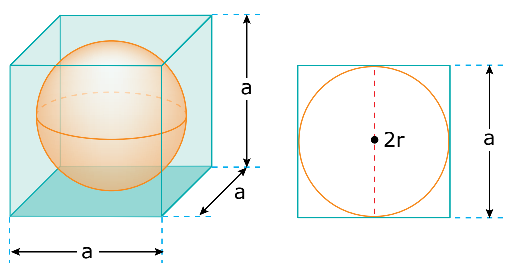
Inscrição de Sólidos

ESFERA E CUBO

Vamos calcular o raio **r** da esfera inscrita em um cubo de aresta **a**. Seja a figura:

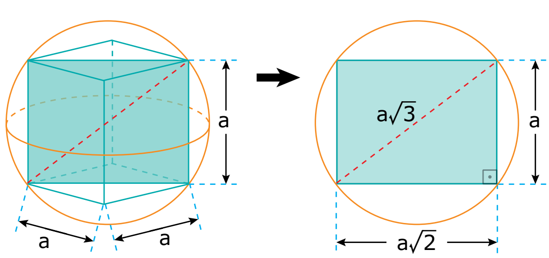


O diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo. Assim:

$$2r = a$$

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

Vamos calcular o raio **R** da esfera circunscrita a um cubo de aresta **a**. Seja a figura:



O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo. Assim:

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

Inicialmente, vejamos uma propriedade dos tetraedros regulares:

> Num tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.

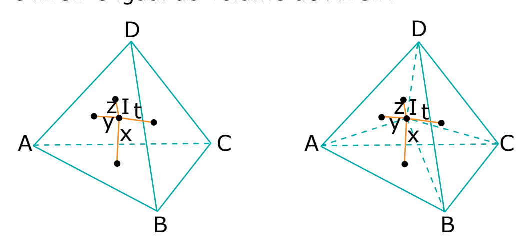
Sendo **I** um ponto interior e **x**, **y**, **z** e **t** as respectivas distâncias às faces ABC, ABD, ACD e BCD, queremos provar que:

$$\boxed{x + y + z + t = h}$$

Consideremos **h** a altura do tetraedro.

Demonstração:

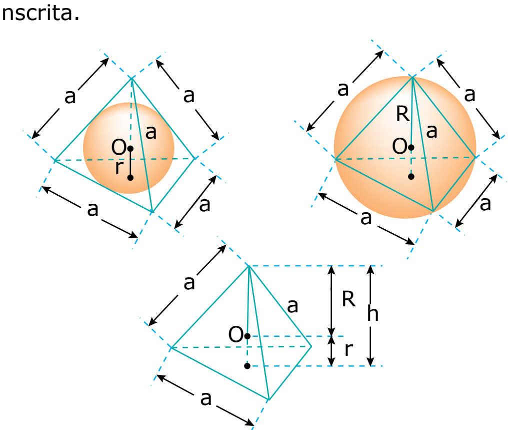
De fato, a soma dos volumes das pirâmides IABC, IABD, IACD e IBCD é igual ao volume de ABCD.



Sendo **S** a área de uma face do tetraedro, temos:

$$\frac{1}{3}S_x + \frac{1}{3}S_y + \frac{1}{3}S_z + \frac{1}{3}S_t = \frac{1}{3}S_h \Rightarrow x + y + z + t = h$$

Seja **a** a medida da aresta do tetraedro regular, vamos calcular o raio **r** da esfera inscrita e o raio **R** da esfera circunscrita.



Sendo o centro **O** um ponto interior do tetraedro regular, vale a propriedade anterior, isto é:

$x + y + z + t = h$ e, com $x = y = z = t = r$, temos:

$$4r = h$$

$$\boxed{r = \frac{1}{4}h}$$

Como $R + r = h$, então:

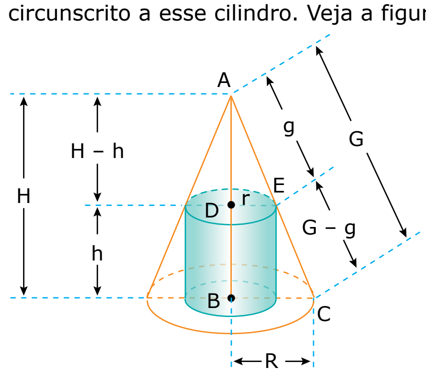
$$\boxed{R = \frac{3}{4}h}$$

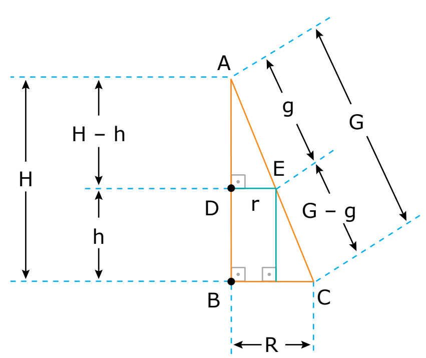
Como a altura do tetraedro regular é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, temos, respectivamente, o raio da circunferência inscrita e circunscrita iguais a:

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}} \text{ e } \boxed{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

CILINDRO E CONE

Vamos relacionar as medidas de um cilindro reto às de um cone reto circunscrito a esse cilindro. Veja a figura:



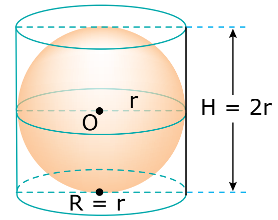


Sabendo que os triângulos ABC e ADE da figura são semelhantes, podemos aplicar:

$$\boxed{\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}}$$

CILINDRO E ESFERA

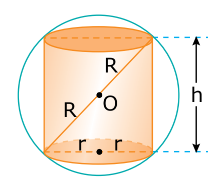
O cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero, cujo raio da base é igual ao raio da esfera. Se **R** é o raio do cilindro e **r** o raio da esfera, então:



$$R = r = \frac{H}{2}$$

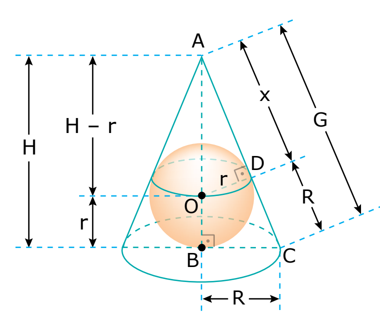
O raio da base **r** e a altura **h** de um cilindro inscrito em uma esfera de raio **R** obedecem à relação:

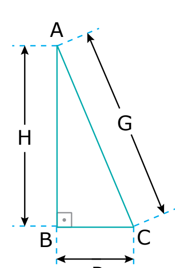
$$\boxed{(2R)^2 = (2r)^2 + h^2}$$

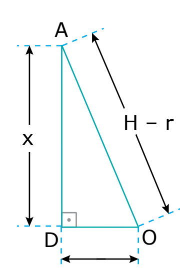


ESFERA E CONE RETO

Veja a figura de uma esfera inscrita em um cone reto, em que **O** é o centro da esfera inscrita no cone, e **D** é o ponto de tangência entre a esfera e o cone.







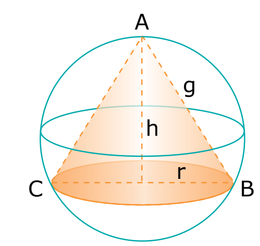
Sabendo que os triângulos ABC e ADO da figura são semelhantes, podemos aplicar:

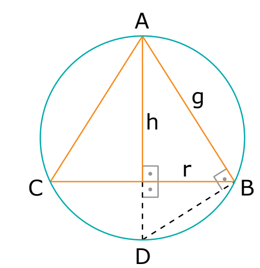
$$\boxed{\Delta ADO \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{r}{R} = \frac{H-r}{G}}$$

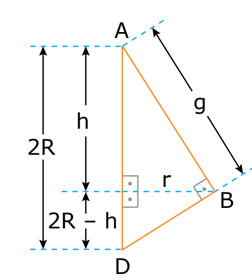
Podemos obter **x** aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADO:

$$x^2 = (H - r)^2 - r^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{H(H - 2r)}}$$

Analisemos, agora, uma esfera circunscrita a um cone reto.





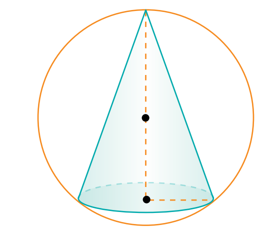


Das relações métricas no triângulo retângulo ABD, temos:

$$\boxed{g^2 = 2Rh} \text{ e } \boxed{r^2 = h(2R - h)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC-SP) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura a seguir.



O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

A) 26,4%.

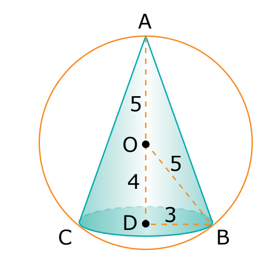
B) 21,4%.

C) 19,5%.

D) 18,6%.

E) 16,2%.

Resolução:



Seja **O** o centro da esfera. Trace o raio OB da esfera. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ODB, temos:

$OB^2 = DB^2 + OD^2 \Rightarrow (5)^2 = (3)^2 + OD^2 \Rightarrow$
$OD = 4$ cm, pois $OD > 0$

Assim, a altura **h** do cone é:
$h = 5 + 4 = 9$ cm

Logo, o volume V_C do cone é:

$$V_C = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}.\pi(3)^2 . 9 = 27\pi \text{ cm}^3$$

O volume V_E da esfera é:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, percentualmente, o volume do cone corresponde ao volume da esfera em:

$$\frac{V_C}{V_E} = \frac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = 27\pi.\frac{3}{500\pi} = \frac{81}{500} = 0{,}162 = 16{,}2\%$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFMG) A razão entre as áreas totais de um cubo e do cilindro reto nele inscrito, nessa ordem, é:

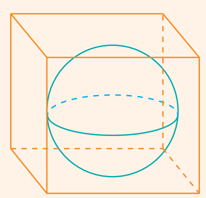
A) $\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{3}{\pi}$ C) $\frac{4}{\pi}$ D) $\frac{5}{\pi}$ E) $\frac{6}{\pi}$

02. (EEAR–2017) Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede 16π cm². O volume da esfera inscrita é:

A) 8 C) $\frac{32}{3}\pi$

B) 16π D) $\frac{256}{3}\pi$

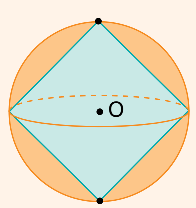
03. (UFRR–2015) Calcule a razão entre a área e o volume de uma esfera inscrita no cubo de aresta 3 cm.



A) 2 C) π E) $\frac{1}{2}$

B) 1 D) 2π

04. (UFAM–2015) A figura a seguir mostra um par de cones de mesma base e altura inscritos em uma esfera de raio 1 cm. O volume de cada cone é em cm³ igual a:



A) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

B) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{6}$

05. (UFF-RJ) Em 1596, em sua obra *Mysterium Cosmographicum*, Johannes Kepler estabeleceu um modelo do cosmos onde os cinco poliedros regulares são colocados um dentro do outro, separados por esferas. A ideia de Kepler era relacionar as órbitas dos planetas com as razões harmônicas dos poliedros regulares.

A razão harmônica de um poliedro regular é a razão entre o raio da esfera circunscrita e o raio da esfera inscrita no poliedro. A esfera circunscrita a um poliedro regular é aquela que contém todos os vértices do poliedro. A esfera inscrita, por sua vez, é aquela que é tangente a cada uma das faces do poliedro.

A razão harmônica de qualquer cubo é igual a:

A) 1 C) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[3]{2}$

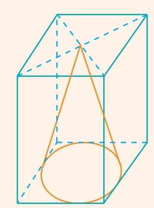
B) 2 D) $\sqrt{3}$

06. (PUC-RS–2016) A circunferência de uma bola de voleibol é 66 cm. Para colocá-la em uma caixa cúbica, essa caixa deve ter, no mínimo, uma aresta interna, em centímetros, de:

A) 33 C) 66 E) $\frac{\pi}{66}$

B) $\frac{33}{\pi}$ D) $\frac{66}{\pi}$

07. (PUC RS–2016) Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área 400 cm². Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é:



A) 16 000 C) $\frac{12}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{36}$

B) $\frac{4\,000}{3\pi}$ D) $\frac{\pi}{12}$

08. (UESB-BA–2015) Se uma esfera rígida for colocada dentro da menor lata, em formato de cilindro circular reto, capaz de contê-la, ela irá ocupar uma fração do volume dessa lata igual a:

A) $\frac{1}{2}$. C) $\frac{2}{3}$. E) $\frac{4}{5}$.

B) $\frac{3}{5}$. D) $\frac{3}{4}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2017) Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio **R**. A medida de um diâmetro (2R) da esfera é

A) $2\sqrt{3}$ dm. C) $3\sqrt{3}$ dm.

B) $3\sqrt{2}$ dm. D) $4\sqrt{3}$ dm.

02. (UECE) Uma esfera está circunscrita a um cubo cuja medida da aresta é 2 m. A medida do volume da região exterior ao cubo e interior à esfera é:

A) $4(\pi\sqrt{3} - 2)$ m³. C) $4(\pi\sqrt{3} + 2)$ m³.

B) $3(\pi\sqrt{3} + 2)$ m³. D) $3(\pi\sqrt{3} - 2)$ m³.

03. (FGV-RJ–2017) O líquido AZ não se mistura com a água. A menos que sofra alguma obstrução, espalha-se de forma homogênea sobre a superfície da água formando uma fina película circular com 0,2 cm de espessura. Uma caixa em forma de paralelepípedo retangular, com dimensões de 7 cm, 10 cm e 6 cm, está completamente cheia do líquido AZ. Seu conteúdo é, então, delicadamente derramado em um grande recipiente com água.

O raio da película circular que o líquido AZ forma na superfície da água, em centímetros, é:

A) $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{21}{\pi}}$ C) $10\sqrt{\frac{21}{\pi}}$ E) $\frac{\sqrt{21}}{10\pi}$

B) $\sqrt{\frac{210}{\pi}}$ D) $\sqrt{\frac{21}{10\pi}}$

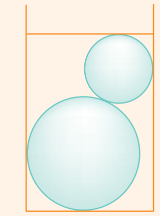
04. (UDESC-SC) Algumas caixas de *pizza* para entrega têm o formato de um prisma regular de base hexagonal. Considere uma caixa destas com altura de 4 cm e, com base, um polígono de perímetro 72 cm. Se a *pizza* tem o formato de um cilindro circular, então o volume máximo de *pizza* que pode vir nesta caixa é:

A) $216\sqrt{3}$ cm³. D) 108π cm³.

B) 576π cm³. E) 432π cm³.

C) $864\sqrt{3}$ cm³.

05. (UERJ) Duas esferas metálicas maciças de raios iguais a 8 cm e 5 cm são colocadas, simultaneamente, no interior de um recipiente de vidro com forma cilíndrica e diâmetro da base medindo 18 cm. Nesse recipiente, despeja-se a menor quantidade possível de água para que as esferas fiquem totalmente submersas, como mostra a figura.

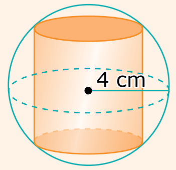


Posteriormente, as esferas são retiradas do recipiente. A altura da água, em cm, após a retirada das esferas, corresponde, aproximadamente, a:

A) 10,6. C) 14,5.

B) 12,4. D) 25,0.

06. (UECE) Como mostra a figura, o cilindro reto está inscrito na esfera de raio 4 cm.

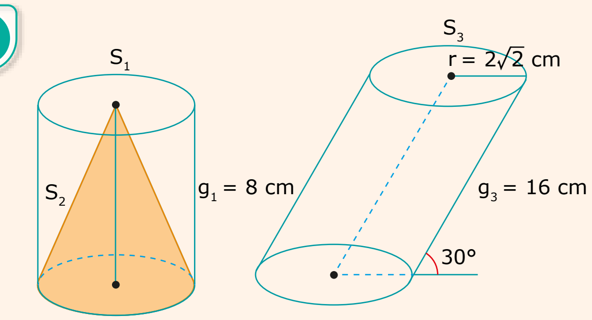


Sabe-se que o diâmetro da base e a altura do cilindro possuem a mesma medida. O volume do cilindro é:

A) $18\pi\sqrt{2}$ cm³. C) $32\pi\sqrt{2}$ cm³.

B) $24\pi\sqrt{2}$ cm³. D) $36\pi\sqrt{2}$ cm³.

07. (UEMG–2017) Observe as figuras.



Nas figuras anteriores, tem-se um cilindro circular equilátero (S_1), circunscrevendo um cone (S_2), e um cilindro circular oblíquo (S_3). A razão determinada pelo volume de S_3 com a superfície total de S_2 é

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ cm. C) $\frac{\sqrt{5}+16}{4}$ cm.

B) $\sqrt{5}-1$ cm. D) $\sqrt{5}+16$ cm.

08. (UDESC-SC–2016) A base de um cone reto está inscrita em uma face de um cubo e seu vértice está no centro da face oposta. Se o volume do cone é $\frac{2\pi}{3}$ metros cúbicos, a área do cubo (em metros quadrados) é igual a:

A) 8. C) 16. E) 4.

B) 24. D) 20.

09. (EsPCEx-SP) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone (em cm³) é igual a:

A) $\frac{1}{3}\pi$ C) $\frac{4}{3}\pi$ E) 3π

B) $\frac{2}{3}\pi$ D) $\frac{8}{3}\pi$

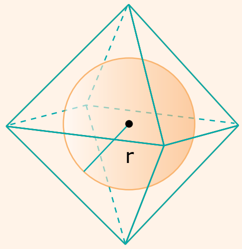
10. (UFJF-MG) Uma peça de ornamentação confeccionada com vidro possui a forma de um prisma regular reto cuja base é um triângulo equilátero. Em seu interior, há uma esfera representando o globo terrestre, que tangencia cada face do prisma. Sabendo que o raio da esfera é **r**, qual é o volume do prisma?

A) $r^3\sqrt{3}$ C) $3r^3\sqrt{3}$ E) $8r^3\sqrt{3}$

B) $2r^3\sqrt{3}$ D) $6r^3\sqrt{3}$

11. (UEL-PR) Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma joia exclusiva. Para isso, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio **r**, conforme representado na figura a seguir.

MATEMÁTICA



Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm^3, é:

A) $\dfrac{(\sqrt{2})\pi}{3}$

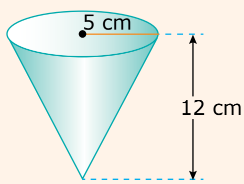
B) $\dfrac{8\pi}{3}$

C) $8\dfrac{(\sqrt{2})\pi}{9}$

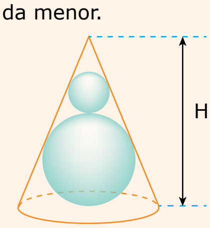
D) $4\dfrac{(\sqrt{6}\pi)}{9}$

E) $8\dfrac{(\sqrt{6})\pi}{27}$

12. (Unicamp-SP) Uma esfera de 4 cm de raio cai numa cavidade cônica de 12 cm de profundidade, cuja abertura tem 5 cm de raio. Determine a distância do vértice da cavidade à esfera.

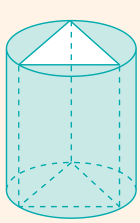


13. (UFRJ) Um cone circular reto de altura **H** circunscreve duas esferas tangentes, como mostra a figura a seguir. A esfera maior tem raio de 10 cm e seu volume é oito vezes o volume da menor.



Determine **H**.

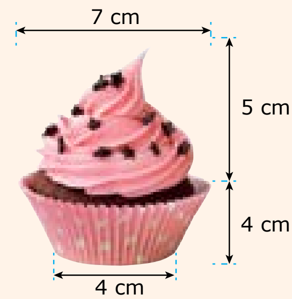
14. (Unesp) Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, como ilustrado na figura, onde o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência.



A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável. Determine o volume dessa região. Para os cálculos finais, considere as aproximações $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2015) Em uma confeitaria, um cliente comprou um *cupcake* (pequeno bolo no formato de um tronco de cone regular mais uma cobertura, geralmente composta por um creme), semelhante ao apresentado na figura:



Como o bolinho não seria consumido no estabelecimento, o vendedor verificou que as caixas disponíveis para embalar o doce eram todas em formato de blocos retangulares, cujas medidas estão apresentadas no quadro:

Embalagem	Dimensões (comprimento x largura x altura)
I	8,5 cm x 12,2 cm x 9,0 cm
II	10 cm x 11 cm x 15 cm
III	7,2 cm x 8,2 cm x 16 cm
IV	7,5 cm x 7,8 cm x 9,5 cm
V	15 cm x 8 cm x 9 cm

A embalagem mais apropriada para armazenar o doce, de forma a não o deformar e com menor desperdício de espaço na caixa, é

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

02. (Enem) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é

A) 9.
B) 11.
C) 13.
D) 15.
E) 17.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. C ○ 02. C ○ 03. A ○ 04. B ○ 05. D ○ 06. D ○ 07. D ○ 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

○ 01. C
○ 02. A
○ 03. C
○ 04. E
○ 05. C
○ 06. C
○ 07. B
○ 08. B
○ 09. D
○ 10. D
○ 11. E
○ 12. 6,4 cm
○ 13. 40 cm
○ 14. 517,5 cm^3

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. D ○ 02. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %