Treinamento para a XI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Lista 2

1. (Exercício 10 da lista 1 corrigido) Seja ABC um triângulo retângulo em A e P um ponto no interior de ABC, tal que $AB = PB$. Se H é o pé da altura relativa a BC e M é o ponto médio de BC, prove que PM é bissetriz de $\angle HPC$ se e só se $\angle ABC = 60°$.

2. O ângulo entre o lado AC do triângulo ABC e a mediana relativa ao vértice A é igual a $30°$. Esta também é a medida do ângulo entre o lado BC e a mediana relativa ao vértice B. Prove que o triângulo ABC é equilátero.

3. Prove a desigualdade

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3$$

para números reais positivos a, b, c com $abc = 1$.

4. Mostre que não é possível cobrir um polígono convexo de n lados utilizando apenas quadriláteros não convexos.

5. Sejam A, B, C três pontos distintos do plano tais que $AB = AC$. Encontre o lugar geométrico dos pontos P tais que $\angle APB = \angle APC$.

6. São dadas n moedas, não necessariamente todas iguais, tais que cada uma pesa um número inteiro de gramas, e que em conjunto pesam $2n$ gramas. Sabe-se que é impossível dividir o conjunto das moedas em dois grupos de mesmo peso. Determinar quando pesa cada uma das n moedas. Dar todas as possibilidades.

7. Um quebra-cabeças tem a forma de um retângulo e é montado com 2000 peças que são todos retângulos iguais, e semelhantes ao retângulo grande, de tal modo que os lados dos retângulos pequenos são paralelos aos do grande. O menor lado de cada peça mede 1. Determinar qual é o menor valor possível para a área do retângulo grande.

8. Sejam $m \geq 2$, $n \geq 2$ números inteiros. Deseja-se colorir as casas de um tabuleiro $m \times n$ com as cores preta e branca de tal mod que cada casa tenha exatamente duas casas vizinhas da outra cor. Determinar todos os valores de m e n para os quais é possível fazer tal coloração.

Observação: Casas vizinhas são as que possuem um lado comum.

9. O cartão da *Loteria Matemática* é um tabuleiro 6×6. O apostador marca seis cruzes em seis casas do cartão e envia ao concurso. O cartão oficial é publicado no jornal, com seis cruzes marcadas que indicam as seis casas perdedoras. O apostador ganha se não marcou nenhuma cruz em uma casa perdedora.

(a) Demonstrar que o jogador pode preencher 9 cartões de modo que pelo menos um deles seja ganhador.

(b) Demonstrar que 8 cartões não são suficientes para ter certeza de ganhar.

10. Seja p um número primo, $p > 3$. Provar que se existe um inteiro a tal que p divide $(a^2 - a + 3)$, então existe um inteiro b tal que p divide $b^2 - b + 25$.

Prazo para envio: 17 de março.