Livro Eletrônico

Aula 10

Matemática I p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos

AULA 10 – Função Exponencial e Logarítmica

Sumário

1 – Introdução

A Função Exponencial é uma das funções mais importantes da nossa querida Matemática. Ressalto que, ALÉM DO TEMA FUNÇÃO, TRABALHAREMOS TAMBÉM: EQUAÇÃO E INEQUAÇÃO.

Nesta aula, abordarei a exponencial e logarítmica, para que na próxima aula possamos só fazer exercícios da sua banca.

Acredito que esse tema será objeto de prova. Então, não dê mole!! Vamos à luta!

2 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a^x$, com $a>0$ e $a\neq1$. Tal função é denominada **Função Exponencial**. Em outras palaras, função exponencial é toda é toda função em que a variável está presente no expoente.

Exemplo:

1º) $f(x)=3^x$

2º) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

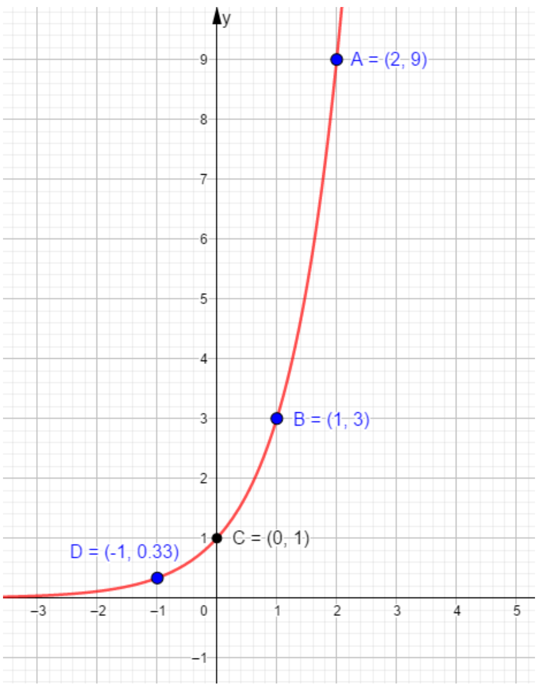
3º) $f(x)=0,78^x$

4º) $f(x)=2,23^x$

2.1 – GRÁFICOS

Considere a função $y=3^x$. Vamos atribuir alguns valores à variável, calcular a imagem correspondente e construir o gráfico. Assim, temos:

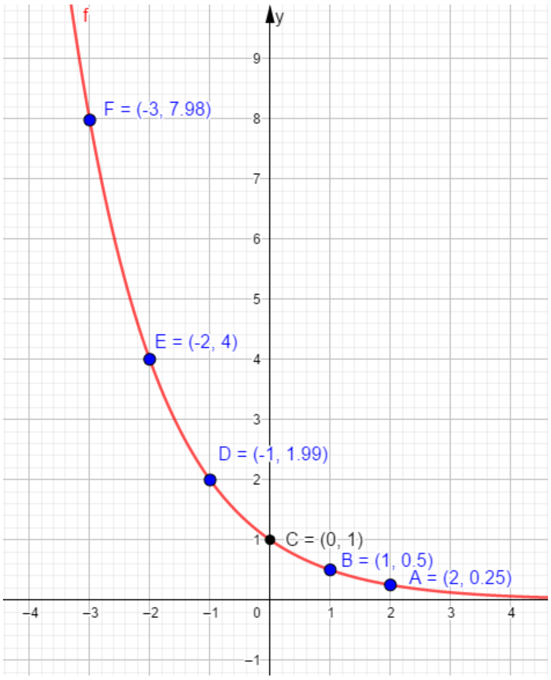
x	$y=3^x$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



Do mesmo modo, vamos obter o gráfico da função:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

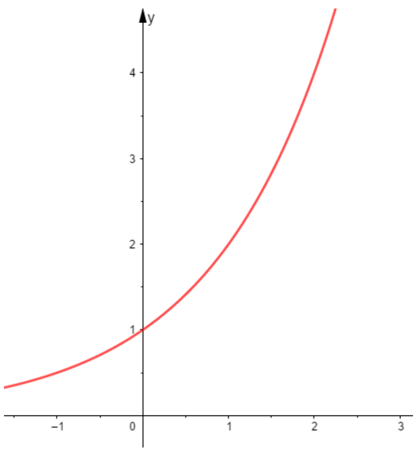
x	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



De modo geral, há dois tipos de gráfico para a função $f(x)=a^x$. Vamos a eles!

- Se $a>1$, então a função $f(x)=a^x$ é **crescente.**

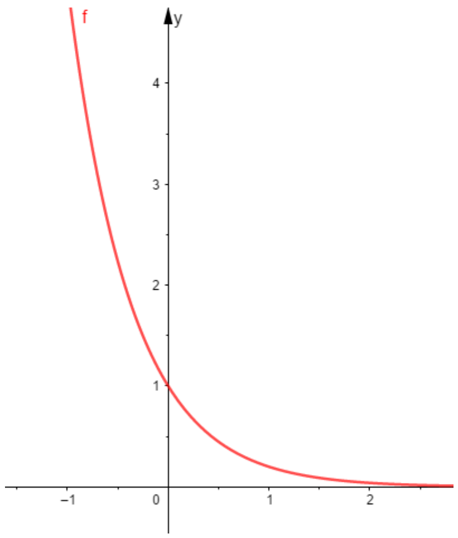
Exemplo: $f(x)=2^x$



- II) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$, é **decrescente.**

Exemplo:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



LEITURA OBRIGATÓRIA

<u>Com relação aos gráficos, podemos dizer</u>:

I) Trata-se de uma função injetora, pois a cada valor da imagem corresponde um único valor do domínio.

II) O domínio de uma função exponencial é sempre igual ao conjunto dos números reais $(D = \mathbb{R})$.

III) A curva está toda acima do eixo das abcissas, pois $y = a^x$ é sempre maior que zero para todo x real. Portanto, a sua imagem (Im) é dada por $Im = \mathbb{R}_+^*$

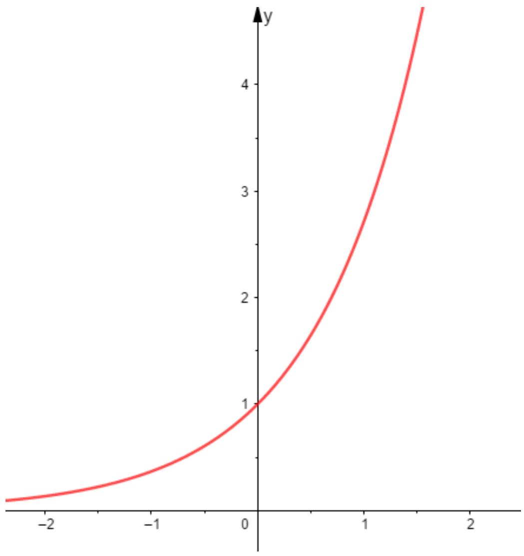
IV) A curva corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1). Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a^0 = 1$.

O número e...

Trata-se de um número irracional, cujo valor é $2,71828...$ Esse número é conhecido como número neperiano, uma referência ao matemático escocês John Napier, autor da primeira publicação sobre a Teoria dos Logaritmos.

O número e é extremamente importante no estudo de juros e de diversos fenômenos naturais, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, crescimento de bactérias, entre outros.

O gráfico da função $y = e^x$ é dado por:



01. Determinar os valores de k para os quais a função $f(x) = \left(2 + \frac{3k}{5}\right)^x$ é crescente.

Comentário:

Para que a função seja crescente, é necessário que $2+\frac{3k}{5}>1$.

Portanto, temos:

$$2+\frac{3k}{5}>1 \Rightarrow \frac{3k}{5}>-1 \Rightarrow 3k>-5 \Rightarrow k>-\frac{5}{3}$$

3 – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

3.1 – EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é dita exponencial quando a variável se apresenta no expoente. Seja a um número real tal que $0<a\neq 1$. Como a função exponencial é injetora, temos:

Se $a^x = a^y$, **então** $x = y$

02. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $32^x = 128$.

Comentário:

$$32^x = 128 \Rightarrow (2^5)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{5x} = 2^7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x = 7$$
$$x = \frac{7}{5}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$

Comentário:

Podemos escrever $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$. Substituindo 3^x por y, temos:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{82}{9} \Rightarrow \frac{9y^2 + 9}{9y} = \frac{82y}{9y}$$

$$9y^2 - 82y + 9 = 0$$
$$\Delta = (-82)^2 - 4.9.9 = 6400$$
$$y = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{9} \text{ ou } y = 9$$

Para $y = \frac{1}{9}$, temos $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$

Para $y = 9$, temos $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

Portanto, $S = \{-2, 2\}$

---

04. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $4^x - 2^x - 12 = 0$

Comentário:

$4^x - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2x - 12 = 0$. Substituindo 2^x por y, temos:

$$y^2 - y - 12 = 0$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-12) = 49$$

$$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3 \text{ ou } y = 4$$

Para $y = -3$, temos $2^x = -3$ (absurdo)

Para $y = 4$, temos $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

Portanto, $S = \{2\}$

3.2 – Inequação Exponencial

Toda desigualdade em que a variável aparece no expoente é uma inequação exponencial.

Exemplos:

1º) $7^x > 343$

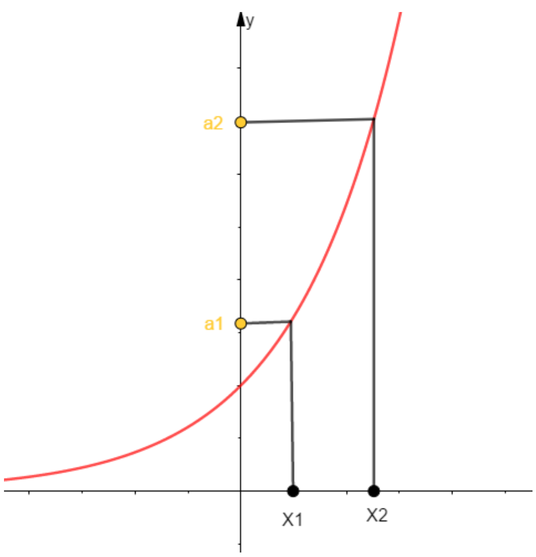
2º) $7^{x-4} < 81$

3º) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$

De modo geral, uma inequação deve ser resolvida colocando-se a mesma base a nos dois membros da inequação e considerando-se os seguintes casos:

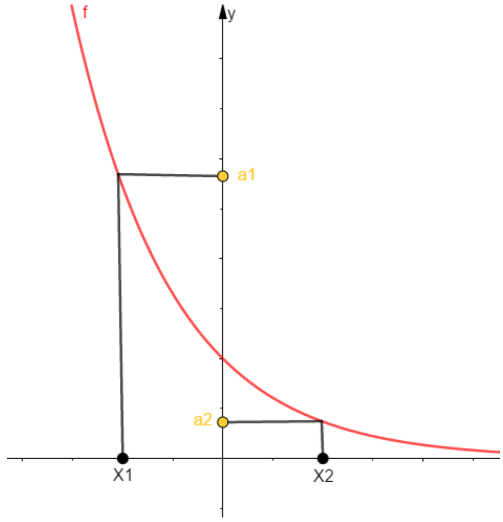
1º caso: $a > 1$

Como a função $f(x) = a^x$ é crescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 > x_1$.



Portanto: Se $a > 1$, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoents.

2º caso: $0 < a < 1$



Como a função $f(x) = a^x$ é decrescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 < x_1$

Portanto: Se $0 < a < 1$, devemos **inverter** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

05. Resolver a inequação $7^x > 343$

Comentário:

$7^x > 343 \Rightarrow 7^x > 7^3$

Como $7 > 1$, devemos conservar a desigualdade, ou seja, $x > 3$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

06. Resolver a inequação $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$

Comentário:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

Como $0 < \frac{1}{5} < 1,$ devemos inverter a desigualdade, ou seja, $3x - 21 \leq 2 \Rightarrow 3x \leq 23 \Rightarrow x \leq \frac{23}{3}$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{23}{3}\}$

---

07. Resolver a inequação $2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^{x} \leq 18$

Comentário:

Nesse caso, devemos utilizar as propriedades das potências,

$$2^{x}.2^{2} - \frac{2^{x}}{2} + 2^{x} \leq 18 \Rightarrow 4.2^{x} - \frac{2^{x}}{2} + 2^{x} \leq 18$$

Substituindo 2^{x} por $y,$ temos:

$$4y - \frac{y}{2} + y \leq 18 \Rightarrow \frac{10y - y}{2} \leq 18 \Rightarrow 9y \leq 36 \Rightarrow y \leq 4$$

Substituindo y por $2^{x},$ obtemos:

$$2^{x} \leq 4 \Rightarrow 2^{x} \leq 2^{2} \Rightarrow x \leq 2$$

Portanto, $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$

---

4 – LOGARITMO

4.1 – DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Imaginemos o seguinte problema: à qual expoente devemos elevar o número 3 de modo a obtermos 243?

Observe que o problema anterior pode ser descrito através da seguinte equação exponencial:

$$3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$$

A partir de agora, diremos que 5 é o logaritmo de 243 na base 3. Com isso, promovemos uma mudança na notação utilizada. Assim, escrevemos:

$$\log_3 243 = 5$$

Portanto, observamos que as expressões descritas anteriormente são equivalentes, ou seja:

$$\log_3 243 = 5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$$

Podemos generalizar essa ideia do seguinte modo:

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente real x que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$$

Em que:

I) b é o logaritmando

II) a é a base

III) x é o logaritmo

Exemplo:

Calcular o valor de cada logaritmo a seguir:

1º) $\log_2 32$

Comentário:

$$\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

2º) $\log_{0,2} 625$

Comentário:

$$\log_{0,2} 625 = x \Rightarrow 0,2^x = 625 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 625 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{-x} = 5^4 \Rightarrow x = -4$$

LEITURA

OBRIGATÓRIA

I) As condições de existência do logaritmo $\log_a b$ **são:**

$$b > 0 \text{ e } 0 < a \neq 1$$

II) Quando a base de um logaritmo é igual a 10 (logaritmo decimal), esta pode ser omitida.

Exemplo: $\log_{10} 5$ pode ser escrito como $\log 5$.

III) Quando a base do logaritmo é o número e $(e = 2,71828...)$, **esse logaritmo é chamado logaritmo neperiano ou logaritmo natural e é representado pela notação In.**

Exemplo: $\log_e 18$ pode ser escrito como In 18.

4.2 – Consequências da Definição

Considerando a definição de logaritmo e suas condições de existência, temos:

I) $\log_a a = 1$, pois $a = a^1$;

II) $\log_a 1 = 0$, pois $1 = a^0$;

III) $\log_a a^k = k$, pois $a^k = a^k$;

IV) $a^{\log_a b} = b$

4.3 – Propriedades dos Logaritmos

Sendo a, b e c números reais e positivos, e $a \neq 1$, temos:

I) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$;

II) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

III) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$, $\text{com } \alpha \in \mathbb{R}$;

IV) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$, $\text{com } \alpha \in \mathbb{R}$.

01. Sendo $\log_2 x = 3, \log_2 y = 5$ e $\log_2 z = 7$, calcular o valor de $\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z}$, considerando satisfeitas as condições de existência.

Comentário:

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z} = \log_2 x^{3/5} - (\log_2 y^2 + \log_2 z) \Rightarrow$$
$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z} = \frac{3}{5}\log_2 x - 2\log_2 y - \log_2 z \Rightarrow$$
$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2 z} = \frac{3}{5}.3 - 2.5 - 7 = -\frac{76}{5}$$

4.4 – Equações Logarítmicas

São equações que envolvem logaritmos, em que as variáveis podem aparecer no logaritmando ou na base. Assim, para resolvê-las, aplicamos a definição, as condições de existência e as propriedades dos logaritmos.

02. Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação logarítmica:

$$\log_5 (3x - 18) = \log_5 6$$

Comentário:

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência (C.E.) de cada logaritmo. Assim ,temos:

$$3x - 18 > 0$$
$$x > 6$$

Em seguida, como as bases são iguais, devemos igualar também os logaritmandos. Logo:

$$3x-18=6$$
$$3x=24$$
$$x=8$$

Como esse valor satisfaz a condição de existência $(x>6)$, então a solução da equação é $S=\{8\}$

---

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2(1-5x)=-3$

Comentário:

Aplicando a condição de existência, temos:

$$1-5x>0$$
$$-5x>-1$$
$$5x<1$$
$$x<\frac{1}{5}$$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$1-5x=2^{-3}$$
$$1-5x=\frac{1}{8}$$
$$1-\frac{1}{8}=5x$$
$$\frac{7}{8}=5x$$
$$x=\frac{7}{40}$$

Então, como $\frac{7}{40}<\frac{1}{5}$, satisfazendo a condição de existência, a solução da equação é $S=\left\{\frac{7}{40}\right\}$

Até aqui, tudo bem??

Preste bastante atenção aos pontos explicados. Cada uma deles fará diferença na sua prova!!

Vamos à teoria de Função Logaritma?!

5 – Função Logarítmica

5.1 – Introdução

Chama-se função logarítmica toda função f, de domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o logaritmo $\log_a x$, sendo a um número real positivo e diferente de 1.

$$f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \,/\, f(x)=\log_a x, \text{ em que } 0<a\neq 1$$

Exemplos:

1º) $f(x)=\log_5 x$

2º) $f(x)=\log_{0,4} x$

3º) $y=\text{In } x$

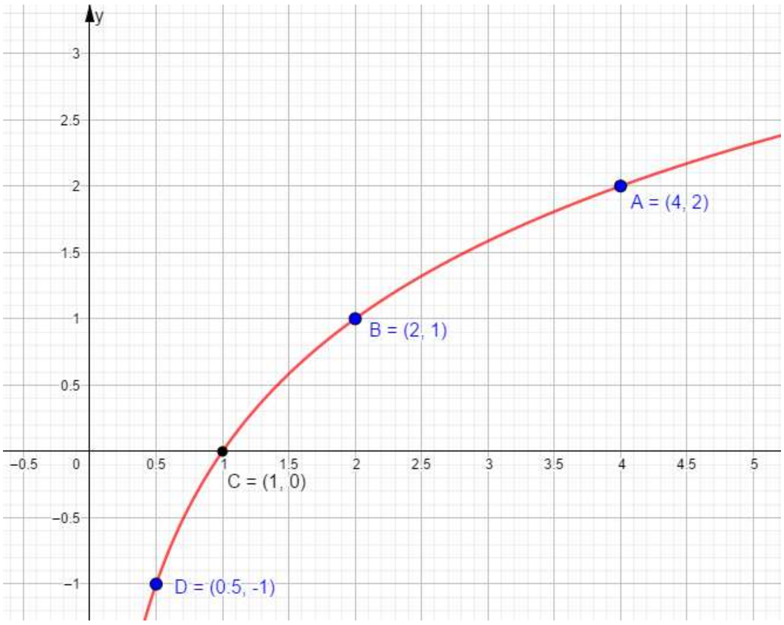
4º) $y=\log_{10} x$

5.2 –Gráficos

Vamos construir os gráficos das funções $f(x)=\log_2 x$ e $f(x)=\log_{1/2} x$. Em cada caso, iremos atribuir alguns valores para x e, em seguida, calcularemos os correspondentes valores de y. Os pares ordenados obtidos serão usados para construir cada gráfico.

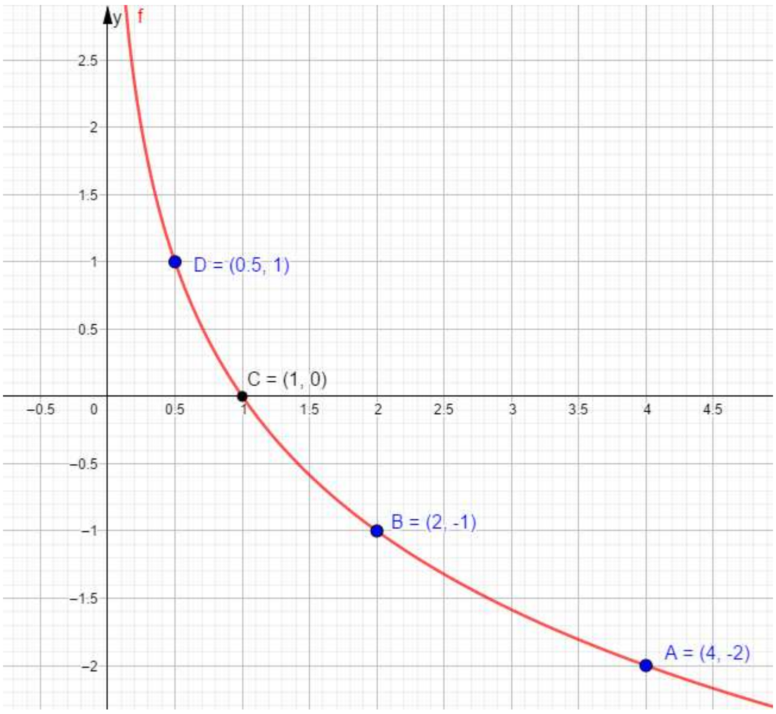
1º) Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3



2º) Gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$

x	y
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



RESUMINDO

I) Ambos os gráficos não interceptam o eixo das ordenadas. Isso ocorre porque a função logarítmica não está definida para $x = 0$.

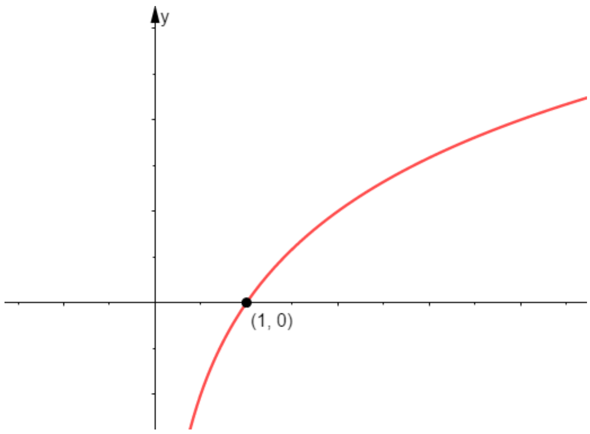
II) Ambos os gráficos interceptam o eixo das abscissas no ponto (1,0). Isso se deve ao fato de que $\log_a 1 = 0$, para qualquer número real **a** positivo e diferente de 1.

III) O gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ é crescente. Isso ocorre porque a base do logaritmo é igual a 2, ou seja, é maior do que 1.

IV) O gráfico da função $f(x) = \log_{1/2} x$ é decerscente. Isso ocorre porque a base do logaritmo é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, é um número maior do que 0 e menor do que 1.

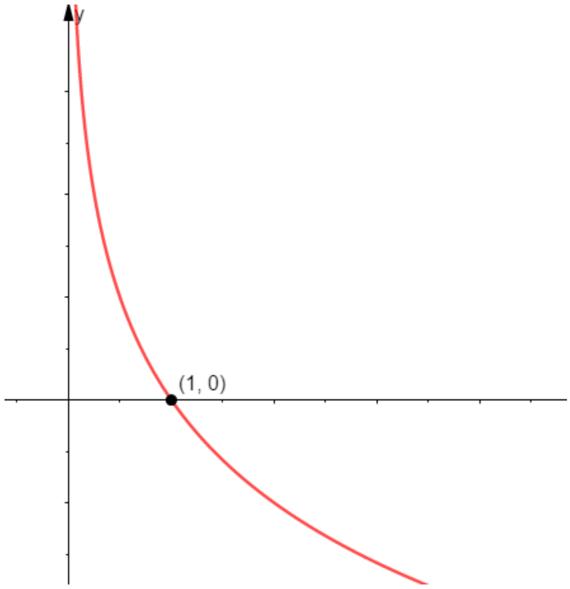
De modo geral, há dois casos a serem considerados no esboço do gráfico da função $f(x) = \log_a x$:

1º caso: $a > 1$



- Função Crescente
- Domínio $D = \mathbb{R}_+^*$
- Imagem $\text{Im} = \mathbb{R}$

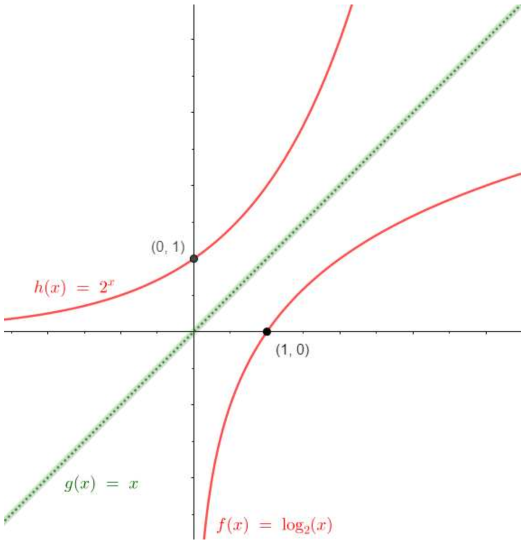
2º caso: $0 < a < 1$



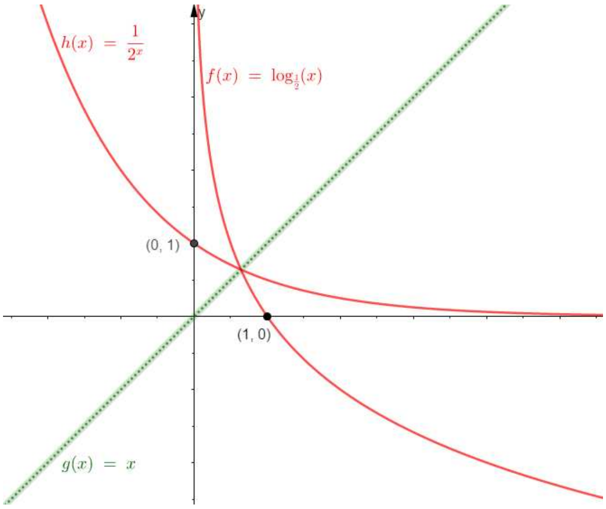
- Função Decrescente
- Domínio $D = \mathbb{R}$
- Imagem $Im = \mathbb{R}_+^*$

A função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ é inversa da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $g(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$. Os gráficos das funções f e g são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$, característica marcante de funções inversas entre si.

1º caso: $a > 1$



2º caso: $0 < a < 1$

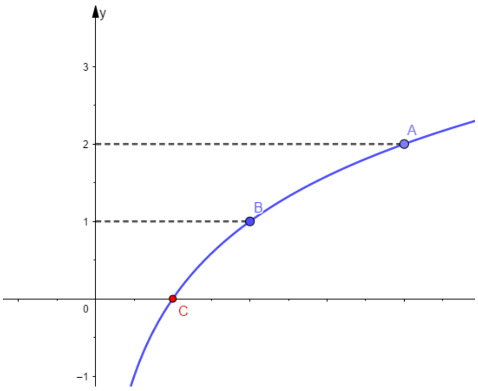


LEITURA OBRIGATÓRIA

Ressalto que o ponto de interseção entre os gráficos da Função Exponencial e Logaritma é o ponto em que essas funções apresentam o mesmo valor numérico!

HORA DE
PRATICAR!

04. (UFJF) A figura a seguir é um esboço, no plano cartesiano, do gráfico da função $f(x) = \log_b x$, com alguns pontos destacados. Supondo que a abscissa do ponto **A** é igual a 9, é incorreto afirmar que:



a) a base b é igual a 3.

b) a abscissa de **C** é igual a 1.

c) $f(x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$

d) a abscissa de **B** é igual a 2.

e) $f(x)$ é crescente.

Comentário:

- O ponto **A** possui abscissa 9 e ordenada 2. Substituindo, na expressão da função, temos: $\log_b 9 = 2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Portanto, a alternativa **A** está correta.

- Para $f(x) = 0$, temos $\log_b x = 0 \Rightarrow x = 1$. Logo, a abscissa do ponto C é igual a 1. Portanto, a alternativa **B** está correta.

- Para $0 < x < 1$, as correspondentes imagens são negativas. Portanto, a alternativa **C** está correta.

- Para $f(x)=1$, temos $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$ Portanto, a alternativa **D** está **incorreta.**

- O gráfico representa uma função crescente, pois a base $b = 3 > 1$, ou seja, a alternativa **E** está correta

QUESTÕES COMENTADAS

1. (Usf 2018) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750.$ De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

a) 5 horas.

b) 6 horas.

c) 7 horas.

d) 9 horas.

e) 12 horas.

Comentário:

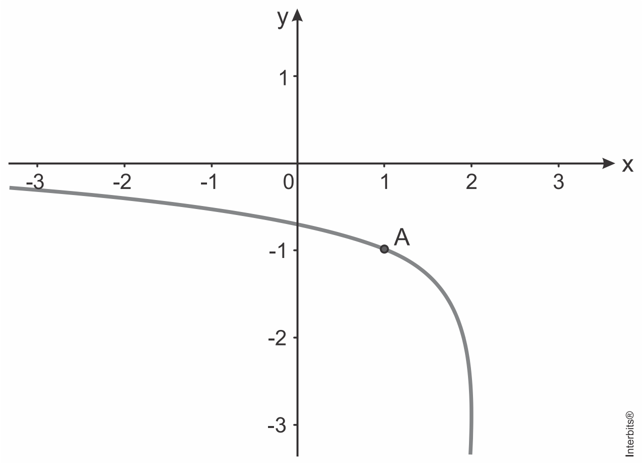
Para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B devemos ter

$$\begin{aligned} 10 \cdot 2^{t-1} + 238 = 2^{t+2} + 750 &\Leftrightarrow 10 \cdot 2^{t-1} - 2^{t+2} = 750 - 238 \\ &\Leftrightarrow 2^{t-1} \cdot (10 - 2^3) = 512 \\ &\Leftrightarrow 2^{t-1} = 2^8 \\ &\Leftrightarrow t = 9. \end{aligned}$$

Em consequência, a resposta é 9 horas.

Gabarito: D

2. (Upf 2018) Na figura, está representada parte do gráfico da função f definida por $f(x) = \log(ax + 2) - 1,$ com $a \neq 0$ e o ponto $A(1, -1)$ pertencente ao gráfico da função $f.$



O valor de a é:

a) 1

b) 2

c) -1

d) -2

e) 8

Comentário:

Se $A(1, -1)$ pertence ao gráfico de $f,$ então

$$-1 = \log(a \cdot 1 + 2) - 1 \Leftrightarrow a + 2 = 10^0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Gabarito: C

---

3. (Mackenzie 2018) Se $3^m = a$ e $3^n = b,$ $a > 0$ e $b > 0,$ então o valor de $3^{\frac{m-2n}{2}}$ é igual a

a) $\sqrt{a} - b$

b) $\frac{a}{2} + b$

c) $\frac{a}{2} - b$

d) $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

e) $\dfrac{a-b}{2}$

Comentário:

Calculando:

$$3^{\frac{m-2n}{2}} = \left(3^{m-2n}\right)^{1/2} = \sqrt{3^m \cdot 3^{-2n}} = \sqrt{3^m \cdot \frac{1}{\left(3^n\right)^2}} = \sqrt{a \cdot \frac{1}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$$

Gabarito: D

---

4. (Ifpe 2017) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

a) 39 refrigeradores.

b) 13 refrigeradores.

c) 127 refrigeradores.

d) 69 refrigeradores.

e) 112 refrigeradores.

Comentário:

Sabendo que o segundo trimestre corresponde aos meses de Abril, Maio e Junho, isto é, meses $4, 5, 6$ temos que a venda foi de:

$$V(4) + V(5) + V(6) = (5 + 2^4) + (5 + 2^5) + (5 + 2^6) = (5 + 16) + (5 + 32) + (5 + 64) = 127$$

Gabarito: C

---

5. (Ufjf-pism 1 2017) Para qual das funções abaixo, a equação $f(x)-1=0$ não possui uma raiz real?

a) $f(x)=e^x$

b) $f(x)=\log_{10} x$

c) $f(x)=-x^2$

d) $f(x)=2x$

e) $f(x)=1$

Comentário:

Calculando:

[A] $e^x-1=0 \to x=0 \to 0 \in \mathbb{R}$

[B] $\log_{10} x-1=0 \to x=10 \to 10 \in \mathbb{R}$

[C] $-x^2-1=0 \to \text{se } x \in \mathbb{R},$ então $x^2>0,$ logo $-x^2-1 \neq 0$

[D] $2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

[E] $1-1=0 \to 1 \in \mathbb{R}$

Gabarito: C

---

6. (Unesp 2017) Admita que o número de visitas diárias a um site seja expresso pela potência 4^n, com n sendo o índice de visitas ao site. Se o site S possui o dobro do número de visitas diárias do que um site que tem índice de visitas igual a 6, o índice de visitas ao site S é igual a

a) 12.

b) 9.

c) 8,5.

d) 8.

e) 6,5.

Comentário:

Seja k o índice de visitas ao site S. Desse modo, temos

$4^k=2\cdot 4^6 \Leftrightarrow 4^k=4^{0,5}\cdot 4^6 \Leftrightarrow 4^k=4^{6,5}.$

A resposta é $k = 6{,}5.$

Gabarito: E

---

7. (Pucrs 2017) Uma turma de uma escola central de Porto Alegre recebeu a seguinte questão em sua primeira prova no Ensino Médio:

Um dos valores de x que soluciona a equação $\log_2(-x^2 + 32) = 4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Comentário:

Desde que x é um número inteiro positivo, temos:

$$\begin{aligned}\log_2(-x^2+32) = 4 &\Leftrightarrow -x^2 + 32 = 16\\ &\Leftrightarrow x^2 = 16.\\ &\Rightarrow x = 4.\end{aligned}$$

Gabarito: B

---

8. (Eear 2017) Se $\log 2 \cong 0{,}3$ e $\log 36 \cong 1{,}6,$ então $\log 3 \cong$ ______.

a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

Comentário:

Tem-se que

$$\begin{aligned}\log 36 &= \log(2\cdot 3)^2\\ &= 2\cdot(\log 2+\log 3)\\ &\cong 2\cdot 0{,}3+2\cdot\log 3\\ &\cong 0{,}6+2\cdot\log 3.\end{aligned}$$

Portanto, o resultado é

$$0{,}6+2\cdot\log 3\cong 1{,}6\Rightarrow \log 3\cong 0{,}5.$$

Gabarito: B

---

9. (Upf 2017) Considere as funções reais de variável real, definidas por:

$f(x)=1+3^{x-2}$ e $g(x)=\log_a x$

Sabe-se que, na representação gráfica das funções, as curvas interceptam-se no ponto de abscissa 2. Dessa forma, o valor de a é:

a) $-\sqrt{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) 1

d) $\frac{1}{2}$

e) $\sqrt{2}$

Comentário:

Calculando:

$f(2)=g(2)$

$1+3^{2-2}=\log_a 2\Rightarrow 1+3^0=\log_a 2\Rightarrow \log_a 2=2\Rightarrow a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$

Gabarito: E

---

10. (Eear 2017) A desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ tem como conjunto solução

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

Comentário:

Sendo $0 < \frac{1}{2} < 1$, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\\ &\Leftrightarrow 3x-5 < 2x\\ &\Leftrightarrow x < 5.\end{aligned}$$

Por conseguinte, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$.

Gabarito: B

---

11. (Imed 2016) Em relação à função real definida por $g(x) = 2^x + 1$, é correto afirmar que $g(g(0))$ corresponde a:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentário:

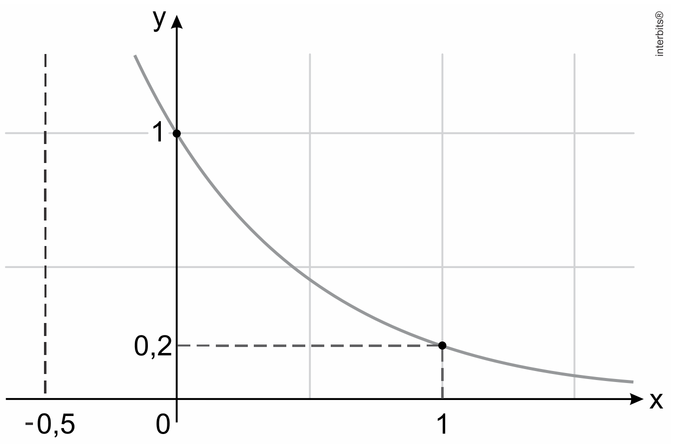
$g(x) = 2^x + 1$

$g(0) = 2^0 + 1 \Rightarrow g(0) = 2$

$g(g(0)) = 2^{g(0)} + 1 \Rightarrow g(g(0)) = 2^2 + 1 = 5$

Gabarito: E

12. (Unesp 2016) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Nessa função, o valor de y para $x = -0,5$ é igual a

a) $\log 5$

b) $\log_5 2$

c) $\sqrt{5}$

d) $\log_2 5$

e) $2,5$

Comentário:

Com os valores do gráfico e do enunciado, pode-se escrever:

$y = a^x$

$0,2 = a^1 \rightarrow a = 0,2 \rightarrow y = 0,2^x$

$y = 0,2^{-0,5} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-0,5} = \left(\frac{10}{2}\right)^{0,5} = (5)^{0,5} = \sqrt{5}$

Gabarito: C

13. (Enem 2ª aplicação 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após $20\,\text{min},$ a população será

a) reduzida a um terço.

b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

Comentário:

Desde que $20\,\text{min} = \frac{1}{3}\,\text{h},$ vem

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 80.$$

Portanto, após $20\,\text{min},$ a população será duplicada

Gabarito: D

---

14. (Unisinos 2016) Se x e y são tais que $\begin{cases} 2^{3x+4y} = 16 \\ 5x + 7y = 8 \end{cases},$ então $x^2 + y^2$ é igual a

a) $0.$

b) $32.$

c) $320.$

d) $832.$

e) 9.536.

Comentário:

Tem-se que

$$\begin{cases} 2^{3x+4y} = 16 \\ 5x + 7y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x+4y} = 2^4 \\ 5x + 7y = 8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -15x - 20y = -20 \\ 15x + 21y = 24 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Por conseguinte, vem $x^2 + y^2 = (-4)^2 + 4^2 = 32.$

Gabarito: B

---

15. (Pucrj 2016) Quanto vale a soma de todas as soluções reais da equação abaixo?

$$(5^x)^2 - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentário:

Completando o quadrado, vem

$$
\begin{aligned}
(5^x)^2 - 26\cdot 5^x + 25 = 0 &\Leftrightarrow (5^x - 13)^2 = 144 \\
&\Leftrightarrow 5^x - 13 = \pm 12 \\
&\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 5^x = 5^2 \\ \text{ou} \\ 5^x = 5^0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0\cdot
\end{aligned}
$$

Portanto, a resposta é $0 + 2 = 2$.

Gabarito: C

16. (Ifal 2016) Num determinado mês, a quantidade vendida Q de um certo produto, por dia, em uma loja, em função do dia d do mês, é representada pela função $Q = \log_2 d$. Qual a quantidade vendida desse produto no dia 16 desse mês?

a) $0.$

b) $1.$

c) $2.$

d) $3.$

e) $4.$

Comentário:

$$
\begin{aligned}
&Q = \log_2 d \\
&d = 16 \\
&Q = \log_2 16 = \log_2 2^4 \rightarrow Q = 4
\end{aligned}
$$

Gabarito: E

17. (Unicamp 2016) A solução da equação na variável real x, $\log_x(x+6) = 2$, é um número

a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

Comentário:

Sabendo que $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,$ para quaisquer a e b reais positivos, e $a \neq 1,$ temos

$$\log_x (x+6) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3,$$

que é um número primo.

Gabarito: A

---

18. (Ucs 2015) Considere as funções a seguir que representam quantidades de substâncias no tempo $t.$

I. $Q(t) = 100 \cdot (1{,}07)^t$

II. $Q(t) = 300 \cdot (0{,}25)^t$

III. $Q(t) = 5 \cdot e^{0{,}08t}$

Das funções acima, indica(m) crescimento

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Comentário:

Como todas as funções são do tipo $f(t) = a \cdot b^t,$ com $a > 0,$ segue que a única que não indica crescimento é $Q(t) = 300 \cdot (0{,}25)^t,$ pois $0 < b = 0{,}25 < 1.$

Gabarito: C

---

19. (Ucs 2015) A concentração C de certa substância no organismo altera-se em função do tempo t, em horas, decorrido desde sua administração, de acordo com a expressão $C(t) = K \cdot 3^{-0,5t}$.

Após quantas horas a concentração da substância no organismo tornou-se a nona parte da inicial?

a) 3

b) 3,5

c) 4

d) 6

e) 9

Comentário:

Queremos calcular t para o qual se tem $C(t) = \frac{1}{9} \cdot C(0)$. Logo, vem

$$K \cdot 3^{-0,5t} = \frac{1}{9} \cdot K \cdot 3^{-0,5 \cdot 0} \Leftrightarrow 3^{0,5t} = 3^2 \Leftrightarrow t = 4.$$

Gabarito: C

---

20. (Pucrj 2015) Se $\log_{1/2} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

a) $3/4$

b) 6

c) 28

d) 50

e) 66

Comentário:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -3 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = 8$$

$$\text{portanto } \sqrt[3]{8} + 8^2 = 66$$

Gabarito: E

---

21. (Espm 2014) Se $\left(4^x\right)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$, o valor de x^x é:

a) 27

b) 4

c) $\frac{1}{4}$

d) 1

e) $-\frac{1}{27}$

Comentário:

Como

$$\begin{aligned}(4^x)^2 = 16 \cdot 2^{x^2} &\Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{x^2+4} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2,\end{aligned}$$

segue-se que $x^x = 2^2 = 4.$

Gabarito: B

---

22. (Unifor 2014) Após um estudo em uma colmeia de abelhas, verificou-se que no instante $t = 0$ o número de abelhas era 1.000 e que o crescimento populacional da colmeia é dado pela função f, onde f é definida por $f(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{2t}{3}}$, em que t é o tempo decorrido em dias. Supondo que não haja mortes na colmeia, em quantos dias no mínimo essa colmeia atingirá uma população de 64.000 abelhas?

a) 9

b) 10

c) 12

d) 13

e) 14

Comentário:

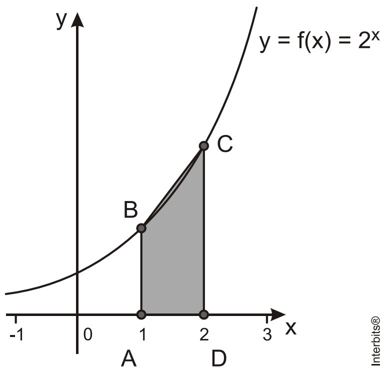
Queremos calcular o menor valor de t para o qual se tem $f(t) \geq 64000.$ Assim, vem que

$$1000 \cdot 2^{\frac{2t}{3}} \geq 64000 \Leftrightarrow 2^{\frac{2t}{3}} \geq 2^6 \Leftrightarrow t \geq 9.$$

Gabarito: A

---

23. (Ufjf 2012) Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x.$ Na figura abaixo está representado, no plano cartesiano, o gráfico de *f* e um trapézio *ABCD*, retângulo nos vértices *A* e *D* e cujos vértices *B* e *C* estão sobre o gráfico de *f*.



A medida da área do trapézio *ABCD* é igual a:

a) 2

b) $\frac{8}{3}$

c) 3

d) 4

e) 6

Comentário:

A área do trapézio $ABCD$ é dada por:

$$\frac{f(2)+f(1)}{2}\cdot(2-1)=\frac{2^2+2^1}{2}=\frac{6}{2}=3\text{ u.a.}$$

Gabarito: C

---

6 – Lista de Questões

1. (Usf 2018) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t)=10\cdot 2^{t-1}+238$ e $B(t)=2^{t+2}+750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

a) 5 horas.

b) 6 horas.

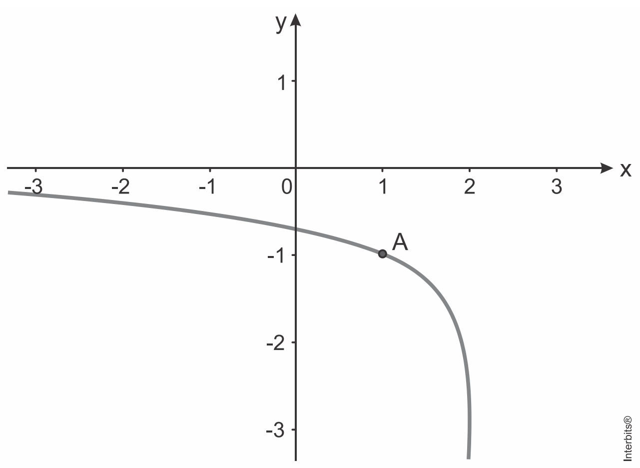
c) 7 horas.

d) 9 horas.

e) 12 horas.

---

2. (Upf 2018) Na figura, está representada parte do gráfico da função f definida por $f(x)=\log(ax+2)-1$, com $a\neq 0$ e o ponto $A(1,-1)$ pertencente ao gráfico da função f.



O valor de a é:

a) 1

b) 2

c) -1

d) -2

e) 8

---

3. (Mackenzie 2018) Se $3^m = a$ e $3^n = b$, $a > 0$ e $b > 0$, então o valor de $3^{\frac{m-2n}{2}}$ é igual a

a) $\sqrt{a} - b$

b) $\frac{a}{2} + b$

c) $\frac{a}{2} - b$

d) $\frac{\sqrt{a}}{b}$

e) $\frac{a-b}{2}$

---

4. (Ifpe 2017) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

a) 39 refrigeradores.

b) 13 refrigeradores.

c) 127 refrigeradores.

d) 69 refrigeradores.

e) 112 refrigeradores.

---

5. (Ufjf-pism 1 2017) Para qual das funções abaixo, a equação $f(x) - 1 = 0$ não possui uma raiz real?

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \log_{10} x$

c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = 2x$

e) $f(x) = 1$

---

6. (Unesp 2017) Admita que o número de visitas diárias a um site seja expresso pela potência 4^n, com n sendo o índice de visitas ao site. Se o site S possui o dobro do número de visitas diárias do que um site que tem índice de visitas igual a 6, o índice de visitas ao site S é igual a

a) 12.

b) 9.

c) $8,5$.

d) 8.

e) $6,5$.

---

7. (Pucrs 2017) Uma turma de uma escola central de Porto Alegre recebeu a seguinte questão em sua primeira prova no Ensino Médio:

Um dos valores de x que soluciona a equação $\log_2(-x^2 + 32) = 4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

---

8. (Eear 2017) Se $\log 2 \cong 0,3$ e $\log 36 \cong 1,6$, então $\log 3 \cong$ ______.

a) $0,4$

b) $0,5$

c) $0,6$

d) $0,7$

---

9. (Upf 2017) Considere as funções reais de variável real, definidas por:

$f(x) = 1 + 3^{x-2}$ e $g(x) = \log_a x$

Sabe-se que, na representação gráfica das funções, as curvas interceptam-se no ponto de abscissa 2. Dessa forma, o valor de a é:

a) $-\sqrt{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) 1

d) $\frac{1}{2}$

e) $\sqrt{2}$

---

10. (Eear 2017) A desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ tem como conjunto solução

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

---

11. (Imed 2016) Em relação à função real definida por $g(x) = 2^x + 1$, é correto afirmar que $g(g(0))$ corresponde a:

a) 1.

b) 2.

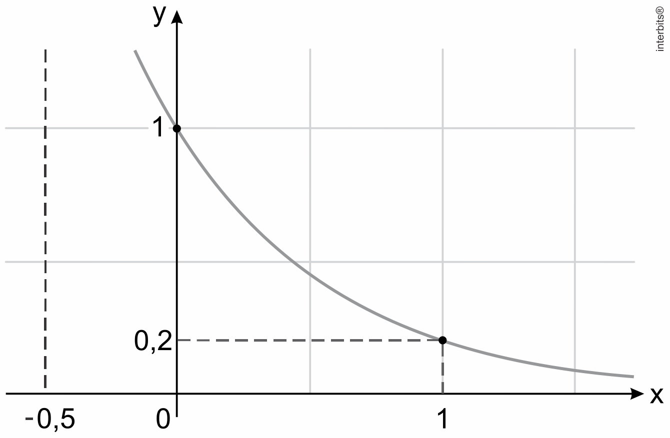
c) 3.

d) 4.

e) 5.

---

12. (Unesp 2016) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Nessa função, o valor de y para $x = -0{,}5$ é igual a

a) $\log 5$

b) $\log_5 2$

c) $\sqrt{5}$

d) $\log_2 5$

e) $2{,}5$

---

13. (Enem 2ª aplicação 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após $20\ \text{min},$ a população será

a) reduzida a um terço.

b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

---

14. (Unisinos 2016) Se x e y são tais que $\begin{cases} 2^{3x+4y} = 16 \\ 5x + 7y = 8 \end{cases}$, então $x^2 + y^2$ é igual a

a) $0.$

b) $32.$

c) $320.$

d) $832.$

e) $9.536.$

---

15. (Pucrj 2016) Quanto vale a soma de todas as soluções reais da equação abaixo?

$(5^x)^2 - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

---

16. (Ifal 2016) Num determinado mês, a quantidade vendida Q de um certo produto, por dia, em uma loja, em função do dia d do mês, é representada pela função $Q = \log_2 d.$ Qual a quantidade vendida desse produto no dia 16 desse mês?

a) $0.$

b) $1.$

c) $2.$

d) $3.$

e) $4.$

---

17. (Unicamp 2016) A solução da equação na variável real $x,$ $\log_x(x+6)=2,$ é um número

a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

---

18. (Ucs 2015) Considere as funções a seguir que representam quantidades de substâncias no tempo $t.$

I. $Q(t) = 100 \cdot (1{,}07)^t$

II. $Q(t) = 300 \cdot (0{,}25)^t$

III. $Q(t) = 5 \cdot e^{0{,}08t}$

Das funções acima, indica(m) crescimento

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

---

19. (Ucs 2015) A concentração C de certa substância no organismo altera-se em função do tempo $t,$ em horas, decorrido desde sua administração, de acordo com a expressão $C(t)=K\cdot 3^{-0{,}5t}.$

Após quantas horas a concentração da substância no organismo tornou-se a nona parte da inicial?

a) 3

b) $3{,}5$

c) 4

d) 6

e) 9

---

20. (Pucrj 2015) Se $\log_{1/2} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

a) $3/4$

b) 6

c) 28

d) 50

e) 66

---

21. (Espm 2014) Se $\left(4^x\right)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$, o valor de x^x é:

a) 27

b) 4

c) $\frac{1}{4}$

d) 1

e) $-\frac{1}{27}$

---

22. (Unifor 2014) Após um estudo em uma colmeia de abelhas, verificou-se que no instante $t = 0$ o número de abelhas era 1.000 e que o crescimento populacional da colmeia é dado pela função f, onde f é definida por $f(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{2t}{3}}$, em que t é o tempo decorrido em dias. Supondo que não haja mortes na colmeia, em quantos dias no mínimo essa colmeia atingirá uma população de 64.000 abelhas?

a) 9

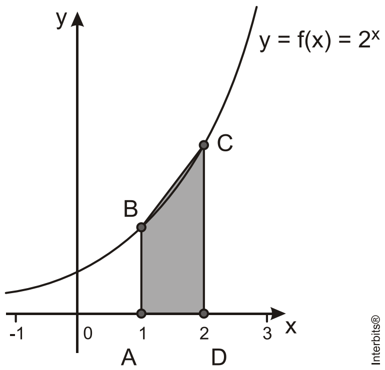
b) 10

c) 12

d) 13

e) 14

23. (Ufjf 2012) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x$. Na figura abaixo está representado, no plano cartesiano, o gráfico de *f* e um trapézio *ABCD*, retângulo nos vértices *A* e *D* e cujos vértices *B* e *C* estão sobre o gráfico de *f*.



A medida da área do trapézio *ABCD* é igual a:

a) 2

b) $\frac{8}{3}$

c) 3

d) 4

e) 6

7 - GABARITO

1. D
2. C
3. D
4. C
5. C
6. E
7. B
8. B
9. E
10. B
11. E
12. C
13. D
14. B
15. C
16. E
17. A
18. C
19. C
20. E
21. B
22. A
23. C