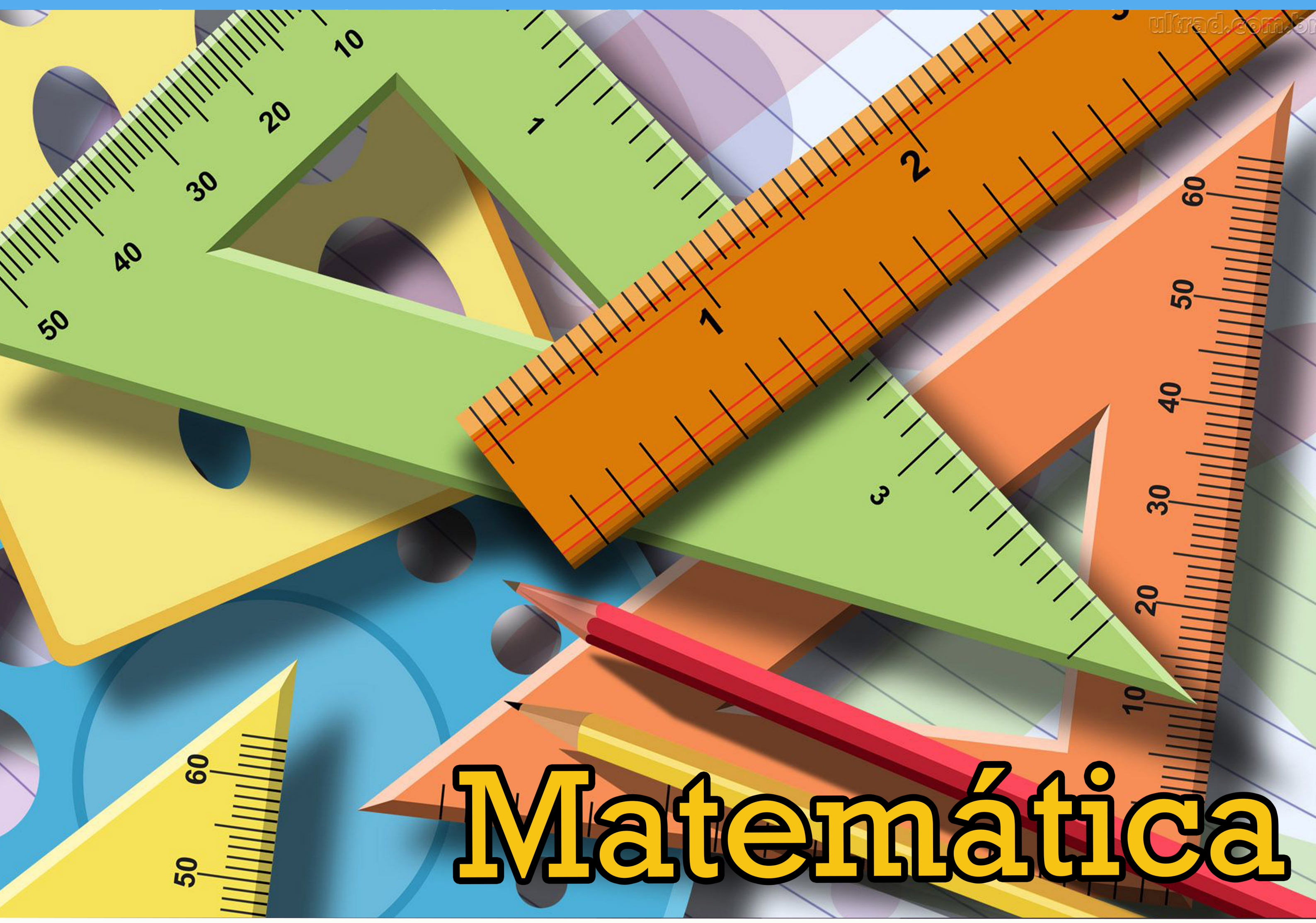
CURSO PREPARATÓRIO
CIDADE
www.cursocidade.com.br

SCLN 113, Bloco "C" - Salas 207 a 210 - Telefones: (61) 3340-0433 / 8175-4509 / 9975-4464 - E-mail: cursocidade@iic.pro.br

Escola de Sargentos das Armas



Matemática

Matemática

M31	POLINÔMIOS - Operações e propriedades	2
M32	EQUAÇÕES POLINOMIAIS	7
M33	RELAÇÃO ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES POLINOMIAIS	11
M34	ANÁLISE COMBINATÓRIA E PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM	15
M35	PERMUTAÇÕES, ARRANJOS E COMBINAÇÕES SIMPLES	18
M36	EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS.	23
M37	NOÇÕES DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA	27

M31 POLINÔMIOS
OPERAÇÕES E PROPRIEDADES

Antes de falarmos sobre polinômios, vamos recordar o que são monômios.

Um produto de números reais, todos ou em parte sob representação literal, recebe o nome de monômio ou termo algébrico.

Exemplos:

a) $7x$ c) $-5\,x^2y$

b) $\frac{4}{5}a^2$ d) $-xyz$

Em todo monômio podemos destacar o coeficiente numérico e a parte literal (formada por letras). Observe a tabela abaixo:

MONÔMIO	PARTE LITERAL	COEFICIENTE
7x	x	7
-5xy	xy	-5
-xyz	xyz	-1

Atenção:

Todo número real é um monômio sem parte literal.

POLINÔMIOS

Polinômio é uma expressão algébrica de dois ou mais termos.

Dado um número natural n e os números reais a_n, a_{n-1}, a_{n-2},...a_2, a_1 e a_0 e a denominamos função polinomial ou polinômio com $\mathbb{R}$ a função.

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os números $a_n + a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1$ e a_0 são chamados coeficientes, as parcelas $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}$, $a_{n-2}x^{n-2}, ..., a_2x^2, a_1x, a_0$ são termos do polinômio **P** e **x** é a variável.

Exemplos:

$$P(x) = 5x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}x + \frac{3}{7}$$

$$Q(x) = -2x^7 + x^5 + x^4 + 11$$

Grau de um Polinômio

Dado um polinômio P(x) qualquer, para conhecermos o seu grau basta observarmos o máximo grau dentre os graus de seus monômios. O coeficiente do monômio de grau máximo é chamado coeficiente dominante do polinômio.

Exemplo:

a) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 6$ é um polinômio de grau 4 e coeficiente dominante igual a 3.

b) $g(x) = -4x^2 - 1$ é um polinômio de grau 2 e coeficiente dominante igual a -4

Então:

Dado um polinômio P(x), o grau de P é o maior expoente da variável x cujo coeficiente não é nulo.

Se P tem todos os coeficientes nulos, não se define o grau de P.

Valor numérico - raiz

Dado um polinômio P(x) e um número Real x, denominados valor numérico de P para x = x, indicado por P(x), o resultado que obtemos substituindo x por x e efetuando as operações indicadas.

Exemplo:

Vamos calcular o valor numérico do polinômio $P(x) = x^2 - 2x + 2$, para $x \in \{3,0\}$

a) Para x = 3, temos: $P(3) = 3^2 - 2.\,3 + 2$
$= 9 - 6 + 2 = 5$

b) Para x = 0, temos: $P(0) = 0^2 - 2.\,0 + 2$
$= 0 - 0 + 2 = 2$

Quando P(x) = 0 dizemos que x é uma raiz (ou um zero) do polinômio P.

x é raiz de P $\Leftrightarrow$ P(x) = 0

Identidades

Polinômio Identicamente Nulo

Dizemos que um polinômio P é identicamente nulo quando o valor numérico de P é igual a zero para qualquer valor da variável e indicamos por:

$$P \equiv 0$$

Polinômios Idênticos

Dizemos de dois polinômios A e B são idênticos quando todos os coeficientes de A e de B são ordenadamente iguais. Daí tem-se:

$$A \equiv B$$

Exemplo para $P \equiv 0$

Se o polinômio $f(x) = ax^2 + (b-1)\,x + c + 3$ é identicamente nulo, podemos determinar os coeficientes impondo que todos eles sejam iguais à zero, então:

$a = 0$

$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

$c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3$

Exemplo para polinômios idênticos:

Se os polinômios $f(x) = ax^2 + 5x = 6$ e $q(x) = 2x^2 + (b+2)x + c + 4$ são ordenadamente iguais, determine os valores de a b e c.

$f(x) \equiv q(x)$

$2x^2 + (b+2)x + c + 4 \equiv ax^2 + 5x + 6$

$a = 2$

$b + 2 = 5 \Rightarrow b = 3$

$c + 4 = 6 \Rightarrow c = 6 - 4$

$c = 2$

Operações com polinômios

Adição / subtração

Dados dois polinômios h(x) e g(x), existe um único polinômio S tal que $S(x)= h(x) + g(x)$.

Exemplo:

$h(x) = x^3 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 7x + 2$

Determine o polinômio $S = h + g$

Antes de somar ou subtrair devemos observar se os polinômios estão completos, pois só podemos somar ou subtrair termos semelhantes (com mesma parte literal).

$h(x) = x^3 + 0x^2 + 2x +1$

$b(x) = 0x^3+ x^2 - 7x + 2$

$s(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

Exemplo:

Neste exemplo vamos subtrair os polinômios anteriores.

Então procuramos $d(x) = h(x) - b(x)$

O procedimento é o mesmo, devemos tomar cuidado com o sinal de subtração que irá inverter todos os sinais do polinômio que vier depois, então:

$D(x) = (x^3 + 0x^2 + 2x + 1) - (0x^3 + x^2 - 7x + 2)$

$D(x) = x^3 - x^2 + 9x - 1$

Multiplicação

Sendo F(x) e G(x) Polinômios, existe um único polinômio P tal que $P(x) = F(x) . G(x)$.

Este polinômio é obtido multiplicando cada termo de F por todos os de G.

Exemplo:

Vamos determinar o produto de:

$A (x) = 2x^2 - x + 3$ por $B(x) = x^5 - x +1$

Temos:

$(2x^2 - x + 3)\ (x^5 - x + 1)$

Assim

$P (x) = A (x). B(x)$

$P (x) = 2x^2 (x^5 - x +1) - x (x^5 - x +1) +3 (x^5 - x + 1)$

$= 2x^7 - 2x^3 + 2x^2 - x^6 + x^2 - x + 3x^5 - 3x + 3$

$= 2x^7 - x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$

Divisão

Dados dois polinômios D(x) e d(x), sendo D(x) dividendo e d(x) divisor, d(x) não nulo. Ao dividirmos D(x) por d (x) encontramos dois outros polinômios: q (x) – quociente e o r(x) – resto, tais que:

1º) $D (x) = d (x) . q (x) + r(x)$

2º) $gr (r) < gr (d)$ ou $R = 0$

Esquematicamente temos:

$$\begin{array}{rr|ll} \xrightarrow{\text{dividendo}} & D(x) & d(x) & \xleftarrow{\text{divisor}} \\ \cline{3-3} \xrightarrow{\text{resto}} & r(x) & q(x) & \xleftarrow{\text{quociente}} \end{array}$$

Quando r = 0, dizemos que D(x) é divisível por d(x).

Atenção:

Para começarmos uma divisão entre polinômios é necessário que verifiquemos o grau de D(x) e de d(x) e eles devem obedecer ao seguinte critério:

$$gr (D) \geq gr(d)$$

Exemplo:

Vamos dividir $f(x) = -14x^2 + 3x - 5$ por $g(x) = 7x + 2$ e determinar o quociente e o resto.

1º) Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor $\frac{-14x^2}{7x} = -2x$, obtendo assim o 1º termo do quociente.

2º) Multiplicamos o termo obtido -2x por cada parcela do divisor $-2x(7x+2) = -14x^2 + 4$

O resultado é colocado com o sinal trocado sob os temos semelhantes do dividendo:

$$\begin{array}{r|l} -14x^2 + 3x - 5 & 7x + 2 \\ \cline{2-2} +14x^2 + 4x & -2x \\ \cline{1-1} & \end{array}$$

3º) Somamos os termos semelhantes, e os termos do dividendo que não tem termos semelhantes a somar devem ser repetidos. Obtemos, então, o resto parcial.

$$\begin{array}{r|l} -14x^2 + 3x - 5 & 7x + 2 \\ \cline{2-2} +14x^2 + 4x & -2x \\ \cline{1-1} 7x - 5 & \end{array}$$

4º) Repetimos os passos anteriores com o resto parcial até que o grau do resto se torne menor que o grau do divisor.

$$\begin{array}{r|l} -14x^2 + 3x - 5 & 7x + 2 \\ \cline{2-2} +14x^2 + 4x & -2x + 1 \\ \cline{1-1} 7x - 5 & \\ -7x - 2 & \\ \cline{1-1} -7 & \end{array}$$

$Q(x)= -2x + 1$ $R(x)= 7$

Observação 1:

O grau de q(x) é sempre uma unidade menor que o de D(x), então: gr(Q) < gr(d).

Observação 2:

Quando tivermos um polinômio incompleto no dividendo ou no divisor devemos completá-lo com uma parcela de coeficiente zero.

Exemplo:

O polinômio $x^3 + x - 2$ fica desta forma: $x^3 + 0x^2 + x - 2$, seja para o método das chaves ou para o método de *Briot-Ruffini*

Divisão pelo binômio (x – a)

Vamos agora direcionar nossos estudos para um caso especial da divisão de polinômios, aquele em que o divisor é um Binômio de 1º grau do tipo x - a ou x + a.

Dois métodos simplificarão nossos estudos. O primeiro deles é o Teorema do resto e o segundo é o Teorema de D' Alembert. Para entendê-los e depois enunciá-los, vamos efetuar pelo método das chaves a divisão de:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $g(r) = x - 3$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 5x - 2 & \\
+x^2 - 3x & \\ \cline{1-1}
+2x - 2 & \\
-2x + 6 & \\ \cline{1-1}
\quad +4 &
\end{array}
$$

Observação:

Como podemos ver o grau do resto é menor que o grau do divisor, já que o grau do divisor é 1 e do resto tem que ser zero dando origem a uma constante. Isso obedece à primeira condição da divisão de polinômios.

A raiz do divisor g(x) é: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Calculando f(3) temos:

$f(3) = 3^3 - 4.\ 3^2 + 5.3 - 2$, isto é, $f(3) = 27 - 36 + 15 - 2 \Rightarrow f(3) = 4$

O valor encontrado para f(3) é igual ao resto obtido na divisão.

Teorema do resto

Seja P(x) um polinômio tal que $P \geq 1$. O resto da divisão de P(x) por x – a é igual a P(a), ou seja, r = P(a)

Ou podemos dizer ainda:

O resto da divisão entre dois polinômios pode ser dado pelo valor do dividendo quando substituímos o x pela raiz do divisor.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio f(x) é divisível por x – a quando "a" é a raiz de f(x).

Exemplo:

Sendo $f(x) = 4x^2 - 3x - 76$ divisível por $g(x) = x + 4$. Determine o valor do resto desta divisão.

Calculamos a raiz de g(x), $g(x) = 0x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

Substituímos o valor da raiz de g(x) em f(x), então:

$f(-4) = 4.(-4)^2 - 3.\ (-4) - 76 = 64 + 12 - 76 = 0$

O resto é zero, R(x) = 0

Dispositivo de BRIOT – RUFFINI

Além do método da chave podemos recorrer no cálculo do quociente da divisão de um polinômio P(x) por um binômio (x – a) a um dispositivo prático, conhecido como algoritmo de Briot-Ruffini. Vamos entendê-lo melhor pelo exemplo a seguir:

Vamos dividir $f(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 7$ por $g(x) = x - 2$

1º) Calculamos a raiz de g(x) e colocamos os coeficientes ordenados de f(x)

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -2 & +1 & -5 & +7 \\ \hline
2 & & & &
\end{array}
$$

2º) Abaixamos o 1º coeficiente e o multiplicamos pela raiz de g(x)

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -2 & +1 & -5 & +7 \\ \hline
2 & -2 & & &
\end{array}
$$

x

3º) Somar o produto obtido com o coeficiente seguinte, o resultado obtido colocar abaixo do coeficiente.

+

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -2 & +1 & -5 & +7 \\ \hline
2 & -2 & -3 & &
\end{array}
$$

x

4º) Com esse resultado repetir o mesmo processo até que todos os coeficientes tenham sido usados.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & -2 & +1 & -5 & +7 \\ \hline
2 & -2 & -3 & -11 & \boxed{-15}
\end{array}
$$

- O último resultado obtido no algoritmo acima é o resto da divisão, nosso caso r = -15. Os demais correspondem aos coeficientes de q(x) nesta ordem

  $q(x) = -2x^2 - 3x - 11$

- Observe que o grau de q(x) é uma unidade menor que f(x), por isso esse dispositivo também é usado quando se deseja diminuir o grau de um polinômio, desde que se conheça uma raiz do polinômio.

  Esse método pode ser usado sucessivamente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Calcular a, b e c, sabendo que $(a + 1)x^4 + bx^2 + (c - 3) = 0$ para todo x real.**

   Solução:

   O polinômio $P(x) = (a + 1)x^4 + bx^2 + (c - 3)$ tem mais do que quatro raízes distintas e, então, $a + 1 = 0$, $b = 0$ e $c - 3 = 0$,

   Logo, $a = -1$, $b = 0$ e $c = 3$

2. **Dados $A(x) = 2x^2 - 1$ e $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, determinar os polinômios:**

   $C = A - B$ e $D = B - A$

   Solução:

   $C(x) = A(x) - B(x) = (2x^2 - 1) - (x^3 + x^2 + x + 1) =$

   $= - x^3 + x^2 - x - 2$

   $D(x) = B(x) - A(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) - (2x^2-1) =$

   $= x^3 - x^2 + x + 2$

3. **Multiplicar $A(x) = 2x^2 - x + 3$ por $B(x) = x^5 - x + 1$.**

   Solução:

   $P(x) = A(x). B(x) = (2x^2 - x + 3). (x^5 - x + 1)$

   $P(x) = 2x^2(x^5 - x + 1) - x(x^5 - x + 1) + 3(x^5 - x + 1)$

   $P(x) = 2x^7 - 2x^3 + 2x^2 - x^6 + x^2 - x + 3x^5 - 3x +3$

   $P(x) = 2x^7 - x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$

4. **Divida $A(x) = x^3 + 6x^2 + 2x + 8$ por $B(x) = x + 3$.**

   Solução:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 6x^2 + 2x + 8 & x + 3 \\
\cline{2-2}
-x^3 - 3x^2 & x^2 + 3x - 7 \\
\cline{1-1}
3x^2 + 2x + 8 & \\
-3x^2 - 9x & \\
\cline{1-1}
- 7x + 8 & \\
7x - 21 & \\
\cline{1-1}
- 13 &
\end{array}
$$

   $R(x) = - 13$, $q(x) = x^2 + 3x - 7$

5. **Verificar que $P(x) = 2x^4 - x^2 + 3x - 162$ é divisível por $x - 3$.**

   Resolução:

   $P(3) = 2.3^3 - 3^2 + 3.3 - 162 = 162 - 9 + 9 - 162 = 0$ (3 é raiz de P(x))

   Logo P(x) é divisível por x - 3

6. **(EsSa 2008) Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^n + 5x - 30$ por $Q(x) = x - 2$ é igual a 44, então n é igual a:**

   a) 2
   b) 6
   c) 3
   d) 4
   e) 5

   Resposta = 5

   Divisor é x – 2, então pelo teorema do resto diremos que:

   $2.2^n + 5.2 - 30 = 44 \longrightarrow 2^{n+1} = 64 \longrightarrow n = 5$

PRATICANDO

1. **Qual deve ser o valor de k a fim de que o grau do polinômio $f(x) = (- K^2 + 36)x^8 + (k - 6)x^5 - 3x^3 + x - 4$ seja 5?**

   a) 5 b) 4 c) -6
   d) -3 e) 1

2. **Determine a e b em $P(x) = -3x^4 + ax^3 - 5x^2 + bx - 2$, sabendo que 1 é raiz de P(x) e que $p(2) = -80$.**

   a) 4 e 9 b) -5 e 15
   c) 5 e -15 d) -4 e 9
   e) 4 e -9

3. **Sabe-se que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = (a + b)x^2 + (2a - b + 6)x + c$ tem valor numérico igual à zero. Quais os valores de a, b e c?**

   a) $a = -2$, $b = 2$ e $c = 0$
   b) $a = 2$, $b = 2$ e $c = 0$
   c) $a = 2$, $b = - 2$ e $c = 0$
   d) $a = 0$, $b = 2$ e $c = - 2$
   e) $a = 2$, $b = 0$ e $c = - 2$

4. **Seja $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, em que a, b, c e d $\in \mathbb{R}$. O valor de a, b, c e d para que $xP(x + 2) \equiv -27 + P(x) + dx^4$ é:**

   a) $a = 31$, $b = 10$, $c = -15$ e $d = 3$
   b) $a = -27$, $b = 9$, $c = 15$ e $d = - 5$
   c) $a = -31$, $b = 10$, $c = -15$ e $d = -3$
   d) $a = 27$, $b = 9$, $c = -15$ e $d = 3$
   e) $a = 27$, $b = 10$, $c = -15$ e $d = 8$

5. **Seja p, q, reais, tais que $x(x+1)(x+2)(x+3) +1 \equiv (x^2 + px + q^2)$. Indique $p^2 + q^2$.**

   a) 15 b) 20 c) 37
   d) 18 e) 12

6. **O resto da divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + a$ por $q(x) = x^2 + 1$ é um polinômio cujo termo independente é 8. Determine o valor do número real a e marque a opção correta:**

   a) 12 b) 15 c) 14
   d) 7 e) 10

7. **Se o polinômio $2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$, então qual é o valor de a – b?**

   a) 8 b) 4 c) 7
   d) 10 e) 16

8. **Ao dividirmos $2x^3 + x^2 + mx - 3$ por $x + 5$ obtemos resto igual a -53. Qual é o valor de m?**

   a) -20 b) 8 c) -35
   d) 35 e) -8

9. **Dividindo o polinômio $-3x^4 + 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ por $x + 1$ obtém-se resto igual a 2. O quociente dessa divisão é, então, dividido por $x -2$ e obtém-se o resto igual a – 8. Qual é o quociente obtido na última divisão?**

   a) $q(x)= -3x^2 + x + 1$
   b) $q(x)= 3x^2 - x + 1$
   c) $q(x)= 3x^2 + x - 1$
   d) $q(x)= 3x^2 + x + 1$
   e) $q(x)= -3x^2 - x - 1$

10. **Na divisão do polinômio F(x) pelo binômio f(x)**

do 1º grau, usando o dispositivo de Ruffini, encontrou-se o seguinte:

1	a	2a	-2a	8
			-4	0

Qual o dividendo dessa divisão?

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4x - 7$

b) $f(x) =- x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 7$

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x - 8$

e) $f(x) = - x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 8$

11. Determine m e p a fim de que $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + mx + p$ seja divisível por $(x + 1)^2$ e marque a opção correta:

a) m = -2 e p = 1

b) m = 2 e p = -1

c) m = 2 e p = 1

d) m = 1 e p = 1

e) m = 2 e p = 2

12. Se o polinômio $x^5 - 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 1$ for divisível pelo polinômio $x^2 + 2x + 1$, qual deverá ser o valor de a e b?

a) a = -1 e b = 1

b) a = 1 e b = -1

c) a = -11 e b = -11

d) a = -1 e b = -1

e) a = 2 e b = -1

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Considere o seguinte problema:

A diferença entre o cubo de um número real e o seu quadrado é igual a soma do triplo do quadrado desse número com 25. Qual é esse número?

Sendo x o número procurado, segue a equação:

$$x^3 - 4x^2 - 25 = 0$$

Esta equação é um exemplo de equação polinomial.

Definição

Denominamos equação polinomial ou equação algébrica de grau n à equação

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Onde o primeiro membro é um polinômio de grau $n(a_n \neq 0)$.

Os coeficientes de P(x) são também chamados coeficientes da equação. Em particular, a_n é chamado coeficiente dominante e a_0 é chamado termo independente.

Exemplos:

$3x + 2 = 0$

$5x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Raiz

Um número real y raiz da equação polinomial P(x) = 0, em que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ quando substituindo x por y na equação, obtemos $P(y) = a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \ldots + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$, melhor dizendo, y é raiz de uma equação p(x)= 0 se for raiz do polinômio P(x).

Equações equivalentes

Dizemos que duas equações são equivalentes em U quando seus conjuntos-soluções são iguais.

Equação do 1º grau

Dada a equação ax + b = 0, com $a \neq 0$, temos:

$$ax + b = \Leftrightarrow \quad ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Portanto, a única raiz é $\frac{-b}{a}$.

Toda equação do 1º grau em C admite uma única raiz.

Equação do 2º grau

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ temos:

$$\Delta = (2ax + b)^2 \Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$$

Daí, encontramos duas raízes dadas pela fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Toda equação do 2º grau em C admite duas raízes. Caso $\Delta = 0$, as duas raízes são iguais e dizemos que a equação admite uma raiz dupla.

Observação:
Caso $\Delta < 0$ teremos $x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$, encontraremos raízes complexas para P(x).

Exemplo:

Resolver a equação $x^2 - 4x + 8 = 0$ em C e em $\mathbb{R}$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = \frac{4(1 \pm i)}{2} = 2(1 \pm i) =$$

$$= 2 \pm 2i$$

a) Em C, o conjunto solução é:

$S = \{2 + 2i, 2 - 2i\}$

b) Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

Note que o número de raízes que uma equação polinomial possui é indicado pelo grau da mesma equação, assim se uma equação é de grau 3 então esta possuirá 3 raízes, ou ainda, se a equação for de grau 4 esta então possuirá 4 raízes, e assim sucessivamente.

Redução do grau de uma equação

Quando conhecemos uma raiz r qualquer de uma equação polinomial P(x) = 0, dividindo P(x) por x - r encontramos um quociente q(x) tal que P(x) = (x – r)q(x)

Então:

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - r)q(x) = 0 \Leftrightarrow (x - r = 0$ ou $q(x) = 0)$

Assim, as outras raízes de P(x) são da equação q(x) = 0. Como o grau de q(x) é uma unidade menor que o P(x), dizemos que abaixamos o grau da equação.

Exemplo:

O polinômio $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$ é divisível por $g(x) = x - 1$. Encontre q(x) e r(x).

Como foi dito pelo enunciado f(x) é divisível por g(x), daí podemos aplicar o teorema de D'Alembert e dizer que 1 é raiz de f(x) e aplicar, em seguida, o dispositivo de Briot-Ruffini, assim:

1	3	-4	4	-4	1	
	3	-1	3	-1	0 ⟵	R(x)

Coeficientes de q(x)

Note com os coeficientes que apareceram através do dispositivo de Briot-Ruffini podemos montar a equação polinomial q(x) que possui grau uma unidade menor que f(x), temos:

$$q(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$, com coeficientes complexos, admite ao menos uma raiz complexa.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Seja P(x) um polinômio de grau n, $n \geq 1$, dado por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$(an \neq 0)$.

Então, P(x) pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$P(x) = a_n\,(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ \ldots..\ (x - r_n)$,

Em que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes de P(x) e a_n é o coeficiente dominante de P(x).

Exemplo:

Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 - 5x^2 - 34x + 80 = 0$ é igual a 2, podemos obter as outras duas?

Seja p(x) o polinômio dado.

Usamos o teorema da decomposição

$$P(x) = 1(x - 2)\underbrace{(x - r_2)(x - r_3)}_{q(x)}$$

Fazemos a divisão de p(x) por x – 2 a fim de obter p(x):

2	1	-5	-34	80
	1	-3	-40	0

Coeficientes de q(x)

Resolvemos a equação q(x) = 0

$x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = 8$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Vamos encontrar duas raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 8x - 60 = 0$ sabendo que duas delas são 5 e –3.

Solução:

Nesse caso podemos fatorá-lo como $p(x) = (x - 5)(x + 3)\,q(x)$

Como p(x) é divisível por (x – 5)(x + 3), podemos dividir p(x) por x – 5 e, em seguida, dividir o quociente obtido por x + 3, conforme aprendemos em divisões sucessivas:

5	1	-2	-11	-8	-60
-3	1	3	4	12	0
	1	0	4	0	

Daí, $q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x \pm 2i$

2. Vamos escrever uma equação algébrica do terceiro grau cujas raízes reais sejam 1, –2 e 5.

Solução:

Seja p(x) o polinômio de grau 3 procurado. Usando o teorema da decomposição, podemos escrever:

$P(x) = a_n\,(x - 1)(x + 2)(x - 5)$

Em que a_n é o coeficiente dominante de P(x), assim:

$P(x) = a_n(x^2 - x - 2)(x - 5)$

$P(x) = a_n(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$

Escolhendo, por exemplo, $a_n = 1$, segue a equação $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

3. Como podemos encontrar o conjunto solução da equação $x^3 - 8x^2 + 29x - 52 = 0$, sabendo que uma das raízes é 4?

Solução:

Seja p(x) o polinômio dado é 4, r_2 e r_4 suas raízes. Usando o teorema da decomposição, podemos escrever:

$$P(x) = 1(x - 4)\underbrace{(x - r_4)(x - r_3)}_{q(x)}$$

Isto é:

$$p(x) = (x - 4)q(x)$$

Assim, p(x) é divisível por (x – 4) e o quociente dessa divisão é q(x). Usando Briot-Ruffini, vem:

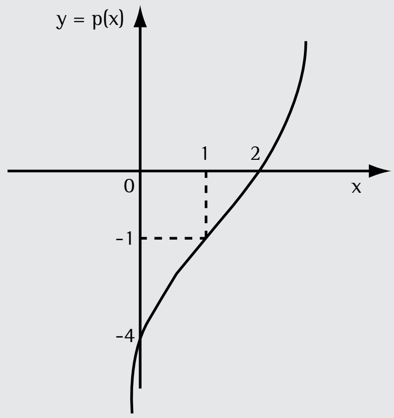
4	1	-8	29	-52
	1	-4	13	0

Coeficientes de q(x)

Desse modo, as demais raízes de q(x) = 0 obtidas, isto é, $x^2 + 4x + 13 = 0 \Rightarrow x = 2 - 3i$ ou $x = 2 + 3i$ e o conjunto solução da equação p(x) = 0 é:

$S = \{4, 2 - 3i, 2 + 3i\}$

4. Observe o gráfico seguinte, que representa parte do gráfico da função p, crescente em R, definida por $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, com a, b e c coeficientes reais:



Solução:

O gráfico de p(x) intercepta o eixo x uma única vez, no ponto (2,0). Isso significa que x = 2 é a única raiz real do polinômio.

A intersecção do gráfico de p(x) com o seu eixo y em (0,- 4) fornece o valor do coeficiente independente c da equação, pois, quando x = 0, p(0) = -4, isto é, $0^3 + a0^2 + b.\,0 + c = -4 \Rightarrow c = -4$

P(1) = - 1

$1^3 + a.\,1^2 + b.\,1 - 4 = -1$

a + b = 2

P(2) = 0 (2 é raiz)

$2^3 + a.\,2^2 + b.\,2 - 4 = 0$

4a + 2b = -4

Resolvendo o sistema, vem:

a = -4 e b = 6

Desse modo, $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

Para obter as demais raízes, dividimos p(x) por x – 2:

2	1	-4	6	-4
	1	-2	2	0

Daí:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 - i$ ou $x = 1 + i$

PRATICANDO

1. A equação $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x - 2 = 0$ apresenta como duas de suas raízes os números 1+ 3i e 1 - 3i. Quais são as outras raízes que essa equação possui?

a) 2 e -1 b) 2 e 3
c) -2 e 1 d) -2 e 3
e) -1 e -2

2. Seja a um número racional não nulo. Se b e $\sqrt{2}$ são raízes irracionais da equação $x^3 + ax^2 - 2x - 2a = 0$, determine o valor de b^4.

a) 2 b) -1 c) 3
d) -2 e) 4

3. Seja a equação $x^3 - x^2 + m + n = 0$ com m e n em reais. Se o número complexo 1 – i é uma das raízes dessa equação, então:

a) m – n = 2 b) m – n = 0
c) m - n =0 d) m + n = 2
e) m . n = 1

4. O polinômio $p(x) = ax^4 + 3x^3 - 4x^2 + dx - 2$, com $a \neq 0$, admite 1 e -1 como raízes, então:

a) a = 6 e d = -3
b) a = 3 e d = -3
c) a = -3 e d = 3
d) a = 9 e d = -3
e) a = -3 e d = 6

5. Um polinômio f, de grau 3, admite 2 e 3 raízes. Se na divisão de f por x - 5 obtém-se resto 60, então f pode ser igual a:

a) $2x^3 - 10x^2 + 12x$
b) $3x^3 - 57 + 90$
c) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
d) $x^3 + 5x^2 + 6x + 5$
e) $x^3 - 19x + 30$

6. O polinômio $x^4 + x^2 - 2x + 6$ admite 1 + i como raiz, sendo $i^2 = -1$. O número de raízes reais deste polinômio é:

a) 0 b) 1
c) 2 d) 3
e) 4

7. Resolva, em C, a equação $x^3 + 3x^2 - 46x + 72 = 0$, sabendo que 2 é uma de suas raízes e marque a opção correta.

a) 3 e 5 b) 4 e -9
c) 1 e 3 d) -4 e 9
e) 1 e -2

8. Resolva, em C, a equação $x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 70x + 50 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são 1 + 3i e 1 – 3i.

a) -2 e 3 b) 2 e -3
c) -2 e – 3 d) 2 e 3
e) 1 e -2

9. O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem coeficiente dominante unitário e suas raízes são 7, -5 e -3. Qual é o valor de a + b + c + d?

a) -144 b) 169
c) 140 d) 144
e) 66

10. A Europa renascentista foi rica em todos os sentidos: na literatura, na arte e na ciência. Na Matemática, em especial na Álgebra, equações algébricas do tipo $x^3 + 6x = 20$ foram destaque. Uma das raízes dessa equação é um número inteiro positivo. Com relação às outras raízes, é verdade que são:

a) racionais de sinais contrários
b) reais do mesmo sinal
c) reais e iguais
d) irracionais
e) não reais

11. O polinômio $p(x) = x^4 - 5x^2 + m$ ($m \in \mathbb{R}$) é divisível por $x^2 - 9$. Então, a soma dos quadrados de todas as raízes de p (x) = 0 é igual a:

a) 9 b) 10
c) 13 d) -14
e) 20

12. Dado o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$. Assinale a opção verdadeira:

a) Todas as raízes são reais.

b) Apenas uma raiz é real.

c) Todas as raízes são inteiras.

d) p(x) é divisível por x + 1.

e) Possui uma raiz complexa.

13. O polinômio $p = \begin{vmatrix} x & -1 & x+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -x^2 & 1 \end{vmatrix}$ **admite:**

a) três raízes reais.

b) uma raiz de multiplicidade 2.

c) nenhuma raiz real.

d) uma única raiz real.

e) uma raiz de multiplicidade 3.

RELAÇÃO ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES POLINOMIAIS

M33

Nos dois últimos capítulos vimos o que é um polinômio e conhecemos também as equações polinomiais ou equações algébricas e pudemos notar que tais equações possuem coeficientes e raízes (valores que se substituídos no lugar da incógnita tornam a equação nula). Neste capítulo veremos que esses coeficientes e as raízes de uma mesma equação podem se relacionar de modo a facilitar cálculos e análises das mesmas.

Multiplicidade de uma raiz

Quando temos uma equação polinomial de grau n, ao calcular suas raízes, podemos nos deparar com raízes iguais entre si. Quando exatamente p raízes são iguais entre si a um mesmo número α dizemos que y é raiz de multiplicidade p. Sendo assim, na forma fatorada, $(x - \alpha)$ aparece p vezes:

> α é raiz de multiplicidade p de P(x) $\Leftrightarrow$ $P(x) = (x - \alpha)^p Q(x)$ e $Q(\alpha) \neq 0$

Notemos que:

- P(x) é divisível por $(x - \alpha)^p$
- A condição $Q(\alpha) \neq 0$ significa que α não é raiz de Q(x) e garante, então, que a multiplicidade da raiz α não é maior que p.

Quando todas as raízes são distintas, cada uma delas é uma raiz de multiplicidade 1, ou raiz simples da equação. Quando existem raízes de multiplicidade 2, também são chamadas raízes duplas; as de multiplicidade de 3 são raízes triplas e assim por diante.

Exemplo:

- Quando resolvemos a equação do segundo grau $x^2 - 10x + 25 = 0$, encontramos duas raízes iguais a 5.

  Usando o teorema da decomposição, fatoramos o polinômio dado:

  $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5) = (x - 5)^2$
- Dizemos, então, que 5 é raiz de multiplicidade 2 ou raiz dupla da equação proposta.
- Se a forma fatorada de um polinômio p é:

  $P(x) = (x + 4)^3 (x - 2)(x + 1)^2$,

Concluímos que:

- x = -4 é raiz de multiplicidade 3 ou raiz tripla a equação p(x) = 0
- x = 2 é raiz com multiplicidade 1 ou raiz simples da equação p(x) = 0
- x = -1 é raiz com multiplicidade 2 ou raiz dupla da equação p(x) = 0

Pesquisa de raízes

Quando sabemos que α é uma raiz de p(x) = 0 e dividimos p(x) por $x - \alpha$ caímos numa equação de grau menor.

Para determinarmos, por exemplo, se 1 é raiz de uma equação polinomial, basta substituirmos 1 no lugar de x e efetuarmos a soma de seus coeficientes. Se esta for igual a zero então 1 é raiz de p(x).

Raízes inteiras de equações com coeficientes inteiros

As possíveis raízes inteiras de uma equação dada de grau n, $n \geq 1$, são os divisores do termo independente.

Com isto, podemos descobrir se uma equação tem ou não raízes inteiras testando um a um os divisores de a_0. Só eles podem ser raízes inteiras da equação. ISTO SE APLICA SOMENTE A EQUAÇÕES DE COEFICIENTES INTEIROS.

Exemplo:

Verificar se a equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 10x + 8 = 0$ admite raízes inteiras.

Como todos os coeficientes são inteiros, as possíveis raízes inteiras são os divisores de 8, que é o termo independente.

D(8) = $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8 \text{ e } -8\}$

Substituindo na equação vemos que -1 é raiz:

$(-1)^4 + 2(-1)^3 + 10. (-1) +8 = 0$

E também -2 é raiz:

$(-2)^4 + 2(-1)^3 + 10.(-1) + 8 = 0$

Raízes racionais de equações com coeficientes inteiros

Possíveis raízes racionais de uma equação dada são da forma $\frac{p}{q}$ onde p é divisor do termo independente a_0 e q é divisor do coeficiente dominante a. Isto pode ser usado para uma equação qualquer de grau n, $n \geq 1$, onde os coeficientes são inteiros.

Exemplo:

Verificar se a equação $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admite raízes racionais.

Os divisores do termo independente, -1, são: 1 e -1

Os divisores do coeficiente dominante, 2, são: 1, -1, 2, -2

Como todos os coeficientes são inteiros, as possíveis raízes racionais são da forma $\frac{p}{q}$, $p \in \{1, -1\}$ e $q \in \{1, -1, 2, -2\}$.

Temos: $\frac{p}{q}\ \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

Para x = 1, $2x^3 + x^2 + x - 1 = 2 + 1 + 1 - 1 \neq 0$

Para x = -1, $2x^3 + x^2 + x - 1 = - 2 + 1 - 1 - 1 \neq 0$

Para $x = \frac{1}{2}$, $2x^3 + x^2 + x - 1 =$

$$2+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=\frac{2+2+4-8}{8}=0$$

Para $x = -\frac{1}{2}$, $2x^3 + x^2 + x - 1 =$

$$2\cdot\frac{-1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=\frac{-2+2-4-8}{8}\neq 0$$

Portanto, a única raiz racional da equação é $\frac{1}{2}$.

Observação:

Nas equações de coeficientes inteiros, o conjunto das possíveis raízes racionais contém o conjunto das possíveis raízes inteiras.

Raízes complexas

Se um complexo $z = \alpha + \beta i$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ é raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z} = \alpha + \beta i$ também é raiz da equação.

Consequências

Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Se o complexo z é raiz de multiplicidade p de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado $\overline{z} = \alpha + \beta i$ também é raiz de multiplicidade r da equação.

Relações de Girard

Equação do 2º grau

Para essa equação a relação de Girard nos garante que a soma das raízes é igual a razão entre o coeficiente b(com sinal trocado) e o coeficiente dominante a e que o produto das raízes é igual a razão entre o termo independente e o coeficiente dominante, assim:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Equação de 3º grau

Nesta equação, a relação de Girard funciona de forma análoga a equação do 2º grau com diferencial da quantidade de raízes e coeficientes que aparecem nesta. Assim podemos escrever:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Equação de grau n

Através de um raciocínio também análogo podemos generalizar a relação de Girard da seguinte forma:

Seja a equação:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com $a \neq 0$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ suas raízes.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \dfrac{-a_{n-1}}{a_n} \quad (I) \\ r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + \ldots + r_n \cdot r_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \quad (II) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \quad (III) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_1} \quad (IV) \end{cases}$$

Onde:

I) É a soma das raízes;

II) É a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas;

III) É a soma dos produtos das raízes tomadas três a três; e

IV) É o produto das n raízes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz de multiplicidade 2.

Solução:

Seja p(x) o polinômio dado, temos:

$p(x) = (x - 3)(x - 3)(x - r_3)(x - r_4)$, isto é, $p(x) = (x - 3)^2q(x)$

Fazendo a divisão de p(x) por $(x - 3)^2$ obtemos q(x).

3	1	-9	23	-3	-36	
3	1	-6	5	12	0	p(x) é divisível por x - 3
	1	-3	-4	0		p(x) é divisível por $(x - 3)^2$
	coeficientes de q(x)					

Resolvendo a equação q(x) = 0, vem:

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 4$

S = {-1, 3, 4}

2. Resolva a equação $x^3 - 3x^2 - 5x + 39 = 0$ sabendo que 3 – 2i é uma de suas raízes.

Solução:

Trata-se de uma equação com coeficientes reais. Como 3 – 2i é raiz da equação podemos afirmar que 3 + 2i também raiz, então o polinômio dado pode ser dividido por:

$(x - 3 + 2i)(x - 3 + 2i) = (x - 3)^2 - (2i)^2 = x^2 - 6x + 13$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 5x + 39 & x^2 - 6x + 13 \\ \cline{2-2} -x^3 + 6x^2 - 13x & x + 3 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 18x + 39 & \\ -3x^2 + 18x - 39 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

A outra raiz vem de x + 3 = 0, ou seja, x = 3 $\Rightarrow$ S = {3 – 2i, 3 + 2i, - 3}

3. Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 11 - 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras duas.

Solução:

As raízes procuradas são r_1, r_2, r_3. Escrevendo as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-(-6)}{1} = 6 \quad (\text{I}) \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \dfrac{11}{1} = 11 \quad (\text{II}) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \dfrac{-(-6)}{1} = 6 \quad (\text{III}) \end{cases}$$

Do enunciado, escrevemos:

$r_1 = \dfrac{r_2 + r_3}{2}$, ou melhor, $r_2 + r_3 = 2r_1$ (*)

Substituindo (*) em (1) vem:

$r_1 + r_2 + r_3 = 6 \Rightarrow 3r_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 2$

Para achar r_2 e r_3 basta dividir o polinômio dado por x – 2:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Daí:

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3 \Rightarrow S = \{1, 2, 3\}$

4. Resolva a equação $3x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0$.

Solução:

Como não dispomos de nenhuma informação sobre suas raízes, vamos pesquisar as possíveis raízes racionais.

Os números racionais candidatos a raiz têm a forma $\dfrac{p}{q}$, sendo p um divisor de –2 e q divisor de 3. Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estarão no conjunto:

$$\left\{+1, -1, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, +2, -2, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$$

Seja f(x) o polinômio dado e façamos as verificações:

f(1) = 10   f(-1) = -4 $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{26}{9}$ $f(2) = 50$ f(-2) = -14

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{34}{9}$ $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{10}{3}$

Então a única raiz racional dessa equação é $\dfrac{1}{3}$.

Para encontrar outras raízes, basta dividir f(x) por x - $\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c|cccc} 1/3 & 3 & 5 & 4 & -2 \\ \hline & 3 & 6 & 6 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm i$

$S = \left\{\dfrac{1}{3}, -1+i, -1-i\right\}$

PRATICANDO

1. Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 6ax + a^2$. Se $r_1^2 + r_2^2 = 17$, determine os possíveis valores para a.

a) 2 e -2
b) 1 e -2
c) 1 e -1
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e) -1 e 2

2. A diferença entre as raízes do polinômio $x^2 + ax + (a - 1)$ é 1. Quanto vale a?

a) 1 ou 2
b) -1 ou 2
c) 1 ou 3
d) -1 ou -3
e) -1 ou 3

3. Encontre as raízes da equação $x^3 - 15x^2 + 74x - 120 = 0$, sabendo que elas estão em progressão aritmética.

a) 4, 5 e 6
b) 2, 5 e 6
c) 2, 4 e 6
d) 3, 5 e 6
e) 2, 5 e 7

4. Sabendo que p(x) é um polinômio de terceiro grau divisível por x - 3, e que p(x) = P(x - 3) - x^2 - 3, determine o produto das raízes de p(x)= 0.

a) 108
b) 103
c) 100
d) 98
e) 110

5. O polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que p(0) = 1, e todos os seus coeficientes são reais. Sabendo que I é uma de suas raízes e que 1 é raiz dupla, determine os valores a, b, c, d.

a) a = 3, b = 5, c =1, d = -2
b) a = -2, b = 2, c =1, d = 0
c) a = 1, b = -5, c = 3, d = -2
d) a = 2, b = -2, c =1, d = -2
e) a = -2, b = 2, c = -2, d = 1

6. Se, na equação $x^3 - 75x + 250 = 0$, m é raiz dupla e -2m é a outra raiz, determine seu conjunto solução.

a) S = {3, -6}
b) S = {5, -10}
c) S = {4, -8}
d) S = {2, -4}
e) S = {-3, 6}

7. Se a equação $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais a e -a, então o valor de k é:

a) $\dfrac{9}{4}$
b) 2
c) $\dfrac{9}{8}$
d) -2
e) -4

8. **Um paralelepípedo retângulo tem sua dimensões, dadas em centímetros pelas expressões $x - 4$, $x - 3$ e $\frac{2x+3}{3}$, nas quais x é número racional maior do que 4. Se o volume do paralelepípedo é 30 cm^3, então sua área total em centímetros é:**

a) 62 b) 54 c) 48

d) 31 e) 27

9. **Seja a uma raiz da equação $x^2 + 2x + c^2 = 0$, em que c é um número real positivo. Se o discriminante dessa equação é menor que zero, então $|c|$ é igual a:**

a) c b) 2c c) c^2

d) $2c^2$ e) $\frac{c}{2}$

10. **Seja p(x) o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabendo que $p(1) = 0$, $p(3) = -2$ e a soma das raízes é igual a 7, o valor de c é:**

a) 6 b) -6 c) -8

d) 8 e) -1

11. **Se o número -1 é uma das raízes do polinômio $x^3 + x^2 + 5x + 5$, então as outras raízes são:**

a) iguais b) pares

c) ímpares d) irracionais

e) complexas

12. **Se 1 é raiz dupla do polinômio $f = x^3 - 4x^2 + bx + c$, então tem-se que:**

a) c =1 b) c = 2

c) b = 3 d) b = 4

e) b =5

13. **O número complexo $i(i^2 = -1)$ é uma das raízes do polinômio de coeficientes inteiros $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$. A única raiz real desse polinômio é:**

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{4}$

14. **Para que a equação $x^3 + kx + 2 = 0$ admita uma raiz real dupla, o valor de k deve ser:**

a) - 2 b) 2 c) - 4

d) 3 e) - 3

15. **Duas partículas se movimentam num plano de acordo com as trajetórias dadas pelas funções $f(t) = t^3$ e $g(t) = 2t + 1$. Após uma delas cruzar a origem, o instante t em que elas se encontram tem o valor de:**

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{1+\sqrt[3]{5}}{2}$

c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{1-\sqrt[3]{5}}{2}$

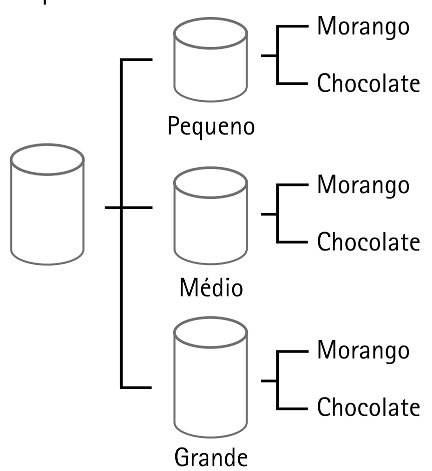
e) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

M34

Um rapaz quis tomar um sorvete numa lanchonete. Havia 3 tipos de tamanho: pequeno, médio e grande e 2 sabores: morango ou chocolate com flocos.

Vamos analisar quantas formas diferentes o sorvete poderá ser montado:



Isso nos dá 6 formas diferentes de montar o sorvete. Se a lanchonete produzisse algum sabor novo, haveria 9 formas de montar o sorvete. Note que é bem fácil contarmos as formas de como podemos montar o sorvete neste exemplo, mas, e se o número de possibilidades fosse muito grande? A tarefa de contá-las seria trabalhosa. Houve então a necessidade de inventar uma técnica para contá-las. Este processo é a análise combinatória.

Princípio Fundamental da Contagem

Voltando ao exemplo anterior, o número de possibilidades diferentes é 3 x 2 = 6.

Tamanho (3) x Sabor (2) = 6

E se houvesse mais um sabor oferecido pela lanchonete?

Tamanho (3) x Sabor (3) = 9

Com isso parece razoável perceber que se um acontecimento é baseado em n etapas seguidas e distintas, vejam:

- P1= número de possibilidades da 1ª etapa
- P2= número de possibilidades da 2ª etapa
- ...
- Pn= número de possibilidades da enésima etapa

Então o número de possibilidades será dado por: $P = P_1 . P_2 ..... P_{n-1} . P_n$. Chamamos este processo de princípio fundamental da contagem.

Exemplo:

No antigo sistema de emplacamento, as placas eram iniciadas de 2 vogais seguidas de 3 dígitos. Qual o número máximo de veículos que poderia ser emplacado neste sistema?

$\underset{\text{Vogais}}{\_\_\ \_\_}\qquad \underset{\text{Dígitos}}{\_\_\ \_\_\ \_\_}$

A primeira letra pode ser qualquer uma das 5 vogais, a segunda também, pois é permitida a repetição. Já os dígitos poderão ser completados de 10 modos cada (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

$\underset{5}{\_\_}\ \underset{5}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}$ 5.5.10.10.10 = 25000 veículos

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. (UNIRIO-ENCE) Uma indústria fabrica 100 produtos diferentes, que já estão no mercado. Para facilitar a identificação de cada produto, via computador, será criado um código de barras especial, onde cada barra é ▮ ou █. O número mínimo de barras necessárias para se criar um código de barras que identifique cada um dos 100 produtos é igual a: (se necessário, use log 2 = 0,3)

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

Solução:

Se tiver: 1 barra = 2

2 barras = 2 . 2 = 4

.
.
.

6 barras = 2^6 = 64

7 barras = 2^7 = 128

Logo: 7 barras.

Resposta: letra C

2. (UFF) Uma moça vai desfilar vestindo saia, blusa, bolsa e chapéu. O organizador do desfile afirma que três modelos de saia, três de blusa, cinco de bolsa e um certo número de chapéus permitem mais de duzentas possibilidades de diferentes escolhas deste traje. Assinale a alternativa que apresenta o nº mínimo de chapéus que torna verdadeira a afirmação do organizador.

a) 189 b) 30 c) 11
d) 5 e) 4

Solução:

$$\frac{3}{\text{saia}}\cdot\frac{3}{\text{blusa}}\cdot\frac{5}{\text{bolsa}}\cdot\frac{x}{\text{chapéu}}\geq 200$$

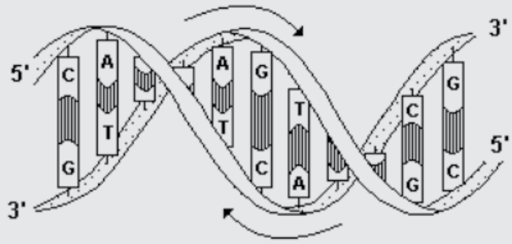
$$45x \geq 200$$

$$x \geq \frac{200}{45}$$

$$x = 5$$

Resposta: letra D

3. **(UERJ) Utilize as informações abaixo para responder à questão.**



(Adaptado de LOPES. Sônia. "BIO 3". São Paulo. Saraiva,1993.)

Trechos complementares de duas cadeias de nucleotídeos de uma molécula de DNA. Observe que uma cadeia se dispõe em relação à outra de modo invertido.

Considere as seguintes condições para a obtenção de fragmentos de moléculas de DNA:

- **Todos os fragmentos devem ser formados por 2 pares de bases nitrogenadas;**
- **Cada fragmento máximo deve conter as quatro diferentes bases nitrogenadas.**

O número máximo de fragmentos diferentes que podem ser assim obtidos corresponde a:

a) 4 b) 8
c) 12 d) 24

Solução:

Em cada par, escolhendo-se a primeira base, fica escolhida a segunda, logo, o primeiro par pode ser formado de 4 modos distintos. Fixado o primeiro par, há apenas 2 modos de se formar o outro; portanto, pelo princípio multiplicativo há 4 . 2 = 8 fragmentos de dois pares, nessas condições.

Resposta: letra B

4. **(EsSA 2008) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sem repeti-los, podemos escrever "x" números de 4 algarismos, maiores que 3 200. O valor de "x" é:**

a) 210 b) 228 c) 240
d) 300 e) 320

Solução:

Todos os números de 4 algarismos que podemos formar com 1, 2, 3, 4, 5 e 6

6 x 5 x 4 x 3 = 360 números de 4 algarismos

Números de 4 algarismos formados com 1, 2, 3, 4, 5 e 6, menores que 3200.

Começados pelo algarismo 1

$\boxed{1}$ 5 x 4 x 3 = 60

Começados pelo algarismo 2

$\boxed{2}$ 5 x 4 x 3 = 60

Começados pelo algarismo 3 e seguido do algarismo 1

$\boxed{3}\boxed{1}$ 4 x 3 =12

Total 60 + 60 +12 = 132 números

Para encontrarmos o total de números maiores que 3200 faremos então a diferença 360 - 132 = 228 números maiores que 3200 e são formados pelos algarismo 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

PRATICANDO

1. (UERJ) Observe o quadrinho abaixo.

As quatro pessoas que conversam no banco da praça poderiam estar sentadas em outra ordem. Considerando que o fumante ficou sempre numa das extremidades, o número de ordenações possíveis é:

a) 04 b) 06 c) 12
d) 24 e) 48

2. (UFF) Uma pessoa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras usando as 18 consoantes e as 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir letras, o número de senhas possíveis é:

a) 3.060 b) 24.480 c) 37.800
d) 51.210 e) 73.440

3. **(MACK-SP) Os números dos telefones de uma cidade são constituídos de 6 dígitos. Sabendo que o primeiro dígito nunca pode ser zero, se os números dos telefones passaram a ser de 7 dígitos, o aumento possível na quantidade de telefones será:**

a) $81 . 10^3$ b) $90 . 10^3$ c) $81 . 10^4$
d) $81 . 10^5$ e) $90 . 10^5$

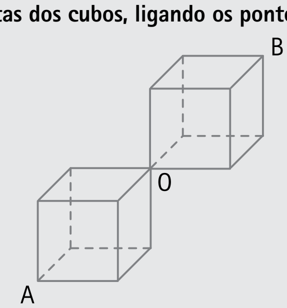
4. **(UFBA) Numa eleição para a diretoria de um clube concorrem 3 candidatos a diretor, 2 a vice-diretor, 3 a primeiro-secretário e 4 a tesoureiro. O número de resultados possíveis da eleição é:**

a) 4 b) 24 c) 72
d) 144 e) 121

5. **(UGF-RJ) Com algarismos 0,1,2,3,4 e 5, quantos são os múltiplos de 5 compostos de 3 algarismos que podemos formar?**

a) 32 b) 36 c) 10
d) 60 e) 72

6. **(UFSCARLOS) Considere a figura abaixo. O número de caminhos mais curtos ao longo das arestas dos cubos, ligando os pontos A e B, é:**



a) 2 b) 4 c) 12
d) 18 e) 36

7. (RURAL) Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, onde as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a 1ª letra determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número máximo de carros que cada estado poderá emplacar será de:

a) 175.760 b) 6.760.000

c) 409.500 d) 175.760.000

e) 6.500.000

8. (Vunesp-SP) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a) 9 b) 10 c) 12

d) 15 e) 20

9. (UNIFICADO) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda).

Se, a cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2.024 c) 9.562

d) 12.144 e) 13.824

10. (Fuvest-SP) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?

a) 5^9 b) $9 . 8^4$ c) $8 . 9^4$

d) 8^5 e) 9^5

M35 PERMUTAÇÕES, ARRANJOS E COMBINAÇÕES SIMPLES

PERMUTAÇÕES

Permutações Simples

Permutações poderiam ser vistas como fórmulas de ordenar n elementos que diferem entre si pela ordem.

Exemplo:

Quantos são os anagramas (palavras obtidas de outras) da palavra prático?

Temos 7 letras para 7 lugares

___	___	___	___	___	___	___
7	6	5	4	3	2	1

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Caso Geral

Dados **n** objetos distintos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ de quantos modos é possível ordená-los?

Temos **n** modos de escolher o primeiro lugar, (n – 1) modos de escolher o segundo e assim por diante, até restar somente uma maneira de completar o último lugar, portanto o número de modos de ordenar os objetos é $(n).(n-1).(n-2)...(1) = n!$ Definimos este resultado como fatorial de n.

No exemplo anterior, encontramos o resultado 7!

Permutação com elementos repetidos

Para realizar permutações com elementos repetidos, devemos proceder da seguinte forma:

$P_n^{a,b,c,...} = \dfrac{n!}{a!.b!.c!...}$, onde n é o número total de elementos e a, b, c, etc. são os elementos do conjunto que se repetem.

ARRANJOS

Arranjos Simples

Considere um conjunto com **n** elementos. Chamamos de arranjo simples dos elementos **n** tomados p a p $(1 \le p \le n)$ a qualquer sequência de **p** elementos formada com os elementos do conjunto, sem repetição.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo:

Quais os números de 2 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 2, 4 e 7?

A solução é todos os arranjos simples de 3 elementos tomados 2 a 2.

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Vamos verificar:

- Começando por 2: 24 e 27
- Começando por 4: 42 e 47
- Começando por 7: 74 e 74

COMBINAÇÕES SIMPLES

Combinações simples remetem a arranjos, mas diferentemente deles, a ordem dos elementos não importa. Ou seja, dados **n** elementos distintos, tomados **p** a **p**, é combinação simples qualquer agrupamento de **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** elementos dados. Duas combinações não se distinguem pela natureza de seus elementos.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Exemplo:

Achar as combinações simples dos elementos do conjunto {A, B, C, D, E}:

A) Tomadas 2 a 2

B) Tomadas 3 a 3

A) $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!.(5-2)!} = 10$

Vamos verificar:

AB	AC	AD	AE	
	BC	BD	BE	= 10
		CD	CE	
			DE	

B) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!.(5-3)!} = 10$

Vamos verificar:

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE
			BCD	BCE	BDE = 10
					CDE

Binômio de Newton

Sabemos que o produto notável $(a + b)^2$ é igual a $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$. Como resolveremos $(a + b)^3$?

Se não soubermos calcular de "cabeça", basta abrir o binômio assim:

$$(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

E como faríamos $(a + b)^n$? Através do Binômio de Newton, o qual estudará neste capítulo.

Coeficientes Binomiais

Coeficiente Binomial é um resultado definido por dois números naturais **n** e **p**, $n \geq p$, dados por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Este resultado nos remete ao método de resolução para combinação simples, pois: $\binom{n}{p} = C_n^p$.

Exemplos:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.(6-2)!} = 15$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!.(7-1)!} = 7$$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!.(10-6)!} = 210$$

Propriedades

- Se $p = 0; \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.n!} = 1$
- Se $p = 1; \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!.(n-1)!} = n$
- Se $p = n; \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!.(n-n)!} = 1$
- Se $n = p + k; (n, k, p \in \mathfrak{R}); \binom{n}{p} = \binom{n}{k}$

Nesta última propriedade, classificamos os binômios como números binomiais complementares.

Observações:

Números binomiais complementares são iguais:

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n-p}}$$

Exemplos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = 10$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!.(5-2)!} = 10$$

Relação de Stifel

$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ para (n, k, p e N); p $\geq$ p – 1 $\geq$ 0.

Exemplo:

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal recebe o nome do matemático francês Blaise Pascal que o estudava no séc. XVII, porém o triângulo já era estudado por chineses no séc. XIII. Mas do que ele se trata?

Vamos ordenar os números binominais $\binom{n}{p}$ da seguinte forma:

- Mesmo numerador na mesma linha;
- Mesmo denominador na mesma coluna.

Assim:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

Agora, vamos analisar o triângulo com apenas seus valores numéricos:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Propriedades

- Por $\binom{n}{0} = 1$, a 1ª coluna será composta apenas de 1.
- Por $\binom{n}{n} = 1$, o último elemento de cada linha é igual a 1.
- Da relação de Stifel podemos concluir que somando cada dois elementos consecutivos de uma mesma linha, obtemos o resultado abaixo da última parcela.

1
1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1

- Os termos equidistantes dos extremos, nas linhas, são iguais.

1          $1 = 2^0$

1 1 $1 + 1 = 2 = 2^1$

1 2 1 $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

1 3 3 1 $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

- Teorema das linhas:

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

- Teorema das colunas: a soma dos elementos de uma coluna do triângulo é igual ao elemento que está adiante uma linha e uma coluna no cruzamento delas. (Para funcionar, deve sempre começar do primeiro termo).

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Exemplo:

1 + 2 + 3 + 4 = 10

1 + 4 = 5

- Teorema das diagonais: a soma dos elementos de uma diagonal é igual ao elemento que está imediatamente abaixo do último elemento que fora somado. (Para funcionar, deve sempre começar do primeiro termo).

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Exemplo:

1 + 2 + 3 + 4 = 10

Fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton

Para n = 0, temos $(x + a)^0 = 1$

$n = 1, (x+a)^1 = 1x + 1a$

$n = 2, (x+a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2$

$n = 3, (x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

$n = 4, (x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4x^2a^3 + 1a^4$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

É fácil observarmos que os coeficientes dos termos do binômio desenvolvido coincidem com as linhas do triângulo de Pascal.

Segundo o raciocínio, podemos encontrar a fórmula do Binômio, dada por:

$$(x+a)^n=\binom{x}{0}x^na^o+\binom{n}{1}x^{n-1}a^1+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\ldots+\binom{n}{n}x^0a^n$$

Fórmula do termo geral do binômio

Ao desenvolvermos $(x + a)^n$, notamos que:

$$1^o \text{ termo: } t_1 = t_{0+1} = \binom{n}{0}x^n.a^o$$

$$2^o \text{ termo: } t_2 = t_{1+1} = \binom{n}{1}x^{n-1}.a^1$$

$$3^o \text{ termo: } t_3 = t_{2+1} = \binom{n}{2}x^{n-2}.a^2$$

...

$$(p+1)-\text{ésimo} \rightarrow t_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}.a^p$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Numa reunião de sete pessoas há nove cadeiras. De quantos modos se podem sentar as pessoas?

a) 640   b) 5040   c) 18540

d) 181440   e) 1625040

Solução:

Como podemos observar este é um problema de arranjos simples, para encontrarmos o resultado faremos

$A_{9,7} = 9.8.7.6.5.4.3 = 181.440$

Mas também podemos utilizar o princípio multiplicativo para resolver esta questão veja:

Primeira pessoa = 9 cadeiras disponíveis

Segunda pessoa = 8

Terceira pessoa =7,

e assim por diante até a sétima com 3 cadeiras disponíveis.

Logo,

9.8.7.6.5.4.3 = 181.440

Resposta: letra D

2. (PUC-SP) Um professor propôs para uma das suas turmas uma prova com 7 questões, das quais cada aluno deveria escolher exatamente 5 questões para responder. Sabe-se que não houve duas escolhas das mesmas 5 questões entre todos os alunos da turma. Logo, o número máximo de alunos que essa turma poderia possuir era:

a) 17   b) 19   c) 21

d) 22   e) 25

Solução:

Para encontrarmos o resultado utilizaremos uma combinação veja:

$$C_{7,5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot6}{2} = 21 \text{ alunos}$$

Resposta: letra C

3. **Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ARARA?**

a) 120 b) 60 c) 30
d) 12 e) 10

Solução:

A palavra ARARA possui 5 letras porém com 3 repetições da vogal A e 2 repetições da consoante R. Se as 5 letras fossem distintas teríamos 5! = 120 anagramas

Como existem repetições, devemos então desconsiderar as trocas de posições entre letras iguais, sendo assim a quantidade de anagramas será, portanto, igual a P = $\frac{5!}{(3!.2!)} = 10$.

Resposta: letra E

PRATICANDO

1. **(UFCE) O mapa de uma cidade é formado por 6 bairros distintos. Deseja-se pintar esse mapa com as cores vermelha, azul e verde do seguinte modo: um bairro deve ser vermelho, dois bairros azuis e os demais verdes. De quantas maneiras distintas isso pode ser feito?**

a) 6 b) 30 c) 60
d) 120 e) 240

2. **(FGV-SP) Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?**

a) 126 b) 98 c) 115
d) 165 e) 122

3. **(UnB-DF) Um fazendeiro dispõe de um terreno dividido em regiões, como na figura a seguir, e pretende cultivá-las de forma que as regiões com uma fronteira comum tenham plantios diferentes. De quantas formas ele pode fazer o plantio se pode optar entre milho, feijão, arroz e trigo para cultivar?**

a) 120 b) 24 c) 48
d) 64 e) 60

4. **Uma prova é composta por 6 questões com 4 alternativas de respostas cada uma, das quais apenas uma delas é correta. Cada resposta correta corresponde a 3 pontos ganhos; cada erro ou questão não respondida, a 1 ponto perdido.**

Calcule a probabilidade de um aluno que tenha respondido aleatoriamente a todas as questões obter um total de pontos exatamente igual a 10.

5. **Calcule o dobro da soma dos números dos anagramas da palavra EDITORA que começam com a letra A com os que começam com a letra D e terminam com a letra E.**

a) 1.680 b) 1.440 c) 240
d) 840 e) 600

6. **(UNIPAC) Num concurso de loteria, 4 números são sorteados em 36. O máximo de números permitidos num cartão-aposta é 6. Qual o número mínimo de cartões que você deve preencher para ter certeza de que vencerá?**

a) 3.659 b) 3.808
c) 3.927 d) 4.046

7. **(ITA) Quantos números, de seis algarismos distintos, podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?**

a) 144 b) 180 c) 240
d) 288 e) 360

8. **Uma agência de turismo está fazendo uma pesquisa entre seus clientes para montar um pacote de viagens à Europa e pede aos interessados que preencham o formulário abaixo com as seguintes informações:**

- a ordem de preferência entre as 3 companhias aéreas com que trabalha a agência;
- a 1ª e a 2ª opções dentre 4 possíveis datas de partida apresentadas pela agência;
- os nomes de 4 cidades diferentes a serem visitadas, que devem ser escolhidas de uma lista de 10 fornecida pela agência (sem ordem de preferência).

Preencher todos os campos, sem repetição		
Companhias Aéreas	Datas	Cidades (ordem indiferente)
1ª	1ª opção	
2ª	2ª opção	
3ª		

Supondo que nenhum campo seja deixado em branco, determine de quantas maneiras diferentes pode o formulário ser corretamente preenchido.

Tendo a pesquisa sido inconclusiva, a agência decidiu montar o pacote escolhendo aleatoriamente uma das 3 companhias aéreas, 3 das 4 datas de partida e 6 das 10 cidades. O Sr. Y deseja viajar e não tem preferência de companhia aérea, mas faz questão de ir a Paris e Praga (que constam da lista de 10 cidades apresentadas pela agência); além disso, somente pode viajar em uma das 4 datas oferecidas.

9. **(FGV-SP) Numa sala de reunião há 10 cadeiras e 8 participantes. De quantas maneiras distintas podemos sentar os participantes?**

a) 181.440 b) 3.628.800
c) 1.814.400 d) 40.320
e) 403.200

10. **(UFBA) Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e acertaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que**

houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores durante toda a viagem é:

a) 4 b) 8 c) 12
d) 24 e) 162

11. **(FES-MG) Num determinado setor de um hospital trabalham 4 médicos e 10 enfermeiras. Quantas equipes distintas, constituídas cada uma de 1 médico e 4 enfermeiras, podem ser formadas nesse setor?**

a) 214 b) 840 c) 5.044
d) 20.160 e) n.d.a.

12. **(ITA) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?**

a) 1.692 b) 1.572 c) 1.520
d) 1.512 e) 1.392

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS. PROBABILIDADE DE UM EVENTO: NOÇÕES DE PROBABILIDADE EM ESPAÇOS AMOSTRAIS FINITOS.

M36

A primeira motivação da teoria das probabilidades foram os jogos de azar. Estes estudos eram solicitados por nobres e jogadores profissionais.

Atualmente a teoria das probabilidades é de importância em várias áreas, como economia, administração, entre outros.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Quando um experimento é repetido várias vezes e em condições ideais, a tendência é apresentar resultados cuja motivação é o acaso. Situações como essas envolvem cálculo de **experimento aleatório**.

ESPAÇO AMOSTRAL

Lancemos um dado e observemos o número mostrado na face de cima. Descrever o conjunto de possíveis resultados do experimento é determinar seu **espaço amostral**.

Exemplo:

No lançamento de uma moeda ao acaso duas vezes, quais resultados poderiam ser encontrados (determine o espaço amostral).

1º lançamento	2º lançamento
Cara (k)	Cara (k)
	Coroa (c)
Coroa (c)	Cara (k)
	Coroa (c)

O espaço é $\Omega = \{(k, k), (k, c), (c, c)(c, k)\}$

PROBABILIDADE

Conceito de Probabilidade

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}}$$

Exemplo:

Três moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? E a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?

K= cara

C= coroa

O espaço amostral será: $\Omega = \{(kkk), (kkc), (kck) (kcc), (ckk), (ckc), (cck), (kkk)\}$

$n(\Omega)$ = Casos possíveis = 8. Considere A o espaço amostral que indica o evento "obter 2 caras". Temos então: $A = \{(kkc),(kck),(ckk)(kcc)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

Propriedades Importantes

Algumas propriedades são obtidas imediatamente:

1) A probabilidade de um evento certo é igual a 1.

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

2) A probabilidade do evento impossível é nula.

$$n(A) = 0$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$$

3) Para todo evento A $0 \le P(A) \le 1$

4) A soma das probabilidades de um evento e o seu complemento é 1 unidade.

Se $A \cup A' = \Omega$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \qquad P(A') = \frac{n(A')}{n(\Omega)}$$

$$n(\Omega) = n(a) + n(A')$$

$$P(A \cup A') = \frac{n(A) + n(A')}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

Vale destacar a importância desta propriedade para resolução de problemas, pois pode ser mais vantajoso, de acordo com o problema, calcular o complemento do conjunto.

5) Sejam A e B dois eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional

Ao realizarmos um experimento, se já tivermos alguma informação sobre ele, o espaço amostral se modificará e o evento terá sua probabilidade de ocorrência alterada.

Utilizaremos o símbolo P(A/B) para representar a probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido.

Exemplo:

Consideremos o lançamento de um dado e observemos a face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sejam os eventos:

A: ocorre um número ímpar

B: ocorre um número maior ou igual a 2.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

P(A/B): será então a probabilidade de ocorrer número ímpar no novo espaço amostral reduzido.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Atribuindo 1/5 para a probabilidade de cada evento, então para ocorrer o número ímpar no espaço amostral reduzido será {3,5} e, portanto: $P(A / B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

Assim, de forma geral, podem definir que dados dois eventos A e B, representamos: $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Eventos Independentes

Dizemos que dois eventos A e B são independentes se a probabilidade de um ocorrer não depende do outro.

Exemplo:

No lançamento de dois dados, o resultado obtido em um deles independe do resultado obtido no outro. Assim, qual a probabilidade de obtermos 3 no primeiro dado e 1 no segundo?

$P(3 \text{ no dado } 1/1 \text{ no dado } 2) = \frac{1}{6}$

$P(1 \text{ no dado } 1/3 \text{ no dado } 2) = \frac{1}{6}$

$P(\text{obter } 3 \text{ e } 1) = \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Percebemos que se dois eventos A e B forem independentes, temos:

$P(B / A) = P(B)$, mas $P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Logo, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, como vimos anteriormente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. A e B têm as mesmas chances de vencer e, cada um, tem duas vezes mais chances de vencer do que C. qual é a probabilidades de A ou C vencer?

a) 20% b) 40% c) 60%
d) 75% e) 90%

Solução:

Sejam p(A), p(B) e p(C), as probabilidades individuais de A, B e C vencerem, então, o enunciado nos diz que:

p(A) = p(B) = 2.p(C) = x.

Temos: p(A) + p(B) + p(C) = 1.

Assim, substituindo, vem:

$x + x + \frac{x}{2} = 1 \therefore x = \frac{2}{5} = 1$

logo, $p(A) = \frac{2}{5}$, $p(B) = \frac{2}{5}$ e $p(C) = \frac{1}{5}$.

Somando as probabilidades de A com C vencer teremos então o que quer o problema:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$$

Resposta: letra C

2. (CESGRANRIO-RJ) O dispositivo que aciona a abertura do cofre de uma joalheria apresenta um teclado com nove teclas, sendo cinco algarismos (0, 1, 2, 3, 4) e quatro letras (x, y, z, w). O segredo do cofre é uma sequência de três algarismos seguidos de duas letras. Qual a probabilidade de uma pessoa, numa única alternativa, ao acaso, abrir o cofre?

a) $\frac{1}{7200}$ b) $\frac{1}{2000}$ c) $\frac{1}{1500}$

d) $\frac{1}{720}$ e) $\frac{1}{200}$

Solução:

Primeiro vamos calcular o número de segredos possíveis, veja:

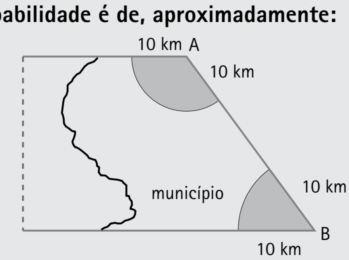
$\underset{5}{\_}\,\underset{5}{\_}\,\underset{5}{\_}\,\underset{4}{\_}\,\underset{4}{\_} \Rightarrow n(U) = 5^3 \cdot 4^2 = 2000$

Sendo 2000 o total de segredos, então podemos dizer que a probabilidade de conseguir abrir o cofre numa única alternativa é

$P(A) = \frac{1}{n(U)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2000}$

Resposta: letra B

3. (Enem-MEC) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura abaixo. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:



a) 20% b) 25% c) 30%
d) 35% e) 40%

Solução:

Primeiro vamos calcular as áreas dos setores com vértice em A e B, podemos juntá-los, pois os setores têm o mesmo raio, assim A + B = 180, o que significa então calcular a área de uma semicircunferência de raio 10cm, veja:

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = 50\pi \text{ cm}^2$$

Portanto a região de alcance das estações é de $50\pi cm^2$, então a probabilidade de um morador estar na área de alcance de pelo menos uma das emissoras é:

$$P = \frac{50\pi}{628} = 0{,}25 = 25\%$$

Resposta: letra B.

PRATICANDO

Com base no texto abaixo, responda às questões de nº 1 e 2.

Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

1ª opção: comprar três números para um único sorteio;

2ª opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio;

3ª opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

1. **Se X, Y, Z representam as probabilidades de o apostador ganhar algum prêmio, escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou a 3ª opção, é correto afirmar que:**

a) $X < Y < Z$ b) $X = Y = Z$
c) $X > Y = Z$ d) $X = Y > Z$
e) $X > Y > Z$

2. **Escolhendo a 2ª opção, a probabilidade de apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é igual a:**

a) 90% b) 81% c) 72%
d) 70% e) 65%

3. **FUVEST(modificada) Uma urna possui três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna, de modo que se retirando uma bola ao acaso, a probabilidade dela ser azul seja igual a 2/3?**

a) 9 bolas. b) 12 bolas.
c) 21 bolas. d) 16 bolas.
e) 6 bolas.

4. **Uma moeda é viciada, de forma que as caras são três vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas. Qual é a probabilidade de num lançamento sair coroa?**

a) 25% b) 50% c) 66%
d) 75% e) n.d.a

5. **(UFJF) Lança-se uma moeda não viciada nove vezes e obtém-se nove vezes cara. Então podemos afirmar que a probabilidade de se obter cara no décimo lançamento é:**

a) 1/9 b) 1/10
c) 1/2 d) 9/10

6. **(PUC-SP) Serão sorteados 4 prêmios iguais entre os 20 melhores alunos de um colégio, dentre os quais estão Tales e Euler. Se cada aluno pode receber apenas um prêmio, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é:**

a) 3/95 b) 1/19 c) 3/19
d) 7/19 e) 38/95

7. **(ITA) São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.**

8. **(UFMG) Seis fichas de cartolina foram utilizadas para escrever as letras MACACO, uma letra em cada ficha. Dispondo de todas as fichas aleatoriamente, formam-se sequências de letras, como, por exemplo: AAMCOC, MACAOC, etc. Essas sequências são chamadas anagramas. Com base nessas explicações, é correto afirmar-se que:**

01. Escolhendo aleatoriamente uma dessas fichas, a probabilidade de retirar uma letra A é 1/6;

02. A probabilidade de retirar, ao acaso, uma ficha com vogal é a mesma de retirar uma ficha com consoante;

04. O número total de anagramas que podem ser formados é 360;

08. O número de anagramas que se iniciam por AA é 24;

16. Escolhendo-se ao acaso um anagrama, a probabilidade de que ele se inicie por uma vogal é a mesma de que eles iniciem por uma consoante.

9. **(Uniube-MG) A probabilidade de se obter um número divisível por 5, na escolha ao acaso de um número obtido pelas permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 é igual a:**

a) 1/5 b) 1/4 c) 1/3
d) 1/2 e) 1

10. **(Unesp-SP) A final da Olimpíada de Matemática de uma certa escola vai ser disputada por apenas três alunos, A B e C. Admite-se que é duas vezes mais provável que A vença do que B e é duas vezes mais provável que B vença do que C. Nesse caso, a probabilidade de que A vença a Olimpíada é:**

a) 5/7 b) 4/7 c) 3/7
d) 2/7 e) 1/7

Enunciado para as questões 11 e 12:

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas uma dentre as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

11. **(Enem-MEC) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:**

a) 0 b) 1/3 c) 1/2
d) 2/3 e) 1/6

12. (Enem-MEC) A probabilidade de o participante não ganhar nenhum prêmio é igual a:

a) 0 b) 1/3 c) 1/4
d) 1/2 e) 1/6

13. As cartas de um baralho são amontoadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de a carta de cima ser de copas e a de baixo também? O baralho é formado por 52 cartas de 4 naipes diferentes (13 de cada naipe).

a) 1/17 b) 1/25 c) 1/27
d) 1/26 e) 1/45

14. Lança-se um dado 8 vezes. Qual a probabilidade aproximada de sair exatamente 5 números iguais a 3?

a) 10% b) 12% c) 15%
d) 17% e) 20%

15. (FUVEST) Um arquivo de escritório possui 4 gavetas, chamadas a, b, c, d. Em cada gaveta cabem no máximo 5 pastas. Uma secretária guardou, ao acaso, 18 pastas nesse arquivo. Qual é a probabilidade de haver exatamente 4 pastas na gaveta a?

a) 3/10 b) 1/10 c) 3/20
d) 1/20 e) 1/30

16. (ITA) Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P1 é a probabilidade de não sair bola azul e P2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de P1 + P2 é:

a) 0,21 b) 0,25 c) 0,28
d) 0,35 e) 0,40

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA

(Levantamento de dados e tabelas; distribuição de frequências; gráficos estatísticos; interpretação; medidas de posição)

M37

A **estatística** é uma parte da matemática aplicada que fornece métodos para a coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados e para a utilização dos mesmos na tomada de decisões.

A **estatística descritiva** se encarrega de coletar, organizar e fazer a descrição dos dados.

Ao conjunto de entes portadores de, pelo menos, uma característica comum denominamos **população estatística** ou **universo estatístico**.

Uma amostra é um subconjunto finito de uma população.

Um dos objetivos da estatística é sintetizar os valores que uma ou mais variáveis podem assumir, para que tenhamos uma visão global da variação dessa ou dessas variáveis. Para isso, vamos apresentar esses valores em **tabelas** e **gráficos**, que irão nos fornecer rápidas e seguras informações a respeito das variáveis em estudo.

TABELAS

Tabela é um quadro que resume um conjunto de observações.

Exemplo:

Vamos representar a variação do preço da Cesta Básica no Rio de Janeiro ao longo dos anos de 2004 até 2008.

Anos	Preço Médio (R$)
2004	47,50
2005	42,70
2006	51,30
2007	52,70
2008	54,90

GRÁFICOS

O **gráfico estatístico** é uma forma de representação dos dados estatísticos, cujo objetivo é o de produzir, no investigador ou no público em geral uma impressão mais rápida e viva do fenômeno em estudo. Temos vários tipos de gráficos, dentre eles podemos destacar o gráfico em colunas ou em barras, o gráfico em linha e o gráfico em setores.

Gráfico em Colunas ou em Barras

É a representação de uma série por meio de retângulos, dispostos verticalmente (em colunas) ou horizontalmente (em barras).

Quando em colunas, os retângulos têm a mesma base e as alturas são proporcionais aos respectivos dados.

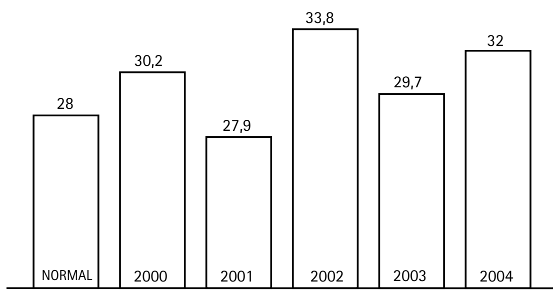
Quando em barras, os retângulos têm a mesma altura e os comprimentos são proporcionais aos respectivos dados.

Assim estamos assegurando a proporcionalidade entre as áreas dos retângulos e os dados estatísticos.

Exemplo:

Este gráfico compara a temperatura média anual normal, com as temperaturas médias dos anos de 2000 a 2004.

TEMPERATURA MÉDIA ANUAL (°C)



Podemos rapidamente perceber que o único ano em que a média de temperatura anual foi menor do que o normal foi o ano de 2001.

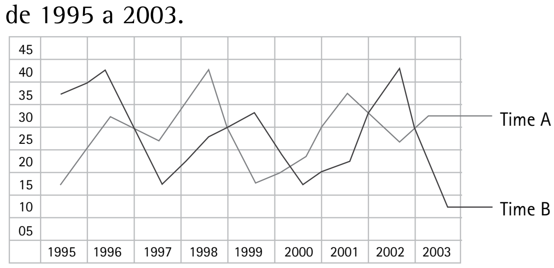
Gráfico em Linha

Este tipo de gráfico se utiliza da linha poligonal para representar a série estatística.

O gráfico em linha constitui uma aplicação do processo de representação das funções num sistema de coordenadas cartesianas.

Exemplo:

O gráfico a seguir mostra o número de gols marcados por dois times no campeonato nacional de 1995 a 2003.



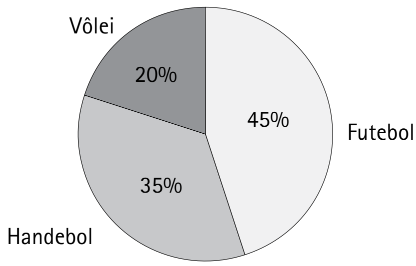
Podemos rapidamente concluir que em 1995 o time B marcou mais gols que o time A, porém em 2001 o time A marcou mais vezes que o time B. O máximo de gols marcados em um ano pelo mesmo time foi de 40 gols. Ou seja, fica fácil obter informações desse gráfico.

Gráfico em setores

Este gráfico é constituído com base em um círculo, e é empregado sempre que desejamos ressaltar a participação do dado no total. O total é representado pelo círculo, que fica dividido em tantos setores quantas são as partes. Os setores são tais que suas áreas são respectivamente proporcionais aos dados da série. Obtemos cada setor por meio de uma regra de três simples e direta, lembrando que o total da série corresponde a 360º.

Exemplo:

Numa escola, os alunos devem optar por um, e somente um, dos três esportes: Vôlei, Handebol e Futebol. A distribuição da escolha de 200 alunos está indicada pelo gráfico a seguir.



Se quisermos descobrir o número de alunos que optaram pelo futebol e o ângulo do seu setor, então devemos fazer a regra de três:

200 alunos ······ 100%

x alunos ········· 45%

$100x = 200 \cdot 45$

$x = 2 \cdot 45$

$x = 90$ alunos

200 alunos ······ 360º

90 alunos········· y

$200y = 360 \cdot 90$

$2y = 36 \cdot 9$

$y = 18 \cdot 9$

$y = 162^o$

Ou seja, 90 alunos optaram por futebol e 162º é o ângulo do setor desse grupo.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

A forma pela qual podemos descrever dados estatísticos resultantes de variáveis quantitativas, como é o caso de notas obtidas pelos alunos de uma sala, estaturas de um conjunto de pessoas, valores obtidos de um dado de seis faces após lançá-lo várias vezes e etc.

Exemplo:

José lançou um dado 50 vezes. Veja os resultados que ele encontrou:

4	3	6	3	2	4	3	1	2	2
3	2	6	4	1	2	5	3	6	1
2	5	1	1	4	3	6	5	2	4
5	6	6	2	4	1	1	3	6	5
6	2	3	6	1	5	6	1	2	2

Assim, conhecidos os valores de uma variável, é difícil averiguarmos qual número mais saiu, ou se todos saíram a mesma quantidade de vezes, enfim, fica complicado afirmar qualquer coisa. Porém, essas características serão facilmente observadas quando dispusermos valores ordenados em uma coluna e colocarmos, ao lado de cada valor, o número de vezes que aparece repetido.

Denominamos **frequência** o número de vezes que cada número da face de um dado de seis faces apareceu voltado para cima. Obtemos, assim, uma tabela que recebe o nome de **distribuição de frequência**.

Número da Face	Frequência
1	9
2	11
3	8
4	6
5	6
6	10

Agora facilmente verificamos que o número que mais saiu foi o número 2 e somente o 4 e o 5 saíram a mesma quantidade de vezes.

MEDIDAS DE POSIÇÃO

As medidas de posição mais importantes são as medidas de tendência central, que recebem tal denominação pelo fato de os dados observados tenderem, em geral, a se agrupar em torno dos valores centrais. Dentre as medidas de tendência central, destacamos:

A Média Aritmética ($\overline{X}$)

Em um conjunto de dados podemos definir vários tipos de médias. Porém, nesse momento iremos nos limitar a mais importante: a média aritmética.

Média aritmética é o quociente da divisão da soma dos valores das variáveis pelo número deles.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

Sendo:

$\overline{X}$ a média aritimética;

x_i os valores da variável;

n o número de valores.

Dados não-agrupados:

Quando desejamos conhecer a média dos dados não-agrupados em tabelas de frequências, determinamos a **média aritmética simples.**

Exemplo:

Sabendo-se que a venda diária de arroz tipo A, durante uma semana, foi de 10, 14, 13, 15, 16, 18 e 12 kg, temos, para venda média diária na semana de:

$\overline{X} = (10+14+13+15+16+18+12) / 7 = 14$ kg

Desvio em relação à média:

O desvio em relação à média é a diferença entre cada elemento de um conjunto de valores e a média aritmética, ou seja:.. $d_i = X_i - \overline{X}$.

No exemplo anterior temos sete desvios:...

$d_1 = 10 - 14 = -4$

$d_2 = 14 - 14 = 0$

$d_3 = 13 - 14 = -1$

$d_4 = 15 - 14 = 1$

$d_5 = 16 - 14 = 2$

$d_6 = 18 - 14 = 4$

$d_7 = 12 - 14 = -2$

Propriedades da média:

- **1ª propriedade**: A soma algébrica dos desvios em relação à média é nula.

  No exemplo anterior: $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 = 0$
- **2ª propriedade:** Somando-se (ou subtraindo-se) uma constante (c) a todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada (ou diminuída) dessa constante.

  Se no exemplo original somarmos a constante **2** a cada um dos valores da variável temos:

  Y = 12+16+15+17+18+20+14 / 7 = 16 kg ou

  $Y = \overline{X} + 2 = 14 + 2 = 16$ kg
- **3ª propriedade**: Multiplicando-se (ou dividindo-se) todos os valores de uma variável por uma constante (c), a média do conjunto fica multiplicada (ou dividida) por essa constante.

  Se no exemplo original multiplicarmos a constante **3** a cada um dos valores da variável temos:

  Y = 30+42+39+45+48+54+36 / 7 = 42 kg ou $Y = \overline{X} . 3 = 14 . 3 = 42$ kg

Dados agrupados:

Consideremos a distribuição relativa a 34 famílias de quatro filhos, tomando para variável o número de filhos do sexo masculino. Calcularemos a quantidade média de meninos por família:

Nº de meninos	frequência = f_i
0	2
1	6
2	10
3	12
4	4
TOTAL	34

Como as frequências são números indicadores da intensidade de cada valor da variável, elas funcionam como fatores de ponderação, o que nos leva a calcular a **média aritmética ponderada**, dada pela fórmula:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i}$$

..x_i.	..f_i.	..$x_i.f_i$.
0	2	0
1	6	6
2	10	20
3	12	36
4	4	16
TOTAL	34	78

onde 78 / 34 = 2,3 meninos por família.

A moda (Mo)

É o valor que ocorre com maior frequência em uma série de valores. Desse modo, o salário modal dos empregados de uma fábrica é o salário mais comum, isto é, o salário recebido pelo maior número de empregos dessa fábrica.

A Moda quando os dados não estão agrupados é facilmente reconhecida, basta, de acordo com definição, procurar o valor que mais se repete.

Exemplo:

Na série {7, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 12} a moda é igual a 10.

- Há séries nas quais não exista valor modal, isto é, nas quais nenhum valor apareça mais vezes que outros.

  Exemplo:

  {3, 5, 8, 10, 12} não apresenta moda. A série é **amodal.**
- Em outros casos, pode haver dois ou mais valores de concentração. Dizemos, então, que a série tem dois ou mais valores modais.

  Exemplo:

  {2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 9} apresenta duas modas: 4 e 7. A série é **bimodal**.

Quando os dados estão agrupados é possível determinar imediatamente a moda, basta fixar o valor da variável de maior frequência.

Exemplo:

Qual a temperatura mais comum medida no mês abaixo:

Temperaturas	Frequência
0º C	3
1º C	9
2º C	12
3º C	6

Resposta: 2º C é a temperatura modal, pois é a de maior frequência.

Observação:

A **moda** é utilizada quando desejamos obter uma medida rápida e aproximada de posição ou quando a medida de posição deva ser o valor mais típico da distribuição. Já a **média aritmética** é a medida de posição que possui a maior estabilidade.

A Mediana (Md)

A mediana de um conjunto de valores, dispostos segundo uma ordem (crescente ou decrescente), é o valor situado de tal forma no conjunto que o separa em dois subconjuntos de mesmo número de elementos.

A mediana em dados não-agrupados:

Dada uma série de valores como, por exemplo: {5, 2, 6, 13, 9, 15, 10}

De acordo com a definição de mediana, o primeiro passo a ser dado é o da ordenação (crescente ou decrescente) dos valores: {2, 5, 6, 9, 10, 13, 15}

O valor que divide a série acima em duas partes iguais é igual a 9, logo:

Md = 9.

Método prático para o cálculo da Mediana:

1º) Se a série dada tiver número ímpar de termos:

O valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula:

$$(n + 1) / 2$$

Exemplo:

Calcule a mediana da série {1, 3, 0, 0, 2, 4, 1, 2, 5}

1º - ordenar a série {0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5}

n = 9 logo (n + 1)/2 é dado por (9+1) / 2 = 5, ou seja, o 5º elemento da série ordenada será a mediana

A mediana será o 5º elemento = 2.

2º) Se a série dada tiver número par de termos:

O valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula:

$$[(n/2) +(n/2+ 1)] / 2$$

Observação:

n/2 e (n/2 + 1) serão termos de ordem e devem ser substituídos pelo valor correspondente.

Exemplo:

Calcule a mediana da série {1, 3, 0, 0, 2, 4, 1, 3, 5, 6}

1º) ordenar a série {0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6}

n = 10 logo a fórmula ficará: [(10/2) + (10/2 + 1)] / 2

[(5 + 6)] / 2 será na realidade (5º termo+ 6º termo) / 2

5º termo = 2

6º termo = 3

A mediana será = (2+3) / 2 ou seja, **Md = 2,5.** A mediana no exemplo será a média aritmética do 5º e 6º termos da série.

Notas:

- Quando o número de elementos da série estatística for ímpar, haverá coincidência da mediana com um dos elementos da série.
- Quando o número de elementos da série estatística for par, nunca haverá coincidência da mediana com um dos elementos da série. A mediana será sempre a média aritmética dos 2 elementos centrais da série.
- Em uma série a mediana, a média e a moda não têm, necessariamente, o mesmo valor.
- A mediana depende da posição e não dos valores dos elementos na série ordenada. Essa é uma da diferenças marcantes entre **mediana** e **média (que se deixa influenciar, e muito, pelos valores extremos)**.

Vejamos:

Em {5, 7, 10, 13, 15} a média = 10 e a mediana = 10

Em {5, 7, 10, 13, 65} a média = 20 e a mediana = 10

Isto é, a média do segundo conjunto de valores é maior do que a do primeiro, por influência dos valores extremos, ao passo que a mediana permanece a mesma.

A mediana em dados agrupados, é o bastante identificar a frequência acumulada imediatamente superior à metade da soma das frequências. A mediana será aquele valor da variável que corresponde a tal frequência acumulada.

Exemplo conforme tabela abaixo:

Variável x_i	Frequência f_i	Frequência acumulada
0	2	2
1	6	8
2	9	17
3	13	30
4	5	35
total	**35**	

Quando o somatório das frequências for **ímpar** o valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula:

$$\frac{\Sigma f_i + 1}{2}$$

Como o somatório das frequências = 35 a fórmula ficará:

(35+1) / 2 = **18º termo = 3.**

Quando o somatório das frequências for **par** o valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula:

$$\frac{\left(\frac{\Sigma f_i}{2}\right)+\left(\frac{\Sigma f_i}{2}+1\right)}{2_i}$$

Exemplo:

Calcule Mediana da tabela abaixo:

Variável x_i	Frequência f_i	Frequência acumulada
12	1	1
14	2	3
15	1	4
16	2	6
17	1	7
20	1	8
total	**8**	

Aplicando fórmula acima teremos:

[(8/2)+ (8/2+1)]/2 = (4º termo + 5º termo) / 2 = (15 + 16) / 2 = **15,5**

Emprego da Mediana

- Quando desejamos obter o ponto que divide a distribuição em duas partes iguais.
- Quando há valores extremos que afetam de maneira acentuada a média aritmética.
- Quando a variável em estudo é salário.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Em uma prova de Estatística, 3 alunos obtiveram a nota 8,2; outros 3 obtiveram a nota 9,0; 5 obtiveram a nota 8,6; 1 obteve a nota 7,0 e 1 a nota 8,9. A nota média dos alunos será:

a) uma média aritmética simples com valor 8,0;
b) uma média aritmética simples com valor 8,7;
c) uma média aritmética ponderada com valor 8,0;
d) uma média aritmética ponderada com valor 8,5;
e) uma média aritmética ponderada com valor 8,6, pois é o de maior frequência.

Solução:

Como aparecem notas repetidas, ao invés de somá-las, vamos multiplicá-las pela quantidade de vezes que elas aparecem, dessa forma utilizaremos a média ponderada.

$$M_p=\frac{3\cdot 8{,}2+3\cdot 9{,}0+5\cdot 8{,}6+1\cdot 7{,}0+1\cdot 8{,}9}{3+3+5+1+1}=$$

$$=\frac{24{,}6+27{,}0+43{,}0+7+8{,}9}{13}=\frac{110{,}5}{13}$$

$$M_p=8{,}5$$

Uma média ponderada com valor 8,5.

Resposta: Letra D

2. Considere uma série estatística com 2351 elementos. A posição da mediana é representada pelo:

a) 1175º elemento.
b) 1176º elemento.
c) Ponto médio entre o 1175º e o 1176º elemento.
d) 1175,5º elemento.
e) Impossível resolução, pois não há identificação dos elementos.

Solução:

Como a série dada tem número ímpar de termos o valor mediano será o termo de ordem dado pela fórmula :

(n + 1) / 2

(2351 + 1) / 2 = 2352 / 2 = 1176

O termo mediano é o 1176º elemento.

Resposta: Letra B

3. Na série estatística formada por {3, 1, 2, 3, 6}:

a) mediana > moda > média.
b) moda < média < mediana.
c) moda = mediana = média.
d) mediana = média e não há moda.
e) média > mediana e não há moda.

Solução:

Em primeiro lugar vamos ordenar essa sequência: {1, 2, 3, 3, 6}:

- Calculando a Média Aritmética

Aplicando direto a fórmula temos:

$$M_a=\frac{1+2+3+3+6}{5}=\frac{15}{5}=3$$

- Calculando a Moda

A moda é o número que mais aparece na sequência, ou seja, o número 3, o qual aparece duas vezes e todos os outros somente uma vez.

Mo = 3

- Calculando a Mediana

A Mediana é o termo central. Como essa série apresenta um número ímpar de termos (n = 5) temos:

$$Md=\frac{n+1}{2}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}$$

$$Md=3$$

Como podemos verificar Ma = Mo = Md

Resposta: letra C

PRATICANDO

1. Quando a medida de posição deve ser o valor mais típico da distribuição utilizamos:

a) a média.
b) a mediana.
c) a moda.
d) a média, a moda e mediana.
e) a moda ou a média.

2. **Quando desejamos o ponto médio exato de uma distribuição de frequência, basta calcular:**
   a) o desvio médio.
   b) a média.
   c) a moda.
   d) a mediana.
   e) qualquer medida de posição.

3. **Na série estatística formada por $\{-1, -2, 3, 4\}$:**
   a) a mediana está entre -1 e 3.
   b) a mediana é 0,5.
   c) a questão a e b estão corretas.
   d) a mediana é 2.
   e) não existe mediana, pois não há dados repetidos.

4. **Numa determinada Escola com 300 alunos 34% deles completa o 2º grau em 3 anos e 66% em 4 anos. Qual o tempo médio de conclusão do 2º grau na referida Escola.**
   a) 7 anos.
   b) 3 e 4 anos.
   c) 3,66 anos.
   d) 3 ou 4 anos.
   e) 3,5 anos.

5. **Segundo o site da VEJA na internet 28% da população brasileira é de origem africana, 32% de origem portuguesa, 20% de origem italiana e 20% de outras origens. Qual é a moda quanto a origem?**
   a) 32%
   b) 20%
   c) 32% da população.
   d) origem portuguesa.
   e) não podemos identificar a moda por falta de dados.

6. **Um professor, após verificar que toda a classe obteve nota baixa, eliminou as questões que não foram respondidas pelos alunos. Com isso, as notas de todos os alunos foram aumentadas de 3 pontos. Então:**
   a) a média aritmética ficou alterada, assim como a mediana.
   b) apenas a média aritmética ficou alterada.
   c) apenas a mediana ficou alterada.
   d) não houve alteração nem na média nem na mediana.
   e) nada podemos afirmar sem conhecer o número total de alunos.

7. **Na tabela primitiva: $\{6, 2, 7, 6, 5, 4\}$ a soma dos desvios em relação à média aritmética é igual a:**
   a) ao número −4.
   b) ao número 8.
   c) ao número 0.
   d) ao número 25.
   e) ao número 4.

8. **A mediana da série $\{1, 3, 8, 15, 10, 12, 7\}$ é:**
   a) igual a 15.
   b) igual a 10.
   c) igual a 7.
   d) não há mediana, pois não existe repetição de valores.
   e) igual a 8.

9. **A média aritmética de 91 números é 19. Suprimindo-se os números 63 e 64 desse conjunto de números, a nova média será:**
   a) 19
   b) 18
   c) 17
   d) 16
   e) 15

10. **Para que a média aritmética das notas de uma turma com 20 alunos aumentasse em 0,1; alterou-se uma dessas notas para 7,5. Qual era a nota antes da alteração?**
    a) 3,5
    b) 4,5
    c) 5,0
    d) 5,5
    e) 6,0

Gabarito

M31

1. C	2. B	3. A	4. D	5. C	6. E	7. B
8. B	9. E	10. C	11. C	12. C		

M32

1. A	2. E	3. D	4. A	5. E	6. A	7. B
8. D	9. A	10. E	11. B	12. A	13. D	

M33

1. D	2. C	3. A	4. A	5. E	6. B	7. E
8. A	9. A	10. C	11. E	12. E	13. A	14. E
15. A						

M34

1. D	2. C	3. D	4. C
5. D	6. E	7. D	8. B
9. D	10. E		

M35

1. C 2. B 3. A
4. 135/4096
5. A 6. C 7. A
8. Esse formulário pode ser preenchido, no máximo, de 15120 modos distintos.
9. C 10. D 11. B 12. D

M36

1. E 2. C 3. D 4. A
5. C 6. D 7. 2/3
8. 01. incorreta; 02. correta; 04 incorreta; 08 incorreta; 16 correta.
9. A 10. B 11. A 12. B
13. A 14. C 15. A 16. E

M37

1. C	2. D	3. A	4. C
5. D	6. A	7. C	8. E
9. B	10. D		