Estratégia
Militares

Aula 05

MATRIZES

EEAR – 2021.2

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 – Introdução

Olá, meu querido aluno!! Tudo bem?! Como andam os estudos?

Tópico novo. Fique ligado. Este tema tem grandes chances de aparecer na sua prova! Vamos nessa!

2 –Definições e Conceitos Iniciais

Uma matriz mxn (lê-se m por n) é uma tabela de elementos distribuídos em m linhas e n colunas. As dimensões de uma matriz definem a sua ordem, ou seja, nesse caso, podemos dizer que ela é de ordem m por n.

Normalmente representamos uma matriz por letra maiúscula, colocando o número de linhas e de colunas como índices (o número de linhas sempre vem primeiro). Exemplo: $A_{3\,x\,2}$ é uma matriz com três linhas e duas colunas.

Chamamos ainda de a_{ij} o elemento da linha i, e da coluna j da matriz. Nesse caso, também podemos representar uma matriz $m\ x\ n$ por $\left(a_{ij}\right)_{m\,x\,n}$

Exemplo:

$$A_{3\,x\,2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{3\,x\,2}$$

Os elementos de uma matriz podem estar entre parênteses ou colchetes. E modo geral, uma matriz fica bem definida se soubermos determinar cada a_{ij} em função de i e j, seja por meio de uma expressão ou por meio de uma sentença.

Exemplo:

I) Seja $A = (a_{ij})_{2\,x\,2}$ com $a_{ij} = (-1)^{i+j}.i.j$. Como ficaria essa matriz?

$a_{11} = (-1)^{1+1}.1.1 = 1;$ $a_{12} = (-1)^{1+2}.1.2 = -2;$

$a_{21} = (-1)^{2+1}.2.1 = -2;$ $a_{22} = (-1)^{2+2}.2.2 = 4;$

$$A_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

II) Considerando $A = (a_{ij})_{3\,x\,3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i > j \\ 0, se\ i = j \\ -1, se\ i < j \end{cases}$ teremos:

$$A_{3X3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dizemos ainda que duas matrizes de mesma ordem são iguais se os elementos correspondentes (elementos que ocupam a mesma posição nas matrizes) são todos iguais.

Uma vez definida uma matriz de ordem m por n, chamaremos de $M_{m\,x\,n}(R)$ o conjunto de todas as matrizes com essa ordem e entradas (elementos) reais e de $M_{m\,x\,n}(C)$ as matrizes com entradas complexas.

3 – Operações Algébricas

- **Adição:**

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $m\ x\ n$, definimos a soma sendo uma matriz mXn obtida através da soma dos termos correspondentes, ou seja, se $A_{m\,x\,n} = (a_{ij})$ e $B_{m\,x\,n} = (b_{ij})$, temos: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\,x\,n}$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Multiplicação por Escalar:**

Dada uma matriz A e uma escalar α, chamaremos de αA uma matriz de mesma ordem que A obtida pelo produto de todos os elementos de A por α, ou seja, se $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ têm-se $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\,x\,n}$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Chamaremos o produto $(-1).A$ de $-A$, uma vez que esta matriz é o inverso aditivo de A. Assim, definimos a diferença de matrizes de mesma ordem por: $A - B = A + (-B)$

3.1 - Propriedades

Sejam $A, B \; e \; C$ matrizes de mesma ordem; α e β escalares, têm-se:

I) (Comutativa da adição) $A + B = B + A$;

II) (Associativa da adição) $(A + B) + C = A + (B + C)$

III) (Existe elemento neutro da adição) Seja $0_{m\,x\,n}$ uma matriz com todas as entradas nulas (chamada de matriz nula), têm-se: $\forall A; 0 + A = A + 0 = A$;

IV) (Existe inverso aditivo) $\forall A, \exists(-A)|A + (-A) = (-A) + A = 0$;

V) (Distributiva por escalar em relação a matrizes): $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

VI) (Distributiva por matriz em relação a escalares): $(\alpha + \beta)a = \alpha A + \beta A$

VII) (Associativa da multiplicação por escalar): $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

VIII) (Existe elemento neutro da multiplicação escalar): $1. A = A$

Todas as propriedades são consequências diretas da definição de soma e multiplicação por escalar.

4 – Produto de Matrizes

Ao multiplicar a matriz A pela matriz B, multiplicaremos A por cada um dos vetores que formam B; logo, temos a restrição que o número de colunas de A deve ser o mesmo número de linhas de B(para existir os produtos escalares).

Para obter a primeira coluna do resultado, multiplica-se A pela primeira coluna de B (como anteriormente); para obter a 2ª coluna, multiplica-se A pela 2ª coluna de B, e assim sucessivamente. Deste modo, a matriz AB terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

De modo geral, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m\ x\ n$ e $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n\ x\ p$ então $AB = C$ tal que $C = (c_{ij})$ é uma matriz $m\ x\ p$

Um dos motivos do produto das matrizes ser definido dessa forma está associado á resolução de sistemas lineares através de matrizes.

Vejamos o caso $2x2$

Sejam os sistemas: $\begin{cases} ex_1 + fx_2 = y_1 \\ gx_1 + hx_2 = y_2 \end{cases}, \begin{cases} ay_1 + by_2 = z_1 \\ cy_1 + dy_2 = z_2 \end{cases}$

Que podem ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} (BX = Y), \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} (AY = Z)$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 & 1.3 + 2.4 \\ 3.1 + 4.2 & 3.3 + 4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$$

4.1 - Propriedades

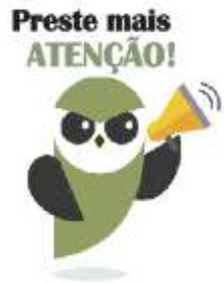
Sejam $A, B\ e\ C$ matrizes; α e β escalares; tem-se:

I) $A_{m\,x\,p}; B_{p\,x\,n} \rightarrow (\alpha A)(\alpha B) = \alpha B(A.B)$

II) (associativa) $A_{m\,x\,p\,;} B_{p\,x\,q};\ C_{q\,x\,n} \rightarrow A(BC) = (AB)C$

III) (distributiva pela esquerda) $A_{m\,x\,p\,;} B_{p\,x\,n};\ C_{p\,x\,n} \rightarrow A(B+C) = AB + AC$

IV) (distributiva pela direita) $A_{p\,x\,n\,;}\,B_{m\,x\,p};\ C_{m\,x\,p} \rightarrow (B+C).A = B.A + C.A$



Dadas duas matrizes quaisquer, pode-se ter $AB \neq BA$ (não vale à comutativa)

Podemos ter um produto existindo e o outro não; ambos existindo, porém, com ordens diferentes; ou os dois com mesma dimensão, mas com entradas diferentes.

5 – Matriz Transposta

Dada uma matriz de ordem $m\ x\ n$, definimos sua transposta sendo uma matriz de ordem $n\ x\ m$ obtida pela inversão de papéis das linhas e colunas, ou seja, as linhas passam a ser colunas, assim como as colunas passam a ser linhas.

Assim, se $A_{m\,x\,n} = (a_{ij})$, tem-se:

I) $(A^t)^t = A$

II) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

III) $A_{m\,x\,n}\ ;\ B_{m\,x\,n} \rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t$

IV) $A_{m\,x\,n}\ ;\ B_{n\,x\,p} \rightarrow (A.B)^t = B^t + A^t$

6 – Matrizes Notáveis e seus Elementos

6.1 – Matriz Quadrada

Se uma matriz tem o mesmo número de linhas e de colunas, ela é denominada matriz quadrada $(m = n)$. Dizemos que a matriz tem n^2 elementos ou que é de ordem n. Nesse caso, é comum colocar apenas uma dimensão da matriz como índice.

Em toda matriz quadrada de ordem n, tem-se:

I. **Diagonal principal:** diagonal formada pelos elementos a_{ij} com $i = j$. Chamamos os elementos dessa diagonal de elementos principais.

II. **Diagonal secundária:** diagonal formada pelos elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$. Chamamos os elementos dessa diagonal de elementos secundários.

III. **Elementos conjugados:** são aqueles que apresentam posições simétricas em relação à diagonal principal. Os elementos principais são autoconjugados.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

6.2 – Matriz Nula

Matriz em que todos os elementos são nulos

Exemplo:

$$0_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3 – Matriz Triangular

Matriz quadrada cujos elementos de uma das bandas da diagonal principal são todos nulos.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Se os zeros estão na banda superior, dizemos que a matriz é triangular superior, se os zeros estão na banda inferior, dizemos que a matriz é triangular inferior.

6.4 – Matriz Diagonal

Matriz Quadrada cujos elementos das duas bandas da diagonal principal são todos nulos.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.5 – Matriz Identidade

Matriz diagonal na qual os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Se a matriz for de ordem n, escreve-se I_n

Exemplo:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6 – Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ij}$ para todos i e j.

Isso é equivalente a $A^t = A$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

6.7 – Matriz Hemissimétrica (ou antissimétrica)

Uma matriz A é dita hemissimétrica se $a_{ij} = -a_{ij}$ para todos i e j. Isso é equivalente a $A^t = -A$. Veja que, fazendo $i = j$ em $a_{ij} = a_{ij}$, obtemos $a_{ij} = 0$, ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser nulos.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

7 - Traço

Seja A uma matriz quadrada; chamamos de traço a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja, se $A_n = (a_{ij})_{n\,x\,n}$, então $trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$

7.1 Propriedades

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, tem-se:

I) $tr(A) = tr(A^t)$

II) $tr(k.A) = K.tr(A)$, em que k é escalar

III) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

IV) $tr(AB) = tr(BA)$

8 – Matriz Inversa

Considere $M_n(C)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas. Repare que esse conjunto possui elemento neutro para operação de multiplicação, uma vez que $AI = IA = A$, em que $I = I_n$ é a matriz identidade. Desse modo, I é considerado o elemento neutro da multiplicação.

Pelo que foi exposto, dizemos que B é a matriz inversa de A se $AB = BA = I_n$. Nesse caso, pode-se representar a matriz inversa por A^{-1}.

É importante lembrar que nem toda matriz possui inversa. Por exemplo, tentemos achar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Nesse caso, queremos determinar uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases}$$

ABSURDO!

✓ Teorema: Seja A uma matriz quadrada de ordem n; então a inversa de A, caso exista, é única.

Dem.: Sejam B e C inversas de A, tem-se:

$$B = B.I = B.(A.C) = (B.A).C = I.C = C$$

8.1 Propriedades

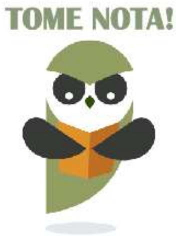
Sejam A e B matrizes quadradas não singulares de ordem n, é $\alpha \neq 0$ um escalar, tem-se:

I) $(A^{-1})^{-1} = A$

II) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

III) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

IV) $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$



Na propriedade (IV) é importante lembrar a ordem, uma vez que $B^{-1}.A^{-1} \neq A^{-1}.B^{-1}$

9 – Lista de Questões

1. (Eear 2019) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz

a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

---

2. (Ueg 2019) A matriz triangular de ordem $3,$ na qual $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e $a_{ij} = 4i - 5j + 2$ para $i \leq j$ é representada pela matriz

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

---

3. (Famerp 2019) A matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ representa uma mensagem codificada. A mensagem decodificada é a matriz quadrada $M^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$ tal que M^{-1} é a inversa da matriz M Sendo assim, o valor de $x + y + z + w$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) $\frac{1}{2}$

e) $-\frac{1}{2}$

---

4. (Unicamp 2018) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a
a) -2.
b) -1.
c) 1.
d) 2.

---

5. (Imed 2018) Em uma grande cidade, para estudar o nível de ruído a que estavam expostos os habitantes, a prefeitura realizou quatro medições diárias durante cinco dias em um cruzamento de grande movimento. Cada elemento a_{ij} da matriz a seguir representa o nível de ruído, em decibéis (dB), registrado na medição i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 45 & 62 & 68 & 44 & 63 \\ 51 & 49 & 72 & 48 & 68 \\ 39 & 52 & 71 & 52 & 62 \\ 51 & 45 & 63 & 40 & 69 \end{bmatrix}$$

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), 50 dB é o nível máximo recomendável à exposição do ouvido humano.

Com as informações apresentadas, determine o nível médio de ruídos registrados no quarto dia e assinale a alternativa correta:
a) 46 dB
b) $46{,}5\text{ dB}$
c) 52 dB
d) $65{,}5\text{ dB}$
e) $68{,}5\text{ dB}$

---

6. (Espcex (Aman) 2018) Uma matriz quadrada A, de ordem 3, é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i > j \\ (-1)^{i+j}, \text{ se } i \leq j \end{cases}$.

Então $\det(A^{-1})$ é igual a
a) 4.
b) 1.
c) 0.

d) $\frac{1}{4}$.

e) $\frac{1}{2}$.

---

7. (Udesc 2018) Analise as proposições abaixo.

I.O produto de uma matriz linha por uma matriz linha é uma matriz linha.
II. Uma matriz identidade elevada ao quadrado é uma matriz identidade.
III. O produto de uma matriz por sua transposta é a matriz identidade.

Assinale a alternativa **correta**.
a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente a afirmativa II é verdadeira.
d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

---

8. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Uma matriz quadrada de ordem n é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Os elementos de uma matriz triangular superior T, de ordem 3, onde $i \leq j$, são obtidos a partir da lei de formação $t_{ij} = 2i^2 - j$. Sendo $A = [-1 \;\; 1 \;\; 1]$ uma matriz de ordem 1×3 e A^t sua transposta, o produto $A \cdot T \cdot A^t$ é a matriz 1×1 cujo único elemento vale
a) 0.
b) 4.
c) 7.
d) 28.

---

9. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Uma matriz B possui i linhas e j colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão $b_{ij} = i - 2j$. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ cujos elementos da primeira coluna são nulos e I_2 a matriz identidade de ordem 2, tal que $AB = I_2$.

O valor numérico do maior elemento da matriz A é igual a
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

---

10. (Unicamp 2016) Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

a) 12.

b) 15.

c) 16.

d) 20.

---

11. (G1 - ifal 2016) A matriz $A_{ij}(2\times 3)$ tem elementos definidos pela expressão $a_{ij} = i^3 - j^2$. Portanto, a matriz A é

a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 26 \\ -3 & 4 & 23 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 4 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

---

12. (Ueg 2016) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2×2, onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $\ldots$, $z = 26$. Por exemplo, se a resolução de $A \cdot B$ for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então a matriz A é

a) $\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

---

13. (G1 - ifsul 2016) Chama-se traço de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Supondo que o traço da matriz quadrada A, de ordem 3, seja 11, e o determinante dessa matriz seja 16, os elementos x e y da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ valem

a) 5 e 5
b) 4 e 4
c) 2 e 8
d) 1 e 9

---

14. (Pucrs 2015) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a função f, definida no conjunto das matrizes 2×2 por $f(X) = X^2 - 2X$, então $f(A)$ é

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

---

15. (Mackenzie 2014) Se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x+y+z & 3y-z+2 \\ 4 & 5 & -5 \\ y-2z+3 & z & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, o valor de x é
a) 0
b) 1
c) 6

d) 3
e) –5

---

16. (Pucrs 2013) Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz $M = (m_{ij})$ de ordem $2 \times 3.$ Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra $m_{ij} = 4i - j.$ Assim, a matriz M é igual a _________.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

---

17. (Uern 2013) Sejam duas matrizes A e B: $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $aij = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i \le j \\ i + j, \text{ se } 1 > j \end{cases}$ e $B = A^2$. Assim, a soma dos elementos da diagonal secundária de B é

a) 149.
b) 153.
c) 172.
d) 194.

---

18. (Espm 2012) Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2, a soma de todos os elementos da matriz $M = A \cdot A^t$ é dada por:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
b) $(a + b + c + d)^2$
c) $(a + b)^2 + (c + d)^2$
d) $(a + d)^2 + (b + c)^2$
e) $(a + c)^2 + (b + d)^2$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Arquimedes,candidato a um dos cursos da Faculdade de Engenharia, visitou a PUCRS para colher informações. Uma das constatações que fez foi a de que existe grande proximidade entre Engenharia e Matemática.

19. (Pucrs 2012) Numa aula de Álgebra Matricial dos cursos de Engenharia, o professor pediu que os alunos resolvessem a seguinte questão:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então A^2 é igual a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 25 & 25 \end{bmatrix}$

20 (EsSA 2009) – Uma matriz B, de ordem 3, é tal que, em cada linha, os elementos são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 2. Se as somas dos elementos da primeira, segunda e terceira linhas valem 6, 3 e 0, respectivamente, o determinante de B é igual a:

a) 1

b) 0

c) –1

d) 3

e) 2

21 (EsSA 2014) – Sabendo-se que uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu determinante é não-nulo e que, se A e B são duas matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$, pode-se concluir que, sob essas condições:

a) se A é invertível, então $A \cdot B$ é invertível.

b) se B não é invertível, então A é invertível.

c) se $A \cdot B$ é invertível, então A é invertível e B não é invertível.

d) se $A \cdot B$ não é invertível, então A ou B não é invertível.

e) se $A \cdot B$ é invertível, então B é invertível e A não é invertível.

---

22. (EEAR/2005)

Sendo A uma matriz 3×4 e B uma matriz $N \times M$, coloque V (Verdadeira) ou F (Falsa) nas afirmações a seguir:

- ( ) Existe $A + B$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.
- ( ) Existe $A \cdot B$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.
- ( ) Existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.
- ( ) $A + B = B + A$ se, e somente se, $A = B$.
- ( ) $A \cdot B = B \cdot A$ se, e somente se, $A = B$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta:

a) $V - V - V - V - V$

b) $F - V - F - V - F$

c) $F - F - V - F - F$

d) $V - V - V - F - V$

---

23. (EEAR/2010)

Sejam as matrizes $A_{m\times3}$, $B_{p\times q}$ e $C_{5\times3}$. Se $A \cdot B = C$, então $m + p + q$ é igual a

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

---

24. (EEAR/2019)

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

---

25. (EEAR/2014)

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz $X = \frac{1}{2} \cdot A$ tem como soma de seus elementos o valor

a) 7

b) 5

c) 4

d) 1

---

26. (EEAR/2011)

Seja $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e P^t a matriz transposta de P. A matriz $Q = P \cdot P^t$ é

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

---

27. (EEAR/2007)

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Se A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e de B, respectivamente, então $A^t + B^t$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

28. (EEAR/2015)

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ tal que $a_{ij} = |i^2 - j^2|$. A soma dos elementos de A é igual a

a) 3

b) 6

c) 9

d) 12

29. (EEAR/2012)

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \dots & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 3 \end{bmatrix}$ faltam 2 elementos. Se nessa matriz $a_{ij} = 2i - j$, a soma dos elementos que faltam é

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

30. (EEAR/2016)

Se $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$ são matrizes opostas, os valores de a, b, x e k são respectivamente.

a) 1, -1, 1, 1

b) 1, 1, -1, -1

c) 1, -1, 1, -1

d) -1, -1, -2, -2

31. (EEAR/2006)

Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, a soma dos elementos da 1ª linha de $A \cdot B$ é

a) 22

b) 30

c) 46

d) 58

32. (EEAR/2003)

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, então $A \cdot B - B \cdot A$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

---

33. (EEAR/2006)

Se $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então $x - y$ é:

a) 2

b) 1

c) -1

d) 0

---

34. (EEAR/2005)

Sabendo-se que $M + N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $M - N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz N é igual a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

---

35. (EEAR/2009)

Se $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, então o valor de $x + y$ é:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

---

36. (EEAR/2017)

Considere as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 9 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$. Se $A = B^t$, então $y + z$ é igual a

a) 3

b) 2

c) 1

d) -1

---

37. (EEAR/2009)

Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sabendo que $A \cdot A^{-1} = I_2$, o valor de x é:

a) 3

b)2

c) 1

d) 0

---

38. (EEAR/2008)

A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 & se\ i \neq j \\ i+j & se\ i = j \end{cases}$ é um número

a) múltiplo de 3.

b) múltiplo de 5.

c) divisor de 16.

d) divisor de 121.

---

39. (EEAR/2002)

O elemento $X_{3,2}$ da matriz solução da equação matricial $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ é

a) 0

b) -2

c) 3

d) 1

---

40. (EEAR/2005)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são duas matrizes que comutam se, e somente se,

a) $x = 2$ e $y = 1$.

b) $x = 2$ e $y = 1$.

c) $x = 1$.

d) $x = 2$.

---

41. (EEAR/2002)

O par (x, y), solução da equação matricial $\begin{pmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2x-4 \\ x^3+y^2 & 8 \end{pmatrix}$ é

a) $(6, \pm\sqrt{3})$

b) $(\pm\sqrt{5}, -2)$

c) $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, -5\right)$

d) $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{5}\right)$

---

42. (EsPCEx/2002)

As matrizes A, B e C são do tipo $r \times s, t \times u$ e $2 \times w$, respectivamente. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é do tipo 3×4, então $r + s + t + u + w$ é igual a

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

---

43. (EsPCEx/2001)

Uma fábrica de doces produz bombons de nozes, coco e morango, que são vendidos acondicionados em caixas grandes ou pequenas. A tabela 1 abaixo fornece a quantidade de bombons de cada tipo que compõe as caixas grandes e pequenas, e a tabela 2 fornece a quantidade de caixas de cada tipo produzidas em cada mês do 1º trimestre de um determinado ano.

TABELA 1		
	Pequena	Grande
Nozes	2	5
Coco	4	8
Morango	3	7

TABELA 2			
	JAN	FEV	MAR
Pequena	150	220	130
Grande	120	150	180

Se associarmos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 150 & 220 & 130 \\ 120 & 150 & 180 \end{bmatrix}$ às tabelas 1 e 2 respectivamente, o produto $A \cdot B$ fornecerá

a) a produção média de bombons por caixa fabricada.

b) a produção total de bombons por caixa fabricada.

c) número de caixas fabricadas no trimestre.

d) em cada coluna a produção trimestral de um tipo de bombom.

e) a produção mensal de cada tipo de bombom.

---

44. (EsPCEx/2010)

Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma $abcdef\ -\ xy$, em que a sequência $(abcdef)$ representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores.

Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial $A \cdot B = C$, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são

a) 34

b) 41

c) 49

d) 51

e) 54

---

45. (EsPCEx/2013)

O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) 0

d) -2

e) $-\frac{1}{3}$

---

46. (EsPCEx/2012)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$. Se x e y são valores para os quais B é a transposta da Inversa da matriz A, então o valor de $x + y$ é

a) -1

b) -2

c) -3

d) -4

e) -5

---

10 – Questões Comentadas

1. (Eear 2019) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz

a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Comentário:

Do enunciado, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gabarito: C

---

2. (Ueg 2019) A matriz triangular de ordem 3, na qual $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e $a_{ij} = 4i - 5j + 2$ para $i \le j$ é representada pela matriz

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Comentário:

Tem-se que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1-5\cdot 1+2 & 4\cdot 1-5\cdot 2+2 & 4\cdot 1-5\cdot 3+2 \\ 0 & 4\cdot 2-5\cdot 2+2 & 4\cdot 2-5\cdot 3+2 \\ 0 & 0 & 4\cdot 3-5\cdot 3+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gabarito: A

---

3. (Famerp 2019) A matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ representa uma mensagem codificada. A mensagem decodificada é a matriz quadrada $M^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, tal que M^{-1} é a inversa da matriz M Sendo assim, o valor de $x+y+z+w$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) $\frac{1}{2}$

e) $-\frac{1}{2}$

Comentário:

Calculando:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x & -y \\ 2z & 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 1 \Rightarrow x = -1 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ 2w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x+y+z+w = -1+0+0+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Gabarito: E

---

4. (Unicamp 2018) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) $-2.$

b) $-1.$

c) $1.$

d) $2.$

Comentário:

Tem-se que

$$A^2 = aA + bI \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Por conseguinte, vem $a \cdot b = 2 \cdot (-1) = -2.$

Gabarito: A

---

5. (Imed 2018) Em uma grande cidade, para estudar o nível de ruído a que estavam expostos os habitantes, a prefeitura realizou quatro medições diárias durante cinco dias em um cruzamento de grande movimento. Cada elemento a_{ij} da matriz a seguir representa o nível de ruído, em decibéis (dB), registrado na medição i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 45 & 62 & 68 & 44 & 63 \\ 51 & 49 & 72 & 48 & 68 \\ 39 & 52 & 71 & 52 & 62 \\ 51 & 45 & 63 & 40 & 69 \end{bmatrix}$$

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), 50 dB é o nível máximo recomendável à exposição do ouvido humano.

Com as informações apresentadas, determine o nível médio de ruídos registrados no quarto dia e assinale a alternativa correta:

a) 46 dB

b) $46{,}5\text{ dB}$

c) 52 dB

d) $65{,}5\text{ dB}$

e) $68{,}5\text{ dB}$

Comentário:

O dia é representado pelas colunas (j), assim as medições do dia 4 estão na quarta coluna. Calculando:

$$\text{Média} = \frac{44+48+52+40}{4} = 46\ \text{dB}$$

Gabarito: A

---

6. (Espcex (Aman) 2018) Uma matriz quadrada A, de ordem 3, é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i-j, \text{ se } i > j \\ (-1)^{i+j}, \text{ se } i \le j \end{cases}.$

Então $\det(A^{-1})$ é igual a

a) 4.

b) 1.

c) 0.

d) $\frac{1}{4}$.

e) $\frac{1}{2}$.

Comentário:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = (-1)^{1+1} = 1$

$a_{12} = (-1)^{1+2} = -1$

$a_{13} = (-1)^{1+3} = 1$

$a_{21} = 2-1 = 1$

$a_{22} = (-1)^{2+2} = 1$

$a_{23} = (-1)^{2+3} = -1$

$a_{31} = 3-1 = 2$

$a_{32} = 3-2 = 1$

$a_{33} = (-1)^{3+3} = 1$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{4}$$

Gabarito: D

7. (Udesc 2018) Analise as proposições abaixo.

I.O produto de uma matriz linha por uma matriz linha é uma matriz linha.
II. Uma matriz identidade elevada ao quadrado é uma matriz identidade.
III. O produto de uma matriz por sua transposta é a matriz identidade.

Assinale a alternativa **correta**.
a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente a afirmativa II é verdadeira.
d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Comentário:

[I] Falsa. Sejam $A = [1 \quad -1]$ e $B = [1 \quad 0 \quad 1]$ duas matrizes linha. Como as ordens de A e de B são, respectivamente, iguais a 1×2 e 1×3, podemos concluir que a matriz produto $A \cdot B$ não existe, uma vez que o número de colunas da matriz A é diferente do número de linhas da matriz B.

[II] Verdadeira. Sabendo que I_n é matriz identidade de ordem n, e sendo A uma matriz quadrada de ordem n, temos $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. Portanto, se $A = I_n$, então $I_n^2 = I_n \cdot I_n = I_n$.

[III] Falsa. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a sua transposta $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Desse modo, temos

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mas $A \cdot A^t \neq I_2$.

Gabarito: C

8. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Uma matriz quadrada de ordem n é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Os elementos de uma matriz triangular superior T, de ordem 3, onde $i \leq j$, são obtidos a partir da lei de formação $t_{ij} = 2i^2 - j$. Sendo $A = [-1 \quad 1 \quad 1]$ uma matriz de ordem 1×3 e A^t sua transposta, o produto $A \cdot T \cdot A^t$ é a matriz 1×1 cujo único elemento vale
a) 0.
b) 4.
c) 7.
d) 28.

Comentário:

Tem-se que

$$T=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&6&5\\0&0&15\end{bmatrix}.$$

Logo, vem

$$\begin{aligned}A\cdot T\cdot A^t&=[-1\ \ 1\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&6&5\\0&0&15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\\&=[-1\ \ 6\ \ 21]\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\\&=[28].\end{aligned}$$

Gabarito: D

---

9. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Uma matriz B possui i linhas e j colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão $b_{ij}=i-2j.$ Seja uma matriz $A=(a_{ij})_{2\times 3}$ cujos elementos da primeira coluna são nulos e I_2 a matriz identidade de ordem $2,$ tal que $AB=I_2.$

O valor numérico do maior elemento da matriz A é igual a

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentário:

Se $A=(a_{ij})_{2\times 3}$ e $AB=I_2,$ então $B=(b_{ij})_{3\times 2}.$ Ademais, sendo $b_{ij}=i-2j,$ vem $B=\begin{pmatrix}-1&-3\\0&-2\\1&-1\end{pmatrix}.$ Em consequência, temos

$$\begin{aligned}A\cdot B=I_2&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\0&-2\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b&-2a-b\\d&-2c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=-\dfrac{1}{2}\\d=0\end{cases}.\end{aligned}$$

Portanto, como $b=1$ é o maior elemento da matriz $A,$ segue o resultado.

Gabarito: B

---

10. (Unicamp 2016) Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

a) 12.
b) 15.
c) 16.
d) 20.

Comentário:

O resultado pedido é igual a $(5-2)\cdot(6-2)=12.$

Gabarito: A

---

11. (G1 - ifal 2016) A matriz $A_{ij}(2\times 3)$ tem elementos definidos pela expressão $a_{ij}=i^3-j^2.$ Portanto, a matriz A é

a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 26 \\ -3 & 4 & 23 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 4 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}.$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}.$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Comentário:

$a_{ij}=i^3-j^2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^3-1^2) & (1^3-2^2) & (1^3-3^2) \\ (2^3-1^2) & (2^3-2^2) & (2^3-3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Gabarito: A

12. (Ueg 2016) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2×2, onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $\ldots$, $z = 26$. Por exemplo, se a resolução de $A \cdot B$ for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então a matriz A é

a) $\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

Comentário:

Com os dados do enunciado, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

Gabarito: B

13. (G1 - ifsul 2016) Chama-se traço de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Supondo que o traço da matriz quadrada A, de ordem 3, seja 11, e o determinante dessa matriz seja 16, os elementos x e y da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ valem

a) 5 e 5
b) 4 e 4
c) 2 e 8
d) 1 e 9

Comentário:

Calculando:

$$\begin{cases} 1+x+y=11 \\ xy=16 \end{cases}$$

$$1+x+\frac{16}{x}=11 \to \frac{x+x^2+16}{x}=11 \to x^2-10x+16=0 \to \begin{cases} x'=2 \\ x''=8 \end{cases}$$

Gabarito: C

---

14. (Pucrs 2015) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a função f, definida no conjunto das matrizes 2×2 por $f(X)=X^2-2X$, então $f(A)$ é

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Comentário:

Tem-se que

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2-2A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gabarito: B

---

15. (Mackenzie 2014) Se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x+y+z & 3y-z+2 \\ 4 & 5 & -5 \\ y-2z+3 & z & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, o valor de x é

a) 0
b) 1
c) 6
d) 3
e) –5

Comentário:

A matriz dada é simétrica se tivermos

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3y-z+2=y-2z+3 \\ z=-5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=4 \\ 2y=-z+1 \\ z=-5 \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ z=-5 \end{cases}.$$

Gabarito: C

---

16. (Pucrs 2013) Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz $M=(m_{ij})$ de ordem 2×3. Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra $m_{ij}=4i-j$. Assim, a matriz M é igual a _________.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Comentário:
Temos

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 4\cdot 1-1 & 4\cdot 1-2 & 4\cdot 1-3 \\ 4\cdot 2-1 & 4\cdot 2-2 & 4\cdot 2-3 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Gabarito: C

---

17. (Uern 2013) Sejam duas matrizes A e B: $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, tal que $aij=\begin{cases} i\cdot j, \text{ se } i\le j \\ i+j, \text{ se } 1>j \end{cases}$ e $B=A^2$. Assim, a soma dos elementos da diagonal secundária de B é

a) 149.
b) 153.
c) 172.
d) 194.

Comentário:

A soma dos elementos da diagonal secundária da matriz B é igual a

$$\begin{aligned} b_{13}+b_{22}+b_{31} &= a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}+a_{13}a_{33}+a_{21}a_{12}+a_{22}^2+a_{23}a_{32}+a_{11}a_{31}+ \\ &\quad +a_{32}a_{21}+a_{33}a_{31} \\ &= 1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 9+3\cdot 2+4^2+6\cdot 5+1\cdot 4+5\cdot 3+9\cdot 4 \\ &= 149. \end{aligned}$$

Gabarito: A

---

18. (Espm 2012) Sendo $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2, a soma de todos os elementos da matriz $M=A\cdot A^t$ é dada por:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
b) $(a + b + c + d)^2$
c) $(a + b)^2 + (c + d)^2$
d) $(a + d)^2 + (b + c)^2$
e) $(a + c)^2 + (b + d)^2$

Comentário:

Como $A^t=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, segue que

$$M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a soma pedida é

$$\begin{aligned} a^2+b^2+2ac+2bd+c^2+d^2 &= a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2 \\ &= (a+c)^2+(b+d)^2. \end{aligned}$$

Gabarito: E

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Arquimedes,candidato a um dos cursos da Faculdade de Engenharia, visitou a PUCRS para colher informações. Uma das constatações que fez foi a de que existe grande proximidade entre Engenharia e Matemática.

19**.** (Pucrs 2012) Numa aula de Álgebra Matricial dos cursos de Engenharia, o professor pediu que os alunos resolvessem a seguinte questão:

Se $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então A^2 é igual a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 25 & 25 \end{bmatrix}$

Comentário:

Como $A^2=A\cdot A$, segue que

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4\cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gabarito: C

---

20 (EsSA 2009) – Uma matriz B, de ordem 3, é tal que, em cada linha, os elementos são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 2. Se as somas dos elementos da primeira, segunda e terceira linhas valem 6, 3 e 0, respectivamente, o determinante de B é igual a:

a) 1

b) 0

c) –1

d) 3

e) 2

Comentário:

Vamos escrever a matriz B como proposto pelo enunciado

$$B = \begin{pmatrix} a & a+2 & a+4 \\ b & b+2 & b+4 \\ c & c+2 & c+4 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\begin{cases} a + (a+2) + (a+4) = 6 \rightarrow a = 0 \\ b + (b+2) + (b+4) = 3 \rightarrow b = -1 \\ c + (c+2) + (c+4) = 0 \ \rightarrow c = -2 \end{cases}$$

Logo, temos que B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detB = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) \cdot 0 - (-2) \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$detB = -12 + 8 + 4 = 0$$

Gabarito: B

21 (EsSA 2014) – Sabendo-se que uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu determinante é não-nulo e que, se A e B são duas matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$, pode-se concluir que, sob essas condições:

a) se A é invertível, então $A \cdot B$ é invertível.

b) se B não é invertível, então A é invertível.

c) se $A \cdot B$ é invertível, então A é invertível e B não é invertível.

d) se $A \cdot B$ não é invertível, então A ou B não é invertível.

e) se $A \cdot B$ é invertível, então B é invertível e A não é invertível.

Comentário:

Na análise dos itens, temos que se uma matriz NÃO é invertível, então seu determinante deve ser zero. Dessa forma,

$$\text{Se } \det(A \cdot B) = 0 \ \rightarrow detA \cdot detB = 0$$

$$\begin{cases} detA = 0 \\ ou \\ detB = 0 \end{cases}$$

Logo, se $A \cdot B$ não é invertível, então A ou B não é invertível.

Gabarito: D

47. (EEAR/2005)

Sendo A uma matriz 3×4 e B uma matriz $N \times M$, coloque V (Verdadeira) ou F (Falsa) nas afirmações a seguir:

• ( ) Existe $A + B$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.

- ( ) Existe $A \cdot B$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.
- ( ) Existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.
- ( ) $A + B = B + A$ se, e somente se, $A = B$.
- ( ) $A \cdot B = B \cdot A$ se, e somente se, $A = B$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta:

a) $V - V - V - V - V$

b) $F - V - F - V - F$

c) $F - F - V - F - F$

d) $V - V - V - F - V$

Comentário:

(**F**) Existe $A + B$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$

Na soma, as matrizes devem ser do mesmo tipo, então: $N = 3$ e $M = 4$

(**F**) Existe $A \cdot B$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.

No produto, a quantidade de colunas de A deve ser igual a quantidade de linhas de B, logo, $N = 4$, mas M pode ser qualquer número inteiro maior que 0.

(**V**) Existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se, e somente se, $N = 4$ e $M = 3$.

Conforme explicado na assertiva anterior. Se existe $A \cdot B$ então $N = 4$. Analogamente, se existe $B \cdot A$ então $M = 3$.

(**F**) $A + B = B + A$ se, e somente se, $A = B$.

Caso exista $A + B = B + A$ sempre.

(**F**) $A \cdot B = B \cdot A$ se, e somente se, $A = B$.

Esta propriedade se chama comutação, na comutação de matrizes as matrizes não necessitam serem iguais entre si.

Gabarito: C

---

48. (EEAR/2010)

Sejam as matrizes $A_{m\times 3}$, $B_{p\times q}$ e $C_{5\times 3}$. Se $A \cdot B = C$, então $m + p + q$ é igual a

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

Comentário:

Se existe $A \cdot B$ então a quantidade de colunas de A deve ser igual a quantidade de linhas de B

$$3 = p$$

E a matriz resultante C terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B

$$C_{m \times q} = C_{5 \times 3}$$

Logo,

$$\begin{cases} m = 5 \\ q = 3 \end{cases}$$

Então,

$$m + p + q = 5 + 3 + 3 = 11$$

Gabarito: B

---

49. (EEAR/2019)

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $A \cdot B$ é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Comentário:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gabarito: C

---

50. (EEAR/2014)

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz $X = \frac{1}{2} \cdot A$ tem como soma de seus elementos o valor

a) 7

b) 5

c) 4

d) 1

Comentário:

A matriz X é dada por:

$$X = \frac{1}{2} \cdot A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 & \frac{1}{2} \cdot 2 \\ \frac{1}{2} \cdot (-6) & \frac{1}{2} \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a soma de seus elementos é dada por:

$$2 + 1 + (-3) + 1 = 1$$

Gabarito: D

---

51. (EEAR/2011)

Seja $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e P^t a matriz transposta de P. A matriz $Q = P \cdot P^t$ é

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Comentário:

Primeiramente iremos calcular a transposta de P. Lembre-se que na transposição "as linhas se tornam colunas":

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então Q é dada por:

$$Q = P \cdot P^t$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Gabarito: B

---

52. (EEAR/2007)

Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}$. Se A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e de B, respectivamente, então A^t+B^t é igual a

a) $\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}0 & 2\\-2 & -2\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}0 & -1\\0 & 5\end{bmatrix}$

Comentário:

Uma importante propriedade da matriz transposta é a transposta da soma:

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

Então, temos que $A+B$ vale:

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & 1+1\\2+0 & 2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

Transpondo a matriz $A+B$:

$$(A+B)^t=\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

Sendo assim:

$$A^t+B^t=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

Gabarito: A

---

53. (EEAR/2015)

Seja a matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times2}$ tal que $a_{ij}=|i^2-j^2|$. A soma dos elementos de A é igual a

a) 3

b) 6

c) 9

d) 12

Comentário:

Construindo a matriz A obtemos:

$$A = \begin{pmatrix} |(1)^2 - (1)^2| & |(1)^2 - (2)^2| \\ |(2)^2 - (1)^2| & |(2)^2 - (2)^2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |0| & |-3| \\ |3| & |0| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo assim, a soma dos elementos de A é dada por:

$$0 + 3 + 3 + 0 = 6$$

Gabarito: B

---

54. (EEAR/2012)

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \dots & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 3 \end{bmatrix}$ faltam 2 elementos. Se nessa matriz $a_{ij} = 2i - j$, a soma dos elementos que faltam é

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

Comentário:

Queremos a soma $a_{21} + a_{32} = (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 2) = (3) + (4) = 7$

Gabarito: D

---

55. (EEAR/2016)

Se $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$ são matrizes opostas, os valores de a, b, x e k são respectivamente.

a) 1, -1, 1, 1

b) 1, 1, -1, -1

c) 1, -1, 1, -1

d) -1, -1, -2, -2

Comentário:

Matrizes opostas seguem a seguinte propriedade: A oposta da matriz A é a matriz $B = -1 \cdot A$. Logo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = -1 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Mas a oposta de A é a matriz $\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$, então:

$$\begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \\ x = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Então, a, b, x e k são $1, -1, 1, -1$

Gabarito: C

---

56. (EEAR/2006)

Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, a soma dos elementos da 1ª linha de $A \cdot B$ é

a) 22

b) 30

c) 46

d) 58

Comentário:

Perceba que precisamos apenas da primeira linha de $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 10 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Sendo assim a soma dos elementos da primeira linha é dada por:

$$9 + 10 + 3 = 22$$

Gabarito: A

57. (EEAR/2003)

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, então $A \cdot B - B \cdot A$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

Comentário:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Gabarito: C

58. (EEAR/2006)

Se $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então $x - y$ é:

a) 2

b) 1

c) -1

d) 0

Comentário:

A principal propriedade da matriz inversa nos diz que $A \cdot B = B \cdot A = I$. Sendo assim:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2x & 2y-1 \\ 2+4x & 4y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+2x = 1 \\ 2y-1 = 0 \\ 2+4x = 0 \\ 4y-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$x - y = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Gabarito: C

---

59. (EEAR/2005)

Sabendo-se que $M + N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $M - N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz N é igual a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Comentário:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{cases} M + N = A \\ M - N = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M + N = A \\ -M + N = -B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M + N) + (-M + N) = (A) + (-B) =$$

$$2N = A - B$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{2} \cdot (A - B)$$

Mas,

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$N=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 2\\ \frac{1}{2}\cdot 3 & \frac{1}{2}\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}$$

Perceba como podemos resolver equações matriciais utilizando as mesmas ferramentas da álgebra atentando-se apenas para algumas particularidades das equações matriciais.

Gabarito: C

---

60. (EEAR/2009)

Se $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$, então o valor de $x+y$ é:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

Comentário:

Primeiramente veja que:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\ x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 0\end{bmatrix}$$

Ou seja, a forma matricial representa o seguinte sistema:

$$\begin{cases}2x+y=6 & (eq.1)\\ x-y=0 & (eq.2)\end{cases}$$

Portanto, da $eq.2$:

$$x=y$$

Substituindo em $eq.1$:

$$2x+x=3x=6 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2$$

Logo,

$$x+y=2+2=4$$

Gabarito: A

---

61. (EEAR/2017)

Considere as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 9 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$. Se $A = B^t$, então $y + z$ é igual a

a) 3

b) 2

c) 1

d) -1

Comentário:

Aplicando os conceitos de matriz transposta:

$$B^t = \left(\begin{pmatrix} 9 & z \\ y & -x \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 9 & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

Segundo o enunciado $A = B^t$, então:

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & y \\ z & -x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ y + z = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Logo,

$$y + z = 1 + 2 = 3$$

Gabarito: A

---

62. (EEAR/2009)

Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sabendo que $A \cdot A^{-1} = I_2$, o valor de x é:

a) 3

b)2

c) 1

d) 0

Comentário:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \ x = 1$$

Gabarito: C

---

63. (EEAR/2008)

A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 & se\ i \neq j \\ i+j & se\ i = j \end{cases}$ é um número

a) múltiplo de 3.

b) múltiplo de 5.

c) divisor de 16.

d) divisor de 121.

Comentário:

Perceba que precisamos apenas dos elementos da diagonal principal de A, lembre-se que na diagonal principal $i = j$, então:

$$A = \begin{pmatrix} 1+1 & \dots & \dots \\ \dots & 2+2 & \dots \\ \dots & \dots & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \dots & \dots \\ \dots & 4 & \dots \\ \dots & \dots & 6 \end{pmatrix}$$

Logo, a soma dos elementos da diagonal principal é dada por:

$$2 + 4 + 6 = 12$$

Analisando as alternativas, percebemos que 12 não é múltiplo de 5, divisor de 16 também não é divisor de 121. Mas é um múltiplo de 3, pois $4 \cdot 3 = 12$.

Gabarito: A

---

64. (EEAR/2002)

O elemento $X_{3,2}$ da matriz solução da equação matricial $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ é

a) 0

b) -2

c) 3

d) 1

Comentário:

Para ganhar tempo de prova, atente-se apenas ao elemento que precisamos:

$$3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & \mathbf{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot X = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & \mathbf{8} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & \mathbf{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathbf{8-8} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ X = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ X = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathbf{\frac{1}{3} \cdot 0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ X = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Então, $X_{32} = 0$

Gabarito: A

---

65. (EEAR/2005)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são duas matrizes que comutam se, e somente se,

a) $x = 2$ e $y = 1$.

b) $x = 2$ e $y = 1$.

c) $x = 1$.

d) $x = 2$.

Comentário:

As matrizes A e B comutam se, e somente se, $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \ y+2 = 2x+y \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2x = 2 \ \Rightarrow x = 1$$

As matrizes comutam se, e somente se, $x = 1$, independente do valor de y.

Gabarito: C

---

66. (EEAR/2002)

O par (x, y), solução da equação matricial $\begin{pmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2x-4 \\ x^3+y^2 & 8 \end{pmatrix}$ é

a) $(6, \pm\sqrt{3})$

b) $(\pm\sqrt{5}, -2)$

c) $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, -5\right)$

d) $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{5}\right)$

Comentário:

Efetuando o produto entre as matrizes obtemos:

$$\begin{pmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-4y & 2x-4 \\ x^3+y^2 & 2x^2+y \end{pmatrix}$$

Então, segundo o enunciado, sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x^2-4y & 2x-4 \\ x^3+y^2 & 2x^2+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2x-4 \\ x^3+y^2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4y = 13 & (eq.1) \\ 2x^2 + y = 8 & (eq.2) \end{cases} \Rightarrow$$

Da $eq.2$:

$$\stackrel{eq.2}{\Longrightarrow} x^2 = \frac{8-y}{2} \quad (eq.3)$$

Substituindo $eq.3$ em $eq.1$ obtemos:

$$\left(\frac{8-y}{2}\right) - 4y = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{9}{2} \cdot y = 13$$

$$\Rightarrow y = -2 \ (eq.4)$$

Substituindo $eq.4$ em $eq.3$ obtemos:

$$\Rightarrow x^2 = \frac{8-(-2)}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Logo, o par (x, y) vale $\left(\pm\sqrt{5}, -2\right)$

Gabarito: B

---

67. (EsPCEx/2002)

As matrizes A, B e C são do tipo $r \times s$, $t \times u$ e $2 \times w$, respectivamente. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é do tipo 3×4, então $r + s + t + u + w$ é igual a

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

Comentário:

Para existir a matriz $A - B$ elas precisam ser do mesmo tipo:

$$\begin{cases} r = t \\ s = u \end{cases}$$

Considere a matriz D, tal que que $A - B = D$ logo, D é do tipo $r \times s$.

Para o produto $(A - B) \cdot C = D \cdot C$ existir, o número de colunas da matriz D deve ser igual ao número de linhas da matriz C logo:

$$s = 2$$

Considere a matriz E, tal que que o produto $D \cdot C = E$. Logo:

$$D_{r \times 2} C_{2 \times w} = E_{r \times w}$$

Mas sabemos que a matriz resultante deve ter dimensões 3×4, logo:

$$\begin{cases} r = 3 \\ w = 4 \end{cases}$$

Posto isso, iremos agora resumir as conclusões tiradas:

$$\begin{cases} r = t \quad e \, r = 3 \\ s = u \quad e \, s = 2 \\ \quad w = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ s = 2 \\ t = 3 \\ u = 2 \\ w = 4 \end{cases}$$

Sendo assim,

$$r + s + t + u + w = 3 + 2 + 3 + 2 + 4 = 14$$

Gabarito: E

---

68. (EsPCEx/2001)

Uma fábrica de doces produz bombons de nozes, coco e morango, que são vendidos acondicionados em caixas grandes ou pequenas. A tabela 1 abaixo fornece a quantidade de bombons de cada tipo que compõe as caixas grandes e pequenas, e a tabela 2 fornece a quantidade de caixas de cada tipo produzidas em cada mês do 1º trimestre de um determinado ano.

TABELA 1

	Pequena	Grande
Nozes	2	5
Coco	4	8
Morango	3	7

TABELA 2

	JAN	FEV	MAR
Pequena	150	220	130
Grande	120	150	180

Se associarmos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 150 & 220 & 130 \\ 120 & 150 & 180 \end{bmatrix}$ às tabelas 1 e 2 respectivamente, o produto $A \cdot B$ fornecerá

a) a produção média de bombons por caixa fabricada.

b) a produção total de bombons por caixa fabricada.

c) número de caixas fabricadas no trimestre.

d) em cada coluna a produção trimestral de um tipo de bombom.

e) a produção mensal de cada tipo de bombom.

Comentário:

Vamos primeiramente analisar a formação de um termo da matriz resultante, para interpretar corretamente o problema:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 220 & 130 \\ 120 & 150 & 180 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 150 + 5 \cdot 120 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Perceba que a matriz formada será do tipo 3×3. E o elemento $(ab_{11}) = 2 \cdot 150 + 5 \cdot 120$

O número 2 representa a quantidade de bombons de sabor Nozes contidos na caixa pequena. O número 150 representa a produção de caixas pequenas produzidas no mês de janeiro. Logo, o produto $2 \cdot 150$ representa a quantidade de bombons sabor nozes que foram para as caixas pequenas no mês de janeiro. Analogamente sabemos que o produto $5 \cdot 120$ representa a quantidade de bombons sabor nozes que foram para as caixas grandes no mês de janeiro. E a soma (ab_{11}) representa a quantidade total de bombons sabor nozes produzida no mês de janeiro.

Analogamente, o termo (ab_{12}) representa a quantidade total de bombons sabor nozes produzida no mês de fevereiro. E o termo (ab_{21}) representa a quantidade total de bombons sabor coco produzida no mês de janeiro.

A partir daí podemos concluir que a matriz $A \cdot B$ fornece a quantidade de bombons de cada sabor produzidos em cada mês do 1º trimestre de um determinado ano.

Gabarito: E

69. (EsPCEx/2010)

Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma $abcdef - xy$, em que a sequência ($abcdef$) representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores.

Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial $A \cdot B = C$, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são

a) 34

b) 41

c) 49

d) 51

e) 54

Comentário:

Tendo em mente que $abcdef = 356281$

Segundo o enunciado, obteremos um sistema linear na forma matricial, conforme:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3-5) \\ (6-2) \\ (8-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Utilizando o Regra de Cramer:

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad SPD$$

$$D_x = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -5$$

$$D_y = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} = -4$$

Então:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5}{-1} \\ y = \dfrac{-4}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad xy = 54$$

Gabarito: E

---

70. (EsPCEx/2013)

O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

b) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) 0

d) -2

e) $-\frac{1}{3}$

Comentário:

Para trabalhar mais rapidamente na solução da questão, iremos calcular apenas o que o enunciado pede, ou seja, não iremos obter a matriz inversa. Lembre-se que a inversa da matriz M pode ser calculada conforme:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}$$

Sendo $\overline{M}$ a matriz adjunta de M.

A matriz adjunta nada mais é do que a transposta da matriz dos cofatores de M. Com isso em mente, calcularemos o elemento pedido (a_{23}^{-1}) :

$$(a_{23}^{-1}) = \frac{1}{\det M} \cdot (\overline{a_{23}}) \qquad (eq.1)$$

Mas, como a matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores de M. Então

$$(\overline{a_{23}}) = A_{32} \qquad (eq.2)$$

Sendo A_{32} o cofator do elemento da linha 3 coluna 2 da matriz M.

De $(eq.2)$ em $(eq.1)$, obtemos:

$$(a_{23}^{-1}) = \frac{1}{\det M} \cdot A_{32}$$

Calculando A_{32}, e $\det M$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot -2 = 2$$

$$A_{32} = 2$$

$$\det M = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Então:

$$(a_{23}^{-1}) = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

Gabarito: A

---

71. (EsPCEx/2012)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$. Se x e y são valores para os quais B é a transposta da Inversa da matriz A, então o valor de $x + y$ é

a) -1

b) -2

c) -3

d) -4

e) -5

Comentário:

A inversa de A é facilmente calculada conforme:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}$$

Sendo $\bar{A}$ a matriz adjunta de A. A matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores de A.

A matriz dos cofatores de A é dada por:

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\det(x) & (-1)^{1+2}\cdot\det(1) \\ (-1)^{2+1}\cdot\det(5) & (-1)^{2+2}\cdot\det(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Então, podemos calcular a matriz adjunta de A

$$\bar{A} = A^t = \begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Podemos também obter $\det A$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{pmatrix} = 3x - 5$$

Logo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\bar{A} = \frac{1}{(3x-5)}\cdot\begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(3x-5)} & -\frac{5}{(3x-5)} \\ -\frac{1}{(3x-5)} & \frac{3}{(3x-5)} \end{pmatrix}$$

Mas, do enunciado $B = (A^{-1})^t$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{x}{(3x-5)} & -\frac{5}{(3x-5)} \\ -\frac{1}{(3x-5)} & \frac{3}{(3x-5)} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{x}{(3x-5)} & -\frac{1}{(3x-5)} \\ -\frac{5}{(3x-5)} & \frac{3}{(3x-5)} \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{(3x-5)} & -\frac{1}{(3x-5)} \\ -\frac{5}{(3x-5)} & \frac{3}{(3x-5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{(3x-5)} = x & (eq.1) \\ -\frac{1}{(3x-5)} = y+4 & (eq.2) \\ -\frac{5}{(3x-5)} = y & (eq.3) \\ \frac{3}{(3x-5)} = 3 & (eq.4) \end{cases}$$

De $(eq.4)$ obtemos:

$$3x - 5 = 1 \Rightarrow \quad x = 2 \qquad (eq.5)$$

Fazendo $(eq. 5)$ em $(eq. 2)$:

$$-1 = y + 4 \quad \Rightarrow \quad y = -5 \ \ (eq. 6)$$

Perceba que os valores encontrados para x e y não contradizem as equações $(eq. 1)$ e $(eq. 3)$.

Logo:

$$x + y = 2 - 5 = -3$$

Gabarito: C