Limites: Questões

Sumário

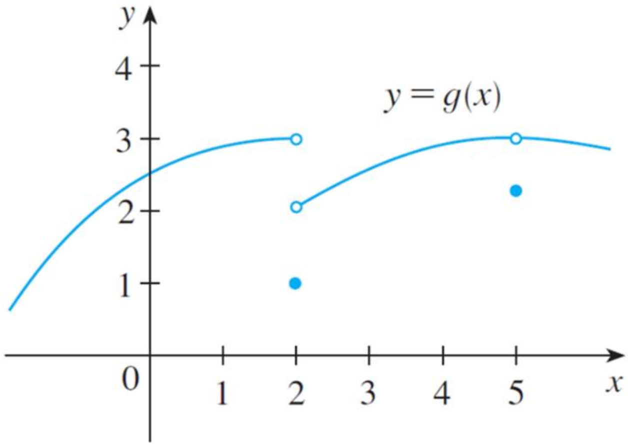
1.1 *Questões para casa*

1.1.1 *Limites Triviais ou Imediatos*

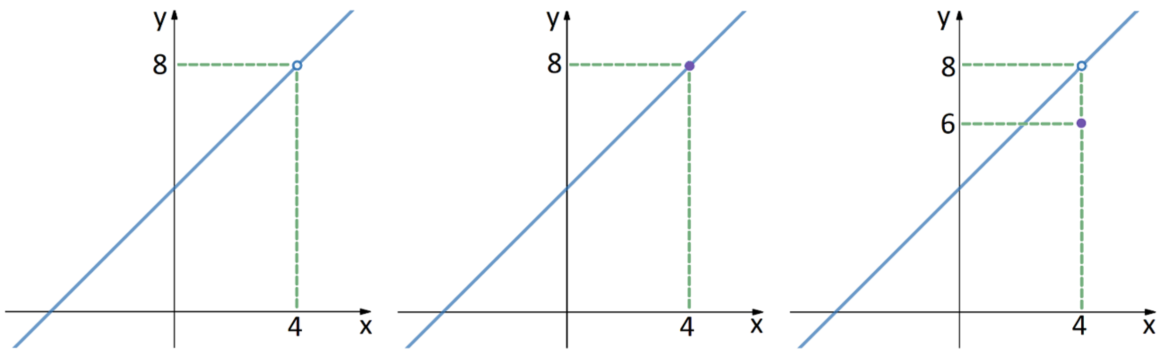
a) ***Quando já se tem o gráfico ou quando ele é facilmente esboçável***

Nas questões 1 e 2 cabe a você apenas olhar os gráficos abaixo e responder quais são os Limites Pedidos.

1) *Calcule os limites à esquerda e à direita da abscissa* (2) *e* (5) *e calcule* $f(2)$ *e* $f(5)$.



2) *a) Se h é a lei de formação que se refere ao 1º Gráfico, associe f e g aos demais.*
b) Calcule o limite bilateral com respeito à abscissa 4 nas três funções abaixo.
c) Encontre o Domínio Máximo das funções abaixo e as classifique como:
 * *contínua em* $x = 4$;
 * *descontínua em seu domínio quando* $x = 4$; *ou*
 * *contínua em seu domínio, mas descontínua nos Reais quando* $x = 4$.



$$h(x) = y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}, \quad f(x) = \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, x \neq 4 \\ y = 6, \quad x = 4 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, x \neq 4 \\ y = 8, \quad x = 4 \end{cases},$$

3) *Dada a função:* $f(x) = \begin{cases} y = x + 6, x < 0 \\ y = 10, \quad x = 0 \\ y = x^2 - 5x + 6, x > 0 \end{cases}$

a) Calcule: $f(-6), f(0), f(2)$ *e* $f(3)$

b) Esboce o gráfico de $f(x)$

c) Determine o valor de: $\lim_{x \to 0^-} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to 0} f(x)$

b) Funções Contínuas

> *Para calcular o Limite L basta calcular* $f(a)$:
>
> *Uma* **função** $f(x)$ *é contínua no* **ponto** (a, L) *se* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L$

Calcule:

4) $\lim_{x \to 5} (2) =$

5) $\lim_{\Delta x \to 0} \left(x^5 - x^3\right) =$

6) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x + 2) =$

7) $\lim_{x \to 1} \left(5x^3 + \frac{3}{x} + \sqrt[7]{x^{-8} + 9x - 9} + \frac{x^3 - 9}{-x^5 + 5}\right) =$

8) $\lim_{x \to \pi} \left(\frac{\ln(x) sen(x)}{x^2} + 3^{\log_7 x}\right) =$

9) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tg(x) + sec(x) + ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{sen(x) + cos(x) + csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}\right) =$

10) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left([cos(x)]^{sen(x)}\right) =$

> **Conclusões Importantes**:
>
> 1. ***Quase a Totalidade das Funções Usuais** são **contínuas em seus Domínios Máximos***
> 2. *Por isso, é essencial que o aluno domine o conceito de* **Domínio** *e de* **Domínio Máximo**
> 3. *Pois, normalmente, o limite que será pedido* **será justamente em torno de um ponto que não pertença ao Domínio da Função** *(como será visto no tópico de Limites Não Imediatos)*
> 4. ***As únicas funções relevantes que** NÃO **são contínuas em seus domínios são** a **Função Parte Inteira** ($\lfloor x \rfloor$), **a Função Parte Fracionária** $\{ x \}$ **e a Função Menor Inteiro** ($\lceil x \rceil$). **Por isso, esta 3 funções devem ser estudas com cautela e revisadas antes das provas**!*

Funções Descontínuas em seus Domínios

11) *Esboçe o gráfico das funções (Tente esboçar rápido e sem pescar na resposta 😉):*

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ *(parte inteira de x)*

$g(x) = \{ x \}$ *(parte fracionária de x)*

$h(x) = \lceil x \rceil$ *(menor inteiro maior do que ou igual a x)*

12) *Com respeito às três funções anteriores, determine os limites à esquerda e à direita de (a) para:*

$a = -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ -n\ ;\ n\ ;$

$(2{,}3)$ *sendo* $(n \in N)$; $(-2{,}3)$ *sendo* $(n \in N)$

$(n + q)$ *sendo* $(n \in N \text{ e } 0 < q < 1)$; $(-n + q)$ *sendo* $(n \in N \text{ e } 0 < q < 1)$

***Em qual destas abscissas cada uma das 3 funções admite limite bilateral**?*

1.1.2 *Limites Não – Imediatos*

a) *Técnicas Algébricas Básicas*

$\boldsymbol{Método\ Geral}\left(\overset{*}{\triangleq}\right)$: *Sempre que* $f(x)$ ***for igual a*** $g(x)$ ***para todo*** (x),

exceto possivelmente quando (x) ***for igual a*** (a),

então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, *contanto que o limite exista.*

Sumário das principais formas de se Calcular um Limite:

Opera – se algebricamente até se poder aplicar o Método Geral

Aconselho o leitor a prestar muita atenção nos seguintes limites, pois eles são os mais recorrentes em qualquer prova!

Questões Clássicas:

13) ***Fatoração:***

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)=$$

14) ***Desracionalização***:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}{x}\right)=$$

15) ***Mudança de variável***:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)=$$

16) ***Binômio de Newton***:

Resolva os seguintes exemplos para treinar e fixar o importante método da expansão facilitada do Binômio de Newton:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^3-(x)^3}{h}\right)=$$

17) ***Revisão***:

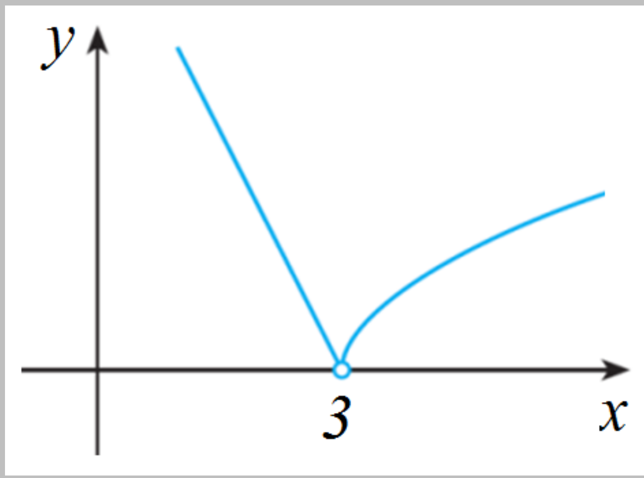
$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{x^2-64}{x-8}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+19}-\sqrt{19}}{x}\right)+\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^4-(x)^4}{h}\right)=$$

b) Limites Inexistentes

Marque Verdadeiro ou Falso no que diz respeito à função cujo gráfico está ***delimitado*** *abaixo:*

Justifique suas afirmativas!

- ☐ 18) $x = 3$ *não pertence ao domínio da função* y
- ☐ 19) $y = 0$ *não pertence à imagem da função* y
- ☐ 20) 0 *não pode pertencer ao contradomínio da função* y*, já que* 0 *não pertence à imagem.*
- ☐ 21) $\lim_{x\to 3}(y)$ *não existe*
- ☐ 22) *A função* y *é contínua no ponto* $(0\,,3)$



Classifique as seguintes afirmativas como verdadeiro ou falso (justifique suas afirmativas):

☐ 23) *O seguinte Limite Bilateral não existe, mas pode ser escrito como:* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$

☐ 24) *O seguinte Limite Bilateral não existe, mas possui a representação:* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) = +\infty$

☐ 25) $y = 4$ *é uma Assíntota Horizontal de* f*, pois:* $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2-4} - 4\left(\frac{2x^3-3}{-2x^3+5}\right)\right) = 4$

☐ 26) *Não faz sentido escrever:* $\lim_{x\to\infty^-}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = 0$ *nem* $\lim_{x\to\infty^+}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = 0$

☐ 27) *Os seguintes limites existem:* $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = 0$

☐ 28) *É verdade que:* $\lim_{x\to\pm\infty}(sen(x)) = 0$ *e que* $\lim_{x\to 0}\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$

☐ 29) *É falso que:* $\lim_{x\to 0}(\cos(x)) = 1$ *e* $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$

☐ 30) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t(t^2-1)}\right) = \infty - \infty = 0$

c) Assíntotas

Calcule os limites e identifique se eles representam Assíntotas Horizontais ou Verticais

31) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+5}{x^2-4}\right)$

32) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^2+5x+9}{x^2-4}\right)$

33) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-7}{x^2-4}\right)$

34) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+5}}{\sqrt[3]{x^2+9}}$

35) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^5-3x^3}\right)$

36) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{x^8+25}}{\sqrt[6]{x^{18}+9}}.2x^2$

37) ***Agora resolva esta de cabeça e em menos de 10 segundos***!!

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^{39}-5x^4+8}{5x^{41}+3x^{15}+x^5}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^{77}+\sqrt{\pi}.x^{19}}{3x^{77}-\sqrt[7]{e}}\right)+\lim_{x\to0}\left(\frac{7x^{109}-\pi^5}{5x^{108}+\pi^5}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^{79}-6}{2x^{77}+x^{38}}\right)=$$

d) Limites Fundamentais

Calcule o valor numérico dos seguintes limites:

38) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[xsen\left(\frac{1}{x}\right)\right]=$

39) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[xtg\left(\frac{1}{x}\right)\right]=$

40) $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=$

41) $\lim\limits_{k\to0^+}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=$

42) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{sen\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=$

43) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=$

44) $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=$

45) $\lim\limits_{v\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v=$

46) $\lim\limits_{x\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=$

47) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{7^x-1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x-1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{7^x-1}\right)=$

1.2 *Teoremas*

Verifique se as propriedades foram aplicadas corretamente e classifique as questões como Correto ou Errado:

48) $\lim_{x\to a}[k] = k \quad e \quad \lim_{x\to a}\left[\frac{y+z}{2u}\right] = \frac{y+z}{2u}$

49) $\lim_{x\to a}[x] = a$

50) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[sen(x) + \ cos(x)] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[sen(x)] + \ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[cos(x)] = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$

51) $\lim_{x\to 1}[ln(x) - \ x] = \lim_{x\to 1}[ln(x)] - \ \lim_{x\to 1} x = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$

52) $\lim_{x\to -2}[c.e^x] = c \ \lim_{x\to -2}[e^x] = c.e^{-2} = \frac{c}{e^2}$

53) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}[sen(x).log_{10}(x)] = \left(\lim_{x\to 0} sen(x)\right).\left(\lim_{x\to 0} log_{10}(x)\right) = 0.0 = 0}$

54) $\boldsymbol{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{sen(x)}{cos(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(sen(x))}{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[cos(x)]} = \frac{1}{0} = +\infty}$

55) $\lim_{x\to 2}[1 + x^3]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{x\to 2}(1 + x^3)\right]^{\frac{1}{2}} = [1 + 2^3]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

56) $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty}\left[e^x.\frac{1}{x^e}\right] = \left(\lim_{x\to +\infty} e^x\right).\left(\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^e}\right) = +\infty.0 = 0}$

57) $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty}[x.sen(x)] = \left(\lim_{x\to +\infty} x\right).\left(\lim_{x\to +\infty} sen(x)\right) = (+\infty).(Indeterminado) = +\infty}$

58) $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty}\left[x.\left(1 + sen(x)\right)\right] = \left(\lim_{x\to +\infty} x\right).\left(\lim_{x\to +\infty}\left(1 + sen(x)\right)\right) = (+\infty).(Indeterminado) = +\infty}$

59) $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty}\left[x.\left(2 + sen(x)\right)\right] = +\infty}$

60) *Encontre o valor do limite* $\left(\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ *usando o Teorema do Sandwich.*

61) *Se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ *e* $f(a) = L$ *então a função* f *é contínua no ponto* a?

62) *Considerando a Função Parte Inteira de* x, *classifique como verdadeiro ou falso:*

a) Esta Função é Contínua à esqueda do 0 *b) Esta Função é Contínua à Direita do* 0

c) Esta Função é Contínua no Intervalo $[-1,0]$ *d) Esta Função é Contínua no Intervalo* $[0,1)$

63) *Determine* k *para que a função abaixo seja contínua no ponto em que a abscissa vale* 0:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{x+9} - \sqrt{9}}{x}\right), & para\ x \neq 0 \\ \dfrac{k}{12}, & para\ x = 0 \end{cases}$$

1.3 *Revisão Final*

Agora tente calcular os seguintes limites abaixo mesmo sem esboçar os gráficos:

64) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+|x|+\frac{|x|}{x}+sgn(x)\right)+\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+|x|+\frac{|x|}{x}+sgn(x)\right)=$

65) $\lim\limits_{x\to(-40)^-}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)+\lim\limits_{x\to(40)^+}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)=$

66) $\lim\limits_{x\to(-40)^+}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)+\lim\limits_{x\to(40)^-}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)=$

67) $\lim\limits_{x\to(-39,3)^-}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)+\lim\limits_{x\to(39,3)^+}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)=$

68) $\lim\limits_{x\to(-39,3)^+}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)+\lim\limits_{x\to(39,3)^-}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)=$

69) *Encontre o valor do limite* $\left(\lim\limits_{x\to 0}x^3 sen\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)$ *usando o Teorema do Sandwich.*

70) *Prove que o Polinômio* $x^3-1{,}5x^2-0{,}25x+0{,}375$ *possui* 3 *raízez reais, cada uma nos seguintes intervalos* $(-1{,}0)$ $(0{,}1)$ *e* $(1{,}2)$.

71) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}\right)=$

72) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}\right)=$

73) $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}\right)=$

74) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}\right)=$

75) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)=$

76) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x}\right)=$

77) *Encontre os valores de u e de v para que a seguinte função seja contínua nos Reais*:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^4-29x^2+100}{x^2-7x+10}\right), x\neq 2 \text{ e } x\neq 5\\ t^2-12t+63, x=2\\ w^2-17w+142, x=3\end{cases}$$

78) ***Resolva esta de cabeça e em menos de 10 segundos***!

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x^{39}-2x^{14}+7}{5x^{42}+3x^{15}+2x^5}\right)+\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{12x^{87}+\sqrt{\pi^3}.x^{19}}{3x^{87}-\sqrt[9]{e}}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{10x^{2019}-\pi^5}{5x^{2018}+\pi^5}\right)+\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{6x^{89}-2x^{35}}{-2x^{87}+3x^{38}}\right)$$

79) ***Resolva esta de cabeça e em menos de 20 segundos***!

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x-|x|+\frac{|x|}{x}-sgn(x)+\lfloor x\rfloor-\{x\}+\lceil x\rceil\right)=$$

Ultimate Fight

80) $\boldsymbol{Resolva\ esta\ de\ cabeça\ e\ em\ menos\ de\ 30\ segundos}$!

$$T=\lim_{x\to0^+}\left\{\left[\frac{x^5}{sen(x^5)}\right]^{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}\left[\frac{x^9}{tg(x^7)}\right]+\frac{\left[cos\left(\left(\frac{x}{7^x+9^x-5^x-4^x}\right)\right)\right]}{cos^2\left(\left[\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}}{e}\right]^{\pi}\right)}ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)-\sqrt[11]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{9x}}\,.\,ln\left[\frac{\pi^{2x}-1}{x}\right]^{\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}}.\left[\frac{tg^{17}(x)}{sen^{19}(x)}\right]\right\}=$$

Qualquer dúvida, perguntem no nosso Grupo Exclusivo do Telegram!!