s) 481.

» **Complete** com os termos que definem uma pirâmide regular.

Uma pirâmide é regular se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro dessa base.

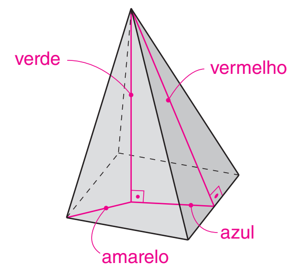
5

Apótemas e relações entre os elementos da pirâmide

Encontrei essas informações na(s) página(s) 482.

» **Trace**, de acordo com a legenda, os elementos da pirâmide regular a seguir. resposta possível:

- em vermelho, um apótema da pirâmide;
- em azul, um apótema da base;
- em verde, a altura;
- em amarelo, o raio da circunferência circunscrita à base.



» **Escreva as equações** que relacionam as medidas dos seguintes elementos de uma pirâmide regular.

Dica: Desenhe uma pirâmide regular e indique os elementos relacionados em cada item.

a) altura (H), apótema da base (r) e apótema da pirâmide (n):

$H^2 + r^2 = n^2$

b) apótema da pirâmide (n), aresta da base (b) e aresta lateral (L):

$n^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = L^2$

c) altura (H), raio da circunferência circunscrita à base (R) e aresta lateral (L):

$H^2 + R^2 = L^2$

Resolva os exercícios complementares 46 a 55 e 102 a 105.

VOLUME E SEMELHANÇA DE PIRÂMIDES

Termo e conceito

tronco de pirâmide:

» **Defina** com suas próprias palavras o termo a seguir.

É um dos poliedros resultantes da separação de uma pirâmide em dois poliedros por uma de suas secções transversais. Um desses poliedros é uma pirâmide e o outro é o tronco de pirâmide.

Guia de estudo

1 Propriedades das pirâmides

Encontrei essas informações na(s) página(s) 485 e 486.

» **Complete** os quadros a seguir com as propriedades das pirâmides.

Propriedades das pirâmides

P1. Razão entre as áreas de uma secção transversal e da base de uma pirâmide	**P2.** Pirâmides de mesma altura e bases equivalentes
Se uma pirâmide de altura D e área da base B é seccionada por um plano paralelo à base, a uma distância d do vértice, tal que a secção transversal tenha área b, então: $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$	Duas pirâmides de mesma altura e bases equivalentes têm volumes iguais.

2 Volume de uma pirâmide qualquer

Encontrei essas informações na(s) página(s) 486 e 487.

» **Escreva a fórmula** do cálculo do volume de uma pirâmide cuja área da base é B e cuja altura mede H.

$$V = \frac{1}{3} \cdot BH$$

Resolva os exercícios complementares 56 a 71 e 106 a 108.

3 Pirâmides semelhantes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 490.

» **Explique** com suas próprias palavras o que são pirâmides semelhantes.

Duas pirâmides são semelhantes se suas bases são polígonos semelhantes entre si e se suas faces laterais correspondentes também são semelhantes.

» **Complete** o quadro a seguir com a propriedade que relaciona os volumes de pirâmides semelhantes.

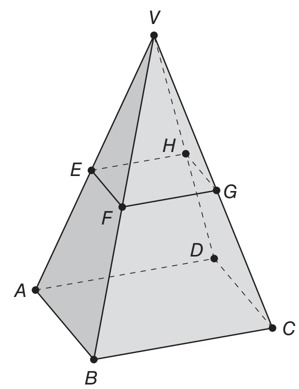
A razão entre os volumes de duas pirâmides semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

4

Tronco de pirâmide de bases paralelas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 491.

» **Complete** a igualdade abaixo, em que V_p, $V_{p'}$ e V_{tronco} são, respectivamente, os volumes da pirâmide *VABCD*, da pirâmide *VEFGH* e do tronco de pirâmide.



$V_{tronco} = V_p - V_{p'}$

Resolva os exercícios complementares 72 a 78.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Faça uma relação das fórmulas** com os principais conceitos do capítulo.

Fórmulas de volume:

Paralelepípedo reto-retângulo: $V = a \cdot b \cdot c$

Cubo: $V = a^3$

Prisma: $V = BH$

Pirâmide: $V = \frac{1}{3} \cdot BH$

Área total:

Paralelepípedo reto-retângulo: $A = 2(ab + ac + bc)$

Cubo: $A = 6a^2$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 11	
Abertura	
Seção 11.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 11.1	
Seção 11.2	
Conteúdo digital	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 11.2	
Seção 11.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 11.3	
Seção 11.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 11.4	
Seção 11.5	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 11.5	
Seção 11.6	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 11.6	
Conteúdo digital	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando o capítulo	

PARTE III

Capítulo 12

Corpos redondos

Para começar o estudo

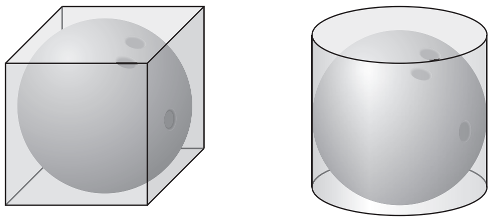
Observe as seguintes situações.

Situação I

Toda a superfície lateral de uma lata cilíndrica é coberta por um rótulo retangular de comprimento 31,4 cm e altura 12 cm, conforme a ilustração abaixo.

Situação II

Uma loja vende bolas de boliche com 20 cm de diâmetro, embaladas individualmente em caixas de dois formatos diferentes: cúbico ou cilíndrico. Na embalagem cúbica, a bola tangencia todas as faces da caixa; e na embalagem cilíndrica, a bola tangencia a tampa, o fundo e toda a superfície lateral, conforme ilustram as figuras.



- Analisando essas situações, **classifique** as afirmações a seguir como verdadeiras $\boxed{V}$ ou falsas $\boxed{F}$.

$\boxed{V}$ Na situação I, o raio da tampa da lata mede 5 cm.
$\boxed{V}$ Na situação I, a área da superfície lateral da lata é 376,8 m^2.
$\boxed{F}$ Na situação I, a área total da superfície da lata é 455,30 cm^2.
$\boxed{V}$ Na situação II, cada aresta do cubo mede 20 cm.
$\boxed{F}$ Na situação II, o raio da tampa da embalagem cilíndrica mede 20 cm.
$\boxed{V}$ Na situação II, a área lateral da embalagem cilíndrica é 1.256 cm^2.

CILINDRO CIRCULAR

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

cilindro: É o sólido geométrico obtido da união de todos os segmentos de reta paralelos com um extremo em um círculo contido em um plano α e o outro extremo em outro plano β paralelo a α.

eixo do cilindro: É a reta que passa pelos centros das bases do cilindro.

geratriz do cilindro: É qualquer segmento de reta contido na superfície do cilindro e com extremos nas circunferências das bases.

cilindro circular reto: É o cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

cilindro circular oblíquo: É o cilindro circular cujas geratrizes são oblíquas aos planos das bases.

cilindro equilátero: É o cilindro circular reto cuja altura é igual ao diâmetro da base.

tronco reto de cilindro circular: Um plano que intercepta obliquamente todas as geratrizes de um cilindro circular reto separa-o em dois sólidos geométricos chamados de troncos retos de cilindro circular.

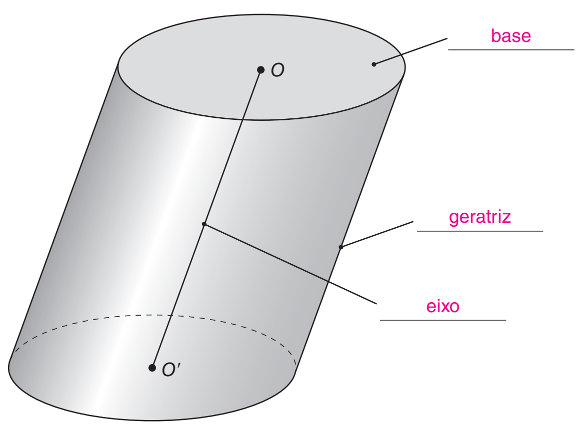
Guia de estudo

1

Elementos de um cilindro

Encontrei essas informações na(s) página(s) 507.

» **Nomeie** como eixo, geratriz ou base os elementos destacados no cilindro representado a seguir.

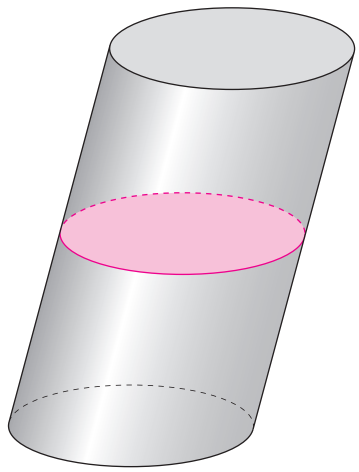


2 Secções de um cilindro

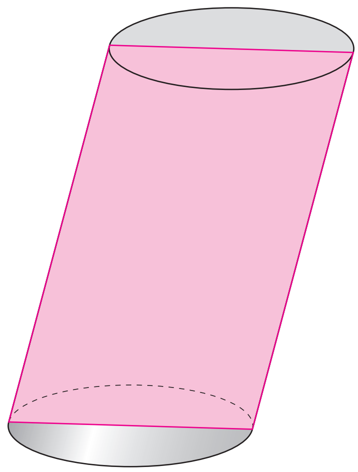
Encontrei essas informações na(s) página(s) 507.

» Nos cilindros representados a seguir, **desenhe** as secções descritas.

Secção transversal



Secção meridiana

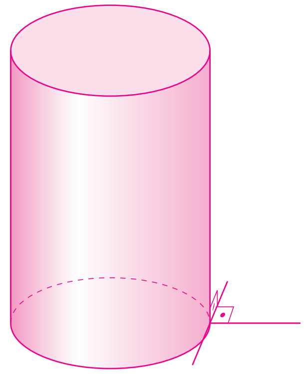


3 Cilindro circular reto e cilindro circular oblíquo

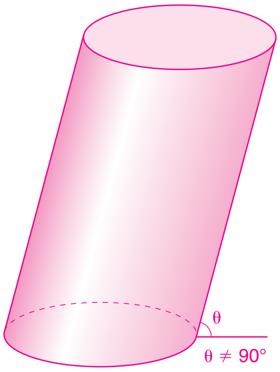
Encontrei essas informações na(s) página(s) 508.

» **Represente** por um desenho um cilindro circular reto e um cilindro circular oblíquo.

Cilindro circular reto



Cilindro circular oblíquo



» **Complete** as frases a seguir.

Toda secção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo cuja base é o diâmetro da base do cilindro e cuja altura é igual à altura do cilindro.

Qualquer secção meridiana de um cilindro circular reto divide-o em dois sólidos congruentes chamados semicilindros circulares retos.

4

Cilindro equilátero

Encontrei essas informações na(s) página(s) 509.

» **Responda**: Se um cilindro equilátero tem 10 cm de altura, quanto mede o raio de sua base? Justifique sua resposta.

O raio da base desse cilindro mede 5 cm pois, num cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro da base, que é igual ao dobro do raio.

5

Área lateral e área total de um cilindro circular reto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 510.

» **Identifique** os termos destacados a seguir.

h representa a altura do cilindro.

Área lateral do cilindro: $A_L = 2\pi rh$

r representa o raio da base do cilindro.

» **Identifique** os termos destacados a seguir.

h representa a altura do cilindro.

Área total do cilindro: $A_T = 2\pi r(h + r)$

r representa o raio da base do cilindro.

Resolva os exercícios complementares 1 a 6, 76 e 77.

6 Volume de um cilindro

Encontrei essas informações na(s) página(s) 512.

Explique com suas palavras como o princípio de Cavalieri pode ser aplicado ao cálculo do volume de um cilindro.

Pelo princípio de Cavalieri, um cilindro e um prisma de mesma altura têm volumes iguais se ambos tiverem secções transversais equivalentes. Sob essa condição, seja V o volume do prisma, que é o produto da área B da base pela medida H da altura, isto é, $V = BH$. Como a base do prisma é equivalente à base do cilindro, temos $B = \pi R^2$, em que R é o raio da base do cilindro. Logo, o volume V também é o volume do cilindro, ou seja, $V = \pi R^2 H$.

Escreva a fórmula do volume de um cilindro cujo raio da base mede r e cuja altura mede h.

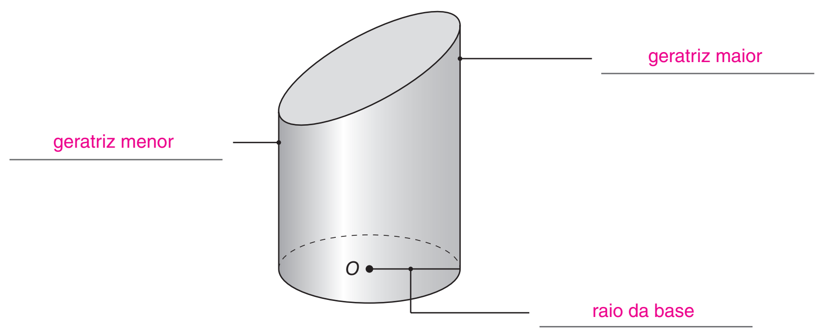
$$V = \pi r^2 h$$

Resolva os exercícios complementares 7 a 10 e 78 a 88.

7 Volume de um tronco reto de cilindro circular

Encontrei essas informações na(s) página(s) 514.

Nomeie como geratriz maior, geratriz menor ou raio da base os elementos destacados no tronco reto de cilindro circular representado a seguir.



Escreva a fórmula do volume de um tronco reto de cilindro cujo raio da base mede r, cuja geratriz maior mede G e cuja geratriz menor mede g.

$$V = \frac{\pi r^2 (G + g)}{2}$$

Resolva os exercícios complementares 11 e 89 a 93.

Capítulo 12 Seção 12.2

CONE CIRCULAR

Termos e conceitos

» **Defina** com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

cone: É a reunião de todos os segmentos de reta que têm um dos extremos em um círculo e o outro extremo em um mesmo ponto *V* que não pertence ao plano do círculo.

cone equilátero: É todo cone circular cujas secções meridianas são triângulos equiláteros.

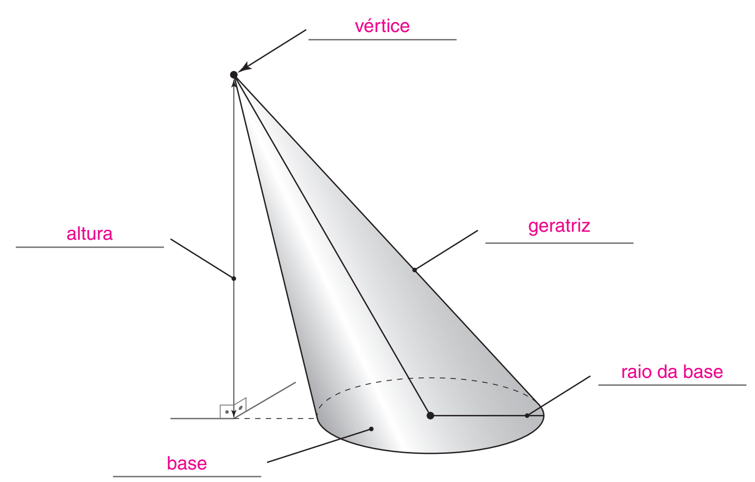
tronco de cone circular de bases paralelas: Toda secção transversal de um cone circular separa-o em dois sólidos: um cone e um tronco de cone circular de bases paralelas.

Guia de estudo

1 Elementos de um cone

Encontrei essas informações na(s) página(s) 518.

» **Nomeie** como vértice, geratriz, raio da base, altura ou base os elementos destacados no cone representado abaixo.

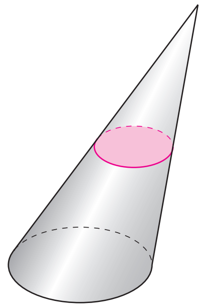


2 Secções de um cone

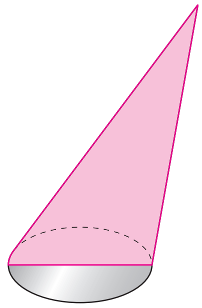
Encontrei essas informações na(s) página(s) 518.

» Nos cones representados a seguir, **desenhe** as secções descritas.

Secção transversal



Secção meridiana

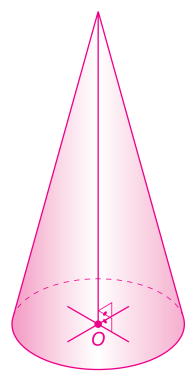


3 Cone circular reto e cone circular oblíquo

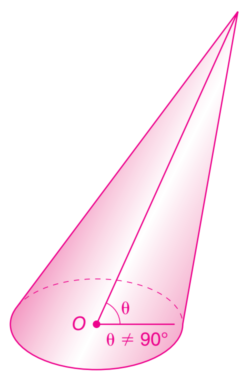
Encontrei essas informações na(s) página(s) 518 e 519.

Represente por um desenho um cone circular reto e um cone circular oblíquo.

Cone circular reto



Cone circular oblíquo



Complete a frase a seguir.

Toda secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles cuja base é o diâmetro da base do cone e cuja altura é igual à altura do cone.

4 Cone equilátero

Encontrei essas informações na(s) página(s) 519.

Responda: Se um cone equilátero tem 5 cm de raio da base, quanto mede sua geratriz? Justifique sua resposta.

A geratriz desse cone mede 10 cm, pois, no cone equilátero, a medida da geratriz é igual à medida do diâmetro, que equivale ao dobro do raio.

5 Área lateral e área total de um cone circular reto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 520 e 521.

Responda: Que figura representa a planificação da superfície lateral de um cone circular reto? **Cite** algumas relações entre as medidas do cone e as medidas dessa figura.

A planificação da superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular. O raio desse setor tem medida igual à da geratriz do cone e o comprimento do arco desse setor é o mesmo comprimento da base do cone.

» **Identifique** os termos destacados a seguir.

Área lateral do cone: $A_L = \pi rg$

r representa
o raio da base do cone.

g representa
a geratriz do cone.

» **Identifique** os termos destacados a seguir.

g representa
a geratriz do cone.

Área total do cone: $A_T = \pi r(g + r)$

r representa
o raio da base do cone.

» **Complete** o quadro a seguir com a medida θ do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral de um cone circular reto de raio *r* e geratriz *g*.

Ângulo central do setor circular

Em radiano:
$\theta = \frac{2\pi r}{g}$ rad

Em grau:
$\theta = \frac{360° \cdot r}{g}$

Resolva os exercícios complementares 12 a 21 e 94 a 99.

6 Volume de um cone

Encontrei essas informações na(s) página(s) 524.

» **Escreva a fórmula** do volume do cone circular cujo raio da base mede *r* e cuja altura mede *h*.

$V = \frac{1}{3} \cdot Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Resolva os exercícios complementares 22 a 27 e 100 a 103.

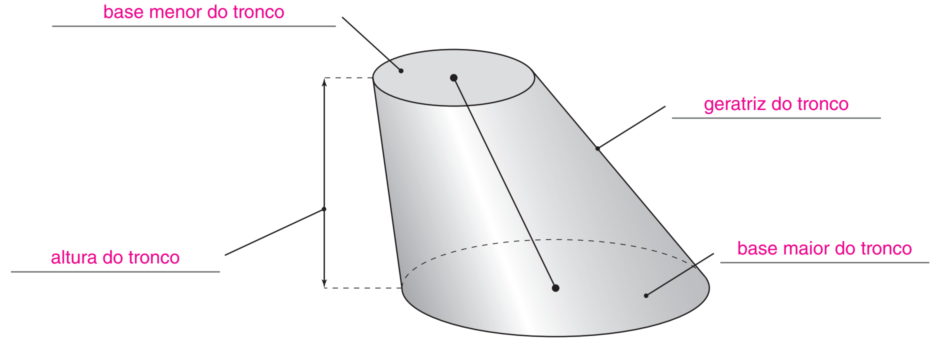
CAD_EST_MAT_CAP 12.indd 135 08/09/10 10:43:36

7

Tronco de cone circular de bases paralelas

Encontrei essas informações na(s) página(s) 526.

» **Nomeie** como base menor do tronco, base maior do tronco, altura do tronco e geratriz do tronco os elementos destacados no tronco de cone representado abaixo.



» **Responda**: Se uma secção transversal divide um cone *C* em dois sólidos, um cone *C'* e um tronco de cone com bases paralelas, de que forma pode-se obter a área e o volume do tronco de cone?

Obtém-se a área lateral (ou o volume) do tronco determinando a diferença entre a área lateral (ou o volume) dos cones *C* e *C'*.

8

Cones semelhantes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 528.

» **Identifique** os termos que completam as afirmações a seguir.

Dois cones circulares são semelhantes se a cada secção meridiana de um associa-se uma secção meridiana do outro, de forma que essas secções sejam triângulos semelhantes entre si.

A razão entre os volumes de dois cones semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança entre eles.

Resolva os exercícios complementares 28 a 32 e 104 a 110.

ESFERA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

esfera: Sendo *O* um ponto de espaço e *R* uma distância não nula, chama-se esfera de centro *O* e raio *R* o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são menores ou iguais a *R*.

corda da esfera: É qualquer segmento de reta cujos extremos pertencem à superfície da esfera.

hemisfério: É o sólido formado quando uma esfera é separada em duas partes por um plano que passa pelo seu centro.

ângulo diedro: Dois semiplanos, p_1 e p_2, de mesma origem *s*, separam o espaço em duas partes. A reunião desses semiplanos com qualquer uma dessas duas partes é chamada de ângulo diedro de aresta *s* e faces p_1 e p_2. A medida θ do ângulo entre essas faces é a medida do ângulo diedro.

cunha esférica: É a intersecção de uma esfera com um ângulo diedro cuja aresta passa pelo centro da esfera.

fuso esférico: É a região de uma superfície esférica contida em uma cunha esférica.

Guia de estudo

1 Esfera

Encontrei essas informações na(s) página(s) 531.

Analise três situações em que os pontos estão a diferentes distâncias em relação ao centro *C* da esfera de raio *R*. **Complete** o esquema com a denominação correspondente a cada região.

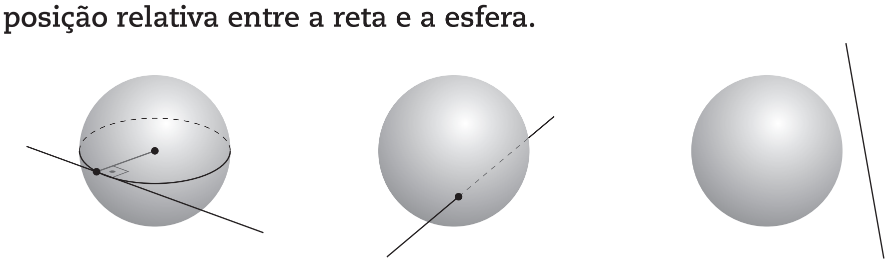
Distância dos pontos ao centro *O* da esfera

Menor que *R*:	Igual a *R*:	Maior que *R*:
A região é chamada de interior da esfera.	A região é chamada de superfície esférica.	A região é chamada de exterior da esfera.

2 Posições relativas entre uma reta e uma esfera

Encontrei essas informações na(s) página(s) 531 e 532.

Classifique cada uma das situações a seguir de acordo com a posição relativa entre a reta e a esfera.



reta tangente — reta secante — reta exterior

Responda: Se uma reta s é tangente a uma esfera em um ponto T, qual é a medida do ângulo formado pela reta s e pelo raio $\overline{OT}$ da esfera?

A medida do ângulo é 90°, pois o raio da esfera é perpendicular à reta da tangente no ponto de contato entre a reta e a esfera.

3 Posições relativas entre um plano e uma esfera

Encontrei essas informações na(s) página(s) 533 e 534.

Complete o esquema a seguir, em que d é a distância de um plano α ao centro de uma esfera de raio R.

Distância do plano ao centro da esfera

- $d = R$: o plano é tangente à esfera.
  - O plano tem apenas um ponto em comum com a esfera.
- $d < R$: o plano é secante à esfera.
  - A intersecção do plano com a esfera é um círculo.
    - O plano passa pelo centro da esfera: a intersecção é um círculo de raio R chamado de círculo máximo da esfera.
    - O plano não passa pelo centro da esfera: a intersecção é um círculo de raio r tal que $R^2 = r^2 + d^2$.
- $d > R$: o plano é exterior à esfera.
  - O plano não tem ponto em comum com a esfera.

Resolva os exercícios complementares 33 a 35 e 111 a 113.

4 Volume de uma esfera

Encontrei essas informações na(s) página(s) 535.

Escreva a fórmula do volume da esfera de raio R.

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Resolva os exercícios complementares 36 a 39 e 114 a 120.

5

Área da superfície esférica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 536.

» **Escreva a fórmula** da área da superfície esférica de raio R.

$A =$ $4\pi R^2$

Resolva os exercícios complementares 40 a 45, 121 e 122.

6

Fuso esférico e cunha esférica

Encontrei essas informações na(s) página(s) 537 e 538.

» Abaixo há um exercício e parte de sua resolução. **Complete-a** com base nos comentários à esquerda.

Exercício

Uma esfera de raio igual a 36 cm é dividida em 12 cunhas esféricas de mesmo volume.

Determine a medida do ângulo diedro, o volume e a área do fuso esférico de cada uma dessas cunhas.

Resolução

Calculamos o ângulo diedro dividindo 360° por 12.

O ângulo diedro de cada cunha é:

$\alpha = 360° \div 12 \Rightarrow \alpha =$ $30°$

O volume de cunha é $\frac{1}{12}$ do volume da esfera.

O volume de cada cunha é:

$V = \frac{1}{12} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V =$ $5.184\pi \text{ cm}^3$

A área de cada fuso é $\frac{1}{12}$ da área da superfície esférica.

A área de cada fuso é:

$A = \frac{1}{12} \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow A =$ $432\pi \text{ cm}^2$

Resolva os exercícios complementares 46 a 49, 123 e 124.

7

Esferas tangentes

Encontrei essas informações na(s) página(s) 539.

» **Complete** as afirmações a seguir.

Se duas esferas são tangentes, suas superfícies possuem um único ponto em comum.

Se O e O' são, respectivamente, os centros de duas esferas tangentes e T é o ponto de tangência entre elas, então O, O' e T são pontos colineares.

Resolva o exercício complementar 50.

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE UMA ESFERA

Termos e conceitos

Defina com suas próprias palavras os termos ou conceitos a seguir.

esfera inscrita em um poliedro: É a esfera que tangencia todas as faces do poliedro.

esfera circunscrita a um poliedro: É a esfera cuja superfície passa por todos os vértices do poliedro.

Guia de estudo

1 Esfera e cubo

Encontrei essas informações na(s) página(s) 542.

Complete as frases.

Se uma esfera está inscrita em um cubo, então o diâmetro da esfera tem a mesma medida de uma aresta do cubo.
Se r é a medida do raio da esfera inscrita em um cubo de aresta a, então $r = \frac{a}{2}$.

Se uma esfera está circunscrita a um cubo, então o diâmetro da esfera tem a mesma medida de uma diagonal do cubo.
Se R é a medida do raio da esfera circunscrita a um cubo de aresta a, então $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Resolva os exercícios complementares 51 a 58.

2 Esfera e octaedro regular

Encontrei essas informações na(s) página(s) 544.

Complete as frases.

Se R é a medida do raio da esfera circunscrita a um octaedro regular de aresta a, então $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Se r é a medida do raio da esfera inscrita em um octaedro regular de aresta a, então $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Resolva os exercícios complementares 59 a 62.

3 Esfera e cilindro circular reto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 545 e 546.

» **Identifique** os termos e as expressões que completam as afirmações a seguir.

Quando uma esfera está inscrita num cilindro circular reto, o raio da base do cilindro é igual ao raio da esfera e a altura do cilindro é igual ao diâmetro da esfera. Nesse caso, o cilindro é equilátero.

Quando uma esfera de raio R está circunscrita a um cilindro circular reto de raio da base r e altura h, temos a seguinte equação: $(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$.

Resolva os exercícios complementares 63 a 67.

4 Esfera e cone circular reto

Encontrei essas informações na(s) página(s) 548 e 549.

» **Complete** com as expressões que relacionam elementos da esfera de raio R e um cone circular reto.

Quando uma esfera de raio R está inscrita em um cone circular reto de raio da base r, geratriz g e altura h, temos a seguinte proporção: $\frac{g}{h - r} = \frac{R}{r} = \frac{h}{g - R}$.

Quando uma esfera de raio R está circunscrita a um cone circular reto de raio da base r e altura h, temos a seguinte equação: $r^2 = h(2R - h)$.

Resolva os exercícios complementares 68 a 75 e 125.

FECHANDO O CAPÍTULO

» **Liste** os exercícios do livro-texto que você não conseguiu resolver.

resposta pessoal

» Agora **formule** questões que o ajudarão a resolver os exercícios listados acima.

resposta pessoal

» Reúna-se com um colega e peça-lhe que esclareça as dúvidas que você levantou na questão anterior. A seguir, **esclareça** as dúvidas levantadas por ele. Se as dúvidas persistirem, **perguntem** a seu professor.

resposta pessoal

Sintetize

» **Sintetize** as ideias principais do capítulo.
Dica: Pode ser um texto, uma tabela ou um esquema.
resposta possível:

	Volume	Área lateral	Área total
Cilindro circular	$V = \pi r^2 h$	$A_L = 2\pi rh$	$A_T = 2\pi r(h + r)$
Cone circular	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$A_L = \pi rg$	$A_T = \pi r(g + r)$
Esfera	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$	Não tem	$A = 4\pi R^2$
Cunha esférica	$V = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{\alpha}{360°}$	Não tem	$A = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

Organizador de estudos

» **Use** a tabela abaixo para acompanhar o progresso de seus estudos. Ao completar cada atividade do *Caderno do estudante* ou revisão do livro-texto, **marque** um X ou **escreva** a data em que realizou a atividade na linha correspondente.

☐ Atividades do *Caderno do estudante* ☐ Livro-texto

Capítulo 12	
Abertura	
Seção 12.1	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Para começar o estudo	
Seção 12.1	
Seção 12.2	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 12.2	
Seção 12.3	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 12.3	
Conteúdo digital	
Seção 12.4	
Exercícios resolvidos	
Exercícios propostos	
Seção 12.4	
Exercícios complementares	
Exercícios de revisão cumulativa	
Análise da resolução	
Fechando capítulo	