"O vencedor da dificuldade cria oportunidade;
o perdedor da oportunidade cria dificuldade"

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA

I. PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

1. INTRODUÇÃO

Frequentemente, no nosso dia a dia, precisamos enumerar “eventos” tais como, arrumação de objetos de certa maneira, particionar coisas sob uma certa condição, distribuições para certos fins etc. Para fazermos isto, antes de tudo, precisamos enunciar dois teoremas que são fundamentais em todos os problemas de contagem.

2. O PRINCÍPIO ADITIVO (AP)

Suponha que existam

n_1 maneiras para o evento E_1 ocorrer,

n_2 maneiras para o evento E_2 ocorrer,

$$\vdots$$

n_k maneiras para o evento E_k ocorrer,

onde $k \geq 1$ Se estas maneiras para as ocorrências dos eventos distintos forem disjuntas duas a duas então o número de maneiras nas quais pelo menos um dos eventos E_1, E_2, ..., ou E_k pode ocorrer é

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Assim, por exemplo, se podemos ir de uma cidade P a uma cidade Q por vias aérea, marítima e rodoviária e supondo que existam 2 companhias marítimas, 3 companhias aéreas e 2 companhias rodoviárias que fazem o trajeto entre P e Q então pelo AP o número total de se fazer o trajeto de P a Q pelo mar, pelo ar ou por rodovia é 2 + 3 + 2 = 7.

Uma forma equivalente do AP usando a terminologia dos conjuntos onde $|X|$ representa o número de elementos do conjunto X é o seguinte:

Sejam A_1, A_2, ..., A_k conjuntos finitos quaisquer onde $k \geq 1$. Se os conjuntos dados são distintos dois a dois, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

3. O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO (MP)

Supondo que um evento E possa ser decomposto em r eventos ordenados E_1, E_2, ..., E_r e que existam.

n_1 maneiras para o evento E_1 ocorrer

n_2 maneiras para o evento E_2 ocorrer

$\vdots$

n_r maneiras para o evento E_r ocorrer

Então o número de maneiras do evento E ocorrer é dado por

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r = \prod_{i=1}^{r} n_1$$

Assim, por exemplo, se para irmos de uma cidade A até uma cidade D devemos passar pelas cidades B e C, nesta ordem, e supondo que existam duas maneiras distintas de ir de A até B, 5 maneiras distintas de se ir de B até C e 3 maneiras distintas de se ir de C até D então, pelo MP o número de maneiras de se ir de A até D passando por B e C é dado por $2 \times 5 \times 3 = 30$.

OBSERVAÇÃO

1. **Como afirmações matemáticas, tanto o AP quanto o MP são triviais e por esta razão são frequentemente negligenciados por aqueles que começam a estudar combinatória o que é uma pena pois, na realidade, eles são fundamentais na resolução de problemas de contagem. Como veremos, nos exemplos, um dado problema de contagem independente de quão complicado seja ele pode sempre ser decomposto em alguns mais simples que podem ser contados usando AP e/ou MP.**

2. **As palavras "e" e "ou" indicam geralmente quando um ou outro princípio é mais apropriado para a resolução de um problema. A palavra "e" sugere o princípio multiplicativo (MP) e a palavra "ou" o princípio aditivo (AP).**

I. ARRUMAÇÕES E ESCOLHAS SIMPLES

1. DEFINIÇÕES

Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos isto é, uma arrumação em ordenação dos n objetos.

Uma k-permutação ou uma permutação de classe k dos n objetos distintos é uma arrumação utilizando k dos n objetos (uma k-permutação é o que os livros tradicionais chamam de "arranjo de k coisas dentre n"). Usaremos P (n, k) · A (n, k) ou A_n^k para denotar o número de k-permutações de um conjunto de n objetos.

Do princípio multiplicativo obtemos:

$P(n, 2) = n\,.\,(n-1);\ \ P(n, 3) = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)$ e

$P(n, n) = n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\ ...\ 3\,.\,2\,.\,1$

Consideremos os n objetos x_1, x_2, x_3, ..., x_n e as n posições:

$$\underset{p_1}{\_\_\_\_}\quad \underset{p_2}{\_\_\_\_}\quad \underset{p_3}{\_\_\_\_}\quad \underset{...}{...}\quad \underset{p_n}{\_\_\_\_}$$

Enumerando todas as permutações dos n objetos x_1, x_2, x_3, ..., x_n temos que o número de tais permutações é igual ao número de modos possíveis de se ocupar com esses n objetos as n posições p_1, p_2, p_3, ..., p_n. Para a posição p_1 existem n escolhas na arrumação. Após o preenchimento de p_1 existem n – 1 escolhas (os n – 1 objetos remanescentes) para a posição p_2. Existem n – 2 maneiras diferentes de ser preenchida a posição p_3 após terem sido preenchidas as posições p_1 e p_2, ..., é finalmente uma escolha para a última posição p_n, após terem sido preenchidas as posições p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}. Portanto, pelo princípio multiplicativo e utilizando a notação $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ 3\,.\,2\,.\,1$ temos que

O número de modos de ordenar n objetos distintos é

$n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ 3\,.\,2\,.\,1 = n!$

Assim, temos as fórmulas

$P(n,n) = n!$ ou simplesmente $P_n = n!$ e $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Por extensão, define-se $P_0 = 0! = 1$ e $P_1 = 1! = 1$

Uma k-combinação ou uma combinação de classe k de n objetos distintos é uma escolha não ordenada ou um subconjunto de k dos o objetos.

Representaremos o número de combinações de n objetos distintos de classe k ou tomados k a k por um dos símbolos

$C(n, k)$ ou $\binom{n}{k}$

É padronizado ler qualquer um dos dois símbolos como "n escolhe k". (Outra notação comumente utilizada é C_n^k.

2. TEOREMA

Se 0 ≤ k ≤ n, então o número de subconjuntos de k elementos de um subconjunto com n elementos ou o número de combinações de n objetos distintos e classe k é dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prova. O conjunto de todas as permutações simples de k elementos selecionados de um conjunto com n elementos contém $\frac{n!}{(n-k)!}$ permutações. Entretanto, cada subconjunto de k elementos pode ser ordenado de k! maneiras assim, o número de maneiras de primeiro escolher um subconjunto e depois ordenar os elementos deste subconjunto é pelo princípio multiplicativo igual a

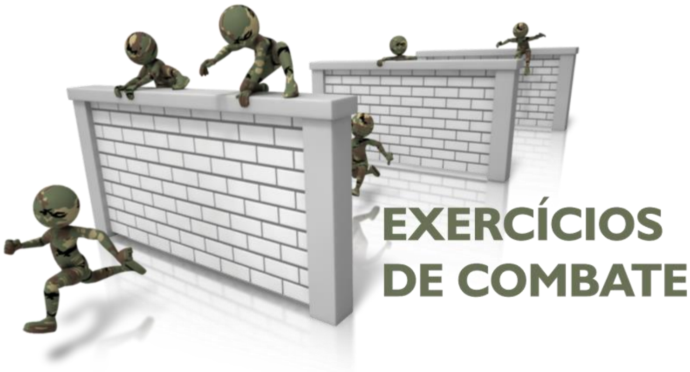
$$\binom{n}{k} . k!$$

Entretanto, cada uma dessas ordenações é uma diferente permutação de k elementos selecionados dentre todos os n elementos e cada permutação de k elementos distintos surge da escolha de um subconjunto e a seguir, assim

$$\binom{n}{k} . k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

o que produz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



1. Dispondo das cores verde, amarelo, azul e branco, de quantos modos distintos podemos pintar 7 casas enfileiradas de modo que cada casa seja pintada de uma só cor e duas casas vizinhas não sejam pintadas com a mesma cor?

2. As antigas placas para automóveis, formadas por duas letras seguidas de quatro algarismos, como por exemplo $\text{MY}-7406$ foram substituídas por placas com três letras seguidas de quatro algarismos, como por exemplo $\text{DWK}-2179$. Utilizando um alfabeto de 26 letras e supondo que qualquer sequência de letras e algarismos seja permitida (na realidade algumas sequências não são permitidas) quantos veículos a mais podem ser emplacados?

3. Com relação aos números de cinco algarismos do sistema de numeração decimal, pergunta-se:
a) Quantos são?
b) Quantos são ímpares e de algarismos distintos?
c) Quantos são pares e de algarismos distintos?
d) Quantos apresentam exatamente um algarismo igual a 3?
e) Quantos permanecem os mesmos quando a ordem dos seus algarismos é invertida (por exemplo, 16261)?

4. Com relação aos anagramas com as letras da palavra VESTIBULAR pergunta-se:
a) Quantos começam e terminam por consoante?
b) Quantos começam por consoante e terminam por vogal?
c) Quantos apresentam as vogais juntas?
d) Quantos apresentam o vocábulo LUTA?
e) Quantos apresentam as vogais em ordem alfabética?
f) Quantos apresentam a sílaba LU e não apresenta a sílaba TA?

5. (AFA 2013) Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados 10 soldados, dentre eles o soldado A e o soldado B, de tal maneira que fiquem 4 soldados na barraca I, 3 na barraca II e 3 na barraca III.
Se o soldado A deve ficar na barraca I e o soldado B NÃO deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a:
a) 560
b) 1120
c) 1680
d) 2240

6. (AFA 2012) Para evitar que João acesse sites não recomendados na Internet, sua mãe quer colocar uma senha no computador formada apenas por m letras A e também m letras B (sendo m par). Tal senha, quando lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, não deverá se alterar (Ex.: ABBA)
Com essas características, o número máximo de senhas distintas que ela poderá criar para depois escolher uma é igual a:

a) $\frac{(2m)!}{m!m!}$

b) $\left[\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}\right]^2$

c) $\frac{(2m)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{3m}{2}\right)!}$

d) $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$

7. Calcule a soma de todos os números de cinco algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

8. (ITA 2007) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é:

a) 28 – 9
b) 28 – 1
c) 28 – 26
d) 214 – 28
e) 28

9. Um domador deseja colocar alinhados 5 leões e 4 tigres na arena de um circo. Determine o número de maneiras segundo as quais ele pode alinhar estes animais de modo que um tigre não fique ao lado de outro tigre.

10. (ITA 2007) Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

a) 204
b) 206
c) 208
d) 210
e) 212

11. A partir de um conjunto de 19 atletas, formam-se 57 times de 4 atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número x de vezes. Determine o valor de x.

12. Quantos pares de inteiros positivos A e B possuem mínimo múltiplo comum 126.000? Onde (A, B) é considerado o mesmo par que (B, A).

a) 126
b) 252
c) 363
d) 473
e) 526

13. (EN) Entre os dez melhores alunos que frequentam o grêmio de informática da Escola Naval, será escolhido um diretor, um tesoureiro e um secretário. O número de maneiras diferentes que podem ser feitas as escolhas é:
a) 720
b) 480
c) 360
d) 120
e) 60

14. De quantas maneiras podemos distribuir n objetos diferentes em duas caixas diferentes, de modo que nenhuma caixa fique vazia?
a) $2^{n-1}-1$
b) $2^{n}-1$
c) $2^{n}-2$
d) $2^{n-1}-2$
e) 2^{n}

15. Uma comissão de k pessoas será escolhida de um grupo de 7 mulheres e 4 homens, dentre os quais figuram João e Maria. De quantos modos isto pode ser feito de modo que:
a) A comissão tenha 5 pessoas sendo 3 mulheres e 2 homens.
b) A comissão tenha o mesmo número de homens e mulheres.
c) A comissão tenha 4 pessoas de modo que pelo menos 2 sejam mulheres.
d) A comissão tenha 4 pessoas sendo João uma dessas pessoas.
e) A comissão tenha 4 pessoas, sendo duas de cada sexo e de modo que João e Maria não estejam simultaneamente na comissão.

16. De quantos modos podemos formar uma fila de 5 pessoas escolhidas em um grupo de 10 pessoas de modo que as pessoas da fila fiquem da esquerda para direita com os números de suas carteiras de identidade em ordem crescente?

17. Quantos são os anagramas da palavra “ANAGRAMA” que não possuem duas vogais adjacentes?

18. Há 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R’ paralela a P. Quantos são os triângulos e os quadriláteros convexos com vértices nesses pontos?

19. (IME 2011) Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:
a) 1287
b) 14112
c) 44200
d) 58212
e) 62822

20. (EN) São dados 8 pontos sobre uma circunferência. Quantos são os polígonos convexos cujos vértices pertencem ao conjunto formado por esses 8 pontos?

a) 219
b) 224
c) 1255
d) 2520
e) 40320

21. (ITA 2001) A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$ temos que para cada n = 1, 2, 3,... , a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

a) $\frac{n!}{n+1}a_n$
b) $\frac{2n}{n+1}a_n$
c) $\frac{n}{n+1}a_n$
d) $\frac{2}{n+1}a_n$
e) $\frac{1}{n+1}a_n$

22. (ITA) Analise as afirmações classificando-as em verdadeiras ou falsas:

I. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo 1 prêmio é 21.
II. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que 4 e apenas 4 sejam premiadas é 140.
III. Para todo natural n, n ≥ 5, $\binom{n}{5} = \binom{n}{n-5}$.

Você concluiu que:

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II e III são verdadeiras.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Todas são verdadeiras.
e) Todas são falsas.

23. (AFA 2011) Um colecionador deixou sua casa provido de R$ 5,00, disposto a gastar tudo na loja de miniaturas da esquina. O vendedor lhe mostrou três opções que havia na loja, conforme a seguir.

- 5 diferentes miniaturas de carros, custando R$ 4,00 cada miniatura;
- 3 diferentes miniaturas de livros, custando R$ 1,00 cada miniatura;
- 2 diferentes miniaturas de bichos, custando R$ 3,00 cada miniatura.

O número de diferentes maneiras desse colecionador efetuar a compra das miniaturas, gastando todo o seu dinheiro, é:

a) 15
b) 21
c) 42
d) 90

24. (ITA 2007) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

25. De um baralho comum de 52 cartas, extrai-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. De quantos modos isto pode ser feito se:

a) A primeira carta e uma dama e a segunda carta não é um rei?
b) A primeira carta é uma dama e a segunda carta não é de espadas?
c) A primeira carta é de espadas e a segunda carta não é uma dama?

GABARITO

1. A primeira casa pode ser pintada de 4 maneiras, a segunda de 3 maneiras (não podemos usar a cor utilizada na primeira casa), a terceira de 3 maneiras (não podemos usar a cor utilizada na segunda casa), e assim sucessivamente, cada casa subsequente pode ser pintada de 3 maneiras (não podendo ser pintada da cor utilizada na casa anterior) logo, as sete casas podem ser pintadas de $4\times3\times3\times3\times3\times3\times3=2916$ modos distintos.

2. Como existem 26 escolhas para cada letra e 10 escolhas para cada algarismo, o número total de placas antigas era $26^2\times10^4$. O novo número de placas é igual a $26^3\times10^4$ e daí podem ser emplacados a mais $26^3\times10^4-26^2\times10^4=169\times10^6$ veículos.

3.

a) Como números do tipo 00174 não são considerados de cinco algarismos para o algarismo mais à esquerda temos 9 escolhas (não podemos usar o zero!) o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos (não há mais restrições) analogamente, o terceiro, o quarto e o quinto podem ser escolhidos de 10 modos cada um. Assim, a resposta é $9\times10\times10\times10\times10=90000$.

b) Se pensarmos como no item anterior, para o algarismo mais à esquerda temos aparentemente 9 escolhas. Isto é falso, pois um número ímpar terminado por um dos cinco algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9, digamos 5, implica que teremos apenas 8 escolhas para o preenchimento da posição mais à esquerda e não 9 como suposto acima, visto que os algarismos de cada número são distintos. Portanto, devemos ter em mente que se uma escolha é mais importante que as demais devemos faze-la primeiramente! Deste modo, para a solução do item (b) devemos começar pela escolha do algarismo mais à direita a qual pode ser feita de 5 modos; para a posição mais à esquerda temos 8 escolhas (não pode ser o zero e nem aquele colocado mais à direita) para as demais posições temos sucessivamente 8 escolhas (já utilizamos dois algarismos e agora o zero já pode ser utilizado). 7 escolhas e finalmente 6 escolhas totalizando $5\times8\times8\times7\times6=13440$ números de cinco algarismos distintos.

c) Levando-se em consideração a observação feita no item (b) temos cinco escolhas para a posição mais à direita e ficamos com dificuldade para preencher a posição mais à esquerda uma vez que existem 9 ou 8 escolhas para preenche-la conforme o zero ocupe ou não a posição mais à direita. Portanto, se em certa posição um objeto causa dificuldade para o número de escolhas de objetos em outras posições então devemos dividir o problema em duas etapas, conforme o objeto ocupe ou não a posição considerada.
Deste modo, tem-se que terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro, 8 modos de escolher o segundo, 7 modos de escolher o do meio e 6 modos de escolher o quarto, num total de $1\times9\times8\times7\times6=3024$.
Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6 ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos utilizar nem o zero nem o algarismo já utilizado na última casa). 8 modos de escolher o algarismo da segunda casa (não podemos utilizar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), 7 modos de escolher o algarismo da casa do meio, e 6 modos de escolher o algarismo da quarta casa. Logo, temos $4\times8\times8\times7\times6=10752$ números terminados em um algarismo diferente de zero. A resposta é, portanto $3024+10752=13776$.

d) Analogamente como fizemos com o zero ocupando ou não a última casa, faremos agora com o 3 ocupando cada uma das cinco posições no número. Se o 3 ocupar a casa mais à esquerda, cada uma das quatro outras pode ser ocupada de 9 modos (não podemos utilizar o 3) logo temos $9^4 = 6561$ números. Se o 3 não ocupa a casa mais à esquerda para cada casa que ele ocupe temos 8 modos de preencher a 1ª casa (não pode ser o zero e nem o três), 9 modos de preencher cada uma das outras três (não podemos utilizar o 3) ficando assim com $4 \times 8 \times 9^3 = 23328$ números deste tipo. A resposta é portanto $6561 + 23328 = 29889$.

e) O primeiro e o último algarismos devem ser os mesmos assim bem como o segundo e o quarto algarismos. O algarismo do meio pode ser qualquer. Existem 9 escolhas para o primeiro par, 10 escolhas para o segundo par e 10 escolhas para o algarismo do meio. Daí, o número total de números que permanecem os mesmos quando a ordem dos seus algarismos é invertida é 900.

4.

a) A escolha da consoante inicial pode ser feita de 6 modos e, depois disso, a consoante final pode ser escolhida de 5 modos. As restantes oito letras podem ser arrumadas entre essas consoantes selecionadas de $P_8 = 8! = 40320$ modos. A resposta é $6 \times 5 \times 40320 = 1\,209\,600$.

b) A escolha da consoante inicial pode ser feita de 6 modos e, depois disso, a vogal final pode ser escolhida de 4 modos. As restantes oito letras podem ser arrumadas entre essa consoante e essa vogal selecionadas de $P_8 = 8! = 40320$ modos. A resposta é $6 \times 4 \times 40320 = 967\,680$.

c) Uma vez feita a ordem a das letras A, E, O, U que pode ser feito de $4! = 24$ modos. O bloco formado por estas letras se passa como se fosse uma letra só portanto devemos arrumar 7 objetos, o bloco formado pelas vogais e as 6 letras P, R, N, M, B, C. A resposta é $24 \times 7! = 24 \times 5040 = 120\,960$.

d) O vocábulo LUTA se comporta como uma única letra. Daí, devemos arrumar 7 objetos, o bloco LUTA e as 6 letras restantes. A resposta é $7! = 5040$.

e) Há $4! = 24$ ordens possíveis para as vogais. A resposta é $\frac{1}{24}$ do total de anagramas, $\frac{1}{24}$ de 8! que é igual a 1680.

f) O número de anagramas que apresentam a sílaba LU é igual ao número de anagramas das nove letras LU (a sílaba LU se comporta como se fosse uma letra só), V, E, S, T, B, A, R isto é $9! = 362\,880$. Analogamente, o número de anagramas que apresentam a sílaba LU e a sílaba TA é igual ao número de anagramas das oito letras LU, TA, V, E, S, I, B, R isto é $8! = 40\,320$. A resposta é $362\,880 - 40\,320 = 322\,560$.

5.

1º caso: **Soldados A e B na barraca I**

Barraca I: C8,2 = 28

Barraca II: C6,3 = 20

Barraca III: C3,3 = 1

Total(1) = 28 · 20 · 1 = 560.

2º caso: **Soldado A na barraca I e soldado B na barraca II**

Barraca I: C8,3 = 56

Baraca II CC5,2 =10

Barraca III: C3,3 = 1

Total(2) = 56 · 10 · 1 = 560.

Então, o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a 560 + 560 = 1120

6.
A senha toda terá duas partes, cada uma com m letras.

A primeira parte poderá ser criada de $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$ maneiras diferentes já que teremos $\frac{m}{2}$ letras A e $\frac{m}{2}$ letras B.

A segunda parte poderá ser criada de apenas uma maneira, pois deverá obedecer a ordem inversa da primeira.

Portanto, o número de senhas distintas será $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}\cdot 1=\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$.

7. Número de parcelas: $5!=120$

$$\left.\begin{matrix}12345\\12354\\12453\\\text{.........}\\\text{.........}\\\text{.........}\\54321\end{matrix}\right\}\text{120 parcelas}$$

Em qualquer coluna, cada algarismo aparece tantas vezes quantas forem as permutações dos demais algarismos, isto é, $4!=24$ vezes

Assim, a soma de todos os algarismos de cada coluna é

$$(\underbrace{1+1...+1}_{24\text{ vezes}})+(\underbrace{2+2...+2}_{24\text{ vezes}})+...+(\underbrace{5+5...+5}_{24\text{ vezes}})=$$
$$=24\ .\ (1+2+3+4+5)=360$$

Unidades da coluna das unidades	360
Unidades da coluna das dezenas	3600
Unidades da coluna das centenas	36000
Unidades da coluna das unidades de milhar	360000
Unidades da coluna das dezenas de milhar	3600000
Total de unidades:	3999960

Logo, a soma pedida é 3 999 960.

8. A

9. Os tigres devem entrar em 6 posições possíveis entre os leões.
Logo o primeiro tigre tem seis escolhas possíveis, o segundo tigre cinco, o terceiro tigre quatro e o quarto tigre três e os leões podem permutar suas posições de 5!=120 maneiras.
Concluímos que existem 6.5.4.3.120=43200 maneiras de alinhar os animais.

10. E

11. Primeiro contamos quantos pares de atletas possui cada time. Há quatro maneiras de escolher o primeiro atleta do par e 3 maneiras de escolher o segundo. Mas como estamos contando pares não ordenados, devemos dividir o resultado por 2, pois cada par pode ser escolhido de duas formas distintas (AB ou BA). Logo há 4 × 3 / 2 = 6 pares de atletas em cada time. Como o total de times é 57, se listarmos todos os pares de cada um dos times obteremos um total de 57 × 6 pares. Nesta lista, porém, cada par aparece exatamente x vezes, de acordo com o enunciado. Para concluir, basta observar que o número total de pares de atletas formados dentre os 19 é 19 × 18 / 2 = 19 × 9. Assim, 19 × 9 × x = 57 × 6 e, portanto, x = 2.

12. Como $126000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, A e B devem ser da forma:

$A = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1} \cdot 7^{d_1}$

$B = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2} \cdot 7^{d_2}$

Onde max $(a_1, a_2) = 4$, max $(b_1, b_2) = 2$, max $(c_1, c_2) = 3$ e max $(d_1, d_2) = 1$.

O número de pares (a_1, a_2) com max $(a_1, a_2) = 4$ é $5+5-1=9$.

O número de pares (b_1, b_2) com max $(b_1, b_2) = 2$ é $3+3-1=5$.

O número de pares (c_1, c_2) com max $(c_1, c_2) = 3$ é $4+4-1=7$.

O número de pares (d_1, d_2) com max $(d_1, d_2) = 1$ é $2+2-1=3$.

Logo, temos um total de $9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 945$ pares (A, B).

Entretanto, foram contados pares que diferem apenas pela ordem. Na verdade, todos os pares foram contados duas vezes, exceto (126000, 126000).

Logo, o número de pares diferentes (A, B) é $\frac{945-1}{2}+1=473$.

13.
Nº de possibilidades para escolha do diretor: 10
Nº de possibilidades para a escolha do tesoureiro: 9
Nº de possibilidades para a escolha do secretário: 8
Nº de total de escolhas: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

14. Cada objeto tem duas possibilidades para distribuição. Como são n objetos, então $2.2.2 \ldots 2 = 2^n$ é o número de maneiras desses objetos serem distribuídos de maneira aleatória, incluindo a possibilidade de uma delas ficar vazia. Como são 2 caixas, devemos excluir os 2 casos onde uma delas fica vazia. Portanto há maneiras de se distribuir n objetos diferentes em 2 caixas diferentes, de modo que nenhuma elas fique vazia.

Note que esse valor é $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$.

15.

a) O número de maneiras de escolhermos 3 dentre 7 mulheres é $\binom{7}{3}$ e o número de maneiras de escolhermos 2 dentre 4 homens é $\binom{4}{2}$ assim, temos no total $\binom{7}{3}.\binom{4}{2}=35\,.\,6=210$ maneiras.

b) Para contar os possíveis subconjuntos com o mesmo número de homens e mulheres, devemos definir o número de elementos de cada um deles isto é, devemos dividir o problema em 4 casos disjuntos, a saber: 1 mulher e um homem; 2 de cada sexo; 3 de cada sexo; e 4 de cada sexo (pois existem 4 homens). Deste modo, o número total é a soma das possibilidades para esses quatro subcasos ou seja, $\binom{7}{1}.\binom{4}{1}+\binom{7}{2}.\binom{4}{2}+\binom{7}{3}.\binom{4}{3}+\binom{7}{4}.\binom{4}{4}=7+21\,.\,6+35\,.\,4+35\,.\,1=329$.

c) Uma abordagem é escolher primeiro duas mulheres o que pode ser feito de $\binom{7}{2}=21$ maneiras e então, escolher 2 quaisquer das 9 pessoas restantes (5 mulheres e 4 homens). Entretanto, contar todas as comissões desta maneira não é correto uma vez que alguma mulher em uma dessas comissões pode estar entre as duas primeiras ou entre as 2 pessoas, por exemplo, se denotarmos por M_i a i-ésima mulher e por H_i o i-ésimo homem então, se escolhermos primeiramente as mulheres M_1 e M_2, a comissão composta por M_1 e M_2 com as duas outras pessoas M_3 e H_3 dentre as restantes fornece a mesma comissão que se formaria caso tivéssemos escolhido primeiramente M_1 e M_3 e a seguir M_2 e H_3. Uma solução correta para este problema utiliza a abordagem feita no item (b) isto é, dividamos o problema em 3 subcasos: 2 mulheres e 2 homens, 3 mulheres e 1 homem e finalmente, 4 mulheres. A resposta é então $\binom{7}{2}.\binom{4}{2}+\binom{7}{3}.\binom{4}{1}+\binom{7}{4}=21\,.\,6+35\,.\,4+35=301$.

d) Se João deve estar na comissão, isto significa simplesmente que o problema se reduz a escolher 3 outras pessoas entre as 10 remanescentes (7 mulheres e 3 homens). Assim, a resposta é $\binom{10}{3}=120$.

e) Existem 3 subcasos nos quais cada um dentre João e Maria mas não ambos está na comissão. Se Maria está na comissão e João não está então, mais uma mulher deve ser escolhida dentre as seis remanescentes e mais 2 homens devem ser escolhidos dentre os 3 homens remanescentes (João está excluído). Isto pode ser feito de $\binom{6}{1}.\binom{3}{\ }=6\,.\,3=18$ maneiras. Se João está na comissão então Maria não está e o mesmo argumento utilizado anteriormente nos dá $\binom{6}{2}.\binom{3}{1}=15\,.\,3=45$ maneiras. Finalmente, se nenhum dos dois está na comissão temos $\binom{6}{2}.\binom{3}{2}=15\,.\,3=45$ maneiras. A resposta é então $18+45+45=108$.

Uma abordagem mais simples para este problema é que podemos subtrair do total de comissões formadas por 2 homens e 2 mulheres isto é $\binom{7}{2}.\binom{4}{2}=21\,.\,6=126$ comissões. Aquelas que incluem o casal proibido João e Maria isto é, $\binom{6}{1}.\binom{3}{1}=6\,.\,3=18$ comissões. Assim, temos $126-18=108$ comissões de 2 homens e 2 mulheres nas quais o casal João e Maria não aparece simultaneamente.

16. Como pessoas distintas possuem números de identidade distintos, só existe um modo de arrumar um dado grupo de 5 pessoas em ordem crescente de acordo com os números de suas identidades. Deste modo, o problema se reduz a escolher 5 das 10 pessoas isto é, $\binom{10}{5}=252$ modos.

17. Vamos primeiramente arrumar as consoantes e, depois, vamos entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes N, G, R e M é $P_4=4!=24$. Arrumadas as consoantes, por exemplo, em ordem NGRM, devemos colocar as 4 vogais nos 5 espaços da figura:

__N__G__R__M__

Como não podemos colocar duas vogais no mesmo espaço, quatro dos espaços serão ocupados, cada um com uma letra A, e um espaço ficará vazio. Temos $\binom{5}{4}=5$ modos de escolher os quatro espaços que serão ocupados. A resposta é $24\times 5=120$.

18. Para formar um triângulo ou você toma um ponto em R e dois pontos em R' ou toma um ponto em R' e dois pontos em R. O número de triângulos é $5\,.\binom{8}{2}+8\,.\binom{5}{2}=140+80=220$.

Também poderíamos tomar 3 dos 12 pontos e excluir dessa contagem as escolhas de pontos colineares, o que daria $\binom{13}{3}-\binom{8}{3}-\binom{5}{3}=286-56-10=220$.

Para formar um quadrilátero convexo, devemos tomar dois pontos em R e dois pontos em R', o que pode ser feito de $\binom{5}{2}.\binom{8}{2}=10\,.\,28=280$ modos.

19. D

20. A

21. E

22. D

23. Temos dois casos possíveis:

1) O colecionador compra um carro e um livro:

   $\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}=15$ possibilidades

2) O colecionador compra dois livros um bicho:

   $\binom{3}{2}\times\binom{2}{1}=6$ possibilidades

Pelo princípio aditivo, temos $15+6=21$ possibilidades, no total.

24. Existem $\binom{9}{5}$ comissões. Não existem comissões que contêm apenas moças, mas existe uma única comissão só de rapazes. Logo a resposta é $\binom{9}{5}-1=125$.

25.

a) A primeira carta (dama) pode ser escolhida de 4 maneiras distintas. Retirada a primeira carta, das 51 restantes $51-4=47$ não são reis, daí, o número de maneiras de extrairmos sem reposição duas cartas de modo que a primeira seja uma dama e a segunda não seja um rei é $4\times 47=188$.

b) Contemos separadamente os casos que a dama é de espadas e aqueles em que a dama não é de espadas.
Se a primeira carta for a dama de espadas, a segunda carta poderá ser selecionada de $51-12=39$ modos.
Se a primeira carta for uma dama que não é a de espadas ela pode ser escolhida de 3 modos. A segunda carta pode ser escolhida de $51-13=38$ modos . Daí, o número de extrações nas quais a primeira carta é uma dama e a segunda não é de espadas é $1\times 39+3\times 38=153$.

c) Como fizemos no item (b), contemos, separadamente, os casos em que a carta de espadas é uma soma e aqueles em que a carta de espadas não é uma dama. Se a primeira carta for a dama de espadas, a segunda carta poderá ser selecionada de $51-3=48$ modos. Se a primeira carta for de espadas sem ser a dama, ela poderá ser selecionada de 12 modos e a segunda de $51-4=47$ modos, porque, o número de extrações nas quais a primeira carta é de espadas e a segunda não é uma dama é $1\times 48+12\times 47=612$.