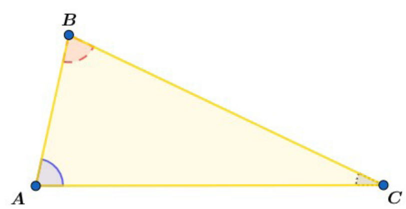
Semelhança de Triângulos, Relações Métricas e Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

1. Classificação dos Triângulos

Os triângulos são polígonos que possuem três lados, três ângulos internos, três ângulos externos e três vértices.

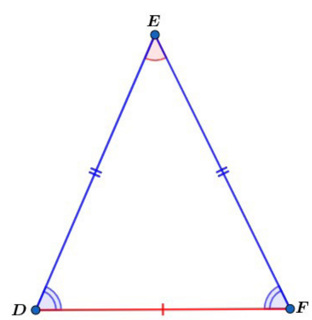
Em relação à medida dos lados de um triângulo, podemos classificá-lo em: triângulo escaleno, triângulo isósceles e triângulo equilátero.

- Triângulo escaleno: todos os lados com medidas diferentes.



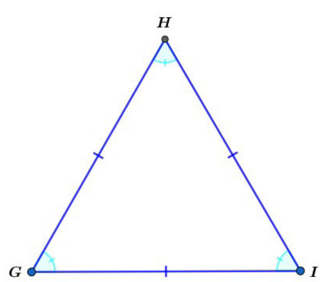
AB ≠ AC ≠ BC

- Triângulo isósceles: dois lados com a mesma medida e ângulos da base (lado diferente) de mesma medida.



ED = EF ≠ DF

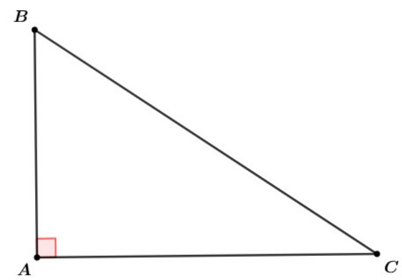
- Triângulo equilátero: todos os lados com a mesma medida.



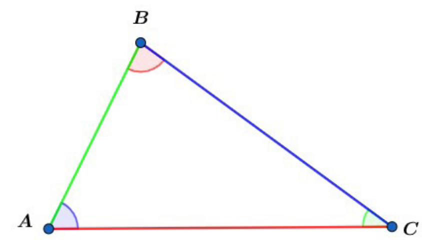
HG = HI = GI

Em relação à medida dos ângulos de um triângulo, podemos classificá-lo em: triângulo retângulo, triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo.

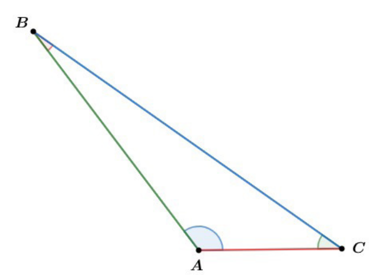
- Triângulo retângulo: apresenta um ângulo reto (90°).



- Triângulo acutângulo: apresenta todos os ângulos agudos (< 90°).

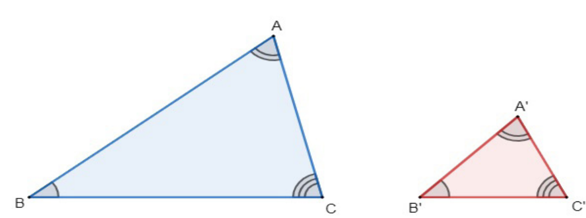


- Triângulo obtusângulo: apresenta um ângulo obtuso (> 90°).



2. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes congruentes (de mesma medida) e lados correspondentes proporcionais. Sendo assim, valem as seguintes proporções em triângulos semelhantes:



ABC ~ A'B'C'

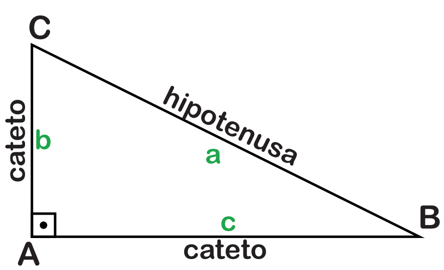
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Para identificar se dois triângulos são semelhantes, verificamos algum dos três casos a seguir:

- Caso AA (ângulo, ângulo): Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois do outro.
- Caso LLL (lado, lado, lado): Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro.
- Caso LAL (lado, ângulo, lado): Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente entre lados proporcionais.

3. Triângulo Retângulo e Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, os lados perpendiculares – aqueles que formam um ângulo de 90° – são denominados **catetos** e o lado oposto ao ângulo de 90° recebe o nome de **hipotenusa**.

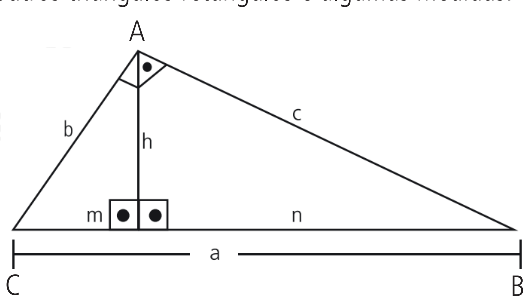


O **teorema de Pitágoras** é aplicado ao triângulo retângulo e diz que "a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

$$a^2 = b^2 + c^2$$

4. Outras Relações Métricas

Traçando a altura relativa à hipotenusa, identificam-se dois outros triângulos retângulos e algumas medidas:



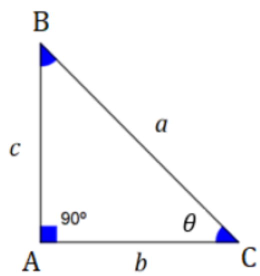
- h: medida da altura relativa à hipotenusa
- m: medida da projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa
- n: medida da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa

Podemos estabelecer algumas relações métricas importantes:

$h^2 = mn \qquad b^2 = ma \qquad c^2 = an \qquad bc = ah$

4. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Conhecendo a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, estabelecemos três razões entre os lados do triângulo, chamadas <u>razões trigonométricas</u>: **seno, cosseno e tangente**. Para calcular essas razões, é necessário tomar um dos ângulos agudos do triângulo retângulo como referência.



$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \frac{c}{b}$$

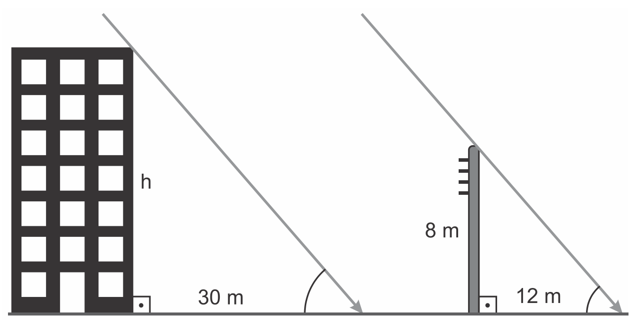
5. Valores Notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60° são chamados de notáveis, pois são os que com mais frequência calculamos as razões trigonométricas.

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios de sala

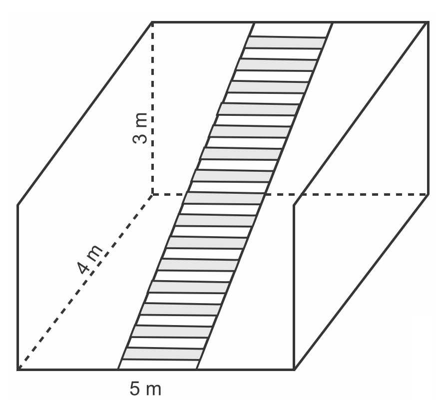
1. **(G1 - IFPE)** Às 10h 45 min de uma manhã ensolarada, as sombras de um edifício e de um poste de 8 metros de altura foram medidas ao mesmo tempo. Foram encontrados 30 metros e 12 metros, respectivamente, conforme ilustração abaixo.



De acordo com as informações acima, a altura h do prédio é de

a) 12 metros.
b) 18 metros.
c) 16 metros.
d) 14 metros.
e) 20 metros.

2. **(PUCRS 2020)** A sala de uma casa tem a forma de um paralelepípedo e dimensões dadas na figura abaixo



O comprimento, em metros, de uma escada a ser colocada nesta sala, em posição paralela às paredes laterais, como indicado na figura, é

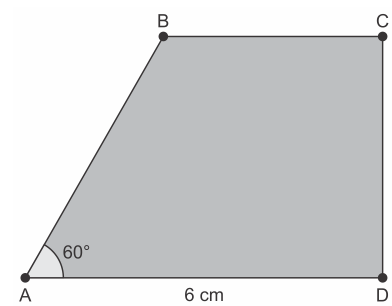
a) 5
b) $\sqrt{34}$
c) $\sqrt{41}$
d) 6

3. **(G1 - IFSC 2020)** Um triângulo ABC, retângulo em B possui catetos medindo (x – 2) metros e (x + 5) metros, com hipotenusa igual a (x + 7) metros.
João percorrerá o caminho de A a C sobre os catetos e Maria também irá de A a C, mas pela hipotenusa.
Assim, é correto afirmar que <u>Maria fará um trajeto, em relação a João:</u>

Assinale a alternativa **CORRETA.**

a) 6 (seis) metros menor
b) 4 (quatro) metros menor
c) de mesma distância
d) 4 (quatro) metros maior
e) 6 (seis) metros maior

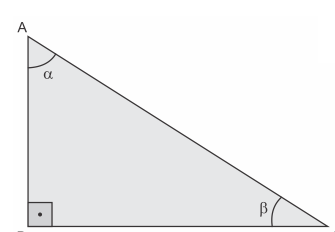
4. **(FMJ 2021)** Em um trapézio retângulo ABCD, o lado AD mede 6 cm e o ângulo BÂD mede 60° conforme mostra a figura.



Sabendo-se que a diagonal AC mede $2\sqrt{13}$ cm, a medida do lado AB desse trapézio é

a) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm
b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
d) $\dfrac{9\sqrt{3}}{3}$ cm
e) $\dfrac{6\sqrt{3}}{3}$ cm

5. **(G1 - IFMT 2020)** No triângulo retângulo, temos que e $(\overline{AB}) = 3$ e $(\overline{AC}) = 5$. Julgue as assertivas abaixo e assinale a alternativa **CORRETA:**



I. $\text{tg}(\beta) = \dfrac{4}{3}$

II. $\text{tg}(\beta) = \dfrac{1}{\text{tg}(\alpha)}$

III. $\text{tg}(\beta) = \dfrac{3}{4}$

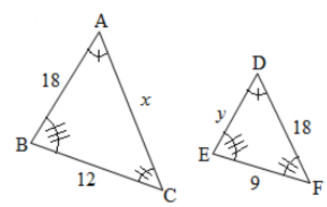
IV. $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{1}{\text{tg}(\beta)}$

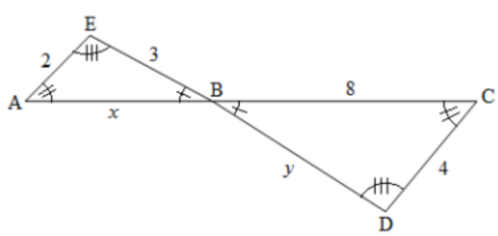
As assertivas verdadeiras são:

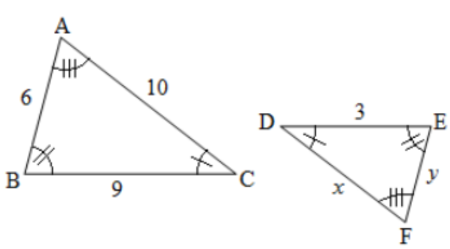
a) I e II
b) II e III
c) III e IV
d) IV e I
e) II e IV

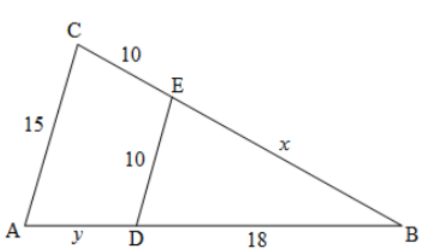
Estudo Individualizado (E.I.)

1. As figuras abaixo mostram pares de triângulos semelhantes. Calcule os valores de x e y.

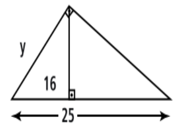
a)


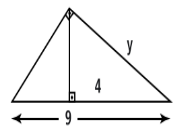
b)


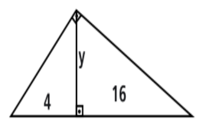
c)


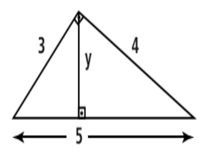
d)


2. Encontre o valor de y em cada item.

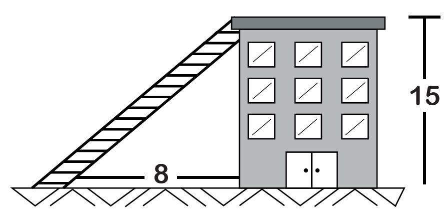
a)


b)


c)


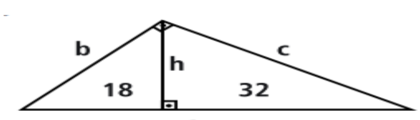
d)


3. A figura abaixo mostra um edifício que tem 15 metros de altura, com uma escada colocada a 8 metros de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:



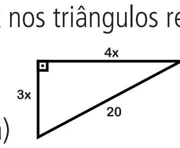
a) 12 m.
b) 30 m.
c) 15 m.
d) 17 m.
e) 20 m.

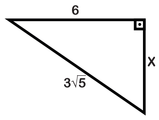
4. A soma dos números correspondentes às medidas a, b, c e h no triângulo da figura abaixo forma uma senha que abre o cofre do senhor José.

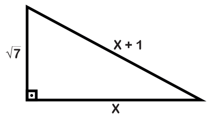


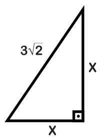
Qual é a senha que abre o cofre?

5. Utilizando o teorema de Pitágoras, determine o valor de x nos triângulos retângulos.

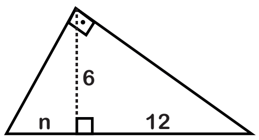
a)


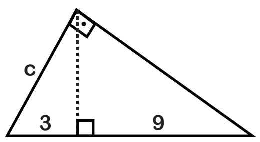
b) 

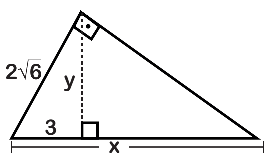
c) 

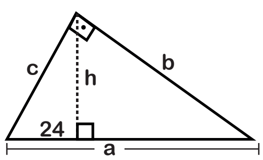
d) 

6. Aplicando as relações métricas nos triângulos retângulos a seguir, determine o valor da incógnita.

a) 

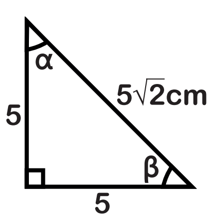
b) 

c) 

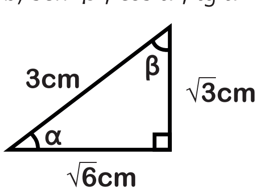
d) 

7. Determine as razões trigonométricas solicitadas em cada item.

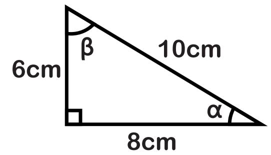
a) sen α , cos α , tg β



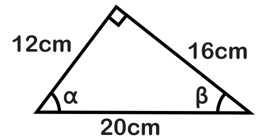
b) sen β , cos α , tg α



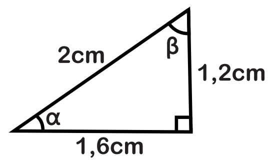
c) sen α , cos β , tg β



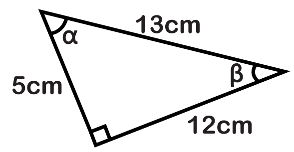
d) sen β , cos α , cos β , tg α



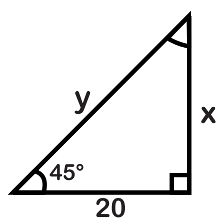
e) sen α , sen β , cos β , tg α



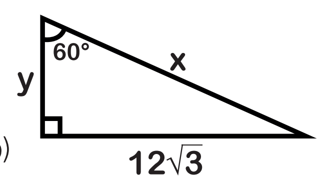
f) sen β , cos α , tg β , tg α

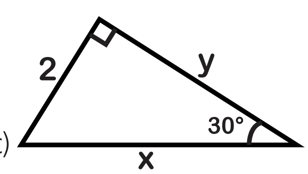


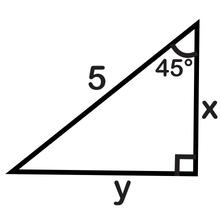
8. Calcule o valor de x e y nos triângulos a seguir usando as razões trigonométricas.

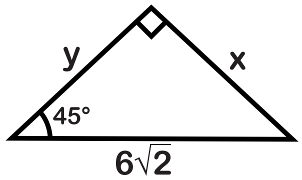


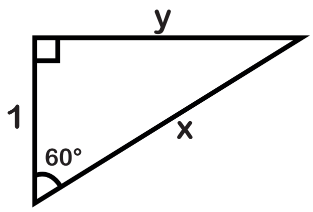
a)

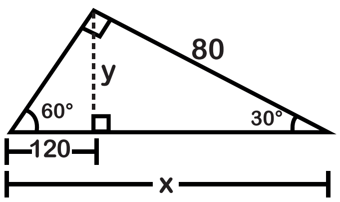
b) 

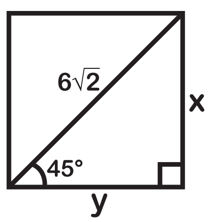
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

9. Uma rampa lisa com 10 m de comprimento faz ângulo de 15° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente a quantos metros? (Use: sen15° = 0,26; cos15° = 0,97; tg15° = 0,27.)

10. Um teleférico foi instalado ligando uma base ao cume de uma montanha. Para a instalação, foram utilizados 1358 metros de cabos, dispostos a uma angulação de 30° em relação ao solo. Qual a altura da montanha?

Gabarito (E.I.)

1.

a) $\frac{12}{9} = \frac{x}{18} \rightarrow 9x = 216 \rightarrow x = 24$

$\frac{12}{9} = \frac{18}{y} \rightarrow 12y = 162 \rightarrow y = 13{,}5$

b) $\frac{2}{4} = \frac{x}{8} \rightarrow 4x = 16 \rightarrow x = 4$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{y} \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6$

c) $\frac{9}{3} = \frac{10}{x} \rightarrow 9x = 30 \rightarrow x = \frac{10}{3}$

$\frac{9}{3} = \frac{6}{y} \rightarrow 9y = 18 \rightarrow y = 2$

d)

$\frac{15}{10} = \frac{10 + x}{x} \rightarrow 15x = 100 + 10x \rightarrow 5x = 100 \rightarrow x = 200$

$\frac{15}{10} = \frac{18 + y}{18} \rightarrow 180 + 10y = 270 \rightarrow 10y = 90 \rightarrow y = 9$

2.

a) $y^2 = 16 \cdot 25 \rightarrow y = 20$
b) $y^2 = 4 \cdot 9 \rightarrow y = 6$
c) $y^2 = 4 \cdot 16 \rightarrow y = 8$
d) $5y = 4 \cdot 3 \rightarrow y = 2{,}4$

3. D

4.

Usando as relações métricas, temos:
$a = 18 + 32 = 50$
$h^2 = 18 \cdot 32 \rightarrow h^2 = 576 \rightarrow h = 24$
$c^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow c^2 = 24^2 + 32^2 \rightarrow c = 40$
$b^2 = h^2 + 18^2 \rightarrow b^2 = 24^2 + 18^2 \rightarrow b = 30$
Assim, a senha é igual à soma 50 + 24 + 30 + 40 = 144.

5.

a) $20^2 = (4x)^2 + (3x)^2 \rightarrow 400 = 25x^2 \rightarrow x = 4$
b) $(3\sqrt{5})^2 = (x)^2 + (6)^2 \rightarrow 45 = x^2 + 36 \rightarrow x = 3$
c) $(x + 1)^2 = (x)^2 + (\sqrt{7})^2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 7 \rightarrow x = 3$

6.

a) $6^2 = 12 \cdot n \rightarrow n = 3$
b) $c^2 = 3 \cdot (9 + 3) \rightarrow c = 6$
c) $(2\sqrt{6})^2 = 3^2 + y^2 \rightarrow 24 = 9 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{15}$
$(2\sqrt{6})^2 = 3 \cdot x \rightarrow 24 = 3x \rightarrow x = 8$
d) $a = 2 + 4 = 6$
$h^2 = 2 \cdot 4 \rightarrow h = 2\sqrt{2}$
$c^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow c^2 = 12 \rightarrow c = 2\sqrt{2}$
$b^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow b^2 = 24 \rightarrow b = 2\sqrt{6}$

7.

a) $\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\ \beta = \frac{5}{2} = 1$

b)

$\text{sen}\ \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

d) $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\cos\beta = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{3}$

e) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$

$\operatorname{sen}\beta = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$

$\cos\beta = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1{,}2}{1{,}6} = 0{,}75$

f) $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{12}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

8.

a)
$\operatorname{tg}45° = \frac{x}{20} \rightarrow 1 = \frac{x}{20} \rightarrow x = 20$

$\operatorname{sen}45° = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{y} \rightarrow \sqrt{2}\,y = 40 \rightarrow y = 20\sqrt{2}$

b)
$\operatorname{sen}60° = \frac{12\sqrt{3}}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{x} \rightarrow x = 24$

$\operatorname{tg}60° = \frac{12\sqrt{3}}{y} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{y} \rightarrow y = 12$

c)
$\operatorname{sen}30° = \frac{2}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 4$

$\operatorname{tg}30° = \frac{2}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{y} \rightarrow \sqrt{3}\,y = 4 \rightarrow y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

d)
$\operatorname{sen}45° = \frac{y}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{5} \rightarrow 2y = 5\sqrt{2} \rightarrow y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\cos45° = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{5} \rightarrow 2x = 5\sqrt{2} \rightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

e)
$\operatorname{sen}45° = \frac{x}{6\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{6\sqrt{2}} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

$\cos45° = \frac{y}{6\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{6\sqrt{2}} \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6$

f)
$\cos60° = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \rightarrow x = 2$

$\operatorname{tg}60° = \frac{y}{1} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{1} \rightarrow y = \sqrt{3}$

g)
$\operatorname{tg}60° = \frac{y}{120} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{120} \rightarrow y = 120\sqrt{3}$

$\operatorname{sen}60° = \frac{80}{y} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{80}{y} \rightarrow \sqrt{3}\,y = 160 \rightarrow$

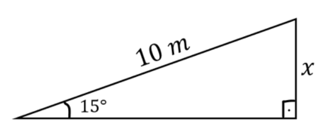
$y = \frac{160\sqrt{3}}{3}$

h)
$\cos45° = \frac{x}{6\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{6\sqrt{2}} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

$\operatorname{sen}45° = \frac{y}{6\sqrt{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{6\sqrt{2}} \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6$

9.

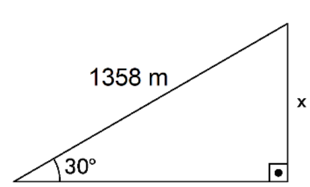
Seja x essa elevação vertical



$\operatorname{sen}15° = \frac{x}{10} \rightarrow 0{,}26 = \frac{x}{10} \rightarrow x = 2{,}6$

10.

Seja x a altura da montanha.



$\text{seb}30° = \frac{x}{1358} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{1358} \rightarrow x = 679$

Portanto, a montanha tem 679 metros de altura.