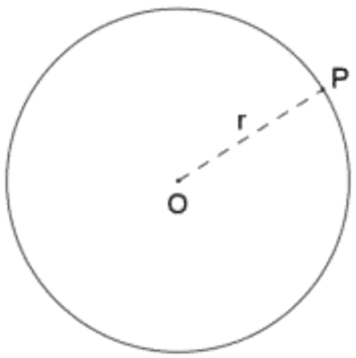
CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

1. ELEMENTOS E DEFINIÇÕES

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a um ponto fixo (centro) são iguais a uma constante (raio).



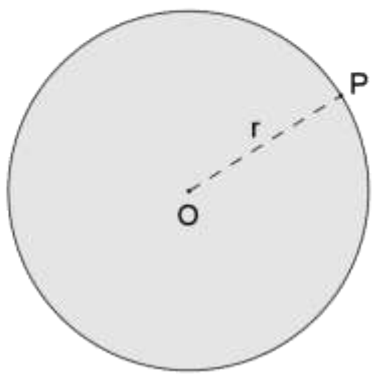
O ponto P pertence à circunferência de centro O e raio r

$$\Updownarrow$$

$$\overline{OP} = r$$

Três pontos não colineares determinam uma única circunferência.

Círculo (disco) é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a um ponto fixo (centro) são menores ou iguais a uma constante (raio).



O ponto P pertence ao círculo de centro O e raio r

$$\Updownarrow$$

$$\overline{OP} \leq r$$

Nota: Muitas vezes as expressões circunferência e círculo são usadas indistintamente, ora para representar a borda da figura, ora para representar a união da borda e do interior.

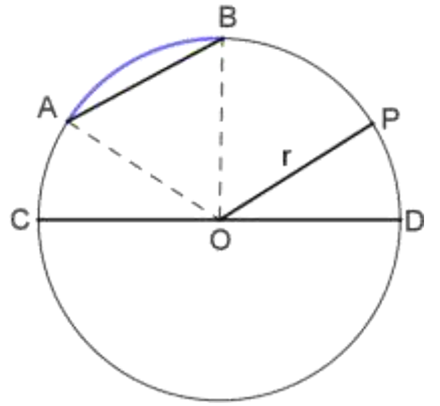
Corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

Raio de uma circunferência é um segmento que possui uma extremidade no centro e outra sobre a circunferência e que tem medida constante.

Diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo seu centro. O diâmetro é a maior corda da circunferência e sua medida é o dobro da do raio.

Dados dois pontos A e B sobre uma circunferência de centro O, o arco de circunferência AB é a reunião dos pontos A e B com o conjunto de todos os pontos sobre a circunferência interiores ao ângulo $A\hat{O}B$. Na verdade, dois pontos sobre uma circunferência determinam dois arcos, em geral denominados arco menor AB e arco maior . AB ..

Seja a circunferência λ de centro O e raio r, então:



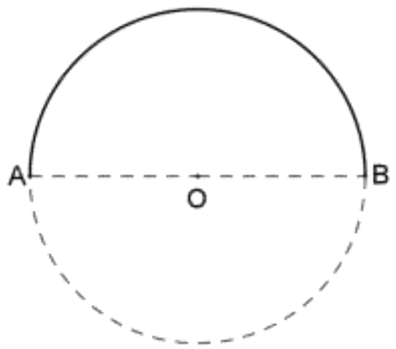
$\overline{OP} = r$ **é um raio**

$\overline{CD} = 2r$ **é um diâmetro**

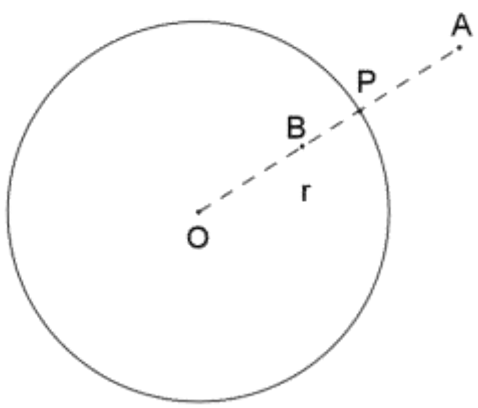
$\overline{AB}$ **é uma corda**

$\overset{\frown}{AB}_{menor}$ **é um arco de circunferência**

Semicircunferência é um arco de circunferência determinado por pontos diametralmente opostos.



2. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA



O ponto B pertence ao **interior** da circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância desse ponto ao centro da circunferência é menor do que o raio: $\overline{OB} < r$.

O ponto P ***pertence*** à circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância desse ponto ao centro da circunferência é igual ao raio: $\overline{OP} = r$.

O ponto A pertence ao **exterior** da circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância desse ponto ao centro da circunferência é maior do que o raio: $\overline{OA} > r$.

Exemplo: Seja uma circunferência de centro O e raio $r = 3$. Identifique a posição relativa entre os pontos A, B, C e a circunferência, sabendo-se que $\overline{OA} = 2$, $\overline{OB} = 3$ e $\overline{OC} = 4$.

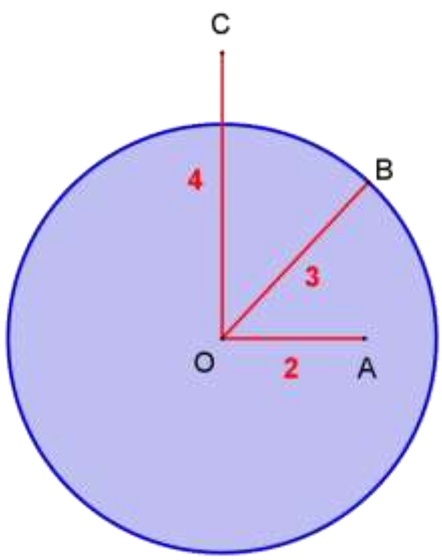
RESOLUÇÃO:

O ponto A é interior à circunferência, pois $\overline{OA} = 2 < 3 = r$.

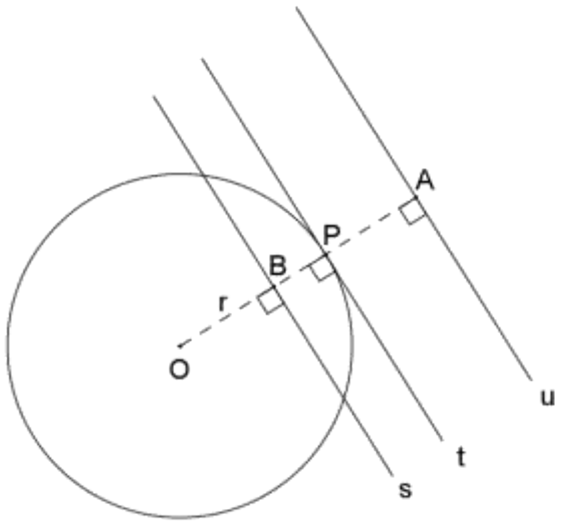
O ponto B pertence à circunferência, pois $\overline{OB} = 3 = r$.

O ponto C é exterior à circunferência, pois $\overline{OC} = 4 > 3 = r$.

Veja a figura a seguir, na qual esses pontos estão representados.



3. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA



A reta s é **secante** à circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta é menor do que o raio: $d(O,s)<r$.

A reta t é **tangente** à circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta é igual ao raio: $d(O,t)=r$.

A reta u é **exterior** à circunferência de centro O e raio r se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta é maior do que o raio: $d(O,u)>r$.

Exemplo: Seja uma circunferência de centro O e raio $R=3$. Identifique a posição relativa entre as retas r, t, s e a circunferência, sabendo-se que as distâncias entre as retas e o centro da circunferência são, respectivamente, $d(O,r)=2$, $d(O,t)=3$ e $d(O,s)=4$.

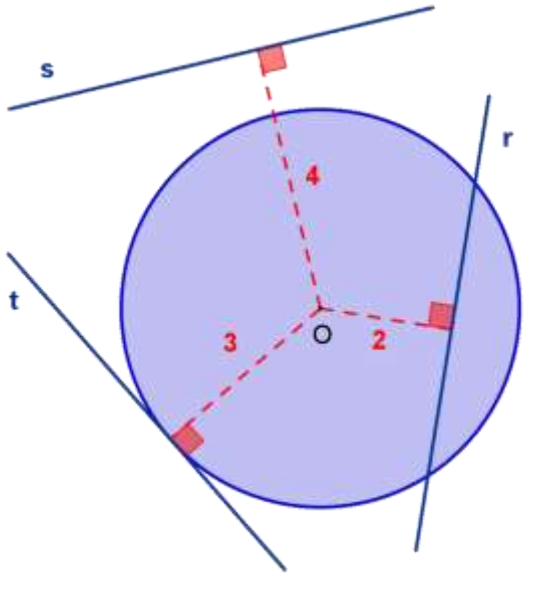
RESOLUÇÃO:

A reta r é secante à circunferência, pois $d(O,r)=2<3=R$.

A reta t é tangente à circunferência, pois $d(O,t)=3=R$.

A reta s é exterior à circunferência, pois $d(O,s)=4>3=r$.

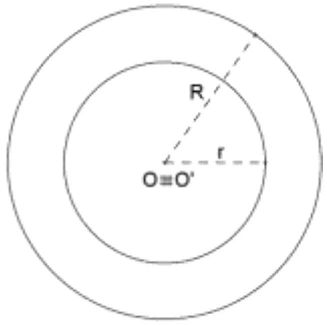
Veja a figura a seguir, na qual essas retas estão representadas.



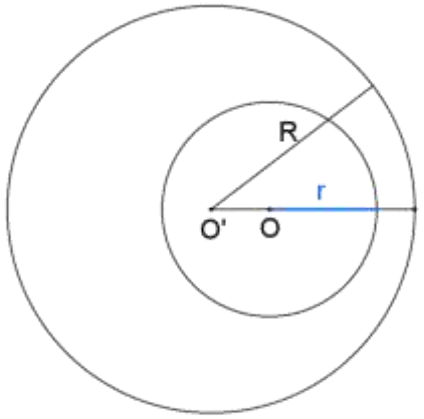
4. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE CIRCUNFERÊNCIAS

Sejam duas circunferências de centros O e O', e raios r e R, respectivamente.

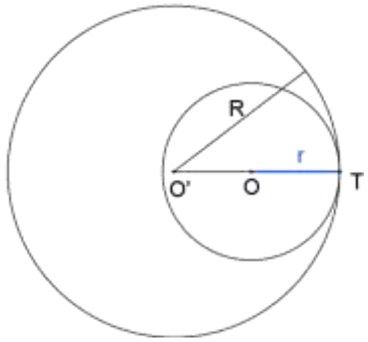
As circunferências são **CONCÊNTRICAS** se, e somente se, a distâncias entre seus centros é nula: $d(O,O')=0$.



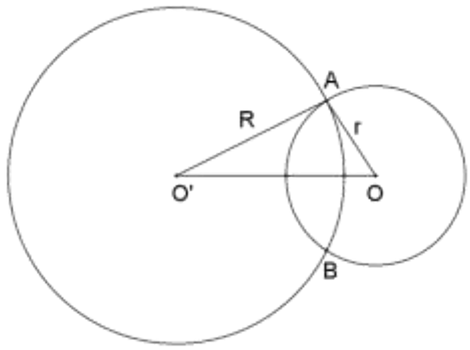
As circunferências são **INTERIORES** se, e somente se, a distância entre seus centros é maior do que zero e menor do que o módulo da diferença entre seus raios: $0<d(O,O')<|R-r|$.



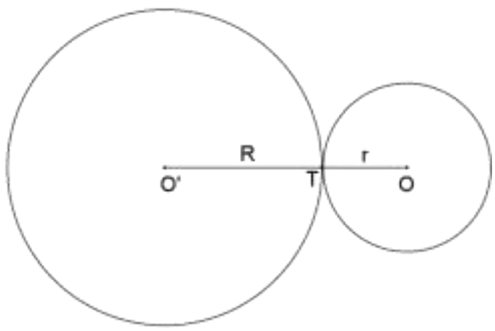
As circunferências são **TANGENTES INTERIORES** se, e somente se, a distância entre seus centros é igual ao módulo da diferença entre seus raios: $d(O,O')=|R-r|$.



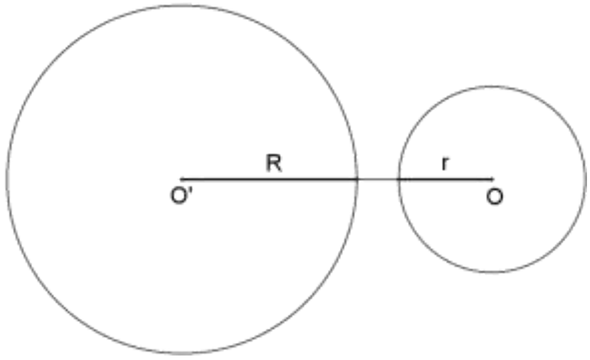
As circunferências são **SECANTES** se, e somente se, a distância entre seus centros é maior do que o módulo da diferença entre seus raios e menor do que a soma dos raios: $|R-r|<d(O,O')<R+r$.



As circunferências são **TANGENTES EXTERIORES** se, e somente se, a distância entre seus centros é igual à soma dos raios: $d(O,O')=R+r$.



As circunferências são **EXTERIORES** se, e somente se, a distância entre seus centros é maior do que a soma dos raios: $d(O,O') > R + r$.



Posição relativa entre as circunferências	Distância entre seus centros
CONCÊNTRICAS	$d(O,O') = 0$
INTERIORES	$0 < d(O,O') < \|R - r\|$
TANGENTES INTERIORES	$d(O,O') = \|R - r\|$
SECANTES	$\|R - r\| < d(O,O') < R + r$
TANGENTES EXTERIORES	$d(O,O') = R + r$
EXTERIORES	$d(O,O') > R + r.$

Exemplo: Sejam duas circunferências λ_1 e λ_2 de raios $R_1 = 2$ e $R_2 = 4$ e centros O_1 e O_2, respectivamente. Identifique a posição relativa entre as circunferências em cada um dos casos a seguir:

a) $\overline{O_1O_2} = 1$

b) $\overline{O_1O_2} = 2$

c) $\overline{O_1O_2} = 3$

d) $\overline{O_1O_2} = 6$

e) $\overline{O_1O_2} = 9$

RESOLUÇÃO:

a) As circunferências são interiores, pois $\overline{O_1O_2} = 1 < 2 = R_2 - R_1$.

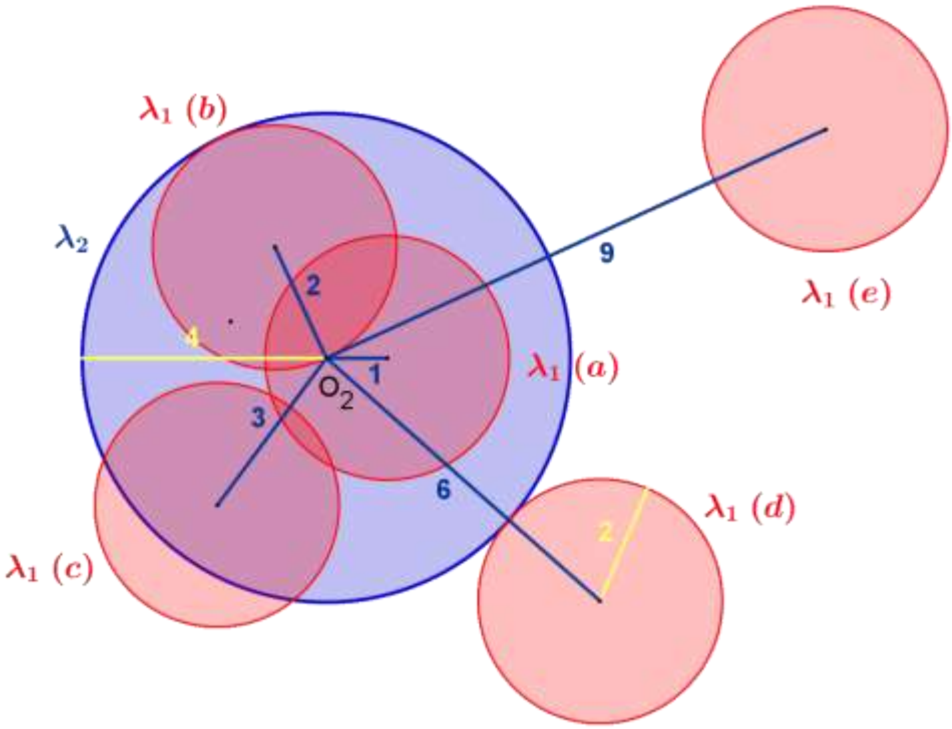
b) As circunferências são tangentes interiores, pois $\overline{O_1O_2} = 1 = 2 = R_2 - R_1$.

c) As circunferências são secantes, pois $R_2 - R_1 = 2 < \overline{O_1O_2} = 3 < 6 = R_1 + R_2$.

d) As circunferências são tangentes exteriores, pois $\overline{O_1O_2} = 6 = R_1 + R_2$.

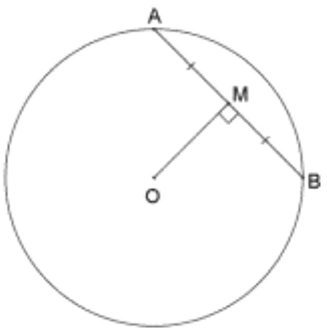
e) As circunferências são exteriores, pois $\overline{O_1O_2} = 9 > 6 = R_1 + R_2$.

Veja a figura a seguir onde foi feita uma representação esquemática das cinco situações.



5. PROPRIEDADE DA SECANTE

Seja uma reta s secante a uma circunferência λ de centro O e raio r, que não passa por O e que intercepta a circunferência nos pontos A e B distintos. O ponto M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$ se, e somente se, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$.



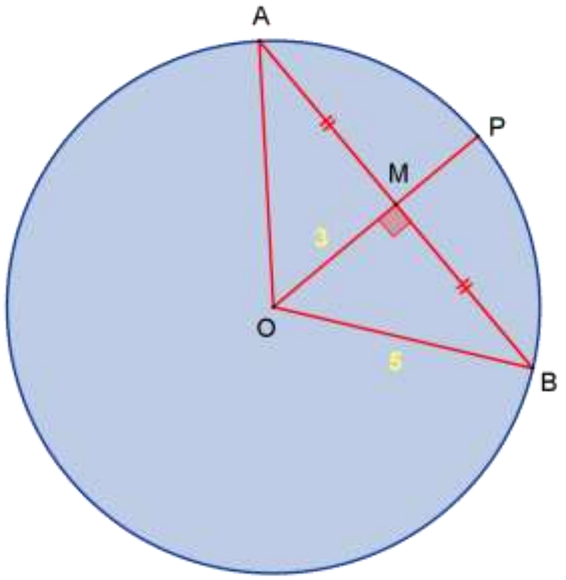
Demonstração:

Supondo que o ponto M seja ponto médio de $\overline{AB}$, então $\Delta OMA \equiv \Delta OMB\,(\text{L.L.L.})$, o que implica $A\hat{M}O = B\hat{M}O = 90^\circ$.

Supondo que $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, então $\Delta OMA \equiv \Delta OMB$ ($\overline{OM}$ comum e $\overline{OA} = \overline{OB}$, caso especial de congruência para triângulos retângulos), o que implica $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Exemplo: Calcule o comprimento de uma corda que dista 3 cm do centro de uma circunferência de raio 5 cm.

RESOLUÇÃO:



Seja $\overline{AB}$ a corda em questão e $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, então $\overline{OM} = 3$ e M é ponto médio de $\overline{AB}$, ou seja, $\overline{AM} = \overline{MB}$.

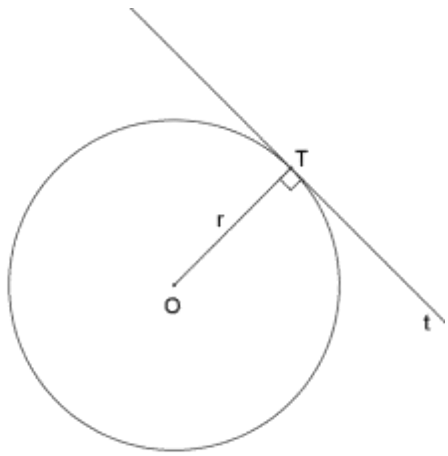
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OMB, temos:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2$$
$$\Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + \overline{BM}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = 25 - 9 = 16$$
$$\Leftrightarrow \overline{BM} = 4$$

Logo, $\overline{AM} = \overline{BM} = 4$ e $\overline{AB} = 8\text{ cm}$

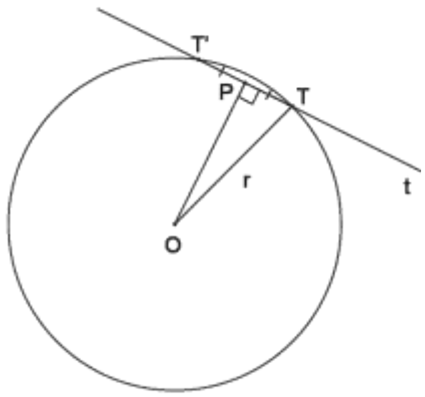
6. PROPRIEDADE DA TANGENTE

Uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, é perpendicular ao raio no ponto de tangência.



Demonstração:

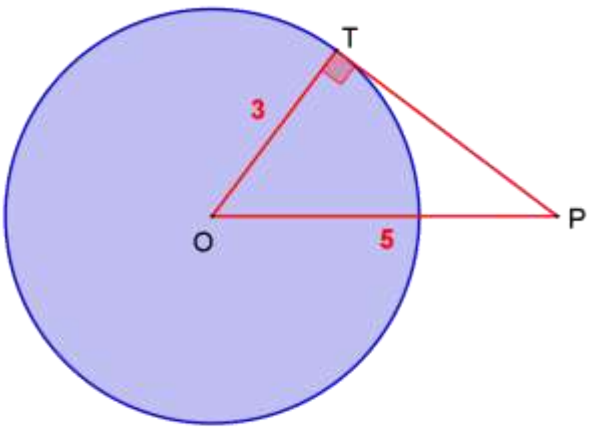
Seja a reta $t \perp \overline{OT}$, onde T é um ponto sobre a circunferência λ de centro O e raio r. Supondo, por absurdo, que a reta t intercepta a circunferência λ em um segundo ponto P. O triângulo OTP é retângulo de hipotenusa OP e, portanto, $OP > OT = r$, o que implica que P é exterior à circunferência (ABSURDO). Logo, a reta intercepta a circunferência em um único ponto, ou seja, é tangente à circunferência.



Seja t uma reta tangente à circunferência λ em um ponto T. Supondo, por absurdo, que $\overline{OT}$ é oblíqua à reta t. Seja P a projeção de O sobre a reta t, então P é distinto de T. Seja $T' \in t$ o simétrico de T em relação a P, então $OT = OT' = r$, o que implica que $T' \in \lambda$ (ABSURDO). Logo, $\overline{OT} \perp t$.

Exemplo: Calcule o comprimento do segmento tangente a uma circunferência de raio $3\,\text{cm}$ traçado a partir de um ponto que dista $5\,\text{cm}$ do centro dessa circunferência.

RESOLUÇÃO:



Seja $\overline{PT}$ um segmento de reta tangente à circunferência, então $\overline{PT} \perp \overline{OT}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OPT, temos:

$$\overline{PT}^2 + \overline{OT}^2 = \overline{OP}^2$$

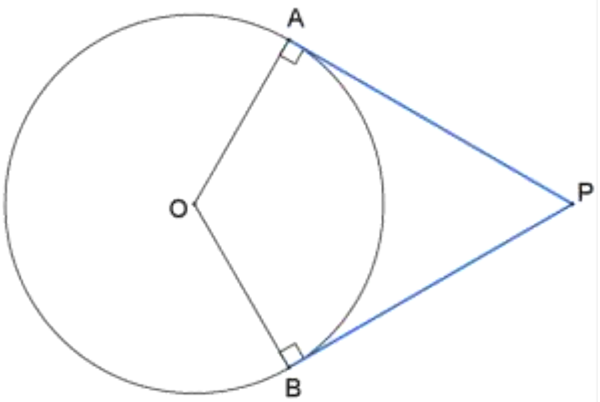
$$\Leftrightarrow \overline{PT}^2 + 3^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{PT}^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow \overline{PT} = 4$$

7. SEGMENTOS TANGENTES

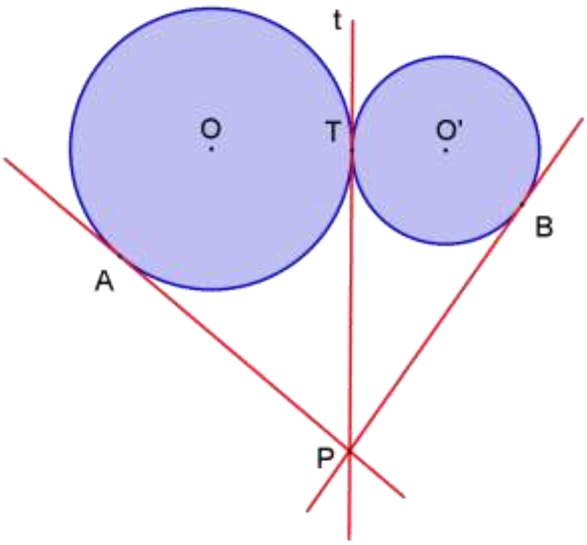
Os segmentos tangentes a uma circunferência, traçados por um ponto exterior a ela, são congruentes.



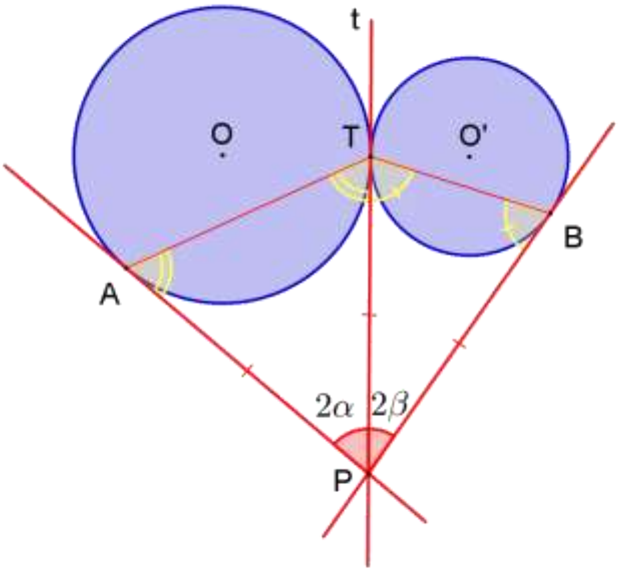
Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}=90^\circ \\ \overline{OA}=\overline{OB} \\ \overline{OP}\ \text{comum}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAP \equiv \Delta OBP \text{ (caso especial de congruência de triângulos retângulos) } \Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}$$

Exemplo: As circunferências da figura são tangentes externamente em T. As semirretas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência e a reta t é a tangente comum. Determine a medida do ângulo $A\hat{T}B$, sabendo que $A\hat{P}B = 80^\circ$.



RESOLUÇÃO:



Sejam $A\hat{P}T = 2\alpha$ e $B\hat{P}T = 2\beta$, então $A\hat{P}B = 2\alpha + 2\beta = 80^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 40^\circ$.

Sabemos que $\overline{PA} = \overline{PT} = \overline{PB}$, então os triângulos APT e BPT são isósceles. Assim, temos:

$P\hat{A}T = P\hat{T}A = 90^\circ - \alpha$

$P\hat{B}T = P\hat{T}B = 90^\circ - \beta$

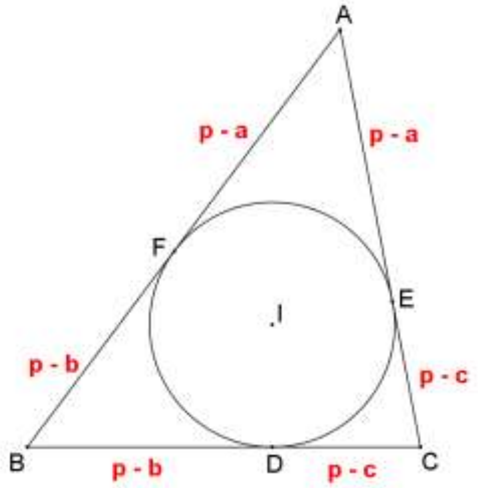
Portanto,

$$A\hat{T}B = P\hat{T}A + P\hat{T}B = (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta) = 180^\circ - (\alpha + \beta) =$$
$$= 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

7.1. SEGMENTOS DETERMINADOS PELO CÍRCULO INSCRITO

Os segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre os lados de um triângulo têm medidas iguais ao semiperímetro menos o lado oposto.

No triângulo ABC a seguir, temos: $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ e $2p=a+b+c$. Os segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre os lados são $\overline{AE}=\overline{AF}=p-a$, $\overline{BD}=\overline{BF}=p-b$ e $\overline{CD}=\overline{CE}=p-c$.



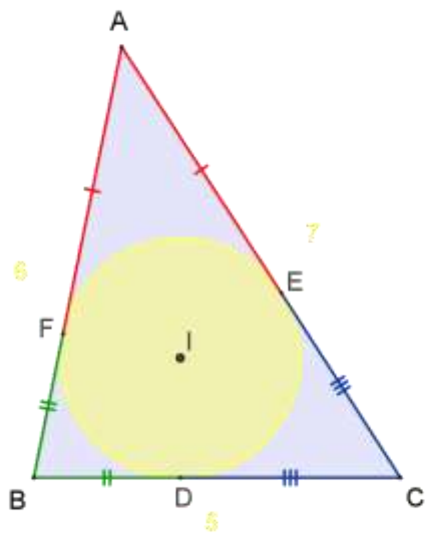
Demonstração:

Sejam $\overline{AF}=\overline{AE}=x$, $\overline{BD}=\overline{BF}=y$, $\overline{CD}=\overline{CE}=z$, então

$$\begin{cases}\overline{BC}=y+z=a\\ \overline{AC}=x+z=b\\ \overline{AB}=x+y=c\end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z)=a+b+c=2p \Leftrightarrow x+y+z=p \Rightarrow \begin{cases}x=(x+y+z)-(y+z)=p-a\\ y=(x+y+z)-(x+z)=p-b\\ z=(x+y+z)-(x+y)=p-c\end{cases}$$

Exemplo: Seja um triângulo de lados 5, 6 e 7, calcule os comprimentos dos segmentos determinados pelo círculo inscrito ao triângulo sobre seus lados.

RESOLUÇÃO:



O semiperímetro do triângulo é $p=\frac{5+6+7}{2}=9$.

As medidas dos segmentos determinados pelo círculo inscrito são

$\overline{AE}=\overline{AF}=p-a=9-5=4$

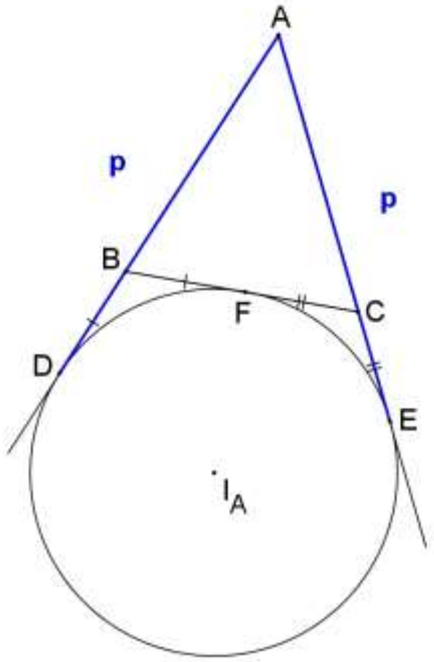
$\overline{BD}=\overline{BF}=p-b=9-7=2$

$\overline{CD}=\overline{CE}=9-6=3$

7.2. SEGMENTOS DETERMINADOS PELO CÍRCULO EX-INSCRITO

A medida dos segmentos determinados por um círculo ex-inscrito sobre os prolongamentos dos lados adjacentes ao vértice oposto de um triângulo é igual ao semiperímetro do triângulo.

Seja $2p$ o perímetro do triângulo ABC a seguir:



$$\boxed{\overline{AD} = \overline{AE} = p}$$

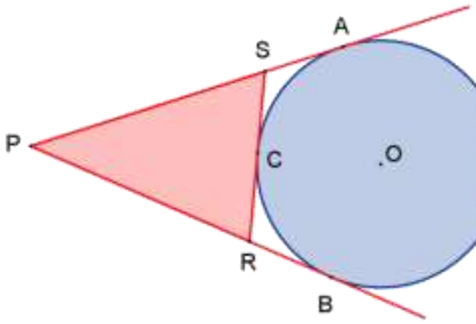
Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BD} = \overline{BF} \\ \overline{CE} = \overline{CF}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{CF} = \overline{BD} + \overline{CE}$$

$$\overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2p$$

$$\overline{AD} = \overline{AE} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AE} = p$$

Exemplo: Calcule o perímetro do triângulo PRS da figura, sabendo que $\overline{PA} = 10\,\text{cm}$.



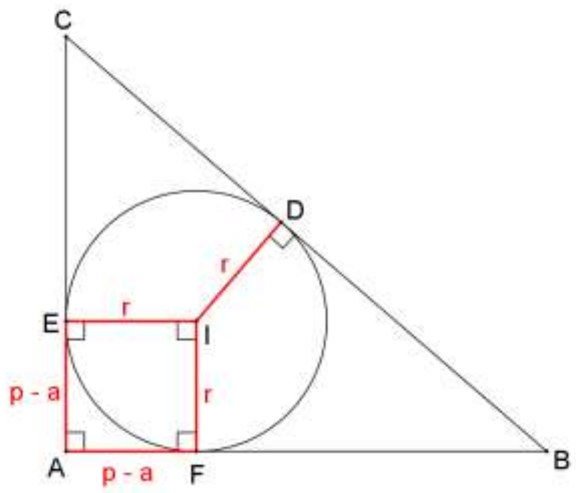
RESOLUÇÃO:

Sabemos que $\overline{PA} = \overline{PB} = 2p_{PRS} \Rightarrow 2p_{PRS} = 10 \text{ cm}$.

7.3. RAIO DOS CÍRCULOS INSCRITO E EX-INSCRITOS AO TRIÂNGULO RETÂNGULO

O raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo é igual ao semiperímetro menos a hipotenusa.

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC} = a$ e semiperímetro p, então o raio do círculo inscrito é $r = p - a$.



$$\boxed{r = p - a}$$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{IE} \perp \overline{AC} \ \wedge \ \overline{IF} \perp \overline{AB} \\ \overline{IE} = \overline{IF} = r \\ B\hat{A}C = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \#IEAF \text{ é um quadrado} \Rightarrow r = \overline{AE} = \overline{AF} = p - a$$

Exemplo: Calcule o perímetro de um triângulo retângulo de hipotenusa 5 cm e raio do círculo inscrito 1 cm.

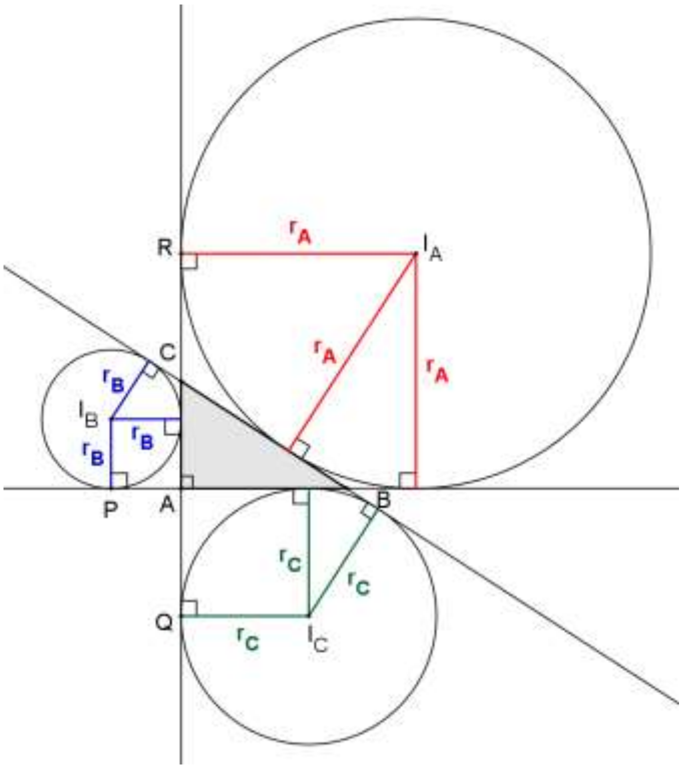
RESOLUÇÃO:

Sabemos que o raio r do círculo inscrito em um triângulo retângulo de semiperímetro p e hipotenusa a é dado por $r = p - a$.

Substituindo os valores dados no enunciado, temos: $1 = p - 5 \Leftrightarrow p = 6$.

Logo, o perímetro do triângulo retângulo é $2p = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}$.

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}=a$, catetos $\overline{AC}=b$ e $\overline{AB}=c$, e perímetro $2p=a+b+c$, então os raios dos círculos ex-inscritos opostos aos vértices A, B e C, respectivamente, são dados por $r_A=p$, $r_B=p-c$ e $r_C=p-b$.



$r_A=p$

$r_B=p-c$

$r_C=p-b$

Demonstração:

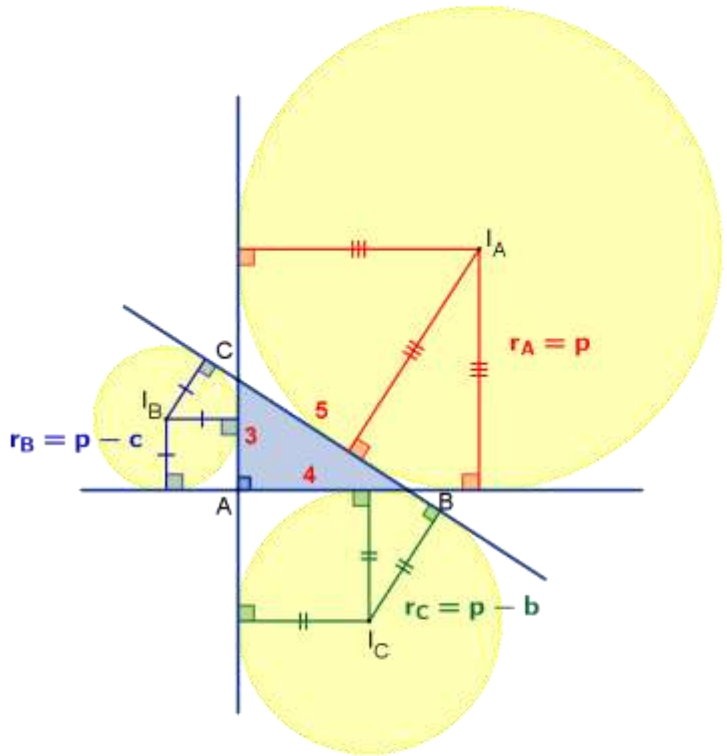
$r_A=\overline{AR}=p$

$r_B=\overline{AP}=\overline{BP}-\overline{AB}=p-c$

$r_C=\overline{AQ}=\overline{CQ}-\overline{AC}=p-b$

Exemplo: Calcule os raios dos círculos ex-inscritos a um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.

RESOLUÇÃO:



O semiperímetro do triângulo retângulo é $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$.

Os raios dos círculos ex-inscritos são dados por:

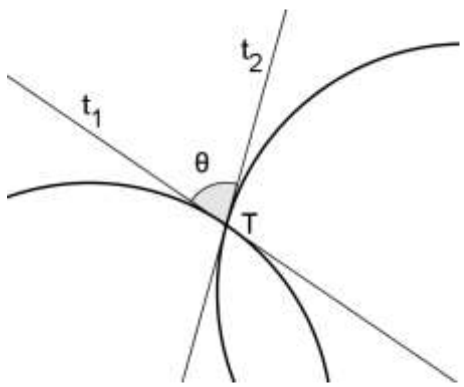
$r_A = p = 6$

$r_B = p - c = 6 - 4 = 2$

$r_C = p - b = 6 - 3 = 3$

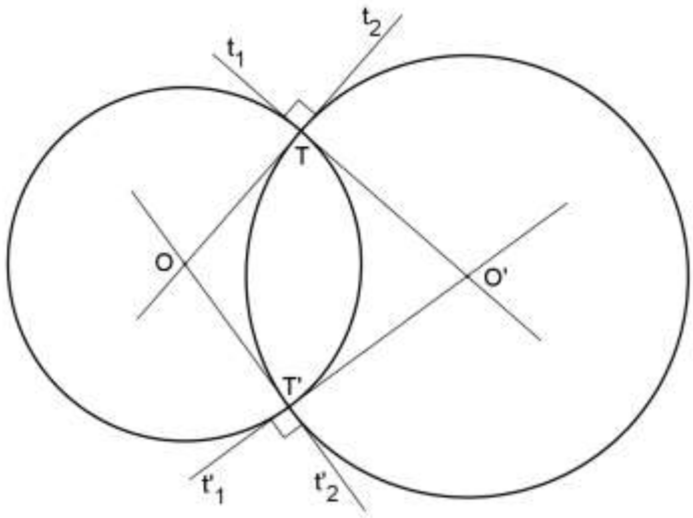
8. ÂNGULO ENTRE DUAS CURVAS NO PONTO

O ângulo entre duas curvas é o ângulo entre as retas tangentes às curvas nos pontos de contato.



Duas curvas são ditas **ortogonais** se o ângulo entre elas é reto.

Duas circunferências são ortogonais se, e somente se, a reta tangente a uma delas em um dos pontos de contato passa pelo centro da outra.

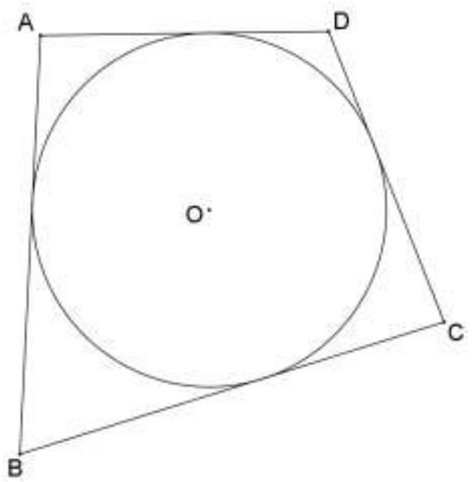


Demonstração:

Basta lembrar que a reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

9. QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITÍVEL

Teorema de Pitot: Um quadrilátero convexo é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.



$\# ABCD$ **é circunscritível**

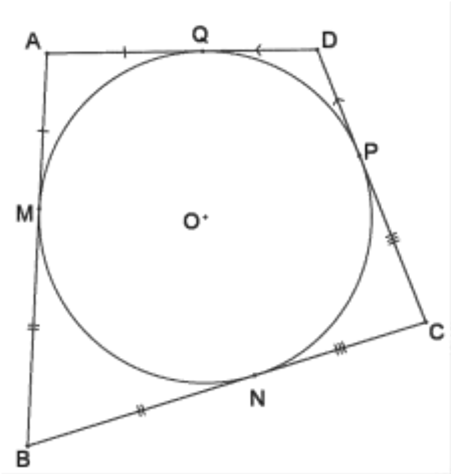
$$\Updownarrow$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

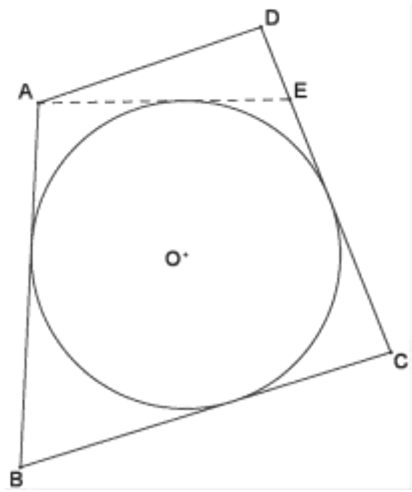
Demonstração:

Supondo que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível e sejam M, N, P e Q os pontos de tangência dos lados do quadrilátero com a circunferência, então $\overline{AM} = \overline{AQ}$, $\overline{BM} = \overline{BN}$, $\overline{CN} = \overline{CP}$ e $\overline{DP} = \overline{DQ}$.

Logo, $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AQ} + \overline{DQ} + \overline{BN} + \overline{CN} = \overline{AM} + \overline{DP} + \overline{BM} + \overline{CP} = \overline{AB} + \overline{CP}$



Supondo que o quadrilátero $ABCD$ é tal que $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$. Seja λ a circunferência tangente aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ do $\#ABCD$ e supondo, por absurdo, que λ não é tangente ao lado $\overline{AD}$.

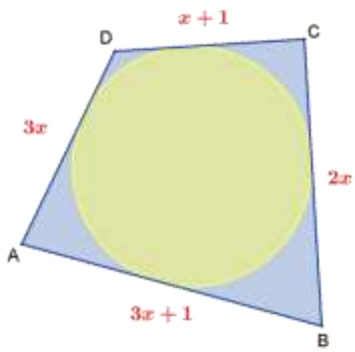


Seja $\overline{AE}$ a outra tangente a λ por A com $E\in\overline{CD}$, então o $\#ABCE$ é circunscritível, o que implica $\overline{AB}+\overline{CE}=\overline{BC}+\overline{AE}$. Da hipótese, temos:

$$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}\Leftrightarrow\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CE}\pm\overline{DE}=\left(\overline{BC}+\overline{AE}\right)\pm\overline{DE}\Leftrightarrow\overline{AD}=\overline{AE}\pm\overline{DE}$$

Isso contraria a desigualdade triangular no ΔADE (ABSURDO). Logo, o $\#ABCD$ é circunscritível.

Exemplo: Determine o perímetro do quadrilátero circunscritível ABCD da figura.



RESOLUÇÃO:

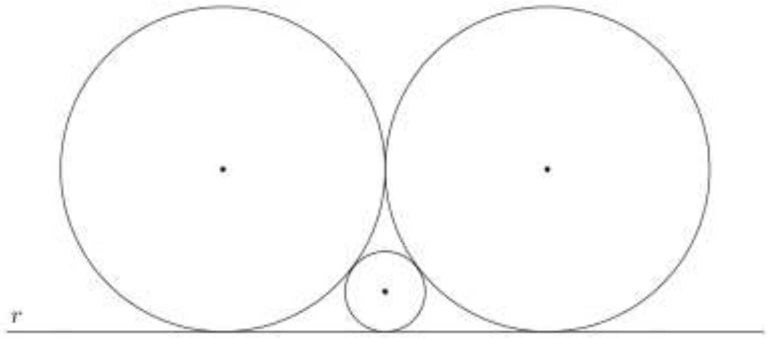
Como o quadrilátero ABCD é circunscritível, então as somas dos lados opostos são iguais. Assim, temos:

$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD} \Leftrightarrow 3x+2x=(3x+1)+(x+1) \Leftrightarrow x=2$.

Portanto, o perímetro do quadrilátero é $2p_{ABCD}=(3x+1)+2x+(x+1)+3x=9x+2=9\cdot 2+2=20$.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EFOMM 2005) Tangenciando a reta r encontramos três circunferências tangentes entre si. Determine a medida do raio da circunferência menor, sabendo que as outras duas têm raios de medida igual a $5\,\text{cm}$.



a) 1,25

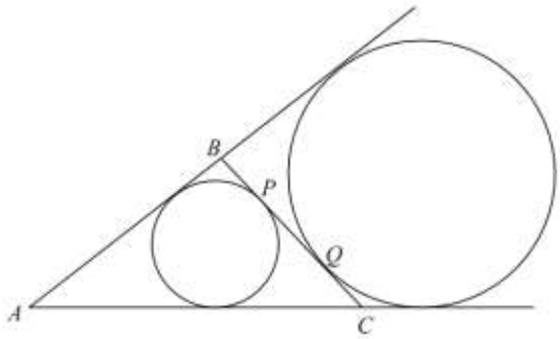
b) 1,50

c) 1,75

d) 1,85

e) 2

2. Na figura abaixo, $AB = 21$ e $AC = 33$. A distância entre os pontos de tangência P e Q é:



a) 6

b) 8

c) 9

d) 10

e) 12

3. (EEAr 2000) Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência C_1 e inscrito na circunferência C_2. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é $K\text{ cm}$, então, a soma dos comprimentos dessas duas circunferências, em cm, é

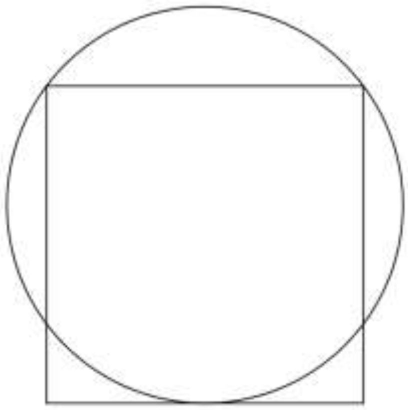
a) $\frac{4K\pi}{3}$

b) $\frac{2K\pi}{3}$

c) $K\pi$

d) $2K\pi$

4. O quadrado mostrado possui lados de medida 2 unidades. Qual o raio do círculo?



a) 1

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\sqrt{\frac{5}{4}}$

e) $\sqrt{\frac{4}{5}}$

5. (1981) Duas circunferências são tangentes exteriores em P. Uma reta tangencia essas circunferências nos pontos M e N respectivamente. Se $\overline{PM}=4\text{ cm}$ e $\overline{PN}=2\text{ cm}$, o produto dos raios dessas circunferências dá:

a) 8 cm^2

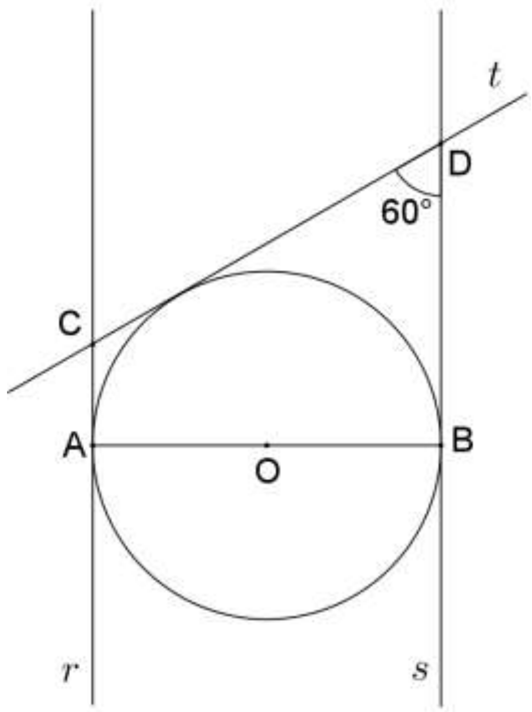
b) 4 cm^2

c) 5 cm^2

d) 10 cm^2

e) 9 cm^2

6. (CN 1986) Na figura abaixo, as retas r, s e t são tangentes à circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. O segmento $\overline{AC}$ mede 4 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{CD}$ é:



a) 16

b) 14

c) 12

d) 8

e) 20

7. (CN 1991) Sejam r_1, r_2 e d, respectivamente, os raios e a distância entre os centros de duas circunferências exteriores C_1 e C_2. Se $d = x^2 + 4$, $r_1 = 2x - 3$ e $r_2 = x + 2$, logo o conjunto de todos os valores de x é:

a) 0

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$

c) $\mathbb{R}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \dfrac{3}{2}\right\}$

8. (CN 1994) Os raios de dois círculos medem 15 m e 20 m, e a distância dos seus centros é 35 m. O segmento da tangente comum, compreendido entre os pontos de contato, mede em metros :

a) $5\sqrt{3}$

b) $10\sqrt{3}$

c) $12\sqrt{3}$

d) $15\sqrt{3}$

e) $20\sqrt{3}$

9. (CN 1996) Sejam C_1 e C_2 dois círculos ortogonais de raios R_1 e R_2. A distância entre os centros é π. A soma das áreas dos círculos é igual a:

a) $\dfrac{3\pi^2}{2}$.

b) $\dfrac{\pi^2}{4}$.

c) π^2.

d) π^3.

e) $\dfrac{5\pi^2}{4}$.

10. (CN 1999) A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos segmentos tangentes aos dois círculos.

a) $38{,}5$

b) 39

c) $39{,}5$

d) 40

e) $40{,}5$

11. (CN 2003) Se os lados de um triângulo medem, respectivamente, $3x$, $4x$ e $5x$, em que x é um número inteiro positivo, então a distância entre os centros dos círculos inscritos e circunscritos a esse triângulo corresponde a

a) $\frac{5x}{4}$

b) $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)x}{2}$

c) $x\sqrt{2}$

d) $\frac{x\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{5x}{6}$

12. (CN 2004) Considere uma circunferência λ de raio R e diâmetros perpendiculares AB e CD. O raio da menor circunferência tangente interiormente à λ e à corda AC, no seu ponto médio, é dado por

a) $\frac{R}{4}$

b) $\frac{R\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

d) $\frac{R(\sqrt{2}+1)}{4}$

e) $\frac{R}{6}$

13. (CN 2005) Dado um triângulo retângulo, seja $\underline{P}$ o ponto do plano do triângulo equidistante dos vértices. As distâncias de $\underline{P}$ aos catetos do triangulo são $\underline{K}$ e $\underline{L}$. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por:

a) $\frac{K+L}{4}$

b) $2K+L$

c) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$

e) $\sqrt{K^2+L^2}$

14. (CN 2007) De um ponto P exterior a um círculo de raio 6, traçam-se secantes PXY $(PX<PY)$, X e Y pontos variantes pertencentes à circunferência desse círculo. Os pontos médios das cordas XY descrevem um arco de circunferência de raio R. Assim sendo, qual será o valor de R, sabendo-se que a tangente PT ao círculo mede 8?

a) 5.

b) 6.

c) $4\sqrt{2}$.

d) $4\sqrt{3}$.

e) 10.

15. (CN 2008) Um hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se $1,7$ para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?

a) $54,4$

b) $47,6$

c) $40,8$

d) $34,0$

e) $30,6$

16. (CN 2009) Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre (use $\pi = 3,14$)

a) vinte e um e vinte e dois.

b) vinte e dois e vinte e três.

c) vinte e três e vinte e quatro.

d) vinte e quatro e vinte e cinco.

e) vinte e cinco e vinte e seis.

17. (CN 2010) Num quadrado ABCD de lado 6 cm, traça-se a circunferência K de centro em A e raio 4 cm. Qual é medida, em cm, do raio da circunferência tangente exterior a K e tangente ao lado BC no ponto C?

a) 2,4

b) 2,5

c) 2,6

d) 2,7

e) 2,8

18. (CN 2011) $ABCD$ é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB e com uma das extremidades em A e tangente externamente à K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será

a) $\frac{5L}{6}$

b) $\frac{4L}{5}$

c) $\frac{2L}{3}$

d) $\frac{3L}{5}$

e) $\frac{L}{3}$

19. (AFA 2007) Um triângulo retângulo está circunscrito a um círculo de raio $15\,m$ e inscrito em um círculo de raio $37{,}5\,m$. A área desse triângulo, em m^2, mede

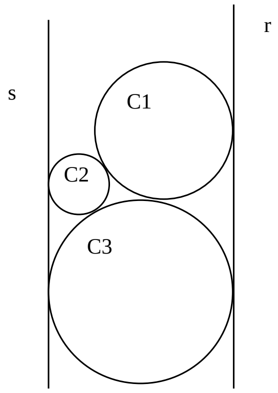
a) 350

b) 750

c) 1050

d) 1350

20. A figura abaixo mostra duas retas paralelas r e s. A reta r é tangente às circunferências C1 e C3, a reta s é tangente às circunferências C2 e C3 e as circunferências tocam-se como também mostra a figura.



As circunferências C1 e C2 têm raios a e b, respectivamente. Qual é o raio da circunferência C3?

a) $2\sqrt{a^2+b^2}$

b) $a+b$

c) $2\sqrt{ab}$

d) $\frac{4ab}{a+b}$

e) $2b-a$

21. (ITA 2012) Um triângulo ABC tem lados com medidas $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$, $b=1\text{cm}$ e $c=\frac{1}{2}\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

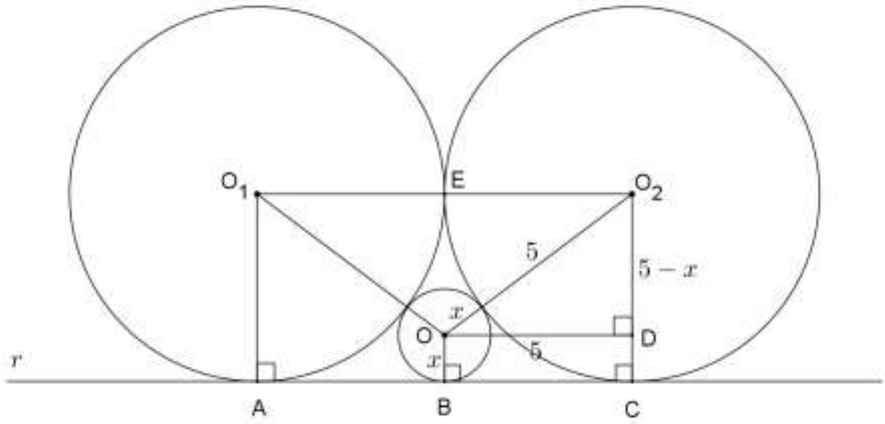
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$.

GABARITO

1.

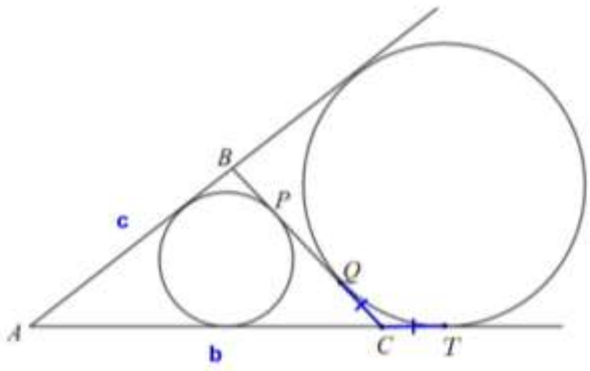


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ODO_2, temos:

$(5+x)^2 = 5^2 + (5-x)^2 \Leftrightarrow 25 + 10x + x^2 = 25 + 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 20x = 25 \Leftrightarrow x = 1,25$

RESPOSTA: A

2.



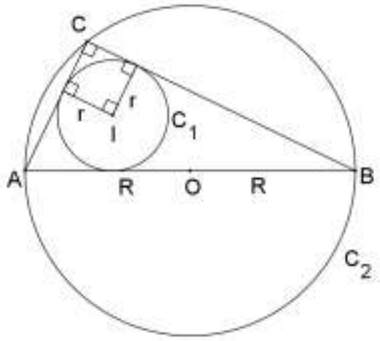
Seja T o ponto de tangência da circunferência maior com a reta AC. Sabemos que $AT = p$ (semiperímetro do triângulo ABC). Portanto, $CQ = CT = p - b$.

Sabemos também que $CP = p - c$.

Logo, $PQ = CP - CQ = (p - c) - (p - b) = b - c = 33 - 21 = 12$.

RESPOSTA: D

3.



$AC + BC = K$

$r = p - AB = \dfrac{K + AB}{2} - AB = \dfrac{K}{2} - \dfrac{AB}{2}$

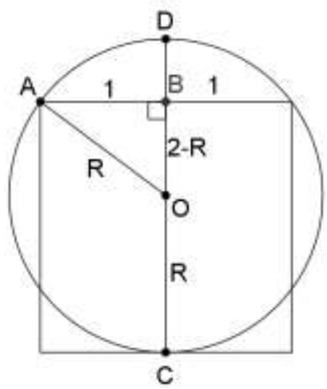
$2R = AB \Leftrightarrow R = \dfrac{AB}{2}$

A soma dos comprimentos das duas circunferências é

$2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R + r) = 2\pi\left[\dfrac{AB}{2} + \left(\dfrac{K}{2} - \dfrac{AB}{2}\right)\right] = 2\pi \cdot \dfrac{K}{2} = K\pi$.

RESPOSTA: C

4.



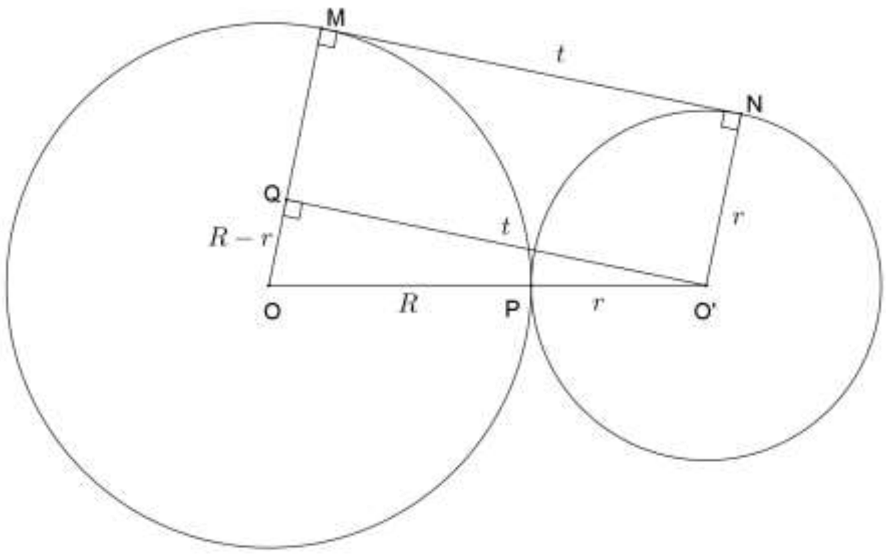
Seja O o centro da circunferência.

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABO: $1^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Leftrightarrow 1 + 4 - 4R + \cancel{R^2} = \cancel{R^2} \Leftrightarrow R = \dfrac{5}{4}$

REFERÊNCIA: Gardiner, T. – Senior Mathematical Challenge – The UK National Mathematics Contest 1988-1996 – pg. 31.

RESPOSTA: C

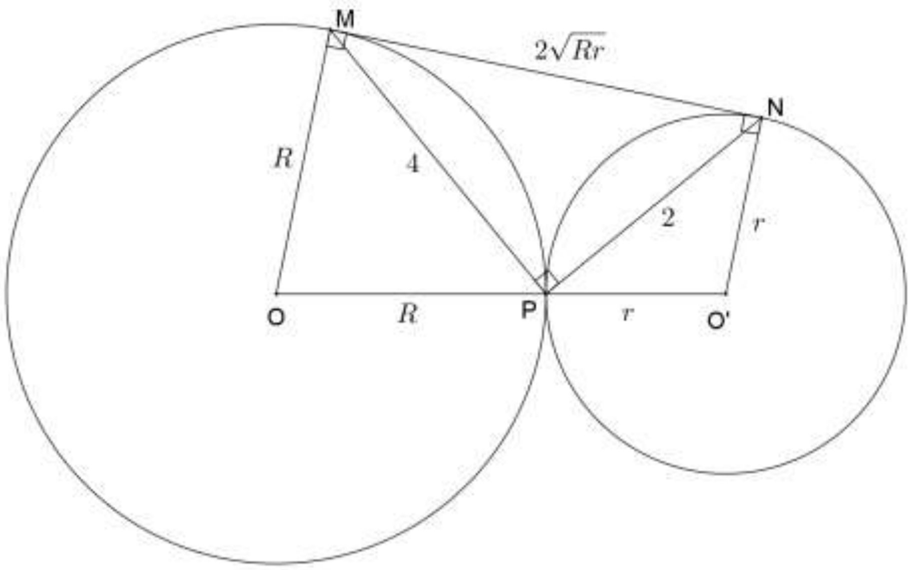
5. Vamos inicialmente obter uma expressão para o cálculo da tangente comum externa t a duas circunferências tangentes exteriores de raios R e r.



Seja $O'Q \perp OM$, então o quadrilátero $O'QMN$ é um retângulo e $MQ = r$, o que implica $QO = R - r$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OQO', temos:

$OO'^2 = O'Q^2 + QO^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 = t^2 + (R-r)^2 \Leftrightarrow t^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr \Leftrightarrow t = 2\sqrt{Rr}$.



Seja $P\hat{O}M = 2\theta$, então, como $O'N \| OM$, temos $P\hat{O}'N = 180^\circ - 2\theta$.

Como os triângulos OMP e $O'NP$ são isósceles, então $O\hat{P}M = O\hat{M}P = \dfrac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta$ e $O'\hat{P}N = O'\hat{N}P = \dfrac{180^\circ - (180^\circ - 2\theta)}{2} = \theta$. Assim, temos:

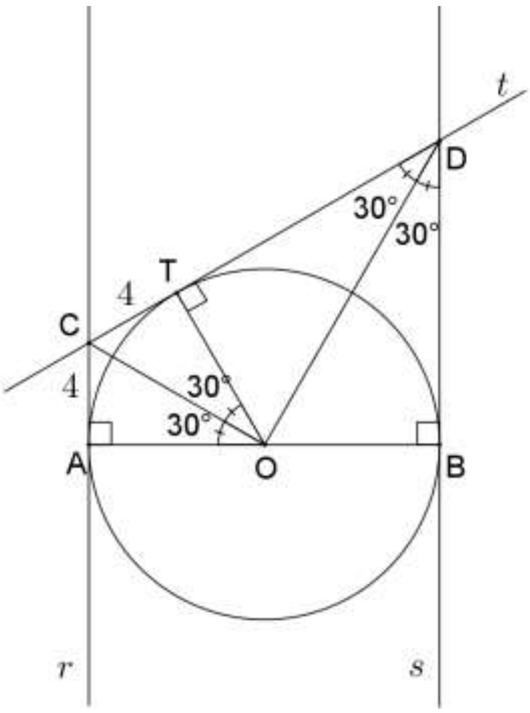
$O\hat{P}M + M\hat{P}N + N\hat{P}O' = 180^\circ \Leftrightarrow (90^\circ - \theta) + M\hat{P}N + \theta = 180^\circ \Leftrightarrow M\hat{P}N = 90^\circ$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PMN, temos:

$MN^2 = PM^2 + PN^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{Rr}\right)^2 = 4^2 + 2^2 \Leftrightarrow 4Rr = 20 \Leftrightarrow Rr = 5\text{ cm}^2$.

RESPOSTA: C

6.



Seja T o ponto de tangência da reta t com a circunferência, então $\overline{OT} \perp t$.

$A\hat{O}T = B\hat{D}T = 60^\circ$, pois são ângulos de lados perpendiculares.

$\Delta AOC \equiv \Delta TOC \text{ (L.A.L.)} \Rightarrow A\hat{O}C = T\hat{O}C = 30^\circ$

$\Delta BOD \equiv \Delta TOD \text{ (L.A.L.)} \Rightarrow B\hat{D}O = T\hat{D}O = 30^\circ$

No triângulo retângulo AOC, temos $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\overline{AC}}{AO} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{AO} \Leftrightarrow \overline{AO} = 4\sqrt{3}$.

Note ainda que $\overline{OT} = \overline{OB} = \overline{OA} = 4\sqrt{3}$, pois os três segmentos são raios da circunferência.

No triângulo retângulo DTO, temos $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\overline{OT}}{\overline{DT}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\overline{DT}} \Leftrightarrow \overline{DT} = 12$.

$\overline{CT} = \overline{CA} = 4$, pois são segmentos tangentes à mesma circunferência.

Portanto, $\overline{CD} = \overline{CT} + \overline{DT} = 4 + 12 = 16\,\text{cm}$.

RESPOSTA: A

7. Se as circunferências são exteriores as distâncias entre seus centros é maior que a soma dos raios. Assim, temos:

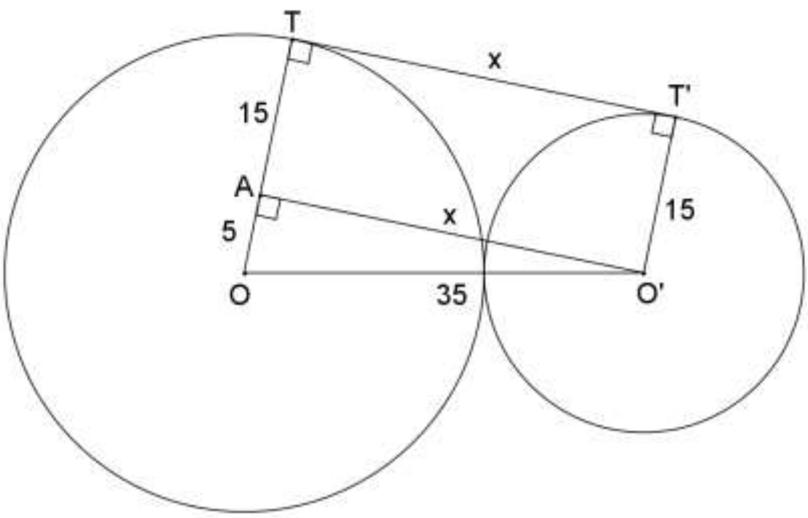
$$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow x^2 + 4 > (2x - 3) + (x + 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 > 0$$

Como $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$, o trinômio do 2° grau assume valores positivos para todo x real. Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \mathbb{R}$.

RESPOSTA: C

8. Como a distância entre os centros é igual à soma dos raios das circunferências, então as circunferências são tangentes exteriores.

A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.



Seja TT' a tangente comum externa às circunferências, então $OT \perp TT'$ e $O'T' \perp TT'$.

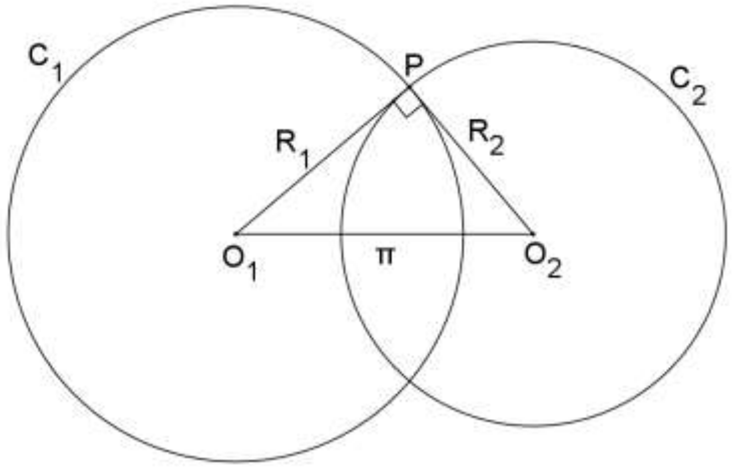
Se o ponto A é a projeção do ponto O' sobre o segmento OT, então o quadrilátero $O'ATT'$ obtido é um retângulo.

$OA = OT - AT = OT - O'T' = 20 - 15 = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta OO'A$, temos: $x^2 + 5^2 = 35^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$ m .

RESPOSTA: E

9. A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.



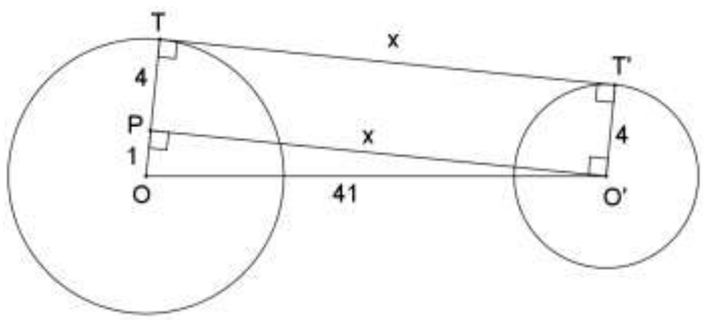
Dois círculos são ditos ortogonais se as tangentes aos círculos nos pontos de interseção são perpendiculares. Consequentemente, os raios que se encontram no ponto de interseção também serão perpendiculares e, portanto, o triângulo O_1PO_2 é retângulo.

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔO_1PO_2, temos: $O_1P^2 + O_2P^2 = O_1O_2^2 \Leftrightarrow R_1^2 + R_2^2 = \pi^2$.

Assim, a soma das áreas dos círculos é $S_{C_1} + S_{C_2} = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) = \pi \cdot \pi^2 = \pi^3$ u.a. .

RESPOSTA: D

10. As figuras abaixo representam as duas situações possíveis descritas no enunciado e foram feitas fora de escala para facilitar a visualização.

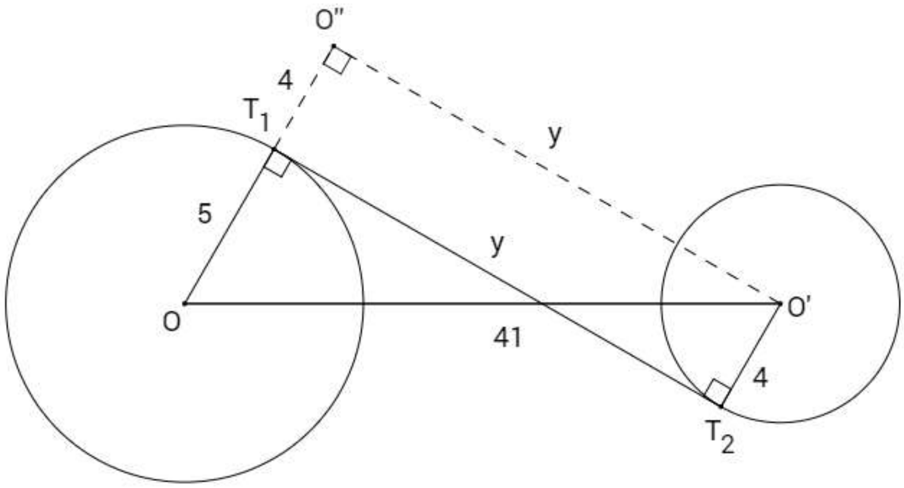


Seja TT' a tangente comum externa às circunferências, então $OT \perp TT'$ e $O'T' \perp TT'$.

Se o ponto P é a projeção do ponto O' sobre o segmento OT, então o quadrilátero $O'PTT'$ obtido é um retângulo.

$OP = OT - PT = OT - O'T' = 5 - 4 = 1$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta OO'P$, temos: $x^2 + 1^2 = 41^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1680} \approx 41\,\text{u.c.}$.



Seja T_1T_2 a tangente comum interna às circunferências, então $OT_1 \perp T_1T_2$ e $O'T_2 \perp T_1T_2$.

Seja $O"$ a projeção de O' sobre o prolongamento de OT_1, então o quadrilátero $O'T_2T_1O"$ é um retângulo, $O"T_1 = 4$ e $O'O" = T_1T_2 = y$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $OO'O"$, temos:

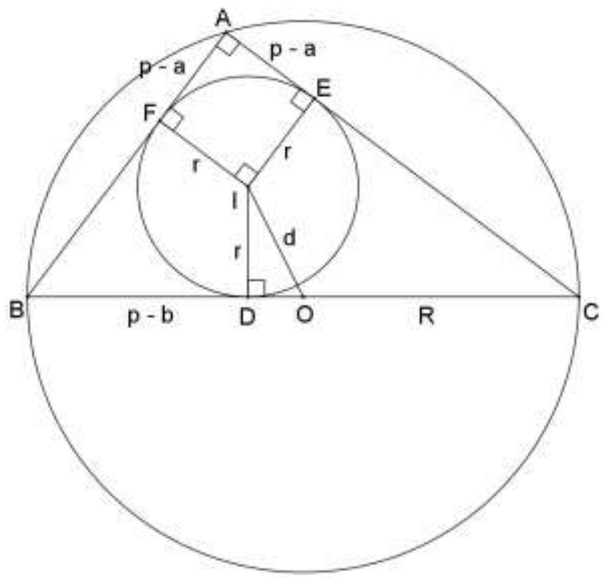
$OO"^2 + O'O"^2 = OO'^2 \Leftrightarrow 9^2 + y^2 = 41^2 \Leftrightarrow y^2 = 1600 \Leftrightarrow y = 40$

Logo, a tangente comum externa mede aproximadamente $41\,\text{u.c.}$ e a tangente comum interna mede $40\,\text{u.c.}$, portanto, a alternativa correta é D.

RESPOSTA: D

11. Seja o triângulo ABC de lados , $AC = b = 4x$ e $AB = c = 3x$. Sejam O o centro do círculo circunscrito e I o centro do círculo inscrito ao ΔABC e, $IO = d$ a distância pedida.

Como $(5x)^2 = (3x)^2 + (4x)^2$, então o ΔABC é retângulo.



O centro do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa, então $R=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$.

Os segmentos determinados pelo círculo inscrito ao ΔABC adjacentes ao vértice A são $AE=AF=p-a=6x-5x=x$ e os segmentos adjacentes ao vértice B são $BD=BF=p-b=6x-4x=2x$, onde $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5x+4x+3x}{2}=6x$ é o semiperímetro do triângulo.

Como os raios do círculo inscrito são perpendiculares aos lados do triângulo nos pontos de tangência, então o quadrilátero $AEIF$ é um quadrado. Portanto, $r=p-a=x$.

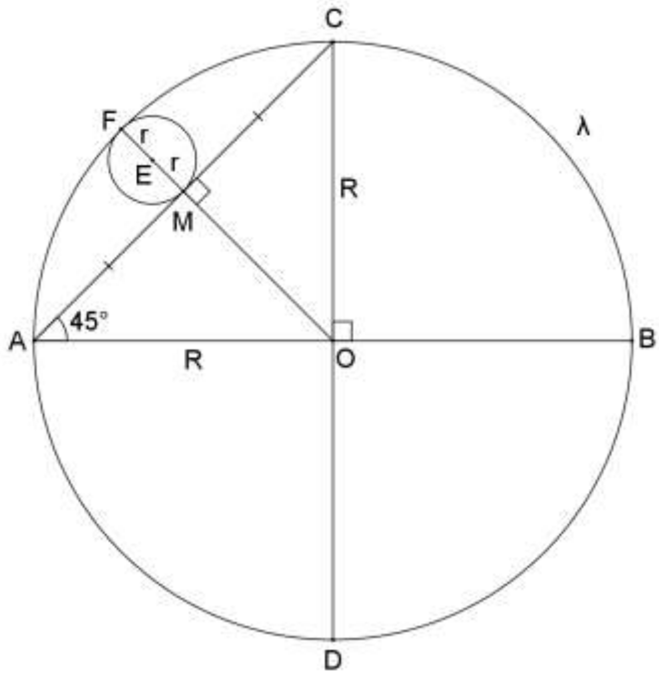
$$DO=OB-BD=\frac{a}{2}-(p-b)=\frac{5x}{2}-2x=\frac{x}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo IDO, temos:

$$IO^2=ID^2+DO^2 \Leftrightarrow d^2=x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{5x^2}{4} \Leftrightarrow d=\frac{\sqrt{5}}{2}x \text{ u.c.}.$$

RESPOSTA: D

12. Seja M o ponto médio de AC, então $OM \perp AC$. Seja r o raio da circunferência tangente interiormente à λ e à corda AC. A circunferência tangencia λ no ponto F, que está sobre o prolongamento de OM.



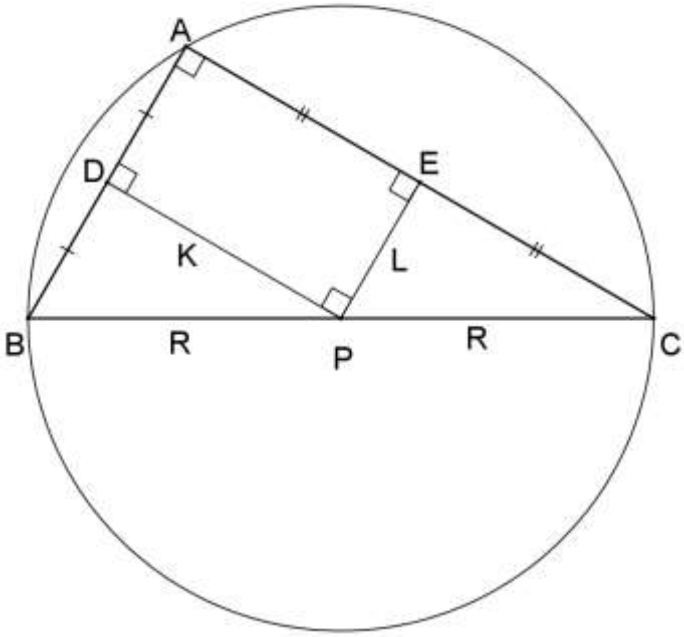
$BC = 90^\circ \Rightarrow O\hat{A}C = 45^\circ$

No triângulo retângulo AOM, temos: $\text{sen}45^\circ = \frac{OM}{AO} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OM}{R} \Leftrightarrow OM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

$$OF = OM + 2r = R \Leftrightarrow \frac{R\sqrt{2}}{2} + 2r = R \Leftrightarrow 2r = R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow r = \frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{4} \text{ u.c.}$$

RESPOSTA: C

13. O ponto do plano que equidista dos vértices de um triângulo é o seu circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes). No caso do triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa.



A figura acima representa a situação descrita no enunciado, onde P é o centro do círculo circunscrito ao triângulo e o quadrilátero $ADPE$ é um retângulo.

A perpendicular a uma corda a partir do centro do círculo divide a corda ao meio (basta observar que ela será altura do triângulo isósceles formado pelos raios).

$PD \perp AB \Leftrightarrow BD = DA = PE = L$

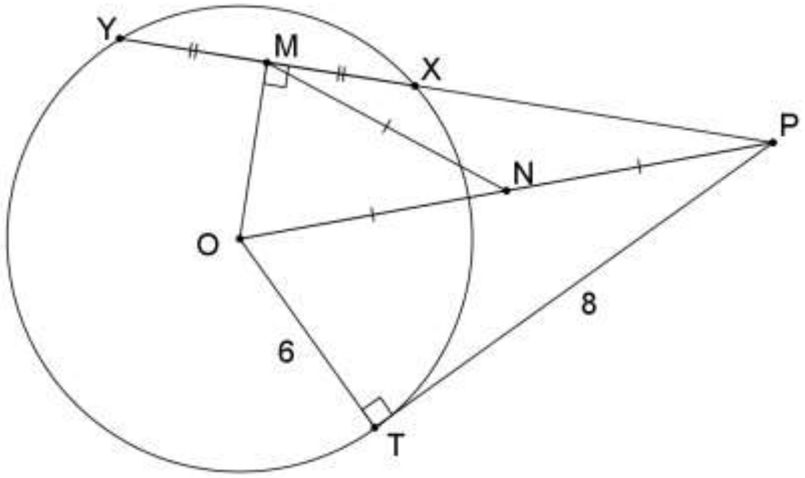
$PE \perp AC \Leftrightarrow EC = AE = DP = K$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔBDP, temos:

$BP^2 = BD^2 + DP^2 \Leftrightarrow R^2 = L^2 + K^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{L^2 + K^2}$.

RESPOSTA: E

14.



Como PT é tangente à circunferência, então $OT \perp PT$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔOPT, temos:

$PO^2 = OT^2 + PT^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow PO = 10$.

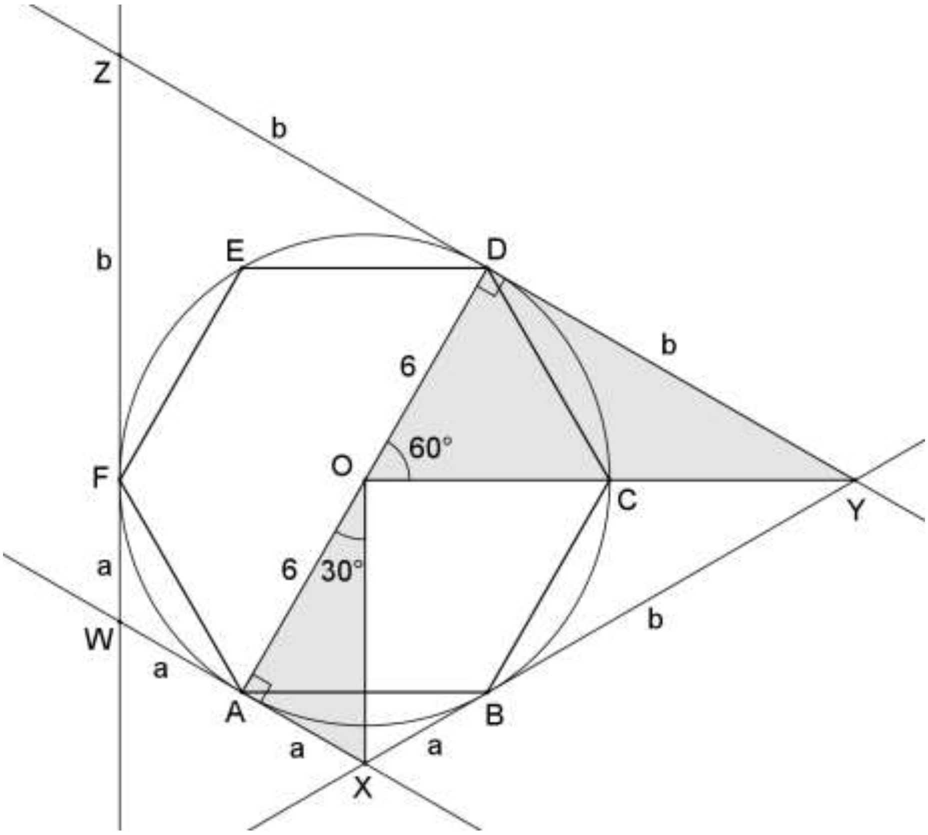
Se M é ponto médio da corda XY, então $OM \perp XY$ e o ΔPMO é retângulo.

Se tomarmos o ponto médio N do segmento PO, MN será a mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo PMO, então $MN = \frac{PO}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Logo, a distância de M ao ponto médio N de PO é constante e igual a 5, o que significa que M pertence a um arco de circunferência de centro N e raio $R = 5$.

RESPOSTA: A

15. A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.



Sabemos que uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Como $BC = CD = 60^\circ$, então O, C e Y estão alinhados.

No triângulo retângulo OAX, $A\hat{O}X = 30^\circ$ e $\frac{AX}{OA} = \text{tg}\,30^\circ \Leftrightarrow \frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

No triângulo retângulo ODY, $D\hat{O}Y = 60^\circ$ e $\frac{DY}{DO} = \text{tg}\,60^\circ \Leftrightarrow \frac{b}{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = 6\sqrt{3}$.

Como retas tangentes a uma circunferência por um mesmo ponto são iguais e como $A\hat{O}X = A\hat{O}W = 30^\circ$, temos $a = XA = XB = WA = WF = 2\sqrt{3}$.

Da mesma forma, $b = YB = YD = WD = WF = 6\sqrt{3}$.

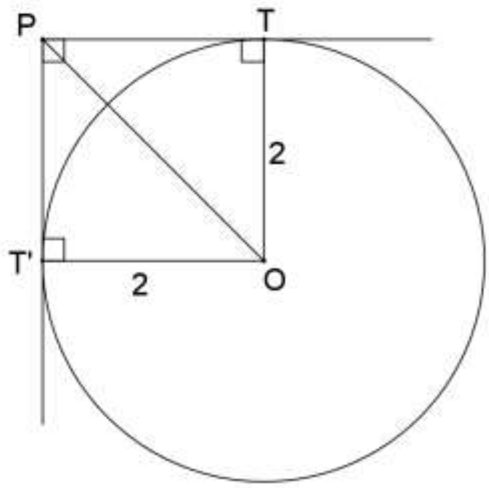
Portanto, o perímetro do quadrilátero $XYZW$ é:

$$2p_{XYZW} = XY + YZ + ZW + WX = (a+b) + 2b + (a+b) + 2a = 4 \cdot (a+b) =$$
$$= 4 \cdot \left(2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) = 32\sqrt{3} = 32 \cdot 1{,}7 = 54{,}4 \text{ u.c.}$$

Observe que o quadrilátero $XYZW$ é um trapézio isósceles.

RESPOSTA: A

16.



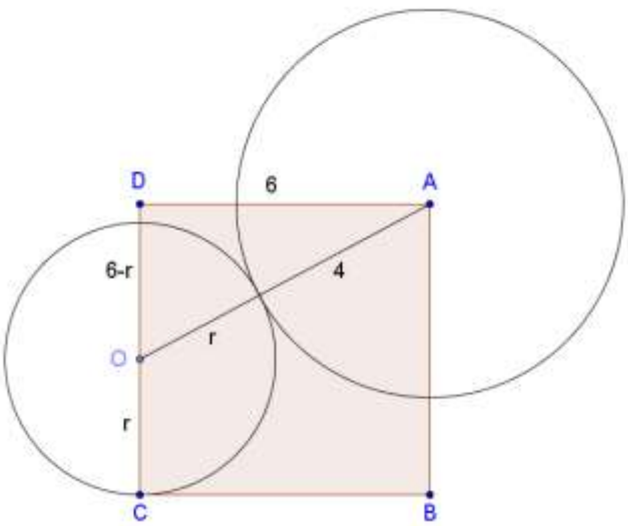
O quadrilátero PTOT' é um quadrado, então $OP = 2\sqrt{2}$.

Como a distância do ponto P ao centro O da circunferência é constante e igual a $2\sqrt{2}$, então o lugar geométrico de P é um círculo de centro O e raio $2\sqrt{2}$.

Portanto, a área da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano é $S = \pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi \approx 8 \cdot 3,14 = 25,12 \text{ cm}^2$.

RESPOSTA: E

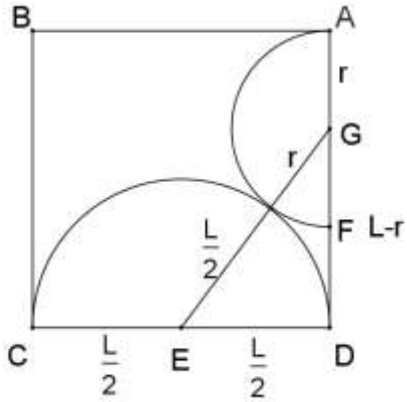
17.



$$(6-r)^2 + 6^2 = (r+4)^2 \Leftrightarrow 36 - 12r + r^2 + 36 = r^2 + 8r + 16 \Leftrightarrow 20r = 56 \Leftrightarrow r = 2,8$$

RESPOSTA: E

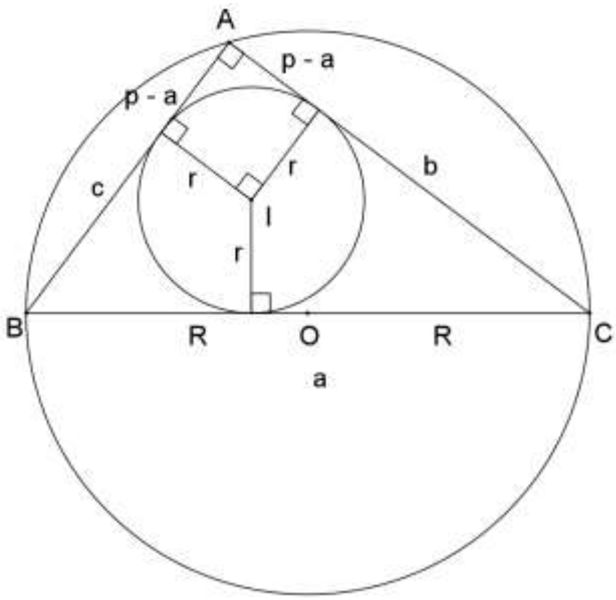
18.



$$\left(r+\frac{L}{2}\right)^2=(L-r)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{r^2}+rL+\cancel{\frac{L^2}{4}}=L^2-2rL+\cancel{r^2}+\cancel{\frac{L^2}{4}} \Leftrightarrow 3rL=L^2 \Leftrightarrow r=\frac{L}{3}$$

RESPOSTA: E

19.



Seja um triângulo retângulo de hipotenusa a, raio do círculo inscrito $r=15\,m$, raio do círculo circunscrito $R=37,5\,m$ e semiperímetro p, então

$a=2R \Leftrightarrow a=2\cdot 37,5=75$

$r=p-a \Leftrightarrow 15=p-75 \Leftrightarrow p=90$.

A área do triângulo é $S=p\cdot r=90\cdot 15=1350\,m^2$.

Esse problema também poderia ser resolvido da seguinte forma, sem a utilização da fórmula $S=p\cdot r$:

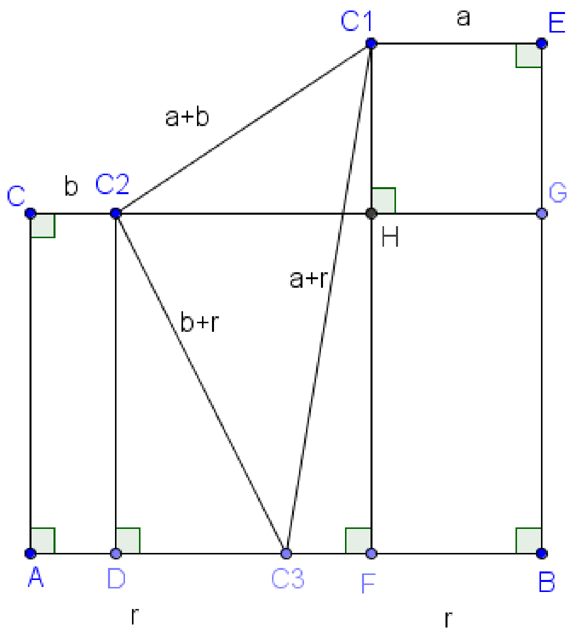
$$p=\frac{a+b+c}{2}=90\Leftrightarrow a+b+c=180\Leftrightarrow 75+b+c=180\Leftrightarrow b+c=105$$

$$\Leftrightarrow b^2+2bc+c^2=105^2\Leftrightarrow 75^2+2bc=105^2\Leftrightarrow 2bc=105^2-75^2=(105+75)(105-75)\Leftrightarrow bc=2700$$

$$S=\frac{bc}{2}=\frac{2700}{2}=1350\,m^2.$$

RESPOSTA: D

20.



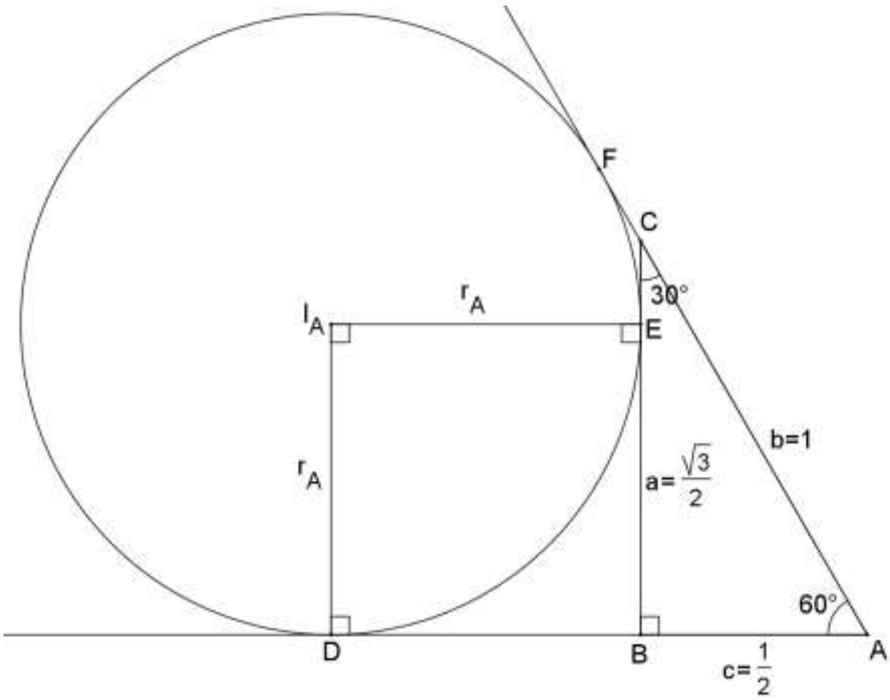
$$DC_2=\sqrt{(r+b)^2-(r-b)^2}=2\sqrt{rb}$$
$$FC_1=\sqrt{(r+a)^2-(r-a)^2}=2\sqrt{ra}$$
$$HC_1=\sqrt{(a+b)^2-(2r-a-b)^2}=2\sqrt{r(a+b-r)}$$

$$FC_1=FH+HC_1=DC_2+HC_1\Rightarrow 2\sqrt{ra}=2\sqrt{rb}+2\sqrt{r(a+b-r)}\Leftrightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{a+b-r}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-r}\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}=a+b-r\Leftrightarrow r=2\sqrt{ab}$$

RESPOSTA: C

21.



O raio do círculo ex-inscrito de um triângulo retângulo tangente a um dos catetos é igual à diferença entre o semiperímetro do triângulo e o outro cateto, ou seja, $r_A = p - c$.

O triângulo ABC é retângulo de semiperímetro $p = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ cm.

Logo, o raio da circunferência indicada é $r_A = p - c = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ cm.

O raio pedido poderia ser encontrado usando as expressões para a área do triângulo ABC, como segue:

$$S_{ABC} = \frac{ac}{2} = (p-a)r_A \Leftrightarrow r_A = \frac{ac}{2(p-a)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2(3-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \text{ cm}.$$

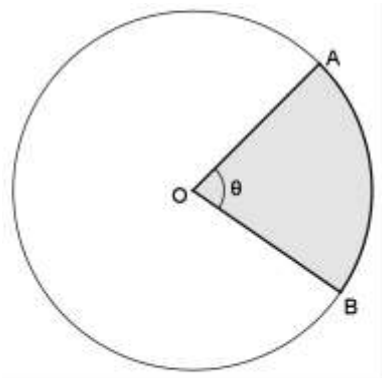
RESPOSTA: A

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA E COMPRIMENTO DE ARCOS

1. ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

1.1. ÂNGULO CENTRAL

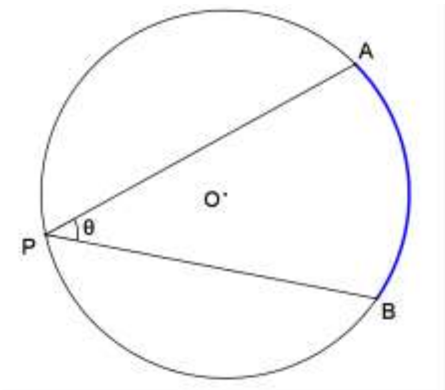
Ângulo central é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência e seus lados são raios. O ângulo central é igual ao arco por ele determinado.



$$\theta = \overset{\frown}{AB}$$

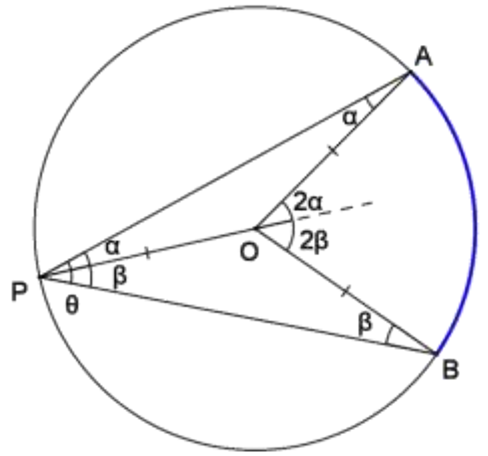
1.2. ÂNGULO INSCRITO

Ângulo inscrito é um ângulo com vértice sobre a circunferência e cujos lados são secantes à circunferência. O ângulo inscrito é igual à metade do arco por ele determinado.

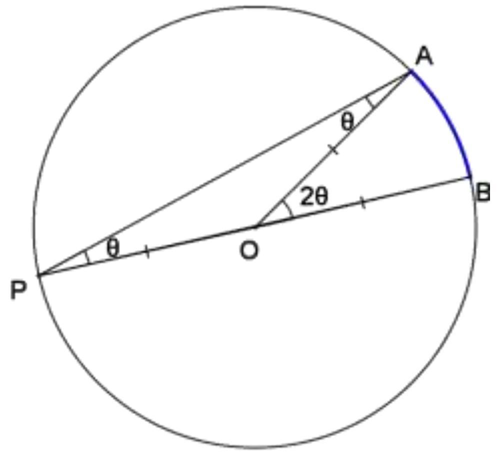


$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

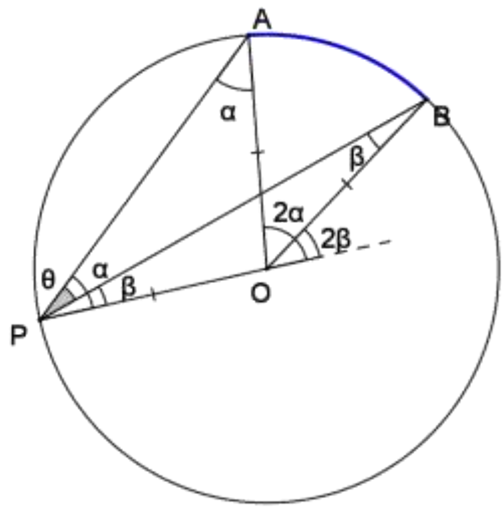
Demonstração:



$$\theta = \alpha + \beta = \frac{2\alpha + 2\beta}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

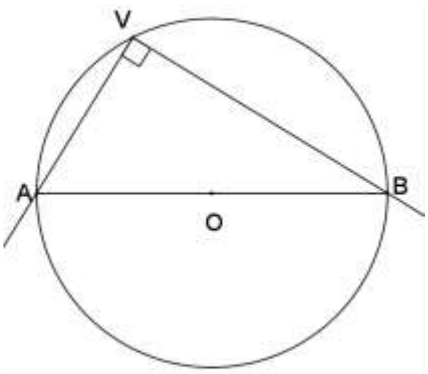


$$2\theta = \overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow \theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$



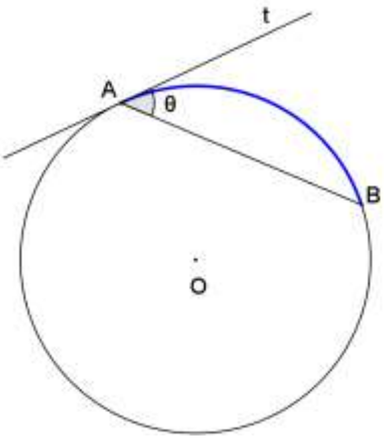
$$\theta = \alpha - \beta = \frac{2\alpha - 2\beta}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Todo ângulo reto é inscritível em uma semicircunferência e, reciprocamente, todo ângulo inscrito em uma semicircunferência e com lados passando pelas extremidades da mesma, é reto.



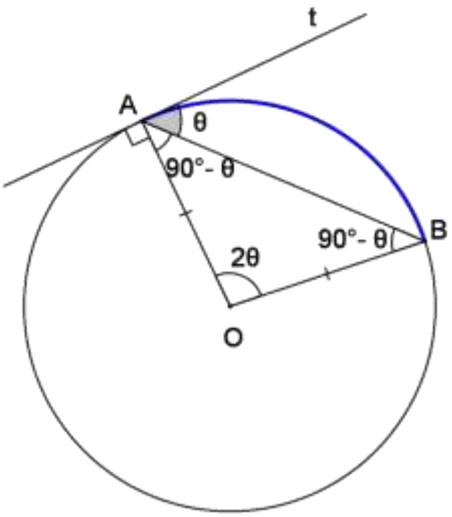
1.3. ÂNGULO DE SEGMENTO

Ângulo de segmento ou semi-inscrito é um ângulo com vértice sobre a circunferência, um lado secante e outro tangente à circunferência. O ângulo de segmento é igual à metade do arco por ele determinado.



$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

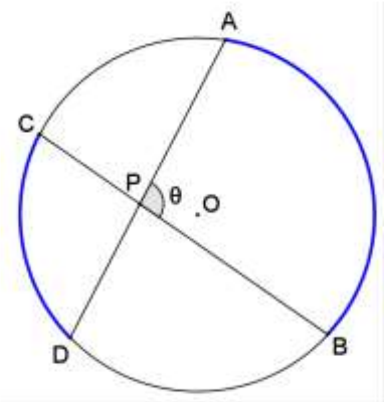
Demonstração:



$$2\theta = \overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow \theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

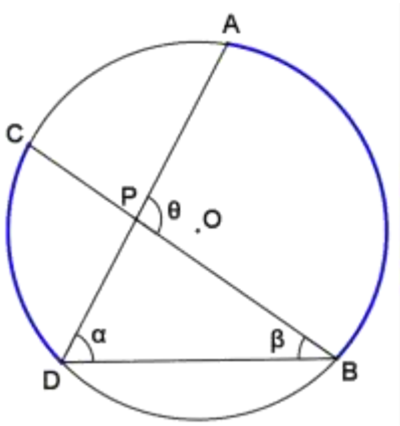
1.4. ÂNGULO EXCÊNTRICO INTERNO

Ângulo excêntrico interno é o ângulo formado por duas cordas que se interceptam em um ponto interior da circunferência, distinto do centro. O ângulo excêntrico interno é igual à semissoma dos arcos por ele determinados.



$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

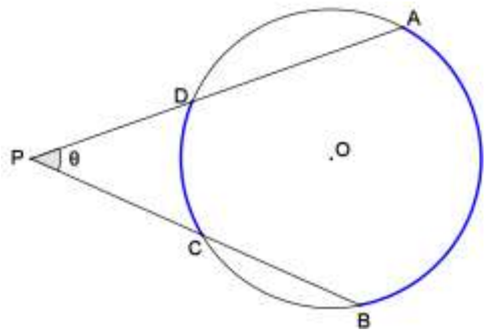
Demonstração:



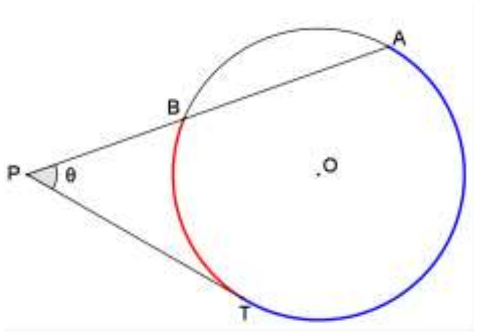
$$\theta = \alpha + \beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

1.5. ÂNGULO EXCÊNTRICO EXTERNO

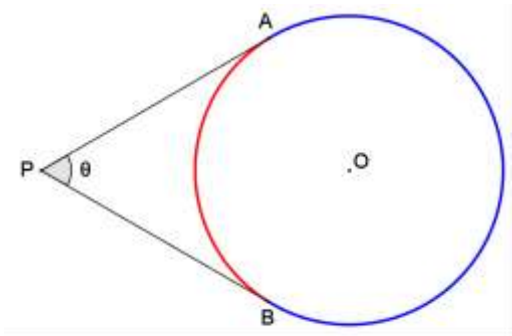
Ângulo excêntrico externo é o ângulo formado por duas secantes ou tangentes que se interceptam no exterior da circunferência. O ângulo excêntrico externo é igual à semidiferença dos arcos por ele determinados. No caso do ângulo formado por duas tangentes, o ângulo excêntrico externo também pode ser calculado como o suplemento do menor arco determinado.



$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

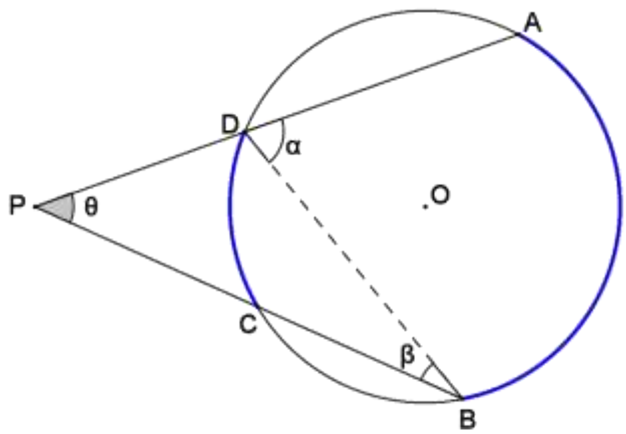


$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{2}$$

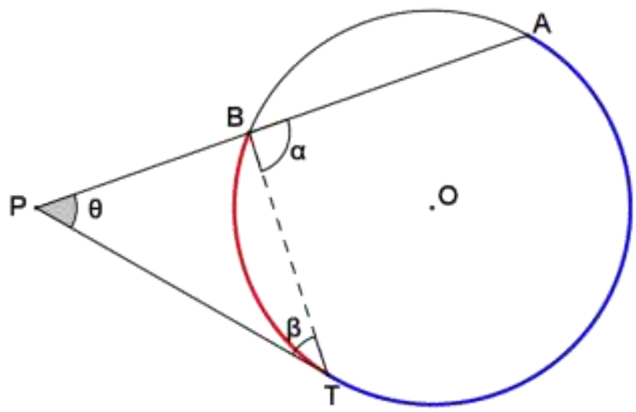


$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}_{maior} - \overset{\frown}{AB}_{menor}}{2} = 180^\circ - \overset{\frown}{AB}_{menor}$$

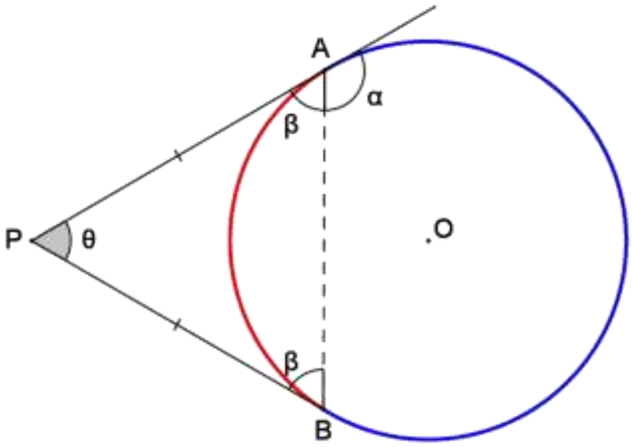
Demonstração:



$$\theta = \alpha - \beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

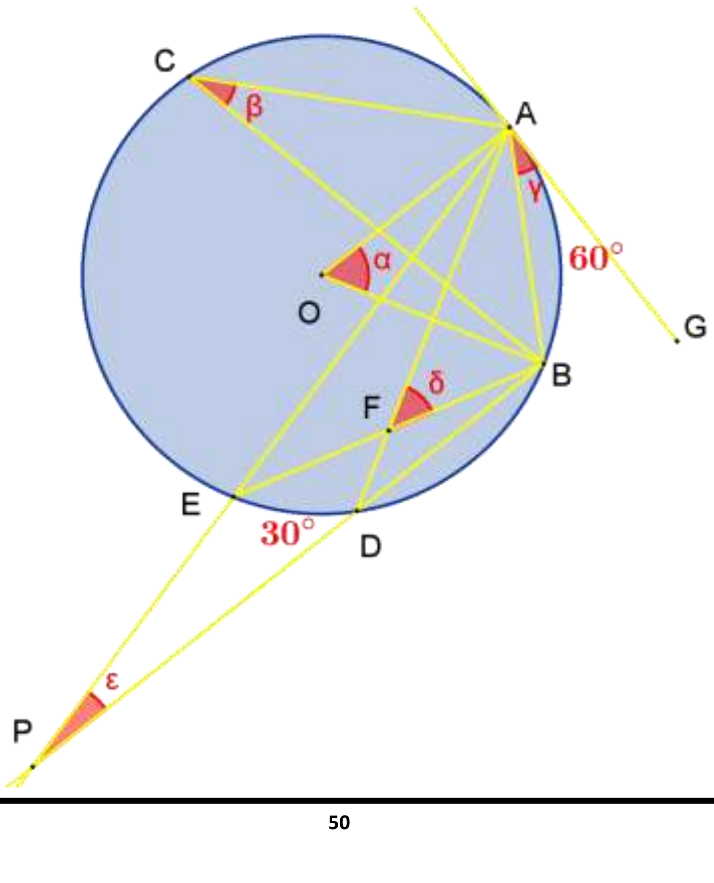


$$\theta=\alpha-\beta=\frac{\widehat{AT}}{2}-\frac{\widehat{BT}}{2}=\frac{\widehat{AT}-\widehat{BT}}{2}$$



$$\theta=\alpha-\beta=\frac{\widehat{AB}_{maior}}{2}-\frac{\widehat{AB}_{menor}}{2}=$$
$$=\frac{360^\circ-\widehat{AB}_{menor}}{2}-\frac{\widehat{AB}_{menor}}{2}=$$
$$=180^\circ-\widehat{AB}_{menor}$$

Exemplo: Na figura, calcule $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$, sabendo que $AB=60^\circ$ e $DE=30^\circ$.



RESOLUÇÃO:

$A\hat{O}B$ é um ângulo central, então $\alpha = A\hat{O}B = AB = 60^\circ$.

$A\hat{C}B$ é um ângulo inscrito, então $\beta = A\hat{C}B = \frac{AB}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

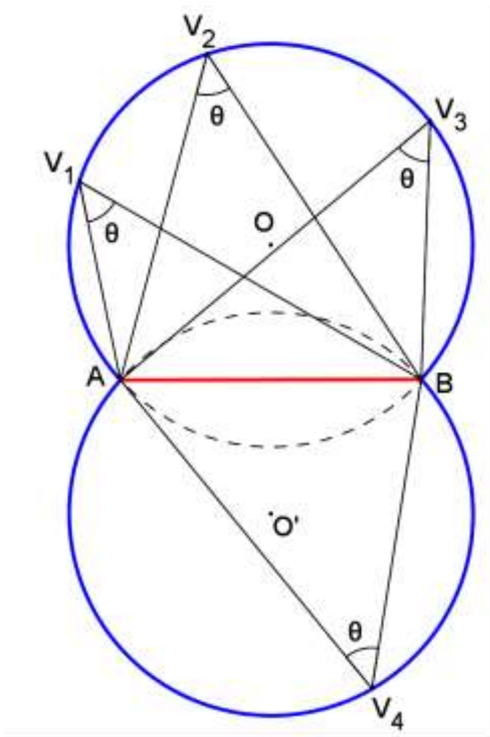
$B\hat{A}G$ é um ângulo de segmento, então $\gamma = B\hat{A}G = \frac{AB}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

$A\hat{F}B$ é um ângulo excêntrico interno, então $\delta = A\hat{F}B = \frac{AB+DE}{2} = \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} = 45^\circ$.

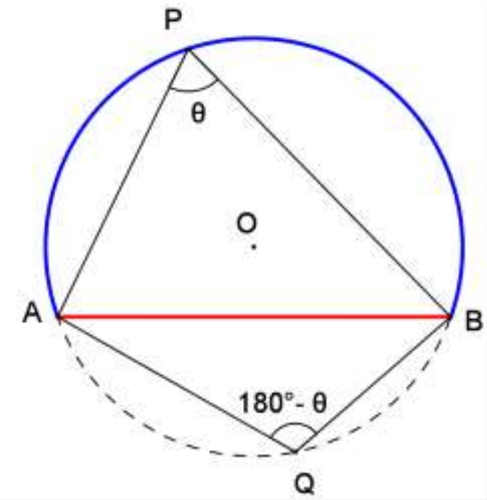
$D\hat{P}E$ é um ângulo excêntrico externo, então $\varepsilon = D\hat{P}E = \frac{AB-DE}{2} = \frac{60^\circ - 30^\circ}{2} = 15^\circ$.

2. ARCO CAPAZ

Um par de arcos capazes de θ sobre um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são vértices de ângulos de medida θ e extremidades em A e B.

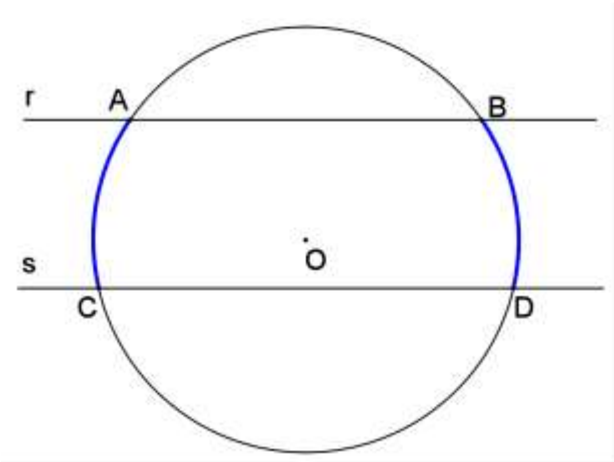


Arcos capazes de ângulos suplementares, relativos a um segmento $\overline{AB}$, e em semiplanos opostos em relação à reta suporte do segmento são partições de uma mesma circunferência.



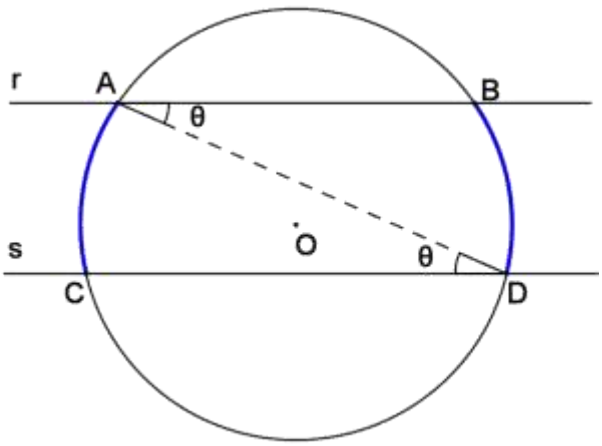
3. PROPRIEDADES DA CIRCUNFERÊNCIA

Duas retas paralelas, secantes a uma circunferência, determinam arcos de igual medida.



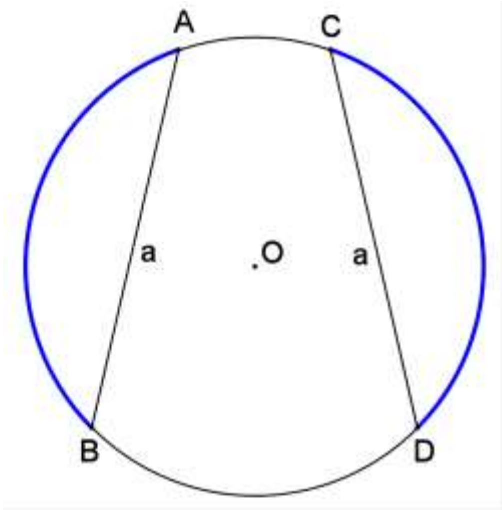
$$r \parallel s \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

Demonstração:



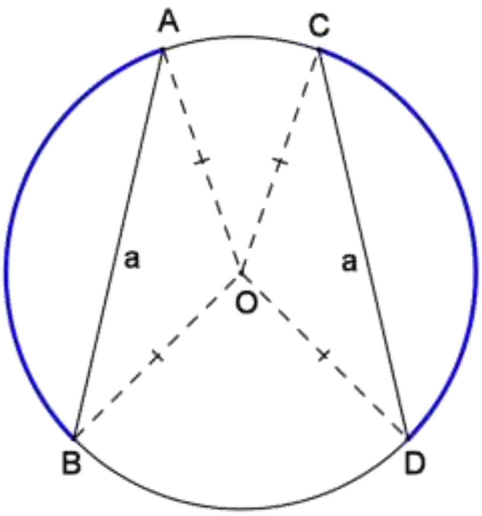
$$r \parallel s \Leftrightarrow B\hat{A}D = A\hat{D}C \Leftrightarrow 2 \cdot B\hat{A}D = 2 \cdot A\hat{D}C \Leftrightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$$

Duas cordas de mesmo comprimento determinam sobre uma mesma circunferência arcos congruentes e vice-versa.



$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

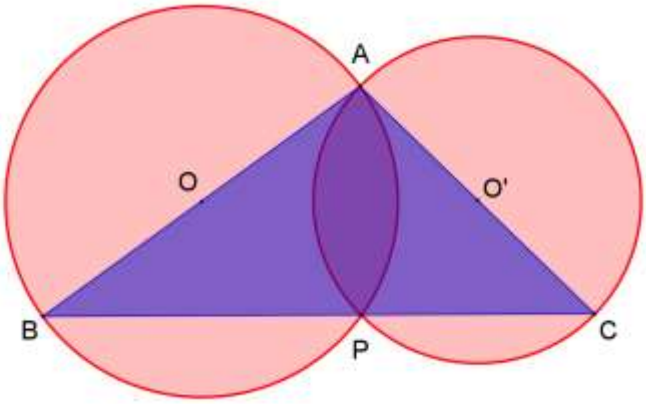
Demonstração:



(ida) $\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \Delta AOB \equiv \Delta COD\,(\text{L.L.L.}) \Rightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

(volta) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow A\hat{O}B = C\hat{O}D \Rightarrow \Delta AOB \equiv \Delta COD\,(\text{L.A.L.}) \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

Sejam duas circunferências secantes cujos pontos de contato são A e P. Se traçarmos os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em cada uma das circunferências, então P pertence a $\overline{BC}$.



Demonstração:

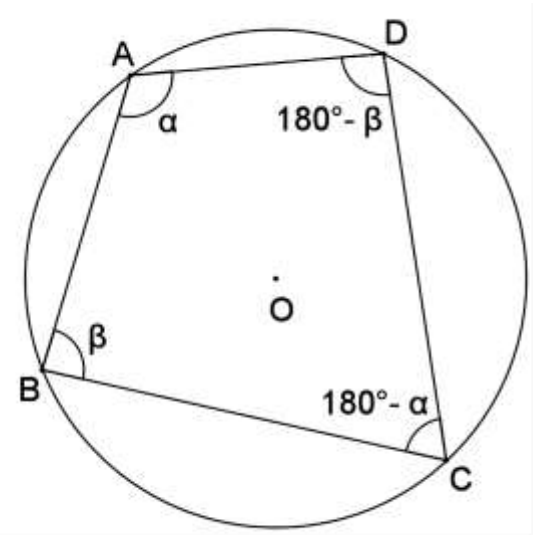
Os ângulos $A\hat{P}B$ e $A\hat{P}C$ são ângulos inscritos na semicircunferência, então $A\hat{P}B = A\hat{P}C = 90^\circ$.

Logo, $B\hat{P}C = B\hat{P}A + A\hat{P}C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, o que implica que os pontos B, P e C são colineares, ou seja, $P \in \overline{BC}$.

4. QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Um quadrilátero está inscrito em uma circunferência se os seus quatro vértices pertencem a essa circunferência.

Um quadrilátero convexo é inscritível em uma circunferência se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.



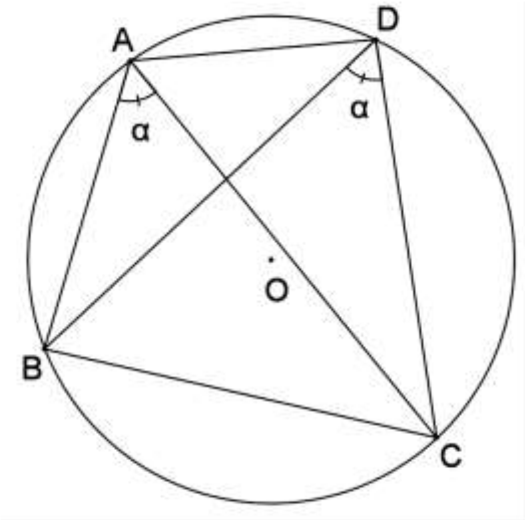
$$\#ABCD \text{ é inscritível} \Updownarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

Demonstração:

$$\#ABCD \text{ é inscritível} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{BCD}{2} + \frac{BAD}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ = \hat{B} + \hat{D}$$

$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow$ A e C estão sobre arcos capazes suplementares sobre o segmento $\overline{BD}$, ou seja, A e C está na circunferência que tem $\overline{BD}$ como uma corda, portanto, o $\#ABCD$ é inscritível.

Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, as diagonais e dois lados opostos determinam ângulos congruentes.



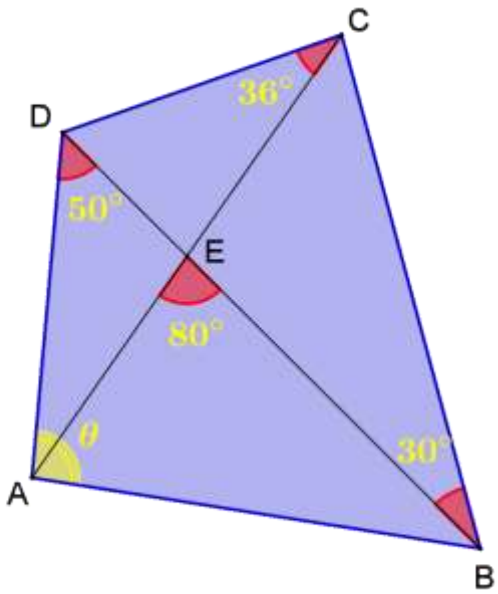
$$\#ABCD \text{ é inscritível}$$
$$\Updownarrow$$
$$B\hat{A}D = B\hat{D}C$$

Demonstração:

Se o $\#ABCD$ é inscritível, então $B\hat{A}C = B\hat{D}C = \frac{BC}{2}$.

Se $B\hat{A}C = B\hat{D}C = \alpha$, então A e D estão no arco capaz de α sobre $\overline{BC}$, ou seja, A, B, C e D são concíclicos, ou seja, o $\#ABCD$ é inscritível.

Exemplo: Na figura abaixo, encontre o valor do ângulo $B\hat{A}D = \theta$.



RESOLUÇÃO:

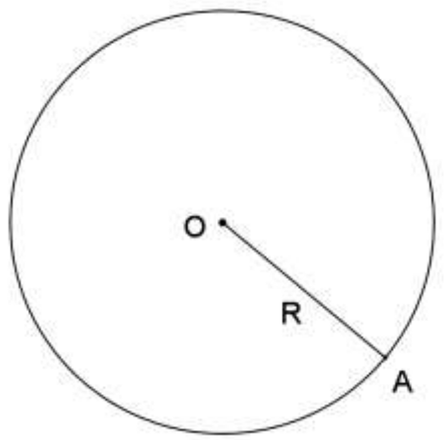
No triângulo BCE, temos: $B\hat{C}E + 30° = 80° \Leftrightarrow B\hat{C}E = 50°$ (ângulo externo).

Como $B\hat{C}A = B\hat{C}E = 50° = A\hat{D}B$, então o quadrilátero ABCD é inscritível, o que implica

$\theta = B\hat{A}D = 180° - B\hat{C}D = 180° - (36° + 50°) = 94°$.

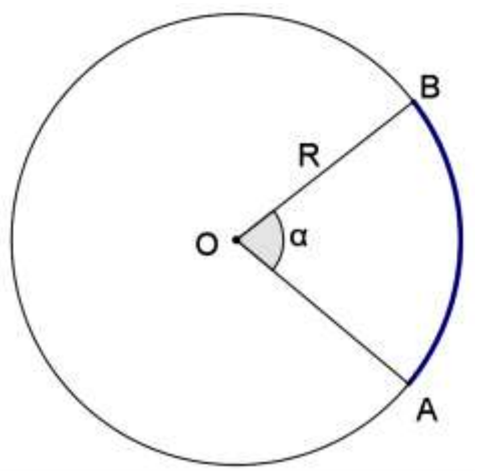
5. PERÍMETRO DE FIGURAS CIRCULARES

5.1. COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA



$$2p = 2\pi \cdot R$$

5.2. COMPRIMENTO DO ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

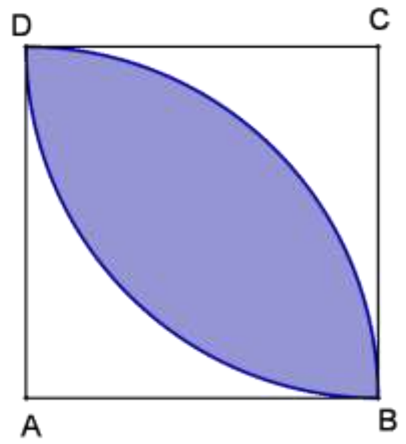


$2p_{arco} = \alpha \cdot R$, **onde α em radianos**

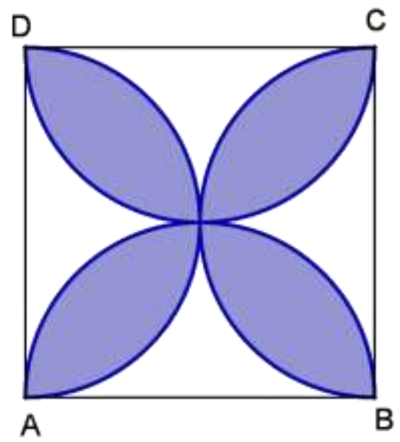
$2p_{arco} = 2\pi R \cdot \dfrac{\theta}{360°} = \dfrac{\pi R \theta}{180°}$, **onde θ em graus**

Exemplo: Calcule o perímetro das regiões sombreadas, sendo $ABCD$ um quadrado de lado a.

a)



b)



RESOLUÇÃO:

a) O contorno da região sombreada é composto por dois arcos de $90°$ em uma circunferência de raio a. Portanto, o seu perímetro é $2p_{\text{folha}} = 2 \cdot \left(\frac{90°}{360°} \cdot 2\pi \cdot a \right) = \pi \cdot a$.

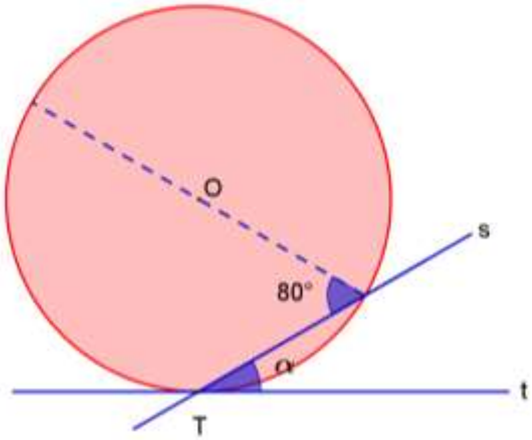
b) O contorno da região sombreada é composto por quatro semicircunferências de raio $\frac{a}{2}$. Portanto, o seu perímetro é $2p_{\text{rosácea}} = 4 \cdot \left(\frac{180°}{360°} \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{2} \right) = 2\pi \cdot a$.

OBSERVAÇÃO

Para se calcular o perímetro de rosáceas (figuras como as do exemplo), é importante identificar, para cada arco de circunferência, o raio e o ângulo central.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (AFA 2001) Conforme a figura abaixo, s e t são, respectivamente, secante e tangente à circunferência de centro O. Se T é um ponto da circunferência comum às retas tangente e secante, então o ângulo α, formado por t e s, é



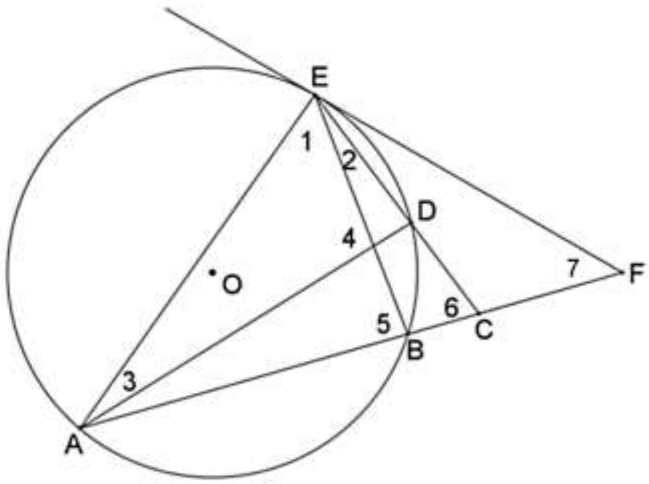
a) 10°

b) 20°

c) 30°

d) 40°

2. (ITA 1990) Na figura abaixo O é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49°, 18°, 34°, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.



a) 97°, 78°, 61°, 26°

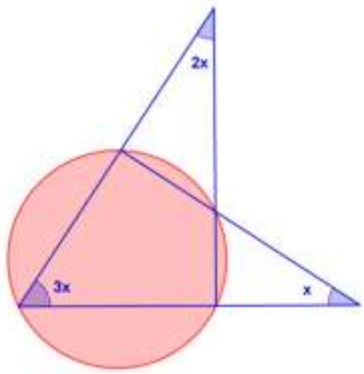
b) 102°, 79°, 58°, 23°

c) 92°, 79°, 61°, 30°

d) 97°, 79°, 61°, 27°

e) 97°, 80°, 62°, 29°

3. Qual é o valor do ângulo x na figura?



a) 10°

b) 15°

c) 18°

d) 20°

e) 25°

4. Sejam $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ os ângulos de um quadrilátero inscritível, nessa ordem, representados em radianos. O valor de $\alpha\beta+\alpha\delta+\gamma\beta+\gamma\delta$ é:

a) π

b) 2π

c) π^2

d) $2\pi^2$

e) 1

5. (EEAr 2011) Para dar 10 voltas completas em volta de um jardim circular, uma pessoa percorrerá $2198\,\text{m}$. Considerando $\pi=3{,}14$, a medida, em metros, do diâmetro desse jardim é

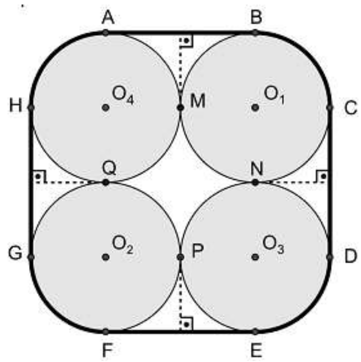
a) 70.

b) 65.

c) 58.

d) 52.

6. (AFA 2011) Na figura abaixo têm-se quatro círculos, congruentes de centros O_1, O_2, O_3 e O_4 e de raio igual a $10\,\text{cm}$. Os pontos M, N, P e Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G e H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna. Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a



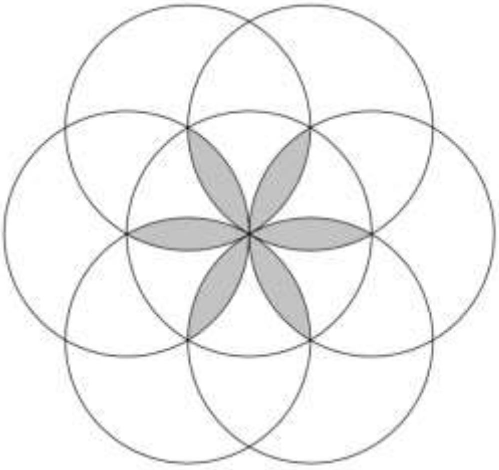
a) $2(\pi+40)$

b) $5(\pi+16)$

c) $20(\pi+4)$

d) $5(\pi+8)$

7. (Bélgica 2003) Na figura temos 7 círculos possuindo mesmo raio. Determine a razão entre o perímetro de um dos círculos e o perímetro da região sombreada.



a) $\frac{1}{2}$

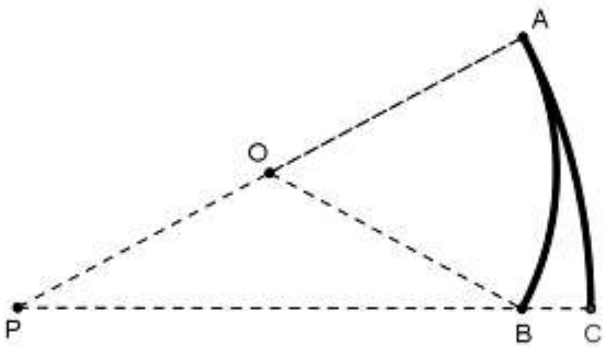
b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{\pi}$

e) $\frac{4}{7}$

8. (CEFET RJ 2011) Na figura abaixo, temos dois arcos de duas circunferências com centros O e P: o primeiro possui extremidades A e B e o segundo possui extremidades A e C, respectivamente. Sabendo ainda que O é o ponto médio do segmento PA, B é um ponto do segmento PC e que o primeiro arco mede $3,2\,\text{cm}$, então a medida, em centímetros, do segundo arco é



a) 6,4

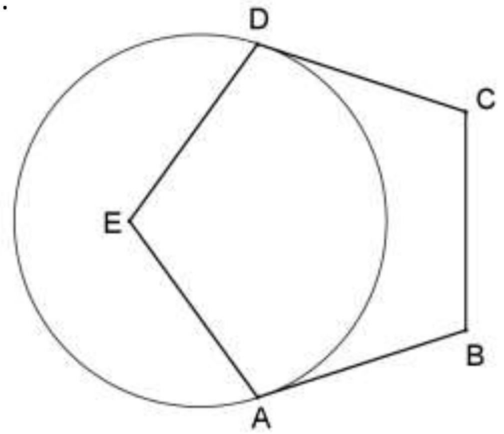
b) 3,4

c) 3,2

d) 3,0

e) 1,6

9. (CMRJ 2012) Os lados AB e CD do pentágono regular da figura abaixo são tangentes à circunferência de raio $5\,\text{cm}$ nos pontos A e D, respectivamente. Nestas condições, a medida do comprimento do menor arco AD da figura, em centímetros, vale:



a) 4π

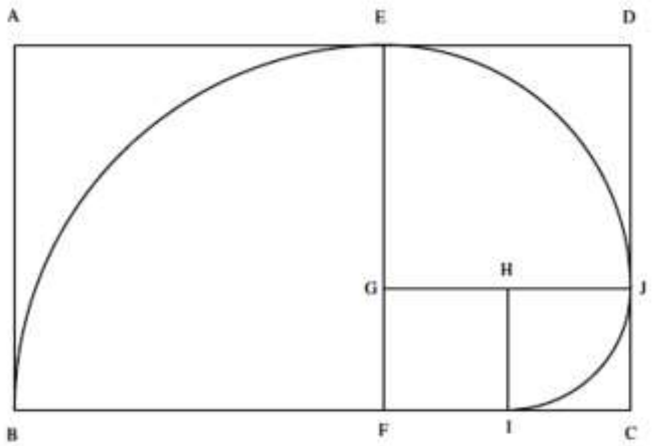
b) 5π

c) $\frac{4\pi}{3}$

d) $\frac{9\pi}{2}$

e) 7π

10. (CMRJ 2014) Os quadriláteros ABFE, EGJD, HICJ e GFIH são quadrados, sendo $HJ = 1\,\text{cm}$. Calcule o comprimento da espiral formada pelos arcos de circunferência que ligam os pontos B e E; E e J; e J e I.



a) $\frac{3\pi}{2}$

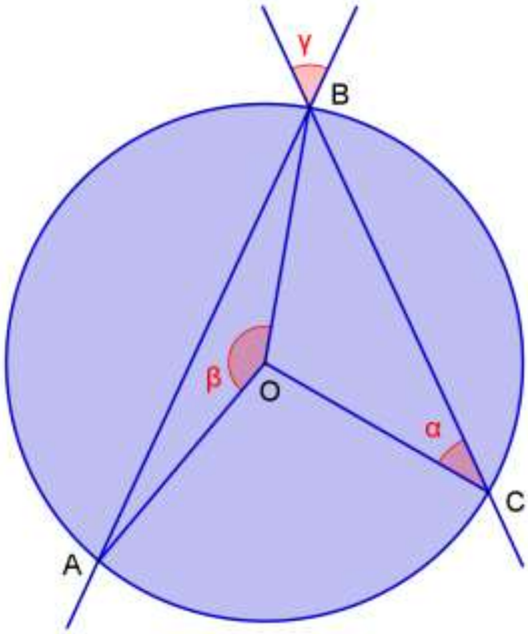
b) 3π

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

e) 6π

11. (EPCAR 2001) Na figura abaixo, os pontos A, B e C pertencem à circunferência de centro O. Se $\beta = 150^\circ$ e $\gamma = 50^\circ$, então α é:



a) 15°

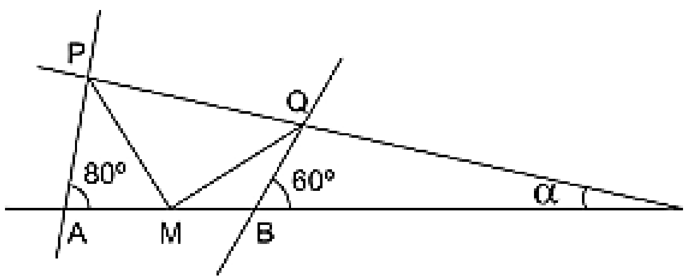
b) 30°

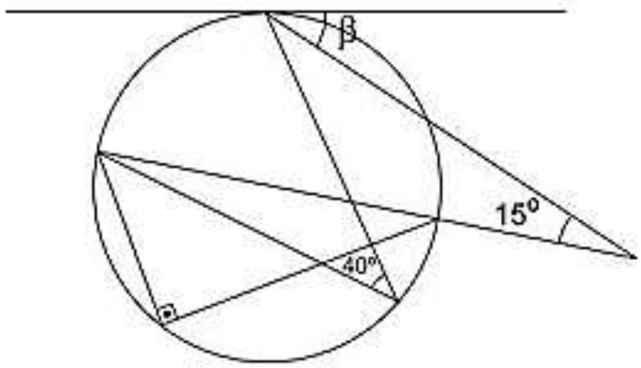
c) 35°

d) 45°

e) 10°

12. (EPCAR 2007) Nas figuras abaixo, é dado que $AM = AP$, $BM = BQ$ e $MP = MQ$. Sendo assim, podemos afirmar que o valor de $\alpha + \beta$ é:





a) 25°

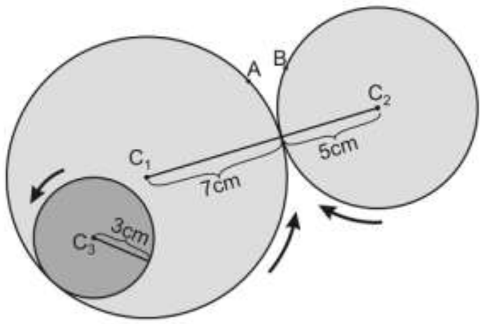
b) 30°

c) $35°$

d) $40°$

e) $45°$

13. (EPCAr 2012) Os círculos abaixo têm centros fixos em C_1, C_2, C_3 e se tangenciam conforme a figura. Eles giram conforme a direção das setas, e não derrapam nos pontos de contato. Num certo momento, os pontos A e B das circunferências de centros C_1 e C_2 se encontram no ponto de tangência. A partir desse momento até A e B se encontrarem novamente, o número de voltas dadas pelo círculo de centro em C_3 é



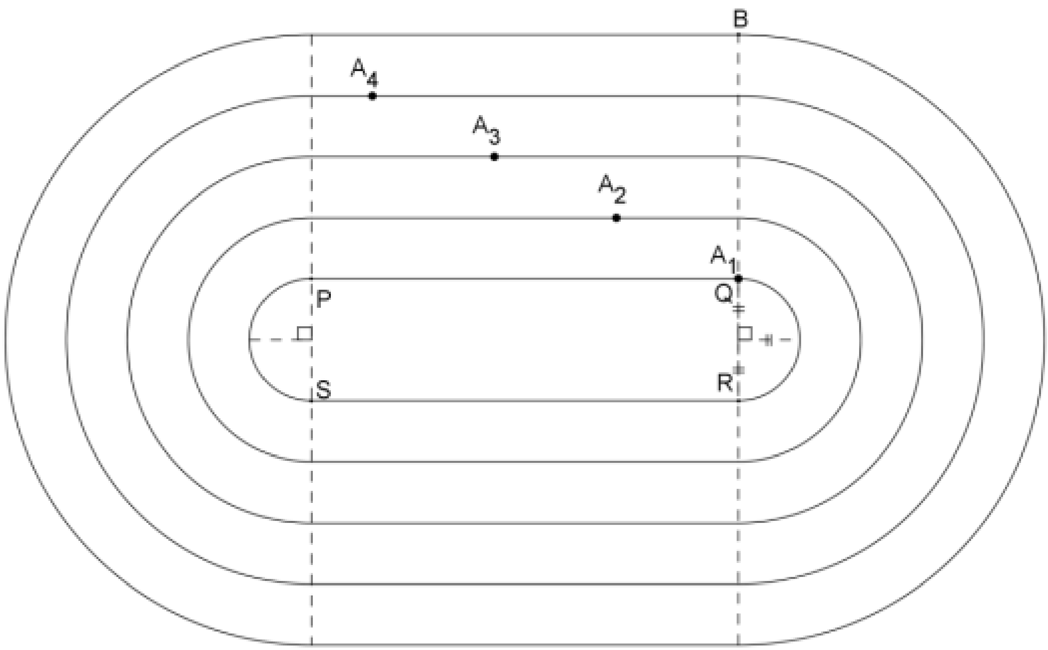
a) 11

b) $11\frac{1}{3}$

c) $11\frac{2}{3}$

d) 12

14. (EPCAr 2015) Numa corrida utiliza-se uma pista com 4 raias. Essa pista é composta por semicircunferências e trechos retilíneos, como mostra a figura abaixo.



Sabe-se que o comprimento de cada trecho retilíneo da pista e de cada semicircunferência da raia interna $(QR$ e $SP)$ é 100 metros e que a largura de cada raia é de 1 metro. Se cada atleta, A_1, A_2, A_3 e A_4, deve dar uma volta no sentido anti-horário, correndo sobre as linhas em que estão posicionados, com chegada na linha BQ, pode-se afirmar então que, quando ainda na posição de largada, o atleta A_4 deverá estar à frente do atleta A_1

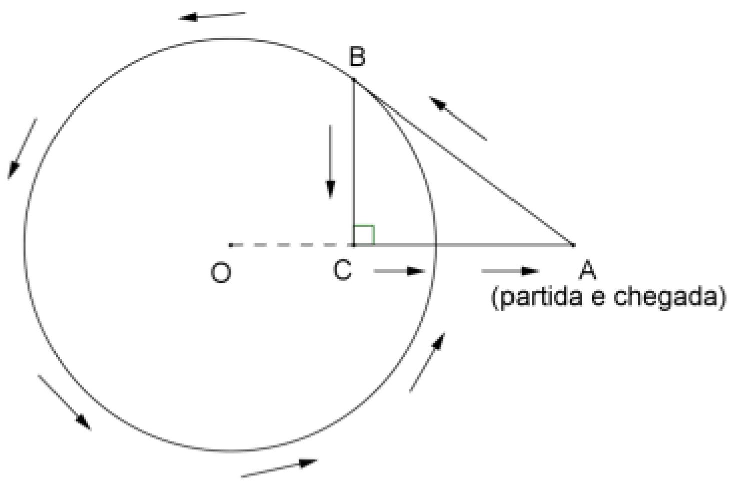
a) 6π metros.

b) 8π metros.

c) 10π metros.

d) 12π metros.

15. (EPCAr 2015) Uma das provas de uma gincana consiste numa corrida realizada segundo o percurso descrito na figura abaixo.



Um atleta parte do ponto A, perfazendo $8\,km$ em direção ao ponto B que está sobre a circunferência de centro O e raio $6\,km$, percorrendo-a uma vez. Chegando novamente em B, segue em direção ao ponto C e, finalmente, vai em direção ao ponto A.

Sabendo-se que $\overline{AB}$ é tangente à circunferência e considerando $\pi = 3{,}14$, pode-se afirmar que, o percurso dessa prova, em quilômetros, está compreendido entre

a) 56 e 57

b) 57 e 58

c) 58 e 59

d) 59 e 60

16. (CN 1990) De um ponto fora de um círculo de 60 cm de raio traçam-se duas tangentes. Os pontos de tangência determinam na circunferência um arco de 10π cm. O ângulo formado pelas duas tangentes vale:

a) $30°$

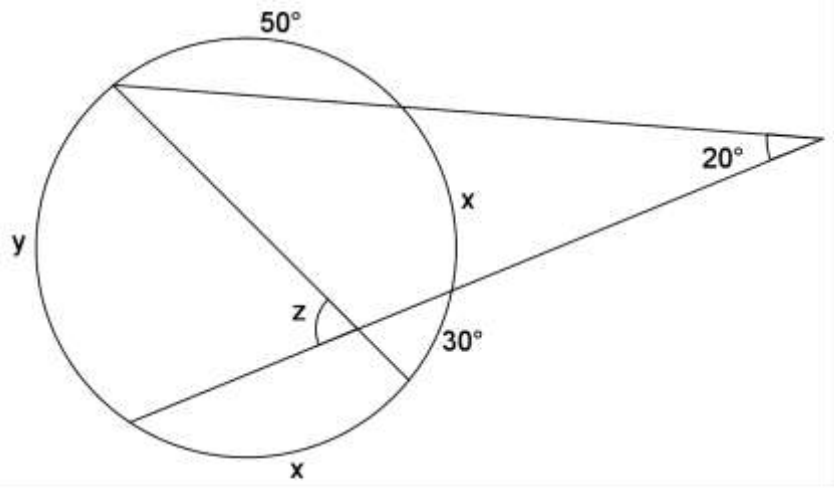
b) $120°$

c) $145°$

d) $150°$

e) $330°$

17. (CN 1993) Considere a figura, onde $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são medidas angulares de arcos e $\underline{z}$ é a medida de ângulo assinalado. Pode-se afirmar que $x+y+z$ é igual a:



a) 255°

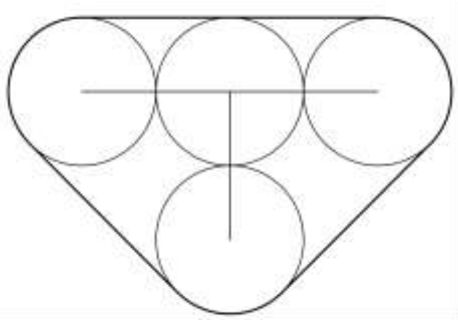
b) 265°

c) 275°

d) 285°

e) 295°

18. (CN 1997) As quatro circunferências da figura abaixo têm raios $r=0,5$. O comprimento da linha que as envolve é aproximadamente igual a:



a) 6,96

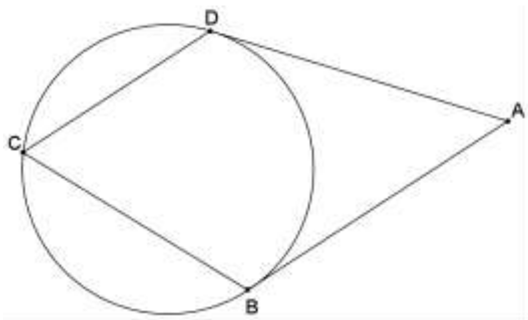
b) 7,96

c) 8,96

d) 9,96

e) 10,96

19. (CN 1998) Na figura abaixo os segmentos AB e DA são tangentes à circunferência determinada pelos pontos B, C e D. Sabendo-se que os segmentos AB e CD são paralelos, pode-se afirmar que o lado BC é:



a) a média aritmética entre AB e CD.

b) a média geométrica entre AB e CD.

c) a média harmônica entre AB e CD.

d) o inverso da média aritmética de AB e CD.

e) o inverso da média harmônica entre AB e CD.

20. (CN 2000) Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo $D\hat{A}I$ mede 40° e o ângulo $C\hat{B}I$ mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo $A\hat{P}C$ mede:

a) 10°

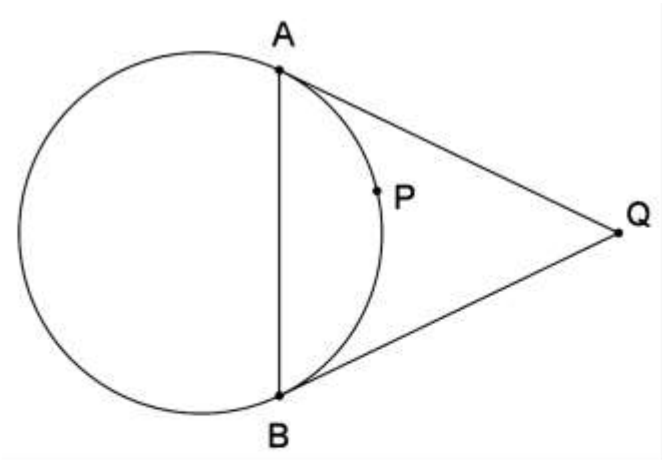
b) 20°

c) 30°

d) 40°

e) 50°

21. (CN 2002) Na figura abaixo, o ponto P do menor arco AB dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:



a) $\sqrt{30}$

b) $2\sqrt{15}$

c) 16

d) 18

e) $6\sqrt{10}$

22. (CN 2003) Se um segmento $\overline{AB}$ tem $2\,\text{cm}$ de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135° desse segmento mede

a) $\sqrt{2}+1$

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}-1$

d) $\sqrt{3}$

e) $2-\sqrt{2}$

23. (CN 2003) Considere um triângulo retângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se x, y e z, $(x<y<z)$ são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então

a) $z=360^\circ-y$

b) $z=x+y$

c) $x+y+z=180^\circ$

d) $x+y=108^\circ$

e) $z=2x+y$

24. (CN 2008) ABC é um triangulo retângulo de hipotenusa BC e altura AH. Seja P um ponto do mesmo semiplano de A em relação à reta suporte de BC. Os ângulos HPC e ABC são iguais a 15°. Se o segmento PH é o maior possível, pode-se afirmar que PH é igual a:

a) AC

b) AB

c) $BC/2$

d) $HC/2$

e) AH

25. (CN 2009) Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P pertencente ao círculo circunscrito ao triângulo ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo BPC tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:

a) 25°

b) 45°

c) 50°

d) 65°

e) 85°

26. (CN 2010) Sobre o lado BC do quadrado ABCD constrói-se um triângulo PBC, sendo o ponto P externo ao quadrado e o quadrilátero PCDB convexo. Se o ângulo PDC é congruente ao ângulo PBC, pode-se afirmar que o quadrilátero PCDB é

a) sempre inscritível em um círculo.

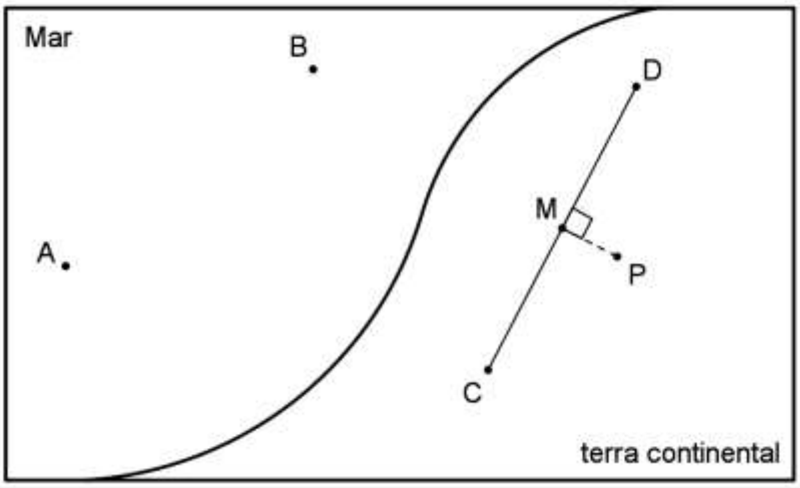
b) sempre circunscritível a um círculo.

c) inscritível em um círculo apenas se for um trapézio.

d) circunscritível a um círculo apenas se for um trapézio.

e) impossível de ser inscrito em um círculo.

27. (CN 2012) Observe a figura a seguir



A figura acima mostra, num mesmo plano, duas ilhas representadas pelos pontos 'A' e 'B' e os pontos 'C', 'D', 'M' e 'P' fixados no continente por um observador. Sabe-se que $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, 'M' é o ponto médio de $CD = 100\,m$ e que $PM = 10\,m$ é perpendicular a CD. Nessas condições, a distância entre as ilhas é de:

a) $150\,m$

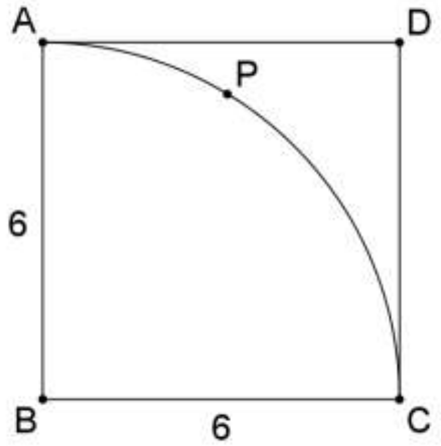
b) $130\,m$

c) $120\,m$

d) $80\,m$

e) $60\,m$

28. (CN 2014) Analise a figura a seguir.



A figura acima exibe o quadrado $ABCD$ e o arco de circunferência APC com centro em B e raio $AB = 6$. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, é correto afirmar que o ângulo PCD mede:

a) 36°

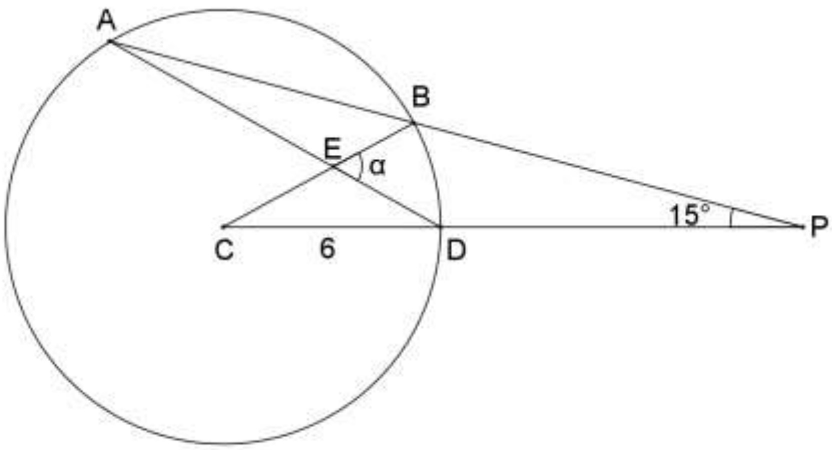
b) 30°

c) 28°

d) 24°

e) 20°

29. (CN 2014) Analise a figura a seguir.



Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traçam-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traçam-se ainda os segmentos AD e CD, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é 15° e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo α?

a) 75°

b) 60°

c) 45°

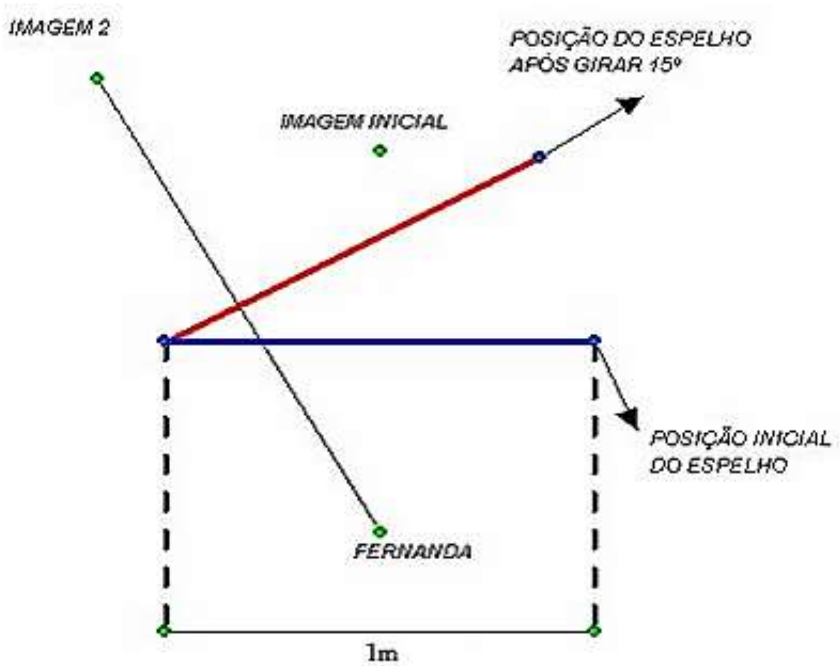
d) 30°

e) 15°

30. (IFRJ 2010) Fernanda está de pé, penteando-se em frente ao seu espelho fixado em uma porta de armário que pode girar. Num dado momento, um vento faz o espelho girar. Fernanda, que também é professora de Matemática, percebeu que sua imagem se movimentou e imaginou o seguinte problema para desafiar seus alunos:

“Eu me encontrava distante meio metro do espelho, antes de ele ter girado, com minha imagem centralizada. O espelho girou 15°, afastando-se de mim. Minha imagem se deslocou, descrevendo um caminho. Sabendo-se que o meu espelho é retangular, de dimensões $1\,\text{m} \times 1{,}7\,\text{m}$ e que ocupa toda a porta do armário, determine a natureza do caminho descrito pela imagem e o seu comprimento em metros.”

A figura a seguir é um esquema que descreve a situação envolvida no desafio proposto.



Assinale, dentre as opções abaixo, a resposta para o problema proposto por Fernanda.

a) um segmento de reta de comprimento $\frac{1}{6}$.

b) um arco de circunferência de comprimento $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

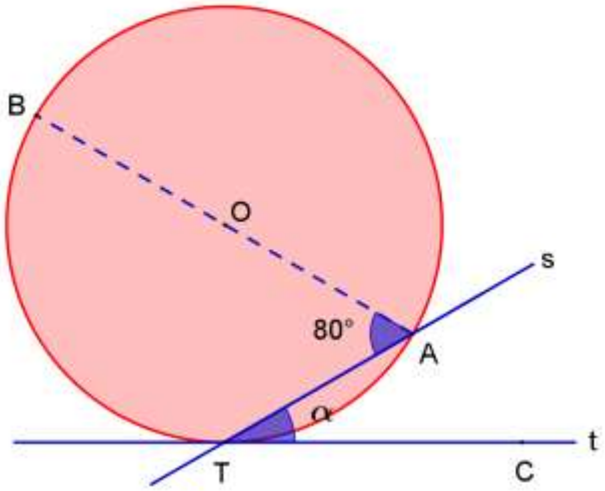
c) um arco de circunferência de comprimento $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

d) um segmento de reta de comprimento $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

e) um segmento de reta de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

GABARITO

1.



O ângulo de 80° é um ângulo inscrito e vale metade do arco por ele determinado. Assim, temos:

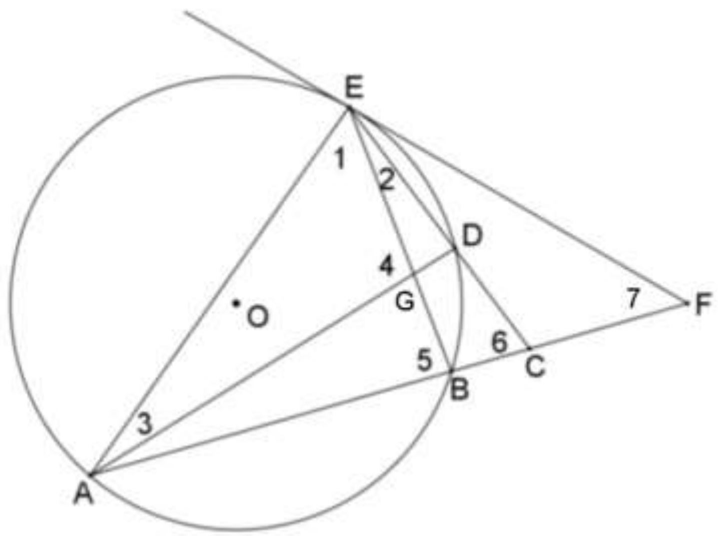
$B\hat{A}T = 80^\circ = \frac{BT}{2} \Leftrightarrow BT = 160^\circ$.

Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, então $AT + BT = 180^\circ \Leftrightarrow AT + 160^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AT = 20^\circ$.

O ângulo $\alpha = A\hat{T}C$ é um ângulo de segmento e mede metade do arco por ele determinado, ou seja, $\alpha = \frac{AT}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$.

RESPOSTA: A

2.



$\hat{1} = A\hat{E}B = \frac{AB}{2} = 49° \Leftrightarrow AB = 98°$

$\hat{2} = B\hat{E}D = \frac{BD}{2} = 18° \Leftrightarrow BD = 36°$

$\hat{3} = D\hat{A}E = \frac{DE}{2} = 34° \Leftrightarrow DE = 68°$

$AE = 360° - AB - BD - DE = 360° - 98° - 36° - 68° = 158°$

$\hat{4} = A\hat{G}E = \frac{AE + BD}{2} = \frac{158° + 36°}{2} = 97°$ (ângulo excêntrico interno)

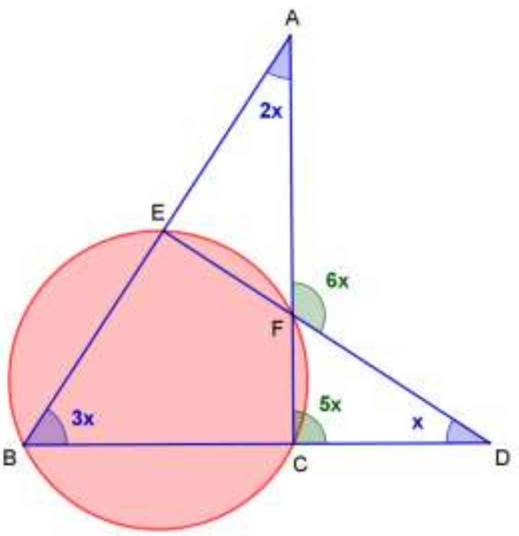
$\hat{5} = A\hat{B}E = \frac{AE}{2} = \frac{158°}{2} = 79°$ (ângulo inscrito)

$\hat{6} = A\hat{C}E = \frac{AE - BD}{2} = \frac{158° - 36°}{2} = 61°$ (ângulo excêntrico externo)

$\hat{7} = A\hat{F}E = \frac{AE - BE}{2} = \frac{158° - (36° + 68°)}{2} = 27°$ (ângulo excêntrico externo)

RESPOSTA: D

3.



$A\hat{C}D = 2x + 3x = 5x$, pois é ângulo externo do ΔABC.

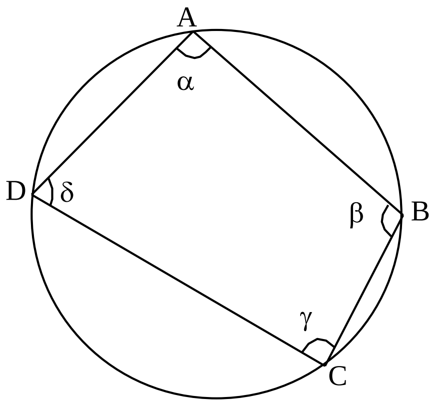
$D\hat{F}A = x + 5x = 6x$, pois é ângulo externo do ΔCDF.

O quadrilátero BCFE é inscritível, então $C\hat{B}E + C\hat{F}E = 180^\circ \Leftrightarrow 3x + 6x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 20^\circ$.

REFERÊNCIA: High School Mathematics Competition – University of Maryland – 2012

RESPOSTA: D

4.



Se o quadrilátero é inscritível, então os ângulos opostos são suplementares, o que implica $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$.

Vamos fatorar a expressão do enunciado:

$$\alpha\beta+\alpha\delta+\gamma\beta+\gamma\delta=\alpha(\beta+\delta)+\gamma(\beta+\delta)=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)=\pi\cdot\pi=\pi^2$$

REFERÊNCIA: EUREKA 5 – pg. 52

RESPOSTA: C

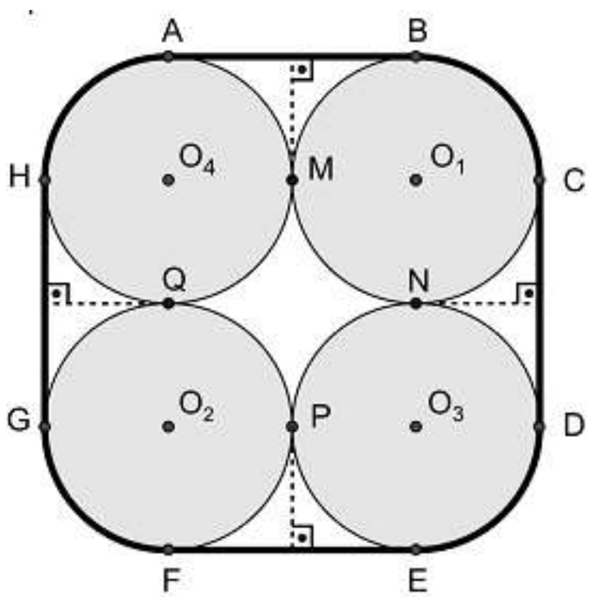
5. Se 10 voltas completas têm 2198 m, então uma volta completa tem $219{,}8\text{ m}$.

A medida de uma circunferência de diâmetro D é dada por $\pi\cdot\text{D}$.

$$\Rightarrow \pi\cdot\text{D}=219{,}8 \Rightarrow \text{D}=\frac{219{,}8}{\pi}=\frac{219{,}8}{3{,}14}=70\text{ m}$$

RESPOSTA: A

6.



Perímetro de cada círculo: $2\pi \cdot 10 = 20\pi$

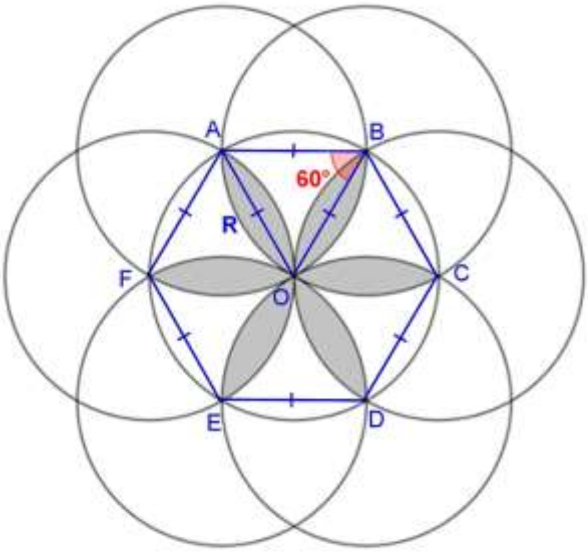
Como a correia é composta de 4 quartos de círculo, temos nas curvas o comprimento de 20π cm.

As distâncias AB, CD, EF e GH são idênticas e iguais a 2 raios, ou seja, 20 cm cada.

Logo, o perímetro da correia é $20\pi + 80 = 20(\pi + 4)$ cm.

RESPOSTA: C

7.



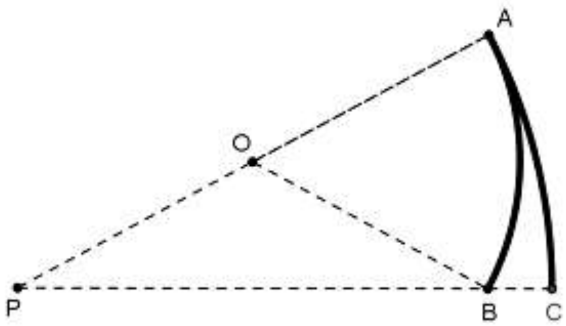
Supondo que os sete círculos tenham raio R, então o polígono ABCDEF é um hexágono regular.

O triângulo ABO é um triângulo equilátero. Assim, a figura sombreada é composta por 12 arcos de circunferência de raio R e ângulo central $60°$.

Portanto o perímetro da região sombreada é $12 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi R = 4\pi R$ e a razão entre o perímetro de um dos círculos e o da região sombreada é $\frac{2\pi R}{4\pi R} = \frac{1}{2}$.

RESPOSTA: A

8.



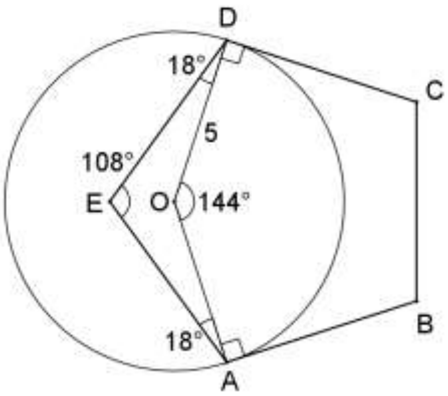
$OA = OB = R \Rightarrow AP = 2R$

$A\hat{P}C = \theta\,\text{rad} \Rightarrow O\hat{B}P = \theta\,\text{rad} \Rightarrow A\hat{O}B = 2\theta\,\text{rad}$

$m(AB) = 2\theta \cdot R = 3{,}2 \Rightarrow m(AC) = \theta \cdot 2R = 3{,}2\,\text{cm}$

RESPOSTA: C

9.



Seja O o centro da circunferência, então $OA \perp AB$ e $OD \perp DC$.

O ângulo interno do pentágono regular é $\dfrac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = 108^\circ$.

Assim, $O\hat{A}E = O\hat{D}E = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$ e $A\hat{E}D = 108^\circ$.

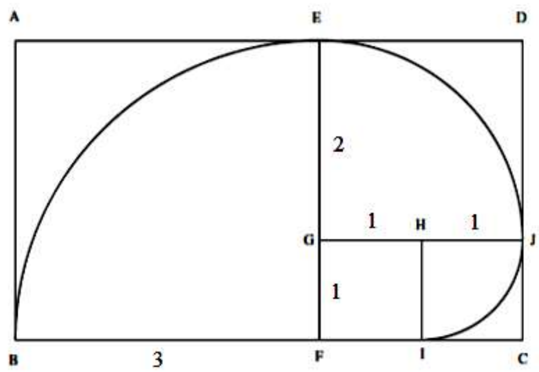
Na figura em formato de "boomerangue", temos:

$A\hat{O}D = O\hat{D}E + D\hat{E}A + E\hat{A}O = 18^\circ + 108^\circ + 18^\circ = 144^\circ$.

Como a circunferência tem raio $5\,\text{cm}$, a medida do menor arco AD é $\dfrac{144^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 5 = 4\pi\,\text{cm}$.

RESPOSTA: A

10.



O arco BE é um arco de 90° em uma circunferência de raio $3\,\text{cm}$, então seu comprimento é $\frac{2\pi\cdot 3}{4}\,\text{cm}$.

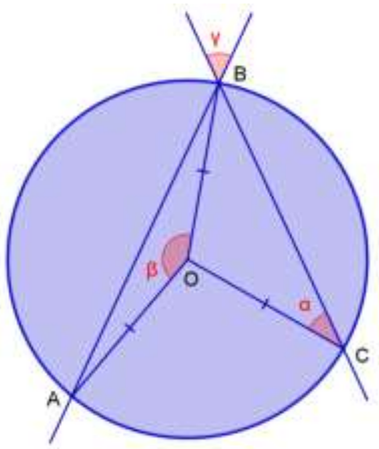
O arco EJ é um arco de 90° em uma circunferência de raio $2\,\text{cm}$, então seu comprimento é $\frac{2\pi\cdot 2}{4}\,\text{cm}$.

O arco JI é um arco de 90° em uma circunferência de raio $1\,\text{cm}$, então seu comprimento é $\frac{2\pi\cdot 1}{4}\,\text{cm}$.

Assim, o comprimento da espiral é $\frac{2\pi\cdot 3}{4}+\frac{2\pi\cdot 2}{4}+\frac{2\pi\cdot 1}{4}=\frac{2\pi\cdot(3+2+1)}{4}=3\pi\,\text{cm}$.

RESPOSTA: B

11.

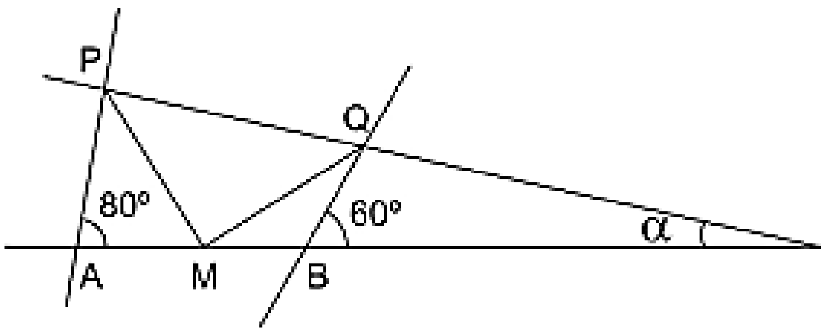


ΔAOB é isósceles e $\beta=150^\circ \Rightarrow O\hat{A}B=O\hat{B}A=15^\circ$

$O\hat{B}C=50^\circ-15^\circ=35^\circ$ e ΔBOC é isósceles $\Rightarrow \alpha=35^\circ$

RESPOSTA: C

12. Na 1ª figura, temos:



$AM=AP \Rightarrow A\hat{M}P=A\hat{P}M=\frac{180^\circ-80^\circ}{2}=50^\circ$

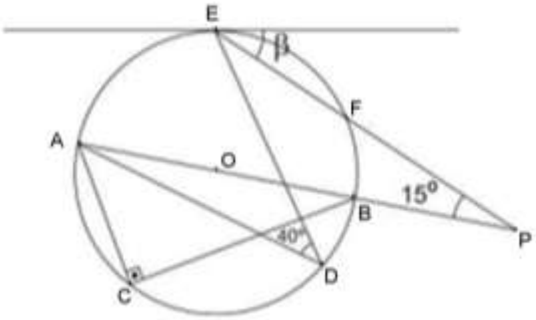
$$BM = BQ \Rightarrow B\hat{M}Q = B\hat{Q}M = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$P\hat{M}Q = 180^\circ - A\hat{M}P - B\hat{M}Q = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$$

$$MP = MQ \Rightarrow M\hat{P}Q = M\hat{Q}P = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

$$\alpha + 60^\circ = B\hat{Q}M + M\hat{Q}P = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

Na 2ª figura, temos:



$AE = 2 \cdot A\hat{D}E = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ (ângulo inscrito)

$A\hat{P}E = \frac{AE - FB}{2} \Leftrightarrow 15^\circ = \frac{80^\circ - FB}{2} \Leftrightarrow FB = 50^\circ$ (ângulo excêntrico externo)

Como $A\hat{C}B = 90^\circ$, então $\overline{AB}$ é um diâmetro. Assim,

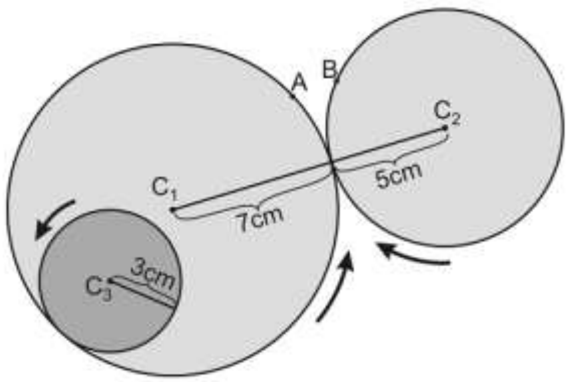
$AE + EF + FB = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + EF + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow EF = 50^\circ$.

$\beta = \frac{EF}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$ (ângulo de segmento)

Logo, $\alpha + \beta = 10^\circ + 25^\circ = 35^\circ$.

RESPOSTA: C

13.

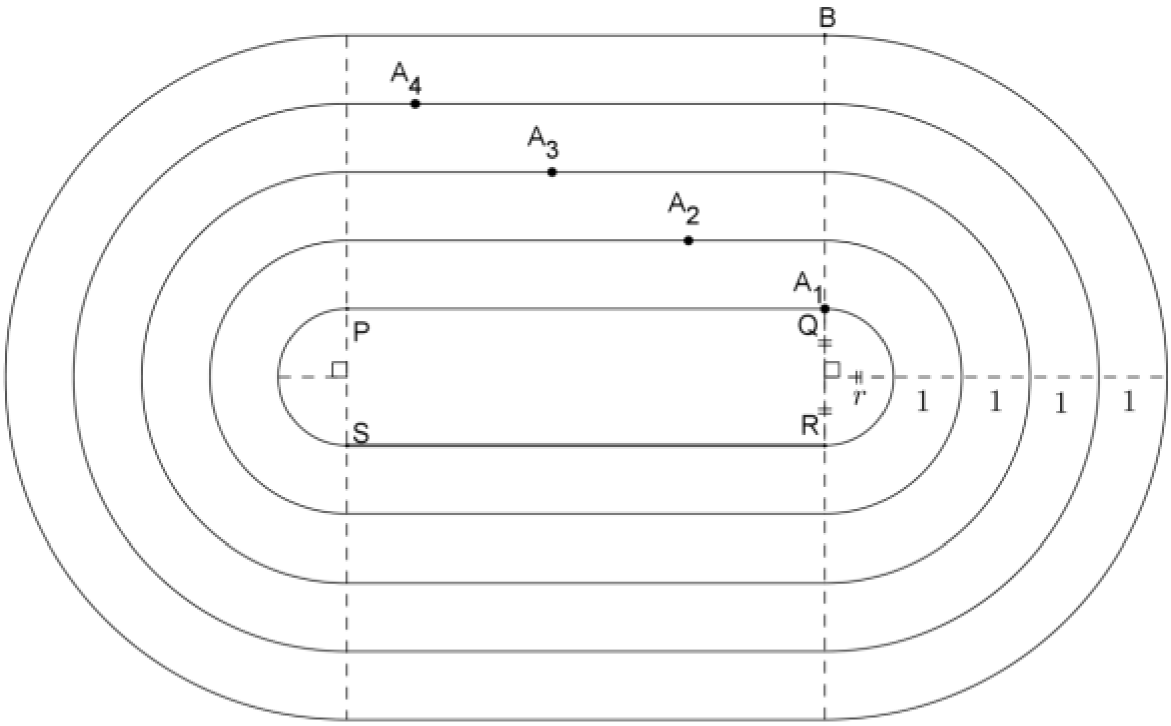


O comprimento de C_1 é $2\pi\cdot 7=14\pi\,\text{cm}$ e o comprimento de C_2 é $2\pi\cdot 5=10\pi\,\text{cm}$. Os pontos A e B percorrem sempre a mesma distância. Quando essa distância for, pela primeira vez, um múltiplo dos comprimentos das duas circunferências, os pontos vão voltar a se encontrar.

Como $14\pi\cdot 5=10\pi\cdot 7$ e $\text{mdc}(5,7)=1$, essa é a primeira vez que um múltiplo comum ocorre. Quando a circunferência C_1 percorre a distância $70\pi\,\text{cm}$, a circunferência C_3 percorre a mesma distância e, como seu comprimento é $2\pi\cdot 3=6\pi\,\text{cm}$, a circunferência C_3 dará $\frac{70\pi}{6\pi}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$ voltas.

RESPOSTA: C

14.



Como as semicircunferências QR e SP têm comprimento $100\,\text{m}$, então $2\pi r=200$.

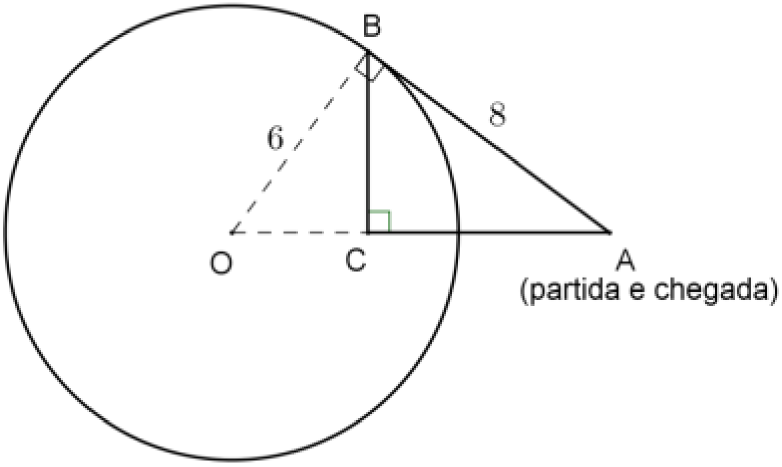
O comprimento da pista de A_4 (uma volta completa) é

$$200+2\pi\cdot(r+3)=200+2\pi r+6\pi=200+200+6\pi=(400+6\pi)\,\text{m}.$$

Como a pista da raia interna (percorrida por A_1) mede $400\,\text{m}$, então o atleta A_4 deve estar $(400+6\pi)-400=6\pi\,\text{m}$ à frente de A_1.

RESPOSTA: A

15.



Como AB é tangente à circunferência, então o triângulo ABO é retângulo.

No triângulo retângulo OBA, temos:

$OA^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Leftrightarrow OA = 10$

$OA \cdot BC = OB \cdot AB \Leftrightarrow 10 \cdot BC = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow BC = 4,8$

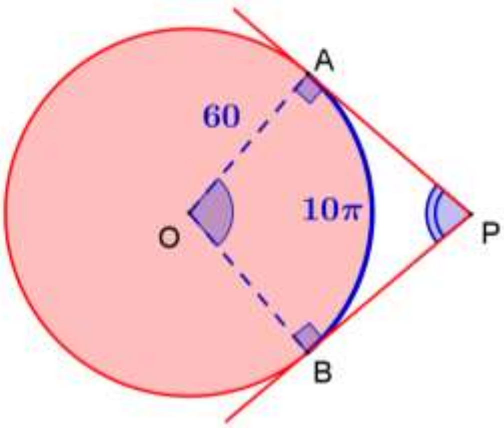
$AB^2 = OA \cdot CA \Leftrightarrow 8^2 = 10 \cdot CA \Leftrightarrow CA = 6,4$

O percurso da prova é dado por

$AB + 2p_{circ.} + BC + CA = 8 + 2\pi \cdot 6 + 4,8 + 6,4 = 19,2 + 12\pi = 19,2 + 12 \cdot 3,14 = 56,88\,\text{km}.$

RESPOSTA: A

16.

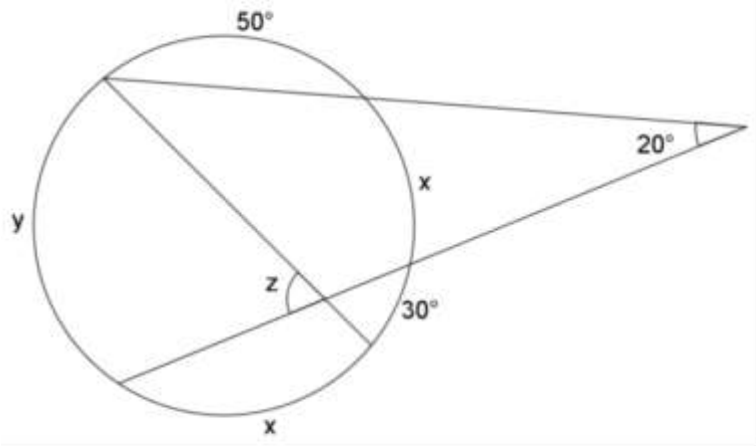


O arco de 10π cm está associado a um ângulo central de $\frac{10\pi}{60} = \frac{\pi}{6}\text{rad} = 30^\circ$.

O ângulo formado pelas tangentes é o suplemento desse ângulo central, então vale $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

RESPOSTA: D

17.



$$\begin{cases} 2x+y+30^\circ+50^\circ=360^\circ \\ \dfrac{y-x}{2}=20^\circ \\ \dfrac{y+30^\circ}{2}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=280^\circ \\ y-x=40^\circ \\ 2z-y=30^\circ \end{cases}$$

$$(2x+y)+2\cdot(y-x)=280^\circ+2\cdot 40^\circ \Leftrightarrow 3y=360^\circ \Leftrightarrow y=120^\circ$$

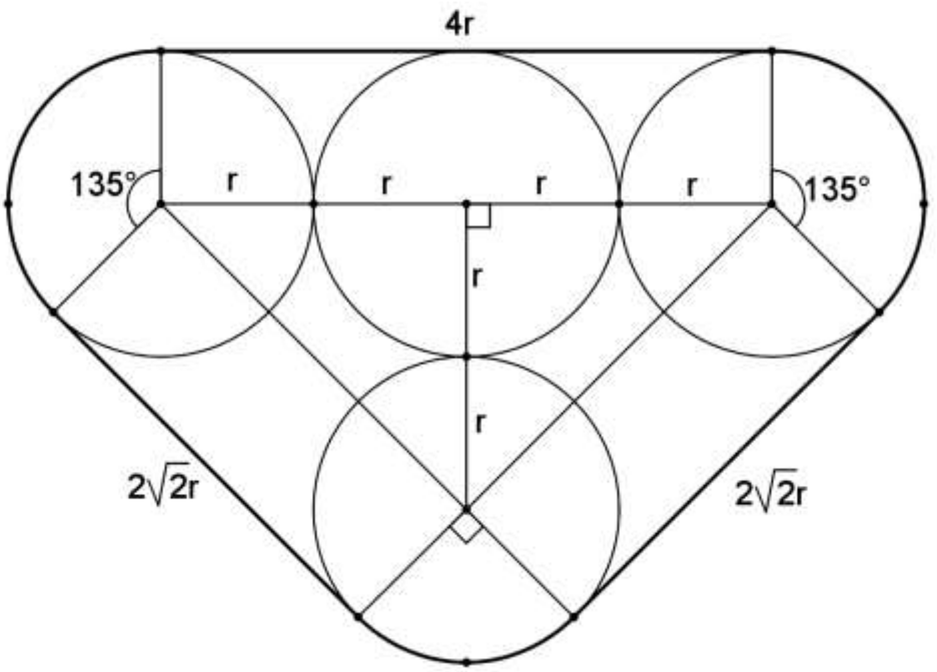
$$x=y-40^\circ=120^\circ-40^\circ \Leftrightarrow x=80^\circ$$

$$2z=y+30^\circ=120^\circ+30^\circ=150^\circ \Leftrightarrow z=75^\circ$$

$$\Rightarrow x+y+z=80^\circ+120^\circ+75^\circ=275^\circ$$

RESPOSTA: C

18.



O comprimento L da linha envolvente é dado pela soma de três segmentos de reta, mais dois arcos de $135°$ e um de $90°$ que somados têm o comprimento de uma circunferência completa. Assim,

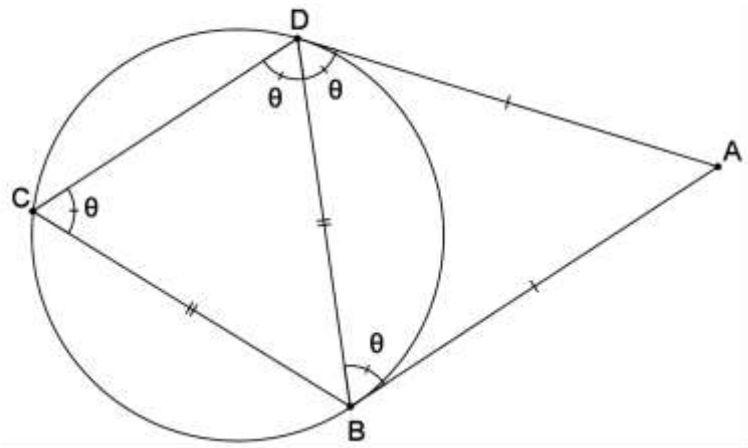
$L = 4r + 2\sqrt{2}r + 2\sqrt{2}r + 2\pi r = \left(4 + 4\sqrt{2} + 2\pi\right)r$.

Para $r = 0,5$, o comprimento é

$L = \left(4 + 4\sqrt{2} + 2\pi\right) \cdot 0,5 = 2 + 2\sqrt{2} + \pi \approx 2 + 2 \cdot 1,41 + 3,14 = 7,96$ u.c.

RESPOSTA: B

19.



$AB = AD \Rightarrow A\hat{B}D = A\hat{D}B = \theta$

$CD \parallel AB \Rightarrow B\hat{D}C = A\hat{B}D = \theta$

$B\hat{C}D = \frac{BD}{2} = A\hat{B}D = \theta$

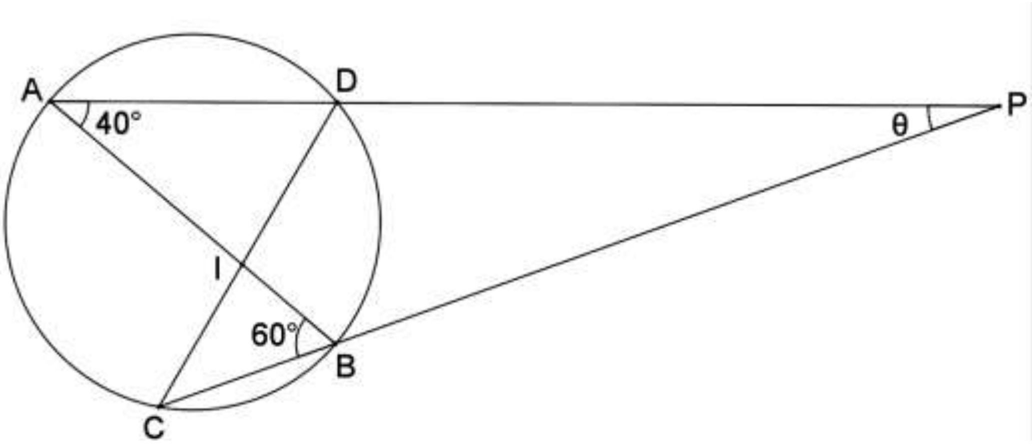
$B\hat{C}D = B\hat{D}C = \theta \Rightarrow BC = BD$

$\Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Leftrightarrow BC^2 = AB \cdot CD \Leftrightarrow BC = \sqrt{AB \cdot CD}$

Portanto, BC é a média geométrica entre AB e CD.

RESPOSTA: B

20.

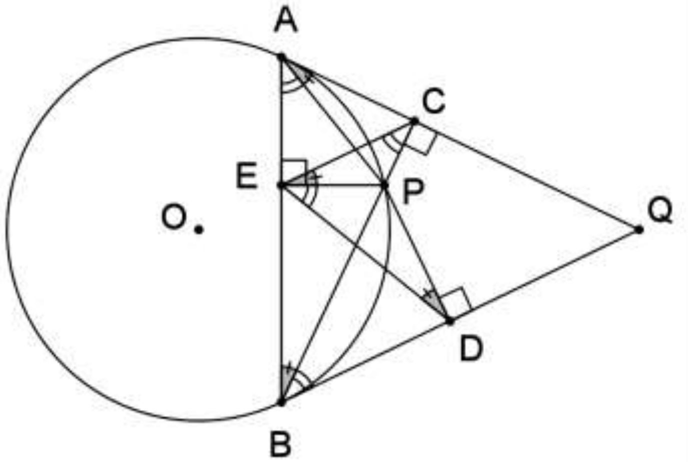


A figura acima representa a situação descrita no enunciado, onde $\theta = A\hat{P}C$. O ângulo $A\hat{B}C = 60^\circ$ é ângulo externo do ΔABP, então

$A\hat{B}C = B\hat{A}P + B\hat{P}A \Leftrightarrow 60^\circ = 40^\circ + \theta \Leftrightarrow \theta = 20^\circ$.

RESPOSTA: B

21.



Sejam PC, PD e PE as perpendiculares a AQ, BQ e AB, respectivamente.

Traçam-se PA, PB, EC e ED.

$A\hat{C}P + A\hat{E}P = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \#ACPE$ é inscritível

$B\hat{D}P + B\hat{E}P = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \#BDPE$ é inscritível

$$\Rightarrow C\hat{E}P = C\hat{A}P = \frac{AP}{2} = A\hat{B}P = E\hat{D}P$$

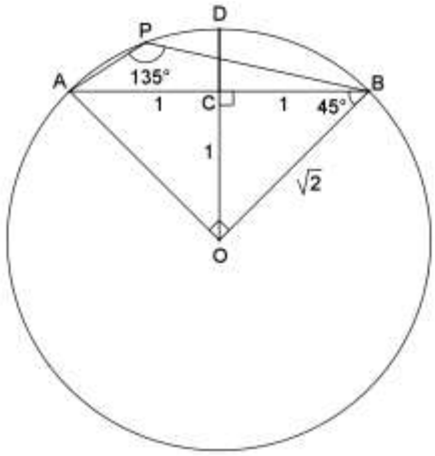
$$\Rightarrow D\hat{E}P = D\hat{B}P = \frac{BP}{2} = B\hat{A}P = E\hat{C}P$$

$C\hat{E}P = E\hat{D}P$ e $E\hat{C}P = D\hat{E}P \Rightarrow \Delta CEP \sim \Delta EDP \Rightarrow \dfrac{PE}{PD} = \dfrac{PC}{PE} \Leftrightarrow PE^2 = PC \cdot PD$

Nesse caso, temos $PC = 6\text{ cm}$ e $PD = 10\text{ cm}$, logo $PE^2 = 6 \cdot 10 \Leftrightarrow PE = 2\sqrt{15}\text{ cm}$.

RESPOSTA: B

22.



Seja APB o arco capaz de 135° sobre $\overline{AB}$, então $APB = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.

Seja O o centro da circunferência que contém o arco APB, então $A\hat{O}B = 90^\circ$.

A flecha do arco capaz é o segmento $\overline{CD}$ sobre a perpendicular a $\overline{AB}$ por O, e entre o segmento $\overline{AB}$ e o arco capaz.

Como $OC \perp AB$, então C é ponto médio de $\overline{AB}$, o que implica $AC = CB = 1$.

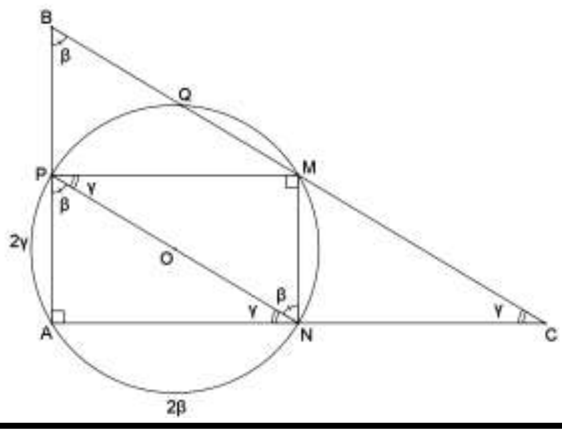
O triângulo AOB é isósceles, pois $OA = OB$ são raios do círculo, então $A\hat{B}O = B\hat{A}O = 45^\circ$.

O triângulo retângulo BCO será então um triângulo retângulo isósceles, o que implica $OC = CB = 1$ e $OB = \sqrt{2}$.

Logo, a flecha do arco capaz é $CD = OD - OC = OB - OC = \left(\sqrt{2} - 1\right)\text{cm}$.

RESPOSTA: C

23.



Seja o triângulo retângulo ABC, onde $\hat{A}=90°$, $\hat{B}=\beta$ e $\hat{C}=\gamma$, tais que $\gamma<\beta<90°$. Sejam M, N e P os pontos médios dos lados do triângulo, então $MN \| AB$, $MP \| AC$ e $NP \| BC$, e o ΔMNP também é um triângulo retângulo e o quadrilátero MNAP é um retângulo.

Assim, a circunferência que passa por M, N e P tem diâmetro NP e também passa por A.

$$M\hat{P}N = A\hat{N}P = A\hat{C}B = \gamma \Rightarrow AP = MN = 2\gamma$$

$$M\hat{N}P = A\hat{P}N = A\hat{B}C = \beta \Rightarrow AN = MP = 2\beta$$

$$NP \| BC \Rightarrow PQ = MN = 2\gamma$$

$$\Rightarrow MQ = MP - PQ = AN - AP \Leftrightarrow AN = AP + MQ$$

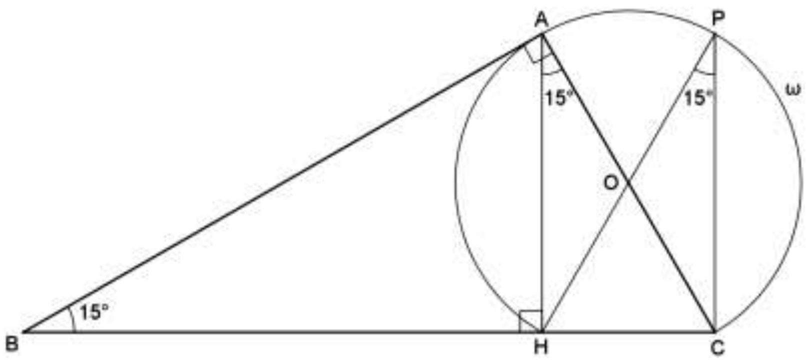
$$\Rightarrow AN > AP \text{ e } AN > QM$$

Assim, $AN = z$, e AP e MQ são x e y, em alguma ordem. Logo, $z = x + y$.

RESPOSTA: B

24.

A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado e foi desenhada fora de proporção para facilitar a visualização.



$$A\hat{B}C = 15^\circ \Leftrightarrow H\hat{A}C = 15^\circ$$

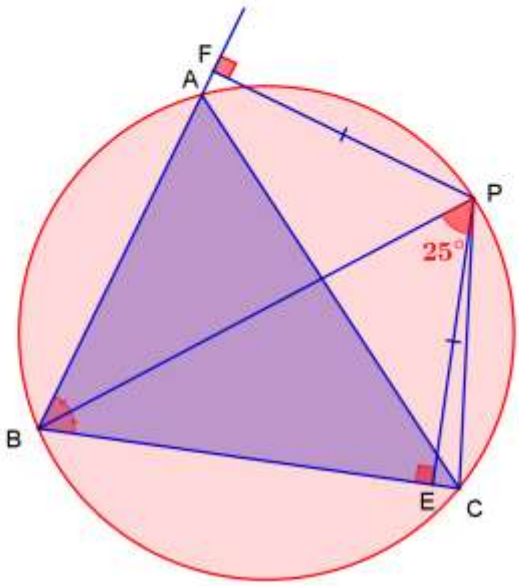
Como $H\hat{A}C = H\hat{P}C = 15^\circ$, então A e P pertencem ao arco capaz de 15° sobre o segmento HC.

Como $A\hat{H}C = 90^\circ$, então AC é diâmetro do círculo ω que passa por H, A, P e C.

O segmento PH é uma corda do círculo ω, então, para que PH seja máximo, deve ser igual ao diâmetro do círculo, ou seja, $PH = AC$.

RESPOSTA: A

25.



Como P é equidistante das retas suportes de AB e de BC, então P está sobre a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$.

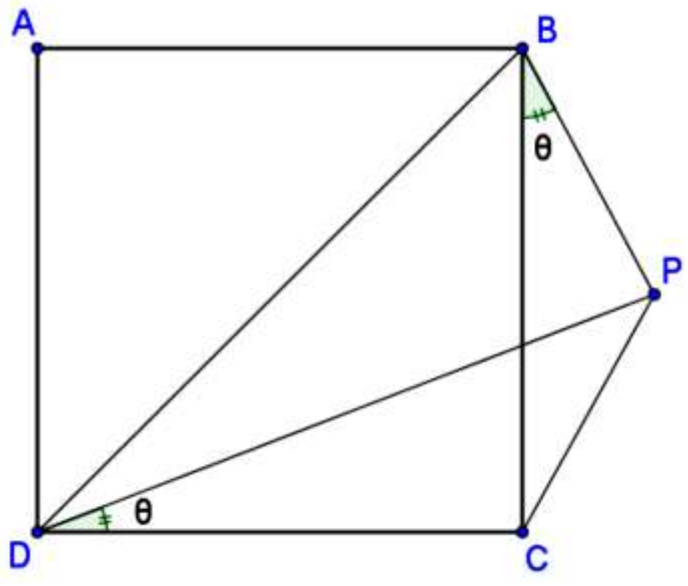
$B\hat{P}C = 25° \Rightarrow BC_{menor} = 50°$

O ângulo $\hat{A}$ é inscrito ao arco BC, então $\hat{A} = 25°$ ou $\hat{A} = 155°$.

Mas, como o $\triangle ABC$ é acutângulo, então $\hat{A} = 25°$.

RESPOSTA: A

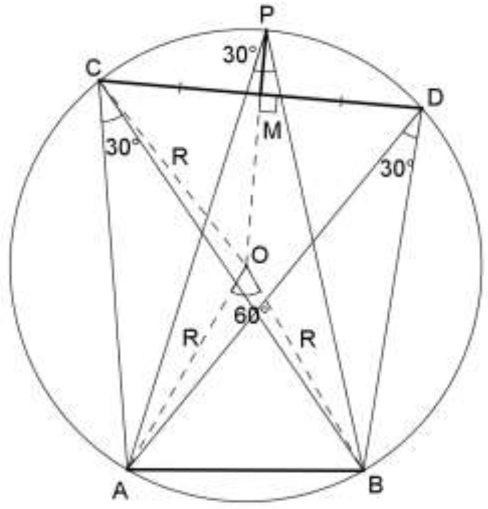
26.



$P\hat{D}C = P\hat{B}C = \theta \Rightarrow$ B e D estão num arco capaz de θ sobre PC $\Rightarrow$ $\#PCDB$ é inscritível

RESPOSTA: A

27.



Como $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{P}B = 30^\circ$, então C, D e P pertencem ao arco capaz de 30° sobre $\overline{AB}$.

Como M é ponto médio de $\overline{CD}$ e $\overline{PM} \perp \overline{CD}$, então $\overline{PM}$ é uma flecha da circunferência e seu prolongamento passa pelo centro O.

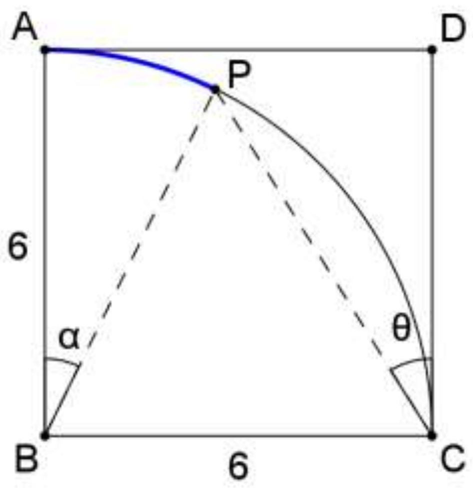
Seja R o raio da circunferência que contém o arco capaz, então, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCM, temos:

$$(R-10)^2 + 50^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 20R + 100 + 2500 = R^2 \Leftrightarrow R = 130$$

Como o $\triangle OAB$ é equilátero, então $\overline{AB} = R = 130\,\text{m}$.

RESPOSTA: B

28.



Na figura acima, sejam $A\hat{B}P = \alpha$ e $P\hat{C}D = \theta$.

O comprimento de um arco de circunferência de raio r determinado por um ângulo central $\alpha\,\text{rad}$ é $\ell = \alpha \cdot r$.

Logo, se o arco AP tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$, então o ângulo $A\hat{B}P$ em radianos é dado por $\alpha \cdot 6 = \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{10}\text{rad} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$.

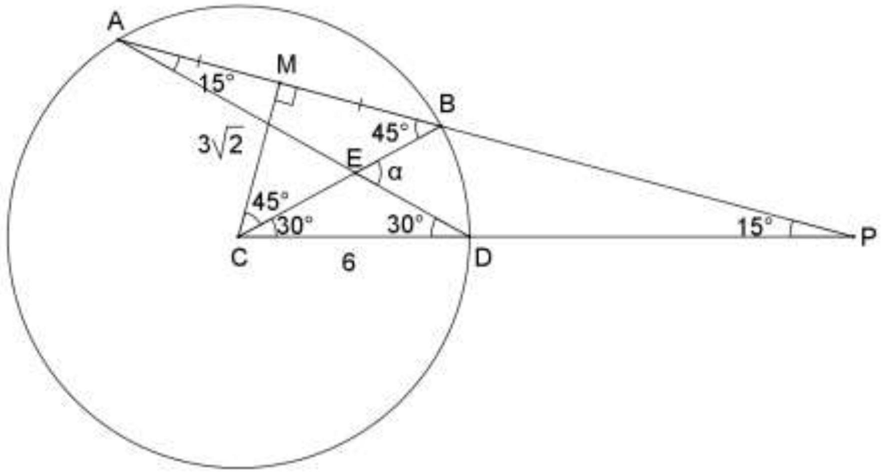
Como o $\# ABCD$ é um quadrado, então $A\hat{B}C = 90^\circ$ e $P\hat{B}C = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

O ângulo $P\hat{B}C = 72^\circ$ é o ângulo central que determina o arco PC, então $PC = 72^\circ$.

Como $CD \perp BC$, então o ângulo $P\hat{C}D = \theta$ é um ângulo de segmento, o que implica $\theta = \frac{PC}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

RESPOSTA: A

29.



Seja M o ponto médio do segmento AB, então $CM \perp AB$, o que implica $CM = 3\sqrt{2}$ (distância do ponto C ao segmento AB).

No triângulo retângulo BMC, temos $CB = 6$ e $CM = 3\sqrt{2}$, então

$$\text{sen} C\hat{B}M = \frac{CM}{CM} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}M = 45^\circ \text{ e } B\hat{C}M = 45^\circ.$$

No triângulo retângulo PMC, temos $P\hat{C}M = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$, então

$$D\hat{C}B = D\hat{C}M - B\hat{C}M = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ.$$

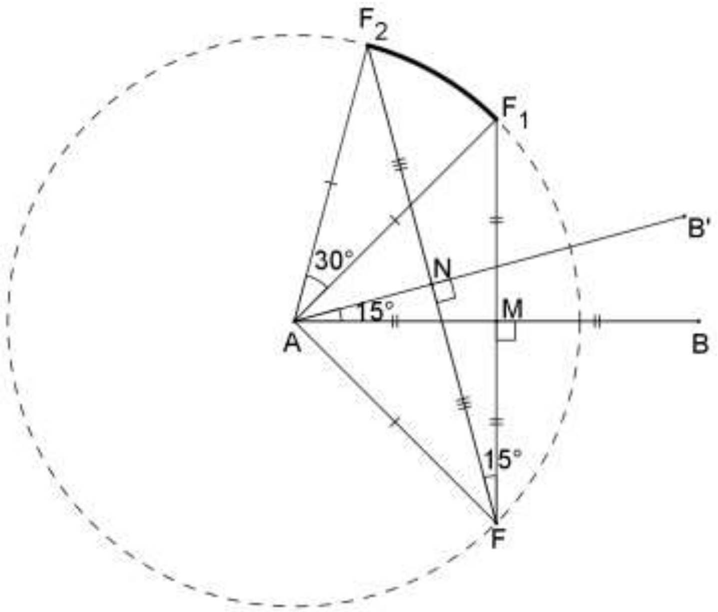
Como o ângulo $D\hat{C}B = 30^\circ$ é um ângulo central, então $BD = 30^\circ$ e o ângulo inscrito $B\hat{A}D = \frac{BD}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

O ângulo $A\hat{D}C$ é ângulo externo do triângulo ADP, então $A\hat{D}C = D\hat{A}P + D\hat{P}A = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

O ângulo $B\hat{E}D = \alpha$ é ângulo externo do triângulo CDE, então $\alpha = E\hat{C}D + E\hat{D}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

RESPOSTA: B

30.



O segmento $\overline{AB}$ da figura representa o espelho em sua posição inicial, o ponto F representa a Fernanda e $\overline{AM}=\overline{MB}=\overline{FM}=0,5$.

As imagens nas duas posições, F_1 e F_2, são obtidas pela reflexão de F em relação a $\overline{AB}$ e $\overline{AB'}$, respectivamente. Assim, $\overline{FF_1}\perp\overline{AB}$, $\overline{FM}=\overline{MF_1}$, $\overline{FF_2}\perp\overline{AB'}$, $\overline{FN}=\overline{NF_2}$.

Isso implica que $\overline{AF}=\overline{AF_1}$ e $\overline{AF}=\overline{AF_2}$, e, portanto, $\overline{AF_1}=\overline{AF_2}$.

Note que, qualquer que seja o ângulo de rotação ao redor de A, a distância da nova imagem ao ponto A será igual a $\overline{AF}$, ou seja, as imagens estão sobre um arco de circunferência de cento A.

$$\overline{AM}=\overline{FM}=0,5\Rightarrow\overline{AF}=\sqrt{0,5^2+0,5^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

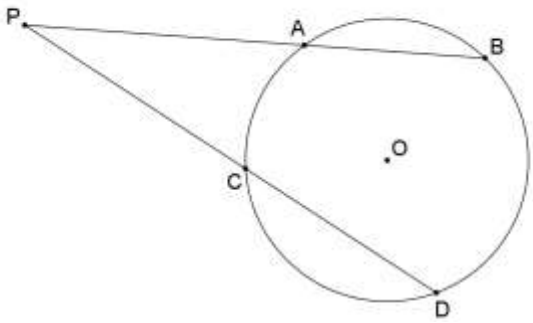
O comprimento do arco $F_1F_2=30^\circ$ é $2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ m.

RESPOSTA: B

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

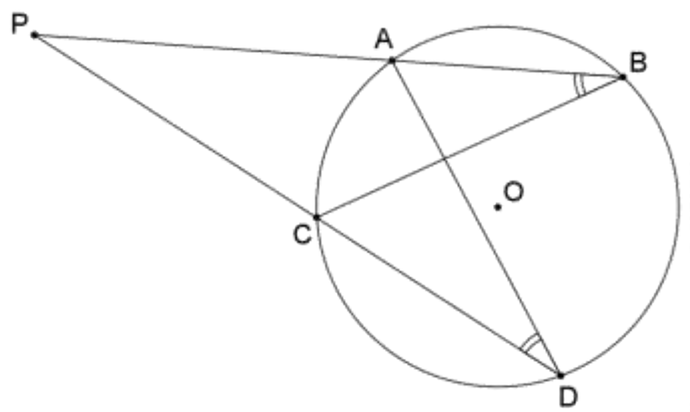
1. POTÊNCIA DE PONTO EXTERIOR

Se por um ponto P exterior a uma circunferência são traçadas duas secantes $\overline{PAB}$ e $\overline{PCD}$ a essa circunferência, então $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



$$\mathbf{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

DEMONSTRAÇÃO:



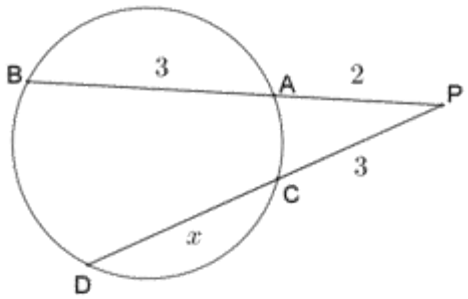
Traçando $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, temos $P\hat{B}C = P\hat{D}A = \frac{AC}{2}$.

Como $P\hat{B}C = P\hat{D}A$ e $B\hat{P}D$ é comum aos dois triângulos, então $\Delta PBC \sim \Delta PDA$ (A.A.A.).

Logo, $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$ $_{\text{C.Q.D.}}$.

EXEMPLO:

Calcule x na figura a seguir:

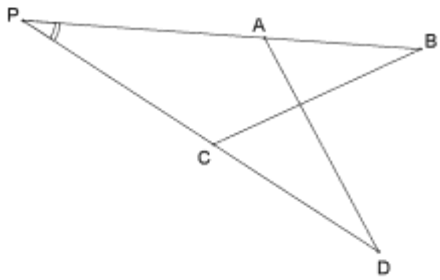


RESOLUÇÃO:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Leftrightarrow 2 \cdot 5 = 3 \cdot (3+x) \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$.

Sejam dois segmentos de reta $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$ de origem comum e os pontos $A \in PB$ e $C \in PD$ tais que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, então os pontos A, B, C e D são concíclicos.

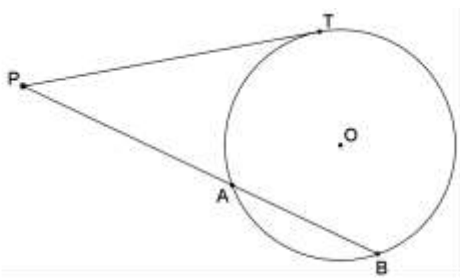
DEMONSTRAÇÃO:



$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Leftrightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ e $A\hat{P}D = C\hat{P}B$ (comum) $\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta CPB$ $(L_p.A.L_p.) \Rightarrow A\hat{D}P = C\hat{B}P = \theta$

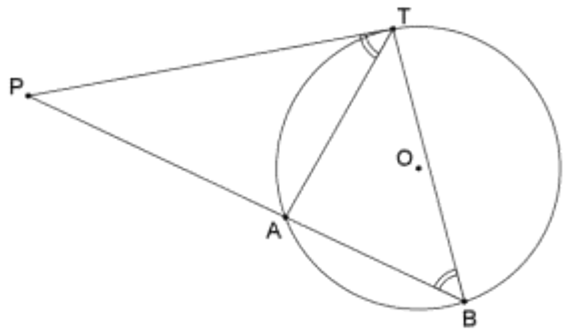
Portanto, os pontos B e D estão em um arco capaz de θ sobre o segmento AC, o que implica que os pontos A, B, C e D são concíclicos (C.Q.D.).

Se por um ponto P exterior a uma circunferência são traçadas uma secante $\overline{PAB}$ e uma tangente $\overline{PT}$ a essa circunferência, então $PT^2 = PA \cdot PB$.



$$PT^2 = PA \cdot PB$$

DEMONSTRAÇÃO:



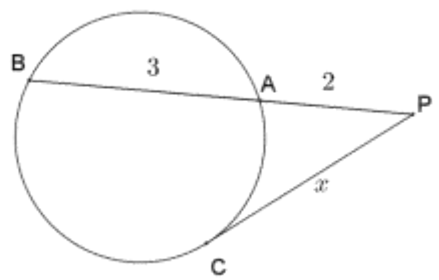
Traçando $\overline{BT}$ e $\overline{AT}$, temos $P\hat{B}T = P\hat{T}A = \frac{AT}{2}$.

Como $P\hat{B}T = P\hat{T}A$ e $B\hat{P}T$ é comum aos dois triângulos, então $\Delta PBT \sim \Delta PTA \text{ (A.A.A.)}$.

Logo, $\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Leftrightarrow PT^2 = PA \cdot PB$ C.Q.D. .

EXEMPLO:

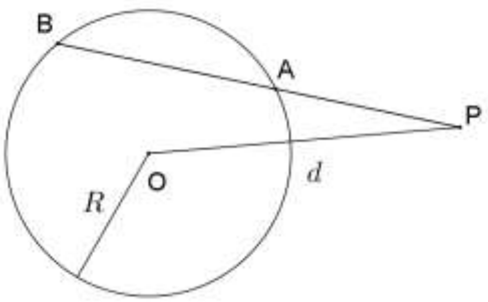
Calcule x na figura a seguir.



RESOLUÇÃO:

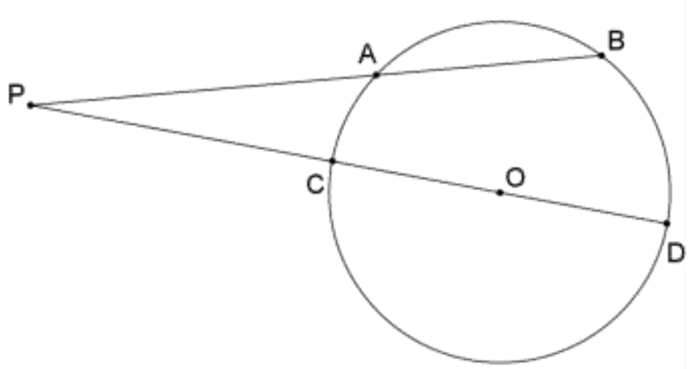
Sabe-se que $PC^2 = PA \cdot PB \Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$

Se por um ponto P exterior a uma circunferência de raio R e distante d unidades de seu centro $(d > R)$ é traçada uma secante $\overline{PAB}$ a essa circunferência, então $PA \cdot PB = d^2 - R^2$.



$$\mathbf{PA \cdot PB = d^2 - R^2}$$

DEMONSTRAÇÃO:



Na figura, temos: $PO = d$, $PC = PO - CO = d - R$ e $PD = PO + OD = d + R$.

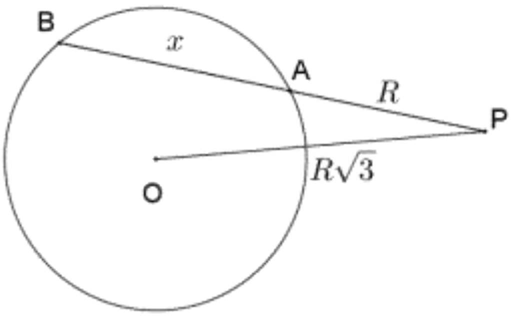
Pelo teorema anterior aplicável a duas secantes, temos:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (d-R) \cdot (d+R) \Leftrightarrow PA \cdot PB = d^2 - R^2$$

EXEMPLO:

Seja P um ponto exterior a um círculo de centro O e raio R e tal que $OP = R\sqrt{3}$. Traça-se por P a secante PAB ao círculo. Se $PA = R$, então calcule AB em função de R.

RESOLUÇÃO:



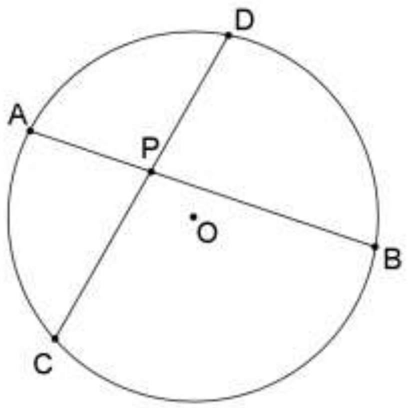
Usando a proposição anterior, temos:

$$PA \cdot PB = OP^2 - R^2 \Leftrightarrow R \cdot (R + x) = \left(R\sqrt{3}\right)^2 - R^2 \Leftrightarrow R(R+x) = 2R^2 \Leftrightarrow x = R$$

Observe que você poderia prolongar PO até encontrar a circunferência, obtendo uma segunda secante, e encontraria a mesma relação.

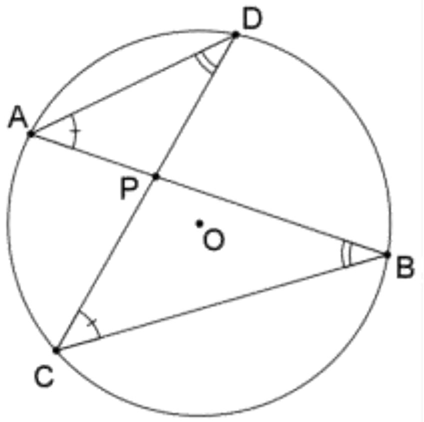
2. POTÊNCIA DE PONTO INTERIOR

Se por um ponto P interior a uma circunferência são traçadas duas cordas $\overline{APB}$ e $\overline{CPD}$ nessa circunferência, então $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

DEMONSTRAÇÃO:

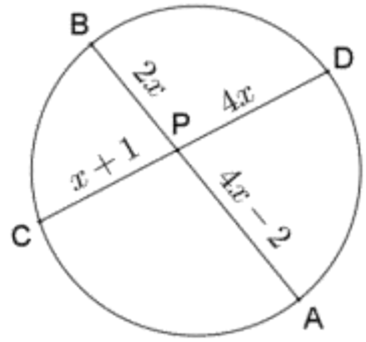


Tracemos as cordas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

$$B\hat{A}D = B\hat{C}D = \frac{BD}{2} \wedge A\hat{B}C = A\hat{D}C = \frac{AC}{2} \Rightarrow \Delta PAD \sim \Delta PCB\,(\text{A.A.A.}) \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \text{C.Q.D.}$$

EXEMPLO:

Calcule x na figura.



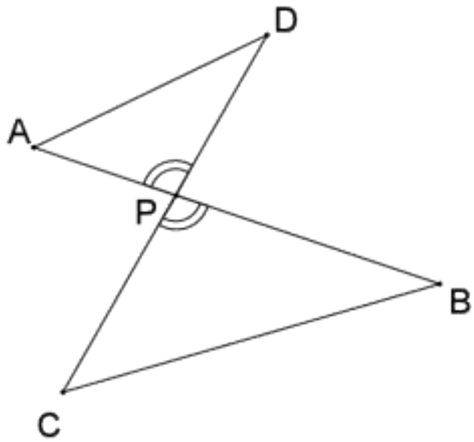
RESOLUÇÃO:

$AP \cdot BP = CP \cdot DP \Leftrightarrow (4x-2)\cdot 2x = (x+1)\cdot 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Note que como 2x e 4x são medidas de segmentos de reta, então $x \neq 0$.

Sejam dois segmentos de reta AB e CD que se cruzam em um ponto P tal que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, então os pontos A, B, C e D são concíclicos.

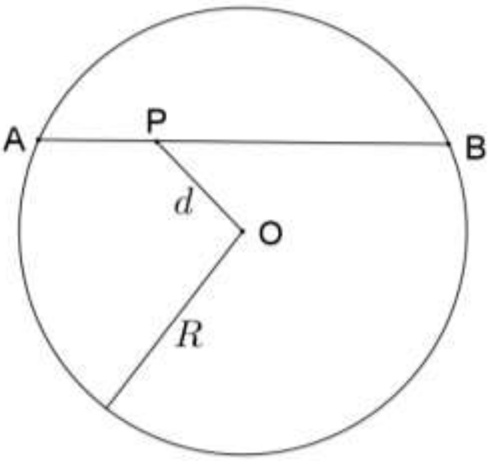
DEMONSTRAÇÃO:



$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Leftrightarrow \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$ e $A\hat{P}D = C\hat{P}B \Rightarrow \Delta APD \sim \Delta CPB \left(L_p AL_p\right) \Rightarrow B\hat{A}D = B\hat{C}D \wedge A\hat{D}C = A\hat{B}C$

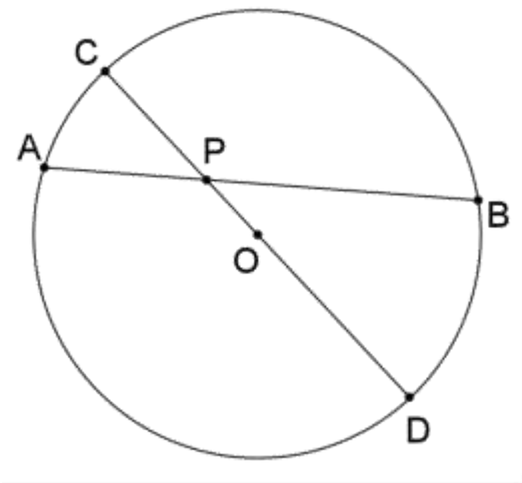
Como $B\hat{A}D = B\hat{C}D = \theta$, então os pontos A e C pertencem a um arco capaz de θ sobre BD. Portanto, os pontos A, B, C e D são concíclicos (C.Q.D.).

Se por um ponto P interior a uma circunferência de raio R e distante d unidades de seu centro $(d<R)$ é traçada uma corda $\overline{APB}$ nessa circunferência, então $PA \cdot PB = R^2 - d^2$.



$$\mathbf{PA \cdot PB = R^2 - d^2}$$

DEMONSTRAÇÃO:

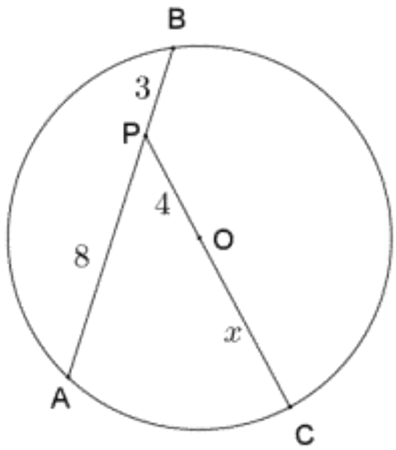


Na figura, temos: $PO = d$, $PC = CO - PO = R - d$ e $PD = PO + OD = d + R$.

Pelo teorema anterior aplicável a duas cordas, temos: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = (R - d) \cdot (R + d) \Leftrightarrow PA \cdot PB = R^2 - d^2$.

EXEMPLO:

Calcule x na figura, onde O é o centro da circunferência.



RESOLUÇÃO:

$$PA \cdot PB = R^2 - d^2 \Leftrightarrow 8 \cdot 3 = x^2 - 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

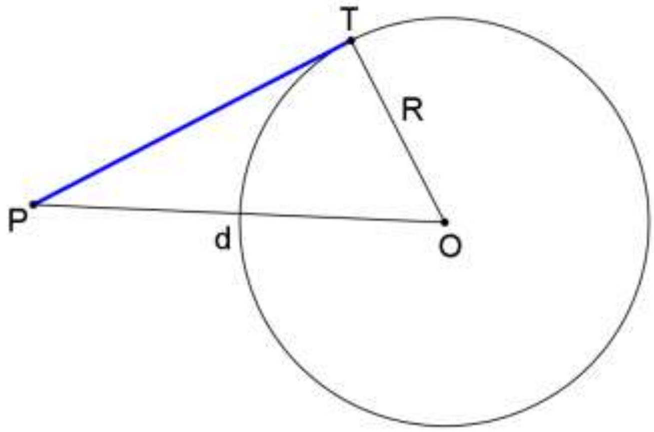
3. POTÊNCIA DE PONTO

A potência de um ponto P em relação a um círculo de centro O e raio R é dada por $Pot_{(O)}P = d^2 - R^2$, onde d é a distância de P ao centro do círculo.

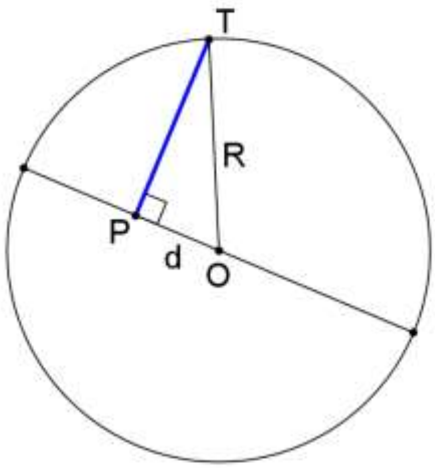
$$\text{P exterior ao círculo} \Rightarrow d > R \Rightarrow Pot_{(O)}P > 0$$
$$\text{P pertence ao círculo} \Rightarrow d = R \Rightarrow Pot_{(O)}P = 0$$
$$\text{P interior ao círculo} \Rightarrow d < R \Rightarrow Pot_{(O)}P < 0$$

Se um ponto está sobre uma circunferência, então a sua potência em relação à essa circunferência é nula.

Observe nas figuras a seguir que, pelo teorema de Pitágoras, temos $PT^2 = |d^2 - R^2| = |Pot_{(O)}P|$.



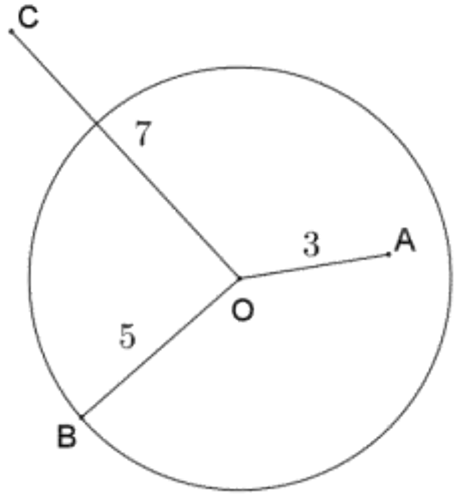
$Pot_{(O)}P = PT^2$



$Pot_{(O)}P = -PT^2$

EXEMPLO:

Considerando o círculo da figura de centro O, calcule $Pot_{(O)}A + Pot_{(O)}B + Pot_{(O)}C$.



RESOLUÇÃO:

$Pot_{(O)}A = OA^2 - R^2 = 3^2 - 5^2 = 9 - 25 = -16$

$\text{Pot}_{(O)}B = OB^2 - R^2 = 5^2 - 5^2 = 0$

$\text{Pot}_{(O)}C = OC^2 - R^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

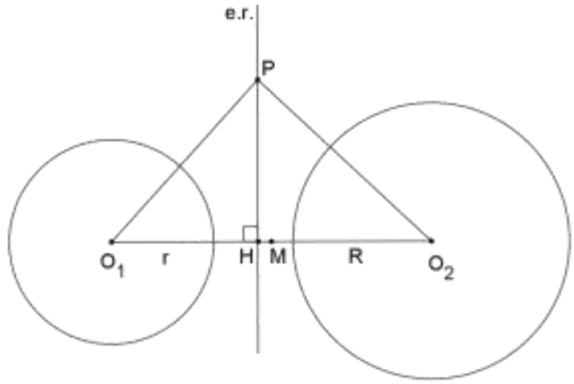
$\text{Pot}_{(O)}A + \text{Pot}_{(O)}B + \text{Pot}_{(O)}C = -16 + 0 + 24 = 8$

4. EIXO RADICAL

O lugar geométrico dos pontos cujas potências em relação a dois círculos não concêntricos são iguais é uma reta perpendicular à reta que une os centros dos dois círculos e é chamado **eixo radical** dos círculos.

Se $(e.r.)$ é o eixo radical dos círculos de centro O_1 e O_2, então $P \in (e.r.) \Leftrightarrow \text{Pot}_{(O_1)}P = \text{Pot}_{(O_2)}P$.

DEMONSTRAÇÃO:



Sejam os círculos de centros O_1 e O_2 e raios r e R, respectivamente.

Seja P um ponto que possui a mesma potência em relação aos dois círculos, então temos:

$PO_1^2 - r^2 = PO_2^2 - R^2 \Leftrightarrow PO_2^2 - PO_1^2 = R^2 - r^2$ (*)

Aplicando o teorema de Pitágoras nos ΔPHO_1 e ΔPHO_2, vem:

$PH^2 + HO_1^2 = PO_1^2 \wedge PH^2 + HO_2^2 = PO_2^2 \Rightarrow PO_2^2 - PO_1^2 = HO_2^2 - HO_1^2$ $(**)$

De (*) e (**), conclui-se que

$$HO_2^2 - HO_1^2 = R^2 - r^2 \Leftrightarrow (HO_2 + HO_1)(HO_2 - HO_1) = R^2 - r^2 \Leftrightarrow HO_2 - HO_1 = \frac{R^2 - r^2}{O_1O_2}$$

Como $HO_2 + HO_1 = O_1O_2$, temos $HO_2 = \frac{O_1O_2}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot O_1O_2}$ e $HO_1 = \frac{O_1O_2}{2} - \frac{R^2 - r^2}{2 \cdot O_1O_2}$.

Assim, se definirmos o ponto M médio de O_1O_2, temos $MH=\dfrac{R^2-r^2}{2\cdot O_1O_2}$.

Assim, conclui-se que P encontra-se em uma reta perpendicular a O_1O_2 passando pelo ponto H, definido pela expressão acima.

Por outro lado se um ponto P está na reta perpendicular a O_1O_2 passando pelo ponto H, então

$$PH^2+HO_1^2=PO_1^2 \wedge PH^2+HO_2^2=PO_2^2$$

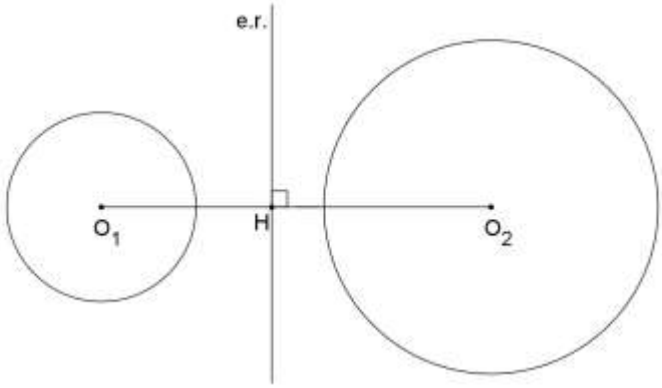
$$\Rightarrow PO_2^2-PO_1^2=HO_2^2-HO_1^2=(HO_2+HO_1)(HO_2-HO_1)=O_1O_2\cdot(2MH)=R^2-r^2$$
$$\Leftrightarrow PO_2^2-R^2=PO_1^2-r^2 \Leftrightarrow Pot_{(O_2)}P=Pot_{(O_1)}P$$

Logo, todo ponto da reta perpendicular a O_1O_2 passando pelo ponto H possui a mesma potência em relação aos dois círculos.

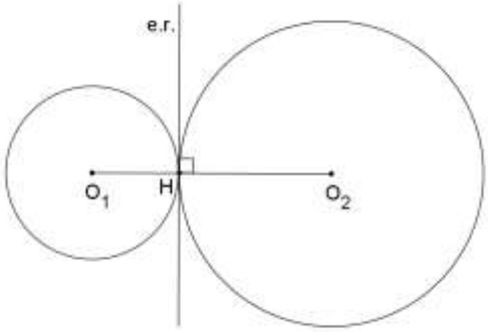
Note que, como $HO_2>HO_1$, então o ponto H está mais próximo do centro círculo de menor raio.

A seguir apresentamos a posição do eixo radical para as diversas posições relativas entre os círculos.

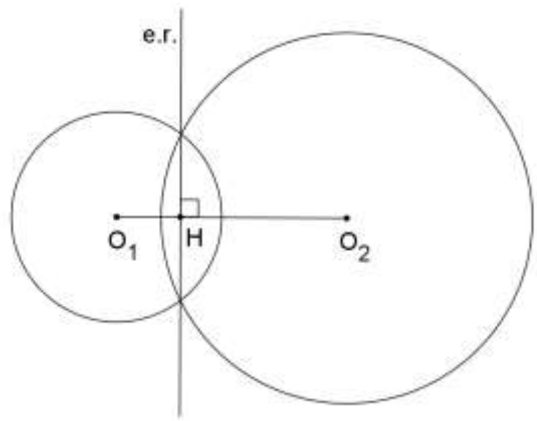
■ **CIRCUNFERÊNCIAS EXTERIORES**



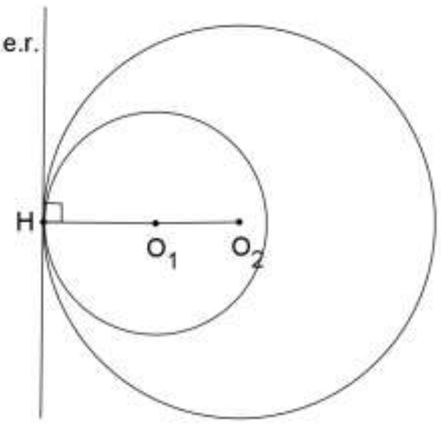
■ **CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES EXTERIORMENTE**



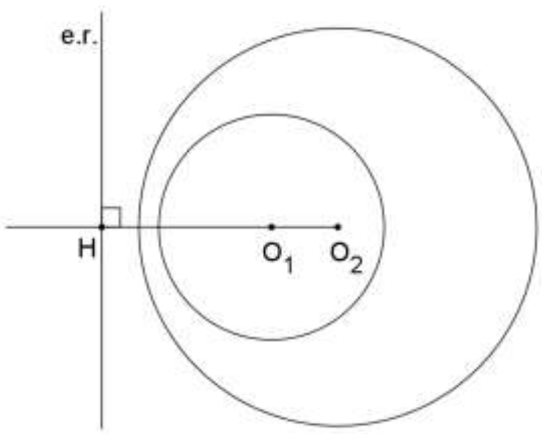
■ **CIRCUNFERÊNCIAS SECANTES**



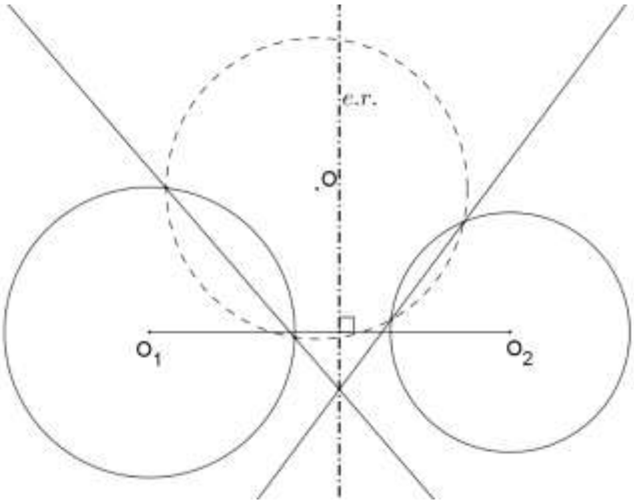
■ **CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES INTERIORMENTE**



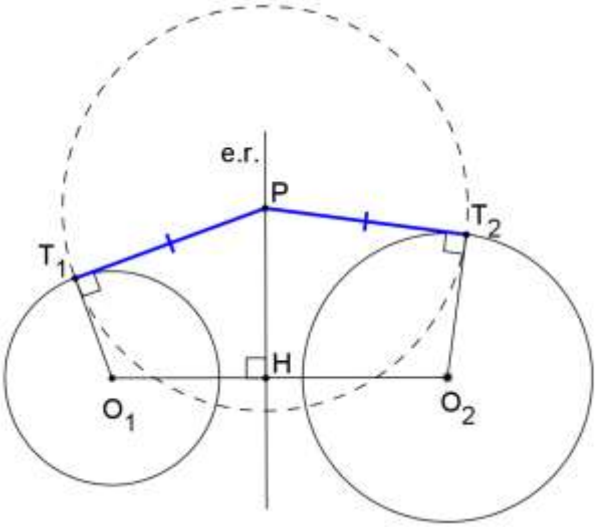
■ **CIRCUNFERÊNCIAS INTERIORES**



Para determinar o eixo radical de duas circunferências exteriores ou interiores, basta traçar uma circunferência auxiliar secante às duas circunferências. Os dois eixos radicais vão interceptar-se em um ponto que é o centro radical dos três círculos. A reta que passa por esse ponto e é perpendicular à reta que une os centros das duas circunferências iniciais é seu eixo radical.



O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos pontos dos quais pode-se traçar tangentes de mesmo comprimento aos dois círculos.

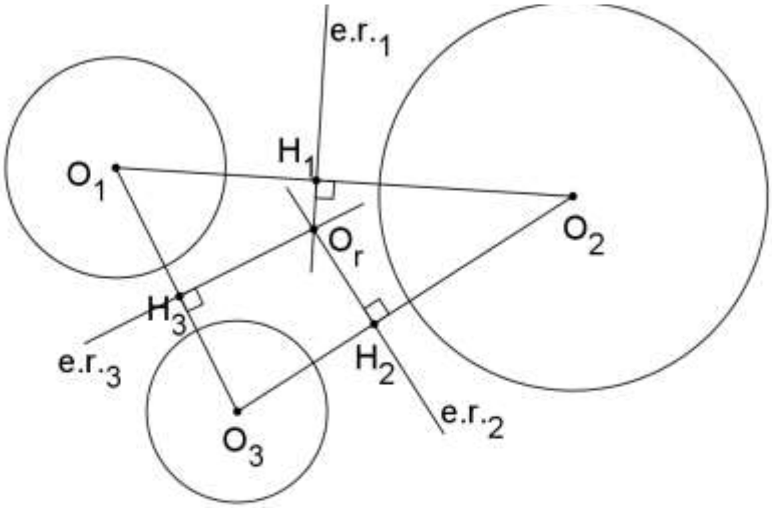


O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos dados.

5. CENTRO RADICAL

O lugar geométrico dos pontos de mesma potência em relação a três círculos não concêntricos e cujos centros não são colineares é um único ponto, denominado centro radical dos círculos.

Se O_r é o centro radical dos círculos de centro O_1, O_2 e O_3, então $Pot_{(O_1)}O_r = Pot_{(O_2)}O_r = Pot_{(O_3)}O_r$.



DEMONSTRAÇÃO:

Seja O_r a interseção dos eixos radicais $(e.r._1)$ dos círculos de centros O_1 e O_2, e $(e.r._2)$ dos círculos de centros O_2 e O_3. Seja ainda $(e.r._3)$ o eixo radical dos círculos de centros O_2 e O_3, então

$$\left.\begin{array}{l} O_r \in (e.r._1) \Rightarrow Pot_{(O_1)}O_r = Pot_{(O_2)}O_r \\ O_r \in (e.r._2) \Rightarrow Pot_{(O_2)}O_r = Pot_{(O_3)}O_r \end{array}\right\} \Rightarrow Pot_{(O_1)}O_r = Pot_{(O_2)}O_r = Pot_{(O_3)}O_r \Rightarrow O_r \in (e.r._3)$$

Logo, O_r é o centro radical dos três círculos.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. Por um ponto distante 7 cm do centro de uma circunferência de 5 cm de raio traça-se uma secante de modo que sua parte externa é 2/3 da secante total. Calcular, em cm, o comprimento da secante.

a) $4\sqrt{2}$

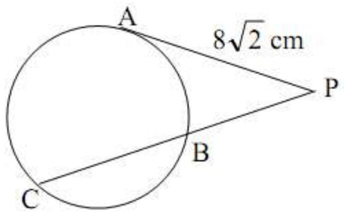
b) $4\sqrt{3}$

c) 4

d) 5

e) 6

2. (EEAr 2010) Na figura, $\overline{PA}$ é tangente à circunferência em A, e B é ponto médio de $\overline{PC}$. A medida de $\overline{PC}$, em cm, é:



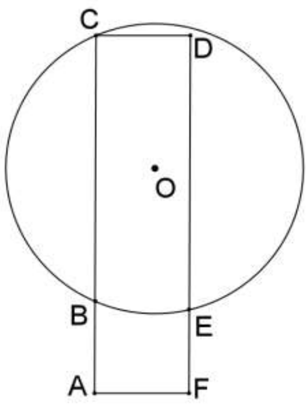
a) $12\sqrt{2}$

b) $14\sqrt{2}$

c) 16

d) 20

3. (CMRJ 2006) Na figura abaixo, ACDF é retângulo, $B \in \overline{AC}$ e $E \in \overline{FD}$. Os pontos B, C e E pertencem à circunferência de centro O. Sabe-se que $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$ são congruentes e, além disso, a medida de $\overline{OA}$ é 8 cm e a medida de $\overline{OC}$ é 5 cm. Calcule a área do retângulo ACDF em cm^2.



a) 24

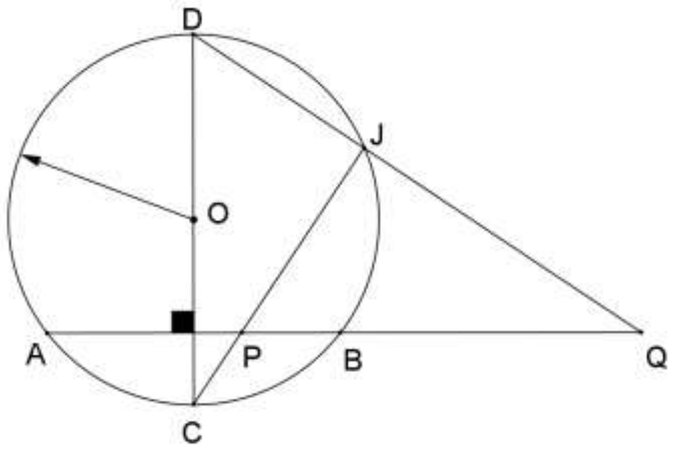
b) 32

c) 36

d) 39

e) 48

4. (CMRJ 2009) Na figura abaixo, temos um círculo de centro O, em que $\overline{PA} = 3\,\text{cm}$ e $\overline{PB} = 2\,\text{cm}$. O valor de $\overline{PQ}$ é:



a) $10\,\text{cm}$

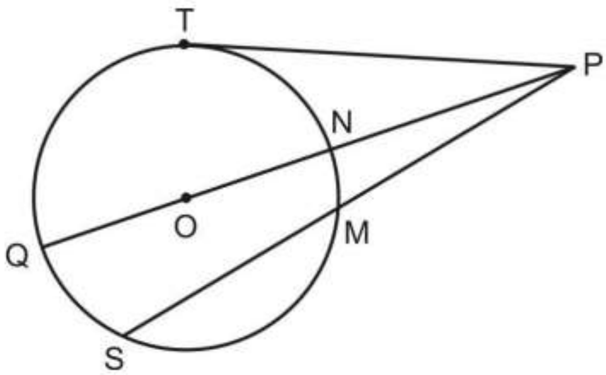
b) $12\,\text{cm}$

c) $13\,\text{cm}$

d) $15\,\text{cm}$

e) $20\,\text{cm}$

5. (EPCAR 2004) Na figura abaixo, T é ponto de tangência, PQ e PS são secantes ao círculo de centro O e $\overline{MS} = 6\text{cm}$. Se PN, PM e PT são respectivamente proporcionais a 1, 2 e 3, então a área do círculo vale, em cm^2,



a) $51,84\pi$

b) $70,56\pi$

c) $92,16\pi$

d) $104,04\pi$

6. (EPCAr 2013)

“NASCIDOS PARA VOAR: 60 ANOS DE FUMAÇA JÁ”

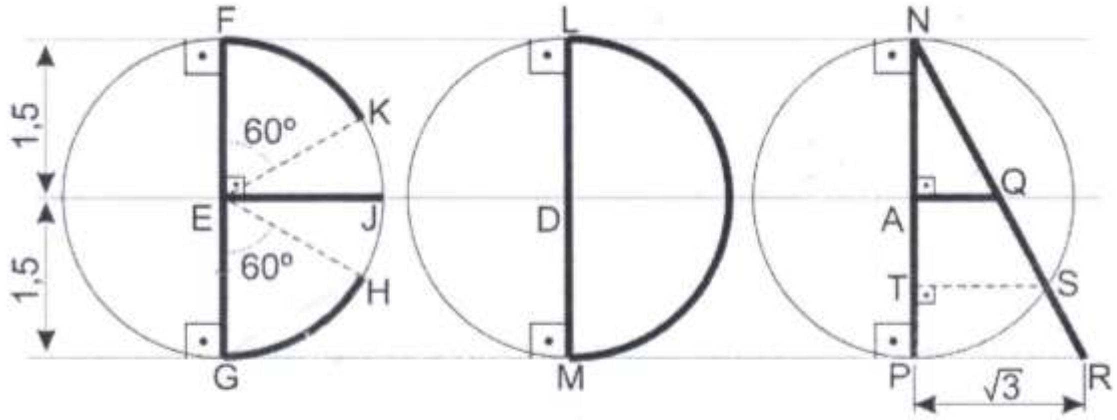
Fonte: Jornal EPCARIANO – Ano 1, n° 1 – p. 4

Em maio de 2012, o esquadrão EDA (Esquadrilha da Fumaça) comemorou 60 anos de apresentações.

Para homenagear esse esquadrão foi realizado na EPCAR um concurso em que os alunos teriam que criar um desenho.

Um das regras desse concurso foi: elaborar um desenho usando conhecimentos de matemática.

O aluno vencedor apresentou o desenho em circunferências conforme esquema abaixo.



Com base nas informações do desenho, julgue verdadeira ou falsa cada afirmativa.

(02) A menor soma das medidas dos comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{PS}$, $\overset{\frown}{GH}$, $\overset{\frown}{FK}$, e $\overset{\frown}{LM}$ é igual a 6π.

(04) A razão entre $\overline{PS}$ e $\overline{ST}$, nessa ordem, é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(08) $\overline{PS}$ e $\overline{GH}$ são congruentes.

(16) $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{EJ}$

(32) $\overline{ST} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

A soma das alternativas verdadeiras é igual a

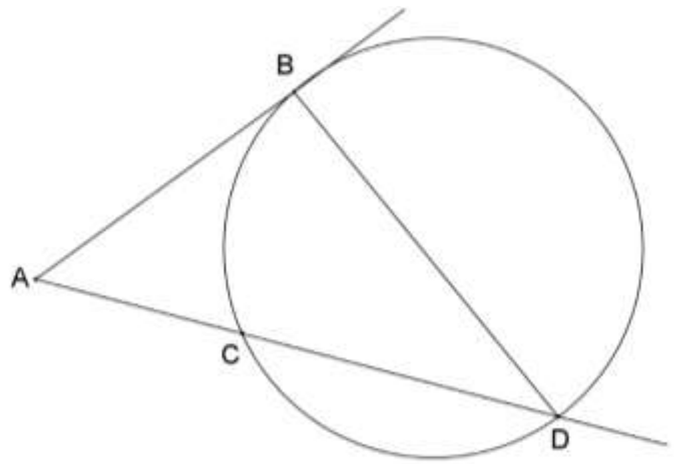
a) 20

b) 22

c) 36

d) 44

7. (CN 1975) Na figura abaixo, temos $\overline{AB} = \sqrt{55}$ cm e $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$.



Calcule a razão entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo BDC.

a) $\frac{6}{5}$

b) 1

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{6}$

e) 2

8. (CN 1981) Em um círculo as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e se cortam no ponto I. Sabendo que $\overline{AI} = 6\,\text{cm}$, $\overline{IB} = 4\,\text{cm}$ e $\overline{CI} = 2\,\text{cm}$, podemos dizer que a área do círculo é de:

a) $144\pi\ \text{cm}^2$

b) $100\pi\ \text{cm}^2$

c) $120\pi\ \text{cm}^2$

d) $60\pi\ \text{cm}^2$

e) $50\pi\ \text{cm}^2$

9. (CN 1981) Se a distância do ponto P ao centro de um círculo aumentar de $\frac{2}{5}$ de sua medida (x) a potência do ponto P em relação ao círculo aumentará de:

a) 20% de x^2

b) 42% de x^2

c) 96% de x^2

d) 86% de x^2

e) 92% de x^2

10. (CN 1982) Do ponto P exterior a uma circunferência tiramos uma secante que corta a circunferência nos pontos M e N (nessa ordem) de maneira que $\overline{PM} = x - 1$ e $\overline{PN} = 3x$. Do mesmo ponto P tiramos outra secante que corta a mesma circunferência em R e S (nessa ordem) de maneira que $\overline{PR} = 2x$ e $\overline{PS} = x + 1$. O comprimento do segmento da tangente à circunferência tirada do mesmo ponto P, se todos os segmentos estão medidos em cm é:

a) $\sqrt{40}$ cm

b) $\sqrt{60}$ cm

c) $\sqrt{34}$ cm

d) 10 cm

e) 8 cm

11. (CN 1985) As retas $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência de raio R nos pontos A e B, respectivamente. Se $\overline{PA} = 3x$ e x é a distância do ponto A à reta $\overleftrightarrow{PB}$, então R é

a) $3 \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x$

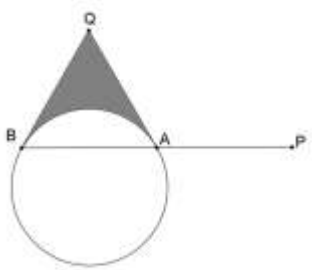
b) $3 \cdot \left(3 + 2\sqrt{2}\right)x$

c) $3x$

d) $2 \cdot \left(2 + 3\sqrt{3}\right)x$

e) x

12. (CN 1987) Na figura abaixo, tem-se: $\overleftrightarrow{QB}$ e $\overleftrightarrow{QA}$ são tangentes ao círculo de raio 2; a medida do segmento $\overline{PA}$ é $2\sqrt{3}$ e a potência do ponto P em relação ao círculo é igual a 24. A área sombreada da figura é igual a



a) $\frac{4}{3}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

b) $\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$

c) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}-\pi\right)$

d) $\frac{4}{3}\left(4\sqrt{3}-\pi\right)$

e) $\frac{4}{3}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)$

13. (CN 1989) Considere as cordas $\overline{AP}=13$ e $\overline{BD}=12$ de uma circunferência, que se intersectam no ponto Q; e um ponto C no interior da corda $\overline{AP}$, tal que $ABCD$ seja um paralelogramo. Determinado este ponto C, $\overline{AC}$ mede

a) 8

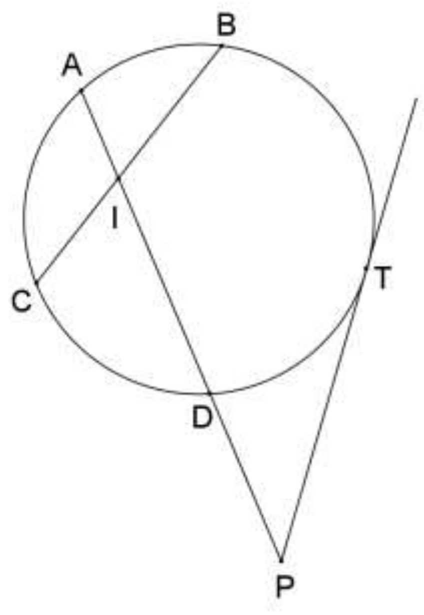
b) 9

c) 10

d) 12

e) 18

14. (CN 1995) Na figura abaixo, $\overline{PA}$ é uma secante ao círculo, $\overline{PT}$ é uma tangente ao círculo e $\overline{BC}$ é uma corda do círculo. Qual das relações abaixo sempre será válida?



a) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$

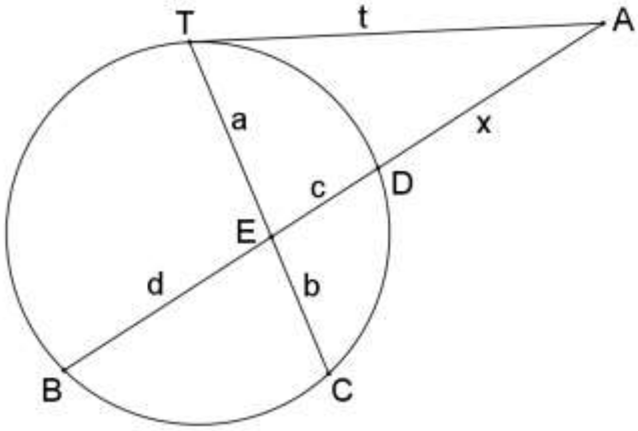
b) $\frac{\overline{PD}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{AD}}$

c) $\frac{\overline{CI}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{DI}}$

d) $\frac{\overline{PT}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{PI}}$

e) $\frac{\overline{PD}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{PA}}$

15. (CN 1996) Na figura, AT é tangente ao círculo, TC e BD são as cordas que se interceptam no ponto E. Sabe-se que existe a relação $c^2 + d^2 + 2ab + 4t^2 = 4(c+d)^2$. O valor de x é:



a) $\frac{c+d}{2}$

b) $\frac{c+d}{3}$

c) $\frac{2c+d}{4}$

d) $\frac{c+2d}{8}$

e) $\frac{3c+4d}{6}$

16. (CN 1998) Dois segmentos de uma reta, AB e CD, interceptam-se interiormente no ponto O. Sabe-se que as medidas de AO e OB são respectivamente, $3\,cm$ e $4\,cm$, e que as medidas de CO e OD são, respectivamente, $2\,cm$ e $6\,cm$. Qual o número de pontos do plano, determinado por AB e CD, que equidistam dos pontos A, B, C e D?

a) zero.

b) um.

c) dois.

d) três.

e) infinito.

17. (CN 1998) Define-se potência de um ponto P em relação a um círculo C, de centro O e raio r, como sendo o quadrado da distância de P a O, menos o quadrado de r. Qual é a potência de um dos vértices do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio r, em relação a este círculo?

a) $\frac{2r^2}{3}$

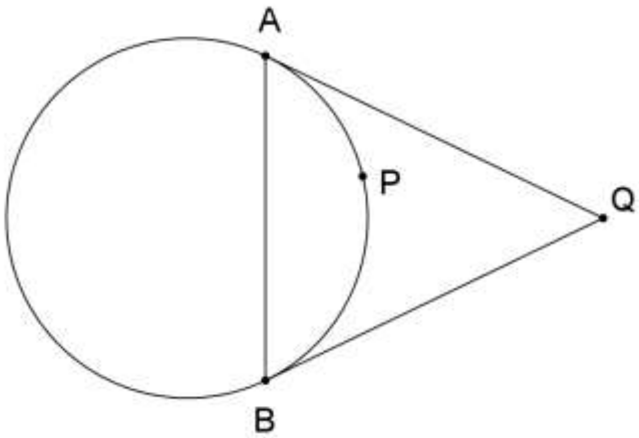
b) $\frac{r^2}{2}$

c) $\frac{r^2}{3}$

d) $\frac{r^2}{4}$

e) $\frac{r^2}{6}$

18. (CN 2002) Na figura abaixo, o ponto P do menor arco AB dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:



a) $\sqrt{30}$

b) $2\sqrt{15}$

c) 16

d) 18

e) $6\sqrt{10}$

19. (CN 2003) Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, $P \neq M$, então o segmento $\overline{NP}$ mede

a) $\dfrac{R\sqrt{7}}{2}$

b) $\dfrac{3R\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{3R\sqrt{7}}{14}$

d) $\dfrac{R\sqrt{5}}{7}$

e) $\dfrac{R\sqrt{5}}{3}$

20. (CN 2005) Sejam $L1$ e $L2$ duas circunferências fixas de raios diferentes, que se cortam em A e B. P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano). De P traçam-se retas tangentes à L1 e L2, cujos pontos de contato são R e S. Se $PR = PS$, pode-se afirmar que P, A e B

a) estão sempre alinhados.

b) estão alinhados somente em duas posições.

c) estão alinhados somente em três posições.

d) estão alinhados somente em quatro posições.

e) nunca estarão alinhados.

21. (IME 1989) Numa circunferência de centro O e diâmetro AB = 2R, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que BM = R. Traça-se uma secante MNS tal que MN = NS, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência. Determine a área do triângulo MOS.

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}R^2$

b) $\frac{\sqrt{15}}{4}R^2$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2}R^2$

d) $\frac{\sqrt{15}}{2}R^2$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$

22. (IME 1996) Sejam 5 (cinco) pontos AOBO’A’, nesta ordem pertencentes a uma reta genérica r tal que AO = OB = 3a; BO’ = O’A’ = 2a, onde a é um comprimento dado. Traçam-se os círculos (O) com diâmetro AB e (O’) com diâmetro BA’. Sejam C e D dois pontos quaisquer do círculo (O); as retas BC e BD cortam o círculo (O’) respectivamente em C’ e D’. Considere as afirmações a seguir:

I. $\frac{BC'}{BC} = \frac{2}{3}$

II. $\frac{C'D'}{CD} = \frac{3}{2}$

III. Seja o ângulo CBD igual a 30°. A razão entre as áreas dos segmentos circulares S no círculo (O) limitado pela corda CD e S’ no círculo (O’) limitado pela corda C’D’ é igual a $\frac{9}{4}$.

Associando V às verdadeiras e F às falsas, obtém-se a sequência

a) F – F – F

b) V – V – F

c) F – F – V

d) V – V – V

e) V – F – V

23. Que ponto notável de um triângulo é o centro radical das circunferências cujos diâmetros são os lados desse triângulo?

a) incentro

b) baricentro

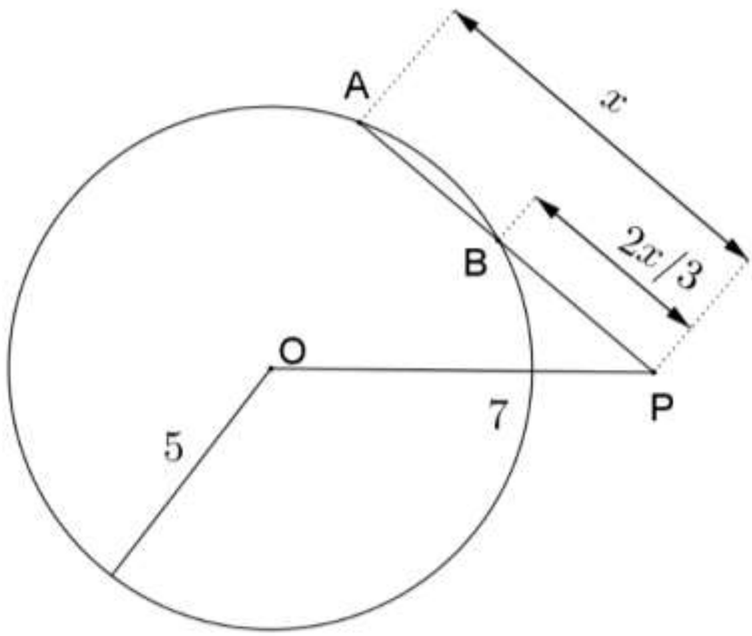
c) ortocentro

d) circuncentro

e) exincentro

GABARITO

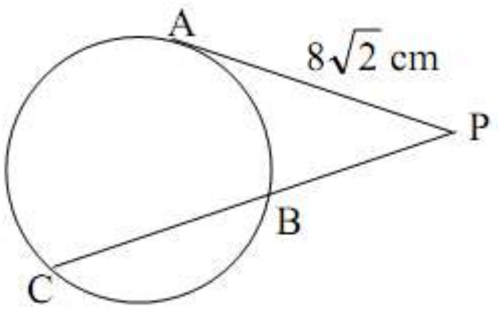
1.



Considerando a potência do ponto P em relação à circunferência, temos: $x \cdot \frac{2x}{3} = 7^2 - 5^2 \Leftrightarrow x = 6\,\text{cm}$.

RESPOSTA: E

2.



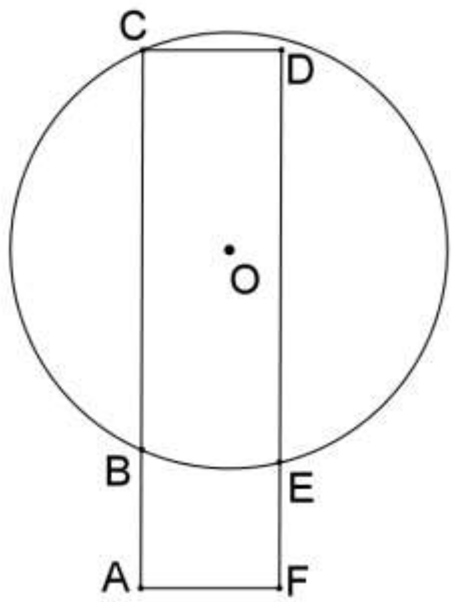
Sejam $\overline{PB} = \overline{BC} = x$. Pela potência do ponto P em relação à circunferência, temos:

$\overline{PA}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PB} \Leftrightarrow \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 2x \cdot x \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = 8$

$\Rightarrow \overline{PC} = 2x = 2 \cdot 8 = 16\,\text{cm}$

RESPOSTA: C

3.

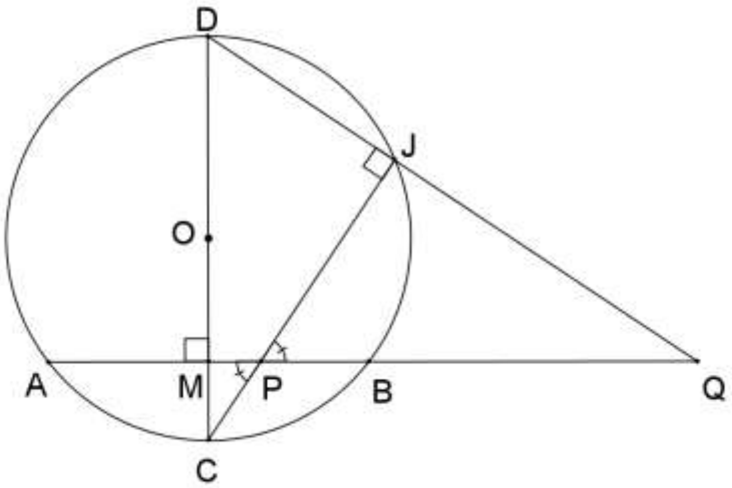


Considerando a potência do ponto A em relação ao círculo, temos: $AC \cdot AB = AO^2 - R^2 = 8^2 - 5^2 = 39$.

A área do retângulo $ACDF$ é dada por $S_{ACDF} = AC \cdot AF = AC \cdot AB = 39 \text{ u.a.}$

RESPOSTA: D

4.



$\{M\} = AB \cap CD \wedge AB \perp CD \Rightarrow AM = MB = 2,5 \wedge MP = 0,5$

Considerando a potência do ponto P em relação ao círculo, temos $PC \cdot PJ = PA \cdot PB = 3 \cdot 2 = 6$.

Como CD é diâmetro do círculo, então $C\hat{J}D = 90^\circ$.

Portanto, $\Delta MPC \sim \Delta JPQ \,(\text{A.A.A.})$,o que implica $\dfrac{PC}{PQ} = \dfrac{MP}{PJ} \Rightarrow 0,5 \cdot PQ = 6 \Leftrightarrow PQ = 12 \text{ cm}$.

RESPOSTA: B

5.

$$\frac{PN}{1}=\frac{PM}{2}=\frac{PT}{3}=k \Rightarrow \begin{cases} PN=k \\ PM=2k \\ PT=3k \end{cases}$$

Considerando a potência do ponto P em relação ao círculo, temos:

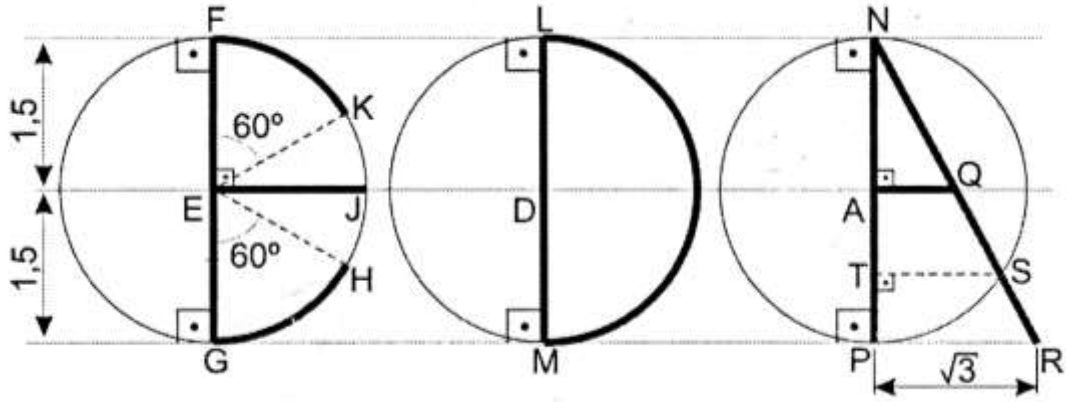
$$PT^2=PM\cdot PS=PM\cdot(PM+MS)\Rightarrow(3k)^2=(2k)\cdot(2k+6)\Leftrightarrow k=0\,(\text{não convém})\ \vee\ k=\frac{12}{5}$$

$$PT^2=PN\cdot PQ=PN\cdot(PN+NQ)\Rightarrow(3k)^2=k\cdot(k+2R)\Leftrightarrow R=4k=4\cdot\frac{12}{5}=\frac{48}{5}$$

Logo, a área do círculo é $S=\pi\cdot\left(\frac{48}{5}\right)^2=92{,}16\pi\,cm^2$.

RESPOSTA: C

6.



(02) FALSA

No ΔNPR, temos: $tg\,R\hat{N}P=\frac{PR}{NP}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow R\hat{N}P=\frac{\pi}{6}\Rightarrow PS=2\cdot R\hat{N}P=2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

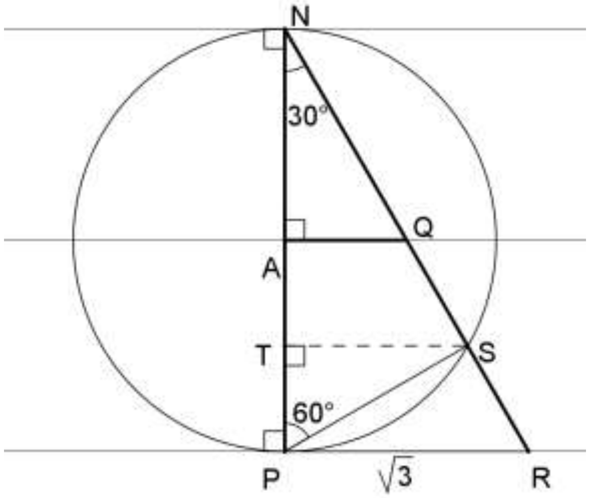
Na primeira circunferência, os ângulos centrais $F\hat{E}K=G\hat{E}H=60^\circ\Rightarrow GH=FK=60^\circ=\frac{\pi}{3}$.

Na segunda circunferência, $\overline{LM}$ é um diâmetro, portanto $LM=\pi$.

$$\Rightarrow PS+GH+FK+LM=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi=2\pi\,rad$$

Como as três circunferências possuem o mesmo raio $1{,}5$, então a soma dos comprimentos dos arcos é $2\pi\cdot1{,}5=3\pi$ unidades de comprimento.

(04) VERDADEIRA



Como $R\hat{N}P = 30^\circ$ e $\overline{PN}$ é um diâmetro da circunferência, então $N\hat{S}P = 90^\circ$ e $N\hat{P}S = 60^\circ$.

No ΔPTS, temos: $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\overline{ST}}{\overline{PS}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{PS}}{\overline{ST}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(08) VERDADEIRA

Como $PS = GH = 60^\circ$ e as circunferências possuem o mesmo raio, então $\overline{PS} \equiv \overline{GH}$.

(16) FALSA

Na terceira circunferência, observamos que $\Delta NAQ \sim \Delta NPR$.

Portanto, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AQ}}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{3} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

O segmento $\overline{EJ}$ é um raio da primeira circunferência e, portanto, $\overline{EJ} = 1,5$.

(32) VERDADEIRA

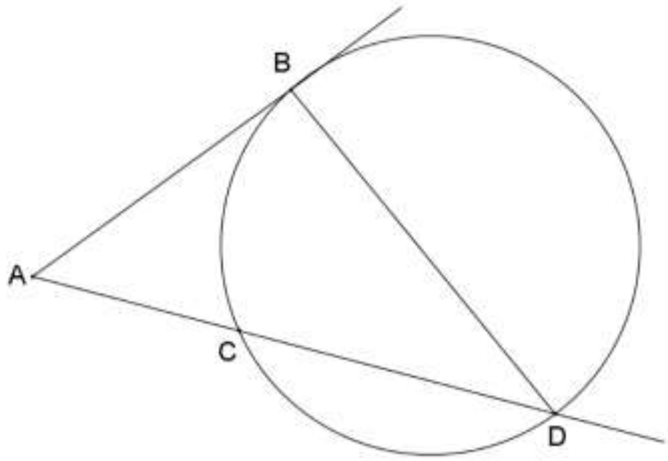
Na terceira circunferência, notemos que o ΔNTS é metade do triângulo equilátero inscrito na circunferência. Assim, o ponto A é o baricentro desse triângulo equilátero e $\frac{\overline{NA}}{\overline{AT}} = \frac{2}{1}$.

Como $\Delta NAQ \sim \Delta NTS$, temos: $\frac{\overline{ST}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{NT}}{\overline{NA}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{ST} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Portanto, a soma das alternativas verdadeiras é $4 + 8 + 32 = 44$.

RESPOSTA: D

7.



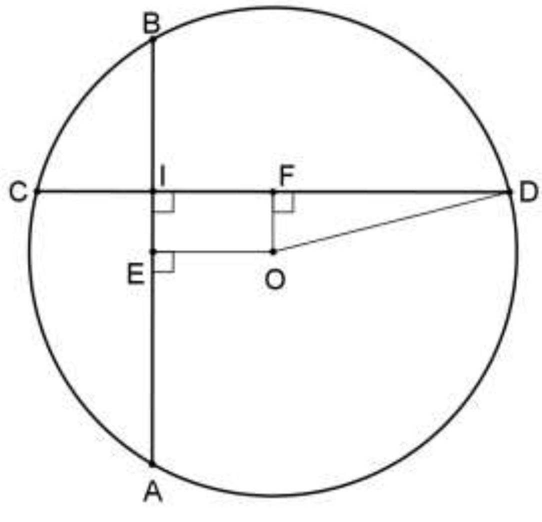
Usando a potência do ponto A em relação à circunferência, temos:

$$AD \cdot AC = AB^2 \Rightarrow AD \cdot 5 = \left(\sqrt{55}\right)^2 \Leftrightarrow AD = 11$$
$$\Rightarrow CD = AD - AC = 11 - 5 = 6$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AC}{CD} = \frac{5}{6}$$

RESPOSTA: C

8.



Considerando a potência do ponto I em relação ao círculo, temos:

$$AI \cdot BI = CI \cdot DI \Rightarrow 6 \cdot 4 = 2 \cdot DI \Leftrightarrow DI = 12.$$

Traçando $OE \perp AB$ e $OF \perp CD$, então E e F são pontos médios de AB e CD, respectivamente.

$$CD = CI + DI = 2 + 12 = 14 \Rightarrow CF = FD = 7$$

$$AB = AI + IB = 6 + 4 = 10 \Rightarrow AE = EB = 5$$

$FO = IE = AI - AE = 6 - 5 = 1$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔFDO, temos: $OD^2 = FD^2 + OF^2 = 7^2 + 1^2 = 50$

Mas, OD é o raio do círculo, então a área do círculo é dada por $S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot OD^2 = 50\pi \text{ cm}^2$

RESPOSTA: E

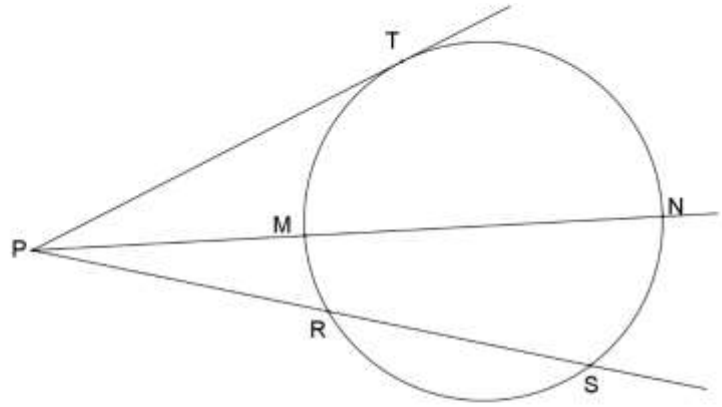
9. A potência de um ponto distante x do centro de um círculo de raio R é $x^2 - R^2$.

A potência de um ponto distante $x + \frac{2}{5}x = \frac{7x}{5}$ de um círculo de raio R é $\left(\frac{7x}{5}\right)^2 - R^2$

O aumento da potência é dado por $\left[\left(\frac{7x}{5}\right)^2 - R^2\right] - \left[x^2 - R^2\right] = \frac{24}{25}x^2 = 96\% \cdot x^2$

RESPOSTA: C

10.

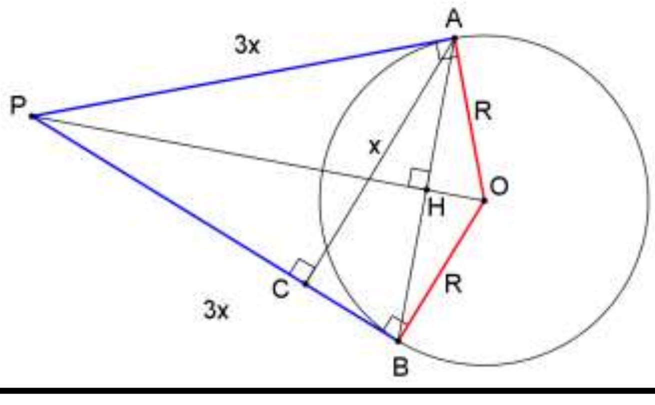


$\overline{PM} \cdot \overline{PN} = \overline{PR} \cdot \overline{PS} \Rightarrow (x-1) \cdot (3x) = (2x) \cdot (x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (não convém) ou } x = 5$

Seja $\overline{PT}$ a tangente à circunferência traçada a partir de P, então $\overline{PT}^2 = \overline{PM} \cdot \overline{PN} = (5-1) \cdot (3 \cdot 5) \Leftrightarrow \overline{PT} = \sqrt{60} \text{ cm}$

RESPOSTA: B

11.



$\overline{PA} = \overline{PB} = 3x$

Teorema de Pitágoras no ΔAPC:

$\overline{PC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 \Rightarrow \overline{PC}^2 = (3x)^2 - x^2 = 8x^2 \Leftrightarrow \overline{PC} = 2\sqrt{2}x$

$\overline{BC} = \overline{PB} - \overline{PC} = 3x - 2\sqrt{2}x = (3 - 2\sqrt{2})x$

Teorema de Pitágoras no ΔABC:

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 x^2 + x^2 = (18 - 12\sqrt{2})x^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}x$.

$\overline{BH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2}x$

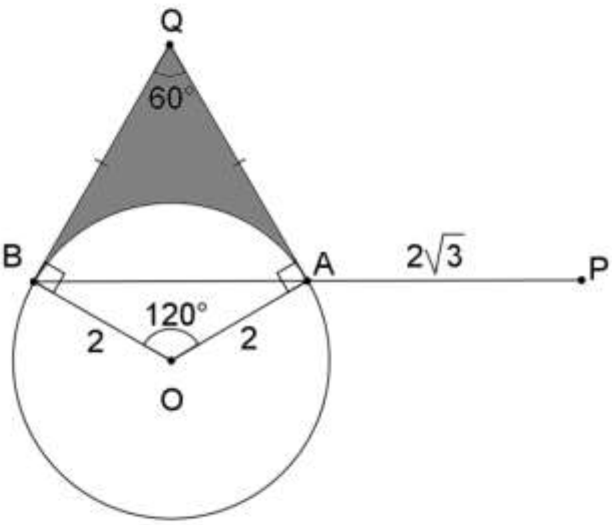
Usando a relação métrica: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ no ΔBOP, temos:

$$\frac{1}{\overline{BH}^2} = \frac{1}{\overline{BP}^2} + \frac{1}{\overline{BO}^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{18 - 12\sqrt{2}}{4}x^2} = \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^2}{9x^2}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}}x = 3(3 - 2\sqrt{2})x$$

RESPOSTA: C

12.



A potência do ponto P em relação ao círculo é 24, então

$Pot_O P = PA \cdot PB = 24 \Rightarrow 2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + AB) = 24 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$

Como $AB = R\sqrt{3}$, conclui-se que AB é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência, logo $A\hat{O}B = 120°$.

Os segmentos QB e QA são tangentes à circunferência, então $QA = QB$, $Q\hat{A}O = Q\hat{B}O = 90^\circ$ e, consequentemente, $A\hat{Q}B = 60^\circ$.

O triângulo QAB é equilátero de lado $2\sqrt{3}$, pois $QA = QB$ e $A\hat{Q}B = 60^\circ$.

A área sombreada é, então, igual à área do triângulo equilátero QAB menos a área de um segmento circular de 120° no círculo de centro O.

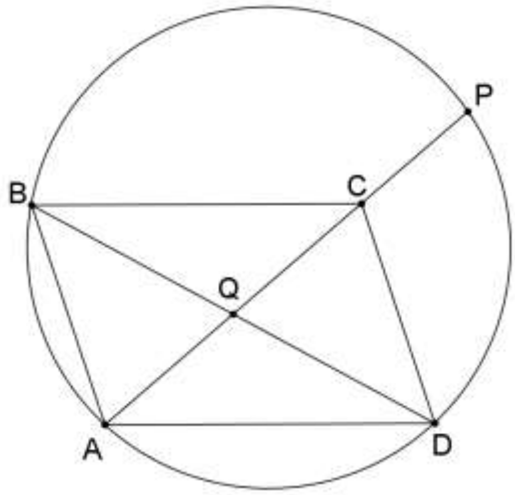
$$S_{QAB} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{seg.120^\circ} = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot 2^2\right) - \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \text{sen}120^\circ = \frac{4\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_{sombr.} = S_{QAB} - S_{seg.120^\circ} = 3\sqrt{3} - \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$$

RESPOSTA: B

13.



Como ABCD é um paralelogramo, então $\overline{BQ} = \overline{QD} = \frac{\overline{BD}}{2} = 6$ e $\overline{AQ} = \overline{QC} = x$.

Logo, $PQ = AP - AQ = 13 - x$.

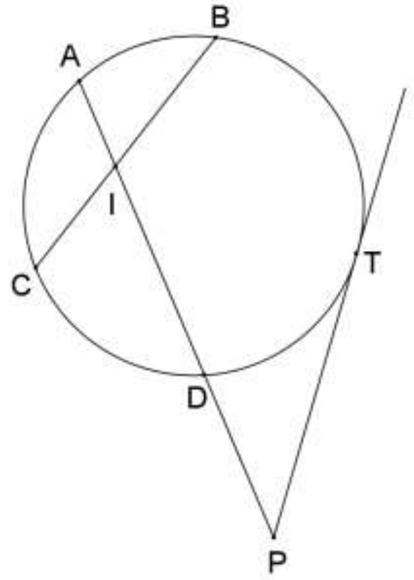
Considerando a potência do ponto Q em relação ao círculo, temos:

$$\overline{AQ} \cdot \overline{QP} = \overline{BQ} \cdot \overline{QD} \Rightarrow x \cdot (13 - x) = 6 \cdot 6 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \ \vee \ x = 9$$

Mas, $\overline{AC} = 2x < \overline{AP} = 13 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \overline{AC} = 8$.

RESPOSTA: A

14.



Considerando a potência do ponto I em relação ao círculo, temos: $BI \cdot IC = AI \cdot ID \Leftrightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{DI}{BI}$.

Considerando a potência do ponto P em relação ao círculo, temos: $PA \cdot PD = PT^2 \Leftrightarrow \frac{PD}{PT} = \frac{PT}{PA}$.

Logo, a opção correta é a letra a).

RESPOSTA: A

15. Potência do ponto A em relação ao círculo: $AT^2 = AB \cdot AD \Rightarrow t^2 = (x + c + d) \cdot x$

Potência do ponto E em relação ao círculo: $TE \cdot EC = BE \cdot ED \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$

Substituindo as expressões obtidas acima na relação dada no enunciado, temos:

$$c^2 + d^2 + 2ab + 4t^2 = 4(c+d)^2 \Rightarrow c^2 + d^2 + 2cd + 4x \cdot (x + c + d) = 4(c+d)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4(c+d)x - 3(c+d)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}(c+d) \text{ ou } x = \frac{1}{2} \cdot (c+d)$$

$$x > 0 \Rightarrow x = \frac{c+d}{2}$$

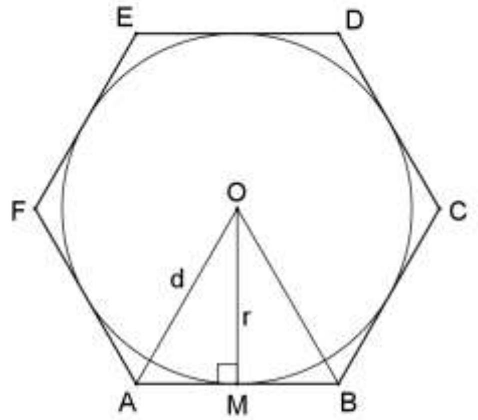
RESPOSTA: A

16. Considerando a potência do ponto O em relação a um círculo e como $AO \cdot OB = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = CO \cdot OD$, então AB e CD são cordas de um mesmo círculo, ou seja, são concíclicos.

Logo, existe um único ponto que é equidistante de A, B, C e D que é o centro do círculo.

RESPOSTA: B

17.



A figura representa o hexágono regular $ABCDEF$ circunscrito a um círculo de raio r.

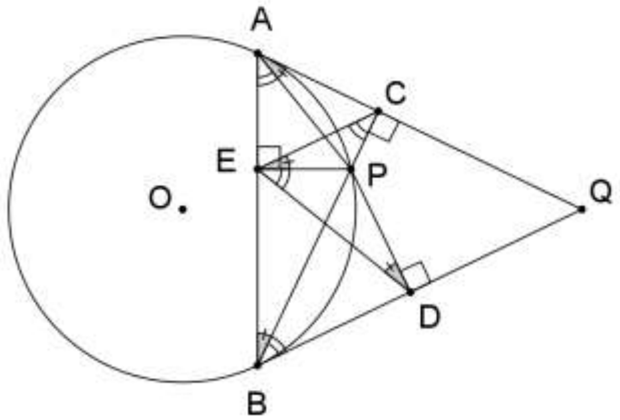
A potência do vértice A do hexágono em relação ao círculo é $Pot_O A = d^2 - r^2$.

No triângulo equilátero AOB, temos $OM = AO \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow d = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Assim, $Pot_O A = d^2 - r^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 - r^2 = \frac{4r^2}{3} - r^2 = \frac{r^2}{3}$.

RESPOSTA: C

18.



Sejam PC, PD e PE as perpendiculares a AQ, BQ e AB, respectivamente.

Traçam-se PA, PB, EC e ED.

$A\hat{C}P + A\hat{E}P = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \#ACPE$ é inscritível

$B\hat{D}P + B\hat{E}P = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \#BDPE$ é inscritível

$\Rightarrow C\hat{E}P = C\hat{A}P = \frac{AP}{2} = A\hat{B}P = E\hat{D}P$

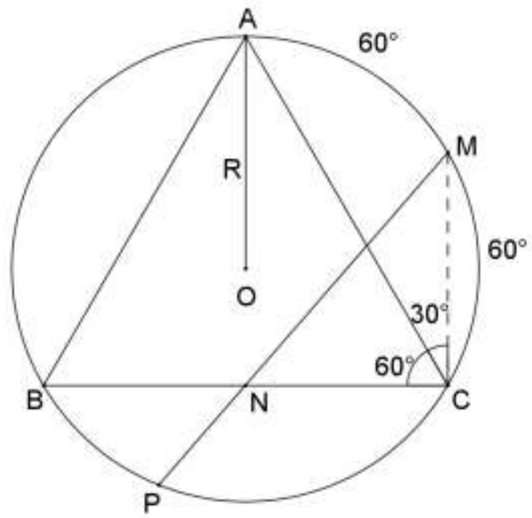
$\Rightarrow D\hat{E}P = D\hat{B}P = \frac{BP}{2} = B\hat{A}P = E\hat{C}P$

$C\hat{E}P = E\hat{D}P$ e $E\hat{C}P = D\hat{E}P \Rightarrow \Delta CEP \sim \Delta EDP \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{PC}{PE} \Leftrightarrow PE^2 = PC \cdot PD$

Nesse caso, temos $PC = 6\text{ cm}$ e $PD = 10\text{ cm}$, logo $PE^2 = 6 \cdot 10 \Leftrightarrow PE = 2\sqrt{15}\text{ cm}$.

RESPOSTA: B

19.



Os lados do triângulo equilátero ABC determinam arcos de 120° sobre o círculo circunscrito ao triângulo e medem $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$.

Como M é o ponto médio do menor arco AC, então $AM = MC = 60^\circ$.

O segmento MC determinado pelo arco $MC = 60^\circ$ é o lado do hexágono inscrito no círculo, então $MC = R$.

O ângulo inscrito $A\hat{C}M = \frac{AM}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ e $A\hat{C}B = 60^\circ$, então $N\hat{C}M = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MCN, temos:

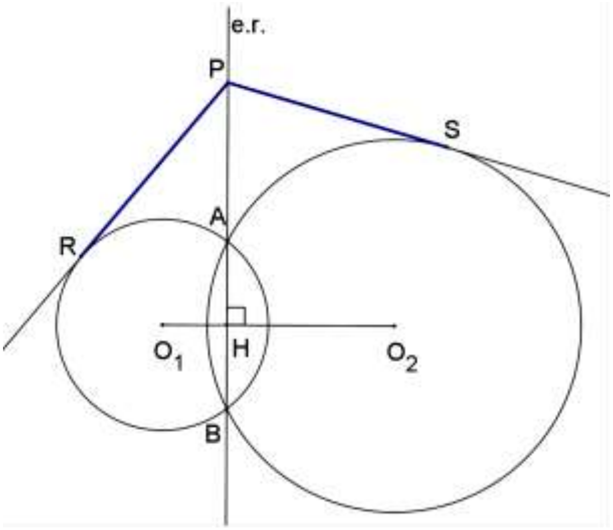
$$MN^2 = MC^2 + NC^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7R^2}{4} \Leftrightarrow MN = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

Considerando a potência do ponto N em relação ao círculo, temos:

$$MN \cdot NP = BN \cdot NC \Leftrightarrow \frac{R\sqrt{7}}{2} \cdot NP = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow NP = \frac{3\sqrt{7}R}{14}$$

RESPOSTA: C

20.



Se $PR = PS$, então o ponto P tem a mesma potência em relação às circunferências $L1$ e $L2$. Logo, P pertence ao eixo radical de $L1$ e $L2$, que é uma reta que passa por A e B. Daí, conclui-se que P, A e B estão sempre alinhados.

Isso pode ser provado usando-se redução ao absurdo, como segue:

Supondo que P, A e B não estão alinhados, então podemos dizer que a reta PA também cruza $L1$ no ponto X e $L2$ no ponto Y, com $X \neq Y$ e não coincidentes com B.

Considerando a potência do ponto P em relação a $L1$, temos: $PR^2 = PX \cdot PA$.

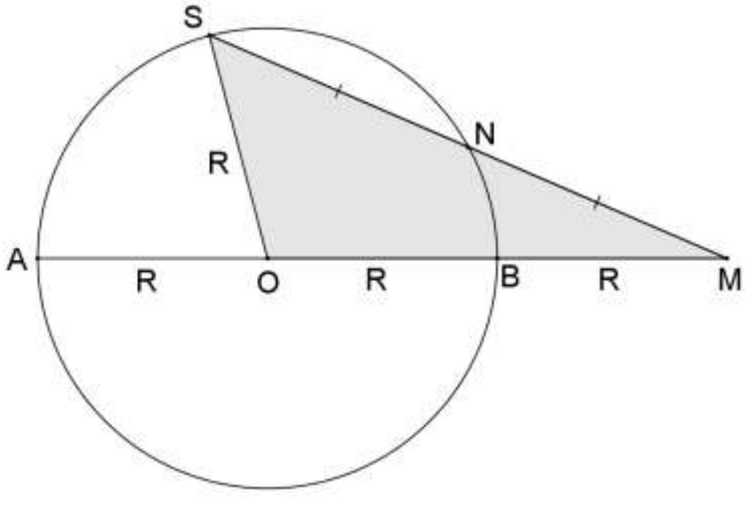
Considerando a potência do ponto P em relação a $L2$, temos: $PS^2 = PY \cdot PA$.

$PR = PS \Rightarrow PX \cdot PA = PY \cdot PA \Leftrightarrow PX = PY \Leftrightarrow X \equiv Y$ (absurdo)

Logo, conclui-se que P, A e B estão sempre alinhados.

RESPOSTA: A

21.



Considerando a potência do ponto M em relação à circunferência, temos:

$$MN \cdot MS = MB \cdot MA \Leftrightarrow MN \cdot (2MN) = R \cdot 3R \Leftrightarrow MN = \frac{\sqrt{6}}{2}R$$

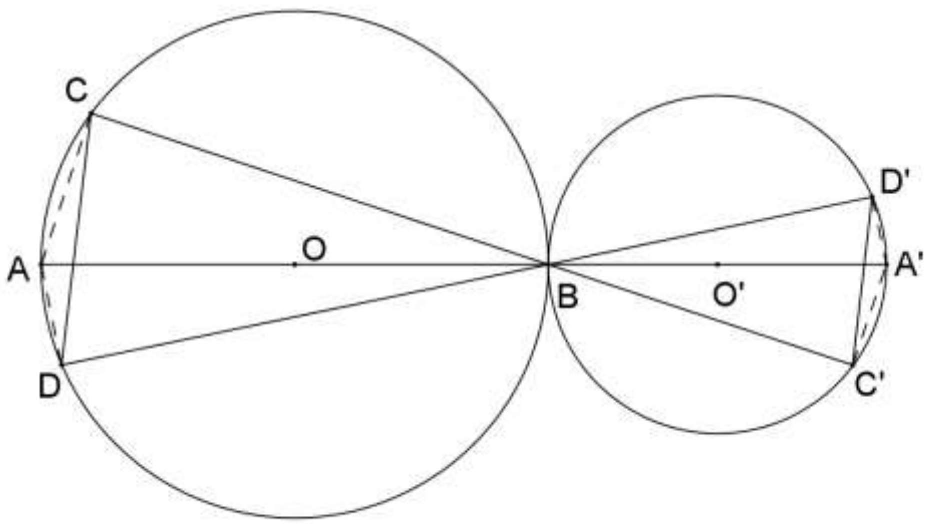
No triângulo MOS, temos $MO = 2R$, $OS = R$, $MS = \sqrt{6}R$ e $p = \frac{\sqrt{6}+3}{2}R$. Aplicando a fórmula de Heron, vem:

$$S_{MOS} = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)R \cdot \left(\frac{3+\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}\right)R \cdot \left(\frac{3+\sqrt{6}}{2} - 1\right)R \cdot \left(\frac{3+\sqrt{6}}{2} - 2\right)R} =$$

$$= \frac{R^2}{4}\sqrt{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} = \frac{R^2\sqrt{15}}{4}$$

RESPOSTA: B

22.



I) V

$$C\hat{B}A = C'\hat{B}A' \wedge B\hat{C}A = B\hat{C}'A' = 90^\circ \Rightarrow \Delta BCA \sim \Delta BC'A' \Rightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{A'B}{AB} = \frac{4a}{6a} = \frac{2}{3}$$

II) F

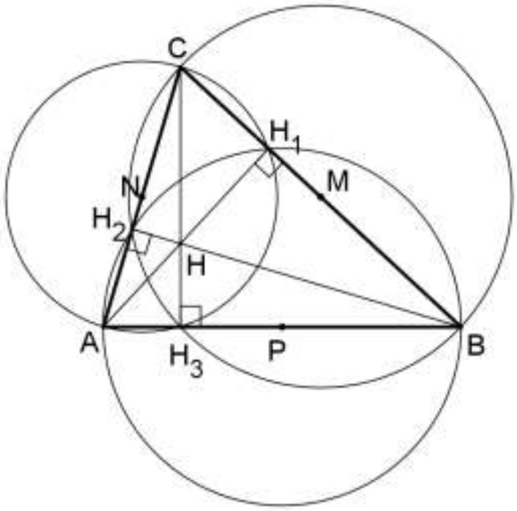
$$B\hat{D}C = B\hat{A}C = B\hat{A}'C' = B\hat{D}'C' \wedge C\hat{B}D = C'\hat{B}D' \Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta BC'D' \Rightarrow \frac{C'D'}{CD} = \frac{BC'}{BC} = \frac{2}{3}$$

III) V

Se $B\hat{C}D = 30^\circ$, as áreas S e S' são segmentos circulares de 60° nas circunferências de centros O e O', respectivamente. Portanto, S e S' são áreas de figuras semelhantes. Assim, $\frac{S}{S'} = \left(\frac{3a}{2a}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

RESPOSTA: D

23.



Sejam M, N e P os pontos médios dos lados dos triângulos e os centros dos círculos.

Os segmentos AH_1, BH_2 e CH_3 estão sobre os eixos radicais dos pares de círculos e H é o centro radical dos três círculos.

O segmento AH_1 pertence ao eixo radical dos círculos de centros N e P, logo $AH_1 \perp NP$. Como NP é base média do $\triangle ABC$, então $NP \| BC$ e, consequentemente, $AH_1 \perp BC$.

Analogamente, prova-se que $BH_2 \perp AC$ e $CH_3 \perp AB$.

Assim, AH_1, BH_2 e CH_3 são as três alturas do $\triangle ABC$ e o centro radical H é o ortocentro do $\triangle ABC$.

REFERÊNCIA: Geometría – uma visión de La planimetría – Lumbreras Editores – pg. 784.

RESPOSTA: C