

Introdução

A Dinâmica é o ramo da mecânica que estuda a relação entre força e movimento. Logo, tem sua essência na preocupação em determinar as causas do movimento, sem deixar de lado, é claro, os conceitos de cinemática que estudamos na Apostila 1.

Neste capítulo, estudaremos, as Leis de Newton aplicadas a referenciais inerciais e como podemos estendê-las a referenciais não inerciais, ainda nos atando apenas ao movimento retilíneo, além dos tipos mais comuns de forças, e aprenderemos a resolver os mais diversos tipos de problemas que envolvem os conceitos estudados.

1. As leis de Newton

A expressão “leis de Newton” se refere às três leis que conceituam e explicam os comportamentos dos corpos com relação a seu movimento. Ou seja, permitem, por si só, o entendimento do porquê um corpo pode passar a se mover do repouso, do porquê um corpo pode chegar ao repouso depois de estar em movimento e do porquê um corpo pode alterar seu movimento. As três leis foram formuladas pelo físico inglês Isaac Newton e publicadas em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, no século XVII.

A interação entre dois corpos é ditada pelo conceito de força. Essas forças são definidas sob uma fundamentação vetorial, apesar de as estudarmos muitas vezes sob uma visão puramente escalar.

Os seus enunciados estão explicitados a seguir:

1.1 1ª lei de Newton

“Todo corpo tende a continuar em seu estado de repouso ou movimento uniforme retilíneo, a não ser que uma força passe a atuar sobre ele, obrigando-o a alterar aquele estado.”

$$\sum \vec{F} = 0 \leftrightarrow v \text{ cte ou repouso}$$

Ou seja, se não há força resultante atuando sobre o corpo, este permanecerá no seu estado atual, caso seja de repouso ou de movimento retilíneo. Essa lei é conhecida como lei da inércia.

Newton a apresentou para que se pudesse estabelecer um referencial para as duas próximas leis, já que esta lei postula que exista no mínimo um referencial, denominado inercial, no qual, quando a força resultante é nula, o corpo se move em MRU ou está em repouso.

Dessa forma, como as duas próximas leis decorrem dessa, as leis de Newton só têm validade em um referencial inercial, cuja definição decorre justamente dessa propriedade. Mais à frente promoveremos uma explicação mais exata sobre as diferenças entre um referencial inercial e um referencial não inercial.

1.2 2ª lei de Newton

“Uma partícula sob ação de uma força resultante adquirirá uma aceleração diretamente proporcional à força resultante, no mesmo sentido e direção e, inversamente proporcional à massa.”

A princípio, essa lei, também denominada de princípio fundamental da dinâmica, afirma que a força resultante é a taxa de variação do momento linear ou quantidade de movimento (estudaremos mais a fundo sobre isso em outros capítulos) com o tempo. Dessa forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Porém, já que, na maioria das vezes, trabalhamos com sistemas que possuem massa constante, a massa pode ser “retirada” dessa taxa, o que resulta em:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como a aceleração é a derivada temporal da velocidade, temos:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Essa é a expressão geralmente usada nos cálculos que enfrentaremos nos problemas. Vê-se que ela pressupõe que toda força é associada a uma aceleração.

Vê-se que, no SI (Sistema Internacional de unidades), a unidade de força é $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, também chamada de N (Newton), em homenagem a Isaac Newton. Logo, 1 N é a força resultante necessária a ser aplicada em um corpo de 1 kg para que adquira uma aceleração de 1 m/s^2 .

1.3 3ª lei de Newton

“A toda força de ação corresponde uma de reação, de mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário, aplicadas em corpos diferentes.”

As forças de ação e reação não se equilibram pois estão sempre aplicadas em corpos diferentes. Se o corpo A faz uma força no corpo B, o corpo B produzirá uma força sobre o corpo A de mesmo módulo e direção, porém sentido contrário. É, então, conhecida como “lei da ação e reação”.

2. As forças mais comuns

2.1 Peso

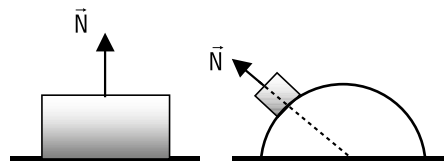
O peso é a força de atração gravitacional dada pela expressão:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

onde \vec{g} é a aceleração da gravidade local. É exercido pelo centro da Terra, e tem sempre o sentido da aceleração gravitacional (veja que a aceleração associada ao peso é a gravidade, um exemplo do que foi dito em 1.2). A força gravitacional será estudada mais profundamente no capítulo de *Gravitação Universal*. Por enquanto, o conhecimento dela limita-se ao que foi escrito.

2.2 Normal

É a força de contato entre superfícies. É sempre perpendicular às superfícies.



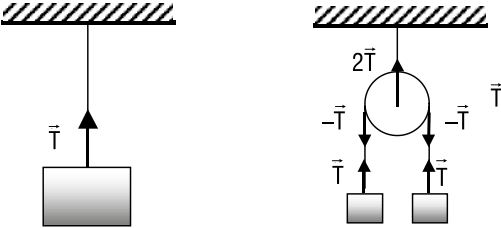
A força normal é **sempre** exercida pela superfície sobre o corpo. Muitos confundem a força normal como a reação à força peso, o que está totalmente errado. A força normal e a força peso estão aplicadas no mesmo

corpo, e, como foi visto, forças de ação e reação devem estar aplicadas em corpos diferentes, logo normal e peso não constituem par ação-reação. A reação da força peso é aplicada pelo corpo no centro da Terra, e a reação à força normal é aplicada pelo corpo na superfície em que está apoiado.

Obs.: quando se mede o peso de um corpo em uma balança, a força que na verdade é medida é a normal! Logo, quando um problema pedir a medição da balança, nunca responda com o peso do corpo, mas sim com a intensidade da força normal que a balança fizer no corpo.

2.3 Tração

É a força que atua em cabos, fios, elos, etc. Atua sempre no sentido de puxar os corpos.



O único motivo pelo qual podemos considerar as trações constantes nos problemas em que o sistema está acelerado que resolveremos é o fato de que consideraremos, na maioria das vezes, os fios sem massa ou com massa desprezível (ideais). Dessa forma, pense em um elemento do fio de comprimento infinitesimal dl , que tenha massa dm , e esteja contido em um sistema acelerado. Suponhamos que atuem nele duas trações T_1 e T_2 , de sentidos opostos. A força resultante nesse elemento do fio seria, então:

$$F_{res} = dm \cdot a = |T_1 - T_2|$$

Dessa forma, se $dm = 0$, temos que $T_1 - T_2 = 0 \rightarrow T_1 = T_2$, o que mostra que a tração será constante ao longo do fio.

2.4 Atrito

Força que surge entre dois corpos em contato quando a superfície de um deles escorrega ou tende a escorregar em relação à superfície do outro. No primeiro caso, o atrito é denominado **cinético**. No segundo caso, o atrito é denominado **estático**.

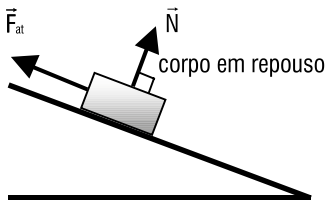
2.4.1 Atrito estático

A força de atrito estático surge quando as superfícies de corpos em repouso e em contato entre si possuem tendência de movimento relativo uma à outra chegando até a iminência de movimento. Nessa situação, a força de atrito é máxima, e é dada pela expressão:

$$Fat_{m\acute{a}xima} = \mu_e N$$

onde:
 $\mu_e \rightarrow$ coeficiente de atrito estático entre as superfícies.

$N \rightarrow$ força de reação da superfície.



Enquanto não se aplica no corpo uma força que supere a força de atrito estático máxima, o corpo permanece em repouso, e a força de atrito estático cresce linearmente, até chegar a seu limite, justamente a força de atrito estático máxima (iminência de movimento). Após isso, o atrito passa a ser cinético.

2.4.2 Atrito dinâmico (cinético)

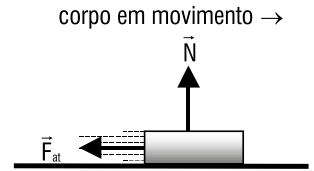
A força de atrito dinâmico, ou cinético, surge quando as superfícies dos corpos possuem movimento relativo (escorregamento) uma em relação à outra.

A força de atrito dinâmico pode ser calculada pela expressão:

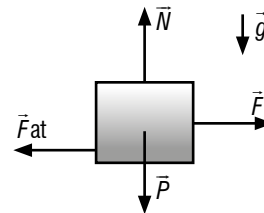
$$Fat_d = \mu_d N$$

onde:
 $\mu_d \rightarrow$ coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies.

$N \rightarrow$ força de reação da superfície.



Suponha então, um corpo de 3 kg apoiado em uma superfície áspera e horizontal, cujos $\mu_e = 0,5$ e $\mu_d = 0,333$. O corpo é submetido a uma força F , conforme mostra a figura abaixo:

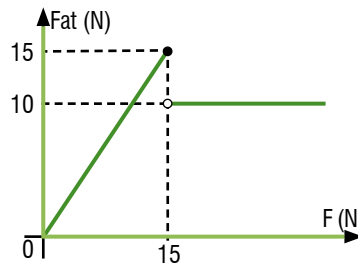


Sabemos, então, que o peso do corpo é dado por $P = 3 \cdot 10 = 30$ N, logo, como a força resultante na vertical é nula, já que o corpo está em repouso, temos que a força normal é $N = P = 30$ N. Logo, temos que a $Fat_{e\ m\acute{a}xima} = 0,5 \cdot 30 = 15$ N.

Suponhamos que $F = 5$ N. Logo, $F < Fat_{e\ m\acute{a}xima}$. Logo, temos que o corpo continua em repouso, já que a $Fat_{e\ m\acute{a}xima}$ não foi vencida. Logo, $Fat_e = F = 5$ N. A mesma situação ocorre para qualquer valor de $F < 15$ N.

Quando $F = 15$ N, temos que $F = Fat_{e\ m\acute{a}xima}$. O corpo continua parado, porém, como dissemos anteriormente, está na iminência de movimento, ou seja, está prestes a se mover.

Quando $F > 15$ N, o corpo sai do repouso e passa a se mover. Como há escorregamento (movimento relativo) entre a superfície de contato do corpo e o plano horizontal, o atrito passa a ser dinâmico, igual a $Fat_d = 30 \cdot 0,333 = 10$ N, constante, não importando qual o valor de F a ser aplicado. A seguir, é representado o gráfico da Fat com a variação de F . A Fat aumenta linearmente enquanto $F \leq 15$ N (atrito estático). Depois disso, o atrito passa a ser constante e igual a 10 N (atrito cinético).



Lembrando que, para haver atrito cinético, deve haver escorregamento entre as superfícies de contato, e não apenas movimento. Um exemplo típico é um carro que se desloca sem patinar. Enquanto suas rodas apenas giram, sem deslizar em relação ao chão, o que faz com que o carro se desloque para frente é o atrito estático entre os pneus e a pista. Não há

atrito cinético nesse caso, já que as rodas não estão deslizando, ou seja, não estão “arrastando” no chão. A mesma coisa acontece quando andamos em um chão seco. Quando damos um passo, nosso pé permanece em repouso em relação ao chão, dessa forma não havendo atrito cinético, apenas estático. É como se “empurrássemos” o chão para trás e o chão reagisse “nos empurrando” para frente. Como nossa massa é muito menor do que a massa do chão, quem adquire maior aceleração somos nós, enquanto o chão não se move.

2.4.3 Resistência do ar

Quando um objeto se move em um fluido (ar ou água, basicamente), o fluido exerce sobre ele uma força de resistência. Essa força depende de características do fluido, da forma do objeto e da velocidade com que o objeto está se movendo. Tem papel semelhante ao atrito: tende a reduzir a velocidade do corpo, muitas vezes diminuindo apenas a sua aceleração. Porém, difere do atrito dinâmico no seguinte aspecto: a força de resistência em um fluido aumenta com o acréscimo da velocidade.

Dessa forma, essa força de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade do móvel,

$$R = c \cdot v^2$$

em que c = constante de proporcionalidade empírica (depende da forma do corpo).

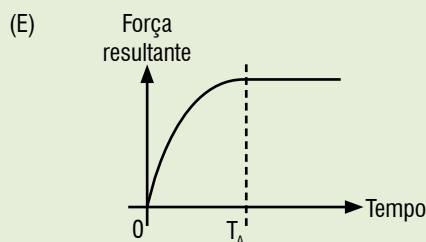
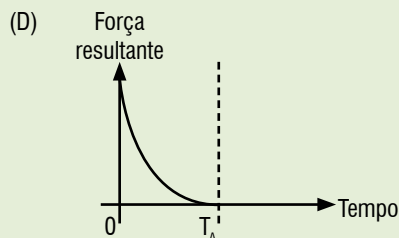
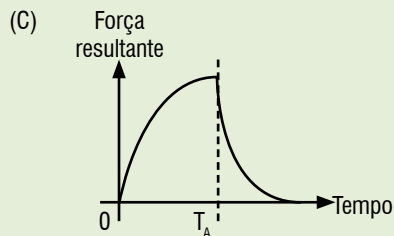
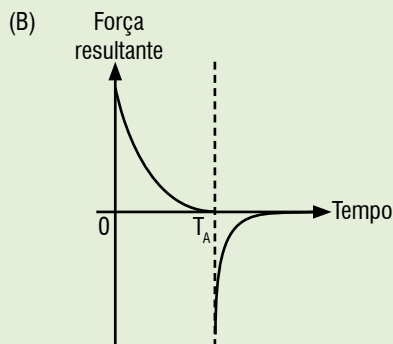
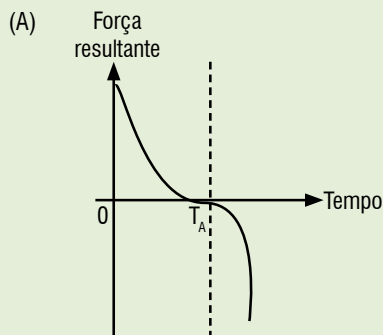
Sendo assim, considerando um caso em que $R = c \cdot v^2$, à medida que um corpo cai devido à força peso, a sua velocidade vai aumentando, bem como a força de resistência do ar, fazendo com que a força resultante diminua. O limite dessa força de resistência é o próprio peso. A velocidade do corpo, quando a força de resistência se iguala ao peso, mantém-se constante e é denominada velocidade limite e pode ser calculada como se segue:

$$P = R \rightarrow m \cdot g = c \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

(Enem-2013) Em um dia sem vento, ao saltar de um avião, um paraquedista cai verticalmente até atingir a velocidade limite. No instante em que o paraquedas é aberto (instante T_A), ocorre a diminuição de sua velocidade de queda. Algum tempo após a abertura do paraquedas, ele passa a ter velocidade de queda constante, que possibilita sua aterrissagem em segurança.

Que gráfico representa a força resultante sobre o paraquedista, durante o seu movimento de queda?



Solução: Letra B.

Durante a queda livre do paraquedista, a força resultante que atua sobre ele é $F_{res} = P - c \cdot v^2$, em que P é seu peso e $c \cdot v^2$ é a força de resistência do ar. Como $c \cdot v^2$ aumenta, já que a velocidade aumenta, a força resultante diminui com o tempo, de forma não linear. O paraquedista abre o paraquedas em T_A , quando atingiu sua velocidade limite, ou seja, quando a força resultante é igual a 0. Dessa forma, eliminamos as letras C e E. Com a abertura do paraquedas, a força resultante tem seu sentido alterado, já que o paraquedas provoca uma força de resistência do ar muito maior do que a que atua sobre o próprio paraquedista em queda livre com o paraquedas fechado. Dessa forma, a força resultante, agora, deve ser negativa e com módulo elevado, já que a força de resistência passa a ser maior que o peso. Depois de um tempo, o paraquedista passa a ter velocidade constante, o que significa que o módulo da força resultante reduziu-se a 0. Dessa forma, o único gráfico que pode representar o comportamento da força resultante com o tempo é o da letra B.

2.5 Elástica

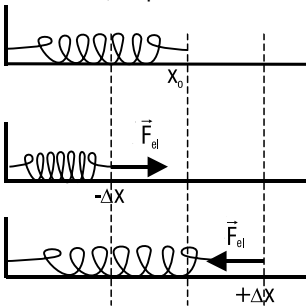
As forças elásticas surgem sempre que se provoca uma deformação em um corpo, e sempre tendem a fazer com que o corpo retorne à sua posição de equilíbrio inicial. Em regime elástico, a deformação sofrida por uma mola é diretamente proporcional à intensidade da força que a provoca. Quando a mola obedece a Lei de Hooke, esse comportamento é linear, e é calculada pela expressão:

$$F = k \cdot x$$

onde: k = constante elástica da mola (unidade no SI: N/m)

x = deformação sofrida pela mola (unidade no SI: m)

A figura a seguir mostra as orientações da força elástica em uma mola quando comprimida e esticada, respectivamente:

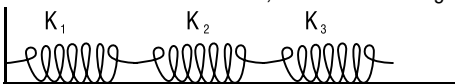


Essa força será importantíssima no estudo posterior do MHS (Movimento Harmônico Simples) em um sistema massa-mola, já que atuará como força de restauração do sistema (força que tende a restaurar o equilíbrio do sistema).

Molas com diferentes constantes elásticas podem ser associadas, e podemos substituí-las por uma única mola que preserve as propriedades que as molas tinham previamente. Existem dois tipos de associação, como veremos a seguir.

2.5.1 Associação de molas ideais em série

Dizemos que molas estão associadas em série quando o “final” de uma está conectada ao “início” de outra, como mostra a figura abaixo:



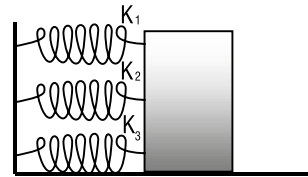
Suponha que uma força seja aplicada no sistema mostrado na figura a fim de se comprimir as molas. Como as molas são ideais, ou seja, não possuem massa, ocorre a mesma situação da tração em um fio ideal: a força elástica permanece constante ao longo da associação. Dessa forma, a força elástica que atua nas três molas é igual. Temos também que, se houvesse apenas uma mola sendo comprimida, o deslocamento dela seria igual ao deslocamento das três molas e a força elástica aplicada a ela seria a mesma. Dessa forma, temos:

$$x_{eq} = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \frac{F_{el}}{K_{eq}} = \frac{F_{el}}{K_1} + \frac{F_{el}}{K_2} + \frac{F_{el}}{K_3} \rightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \sum \frac{1}{K}$$

Em outras palavras, o inverso da constante elástica equivalente a uma associação de molas ideais em série é igual ao somatório dos inversos das constantes elásticas das molas que estão presentes na associação original. Esse resultado é equivalente à resistência equivalente de uma associação de resistores em paralelo, assunto a ser abordado no capítulo “Associação de Resistores” da apostila de Física III.

2.5.2 Associação de molas ideais em paralelo

Dizemos que molas estão associadas em série quando os “inícios” de todas elas estão conectados a uma mesma superfície, assim como os “finais” delas estão conectados a uma outra superfície, como mostra a figura abaixo:



Nesse tipo de situação, como na figura, se uma força é aplicada no bloco a fim de se comprimirem as molas, a deformação das molas será igual, já que elas têm o mesmo grau de liberdade. Dessa forma, se houvesse apenas uma mola sendo comprimida, o deslocamento desta seria igual ao deslocamento das molas em paralelo, e a força aplicada nela seria igual à soma das forças aplicadas nas molas em paralelo. Assim sendo:

$$F_{eq} = F_1 + F_2 + F_3 \rightarrow K_{eq}X = K_1X + K_2X + K_3X \rightarrow K_{eq} = \sum K$$

Em outras palavras, a constante elástica equivalente a uma associação de molas ideais em paralelo é a soma das constantes elásticas das molas da associação original. Esse resultado é equivalente à resistência equivalente de uma associação de resistores em série, assunto a ser abordado no capítulo “Associação de Resistores” da apostila de Física III.

3. Resolução de problemas

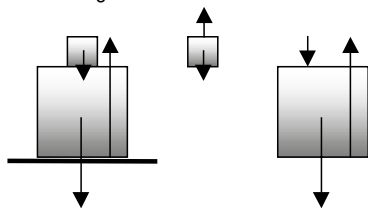
Os problemas de dinâmica são muito variados. Por essa razão, não existe uma forma única de resolvê-los. Assim, abaixo serão descritos passos básicos e indispensáveis para a resolução de qualquer problema.

Os problemas podem envolver concomitantemente as três leis de Newton, portanto a interpretação de cada problema em sua individualidade é essencial para a solução.

Caso os componentes de um sistema mecânico não apresentem movimento relativo entre si, o sistema pode ser analisado como um todo, ou seja, os corpos podem ser estudados como se fossem um único corpo cuja massa é dada pela massa total dos corpos. As forças de interação entre os componentes, neste caso, são chamadas de forças internas, e não aparecerão no diagrama de forças do sistema, já que forças internas são incapazes de realizar trabalho no sistema (estudaremos esse conceito mais a fundo posteriormente). Essas forças só poderão ser analisadas e calculadas quando isolamos os componentes do sistema. Aí elas passam a ser denominadas forças externas. Esse procedimento muitas vezes facilita o cálculo da aceleração do sistema e posterior cálculo das forças internas (isolando-se individualmente cada componente).

Caso os componentes de um sistema mecânico apresentem movimento relativo entre si, será necessário relacionar as suas acelerações entre si antes de se iniciar o problema, através dos chamados vínculos geométricos. Os vínculos geométricos dependerão das situações expostas em cada problema, logo a interpretação geométrica do problema será muito importante nesse caso. Descubra-se, primeiramente, como os deslocamentos dos componentes do sistema estão atrelados entre si e, como a aceleração é a segunda derivada da posição, temos que a relação entre os deslocamentos é a mesma relação entre as acelerações. Após descobrir-se como as acelerações dos componentes estão relacionadas entre si, podemos iniciar o problema normalmente, valendo-se da equação que relaciona as acelerações.

Após essas considerações, os problemas seguirão basicamente os passos apresentados a seguir:



Representação das forças no sistema, e dos diagramas de corpo livre dos componentes do sistema, respectivamente.

3.1 Envolvendo a 1ª lei

- Interpretar corretamente o problema para concluir que se trata de repouso ou movimento retilíneo uniforme;
- isolar os componentes em diagrama de corpo livre ou, caso não haja movimento relativo entre eles, e se conveniente, considerar o sistema todo, com massa igual à soma das massas dos componentes e desconsiderando forças internas;
- indicar corretamente as forças de ação e de reação (geralmente são forças internas ao sistema, então só aparecerão caso se isolem os componentes em diagrama de corpo livre);
- verificar com muita atenção o sentido da força de atrito, quando houver;
- escolher sabiamente os eixos coordenados para diminuir o trabalho de projeção de forças, ou seja, escolher os eixos de forma que contenham o maior número de forças possível.

3.2 Envolvendo a 2ª lei

- Interpretar corretamente o problema para concluir que se trata de um corpo em desequilíbrio, logo acelerado (verificar o sentido da aceleração);
- isolar os componentes em diagrama de corpo livre ou, caso não haja movimento relativo entre eles, e se conveniente, considerar o sistema todo, com massa igual à soma das massas dos componentes e desconsiderando forças internas;
- indicar corretamente as forças de ação e de reação (geralmente são forças internas ao sistema, então só aparecerão caso se isolem os componentes em diagrama de corpo livre);
- verificar com muita atenção o sentido da força de atrito, quando houver;
- escolher sabiamente os eixos coordenados. Um eixo deverá estar sempre no sentido da aceleração, enquanto o outro eixo deve ser perpendicular ao eixo que contiver a aceleração. Quando isto puder ser feito, o segundo eixo estará tratando de equilíbrio, logo aplicar-se-á a 1ª Lei.

4. Leis de Newton em um referencial não inercial

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre o referencial não inercial, vamos relembrar algumas características do referencial inercial.

A segunda lei de Newton nos diz que $\vec{F}_{res} = m\vec{a}$, ou seja, a força resultante que atua em um corpo produz uma aceleração nesse mesmo corpo. Vê-se que a primeira lei de Newton diz que, se $\vec{F}_{res} = 0$, o corpo tende a manter-se em seu estado atual. Parece, então, que a primeira lei é um caso particular da segunda, quando tomamos $\vec{a} = 0$. Porém, a primeira lei enuncia algo muito maior: introduz o conceito de *referencial inercial*, ou seja, um referencial que satisfaz à lei da inércia. Dessa forma, um referencial inercial nunca pode ser acelerado e, conseqüentemente, nunca pode ter aceleração relativa a outro referencial inercial. Assim, se um móvel tem uma aceleração a em relação a um certo referencial inercial, ele deve apresentar a mesma aceleração a em relação a um outro referencial inercial,

apesar de poder apresentar velocidades diferentes em relação aos dois referenciais, já que os referenciais inerciais podem apresentar velocidade relativa entre si (já que a lei da inércia fala em repouso ou velocidade constante). Dessa forma, já que a massa é invariável e os referenciais inerciais concordam em relação à aceleração de um móvel, eles têm que concordar com relação à força que atua sobre esse mesmo móvel, já que a força é o produto da massa pela aceleração. Estabelece-se, então, o Princípio da Invariância de Galileu, que afirma que as leis de Newton são válidas e as mesmas em qualquer referencial inercial.

Em seguida, podemos definir o *referencial não inercial*. O *referencial não inercial* é aquele que possui aceleração em relação a pelo menos um referencial inercial, sendo, então, conhecidos também por referenciais acelerados. Logo, a aceleração calculada para um referencial inercial **nunca** pode ser a mesma calculada para um referencial não inercial, já que existe aceleração relativa entre estes. Por conseqüente, dizemos que os referenciais não inerciais não respeitam as leis de Newton, as quais são válidas, então, apenas nos referenciais inerciais, como dito anteriormente.

Enfim, se as leis de Newton não são válidas em referenciais não inerciais, como proceder quando nos depararmos com problemas que relacionem eles? É aí que entra o Princípio da Equivalência de Einstein. Ele afirma que, quando o sistema contido em um referencial não inercial que tem aceleração \vec{a} relativa a um certo referencial inercial e se passa a observar o movimento a partir do mesmo referencial não inercial, é necessária uma adição de uma aceleração $-\vec{a}$ a todos os componentes do sistema, para que possam ser aplicadas as leis de Newton. Por exemplo, em um elevador em repouso ou com velocidade constante, em uma região em que a aceleração da gravidade é \vec{g} , com módulo g , o valor do período

de um pêndulo de comprimento ℓ é dada pela fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Porém,

se o elevador possuir uma aceleração \vec{a} para cima, com módulo a , para podermos calcular o novo período T do pêndulo, devemos observá-lo de dentro do elevador. Dessa forma, devemos adicionar a ele uma aceleração $-\vec{a}$, ou seja, uma aceleração de módulo a e sentido para baixo. É como, então, se estivéssemos “ *aumentando a gravidade* ” observada dentro do elevador. Chamamos essa “nova” gravidade de gravidade aparente. Dessa forma, passará a atuar no corpo, para baixo, uma aceleração de módulo

$g + a$, o que faz com que o novo período do pêndulo seja $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$.

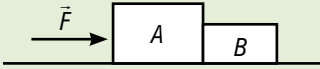
Vimos então que, a partir do Princípio da Equivalência, podemos nos valer das leis de Newton em um referencial não inercial. Então, a segunda lei de Newton passará a ser válida quando nos valermos dele. Ora, se cada elemento do sistema contido no referencial não inercial receber a aceleração $-\vec{a}$ quando o referencial se move com aceleração \vec{a} , e se a segunda lei de Newton é válida, sabemos que para essa nova aceleração adicionada ao sistema haverá associada a ela uma “força extra”. Essa “força extra” será denominada *força inercial*. Essa extensão da segunda lei de Newton para referenciais não inerciais a partir das forças inerciais é chamada de *princípio de D'Alembert*. Matematicamente, o princípio de D'Alembert se resume à seguinte equação:

$$\sum \vec{F} - m\vec{a}_1 = m\vec{a}_2$$

em que \vec{a}_1 é a aceleração do referencial não inercial que contém o sistema analisado em relação a um referencial inercial, \vec{a}_2 é a aceleração do componente do sistema analisado em relação ao referencial não inercial considerando-o agora como inercial (que é o nosso objetivo desde o início desta seção), e \vec{F} é a força resultante que já atuava no sistema antes da troca de referencial. Os problemas resolvidos 5, 6 e 7 exemplificam bem o método aqui discutido e mostram suas vantagens.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Na figura, os blocos A e B têm massas $m_A = 6,0 \text{ kg}$ e $m_B = 2,0 \text{ kg}$ e, estando apenas encostados entre si, repousam sobre o plano horizontal perfeitamente liso. A partir de um dado instante, exerce-se sobre A uma força horizontal \vec{F} , de intensidade igual a 16 N. Desprezando a resistência do ar, calcule:



- o módulo da aceleração do conjunto;
- a intensidade das forças que A e B trocam entre si na região de contato.

Solução:

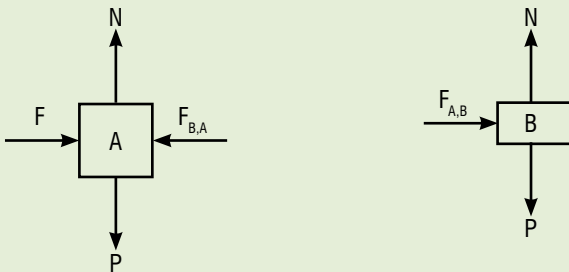
Esta é a situação mais simples possível que pode ocorrer nos problemas que enfrentaremos. Mas ele exemplifica bem as duas formas de como podemos lidar inicialmente com problemas desse tipo.

Veja que os blocos possuem mesma aceleração, já que não existirá movimento relativo entre eles. Suponha que adquiram uma aceleração a para a direita.

1ª solução: Primeiramente, isolar os blocos.

Bloco A:

Bloco B:



Vamos escrever agora as leis de Newton para os blocos.

Bloco A:

- Horizontal (2ª lei de Newton): $F - F_{B,A} = 6a \rightarrow 16 - F_{B,A} = 6a$ (I)
- Vertical (1ª lei de Newton): $N = P$

Bloco B:

- Horizontal (2ª lei de Newton): $F_{A,B} = 2a$ (II)
- Vertical (1ª lei de Newton): $N = P$

$F_{A,B}$ é a força que o corpo A faz no corpo B e $F_{B,A}$ é a força que o corpo B faz no corpo A, constituindo, então, um par ação-reação. Logo, possuem módulos iguais. Dessa forma, de (I) e (II), temos: $16 - 2a = 6a \rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$.

Voltando na equação (II), temos que $F_{A,B} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ N}$.

2ª solução:

Como já foi dito, pode ser muito útil pensar no sistema como um todo antes de isolar os seus componentes, caso estes não possuam movimento relativo entre si, que é o caso dessa questão.

Logo, podemos considerar o sistema como um “bloco” de massa 8 kg, no qual só está atuando uma força normal, uma força peso e a força externa F . Na direção horizontal, teremos:

$$F = m \cdot a \rightarrow 16 = 8a \rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2.$$

Ou seja, achamos a aceleração de maneira muito mais rápida que na outra solução.

Para acharmos a força interna, inevitavelmente, teremos que isolar um dos blocos. Isolando o bloco B e voltando de novo à equação (ii), temos:

$$F_{A,B} = 2 \cdot 2 \rightarrow F_{A,B} = 4 \text{ N}$$

Essa estratégia da 2ª solução pode parecer simples agora, já que só temos dois blocos no sistema, mas, para sistemas com um número relativamente grande de componentes, essa estratégia pode ser bem útil.

02 (Mack-SP) Um bloco A, de massa 6 kg, está preso a outro bloco B, de massa 4 kg, por meio de uma mola ideal de constante elástica 800 N/m. Os blocos estão apoiados sobre uma superfície horizontal e se movimentam sob a ação da força horizontal \vec{F} , de intensidade 60 N. Sendo o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies em contato igual a 0,4 e a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , a distensão da mola é, em cm, igual a:



- | | |
|--------|--------|
| (A) 3. | (D) 6. |
| (B) 4. | (E) 7. |
| (C) 5. | |

Solução: Letra B.

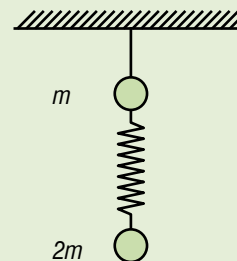
Perceba que a força elástica que é exercida na mola será uma força interna ao sistema (para a direita no bloco B e para a esquerda no bloco A). Dessa forma, podemos usar a dica do “bloco” para resolver o sistema. Veja que, em cada um dos blocos, haverá uma força de atrito para a esquerda. Logo, para o “bloco”, essas duas forças se resumem a uma só. A normal do “bloco” será igual a seu peso, igual a $P = 10 \cdot 10 = 100 \text{ N}$. Dessa forma, aplicando a segunda lei de Newton na horizontal:

$$F - Fat = M \cdot a \rightarrow 60 - 0,4 \cdot 100 = 10 \cdot a \rightarrow 10a = 20 \rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

Isolando, agora, o bloco B, temos uma força elástica (F_{el}) atuando nele para a direita, enquanto temos a força de atrito (Fat_B) atuando para a esquerda. Dessa forma, aplicando a segunda lei para o bloco B na horizontal, e lembrando que a $N_B = P_B = 40 \text{ N}$, temos:

$$F_{el} - Fat_B = m_B \cdot a \rightarrow 800 \cdot x - 0,4 \cdot 40 = 4 \cdot 2 \rightarrow x = 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

03 (UFC-2001) Um sistema composto por duas bolas de massas m e $2m$ conectadas entre si por uma mola ideal está pendurado ao teto como mostrado na figura. Cortando-se o fio que liga o sistema ao teto, qual será a aceleração adquirida pelas bolas de massa m e $2m$, respectivamente, logo após o corte? A aceleração da gravidade é g .



- | | |
|------------|-------------|
| (A) 0 e 0. | (D) 0 e 3g. |
| (B) 0 e g. | (E) 3g e 0. |
| (C) g e 0. | |

Solução: Letra E.

Antes do corte, é possível determinar a tração que é exercida no fio superior. Como as forças elásticas que atuam na mola são forças internas ao sistema, podemos considerar o “bloco” formado pelas duas bolas e pela mola. Vê-se que as forças externas presentes são a tração T e o peso do sistema, igual a 3 mg .

Isolando a bola superior, vemos que atuam sobre ela três forças: a tração $T = 3\text{ mg}$, seu peso $P_m = mg$ para baixo e a força elástica F_{el} para baixo (já que a mola está distendida). Como a bola está em equilíbrio, vale a primeira lei de Newton:

$$T = P_m + F_{el} \rightarrow 3\text{ mg} = mg + F_{el} \rightarrow F_{el} = 2\text{ mg}.$$

Isolando a bola inferior, temos a força elástica $F_{el} = 2mg$ (já calculada) para cima (pelo mesmo fato de a mola estar distendida) e o seu peso $P_{2m} = 2\text{ mg}$ para baixo.

A única alteração que acontece no sistema ao fio ser cortado é o fato de o fio não estar mais esticado. Sabemos que só há tração em fios ideais caso o fio esteja minimamente esticado. Dessa forma, a tração se anula quando o fio é cortado.

Então, a bola de cima fica sujeita apenas à força peso P_m e à força elástica F_{el} , que resultam em uma força para baixo igual a $3mg$. Logo, pela segunda lei de Newton:

$$F = m \cdot a_m \rightarrow 3\text{ mg} = m \cdot a_m \rightarrow a_m = 3\text{ g}$$

A bola de baixo continua sujeita apenas à ação da força elástica F_{el} para cima e seu peso P_{2m} para baixo. Logo, como essas forças se anulam, a aceleração nessa bola será nula $\rightarrow a_{2m} = 0$.

04 (ITA-13) Em um certo experimento, três cilindros idênticos encontram-se em pleno contato entre si, apoiados sobre uma mesa e sob a ação de uma força F , constante, aplicada na altura do centro de massa do cilindro da esquerda, perpendicularmente a seu eixo, como mostra a figura. Desconsiderando qualquer tipo de atrito, para que os três cilindros permaneçam em contato entre si, a aceleração a provocada pela força deve ser tal que:

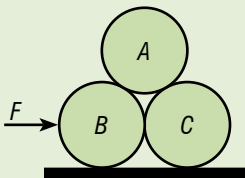
(A) $\frac{g}{3\sqrt{3}} < a < \frac{g}{\sqrt{3}}$.

(D) $\frac{2g}{3\sqrt{2}} < a < \frac{3g}{4\sqrt{2}}$.

(B) $\frac{2g}{3\sqrt{2}} < a < \frac{4g}{\sqrt{2}}$.

(E) $\frac{g}{2\sqrt{3}} < a < \frac{3g}{4\sqrt{3}}$.

(C) $\frac{g}{2\sqrt{3}} < a < \frac{4g}{3\sqrt{3}}$.

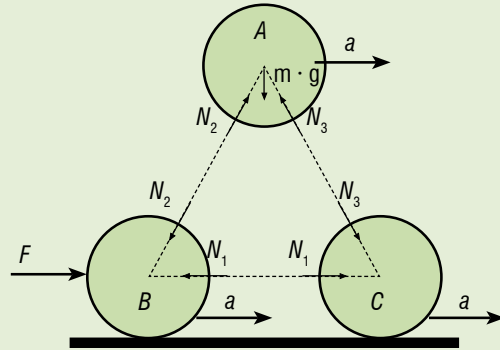


Solução: Letra A.

Para que exista um intervalo de acelerações para o qual os cilindros permaneçam em contato entre si, é natural que exista também um intervalo para a força F que permita que os cilindros permaneçam em contato, já que a força F é a única força externa na direção horizontal (as outras são os pesos dos cilindros e as normais que a superfície exerce nos cilindros inferiores).

Dessa forma, obrigaremos a força F a ser mínima e máxima. No primeiro caso, acharemos a aceleração mínima que deve ser comunicada ao sistema. No segundo, acharemos a máxima aceleração que pode ser comunicada ao sistema. Assim, obteremos o intervalo desejado.

Sejam N_1 , N_2 e N_3 as forças de contatos entre os cilindros B e C, A e B e A e C, respectivamente. Os diagramas de corpo livre estão expostos na figura a seguir (os pesos dos cilindros inferiores e as normais da superfície foram desconsiderados, pois não serão relevantes nos nossos cálculos).



Obrigando a força F a ser mínima:

Para que a força F seja mínima, a força N_1 deverá tender a 0, já que, se F não for suficientemente grande, o cilindro A tenderá a ocupar o espaço entre os cilindros B e C, fazendo com que estes percam o contato entre si. Dessa forma, a condição que obriga F a ser mínima é $N_1 = 0$.

Isolando o cilindro C, temos:

– Horizontal (2^a lei de Newton): $F_{\min} = m \cdot a_{\min} = N_3 \cdot \cos 60^\circ$ (I)

Isolando o cilindro A, temos:

– Horizontal (2^a lei de Newton): $F_{\min} = m \cdot a_{\min} = N_2 \cdot \cos 60^\circ - N_3 \cdot \sin 30^\circ$ (II)

– Vertical (1^a lei de Newton): $N_2 \cdot \cos 30^\circ + N_3 \cdot \sin 60^\circ = m \cdot g$ (III)

Resolvendo o sistema, encontramos $a_{\min} = \frac{g\sqrt{3}}{9}$.

Obrigando a força F a ser máxima:

Para que a força F seja máxima, N_3 deve tender a 0, já que, para uma força F limite, o bloco A estaria “rolando” por cima do bloco B, perdendo o contato com o bloco C. Dessa forma, a condição que obriga F a ser máxima é $N_3 = 0$.

Isolando o cilindro A:

– Horizontal (2^a lei de Newton): $F_{\max} = m \cdot a_{\max} = N_2 \cdot \sin 30^\circ$ (IV)

– Vertical (1^a lei de Newton): $m \cdot g = N_2 \cdot \cos 30^\circ$ (V)

Resolvendo o sistema, encontramos $a_{\max} = \frac{g\sqrt{3}}{3}$.

Logo, o intervalo de valores da aceleração para o qual os cilindros não perdem o contato é:

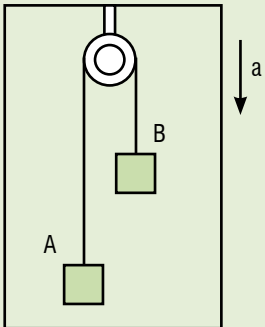
$$\frac{g\sqrt{3}}{9} < a < \frac{g\sqrt{3}}{3}$$

Que é a resposta do item ‘a’ já racionalizada.

Veja que o intervalo deve ser aberto, já que as acelerações máxima e mínima que encontramos obrigam as normais a serem 0, o que não é nosso objetivo. Nós apenas o fizemos para achar os limites do intervalo.

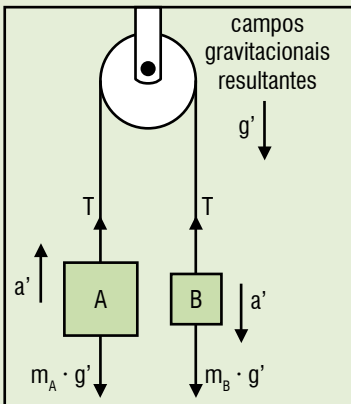
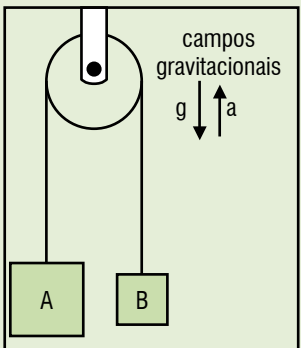
Obs.: Problemas de minimização e maximização são muito comuns na mecânica. Nos depararemos com problemas semelhantes mais vezes, logo, é importante guardar ideias como essas.

05 Um elevador apresenta aceleração $a = 2 \text{ m/s}^2$ para baixo, em um local onde a aceleração da gravidade é igual a 10 m/s^2 . Os blocos A e B da figura têm massas respectivamente iguais a 1 kg e 2 kg , e estão ligados conforme mostra a figura. Qual a tração no fio e a aceleração observada no referencial do elevador?



Solução:

Como o problema nos pede a aceleração observada no referencial do elevador, é natural mudarmos do referencial Terra para o referencial elevador. Dessa forma, de acordo com o Princípio da Equivalência, os corpos dentro do elevador devem ser submetidos a uma aceleração de intensidade igual à do referencial não inercial, só que com sentido inverso, e, de acordo com o princípio de D'Alembert, essas acelerações estão associadas a forças de inércia. Porém, resumindo esse pensamento, podemos dizer que essa aceleração invertida que é adicionada quando se muda de referencial pode ser adicionada à aceleração da gravidade, criando uma nova aceleração da gravidade $g' = g - a = 10 - 2 = 8 \text{ m/s}^2$. Logo, o peso dos corpos será diferente nesse referencial, quando comparados aos seus pesos no referencial da Terra. As figuras a seguir exemplificam bem o que foi escrito.



Vê-se que os blocos têm, em módulo, a mesma aceleração a' . Porém, julgamos que B desce e A sobe, já que B é mais pesado. Isolando os blocos, temos:

Bloco A:

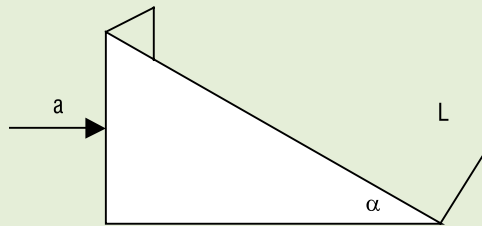
$$m_a \cdot a' = T - m_a \cdot g' \rightarrow T - 8 = 1 \cdot a' \quad (I)$$

Bloco B:

$$m_b \cdot a' = m_b \cdot g' - T \rightarrow 16 - T = 2 \cdot a' \quad (II)$$

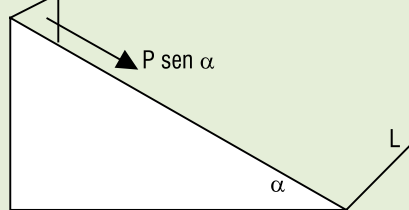
Resolvendo o sistema, encontramos $a' = \frac{8}{3} \text{ m/s}^2$ e $T = \frac{32}{3} \text{ N}$.

06 Um bloco desliza com atrito desprezível ao longo da face hipotenusa de uma cunha mantida fixa sobre o plano horizontal. Assim que o bloco se imobiliza ao atingir a lingueta de retenção L, comunica à cunha uma aceleração horizontal a que faz com que o bloco suba ao longo da mesma face e atinja o topo no mesmo intervalo de tempo que ele levou para descer. Demonstre que $a = 2g \tan \alpha$.



Solução:

(A) Durante a descida (referencial na Terra, inercial):

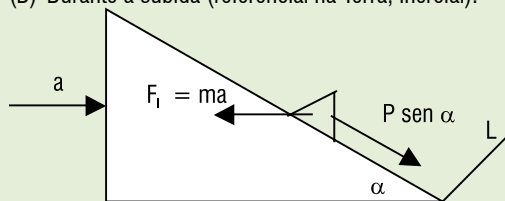


Pela 2ª lei no eixo ao longo do plano inclinado
 $P \text{ sen } \alpha = m a_{\text{descida}} \therefore g \text{ sen } \alpha = a_{\text{descida}}$

Pela equação horária da posição do MRUV

$$x = \frac{1}{2} a_{\text{descida}} t_d^2 \quad (I)$$

(B) Durante a subida (referencial na Terra, inercial):



Aplicação da segunda lei no eixo ao longo do plano inclinado:

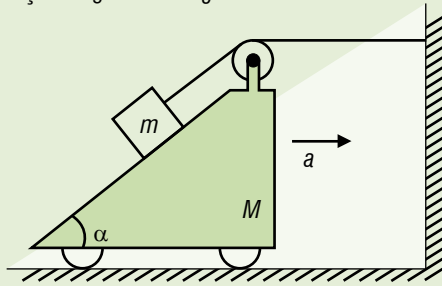
$$F_i \cos \alpha - P \text{ sen } \alpha = m a_{\text{subida}} \therefore m a \cos \alpha - m g \text{ sen } \alpha = m \cdot a_{\text{subida}}$$

$$x = \frac{1}{2} a_{\text{subida}} t_s^2 \quad (II) \text{ (distância percorrida ao longo do plano, segundo as fórmulas.)}$$

Como o tempo de subida e o de descida são iguais, de (I) e (II)

$$a_{\text{descida}} = a_{\text{subida}} \therefore g \cdot \text{sen } \alpha = a \cdot \cos \alpha - g \cdot \text{sen } \alpha \therefore a = 2g \cdot \tan \alpha$$

07 (Irodov) Na figura, o bloco tem massa m , a cunha tem massa M e o ângulo do plano inclinado da rampa é α . O fio é ideal e o atrito é desprezível. Determine a aceleração a adquirida pela cunha, sabendo que a aceleração da gravidade é g .

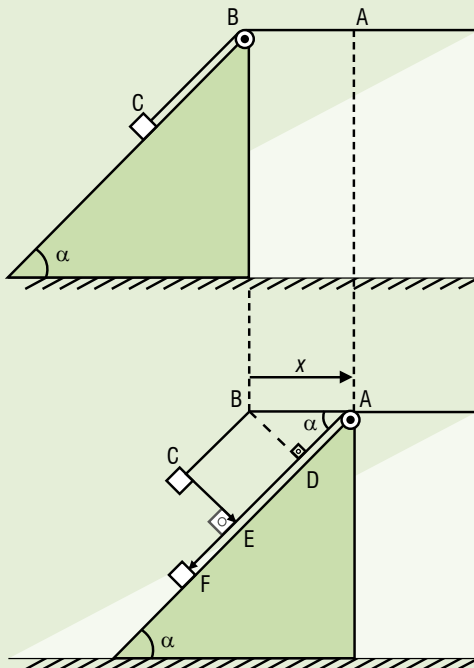


1ª solução: Referencial inercial (Terra)

Para resolvermos essa questão utilizando o referencial inercial (Terra), temos que primeiramente, como nos passos escritos na seção 3 deste capítulo, verificar se os componentes do sistema possuem movimento relativo entre si ou não, ou seja, se possuem a mesma aceleração em relação à Terra ou não. Veja que, quando a cunha se move para a direita, o bloco cai ao longo do plano inclinado contido nela. Dessa forma, percebe-se claramente que os componentes possuem movimento relativo entre si, não possuindo, então, mesma aceleração em relação à Terra. Logo, devemos desvendar o vínculo geométrico que atrela o deslocamento da cunha ao deslocamento do bloco.

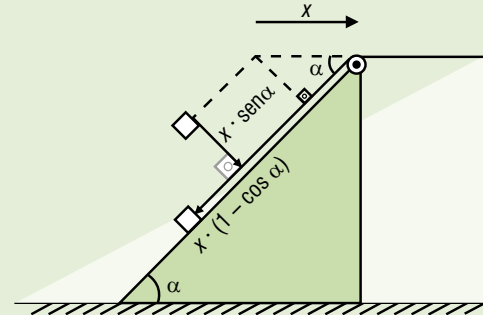
– Desvendando o vínculo geométrico:

Suponha que a cunha deslize, com relação à sua polia, do ponto B até o ponto A, percorrendo um comprimento x , e que o trecho delimitado pelos pontos A e C do fio tenha comprimento L , como mostra a figura.



Logo, pelas figuras, temos que $AB + BC = L$. Como $AB = x$, temos que $BC = L - x$. Só que, no triângulo de vértices A, B e D, temos que $AD = AB \cdot \cos\alpha = x \cdot \cos\alpha$ e $BD = x \cdot \sin\alpha$, o que implica que $CE = x \cdot \sin\alpha$. Como o comprimento do fio é conservado, já que o fio é ideal, ou seja, não pode ser esticado nem comprimido, temos, pela figura, que $AD +$

$DE + EF = L$. Como $AD = x \cdot \cos\alpha$ e $DE = BC = L - x$, temos que $EF = L - AD - DE = x(1 - \cos\alpha)$. Como CE e EF são as componentes do deslocamento do bloco, temos que, quando a cunha se desloca $AB = x$ para a direita, o bloco se desloca $CE = x \cdot \sin\alpha$ perpendicularmente ao plano inclinado e $EF = x(1 - \cos\alpha)$ ao longo do plano inclinado, como mostra a figura abaixo.



Logo, se a é a aceleração da cunha para a direita (segunda derivada do deslocamento $AB = x$), temos que $a \cdot \sin\alpha$ é a aceleração do bloco perpendicularmente ao plano inclinado e $a(1 - \cos\alpha)$ é a aceleração do bloco ao longo do plano inclinado, respectivas segundas derivadas de seus deslocamentos.

Dessa forma, podemos agora aplicar normalmente as leis de Newton, isolando os blocos.

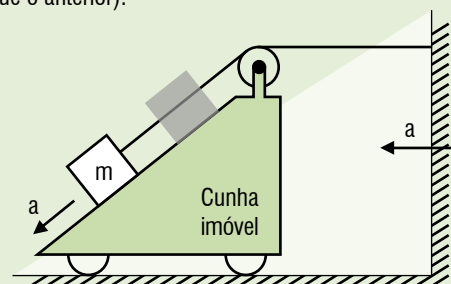
Diagramas de corpo livre:

- 2ª lei de Newton para a cunha na direção horizontal: $Ma = N \cdot \sin\alpha + T - T\cos\alpha$
- 2ª lei de Newton para o bloco na direção perpendicular ao plano: $ma \cdot \sin\alpha = mg \cdot \cos\alpha - N$
- 2ª lei de Newton para o bloco na direção ao longo do plano: $ma(1 - \cos\alpha) = mg \cdot \sin\alpha - T$

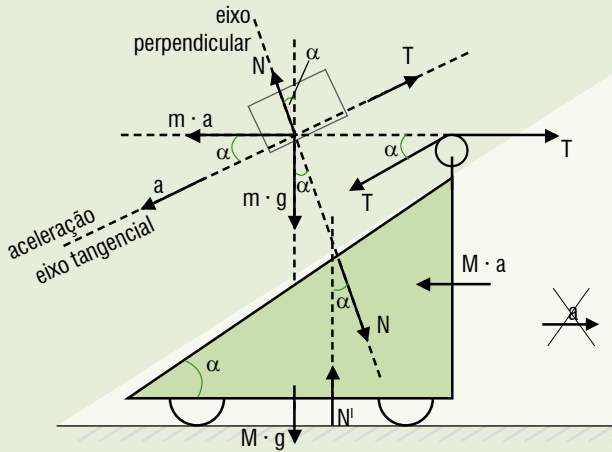
Resolvendo o sistema, temos que $a = \frac{mg \cdot \sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$.

2ª solução: Referencial não inercial (cunha)

A solução no referencial inercial necessita que nós analisemos o vínculo geométrico constituído pelo bloco e pela cunha, o que, muitas vezes, pode tornar a resolução da questão difícil. Dessa forma, pensaremos no referencial não inercial da cunha, para ter que evitar analisar o vínculo geométrico presente no problema, analisando um vínculo geométrico muito mais simples. Vamos deixar a cunha imóvel, fazendo que o bloco desça ao longo do plano inclinado e a parede “se aproxime” da cunha, conforme indica a figura abaixo. Vê-se que a parede terá uma aceleração a para a esquerda, já que se mudou o referencial, e, como o fio não estica, o bloco deve descer o plano inclinado com a mesma aceleração a com que a parede está se movendo (vínculo geométrico muito mais simples que o anterior).



Dessa forma, ao mudarmos o referencial, pelo Princípio da Equivalência, a aceleração a para a direita tanto no bloco como na cunha, criando, pelo princípio de D'Alembert, as forças fictícias $m \cdot a$ e $M \cdot a$, ambas para a esquerda, no bloco e na cunha respectivamente. Dessa forma, só precisamos analisar os diagramas de corpo livre dos componentes, presentes na figura abaixo.



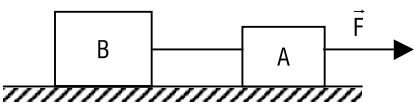
- 2ª lei de Newton no eixo tangencial para o bloco: $m \cdot \cos \alpha + mg \cdot \sin \alpha - T = ma$
- 1ª lei de Newton no eixo perpendicular para o bloco (bloco em repouso nesse eixo): $m \cdot \sin \alpha + N = mg \cdot \cos \alpha$
- 1ª lei de Newton para a cunha na direção horizontal (cunha em repouso): $T + N \cdot \sin \alpha = T \cdot \cos \alpha + Ma$

Resolvendo o sistema, temos que $a = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}$.

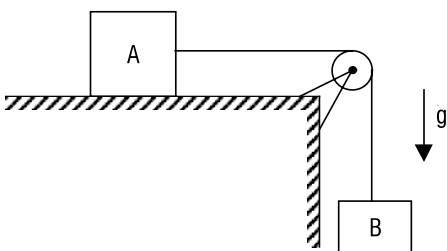
Vê-se, então, a vantagem da aplicação da mudança de referencial e do princípio de D'Alembert em certas questões.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Na situação do esquema seguinte, não há atrito entre os blocos e o plano horizontal, a resistência do ar é desprezível e as massas de A e de B valem, respectivamente, 2,0 kg e 8,0 kg. Sabe-se que o fio leve e inextensível que une A com B suporta, sem romper-se, uma tensão máxima de 32 N. Calcule a maior intensidade admissível à força, horizontal, para que o fio não se rompa.



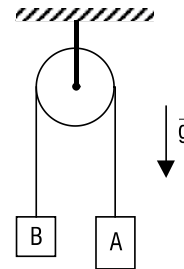
02 No arranjo experimental esquematizado abaixo, os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a 4,0 kg e 1,0 kg. Desprezam-se os atritos, a resistência do ar e a inércia da polia.



Considerando que o fio que interliga os blocos é leve e inextensível e adotando nos cálculos $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

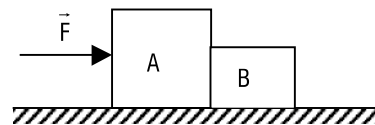
- a. o módulo da aceleração dos blocos;
- b. a intensidade da força tensora estabelecida nos fios.

03 O dispositivo esquematizado na figura é a máquina de Atwood. No caso, não há atritos, o fio é inextensível e desprezam-se sua massa e a da polia. Supondo que os blocos A e B têm massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 2,0 kg e que $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:



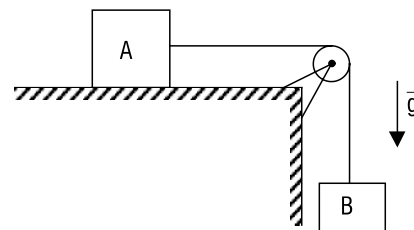
- a. o módulo da aceleração dos blocos;
- b. a intensidade da força tensora estabelecida no fio;
- c. a intensidade da força tensora estabelecida no cabo que sustenta a polia.

04 Os blocos A e B da figura seguinte têm massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 3,0 kg e estão sendo acelerados horizontalmente sob ação de uma força \vec{F} de intensidade 50 N, paralela ao plano de movimento. Sabendo que o coeficiente de atrito de escorregamento entre os blocos e o plano de apoio vale $\mu = 0,60$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:



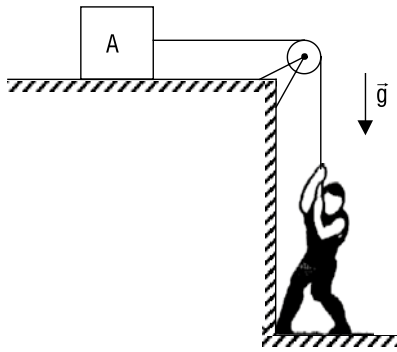
- a. a aceleração dos corpos;
- b. a força que o bloco B exerce sobre o corpo A.

05 O corpo A, de 5,0 kg de massa, está apoiado em um plano horizontal, preso a uma corda que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis e que sustenta em sua extremidade o corpo B, de 3,0 kg de massa. Nessas condições, o sistema apresenta movimento uniforme. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

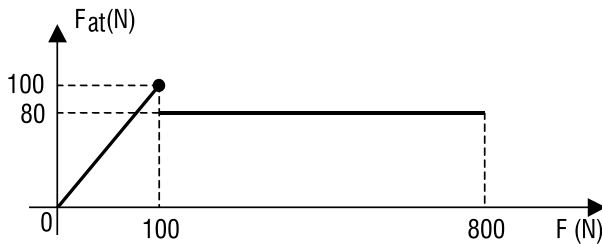


- a. o coeficiente de atrito entre o corpo A e o plano de apoio;
- b. a intensidade da aceleração do sistema se colocarmos sobre o corpo B uma massa de 2,0 kg.

06 Na situação representada na figura, o homem puxa a corda verticalmente para baixo e esta, por sua vez, puxa o bloco que está apoiado no plano horizontal. O fio e a polia são ideais, a massa do bloco vale 40 kg e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$.



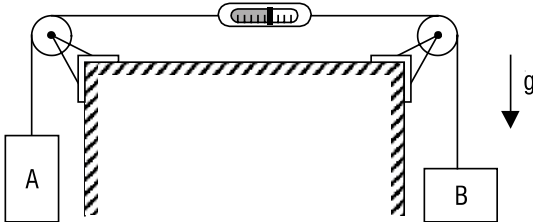
A intensidade da força de atrito recebida pelo bloco do plano de apoio (F_{at}) varia com a intensidade da força exercida pelo homem (F), conforme o gráfico abaixo:



Calcule:

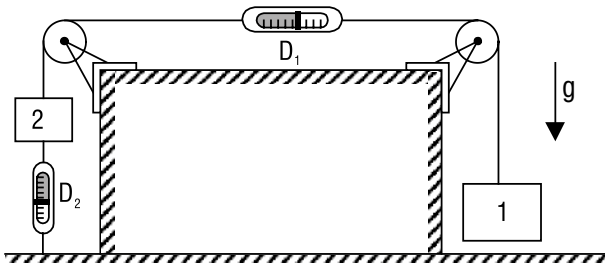
- os valores dos coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e plano de apoio;
- o módulo da aceleração do bloco para $F = 120$ N.

07 Considere a montagem da figura abaixo. Os blocos A e B têm massas $m_A = 8,0$ kg e $m_B = 2,0$ kg, os fios, as roldanas e o dinamômetro são ideais e despreza-se a resistência do ar. Adotando $g = 10$ m/s², determine:



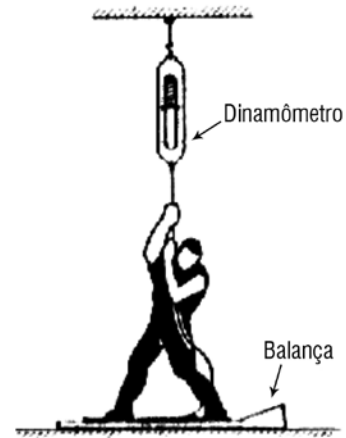
- o módulo da aceleração do sistema;
- a indicação do dinamômetro (graduado em newtons).

08 Dois blocos (1) e (2) de pesos respectivamente iguais a 30 kgf e 10 kgf estão em equilíbrio, conforme mostra a figura abaixo:



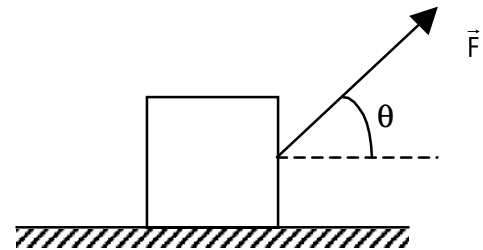
Quais as indicações nos dinamômetros D_1 e D_2 , graduados em kgf?

09 Um homem está sobre a plataforma de uma balança e exerce força sobre um dinamômetro preso ao teto. Sabe-se que quando a leitura do dinamômetro é zero, a balança indica 80 kgf.



- Qual o peso do homem?
- Se o homem tracionar o dinamômetro de modo que este indique 10 kgf, qual será a nova indicação da balança?

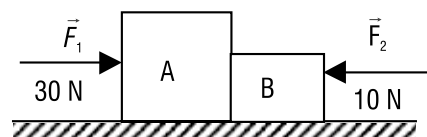
10 Considere o esquema seguinte, em que se representa um bloco de 1,0 kg de massa apoiado sobre um plano horizontal. O coeficiente de atrito de arrastamento entre a base do bloco e a superfície de apoio vale 0,25 e a aceleração da gravidade, no local, tem módulo 10 m/s².



A força \vec{F} , cuja intensidade é de 10 N, forma com a direção horizontal um ângulo θ constante, tal que $\text{sen}\theta = 0,60$ e $\text{cos}\theta = 0,80$. Desprezando a resistência do ar, aponte a alternativa que traz o valor correto da aceleração do bloco:

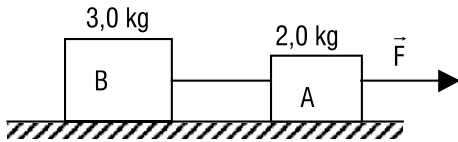
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (A) 7,0 m/s ² . | (D) 2,5 m/s ² . |
| (B) 5,5 m/s ² . | (E) 1,0 m/s ² . |
| (C) 4,0 m/s ² . | |

11 Os blocos A e B representados na figura possuem massas de 3,0 kg e 2,0 kg, respectivamente. A superfície horizontal onde eles se deslocam apresenta um coeficiente de atrito cinético igual a 0,30; \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são horizontais que atuam nos blocos. Determine:



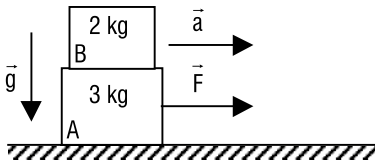
- o módulo da aceleração do sistema;
- a intensidade da força de contato entre A e B.

12 Sobre o plano horizontal da figura apoiam-se os blocos *A* e *B*, interligados por um fio inextensível e de massa desprezível. O coeficiente de atrito estático entre os blocos e o plano vale 0,60 e o cinético, 0,50. Adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo-se que a força \vec{F} é horizontal e que sua intensidade vale 50 N, calcule:



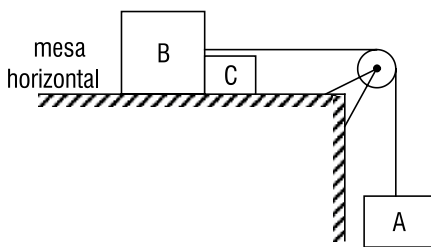
- o módulo da aceleração do sistema;
- a intensidade da força tensora no fio.

13 Na figura seguinte, a superfície *S* é horizontal, a intensidade de \vec{F} é de 40 N, o coeficiente de atrito de arrastamento entre o bloco *A* e a superfície *S* vale 0,50 e $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sob a ação da força \vec{F} , o sistema é acelerado horizontalmente e, nessas condições, o bloco *B* apresenta-se na iminência de escorregar em relação ao bloco *A*.

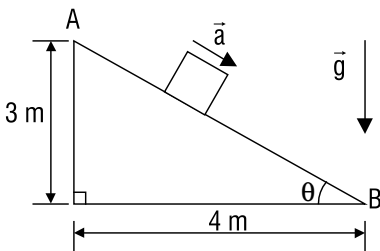


- Determine o módulo da aceleração do sistema.
- Calcule o coeficiente do atrito estático entre os blocos *A* e *B*.

14 Na figura os blocos *A*, *B* e *C* têm massas respectivamente iguais a 3 *M*, 2 *M* e *M*; o fio e a polia são ideais. Os atritos são desprezíveis e a aceleração da gravidade tem intensidade *g*. Admitindo o sistema em movimento sob ação da gravidade, calcule a força tensora no fio e a força de contato trocada por *B* e *C*.

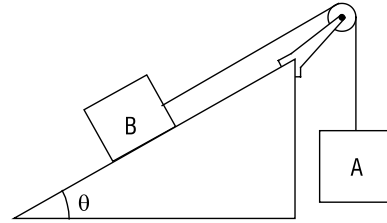


15 A situação representada na figura refere-se a um bloco que, abandonado em repouso no ponto *A*, desce o plano inclinado com aceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$, indo atingir o ponto *B*:



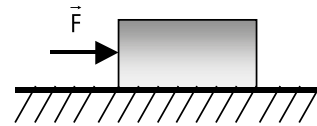
Sabendo que no local $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio.

16 Na situação esquematizada na figura, o fio e a polia são ideais; despreza-se o efeito do ar e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo que os blocos *A* e *B* têm massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 4,0 kg e que o coeficiente de atrito cinético entre *B* e o plano de apoio vale 0,50, determine:

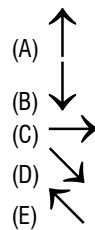


- o módulo da aceleração do sistema.
- a intensidade da força tensora no fio.
 $\text{sen } \theta = 0,6$
 $\text{cos } \theta = 0,8$

17 O bloco da figura pesa 8,0 N e está em repouso, apoiado sobre um plano horizontal que lhe oferece um coeficiente de atrito estático de valor 0,80.



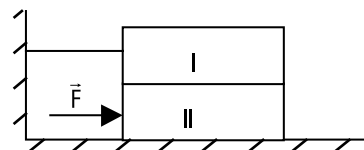
- o vetor que melhor representa a força exercida pelo bloco sobre o plano de apoio é:



- a intensidade da força referida no exercício anterior é:

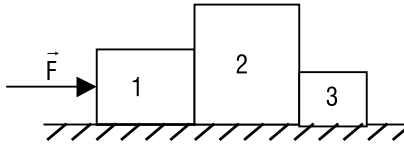
- 8,0 N.
- 6,0 N.
- 6,4 N.
- 10 N.
- 14 N.

18 Na figura, o bloco *I* repousa sobre o bloco *II*, sendo que *I* está preso por uma corda a uma parede. $m_I = 3,0 \text{ kg}$ e $m_{II} = 6,0 \text{ kg}$. O coeficiente de atrito cinético entre *I* e *II* é 0,10 e entre *II* e o plano é 0,20. Qual deve ser a força \vec{F} que, aplicada em *II*, desloca esse bloco com aceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$?



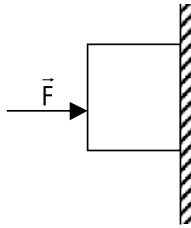
- 40 N.
- 30 N.
- 15 N.
- 27 N.
- 33 N.

19 A figura representa três blocos de massas $M_1 = 1,00 \text{ kg}$, $M_2 = 2,50 \text{ kg}$ e $M_3 = 0,50 \text{ kg}$, respectivamente. Entre os blocos e o piso que os apoia existe atrito, cujos coeficientes cinético e estático são respectivamente, 0,10 e 0,15; a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 .



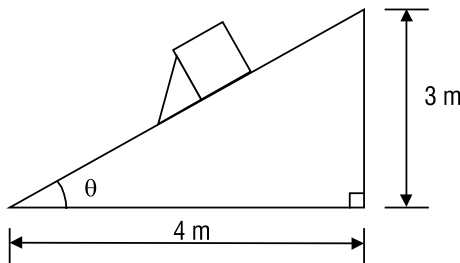
Se ao bloco 1 for aplicada uma força \vec{F} , horizontal, de $10,0 \text{ N}$, qual será a intensidade da força que o bloco 2 exercerá no bloco 3?

20 Na figura o bloco pesa 20 kgf e o coeficiente de atrito estático entre ele e a parede vertical em que está apoiado vale $0,50$.



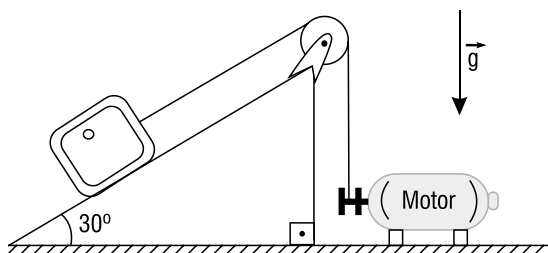
Calcule a menor força \vec{F} , horizontal, para que o bloco não escorregue em relação à parede.

21 No plano inclinado representado a seguir, o bloco encontra-se impedido de se movimentar graças ao cutelo no qual está apoiado. Os atritos são desprezíveis, a massa do bloco vale $5,0 \text{ kg}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.

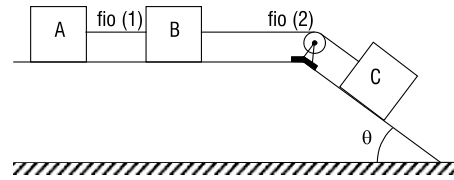


- Esquematize todas as forças que agem no bloco.
- Calcule as intensidades das forças com as quais o bloco comprime o cutelo e o plano de apoio.

22 Na situação descrita na figura abaixo, um cofre de peso igual a $5,0 \cdot 10^3 \text{ N}$ sobe aceleradamente o plano inclinado puxado por um cabo leve e inextensível acoplado ao eixo de um motor. O plano inclinado é perfeitamente polido, a resistência do ar é desprezível e a polia é ideal. Sabendo que o cofre sobe com aceleração de 1 m/s^2 , calcule a intensidade da força que o motor transmite a ele através do cabo. (Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



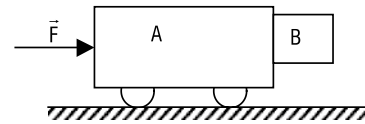
23 No esquema a seguir, fios e polia são ideais. Desprezam-se todos os atritos, bem como a resistência do ar. Sendo g o módulo da aceleração da gravidade, $2m$, $2m$ e m as massas dos blocos A, B e C, nesta ordem. (Dado: $\theta = 30^\circ$.)



Calcule:

- o módulo da aceleração de cada bloco;
- a intensidade das forças que tracionam os fios 1 e 2;
- a intensidade da força paralela ao plano horizontal de apoio a ser aplicada no bloco A, de modo que o sistema permaneça em repouso.

24 Na situação da figura, os corpos A e B têm massas M e m , respectivamente, estando B simplesmente encostado em uma parede vertical de A. O sistema movimentava-se horizontalmente sob ação da força \vec{F} , paralela ao plano de apoio, sem que B escorregue em relação a A. A resistência do ar é desprezível, não há atrito entre A e o solo e no local a aceleração da gravidade vale g .



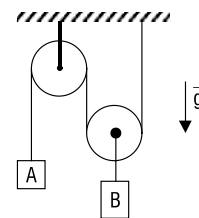
Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre B e A, analise as proposições seguintes:

- a situação proposta só é possível se o sistema estiver, necessariamente, em alta velocidade;
- para que B não escorregue em relação a A, a aceleração do sistema deve ser maior ou igual a μg ;
- se B estiver na iminência de escorregar em relação a A, a intensidade da força \vec{F} será igual a $(M + m)g/\mu$.

Responda mediante o código:

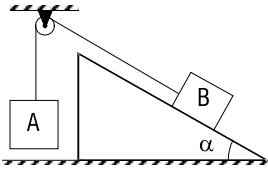
- Se somente I e II forem corretas.
- Se somente I e III forem corretas.
- Se somente II e III forem corretas.
- Se somente II for correta.
- Se somente III for correta.

25 No arranjo experimental da figura, a caixa A é acelerada para baixo com $2,0 \text{ m/s}^2$. As polias e o fio têm massas desprezíveis e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que a massa da caixa B seja de 80 kg e ignorando a influência do ar no sistema, determine:



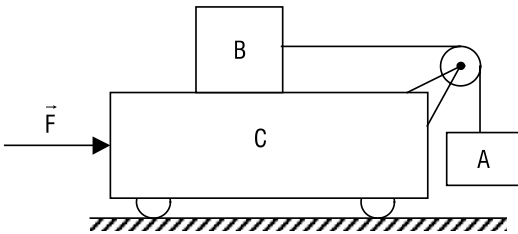
- o módulo da aceleração de subida da caixa B;
- a intensidade da força tensora no fio;
- a massa da caixa A.

26 Na figura seguinte, os dois blocos *A* e *B* têm massas iguais. São desprezíveis as massas dos fios e da polia e esta pode girar sem atrito. O menor valor do coeficiente de atrito estático entre o plano inclinado de α em relação à horizontal e o bloco *B*, para que o sistema não escorregue é:

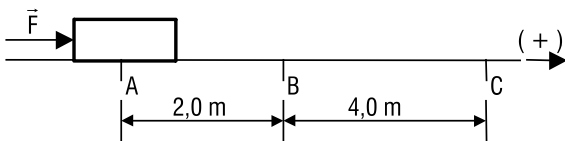


- (A) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- (B) $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- (C) $\text{tg } \alpha$.
- (D) $\text{cot } g \alpha$.
- (E) $\frac{1}{\sin \alpha}$.

27 Na figura, o sistema está sujeito à ação da resultante externa \vec{F} , paralela ao plano horizontal sobre o qual o carrinho está apoiado. Todos os atritos são irrelevantes e as inércias do fio e da polia são desprezíveis. As massas dos corpos *A*, *B* e *C* valem, respectivamente, 2,0 kg, 1,0 kg e 5,0 kg e, no local, o módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s². Supondo-se que *A* esteja apenas encostado em *C*, determine a intensidade de \vec{F} , de modo que *A* e *B* não se movimentem em relação ao carrinho *C*.

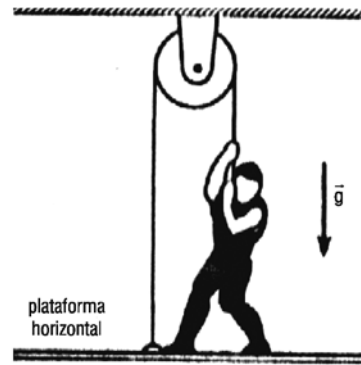


28 Na figura abaixo mostra-se um plano horizontal, em que o trecho *AB* é perfeitamente liso e o trecho *BC* é áspero. Um bloco de 2,0 kg de massa parte do repouso no ponto *A*, acelerado pela força \vec{F} constante, de intensidade 8,0 N e paralela ao plano; \vec{F} atua no bloco até o ponto *B*, onde é suprimida. A partir daí o bloco é desacelerado pela força de atrito, parando no ponto *C*. Desprezando a resistência do ar:



- a. calcule o módulo da velocidade do bloco no ponto *B* e a intensidade da força de atrito nele atuante no trecho *BC*;
- b. trace o gráfico da velocidade escalar do bloco em função do tempo, adotando como origem dos tempos o instante de partida em *A*.

29 No esquema seguinte, o homem (massa de 80 kg) é acelerado verticalmente para cima juntamente com a plataforma (massa de 20 kg) sobre a qual está apoiado. Isso é possível porque ele puxa verticalmente para baixo a corda que passa pela polia fixa. A aceleração do conjunto homem-plataforma tem módulo 5 m/s² e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Considerando ideais a corda e a polia e desprezando a resistência do ar, calcule:

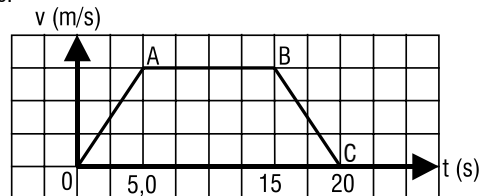


- a. a intensidade da força com que o homem puxa a corda;
- a. a intensidade da força de contato trocada entre o homem e a plataforma.

30 Em um elevador há uma balança graduada em newtons. Um homem de 60 kg de massa, em pé sobre a balança, lê 720 N quando o elevador sobe em movimento acelerado e 456 N quando desce em movimento acelerado, com a mesma aceleração da subida, em módulo. Determine:

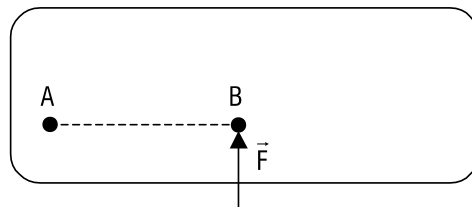
- a. quais os módulos da aceleração da gravidade e do elevador;
- b. quanto registrará a balança se o elevador subir ou descer com velocidade constante.

31 Em um andar equidistante dos extremos de um edifício, uma pessoa de massa $m = 100 \text{ kg}$ toma um elevador, que passa a se mover verticalmente para cima. O gráfico mostra como varia a velocidade escalar do elevador em função do tempo. Sabe-se que o peso aparente da pessoa na etapa *AO* do gráfico vale 1.100 N e que no local $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine:



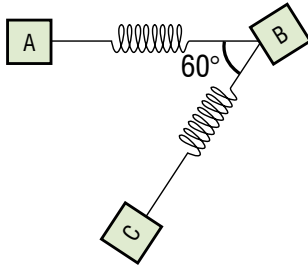
- a. a altura do edifício, se no instante $t = 20 \text{ s}$ o elevador parou na extremidade superior do mesmo;
- b. a intensidade do peso aparente da pessoa no trecho *BC* do gráfico.

32 A figura representa, vista de cima, uma mesa horizontal onde um corpo desliza sem atrito. O trecho *AB* é percorrido em 10 s, com velocidade constante de 3,0 m/s. Ao atingir o ponto *B* aplica-se ao corpo uma força horizontal \vec{F} , de módulo e direção constantes, perpendicular a *AB*, que produz uma aceleração de 0,40 m/s². Decorridos outros 10 s, o corpo encontra-se no ponto *C*, quando então a força cessa. O corpo move-se por mais 10 s até o ponto *D*.



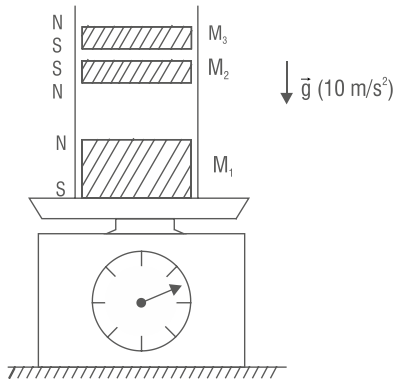
- a. Faça um esboço da trajetória *ABCD*.
- b. Com que velocidade o corpo atinge o ponto *D*?

33 (ITA-78) Três corpos A, B e C, com massas respectivamente iguais a 4,0 kg, 6,0 kg e 8,0 kg, acham-se apoiados sobre uma superfície horizontal, sem atrito. Estes corpos acham-se ligados por intermédio de molas de massas desprezíveis, e são abandonados a partir da posição indicada na figura, quando as tensões nas molas AB e BC forem respectivamente $1,00 \times 10$ N e $1,50 \times 10$ N. Pode-se afirmar que as acelerações “ a_{AB} ” (do sistema constituído pelos corpos A e B) e “ a ” (do sistema constituído pelos três corpos A, B e C) serão dadas por:



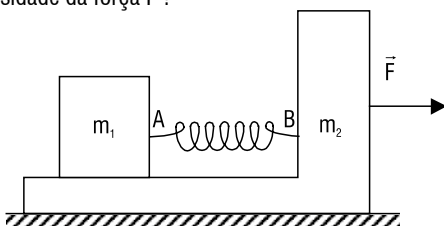
- (A) $a_{AB} = 1,75$ m/s², $a = 0,97$ m/s².
- (B) $a_{AB} = 1,5$ m/s², $a = 0$.
- (C) $a_{AB} = 1$ m/s², $a = 0,81$ m/s².
- (D) $a_{AB} = 1,75$ m/s², $a = 0,81$ m/s².
- (E) $a_{AB} = 1$ m/s², $a = 0,97$ m/s².

34 Um tubo de vidro de massa $m = 30$ g está sobre uma balança. Na parte inferior do vidro está um ímã cilíndrico de massa $M_1 = 90$ g. Dois outros pequenos ímãs de massas $M_2 = M_3 = 30$ g são colocados no tubo e ficam suspensos devido às forças magnéticas e aos seus pesos.

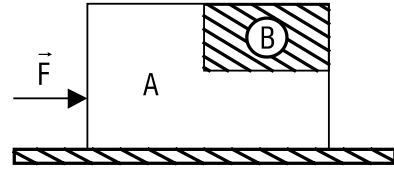


- a. Qual a orientação e qual o módulo (em newtons) da resultante das forças magnéticas que agem sobre o ímã 2?
- b. Qual a indicação da balança em grammas?

35 (EN-94) Os blocos representados na figura abaixo possuem, respectivamente, massas $m_1 = 2,0$ kg e $m_2 = 4,0$ kg; a mola AB possui massa desprezível e constante elástica $K = 50$ N/m. Não há atrito entre os dois blocos nem entre o bloco maior e o plano horizontal. Aplicando-se ao conjunto a força \vec{F} constante e horizontal, verifica-se que a mola experimenta uma deformação de 20 cm. Qual a aceleração do conjunto qual a intensidade da força \vec{F} ?

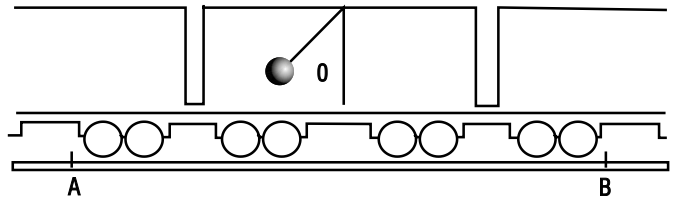


36 A figura esquematiza dois blocos A e B de massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 3,0 kg em movimento sobre solo plano e horizontal. O bloco B está simplesmente apoiado em uma reentrância existente no bloco A, não havendo atrito entre B e A. Admitindo que a intensidade da força horizontal \vec{F} que acelera o conjunto é 120 N e que $g = 10$ m/s²:



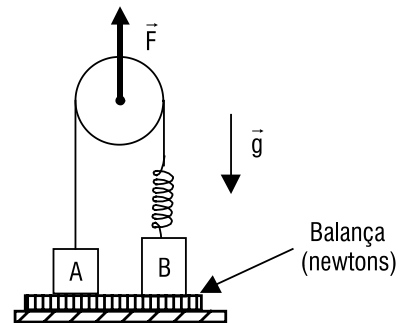
- a. faça um esquema representando as forças que agem no bloco A;
- b. calcule o módulo da força que A exerce sobre B.

37 No teto de um vagão ferroviário prende-se uma esfera de aço por meio de um fio leve e inextensível. Durante um trecho retilíneo e horizontal da ferrovia, o fio mantém-se na posição indicada, formando com a vertical um ângulo $\theta = 45^\circ$. No local, adota-se $g = 10$ m/s². Sendo \vec{v} a velocidade vetorial do trem e \vec{a} sua aceleração, responda:



- a. Qual a orientação de \vec{a} , de A para B ou de B para A?
- b. Qual a intensidade de \vec{a} ?
- c. Qual a orientação de \vec{v} , de A para B ou de B para A?

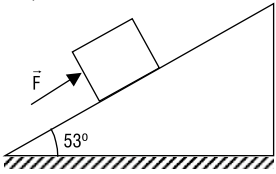
38 Na figura seguinte, os pesos da polia, do fio e da mola são desprezíveis e assume-se $g = 10$ m/s². Sendo as massas de A e B, $m_A = 40$ kg e $m_B = 24$ kg, a deformação da mola de 50 cm e a intensidade de \vec{F} igual a 720 N, determine:



- a. a constante elástica da mola em N/m.
- b. o módulo das acelerações de A, de B e do eixo da polia.
- c. a indicação da balança sobre a qual repousam, inicialmente, os dois blocos.

39 Um bloco pesando 100 N deve permanecer em repouso sobre um plano inclinado, que faz com a horizontal um ângulo de 53° . Para tanto, aplica-se ao bloco a força \vec{F} , representada na figura, paralela à rampa: Sendo $\mu_e = 0,50$ o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano, que valores são admissíveis para \vec{F} tais que a condição do problema seja satisfeita? (Dados: $\sin 53^\circ = 0,80$ e $\cos 53^\circ = 0,60$.)

Bloco em repouso



40 Uma caixa de peso P é puxada por uma força F sobre o solo horizontal. Se o coeficiente de atrito estático é μ e F está direcionada a um ângulo θ abaixo da horizontal, qual o valor mínimo de F que vai mover a caixa?

- (A) $\frac{\mu P \sec \theta}{1 - \mu \tan \theta}$
- (B) $\frac{\mu P \sec \theta}{1 - \mu \cos \theta}$
- (C) $\frac{\mu P \sec \theta}{1 - \mu \cos \theta}$
- (D) $\frac{\mu P \cos \theta}{1 - \mu \tan \theta}$
- (E) $\frac{\mu P \cos \theta}{1 - \mu \cos \theta}$

41 (AFA-97)

- I. Um objeto é acelerado não somente quando sua velocidade escalar varia, mas também quando seu vetor velocidade muda de direção.
- II. Para descrever completamente o movimento de um objeto basta conhecer como varia sua velocidade escalar com o tempo.
- III. Um corpo pode ter velocidade escalar nula e estar submetido a uma aceleração tangencial nula.
- IV. Na expressão da 2ª Lei de Newton, a massa m é chamada massa gravitacional.

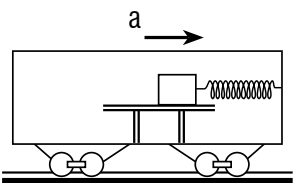
Das afirmações acima, são verdadeiras:

- (A) I e II.
- (B) I e III.
- (C) I, II e IV.
- (D) I, III e IV.

42 (AFA-98) Um bloco de massa m repousa sobre o piso de um elevador. Quando o elevador sobe com aceleração $a = 2,0 \text{ m/s}^2$, a reação do piso sobre o bloco é N . Quando desce com a mesma aceleração, a reação é N_1 . Considerando-se $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, a razão N_1/N é:

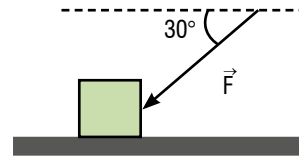
- (A) 1/5.
- (B) 2/3.
- (C) 3/2.
- (D) 5.

43 (AFA-99) A figura abaixo representa um vagão se movendo sobre trilhos, retilíneos e horizontais, com aceleração constante igual a $3,0 \text{ m/s}^2$. No interior do vagão, existe uma mesa de tampo horizontal e sobre ela está colocado um corpo preso à parede dianteira do vagão por meio de uma mola de constante elástica desconhecida. Sabe-se que a massa do corpo é $2,0 \text{ kg}$ e que está em repouso, em relação ao vagão, e que a mola está distendida $4,0 \text{ cm}$, em relação ao seu comprimento normal. Pode-se afirmar que a constante elástica da mola, em N/cm , é:



- (A) 1,5.
- (B) 3.
- (C) 4,5.
- (D) 6

44 (AFA-99) Um bloco de 20 kg é empurrado sobre um assoalho horizontal por uma força F que faz um ângulo de 30° com a horizontal, conforme mostra a figura abaixo. O coeficiente de atrito entre o bloco e o assoalho é $0,25$. O valor da força F , em newtons, necessária para colocar o bloco na iminência de deslizar é, aproximadamente:



- (A) 35,1.
- (B) 46,2.
- (C) 54,0.
- (D) 68,0.

45 (AFA-00) Um automóvel com o motorista e um passageiro move-se em movimento retilíneo uniforme. Repentinamente, o motorista faz uma curva para a esquerda, e o passageiro é deslocado para a direita. O fato relatado pode ser explicado pelo princípio da:

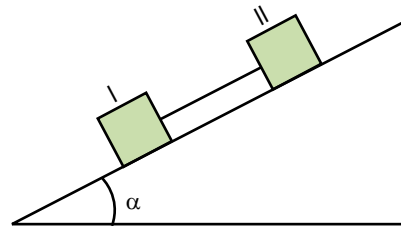
- (A) inércia.
- (B) ação e reação.
- (C) conservação da energia.
- (D) conservação do momento angular.

46 (AFA-02) Um avião reboca dois planadores idênticos de massa m , com velocidade constante. A tensão no cabo (II) é T . De repente o avião desenvolve uma aceleração a . Considerando a força de resistência do ar invariável, a tensão no cabo (I) passa a ser



- (A) $T + ma$.
- (B) $T + 2ma$.
- (C) $2T + 2ma$.
- (D) $2T + ma$.

47 (AFA-2002) Dois corpos de massas iguais, unidos por um fio inextensível, descem ao longo de um plano inclinado. Não há atrito entre o corpo I e o plano. De acordo com o enunciado, analise as afirmativas abaixo.



- I. Se não houver atrito entre o corpo II e o plano, a tensão no fio é nula.
- II. Se houver atrito entre o corpo II e o plano, a aceleração do corpo II é menor que a do corpo I.
- III. Se houver atrito entre o corpo II e o plano, o movimento do corpo I será retardado.

Assinale a alternativa que contém apenas afirmativa(s) **incorreta(s)**:

- (A) II.
- (B) I e III.
- (C) II e III.
- (D) I, II, e III.

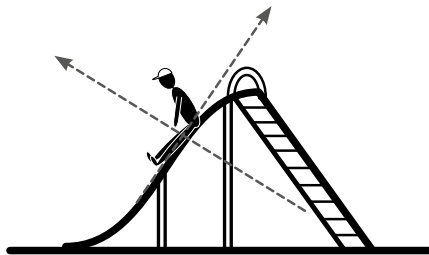
48 (AFA-03) Um automóvel desloca-se em uma estrada horizontal com velocidade constante de 30 m/s. Em um dado instante o carro é freado e, até parar, desliza sobre a estrada em uma distância de 75 m. O coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada vale:

- (A) 0,3. (C) 0,5.
(B) 0,4. (D) 0,6.

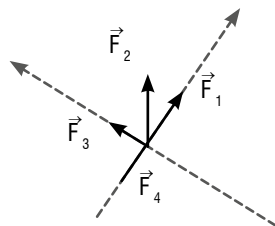
49 (AFA-03-Feminino) Durante um intervalo de tempo de 4,0 s, atua uma força constante sobre um corpo de massa 8,0 kg que está inicialmente em movimento retilíneo com velocidade escalar de 9,0 m/s. Sabendo-se que no fim desse intervalo de tempo a velocidade do corpo passa a ser de 6,0 m/s na direção e sentido do movimento original, a força que atuou sobre ele foi de:

- (A) 3,0 N no sentido do movimento original.
(B) 12,0 N no sentido do movimento original.
(C) 24,0 N em sentido contrário ao movimento original.
(D) 6,0 N em sentido contrário ao movimento original.

50 (AFA-03-Feminino) Uma criança desliza com velocidade constante sobre um escorregador, conforme indica a figura.

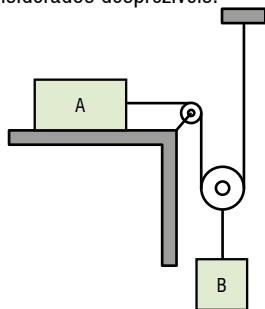


A força total que o escorregador exerce sobre a criança é mais bem representada por:



- (A) F_1 . (C) F_3 .
(B) F_2 . (D) F_4 .

51 (AFA-03-Feminino) Os corpos A e B da figura abaixo têm massas M e m , respectivamente. Os fios são ideais. A massa da polia e todos os atritos podem ser considerados desprezíveis.



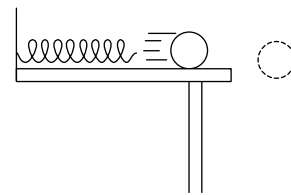
A aceleração de B é:

- (A) $2mg/(4M + m)$. (C) $2Mg/(M + m)$.
(B) $mg/(M + m)$. (D) $mg/(4M + m)$.

52 (AFA-03-Feminino) O atletismo, na modalidade salto em altura, apresenta um jogo de forças atuantes imediatamente antes de o atleta perder o contato com o solo, no início do salto. Forças essas que são o peso do atleta, de módulo P , a força exercida pelos pés do atleta sobre o solo, de módulo F_1 , e a força exercida pelo solo sobre seus pés, de módulo F_2 . Imediatamente antes do salto, pode-se afirmar que

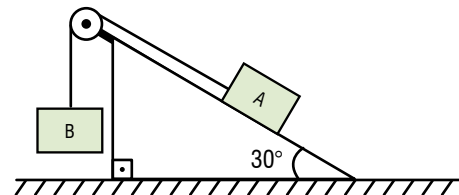
- (A) $F_1 = F_2 = P$. (C) $F_1 = F_2 > P$.
(B) $P = F_1 < F_2$. (D) $P = F_1 > F_2$.

53 (AFA-03-Feminino) Uma mola impulsiona uma esfera, projetando-a horizontalmente para fora de uma mesa. Desprezando-se a resistência do ar, o esquema que representa corretamente a(s) força(s) atuante(s) sobre a esfera fora do plano da mesa é:



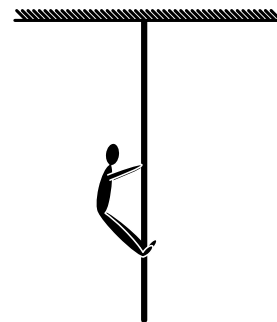
- (A) (C)
(B) (D)

54 (AFA-04) A figura apresenta um plano inclinado no qual está fixa uma polia ideal. O fio também é ideal e não há atrito. Sabendo-se que os blocos A e B têm massas iguais, o módulo da aceleração de B é:



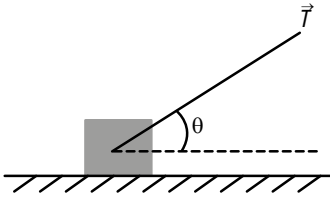
- (A) $2,5 \text{ m/s}^2$. (C) $5,0 \text{ m/s}^2$.
(B) $4,0 \text{ m/s}^2$. (D) $7,5 \text{ m/s}^2$.

55 (AFA-04) Um homem de massa 70 kg está subindo por um fio ideal com aceleração igual a $0,50 \text{ m/s}^2$. Nessas condições, a intensidade da tração, em newtons, no fio, vale:



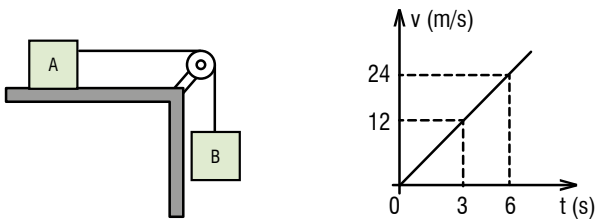
- (A) 350. (C) 700.
(B) 665. (D) 735.

56 (AFA-04) Um bloco de massa m é arrastado, à velocidade constante, sobre uma superfície horizontal por uma força aplicada a uma corda, conforme o esquema da figura abaixo. Sendo μ o coeficiente de atrito entre as superfícies, o módulo da força de atrito é:



- (A) $\mu(T - mg)$. (C) $T \cos \theta$.
 (B) $\mu(mg + T \sin \theta)$. (D) $T \sin \theta$.

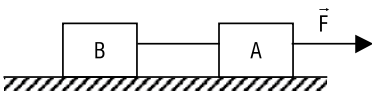
57 (AFA-05) O conjunto abaixo, constituído de fio e polia ideais, é abandonado do repouso no instante $t = 0$ e a velocidade do corpo A varia em função do tempo segundo o gráfico dado.



Desprezando o atrito, a razão entre a massa de A e a massa de B é:

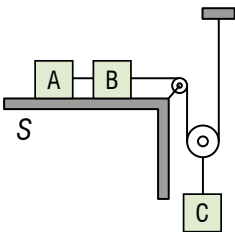
- (A) 1/2. (C) 3/2.
 (B) 2/3. (D) 2.

58 (AFA-06) Os blocos A e B, de massas iguais a 2 kg e 3 kg, respectivamente, ligados por um fio ideal, formam um sistema que, submetido à ação de uma força constante F de intensidade 15 N, desloca-se com aceleração de 1 m/s^2 , conforme a figura abaixo. Se a tração no fio que liga os blocos durante o deslocamento é de 9 N, pode-se afirmar que a razão entre os coeficientes de atrito dos blocos A e B com a superfície vale:



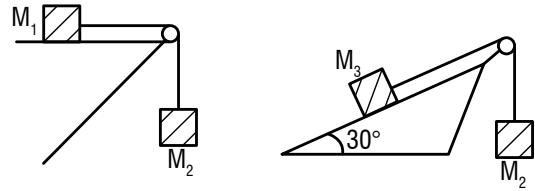
- (A) 1/3. (C) 3/2.
 (B) 2/3. (D) 1.

59 (AFA-07) Três blocos, cujas massas $m_A = m_B = m$ e $m_C = 2m$, são ligados através de fios e polias ideais, conforme a figura. Sabendo-se que C desce com uma aceleração de 1 m/s^2 e que 0,2 é o coeficiente de atrito entre B e a superfície S, pode-se afirmar que o coeficiente de atrito entre A e S vale:



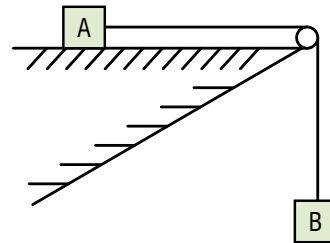
- (A) 0,1. (C) 0,3.
 (B) 0,2. (D) 0,4.

60 (EN-98) Sejam a_1 e a_3 os módulos das acelerações dos blocos de massa M_1 e M_3 , respectivamente. Encontre a relação entre a_1 e a_3 , sabendo-se que $M_1 = M_3 = M_2/3$. Despreze todos os atritos e as massas das roldanas.



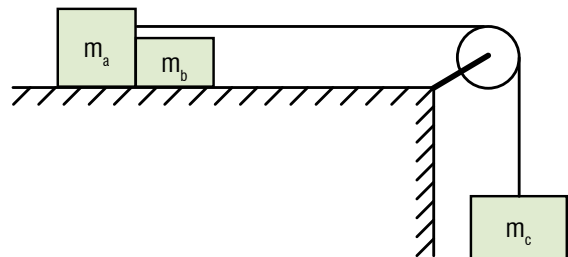
- (A) $a_1 = 6a_3/5$
 (B) $a_1 = 5a_3/6$
 (C) $a_1 = 2a_3/3$
 (D) $a_1 = 4a_3/5$
 (E) $a_1 = 3a_3/2$

61 (EN-99) Dois blocos de massas $M_A = 10 \text{ kg}$ e $M_B = 2 \text{ kg}$ estão interligados, na proa de um navio em repouso, por um fio que passa por uma polia, conforme indica a figura (considere o fio e a polia como ideais). Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco A e a superfície horizontal valem, respectivamente, 0,4 e 0,3. Sabendo-se que os blocos estavam inicialmente em repouso, o valor da força de atrito que atua no bloco A é de: Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.



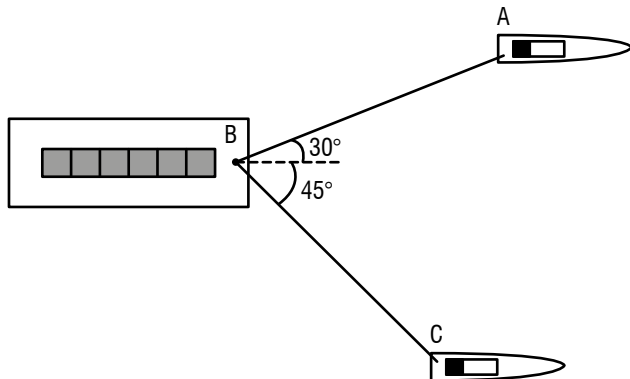
- (A) 10 N. (D) 40N.
 (B) 15N. (E) 50N.
 (C) 20N.

62 (EN-01) Na experiência esquematizada abaixo, o fio e a polia são ideais e sabe-se que os coeficientes de atrito cinético entre as massas m_a e m_b e o plano de apoio são 0,20 e 0,10, respectivamente. O conjunto é liberado a partir do repouso e observa-se que a massa m_c desce 50 cm no primeiro segundo. Se $m_a = 1,0 \text{ kg}$ e $m_c = 2,0 \text{ kg}$, o valor de m_b é, em kg: Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- (A) 1,5. (C) 5,5.
 (B) 3,0. (D) 7,5.

63 (EFOMM-98) Uma balsa B carregada desliza em um determinado trecho de um rio puxada por dois rebocadores A e C, conforme a figura abaixo. A força que atua no cabo AB que liga a balsa ao rebocador A é de 20 kN e a resultante das duas forças aplicadas em B é dirigida ao longo do eixo da balsa. A força que atua no cabo BC que liga a balsa ao rebocador C e a intensidade da resultante das duas forças aplicadas são, respectivamente, em kN:



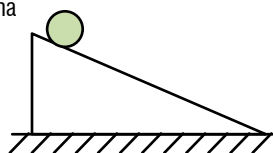
- (A) $20\sqrt{3}$ e $15(\sqrt{2} + 1)$.
- (B) $15\sqrt{2}$ e $15(\sqrt{3} + 1)$.
- (C) $10\sqrt{2}$ e $10(\sqrt{2} + 1)$.
- (D) $10\sqrt{3}$ e $15(\sqrt{2} + 1)$.
- (E) $25\sqrt{3}$ e $20(\sqrt{2} + 1)$.

64 (EFOMM-98) Um homem que sabe que seu peso é de 75 Kgf, é encerrado em um elevador de um edifício. O elevador não tem janelas e seu funcionamento é perfeitamente silencioso. Ele sobe em uma balança de molas que se encontra dentro do elevador e nota que ela, durante certo período, acusa 85 Kgf. Desta observação o viajante do elevador pode concluir que o elevador neste período:

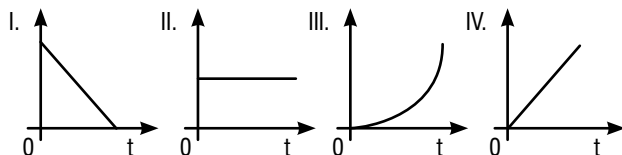
- (A) Está subindo e o valor de sua velocidade está diminuindo.
- (B) Está subindo e o valor de sua velocidade é constante.
- (C) Está subindo e o valor de sua velocidade está crescendo.
- (D) Está descendo e o valor de sua velocidade é constante
- (E) Pode estar subindo e neste caso o valor de sua velocidade está aumentando ou pode estar descendo e neste caso o valor de sua velocidade está diminuindo.

65 (EFOMM-00) Considere o movimento de uma esfera abandonada no instante $t = 0$ em um plano inclinado. Analise, a seguir, a sequência de gráficos, abaixo do diagrama:

Diagrama



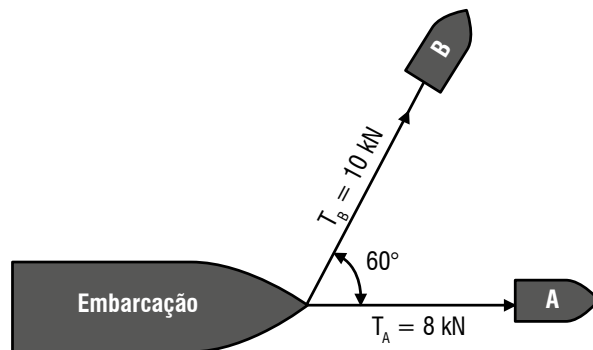
Gráficos



O par de gráficos que melhor representa, respectivamente a velocidade (em módulo) e a distância percorrida está na opção:

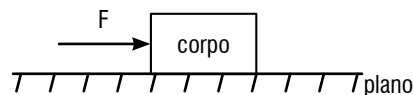
- (A) III e II.
- (B) I e IV.
- (C) IV e III.
- (D) II e IV.
- (E) I e II.

66 (EFOMM-01) Em uma manobra de atracação, uma embarcação é auxiliada por dois rebocadores A e B. A força de tração que cada rebocador transmite através do cabo de reboque para o navio, é, respectivamente, $T_a = 8$ kN e $T_b = 10$ kN. O mar está tranquilo, o motor da embarcação não está atuando, não há vento nem correntes. A resultante dessas forças que atuam sobre o navio é de:



- (A) 19,87 kN.
- (B) 16,34 kN.
- (C) 15,62 kN.
- (D) 14,32 kN.
- (E) 11,38 kN.

67 (EFOMM-04) Aplica-se em um corpo em repouso, apoiado em um plano horizontal, uma força F paralela ao plano; o corpo continua em repouso. A respeito da força de atrito entre o corpo e a superfície do plano, podemos afirmar que ela é:



- (A) maior do que F.
- (B) menor do que F.
- (C) igual a zero.
- (D) a metade de F.
- (E) igual a F.

68 (EFOMM-06) Aplica-se força de 200 N a um corpo de massa 25 kg, em plano horizontal com atrito; verifica-se, em laboratório, que sua velocidade aumenta de 18 km/h para 27 km/h em 0,4 s. O coeficiente de atrito dinâmico entre o corpo e a superfície do plano horizontal é:

- (A) 0,125.
- (B) 0,175.
- (C) 0,225.
- (D) 0,275.
- (E) 0,325.

69 (EFOMM-07) Um marinheiro precisa deslocar uma caixa de massa 204,6 kg que está sobre o convés, fazendo-o em linha reta. O coeficiente de atrito estático entre o piso do convés e a caixa vale 0,45. A menor força, em Newtons, que o marinheiro terá que fazer para deslocar a caixa é:

- (A) $1,5 \cdot 10^2$.
- (B) $1,6 \cdot 10^2$.
- (C) $1,2 \cdot 10^3$.
- (D) $1,5 \cdot 10^3$.
- (E) $1,8 \cdot 10^3$.

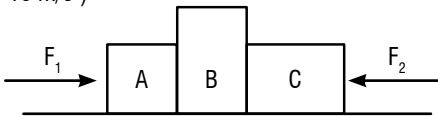
70 (EFOMM-08) Analise as afirmativas abaixo.

- I. A segunda lei de Newton estabelece que a força resultante aplicada pode ser avaliada pela respectiva variação da quantidade de movimento, no tempo.
- II. A força que desloca um nadador em uma piscina é um exemplo típico de aplicação da terceira lei de Newton.
- III. A força de atrito permanece com valor fixo, independentemente da força aplicada ao corpo, enquanto não houver deslocamento.
- IV. O que permite a um automóvel realizar uma curva é o fato de a resultante centrípeta ser a própria força de atrito.

Assinale a alternativa correta:

- (A) As afirmativas I e III são verdadeiras.
- (B) As afirmativas II e III são verdadeiras.
- (C) As afirmativas I, II e IV são verdadeiras.
- (D) As afirmativas III e IV são verdadeiras.
- (E) Apenas a afirmativa IV é verdadeira.

71 (EFOMM-09) Três blocos A, B e C encontram-se agrupados e sob a ação das forças $F_1 = 100 \text{ N}$ e $F_2 = 50 \text{ N}$, conforme desenho abaixo, deslizando em superfície na qual o coeficiente de atrito é $\mu = 0,1$. Sabendo que as massas desses blocos são, respectivamente, 5, 10 e 5 kg, a aceleração do sistema é de:
(Dado : $g = 10 \text{ m/s}^2$)

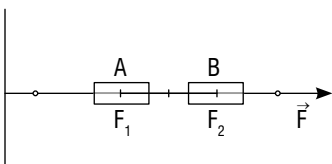


- (A) 0.
- (B) $1,5 \text{ m/s}^2$, para a direita.
- (C) $1,5 \text{ m/s}^2$, para a esquerda.
- (D) 3 m/s^2 , para a direita.
- (E) 3 m/s^2 , para a esquerda.

72 (EFOMM-10) No convés de um navio, um marinheiro apoia uma caixa de massa 20 kg sobre um plano inclinado de 60° , aplicando uma força F de módulo igual a 100 N paralela à superfície inclinada do plano, orientada para cima. Nessas condições, ele observa que a caixa está na iminência de descer o plano inclinado. Para que a caixa fique na iminência de subir o plano inclinado, ele deve alterar o módulo da força F para:

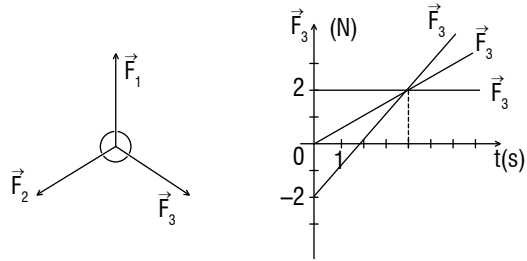
- (A) 100 N .
- (B) 140 N .
- (C) 180 N .
- (D) 200 N .
- (E) 240 N .

73 (ITA-70) Dois dinamômetros, A e B, estão ligados como mostra a figura. Sejam F_1 e F_2 as leituras nos dinamômetros A e B, respectivamente, quando se aplica uma força F na extremidade livre do dinamômetro B. Valem as seguintes relações:



- (A) $F = F_1 + F_2 = 2 F_1$.
- (B) $F = F_1 + F_2 = 3 F_2$.
- (C) $F = F_2 = 2 F_1$.
- (D) $F = F_1 = F_2$.
- (E) $F = F_1 = 2 F_2$.

74 (ITA-1972) Três forças de direções constantes são aplicadas em um ponto material de massa $m = 2,0 \text{ kg}$, formando os ângulos da figura (A), todos iguais entre si. Essas forças variam linearmente com o tempo na forma indicada no gráfico (B). (Os sentidos indicados em (A) são considerados como os sentidos positivos das forças). No instante $t = 4 \text{ s}$ o módulo da resultante vale:



- (A) 6 N.
- (B) 4 N.
- (C) 2 N.
- (D) 0 N.
- (E) 3 N.

75 (ITA-1972) Na questão anterior, o módulo da aceleração do ponto para $t = 0$, vale:

- (A) 0 m/s^2 .
- (B) $\sqrt{3} \text{ m/s}^2$.
- (C) $\sqrt{2} \text{ m/s}^2$.
- (D) 2 m/s^2 .
- (E) 3 m/s^2 .

76 (ITA-1977) Um corpo cai na água e, após alguns segundos, atinge uma velocidade praticamente constante (chamada velocidade limite) de $5,0 \text{ m/s}$. Sabendo-se que:

- a massa do corpo é 8 g ;
- a força exercida pela água sobre o corpo é dissipativa, oposta ao movimento do corpo e proporcional à velocidade do mesmo, isto é $\vec{F} = -a_v \cdot v$;
- quando o corpo atinge a velocidade limite a força total sobre o corpo é nula;

Calcule o coeficiente a , que será:

- (A) 16 N s/m
- (B) $1,6 \times 10^{-2} \text{ kg/s}$
- (C) $1,6 \times 10^{-3} \text{ kgf/s}$
- (D) $1,6 \times 10^{-3} \text{ N s/m}$
- (E) Nenhum dos valores acima.

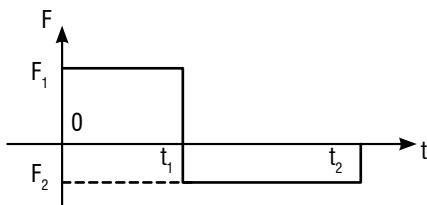
77 (ITA-1988) Uma pessoa de massa m_1 encontra-se no interior de um elevador de massa m_2 . Quando na ascensão, o sistema encontra-se submetido a uma força intensidade $F_{\text{resultante}}$ e o assoalho do elevador atua sobre a pessoa com uma força de contato dada por:

$$F = F_{\text{resultante}}$$

- (A) $\frac{m_1 F}{m_1 + m_2} + m_1 g$.
- (B) $\frac{m_1 F}{m_1 + m_2} - m_1 g$.
- (C) $\frac{m_1 F}{m_1 + m_2}$.
- (D) $\frac{(m_1 + m_2)}{m_2} F$.
- (E) $\frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

78 (ITA-1995) A figura mostra o gráfico da força resultante agindo em uma partícula de massa m , inicialmente em repouso. No instante t_2 a velocidade da partícula, V_2 será:



- (A) $V_2 = [(F_1 + F_2) t_1 - F_2 t_2] / m$
- (B) $V_2 = [(F_1 - F_2) t_1 - F_2 t_2] / m$
- (C) $V_2 = [(F_1 - F_2) t_1 + F_2 t_2] / m$
- (D) $V_2 = (F_1 t_1 - F_2 t_2) / m$
- (E) $V_2 = [(t_2 - t_1) (F_1 - F_2)] / 2m$

79 (ITA-1996) No campeonato mundial de arco e flecha dois concorrentes discutem sobre a Física que está contida na arte do arqueiro. Surge então a seguinte dúvida: quando o arco está esticado, no momento do lançamento da flecha, a força exercida sobre a corda pela mão do arqueiro é igual a:

- I. força exercida pela outra mão sobre a madeira do arco;
- II. tensão da corda;
- III. força exercida sobre a flecha pela corda no momento em que o arqueiro larga a corda;

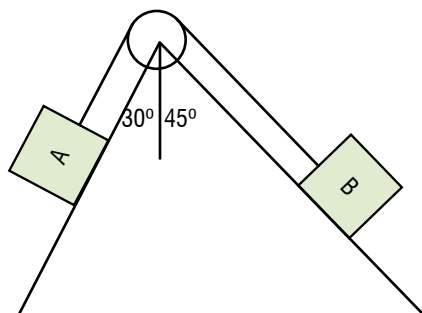
Neste caso:

- (A) Todas as afirmativas são verdadeiras.
- (B) Todas as afirmativas são falsas.
- (C) Somente I e III são verdadeiras.
- (D) Somente I e II são verdadeiras.
- (E) Somente II é verdadeira.

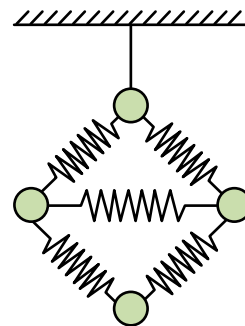
80 (ITA-1996) Um corpo de massa M é lançado com velocidade inicial V formando com a horizontal um ângulo α , em um local onde a aceleração da gravidade é g . Suponha que o vento atue de forma favorável sobre o corpo durante todo o tempo (ajudando a ir mais longe), com uma força F horizontal constante. Considere t como sendo o tempo total de permanência no ar. Nessas condições, o alcance do corpo é:

- (A) $v_2/g \cdot (\text{sen } 2\alpha)/g$.
- (B) $2v t + F \cdot t^2/2m$.
- (C) $v^2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot [1 + (F \cdot \text{tg} \alpha)/Mg] / g$.
- (D) vt .
- (E) Outra expressão diferente das mencionadas.

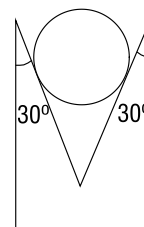
81 (IME-1978) Os blocos A e B da figura têm pesos iguais. Determine o coeficiente de atrito mínimo para manter o sistema em equilíbrio. Despreze o peso da corda e o atrito na roldana.



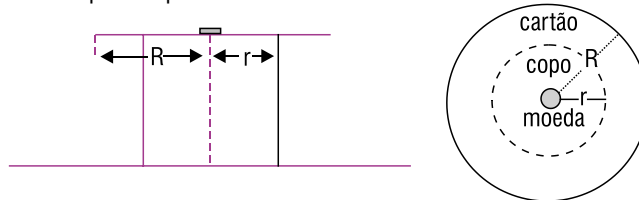
01 Um sistema composto por quatro bolas iguais, conectadas entre si por cinco molas ideais idênticas, está pendurado ao teto como mostra a figura. Determine as acelerações de cada bola logo após o fio ter sido cortado.



02 Qual é a força horizontal capaz de tornar iminente o deslizamento do cilindro, de 50 kgf de peso, ao longo do apoio em V, mostrado na figura? O coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o apoio vale 0,25.

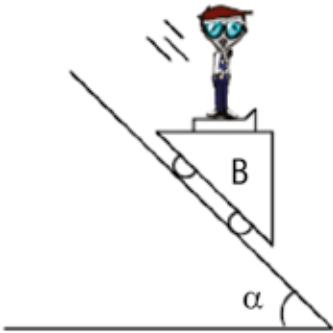


03 (OBF) A boca de um copo é coberta com um cartão circular, e sobre o cartão coloca-se uma moeda (vide figura a seguir). Os centros do cartão e da moeda são coincidentes com o centro da boca do copo. Considere como dados deste problema: o raio do cartão, R , o raio da boca do copo, r , e o coeficiente de atrito entre a moeda e o cartão, μ . O raio da moeda pode ser desprezado. Move-se o cartão horizontalmente, em trajetória retilínea e com aceleração constante. Qual o valor da menor aceleração do cartão, a_c , para que a moeda ainda caia dentro do copo, quando o cartão é retirado por completo.



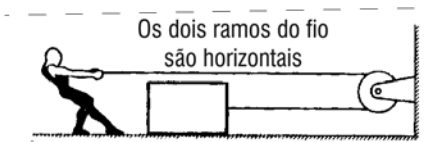
- (A) $\frac{\alpha g R}{r}$.
- (B) $\frac{\mu g r}{(R + r)}$.
- (C) $\mu g (R - r)$.
- (D) $\frac{\mu g (R + r)}{r}$.
- (E) $\frac{\mu g R}{(R - r)}$.

04 Uma criança, de massa $m = 50$ kg, está sobre uma balança de molas, a qual está fixa em um carrinho B que desce por uma rampa sem atrito, como mostra a figura. São dados: $g = 10$ m/s² e $\sin \alpha = 0,20$. A marcação da balança, supondo que seu mostrador esteja calibrado em Newtons, vale:



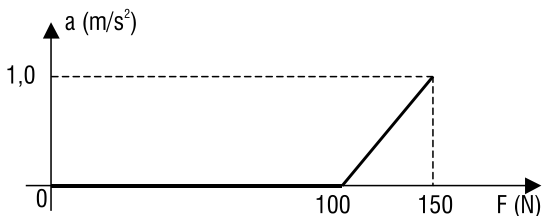
- (A) 450 N.
- (B) 400 N.
- (C) 350 N.
- (D) 480 N.
- (E) 300 N.

05 No arranjo experimental da figura, o homem puxa a corda para a esquerda e, com isso, consegue acelerar horizontalmente a caixa para a direita:



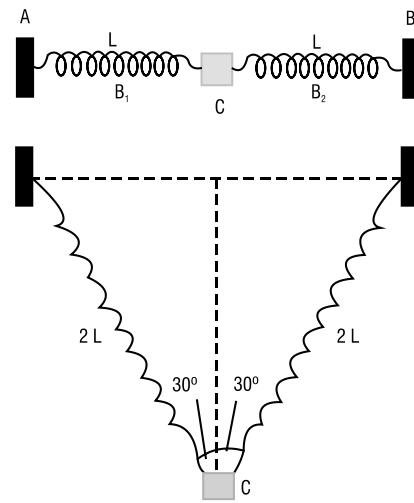
O módulo da aceleração da caixa varia com a intensidade da força que o homem aplica na corda, conforme o gráfico seguinte:

Admitindo que o fio e a polia sejam ideais e desprezando a resistência do ar:



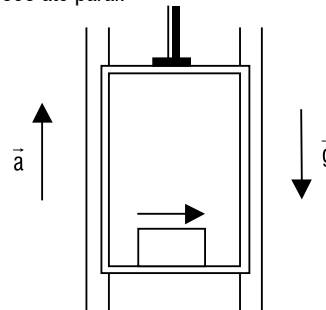
- a. esboce o gráfico da intensidade da força de atrito recebida pelo bloco em função da intensidade da força exercida pelo homem na corda.
- b. calcule a massa do bloco e o coeficiente de atrito entre ele e o plano de apoio.

06 (OBF) Duas molas S_1 e S_2 de comprimentos livres iguais, $L = 0,5$ m, mas de constantes elásticas diferentes $K_1 = 50$ N/m e $K_2 = 100$ N/m, estão unidas e fixadas entre dois suportes A e B separados de uma distância $2L$, como mostra a figura a seguir. Na união destas molas é colocado um bloco C de massa $m = 2,5$ kg. Este bloco é deslocado verticalmente até duplicar o comprimento das duas molas. Os ângulos que as molas fazem com a vertical, nesta posição, são iguais a 30° . O bloco C é solto. Qual é o módulo da aceleração inicial do bloco C ? (O problema se passa em um plano vertical. Dados: $\sqrt{3} = 1,7$ e $g = 10$ m/s².)

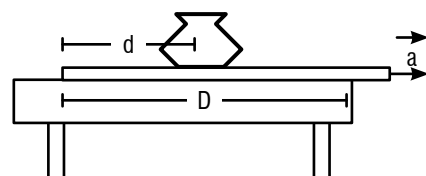


- (A) 16,3 m/s².
- (B) 15,5 m/s².
- (C) 5 m/s².
- (D) 20,5 m/s².
- (E) 20,0 m/s².

07 Um elevador é acelerado verticalmente para cima com $6,0$ m/s², em um local em que $g = 10$ m/s². Sobre o seu piso horizontal é lançado um bloco, sendo-lhe comunicada uma velocidade inicial de $2,0$ m/s. O bloco é freado pela força de atrito exercida pelo piso até parar em relação ao elevador. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies atritantes vale $0,25$, calcule, em relação ao elevador, a distância percorrida pelo bloco até parar.



08 (ITA-97) Um antigo vaso chinês está a uma distância d da extremidade de um forro sobre uma mesa. Essa extremidade, por sua vez, encontra-se a uma distância D de uma das bordas da mesa, como mostrado na figura. Inicialmente tudo está em repouso. Você apostou que consegue puxar o forro com uma aceleração constante a (veja figura), de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, entre o vaso e o forro tenham o valor μ e que o vaso pare no momento que tocar a mesa. Você ganhará a aposta se a magnitude da aceleração estiver dentro da faixa:



- (A) $a < d \cdot \mu \cdot g/D$.
- (B) $a > d \cdot \mu \cdot g/D$.
- (C) $a > \mu \cdot g$.
- (D) $a > D \cdot \mu \cdot g/d$.
- (E) $a > D \cdot \mu \cdot g/(D - d)$.

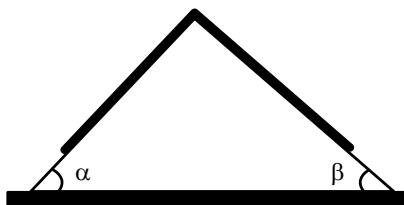
09 Um anel homogêneo de raio R é posto a girar em torno do seu centro até adquirir uma velocidade angular ω . Em seguida, o anel em rotação na posição horizontal é abandonado sobre a superfície de uma mesa, com a qual apresenta um coeficiente de atrito cinético igual a μ . Quanto tempo o anel levará até parar completamente? A gravidade no local é g .

- (A) $2\omega R\mu/g$.
- (B) $\omega R/\mu g$.
- (C) $\omega R/2\mu g$.
- (D) $\omega R\mu/g$.
- (E) $\omega R^2\mu/g$.

10 Considere que um pêndulo simples tem um período $T = 1$ s quando oscila em um campo gravitacional uniforme $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se esse pêndulo for fixado ao teto de um vagão que desce livremente uma rampa lisa, inclinada de um ângulo de 60° com a horizontal, oscilará com período, em segundos, igual a:

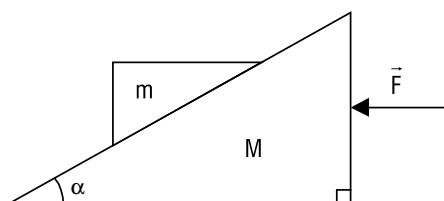
- (A) 1.
- (B) $\sqrt{2}$.
- (C) $\sqrt{2}/2$.
- (D) $\sqrt{3}/2$.
- (E) $\sqrt{3}$.

11 Sobre um prisma triangular se coloca uma corda flexível e homogênea de modo que seu ponto médio fique sobre a aresta superior do prisma. Este se apoia em um plano horizontal perfeitamente liso. Sendo $\alpha < \beta$, determine a aceleração horizontal que deve ser comunicada ao prisma para que a corda permaneça imóvel em relação ao prisma durante seu movimento. A gravidade local vale g .



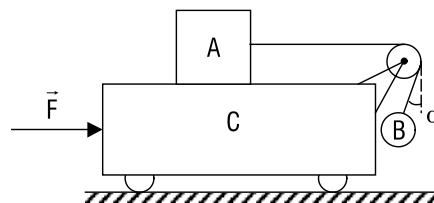
- (A) $g \cdot (\sin\beta - \sin\alpha)$
- (B) $g \cdot \tan\beta/\tan\alpha$.
- (C) $g \cdot \tan(\beta/2 - \alpha/2)$.
- (D) $g/(\cos\beta + \cos\alpha)$.
- (E) $g \cdot \tan(\beta - \alpha)$.

12 (ITA-1982) O plano inclinado da figura tem massa M e sobre ele apoia-se um objeto de massa m . O ângulo de inclinação é α e não há atrito nem entre o plano inclinado e o objeto, nem entre o plano inclinado e o apoio horizontal. Aplica-se uma força \vec{F} horizontal ao plano inclinado e constata-se que o sistema todo move-se horizontalmente, sem que o objeto deslize em relação ao plano inclinado. Podemos afirmar que, sendo g a aceleração da gravidade local:

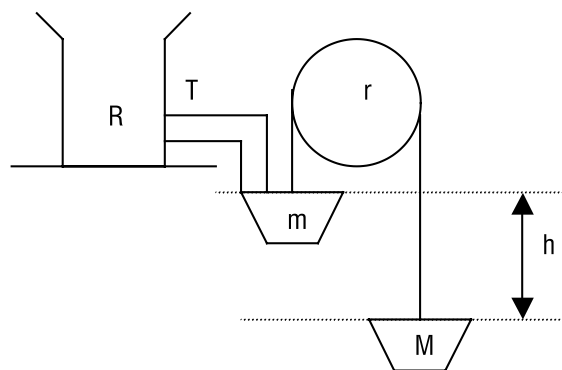


- (A) $F = mg$.
- (B) $F = (M + m)g$.
- (C) F tem que ser infinitamente grande.
- (D) $F = (M + m)g \cdot \tan\alpha$.
- (E) $F = M \cdot g \cdot \sin\alpha$.

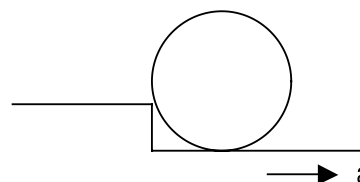
13 No esquema da figura, tem-se o sistema locomovendo-se horizontalmente, sob a ação da resultante externa \vec{F} . A polia tem peso desprezível, o fio que passa pela mesma é ideal e a resistência do ar no local do movimento é irrelevante. Não há contato da esfera B com a parede vertical. Sendo $m_A = 10,0 \text{ kg}$, $m_B = 6,00 \text{ kg}$, $m_C = 144 \text{ kg}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a intensidade de \vec{F} que faz com que não haja movimento dos dois corpos A e B em relação a C .



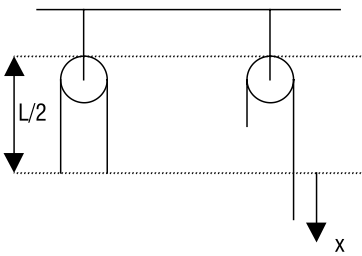
14 (ITA-1989) A figura representa um sistema mecânico com as seguintes características: r é uma roldana de massa desprezível que pode girar sem atrito; B é um balde de massa m e P é um peso de massa M tal que $m = 0,8M$; B e P são ligados por uma corda apoiada em r mas que não escorrega sobre a roldana; R é um reservatório que contém água e uma torneira T que é acionada quando o balde toca nela; o balde por sua vez possui uma válvula que se abre em contato com o solo permitindo a saída de toda a água; o balde cheio tem massa $m_c = 1,2 M$. A amplitude do movimento é $h = 4 \text{ m}$. Sabendo-se que as operações de enchimento e de esvaziamento do balde demoram um tempo de 5 s cada, e que o movimento só se processa com o balde cheio ou vazio, calcule o período completo desse movimento periódico.



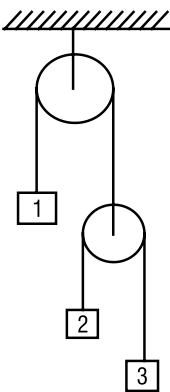
15 (Kösel) Uma tábua horizontal tem um degrau, cuja altura é H , no qual se apoia um cilindro homogêneo de raio $R > H$, que descansa livremente sobre a tábua. A tábua se move na direção horizontal com aceleração a . Determine a aceleração máxima com a qual o cilindro não subirá o degrau. O atrito é desprezível.



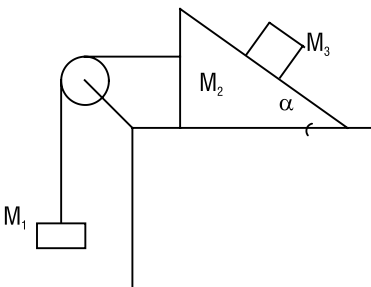
16 Na figura I, a corda homogênea de comprimento L repousa apoiada na polia ideal de dimensões desprezíveis. Um pequeno impulso é dado ao ramo direito da corda e esta põe-se em movimento. Sendo g a gravidade, como varia o módulo da aceleração a da parte direita da corda em função de g , x e L ?



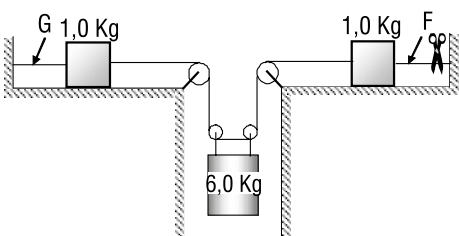
17 Determine as acelerações dos pesos com massas m_1 , m_2 e m_3 e a tensão das cordas no sistema desenhado se $m_1 = m_2 + m_3$. As massas de roldanas e cordas são desprezíveis.



18 Determine as acelerações dos corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 para o sistema mecânico da figura. Não existe atrito e as massas da roldana e da corda são desprezíveis.

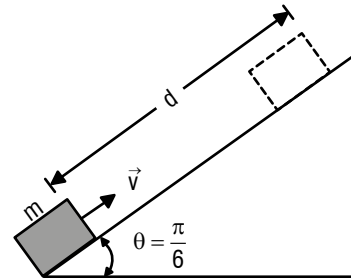


19 (EN-94) O sistema de blocos, fios inextensíveis e roldanas ideais está em repouso na posição mostrada na figura, quando o fio F é repentinamente cortado. Logo após o corte, supondo desprezíveis os atritos e adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, pode-se afirmar que a força de tração no fio G assinalado valerá:



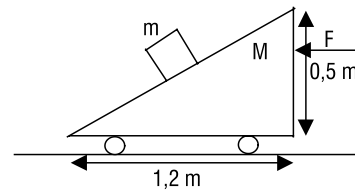
- (A) zero.
- (B) 3 N.
- (C) 12 N.
- (D) 15 N.
- (E) 30 N.

20 (ITA-1986) Da posição mais baixa de um plano inclinado lança-se um bloco de massa $m = 5 \text{ kg}$ com uma velocidade de 4 m/s no sentido ascendente. O bloco retorna a esse ponto com velocidade de 3 m/s . O ângulo do plano inclinado mede 30° . Calcular a distância d percorrida pelo bloco em sua ascensão, sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$.

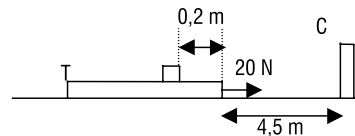


- (A) 0,75 m.
- (B) 1,0 m.
- (C) 1,75 m.
- (D) 2,0 m.
- (E) 1,25 m.

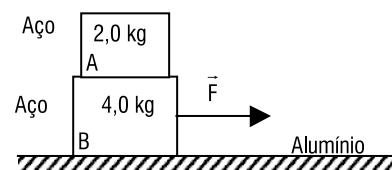
21 (ITA-2003 – adaptada) Sobre a rampa inclinada de um prisma triangular de massa $M = 10 \text{ kg}$, é colocado um pequeno bloco de massa $m = 2 \text{ kg}$. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é $0,1$. Determine os valores de F para os quais o bloco fica em repouso sobre a rampa.



22 Um pequeno bloco de 2 kg repousa sobre uma tábua horizontal T de 8 kg , a uma distância de $0,2 \text{ m}$ de uma de suas extremidades. A tábua é puxada a partir do repouso por uma força de 20 N constante e horizontal, aplicada nessa extremidade, até a tábua esbarrar no calço C , distante $4,5 \text{ m}$, que impede seu movimento repentinamente. Calcule a distância que o bloco ficará da extremidade da tábua após cessar o seu movimento (do bloco). O coeficiente de atrito cinético entre a tábua e o bloco é $0,1$; o estático é $0,15$ e não há atrito entre a tábua e o plano.



23 Na figura seguinte, os blocos A e B são de aço, e a superfície horizontal sobre a qual se apoia o bloco B é de alumínio:

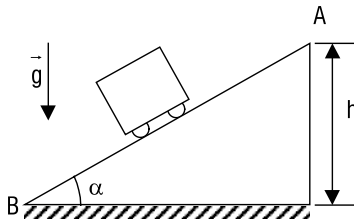


Recorrendo-se a uma tabela, foram encontrados os dados:

materiais atritantes	coeficiente de atrito estático	coeficiente de atrito dinâmico
aço com aço	0,74	0,57
aço com alumínio	0,61	0,47

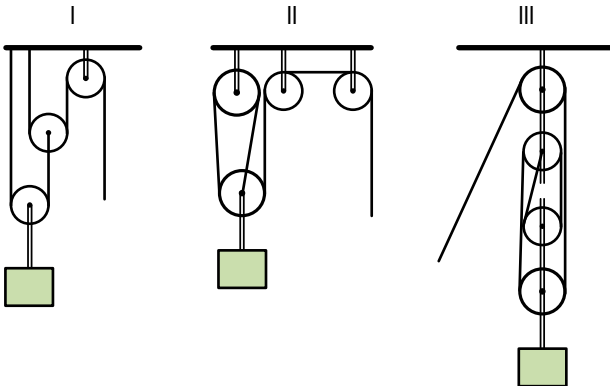
Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine qual a máxima intensidade de \vec{F} (horizontal), tal que o bloco A não escorregue em relação a B.

24 Um bloco de massa m , montado sobre rodas (para tornar o atrito desprezível), parte do repouso em A e leva um tempo t_0 para atingir B. A massa das rodas é desprezível. Retirando-se as rodas verifica-se que o bloco, partindo do repouso em A, leva um tempo $2 t_0$ para atingir B.



- Determine o valor de t_0 ;
- Determine o valor do coeficiente de atrito entre o plano e o bloco (sem rodas), em função de α .

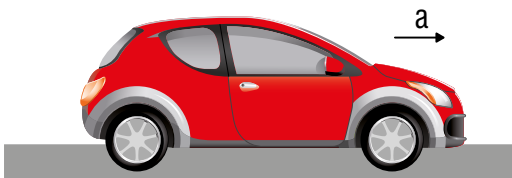
25 (AFA-02) Para levantar um pequeno motor até determinada altura, um mecânico dispõe de três associações de polias:



Aquela(s) que exigirá(ão) menor esforço do mecânico é (são) somente:

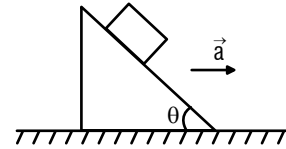
- I.
- II.
- I e III.
- II e III.

26 (AFA-03-Feminino) Entre o carro de massa m e a prancha há atrito, sendo m_e o coeficiente de atrito estático e m_c o cinético. Sabendo-se que a prancha se move com aceleração a , qual a força de atrito sobre o carro?



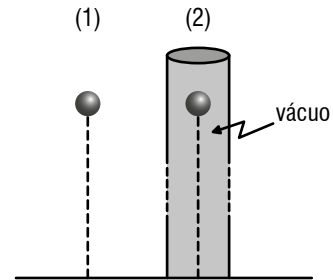
- $F_{at} = m \cdot a$, se $a < \mu_e \cdot g$.
- $F_{at} = m \cdot a$, se $a > \mu_e \cdot g$.
- $F_{at} = \mu_c \cdot m \cdot g$, se $a < \mu_e \cdot g$.
- $F_{at} = \mu_c \cdot m \cdot g$, se $a = \mu_e \cdot g$.

27 (AFA-05) Um bloco encontra-se em repouso sobre um plano inclinado que se move com aceleração horizontal de intensidade a , como indica a figura. Desprezando-se o atrito entre quaisquer superfícies, o valor de a é proporcional a:

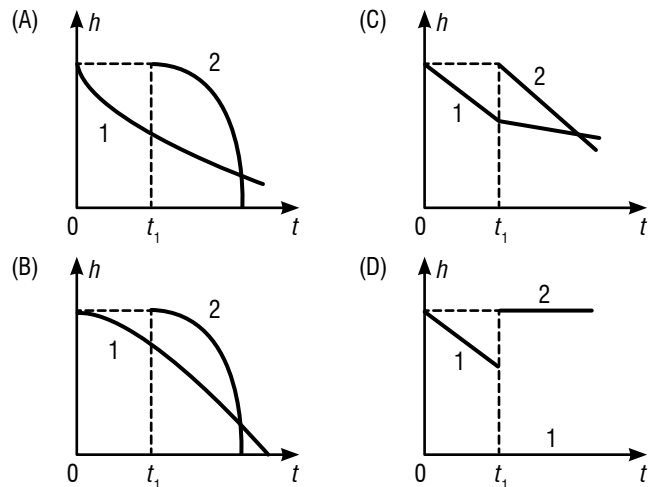


- $\cos \theta$.
- $\text{cossec } \theta$.
- $\cotg \theta$.
- $\text{tg } \theta$.

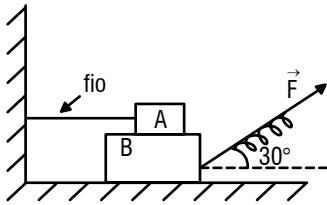
28 (AFA-08) A figura mostra uma bola de isopor caindo, a partir do repouso, sob efeito da resistência do ar, e outra bola idêntica, abandonada no vácuo no instante t_1 , em que a primeira atinge a velocidade limite.



A opção que pode representar os gráficos da altura h em função do tempo t para as situações descritas é:



29 (EN-98) Na figura abaixo, temos um bloco A ($m_A = 4,0 \text{ kg}$), um bloco B ($m_B = 8,0 \text{ kg}$), uma mola de constante elástica $K = 800 \text{ N/m}$ e um fio inextensível e horizontal. O coeficiente de atrito entre os blocos A e B e entre o bloco B e a superfície horizontal vale 0,1. Sabendo-se que a mola está deformada de 20 cm e que o $g = 10 \text{ m/s}^2$, a aceleração adquirida pelo bloco B é de: Considere $\sqrt{3} = 1,73$.



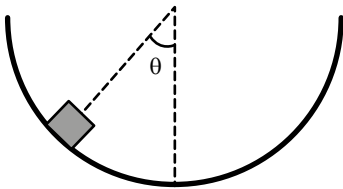
- (A) 15,8 m/s². (D) 17,2 m/s².
 (B) 16,3 m/s². (E) 17,4 m/s².
 (C) 16,8 m/s².

30 (EN-02) Um bloco de massa igual a 6,0 kg sobe um plano inclinado de 30°, sob a ação de uma força F de módulo igual a 40 N, paralela à reta de maior declive do plano. Existe atrito entre o bloco e o plano. Sabe-se que no intervalo de tempo de 2,0 s, o bloco percorre 4,0 m no plano, em M.R.U., e que, no instante $t = 2,0$ s, a força F é retirada. A distância adicional, em centímetros, que o bloco caínda percorre plano acima é de:

- (A) 30. (C) 38.
 (B) 35. (D) 40.

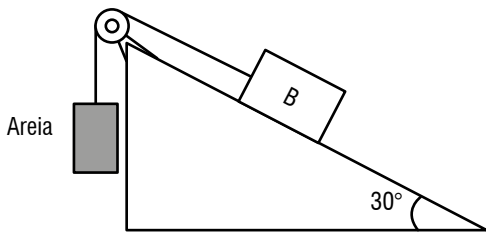
31 (EN-09) Um pequeno bloco de massa m está, devido ao atrito, em repouso sobre uma superfície cilíndrica em uma posição que faz um ângulo θ com a vertical, conforme indica a figura. Os coeficientes de atrito estático e cinético são, respectivamente, μ_e e μ_c . Considerando o bloco como uma partícula, quanto vale a força de atrito entre o bloco e a superfície?

- (A) $mg \sin \theta$. (D) $\mu_e mg \sin \theta$.
 (B) $mg \cos \theta$. (E) $\mu_c mg \cos \theta$.
 (C) $\mu_e mg$.



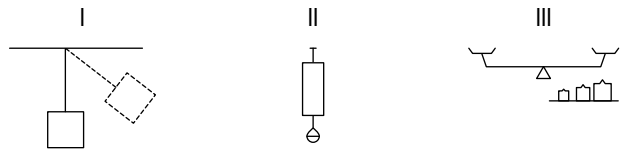
32 (EN-11) Na figura abaixo, temos o bloco B de massa igual a 4 kg e um recipiente (massa desprezível) cheio de areia, interligados por um fio ideal que passa por uma polia também ideal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco B e a reta de maior declive do plano inclinado valem, respectivamente, $0,05\sqrt{3}$ e $0,04\sqrt{3}$. O recipiente possui um pequeno orifício no fundo, por onde a areia pode sair. No instante $t = 0$, a massa da areia no recipiente é de 1,7 kg. A partir do instante $t = 0$, com a areia saindo do orifício, o módulo da maior aceleração, em m/s², adquirida pelo bloco B é:

(Dado $g = 10$ m/s²)



- (A) 4,2. (D) 5,5.
 (B) 4,4. (E) 5,8.
 (C) 5,0.

33 (ITA-1970) Qual dos seguintes instrumentos, uma vez calibrado na Terra, poderia ser utilizado na Lua como balança, sem nova calibração?

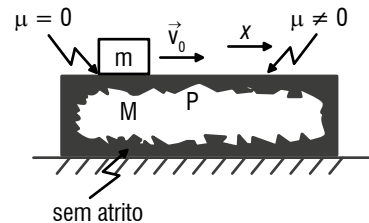


- I. balança de inércia.
 II. balança de mola.
 III. balança de braços.

A resposta correta é:

- (A) I, II e III. (D) III.
 (B) nenhum. (E) I e III.
 (C) I e II.

34 (ITA-1978) Considera-se um bloco de massa “ m ” sobre outro, de massa “ M ” (ver figura abaixo). Inicialmente “ m ” desliza sobre “ M ” sem atrito, com uma velocidade \vec{v}_0 . A partir do ponto “ p ” o coeficiente de atrito entre as duas superfícies em contato é **não nulo** ($\mu \neq 0$). Se o bloco “ M ” puder deslizar sobre o plano horizontal sem qualquer atrito, pode-se afirmar que a distância “ x ” percorrida por “ m ” sobre “ M ”, contada a partir do ponto “ p ”, será dada por:

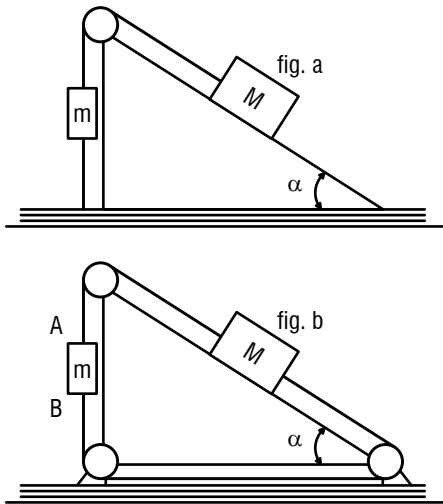


- (A) $x = \frac{1}{2} M v_0^2 \{ \mu (m + M)^2 g \}$. (D) $x = 0$ (distância nula).
 (B) $x = \frac{1}{2} M v_0^2 \{ \mu (m + M) g \}$. (E) Nenhum dos valores acima.
 (C) $x = \frac{1}{2} M v_0^2 \{ \mu (m + M) g \}$.

35 (ITA-1980) Um vagão desloca-se horizontalmente, em linha reta, com uma aceleração a constante. Um pêndulo simples está suspenso do teto do vagão. O pêndulo não está oscilando e nessa posição de equilíbrio forma um ângulo θ com a vertical. Calcule a tensão F no fio do pêndulo.

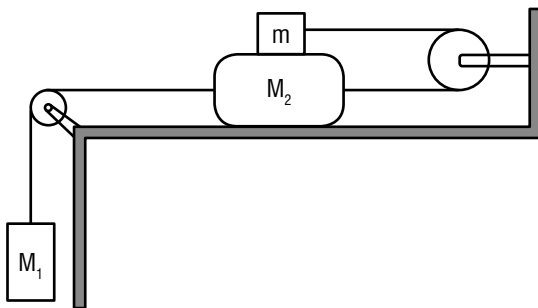
- (A) $F = mg \cos \theta$.
 (B) $F = ma \sin \theta$.
 (C) $F = m \sqrt{a^2 + g^2}$.
 (D) $F = m(g \cos \theta - a \sin \theta)$.
 (E) $F = m(g \sin \theta + a \cos \theta)$.

36 (ITA-1981) A figura (a) representa um plano inclinado cujo ângulo de inclinação sobre o horizonte é sobre ele pode deslizar, sem atrito, um corpo de massa M . O contrapeso tem massa m , uma das extremidades do fio está fixa ao solo. Na figura (b) o plano inclinado foi suspenso, de modo a se poder ligar as massas m e M por meio do outro fio. Desprezando os atritos nos suportes dos fios, desprezando a massa dos fios e sendo dada a aceleração da gravidade g , podemos afirmar que:



- (A) No caso (a) a posição de equilíbrio estático do sistema ocorre se e somente se $M \sin \alpha = m$.
- (B) Tanto no caso (a) como no caso (b) o equilíbrio se estabelece quando e somente quando $M = m$.
- (C) No caso (b) o corpo m é tracionado em A por uma força $T_A = (m + M \sin \alpha) g$.
- (D) No caso (b) a aceleração do corpo M é $g (M \sin \alpha - m) / (M + m)$ no sentido descendente.
- (E) No caso (a) não há nenhuma posição possível de equilíbrio estático.

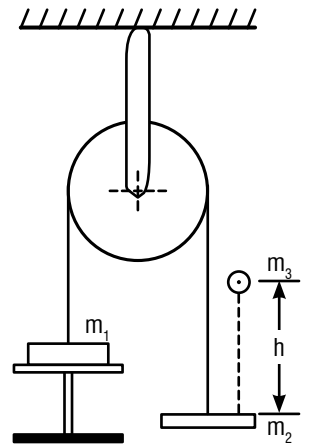
37 (ITA-1984) A figura representa uma mesa horizontal de coeficiente de atrito cinético μ_1 , sobre a qual se apoia o bloco de massa M_2 . Sobre ele está apoiado o objeto de massa m , sendo μ o coeficiente de atrito cinético entre eles. M_2 e m estão ligados por cabos horizontais esticados, de massa desprezível, que passam por uma roldana de massa desprezível. Desprezando-se a resistência do ar e o atrito nas roldanas, podemos afirmar que m se deslocará com velocidade constante em relação a um observador fixo na mesa, se M_1 for tal que:



- (A) $M_1 = \mu m$.
- (B) $M_1 = \mu_1 (M_2 + m) + 2 \mu m$.
- (C) $M_1 = \mu_1 (M_2 + m)$.
- (D) $M_1 = 2 \mu m + 2 \mu_1 (M_2 + m)$.
- (E) $M_1 = \mu_1 (M_2 + m)$.

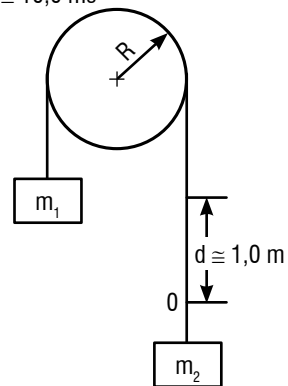
38 (ITA-1985) Dois corpos de massas m_1 e m_2 estão ligados por um fio inextensível que passa por uma polia, com atrito desprezível, sendo $m_1 > m_2$. O corpo m_1 repousa inicialmente sobre um apoio fixo. A partir de uma altura h deixa-se cair sobre m_2 um corpo de massa m_3 , que gruda nele. Sabendo-se que $m_1 > m_2 + m_3$, pode-se afirmar que a altura máxima atingida por m_1 será:

- (A) $\left(\frac{m_3}{m_2 + m_3} \right)^2 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 - m_2 - m_3} h$.
- (B) $\frac{m_3^2 (m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 - m_2 - m_3)^3} h$.
- (C) $\frac{m_3^2}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 - m_3)} h$.
- (D) h .
- (E) $\frac{m_3^2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} h$.



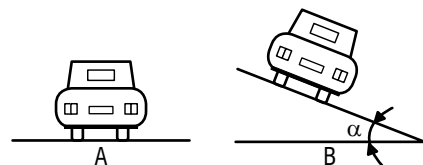
39 (ITA-1986) Na figura a seguir, as duas massas $m_1 \cong 1,0$ kg e $m_2 \cong 2,0$ kg, estão ligadas por um fio de massa desprezível que passa por uma polia também de massa desprezível, e raio R . Inicialmente, m_2 é colocada em movimento ascendente, gastando 0,20 segundos para percorrer a distância $d \cong 1,0$ m indicada. Nessas condições m_2 passará novamente pelo ponto "0" após, aproximadamente:

Obs.: adotar para $g \cong 10,0$ ms⁻²



- (A) 0,4 s.
- (B) 1,4 s.
- (C) 1,6 s.
- (D) 2,8 s.
- (E) 3,2 s.

40 (ITA-1987) Para que um automóvel percorra uma curva horizontal de raio dado, em uma estrada horizontal, com certa velocidade, o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista deve ter no mínimo um certo valor μ (fig. A). Para que o automóvel percorra uma curva horizontal, com o mesmo raio e com a mesma velocidade acima, em uma estrada com sobrelevação (Fig. B), sem ter tendência a derrapar, o ângulo de sobrelevação deve ter o valor α . Podemos afirmar que:



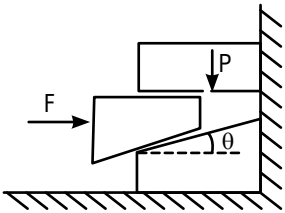
- (A) $\alpha = \arctg \mu$.
- (B) $\alpha = 45^\circ$.
- (C) $\alpha = \arcsen \mu$.
- (D) $\alpha = 0$.
- (E) $\alpha = \mu$ (em radianos).

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

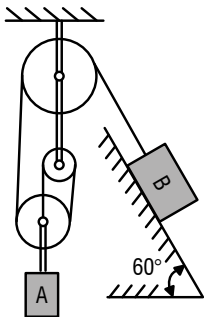
41 (ITA-1994) Duas massas, m e M estão unidas uma à outra por meio de uma mola de constante k . Dependendo-as de modo que M fique no extremo inferior ao comprimento da mola é ℓ_1 . Invertendo as posições das massas o comprimento da mola passa a ser ℓ_2 . O comprimento ℓ_0 da mola quando não submetido à força é:

- (A) $\ell_0 = (m\ell_1 - m\ell_2) / (m - M)$.
- (B) $\ell_0 = (M\ell_1 - m\ell_2) / (m - M)$.
- (C) $\ell_0 = (M\ell_1 + m\ell_2) / (m + M)$.
- (D) $\ell_0 = (M\ell_1 + m\ell_2) / (m + M)$.
- (E) $\ell_0 = (M\ell_1 + m\ell_2) / (m - M)$.

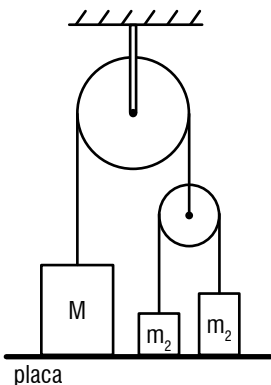
42 (IME-1977) Na figura abaixo, o coeficiente de atrito entre o peso P e a cunha é μ_1 entre a cunha e o bloco inferior é μ_2 . Desprezando o peso da cunha e, considerando que não há atrito na parede vertical F , determinar a expressão da força F necessária para levantar o peso P , forçando a cunha para a direita.



43 (IME-1982) Determinar a massa necessária ao bloco A para que o bloco B, partindo do repouso, do repouso, suba 0,75 m ao longo do plano inclinado liso, em um tempo $t = 2$ s. Desprezar as massas das polias e dos tirantes e as resistências passivas ao movimento. A massa do bloco B vale 5 kg e a aceleração da gravidade deve ser considerada a $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



44 (IME-2002) Sejam M , m_1 e m_2 as massas dos blocos homogêneos dispostos conforme a figura a seguir, inicialmente apoiados sobre uma placa horizontal. Determine a aceleração do bloco de massa m_1 , em relação à roldana fixa, após a retirada da placa, sabendo que $M = m_1 + m_2$ e $m_1 < m_2$. Considere que não há atrito no sistema e despreze o peso das polias e das cordas que unem os blocos.

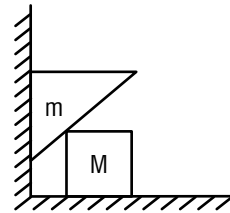


01 Deseja-se suspender uma pedra de massa m desde o solo até uma altura H . Para isso, amarra-se a pedra a uma corda de massa desprezível e puxa-se verticalmente pela extremidade livre. Sabendo-se que a corda suporta uma tração máxima T , determine o tempo mínimo que será gasto para suspender essa pedra, de forma que ela deve atingir a altura final H em repouso. Considere g a aceleração da gravidade

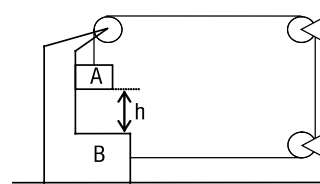
02 Considere uma plataforma móvel de massa M e um bloco de massa m apoiado sobre a plataforma. Despreze o atrito entre a plataforma e o plano horizontal. O coeficiente de atrito entre o bloco e a plataforma vale μ . Suponha que o coeficiente de atrito estático seja igual ao cinético. Em vez de se aplicar uma força horizontal sobre o bloco, a força horizontal F é aplicada sobre a plataforma. Seja L a distância entre o centro de massa do corpo e a extremidade esquerda da plataforma. A força F é orientada para a direita.

- a. Obtenha uma expressão para a força máxima que pode ser aplicada para que o bloco não deslize sobre a plataforma;
- b. Supondo que a plataforma esteja submetida a uma força F maior do que F_{max} calculada no item anterior, determine quanto tempo o bloco leva para cair da extremidade da plataforma.

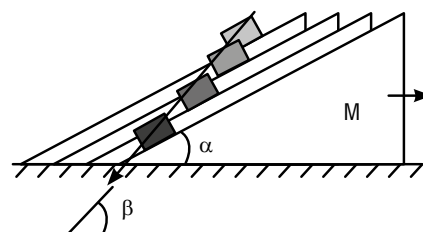
03 Uma cunha (triângulo retângulo isósceles) de massa m se encontra apoiada sobre um bloco de massa M e a uma parede imóvel como se indica na figura. Ache a aceleração de cada um dos blocos. Despreze os atritos.



04 No sistema representado na figura não há atritos. O fio é inextensível e tem peso desprezível. No local, a intensidade da aceleração da gravidade é g . Ignorando a influência do ar, calcule o intervalo de tempo que o corpo A (de massa m) leva para atingir a base do corpo B (de massa M), quando é abandonado de uma altura h em relação a B.

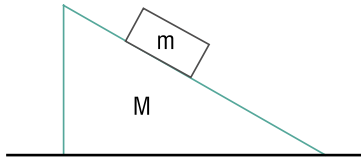


05 A figura mostra uma cunha de massa M e inclinação α inicialmente parada sobre o solo horizontal liso. Um certo bloco é abandonado sobre a superfície inclinada lisa da rampa, descrevendo uma trajetória retilínea de inclinação β com a horizontal. Qual a massa do bloco?

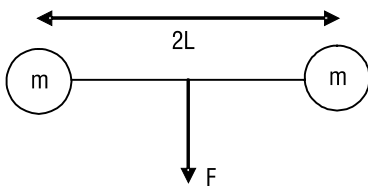


06 De um mesmo ponto O , grãos de areia deslizam por canais distintos que fazem ângulos α distintos com a vertical, com $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Encontre o lugar geométrico dos pontos em que se encontram os grãos de areia após decorrido um tempo t , se o coeficiente de atrito entre os grãos e as canaletas é k .

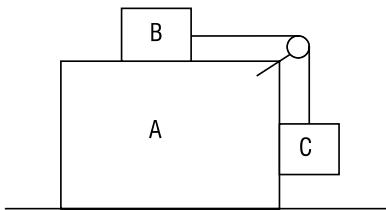
07 A figura indica uma cunha em forma de triângulo de massa M e ângulo θ . A cunha repousa sobre uma mesa horizontal e sobre a cunha existe um bloco de massa m . Calcule a aceleração da cunha e a aceleração do bloco em relação à cunha.



08 Duas partículas de massa m estão ligadas por um fio leve de comprimento $2L$, conforme a figura. Aplica-se uma força contínua F no ponto médio da corda ($x = 0$), perpendicularmente à posição inicial da corda. Determine a aceleração de m em uma direção perpendicular à força aplicada, em função da distância x de uma das partículas à linha de ação da força aplicada.



09 Sejam a e b o maior e o menor valores da aceleração do corpo A para a direita para que os corpos B e C permaneçam imóveis em relação ao citado corpo. As massas dos corpos B e C são iguais e o coeficiente de atrito entre as superfícies dos corpos B e A e entre C e A vale μ . Sabendo que as polias e os fios são ideais, quanto vale a razão b/a ?



(A) $\frac{1+\mu}{1-\mu}$.

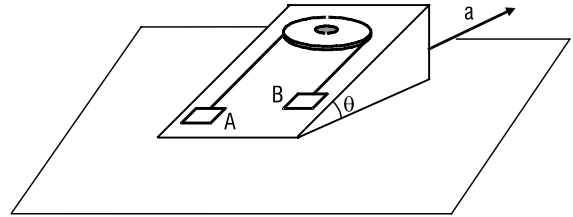
(B) $\frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}$.

(C) $\frac{1-\mu}{1+\mu}$.

(D) $\frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^2}$.

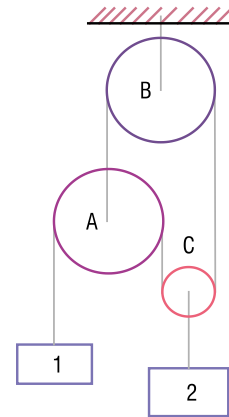
(E) $\frac{1}{(1-\mu)^2}$.

10 Um sistema formado por dois blocos A e B , de massas, respectivamente, m e $2m$, um fio ideal e uma polia ideal, foi montado sobre um plano que tem inclinação θ em relação a um plano horizontal. Sabendo-se que todo o sistema move-se para trás com aceleração a , determine, em função de a , g e θ :



- a. as acelerações de A e B , em relação a um referencial inercial.
- b. o ângulo θ tal que a aceleração em relação à polia (referencial não inercial) seja máxima.

11 Determine as acelerações dos pesos no sistema desenhado. As massas das roldanas, da corda e os atritos podem ser desprezados. Em que direção giram as roldanas, quando os pesos se movem?



12 (ITA-2004) Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo m a massa do corpo do atleta e o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.

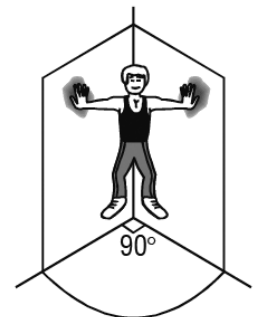
(A) $\frac{mg}{2} \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$.

(B) $\frac{mg}{2} \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$.

(C) $\frac{mg}{2} \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \right)$.

(D) $\frac{mg}{2} \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \right)$.

(E) n.d.a.



Introdução

A partir deste ponto, faremos uma reflexão mais profunda sobre a força resultante que pode atuar sobre um móvel. Sem deixar de lado as leis de Newton, que também regirão nosso estudo, além dos conceitos de referencial inercial e não inercial, descobriremos que, dependendo da relação entre os vetores força resultante e velocidade que atuam em um móvel, sua trajetória pode ser curvilínea em vez de apenas retilínea, como vimos antes. Naturalmente, sabemos que existem trajetórias curvilíneas, já que estão presentes o tempo todo em nosso cotidiano, mas vamos agora, de uma vez por todas, entender a sua dinâmica.

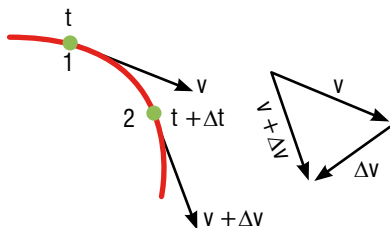
1. Dinâmica retilínea × dinâmica curvilínea

Estudamos, no último assunto, a dinâmica presente em movimentos retilíneos, ou seja, a presença de forças atuando como fatores de alteração dos movimentos. Descobrimos também que, pela 2ª lei de Newton, a toda força está associada uma aceleração, vetores com mesma direção e sentido.

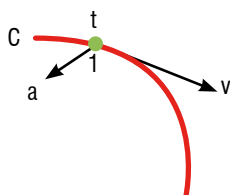
Então, vamos pensar em um bloco de 1 kg em movimento retilíneo uniforme. Como o movimento é retilíneo, a velocidade tem sempre uma certa direção. Suponha que seja aplicada uma força de 1 N, no mesmo sentido da velocidade do corpo. Sabemos que, pela 2ª lei de Newton, surgirá uma aceleração de 1 m/s² no corpo, no mesmo sentido da força, que no caso é o mesmo sentido da velocidade. O resultado disso é que o corpo terá apenas a intensidade (ou o módulo) da sua velocidade aumentada com o tempo, mas sua direção permanece inalterada. Mas nós sabemos que carros podem fazer curva, por exemplo. Como pode isso acontecer, então?

Um dos conceitos básicos de cinemática é que a velocidade instantânea de um móvel é sempre tangente à trajetória que o corpo está realizando. Logo, para que o móvel possa mudar de direção, a sua velocidade deve mudar de direção. Então, como faremos isso acontecer?

Como para quaisquer dois vetores distintos, a mudança de direção da velocidade de “v” para “Δv” entre um instante “t” e um instante “t + Δt” produz o vetor “diferença de velocidades”, dado por “Δv”, como mostra a figura:



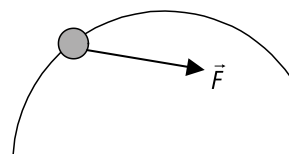
Logo, se existe um vetor Δv em um certo intervalo de tempo Δt, devemos lembrar o conceito de aceleração, que é a taxa de variação temporal da velocidade, ou seja, $a = \Delta v / \Delta t$. Então, esse vetor aceleração vai ter a mesma direção e sentido do vetor Δv, já que Δt é um escalar positivo. Esse vetor está representado na figura abaixo:



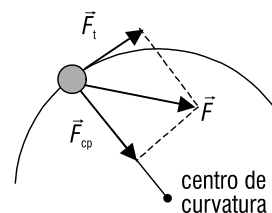
Dessa forma, acabamos de descobrir que, para que a velocidade mude de direção, deve passar a atuar sobre o móvel um vetor aceleração que não tenha a mesma direção do vetor velocidade inicial. E como, pela segunda lei de Newton, a toda aceleração está associada uma força, deve passar a atuar no móvel uma força resultante que não tenha a direção da velocidade, e é sobre essa força que passaremos a discutir na próxima seção.

2. Componentes da força resultante

A figura a seguir mostra um móvel executando um movimento curvilíneo em duas dimensões e a força resultante que atua nele naquele instante.



Essa força resultante, em um movimento bidimensional, sempre pode ser decomposta em dois eixos: o eixo tangencial (tangente à trajetória, ou seja, na direção da velocidade do corpo) e o eixo normal (perpendicular ao eixo tangencial). Chamaremos de força tangencial a componente da força no eixo tangencial e de força centrípeta a componente da força na direção normal, como mostra a figura abaixo.



A força tangencial é toda força que estudamos até aqui. Ela está associada à aceleração tangencial (\vec{a}_t), que altera a intensidade da velocidade do móvel, e que estudamos em Cinemática Escalar. A novidade agora é a força centrípeta. Então, se a força tangencial está relacionada à mudança da intensidade da velocidade do corpo, a força centrípeta é a força atrelada à mudança da direção da velocidade do corpo, proporcionando a trajetória curvilínea observada. A aceleração associada a essa força é chamada de aceleração centrípeta (\vec{a}_{cp}).

Aplicando a 2ª lei de Newton, teremos:

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$$

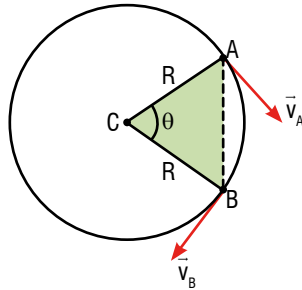
$$\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

3. Aceleração centrípeta

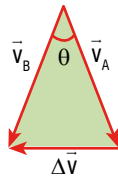
Já sabemos como encontrar a aceleração tangencial instantânea ou média de um móvel. Basta termos a função horária da velocidade e derivá-la, para a primeira, e saber a variação do módulo da velocidade em um certo intervalo de tempo, para a segunda. Mas ainda não sabemos como calcular a aceleração centrípeta. É o que veremos agora.

Considere um móvel em MCU de raio R. Como o movimento é uniforme, a única aceleração presente nele é a centrípeta, já que é um

movimento curvilíneo. A figura a seguir mostra o móvel indo de um ponto A até um ponto B da circunferência, com deslocamento angular igual a θ .



Sabemos que $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ e $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = v$. Com isso, podemos formar o seguinte triângulo:



É fácil ver por argumentos geométricos que o ângulo entre os dois vetores velocidade é o mesmo ângulo θ que representa o deslocamento angular de A até B (tente provar isso).

Dessa forma, vemos que esse triângulo das velocidades é semelhante ao ΔABC da figura anterior. Com isso, podemos relacionar as medidas de seus lados:

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{AB} = \frac{|\vec{v}_A|}{R} \quad (I)$$

Sabemos também que, quando o intervalo de tempo que a partícula leva para percorrer de A a B tende a 0, ou seja, $\Delta t \rightarrow 0$, o menor arco de circunferência \widehat{AB} tende ao segmento \overline{AB} . Dessa forma, podemos dizer que

$$\overline{AB} \approx \widehat{AB} = v \cdot \Delta t$$

Assim sendo, temos, de (I):

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v \cdot \Delta t} = \frac{v}{R} \rightarrow \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad (II)$$

Como a a_{cp} é a única aceleração presente no movimento, além de ter módulo constante, podemos dizer que ela corresponde à aceleração média do movimento:

$$|\vec{a}_{cp}| = |\vec{a}_m| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \quad (III)$$

Logo, de (II) e (III), temos que:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$$

Consequentemente, temos:

$$|\vec{F}_{cp}| = m \cdot |\vec{a}_{cp}| = m \frac{v^2}{R}$$

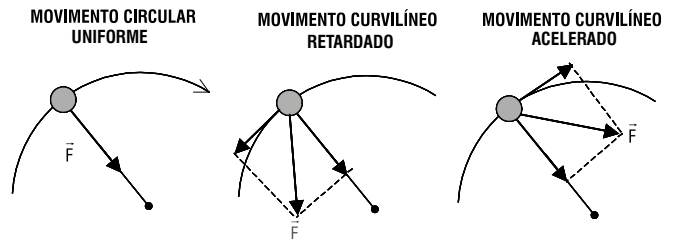
Extrapolando essa definição para qualquer movimento curvilíneo, podemos dizer que a aceleração centrípeta instantânea tem módulo igual ao módulo da velocidade linear instantânea ao quadrado dividido pelo raio de curvatura instantâneo.

Ainda podemos escrever a aceleração centrípeta em função da velocidade angular do móvel. Como $v = \omega \cdot R$, onde ω é a velocidade angular, substituindo na fórmula da aceleração teremos:

$$|\vec{a}_{cp}| = m \frac{(\omega R)^2}{R} = m \frac{\omega^2 R^2}{R} \rightarrow |\vec{a}_{cp}| = m \omega^2 R$$

4. Classificação dos movimentos curvilíneos

Dependendo da presença ou não da aceleração tangencial, os movimentos curvilíneos podem ser classificados da seguinte maneira:



No movimento circular uniforme, não há a ação da aceleração tangencial. Logo, a velocidade se mantém constante, e o móvel realiza uma trajetória circular, já que a aceleração centrípeta se mantém constante. Em movimentos acelerados ou retardados, existe aceleração tangencial. A trajetória será determinada, então, pela ação da força centrípeta realizada.

5. Dinâmica curvilínea no referencial não inercial

Relembrando: referenciais não inerciais são aqueles que possuem aceleração em relação a referenciais inerciais. Como consequência, as leis de Newton não são válidas neles. Para podermos resolver problemas relativos a eles, podemos nos valer dos Princípios de Equivalência de Einstein e de D'Alembert para mudar do referencial inercial para o não inercial e conseguir usar as leis de Newton. Tais princípios afirmavam em conjunto que, fixando o observador no referencial não inercial, poderíamos adicionar uma aceleração no sistema contido no referencial não inercial contrária à aceleração real desse referencial em relação à Terra. Dessa forma, passaríamos a atuar no corpo forças "fictícias", denominadas forças de inércia. Muitas vezes esse procedimento facilita a resolução do problema.

Como estamos falando ainda de dinâmica, as mesmas condições do movimento retilíneo valem para o movimento curvilíneo.

Para fazermos uma mudança de um referencial inercial para um referencial não inercial que execute um movimento de rotação uniforme (ou seja, dotado apenas de aceleração centrípeta, sem a ação de aceleração tangencial), procedemos da mesma forma. Colocando o observador no referencial em rotação, incluímos nos componentes do sistema contido nesse referencial a aceleração adicional de mesmo módulo e direção da aceleração centrípeta, porém de sentido contrário, que chamaremos de aceleração centrífuga. A força de inércia correspondente a ela será, então, naturalmente denominada força centrífuga.

Geralmente, em movimentos curvilíneos, a mudança de referencial nem sempre é tão interessante, ao contrário do que aconteceu no exercício resolvido 7, do assunto anterior. Dessa forma, a aplicação desses princípios para movimentos curvilíneos vale mais para fixação do conceito e treinamento.

6. Problemas envolvendo trajetórias curvilíneas

A grande maioria dos problemas de dinâmica que envolvem trajetórias curvilíneas exigem que se tomem os seguintes passos:

- 1ª. Identificar o centro instantâneo de rotação (CIR) da trajetória do móvel em questão.
- 2ª. Traçar o eixo normal, ou seja, que passa pelo CIR, e o eixo tangencial, perpendicular ao normal.
- 3ª. Decompor as forças não contidas nesses eixos para esses eixos, e manter as que já se encontram neles.
- 4ª. No eixo normal, aplicar a 2ª lei de Newton, lembrando que a aceleração nesse eixo é a centrípeta.

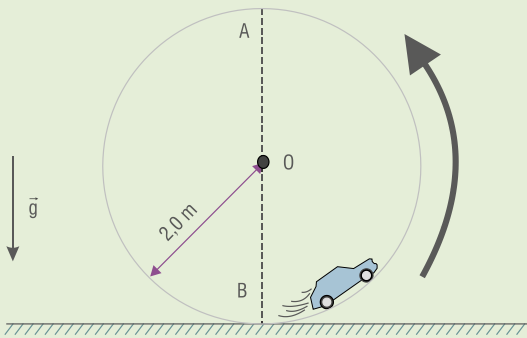
5ª. No eixo tangencial, aplicar a 1ª ou 2ª leis de Newton, dependendo das condições do problema. Lembrando que a aceleração nesse eixo, caso se aplique a 2ª lei de Newton, é a aceleração tangencial.

Importante: a força centrípeta **não** é uma força a mais que atua no móvel! Ela é simplesmente a resultante das forças que atuam na direção normal à trajetória. Muitas vezes, existe apenas uma força atuando na direção normal, podendo ela ser a força peso, uma força de tração, uma força normal, etc. Nesse caso, elas farão apenas o papel de força centrípeta, já que serão a própria resultante na direção normal. Devemos lembrar também que ela sempre aponta para o centro de rotação.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Na figura seguinte, um carrinho de 1,0 kg de massa descreve movimento circular e uniforme ao longo de um trilho envergado em forma de circunferência de 2,0 m de raio:

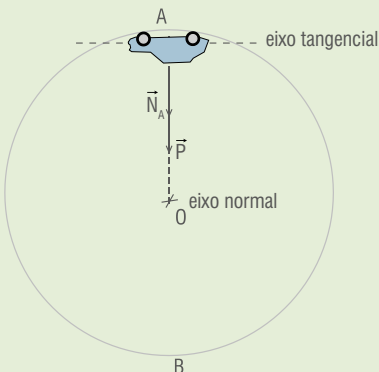
A velocidade escalar do carrinho vale 8,0 m/s, sua trajetória pertence a um plano vertical e adota-se $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que os pontos A e B sejam, respectivamente, o mais alto e mais baixo, determine a intensidade da força que o trilho exerce no carrinho:



- a. no ponto A.
- b. no ponto B.

Solução:

a. No ponto A, as forças que atuam no carrinho são a normal que o trilho faz sobre ele (N_A) e o peso do carrinho (P). Ambas essas forças têm direção vertical e sentido para baixo no ponto A. Como o centro de rotação é o ponto O, veja que essas duas forças já estão sobre o eixo normal à trajetória no ponto A. O diagrama de corpo livre do móvel está representado na figura a seguir.



Dessa forma, temos que a resultante centrípeta é dada por:

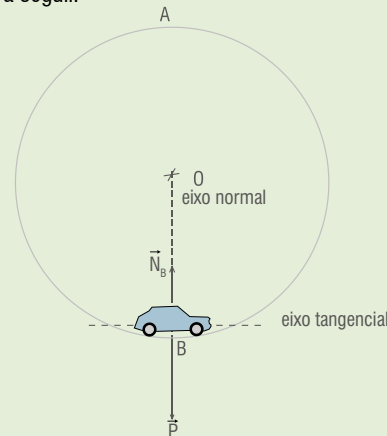
$$F_{cp} = N_A + P \text{ (I)}$$

Como o carrinho está em movimento circular uniforme (MCU), sua velocidade no ponto A é a descrita no enunciado, $v = 8 \text{ m/s}$. Temos também que, como o movimento é um MCU, o raio de rotação é constante ao longo da trajetória, igual a 2 m. Logo, temos:

$$F_{cp} = \frac{1 \cdot 8^2}{2} = 32\text{N.}$$

Como o peso do carrinho é igual a $P = 1 \cdot 10 = 10\text{N}$, temos que, de (I), $N_A + 10 = 32 \rightarrow N_A = 22\text{N}$

b. No ponto B, as forças que atuam sobre o carrinho ainda são a normal do trilho sobre ele (N_B) e o peso do carrinho (P). Ambas essas forças nesse ponto têm direção vertical, porém a normal tem sentido para cima, enquanto o peso tem sentido para baixo. Como o centro de rotação continua sendo o ponto O, temos que ambas as forças estão sobre o eixo normal. O diagrama de corpo livre está representado na figura a seguir.



Dessa forma, a resultante centrípeta é dada por:

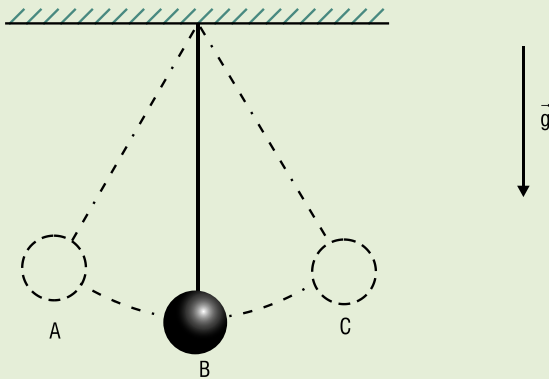
$$F_{cp} = N_B - P \text{ (II)}$$

Como o carrinho está em MCU, sua velocidade no ponto B é também $v = 8 \text{ m/s}$. Temos que o raio também é igual a 2 m, já que ainda é um MCU. Logo, temos: $F_{cp} = \frac{1 \cdot 8^2}{2} = 32\text{N}$.

Como $P = 1 \cdot 10 = 10\text{N}$, temos que, de (II), $32 = N_B - 10 \rightarrow N_B = 42\text{N}$

02 O pêndulo da figura oscila em condições ideais, invertendo seu movimento sucessivamente nos pontos A e C:

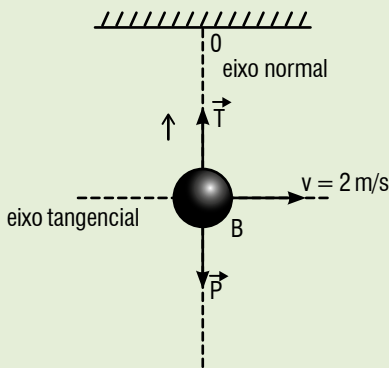
A esfera tem massa de 1,0 kg e o comprimento do fio leve e inextensível vale 2,0 m. Sabendo que, no ponto B (mais baixo da trajetória), a esfera tem velocidade de módulo 2,0 m/s e que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, determine:



- a intensidade da força resultante que age na esfera, quando ela passa pelo ponto B;
- a intensidade da força que traciona o fio, quando a esfera passa pelo ponto B.

Solução:

a. Vamos identificar primeiro o centro de rotação da trajetória no ponto B. Veja que, pelo fato de o fio estar sempre esticado, já que sempre há tração, o centro de rotação é sempre o mesmo, e é o ponto em que o fio está preso no teto (O). Logo, o raio de rotação é constante e igual ao comprimento do fio, 2 m. O diagrama de corpo livre da esfera está representado na figura a seguir.



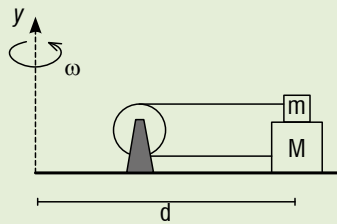
Agora veja que, no ponto B, a tração que atua no corpo é vertical, já que o fio está na vertical, apontando para cima. Existe também o peso, vertical, mas apontando para baixo. Dessa forma, só existem forças sobre o eixo normal, o que significa que só existe resultante centrípeta atuando na esfera no ponto B. Logo, a força resultante que age na esfera é dada por:

$$F_R = F_{cp} = \frac{1 \cdot 2^2}{2} \rightarrow F_R = 2N$$

b. Sabemos, pelo item 'a', que a resultante centrípeta que atua na esfera no ponto B tem intensidade de 2 N. Sabemos também que ela é a resultante da soma vetorial entre a tração no fio e o peso da esfera naquele ponto e que deve ter sentido 'para cima', já que o centro de rotação está acima do ponto B. Então, a tração deve ter intensidade maior que o peso. Dessa forma:

$$F_{cp} = T - P \rightarrow 2 = T - 1 \cdot 10 \rightarrow T = 12 N$$

03 (IME-96) Uma mesa giratória tem velocidade angular constante ω , em torno do eixo y. Sobre essa mesa encontram-se dois blocos, de massa m e M, ligados por uma corda inelástica que passa por uma roldana fixa à mesa, conforme a figura abaixo. Considerando que não existe atrito entre a mesa e o bloco M, determine o coeficiente de atrito mínimo entre os dois blocos para que haja movimento relativo entre eles. Considere d a distância dos blocos ao eixo de rotação. Despreze as massas da roldana e da corda.



1ª solução:

No referencial não inercial da mesa giratória:

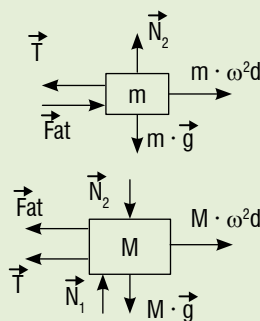
Nesse referencial, os blocos não se movimentam um em relação ao outro, nem em relação ao referencial.

É fácil ver que o centro de rotação está contido no eixo y da figura, já que ele é dotado de uma velocidade angular ω constante. Como esse movimento de rotação é munido apenas de aceleração centrípeta, podemos nos munir dos princípios da Equivalência e de D'Alembert para mudança de referencial.

O eixo normal é, então, o eixo que acompanha a distância 'd' marcada na figura. Porém, dessa vez, não usaremos o eixo tangencial (que é o que "entra" no papel, já que o movimento tem essa direção), pois não há forças atuando nessa direção. Usaremos um eixo perpendicular ao normal que seja perpendicular à mesa, para que contenha a normal entre o bloco M e a mesa e a normal entre os blocos.

Quando colocamos o referencial na mesa, devemos anular a aceleração centrípeta que o sistema já tinha (para a esquerda no eixo normal) e adicionar uma nova aceleração, a centrífuga, para a direita no eixo normal, com a mesma intensidade da centrípeta ($\omega^2 d$), o que faz aparecerem as forças de inércia (centrífugas) nos blocos.

Dessa forma, temos os seguintes diagramas de corpo livre:



Como a força centrífuga na caixa M é maior, já que $M > m$, a caixa M tende a escorregar para a direita no eixo normal, o que faz com que, devido ao vínculo geométrico proporcionado pelo fio, a caixa m tenda a se deslocar para a esquerda no mesmo eixo. Dessa forma, deve aparecer um atrito para a direita no bloco m provocado pelo bloco M a fim de impedir essa tendência de movimento. Pela 3ª lei de Newton, surge um atrito de mesma intensidade, porém sentido contrário, no bloco M. N_2 é a normal trocada pelos blocos, e N_1 é a normal que a superfície exerce no bloco M.

Pela 1ª lei de Newton, já que os blocos estão parados no referencial não inercial, temos:

Bloco M:

- eixo normal: $T + Fat = M \cdot \omega^2 d$
- eixo perpendicular: $M \cdot g + N_2 = N_1$

Bloco m:

- eixo normal: $T = Fat + m \cdot \omega^2 d$
- eixo perpendicular: $N_2 = m \cdot g$

Como o problema pede o coeficiente de atrito mínimo entre os blocos para que não haja escorregamento relativo entre eles, devemos colocar o bloco m na iminência de escorregar, ou seja, a força de atrito (estático no caso) deve ter seu valor máximo:

$$Fat = \mu \cdot N_2 = \mu \cdot mg$$

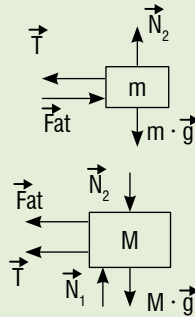
Resolvendo, então, o sistema formado pelas cinco equações, temos:

$$\mu = \frac{(M - m) \cdot \omega^2 d}{2 \cdot m \cdot g}$$

2ª solução:

No referencial inercial da Terra:

Nesse referencial, os blocos não se movimentam relativamente entre si, mas se movimentam em relação ao referencial da Terra. Os eixos são os mesmo descritos anteriormente. Isolando os blocos, temos os diagramas de corpo livre representados na figura abaixo:



Para o bloco M:

- eixo normal, 2ª lei de Newton: $M \cdot \omega^2 d = T + Fat$
- eixo perpendicular, 1ª lei de Newton, já que não há aceleração nesse eixo: $M \cdot g + N_2 = N_1$

Para o bloco m:

- eixo normal, 2ª lei de Newton: $m \cdot \omega^2 d = T - Fat$
- eixo perpendicular, 1ª lei de Newton, já que não há aceleração nesse eixo: $N_2 = m \cdot g$

Temos a mesma condição de iminência de escorregamento da solução anterior: $Fat = \mu \cdot N_2 = \mu \cdot mg$

Veja que as equações escritas aqui são equivalentes às da solução anterior. Dessa forma, resolvendo o sistema, temos:

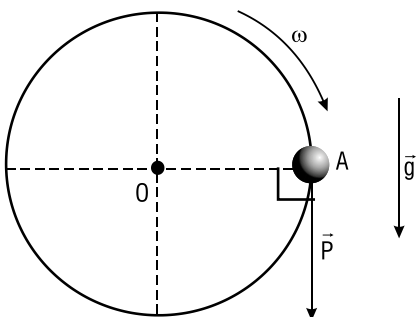
$$\mu = \frac{(M - m) \cdot \omega^2 d}{2 \cdot m \cdot g}$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

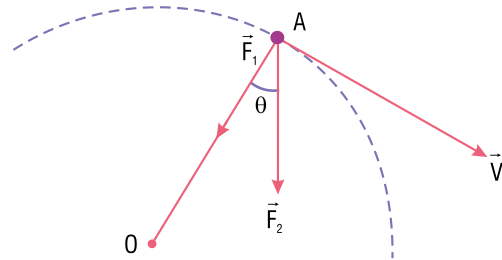
01 Considere uma partícula de massa M descrevendo movimento circular e uniforme com velocidade de intensidade V . Se o período do movimento é igual a T , a intensidade da força resultante na partícula é:

- (A) $\frac{M V}{T}$
- (B) $\frac{2 M V}{T}$
- (C) $\frac{2 \neq M V}{T}$
- (D) $\neq \frac{M V}{T}$
- (E) $\frac{2 \neq V}{T}$

02 Um ponto material de 4,0 kg de massa realiza movimento circular e uniforme ao longo de uma trajetória vertical de 7,5 m de raio. Sua velocidade angular é $\omega = 1,0 \text{ rad/s}$ e no local, $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. No ponto A indicado na figura, além da força da gravidade, \vec{P} , age no ponto material somente uma outra força: \vec{F} . Caracterize \vec{F} , calculando sua intensidade e indicando graficamente sua orientação.



03 A partícula indicada na figura descreve uma trajetória circular de raio R e centro O . Ao passar pelo ponto v , verifica-se que sobre ela agem apenas duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

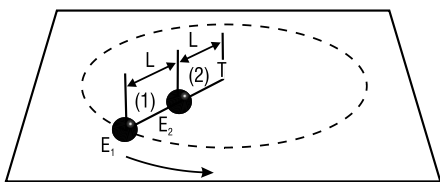


Se m a massa da partícula e \vec{v} a sua velocidade vetorial em A, é correto que:

- (A) $F_1 = \frac{m v^2}{R}$
- (B) $F_2 = \frac{m v^2}{R}$
- (C) $F_1 + F_2 = \frac{m v^2}{R}$
- (D) $F_1 + F_2 \cos \theta = \frac{m v^2}{R}$
- (E) $F_1 + F_2 \cos \theta + F' = \frac{m v^2}{R}$, em que F' é a força centrífuga.

04 Uma partícula de 3,0 kg de massa parte do repouso no instante $t_0 = 0$, adquirindo movimento circular uniformemente acelerado. Sua aceleração escalar é de 4,0 m/s² e o raio da circunferência suporte do movimento vale 3,0 m. Para o instante $t_1 = 1,0$ s, calcule a intensidade da força resultante que age sobre a partícula.

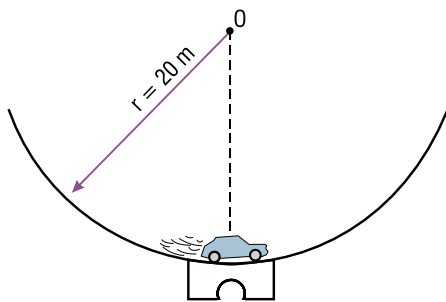
05 A figura mostra duas esferas iguais E_1 e E_2 , que, ligadas a fios inextensíveis e de massas desprezíveis, descrevem movimento circular e uniforme sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa. Desprezando a resistência do ar e supondo que E_1 e E_2 se mantenham sempre alinhadas com o centro, aponte a alternativa que traz o valor correto da relação T_1/T_2 entre as intensidades das forças tensoras nos fios (1) e (2):



- (A) 2.
- (B) 3/2.
- (C) 1.
- (D) 2/3.
- (E) 1/2.

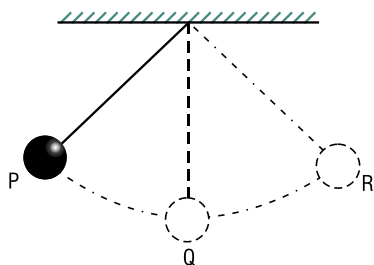
06 Considere uma curva circular de 200 m de raio contida em um plano horizontal. Um carro de 700 kg de massa deverá percorrer essa curva com a máxima velocidade admissível para não derrapar. Sabendo que os coeficientes de atrito estático e cinético entre os pneus do carro e o solo valem respectivamente 0,80 e 0,70 e que $g = 10$ m/s², determine a velocidade do veículo.

07 Na figura seguinte, um carro com massa de $5,0 \cdot 10^2$ kg percorre uma depressão assimilável a um arco de circunferência de 20 m de raio. No ponto mais baixo da trajetória, suposta contida em um plano vertical, existe uma ponte de madeira, que pode resistir a uma compressão normal máxima equivalente a $1,5 \cdot 10^4$ N.

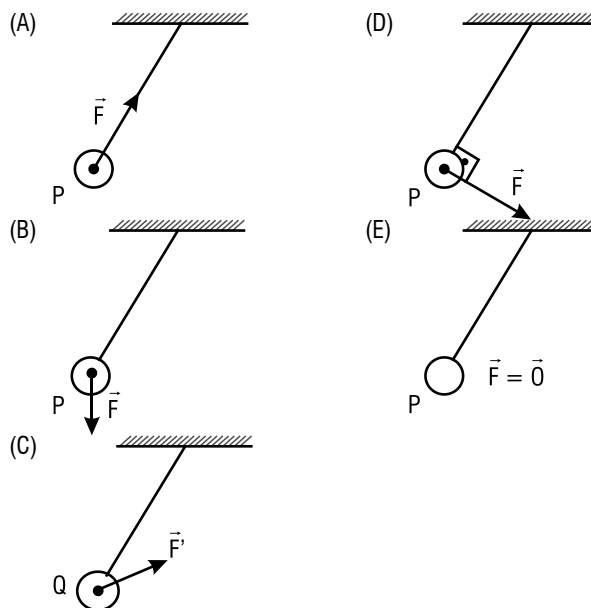


Considerando $g = 10$ m/s², calcule com que velocidade máxima, dada em km/h, o carro poderá atravessar a ponte sem derrubá-la.

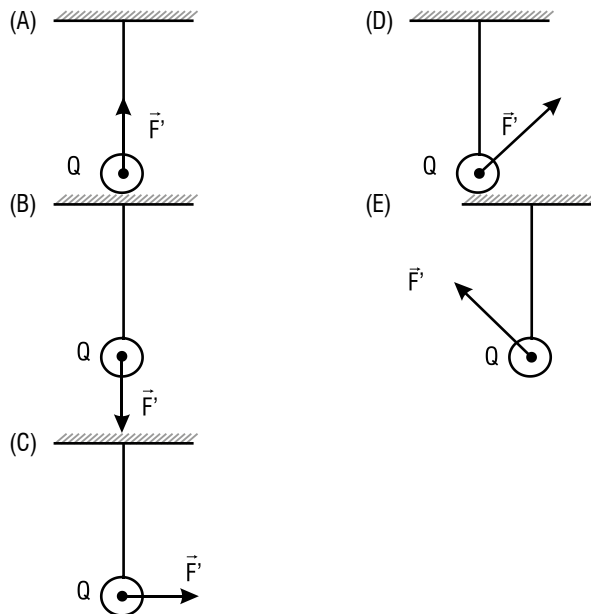
08 O pêndulo da figura oscila em condições ideais, tendo como posições de inversão do sentido do seu movimento os pontos P e R:



Assinale a opção que melhor representa a força resultante (\vec{F}) na esfera pendular, quando esta ocupa a posição P:



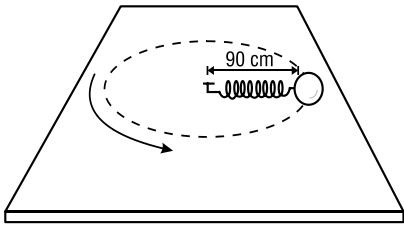
09 Com relação à situação do teste anterior, assinale a opção que melhor representa a força resultante (\vec{F}) na esfera pendular, quando esta ocupa a posição Q (mais baixa da trajetória, proveniente da posição P):



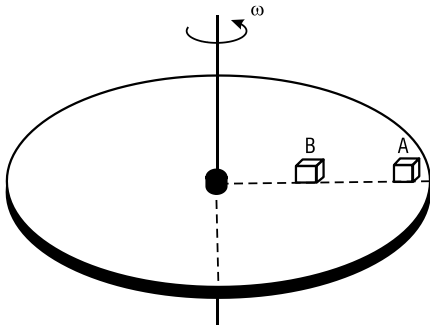
10 Considere um satélite artificial em órbita circular em torno da Terra. Seja M a sua massa e R o raio de curvatura de sua trajetória. Se a força de atração gravitacional exercida pela Terra sobre ele tem intensidade F , então pode-se afirmar que seu período de revolução vale:

- (A) $\sqrt{\frac{MR}{F}}$.
- (B) $2\pi\sqrt{\frac{MR}{F}}$.
- (C) $2\pi\sqrt{MR F}$.
- (D) $\frac{4\pi^2 MR}{F}$.
- (E) Não há dados para o cálculo.

11 Na situação esquematizada na figura, a mesa é plana, horizontal e perfeitamente polida. A mola tem massa desprezível, constante elástica igual a $2,0 \cdot 10^2$ N/m e comprimento natural (sem deformação) de 80 cm. Se a esfera (massa de 2,0 kg) descreve movimento circular e uniforme, qual o módulo da sua velocidade tangencial?



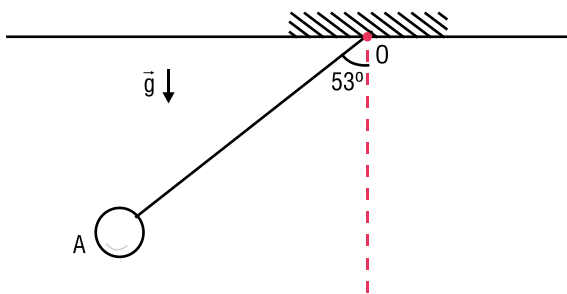
12 O esquema seguinte representa um disco horizontal, que, acoplado rigidamente a um eixo vertical, gira uniformemente sem sofrer resistência do ar:



Sobre o disco estão apoiados dois bloquinhos, *A* e *B*, constituídos de materiais diferentes, que distam do eixo 40 cm e 20 cm, respectivamente. Sabendo que, nas condições do problema, os bloquinhos estão na iminência de deslizar, obtenha:

- a. a relação v_A/v_B das velocidades lineares de *A* e de *B* em relação ao eixo.
- b. a relação μ_A/μ_B , dos coeficientes de atrito estático entre os blocos *A* e *B* e o disco.

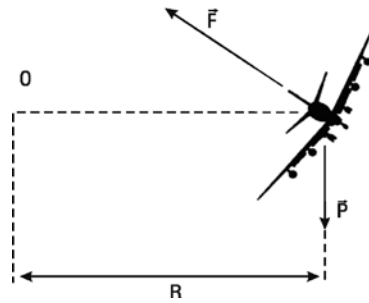
13



Na figura, representa-se um pêndulo fixo em *O*, oscilando em um plano vertical. No local, despreza-se a influência do ar e adota-se $g = 10$ m/s². A esfera tem massa de 3,0 kg, o fio é leve e inextensível, apresentando comprimento de 1,5 m. Se na posição *A* o fio forma com a direção vertical um ângulo de 53° e a esfera tem velocidade igual a 2,0 m/s, determine a intensidade da força tensora no fio. (Dados: $\sin 53^\circ = 0,80$; $\cos 53^\circ = 0,60$.)

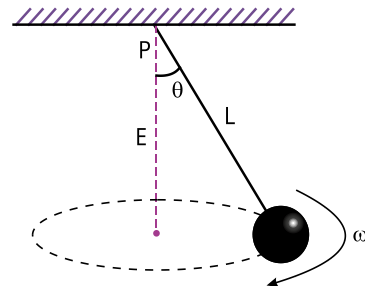
14 Na aviação, quando um piloto executa uma curva, a força de sustentação (\vec{F}) torna-se diferente do peso do avião (\vec{P}). A razão entre *F* e *P* é chamada fator de carga (*n*): $n = \frac{F}{P}$

Um avião executa um movimento circular e uniforme, conforme a figura, em um plano horizontal, com velocidade escalar de 40 m/s e com fator de carga igual a 5/3.



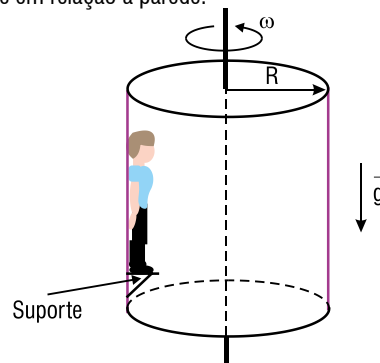
Supondo $g = 10$ m · s⁻², calcule o raio *R* da circunferência descrita pelo avião.

15 A esfera de massa *M* da figura, presa ao ponto *P* por um fio de massa desprezível e comprimento *L*, executa movimento circular uniforme em torno do eixo *E*. A aceleração da gravidade tem módulo *g*. A velocidade angular da esfera é:



- (A) $\omega = M g/L \sin \theta$.
- (B) $\omega = \sqrt{M g/tg \theta}$.
- (C) $\omega = \sqrt{g/L \cos \theta}$.
- (D) $\omega = \sqrt{M g/L \cos \theta}$.
- (E) $\omega = 2\pi/\sqrt{L/g}$.

16 Em alguns parques de diversões existe um brinquedo chamado rotor, que consiste em um cilindro oco, de eixo vertical, dentro do qual é introduzida uma pessoa. De início, a pessoa apoia-se sobre um suporte, que é retirado automaticamente quando o rotor gira com uma velocidade adequada. Admita que o coeficiente de atrito estático entre o corpo da pessoa e a parede interna do rotor valha μ . Suponha que o módulo da aceleração da gravidade seja *g* e que o rotor tenha raio *R*. Calcule a mínima velocidade angular do rotor, de modo que, com o suporte retirado, a pessoa não escorregue em relação à parede.



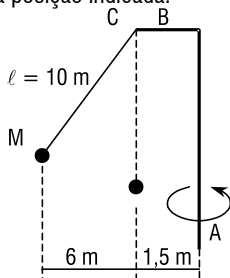
17 Um carro de dimensões desprezíveis percorre uma curva circular de raio R em movimento uniforme, sem receber a ação de forças de atrito exercidas pelo asfalto. A curva é sobrelevada de um ângulo θ , conforme indica o perfil abaixo:



Adotando para a aceleração da gravidade o valor g e desprezando a resistência do ar, calcule o módulo da velocidade do carro.

18 (IME-97) Um inseto de massa $m = 1,0$ g está pousado no disco a $12,5$ cm do eixo de rotação. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático do inseto com a superfície do disco é $\mu_e = 0,8$, determine qual o valor mínimo da velocidade angular, em rpm (rotações por minuto), necessário para arremessar o inseto para fora do disco. (Dado: $g = 10$ m/s².)

19 (IME-89) Uma massa $M = 20$ kg é suspensa por um fio de comprimento $\ell = 10$ m, inextensível e sem peso, conforme mostra a figura. A barra ABC gira em torno do seu eixo vertical com velocidade angular constante de forma que o fio atinge a posição indicada.



Determine:

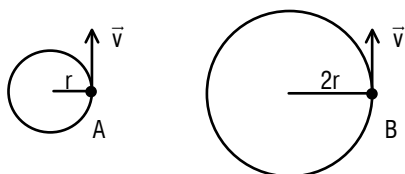
- a. a velocidade angular da barra;
- b. a tração no fio.

(Dado: $g = 10$ m/s².)

20 (AFA-99) Um bloco é colocado na borda exterior de um carrossel de raio $5,0$ metros e que dá uma volta a cada 30 segundos. Para que o bloco permaneça sobre o carrossel, o coeficiente de atrito deve ser:

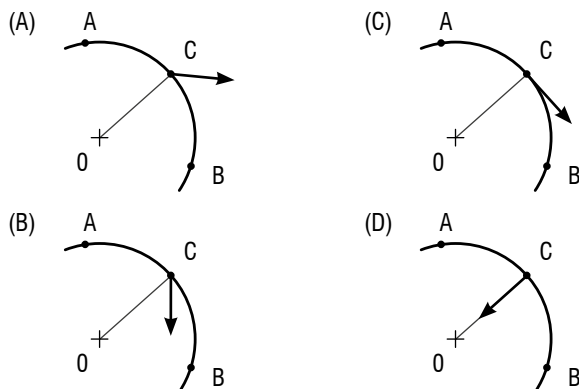
- (A) 0,02.
- (B) 0,03.
- (C) 0,04.
- (D) 0,05.

21 (AFA-02) Dois corpos, A e B, giram em movimento circular uniforme presos aos extremos de cordas de comprimentos, respectivamente, r e $2r$. Sabendo que eles giram com a mesma velocidade tangencial, pode-se dizer que:



- (A) ambos desenvolverão mesma velocidade angular.
- (B) ambos estarão submetidos à mesma força centrípeta.
- (C) em um mesmo intervalo de tempo o corpo A dará maior número de voltas que o B.
- (D) o corpo A desenvolve menor aceleração centrípeta que o B.

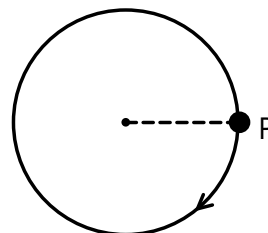
22 (AFA-03) Um corpo desenvolve movimento circular em um plano horizontal. Se no ponto A a velocidade escalar tem intensidade menor que no ponto B, então a opção em que o vetor aceleração em C está melhor representado é:



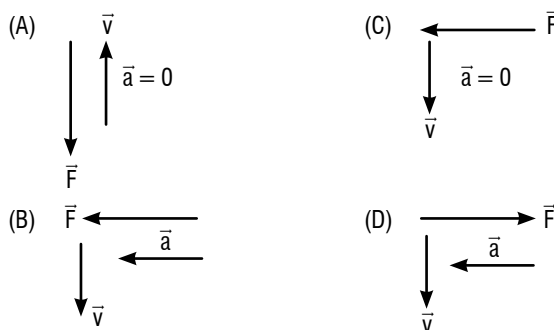
23 (AFA-04) Um carro de 1.500 kg faz uma curva sem superelevação, com um raio de 75 m, à velocidade de 54 km/h. O coeficiente de atrito mínimo que deve haver entre o pavimento da estrada e os pneus, a fim de impedir a derrapagem do carro é:

- (A) 0,1.
- (B) 0,3.
- (C) 0,5.
- (D) 0,6.

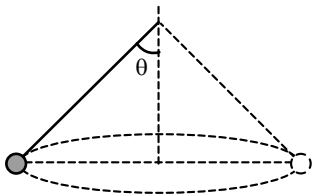
24 (AFA-05) Uma partícula descreve a trajetória circular com movimento uniforme, no sentido horário, como mostra a figura.



O conjunto de vetores que melhor representa a força resultante \vec{F} , a velocidade \vec{v} e a aceleração \vec{a} da partícula, no ponto P indicado na figura é:



25 (AFA-05) O pêndulo da figura abaixo gira apresentando um ângulo θ de abertura em relação à vertical. Afirma-se que:

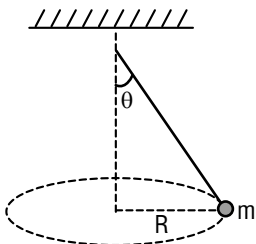


- I. a força centrípeta é a força resultante.
- II. variando a velocidade, o período permanece inalterado.
- III. a tensão no fio diminui com o aumento de θ .

Estão corretas as afirmativas:

- (A) I e II apenas.
- (B) I e III apenas.
- (C) II e III apenas.
- (D) I, II e III.

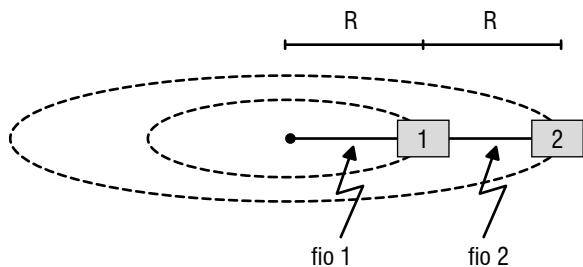
26 (AFA-08) Um corpo de massa m , preso à extremidade de um fio constituindo um pêndulo cônico, gira em um círculo horizontal de raio R , como mostra a figura.



Sendo g a aceleração da gravidade local e θ o ângulo do fio com a vertical, a velocidade do corpo pode ser calculada por:

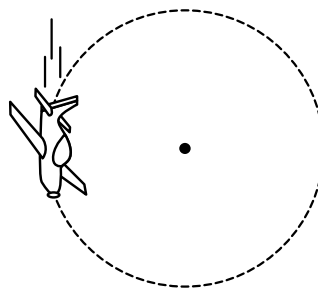
- (A) \sqrt{Rg} .
- (B) $\sqrt{2Rg}$.
- (C) $\sqrt{Rg \sin \theta}$.
- (D) $\sqrt{Rg \tan \theta}$.

27 (AFA-08) A figura abaixo representa dois corpos idênticos girando horizontalmente em MCU com velocidades lineares v_1 e v_2 . A razão $\frac{T_1}{T_2}$ entre as intensidades das trações nos fios ideais 1 e 2 é:



- (A) $\frac{2v_1^2 + v_2^2}{v_2^2}$.
- (B) $\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_2^2}$.
- (C) $\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_2^2}$.
- (D) $\frac{v_2^2}{v_1^2}$.

28 (AFA-08) Em uma apresentação da Esquadrilha da Fumaça, uma das acrobacias é o “loop”, representado pela trajetória circular da figura. Ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória, a força que o assento do avião exerce sobre o piloto é:



- (A) maior que o peso do piloto.
- (B) igual ao peso do piloto.
- (C) menor que o peso do piloto.
- (D) nula.

29 (EFOMM-94) Um móvel de massa 600 kg consegue fazer uma curva de raio 200 m, a 72 km/h. Calcule o coeficiente de atrito entre os pneus e o solo.
Dado: $g \cong 10 \text{ m/s}^2$

- (A) 0,2.
- (B) 0,4.
- (C) 0,05.
- (D) 0,3.
- (E) 0,5.

30 (ITA-69) Um satélite artificial é lançado em órbita circular equatorial, no mesmo sentido da rotação da Terra de tal modo que o seu período seja de 24 horas.

Assim sendo, um observador situado no equador poderá ver o satélite parado sempre sobre sua cabeça. Referindo-se a um sistema de coordenadas, rigidamente ligado à Terra, esse observador dirá que isso acontece porque:

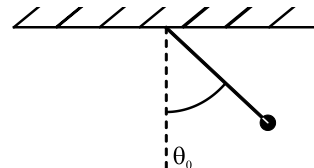
- (A) sobre o satélite atua uma força centrífuga que equilibra a força da gravidade da Terra.
- (B) existe uma força tangente à órbita que dá ao satélite um movimento igual ao da Terra e que impede a sua queda.
- (C) a força centrípeta que atua sobre o satélite é igual a força da gravidade;
- (D) em relação ao sol, o satélite também está parado.
- (E) a essa distância em que o satélite se encontra seu peso é nulo.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

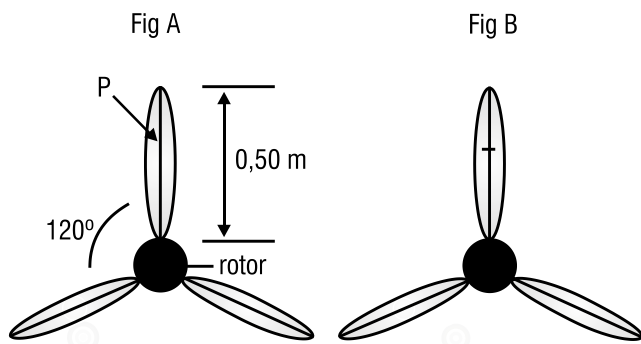
01 (IME-89) A esfera de um pêndulo tem massa de 0,2 kg e é liberada do repouso na posição mostrada. Sabe-se que o cabo se rompe com uma tração de 5,0 N.

Determine o valor de h para o ponto em que ocorrerá a ruptura.

- Dados:
- $l = 0,75 \text{ m}$
 - $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
 - $\theta_0 = 90^\circ$



02 Um ventilador de teto, com eixo vertical, é constituído por três pás iguais e rígidas, encaixadas em um rotor de raio $R = 0,10 \text{ m}$, formando ângulos de 120° entre si. Cada pá tem massa $M = 0,20 \text{ kg}$ e comprimento $L = 0,50 \text{ m}$. No centro de uma das pás foi fixado um prego P , com massa $m_p = 0,020 \text{ kg}$, que desequilibra o ventilador, principalmente quando este se movimentar. Suponha, então, o ventilador girando com uma velocidade de 60 rotações por minuto e determine:

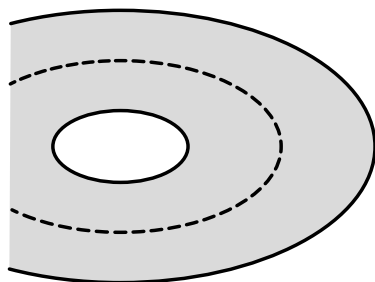


- a. a intensidade da força radial horizontal F , em newtons, exercida pelo prego sobre o rotor.
- b. a massa M_0 , em kg, de um pequeno contrapeso que deve ser colocado em um ponto D_0 , sobre a borda do rotor, para que a resultante das forças horizontais, agindo sobre o rotor, seja nula.
- c. a posição do ponto D_0 , localizando-a no esquema anterior (fig. B). (Se necessário, utilize $\pi = 3$.)

03 (AFA-01) Um veículo faz uma curva de raio R , sem derrapar, apesar de não haver atrito. Nesse caso, o ângulo de inclinação da pista é tal que sua tangente é igual a $1/2$. Isso posto, podemos afirmar que a força:

- (A) normal é metade do peso do veículo.
- (B) centrípeta máxima é metade da força normal.
- (C) centrípeta máxima é metade do peso do veículo.
- (D) normal é metade da soma do peso e da centrípeta.

04 (AFA-02) A figura representa uma curva plana de um circuito de fórmula 1.



Se, durante uma corrida, um piloto necessitar fazer tal curva com velocidade elevada, evitando o risco de derrapar, deverá optar pela trajetória representada em qual alternativa?

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

05 (AFA-08) Com relação à força de atrito, apresentam-se três situações e uma afirmação relativa a cada uma.

Situação 1: Um automóvel faz uma curva em que o lado interno da pista é mais baixo que o lado externo.



Afirmção 1: A força de atrito entre os pneus e a pista depende do número de passageiros do automóvel.

Situação 2: Duas crianças de diferentes pesos descem um tobogã permanecendo em contato físico.



Afirmção 2: Por efeito da força de atrito, a criança mais leve, que na frente, será empurrada pela outra.

Situação 3: Uma pessoa se movimenta em relação ao solo.



Afirmção 3: A força de atrito é oposta ao sentido do movimento da sola do sapato.

Estão corretas as afirmações:

- (A) 1 e 2 apenas.
- (B) 2 e 3 apenas.
- (C) 1 e 3 apenas.
- (D) 1, 2 e 3.

06 (AFA-07) Durante um show de patinação, o patinador, representado na figura abaixo, descreve uma evolução circular, com velocidade escalar constante, de raio igual a $10,8$ m. Considerando desprezíveis quaisquer resistências, a velocidade do patinador, ao fazer a referida evolução, é igual a:



Dados: $\sin 53^\circ = 0,80$; $\cos 53^\circ = 0,60$

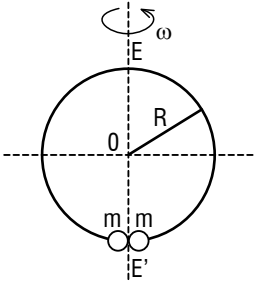
- (A) 12 m/s.
- (B) 7 m/s.
- (C) 8 m/s.
- (D) 9 m/s.

07 (ITA-73) Um garoto dispõe de um elástico em cuja extremidade ele prende uma pedra de 10 gramas: Dando um raio $R = 1,00$ m (comprimento de repouso), ele faz a pedra girar em um círculo horizontal sobre sua cabeça com uma velocidade angular $\omega = 2,0$ rad/s. Considerando-se agora que o novo raio do círculo, R' , é constante, e que a constante elástica do elástico é $k = 2,0 \times 10^{-10}$, qual a diferença entre R' e R ?

- (A) 2,5 cm.
- (B) 2,0 m.
- (C) 2,0 cm.
- (D) 0,20 cm.
- (E) 0,25 cm.

08 (ITA-79) Um aro metálico circular e duas esferas são acoplados conforme a figura a seguir. As esferas dispõem de um furo diametral que lhes permite circular pelo aro. O aro começa a girar, a partir do repouso,

em torno do diâmetro vertical EE' , que passa entre as esferas, até atingir uma velocidade angular constante ω . Sendo R o raio do aro, m a massa de cada esfera e desprezando-se os atritos, pode-se afirmar que:



- (A) as esferas permanecem na parte inferior do aro porque essa é a posição de mínima energia potencial.
- (B) as esferas permanecem a distâncias r e de EE' tal que, se 2θ for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelo centro das esferas, na posição de equilíbrio estável, então, tan $\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$, estando as esferas abaixo do diâmetro horizontal do aro.
- (C) as esferas permanecem a distâncias r e de EE' tal que, se 2θ for o ângulo central cujo vértice é o centro do aro e cujos lados passam pelo centro das esferas, na posição de equilíbrio estável, então, tan $\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$, estando as esferas acima do diâmetro horizontal do aro.
- (D) as alternativas (B) e (C) anteriores estão corretas.
- (E) a posição de maior estabilidade ocorre quando as esferas estão nos extremos de um mesmo diâmetro.

09. (ITA-89) As figuras representam sistemas de eixos, um dos quais $(0, x, y, z)$ é inercial e outro $(0, x', y', z')$ está em movimento relativamente ao primeiro \vec{v} , \vec{a} e $\vec{\omega}$, respectivamente: velocidade, aceleração e velocidade angular, todas constantes. Observadores ligados aos referenciais $(0, x', y', z')$ observam, nos seus referenciais, uma partícula de massa m dotada de aceleração \vec{a} . Qual dos observadores poderá escrever a expressão $\vec{F} = m\vec{a}$, onde \vec{F} é a força que atua na partícula de massa m , medida no referencial inercial $(0, x, y, z)$?

- (A)
- (B)

- (C)
- (D)

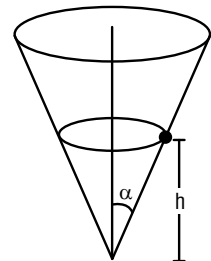
(E) Nenhum deles poderá escrever a expressão $\vec{F} = m\vec{a}$

10. (ITA-89) Uma pedra de massa m presa a um barbante de comprimento L é mantida em rotação em um plano vertical. Qual deve ser a menor velocidade tangencial da pedra no topo da trajetória (v_m) para que o barbante ainda se mantenha esticado? Qual será a tensão (T) no barbante quando a pedra estiver no ponto mais baixo da trajetória?

	v_m	T
(A)	\sqrt{gL}	$6 mg$
(B)	\sqrt{gL}	mg
(C)	gL^2	$2 mg$
(D)	$2\sqrt{gL}$	$\sqrt{2} mg$
(E)	\sqrt{gL}	0

11. (ITA-97) Uma massa puntual se move, sob a influência da gravidade e sem atrito, com velocidade angular ω em um círculo a uma altura $h \neq 0$ na superfície interna de um cone que forma um ângulo α com seu eixo central, como mostrado na figura. A altura h da massa em relação ao vértice do cone é:

- (A) $\frac{g}{\omega^2}$.
- (B) $\frac{g}{\omega^2} \frac{1}{\sin \alpha}$.
- (C) $\frac{g \cot \alpha}{\omega^2 \sin \alpha}$.
- (D) $\frac{g}{\omega^2} \cot^2 \alpha$.
- (E) Inexistente, pois a única posição de equilíbrio é $h = 0$.



12. (IME-94) Uma pequena esfera está suspensa por um fio ideal que está preso ao teto de um vagão. O trem faz uma curva plana horizontal de raio r , com velocidade v constante. Determine o ângulo que o fio forma com a direção vertical.

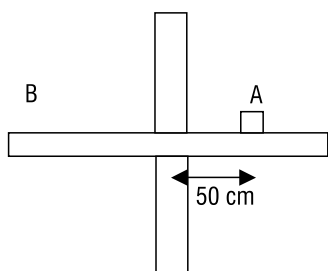
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 (ITA-94) Um motociclista trafega em uma estrada reta e nivelada atrás de um caminhão de 4 m de largura, perpendicularmente à carroceria. Ambos estão trafegando à velocidade constante de 72 km/h, quando o caminhão se detém instantaneamente, devido a uma colisão. Se o tempo de reação do motorista for 0,5 s, a que distância mínima ele deverá trafegar para evitar o choque apenas com mudança de trajetória? Considere o coeficiente de atrito entre o pneu e o solo $\mu = 0,8$, aceleração gravitacional $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a trajetória original o levaria a colidir no meio da carroceria.

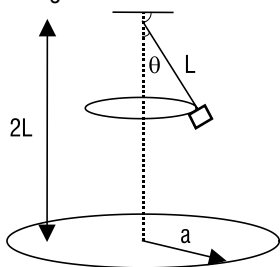
- (A) 19,6 m.
- (B) 79,3 m.
- (C) 69,3 m.
- (D) 24,0 m.
- (E) 14,0 m.

02 Um motoqueiro efetua uma curva de raio de curvatura de 80 m a 20 m/s em um plano horizontal. A massa total (motoqueiro + moto) é de 100 kg. Se o coeficiente de atrito estático entre o solo e o pneu da moto vale 0,6, quanto vale a máxima força de atrito estático? Qual a tangente do ângulo de inclinação θ da moto em relação à vertical?

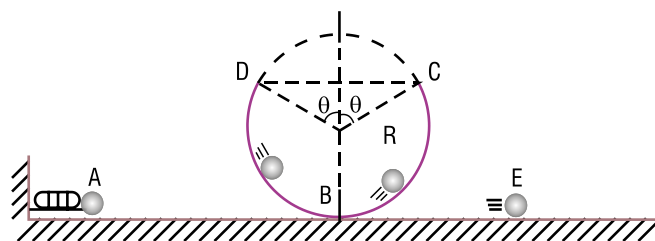
03 O disco B, na figura, tem, em determinado instante, velocidade angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$ e aceleração angular $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$, em torno de um eixo vertical. Qual o menor coeficiente de atrito que deve existir entre o bloco A (colocado a 50 cm do eixo) e o disco para que o bloco não deslize em relação a ele, nesse instante?



04 Um balde é amarrado a uma corda de comprimento $L = 1 \text{ m}$ e é posto a girar em um círculo horizontal. Pingos d'água escapando do balde caem e batem no piso ao longo do perímetro de um círculo de raio a . Determine o raio a quando $\sin \theta = \frac{3}{5}$. Suponha $g = 10 \text{ m/s}^2$.

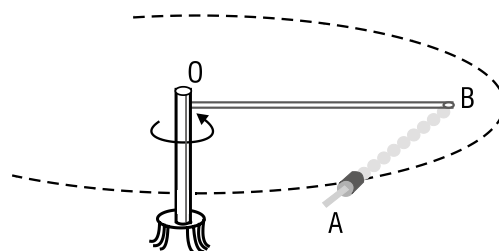


05 No ponto A da figura, um pequeno corpo de massa $m = 0,01 \text{ kg}$, inicialmente em repouso, comprime uma mola ideal de constante elástica $k = 2 \text{ N/m}$. A compressão inicial da mola em relação à sua posição de equilíbrio é denotada por x . Em um dado instante, a mola subitamente impulsiona o corpo, que passa a mover-se sobre uma superfície sem atrito. Tal superfície é composta por seções retilíneas e horizontais AB e BE, e por porções curvas BC e DB. As partes curvas da superfície são arcos de circunferência que compõem um loop circular e vertical de raio $R = 1 \text{ m}$, o qual teve a porção CD, de abertura angular $2\theta = 120^\circ$, completamente retirada.

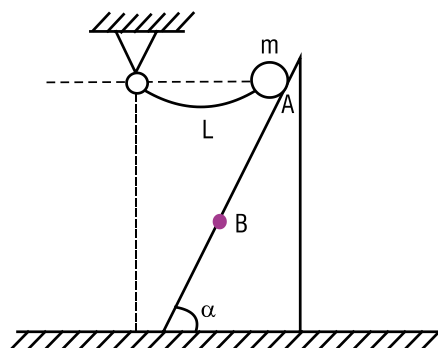


- a. Calcule o valor mínimo da compressão inicial da mola para que o corpo, partindo em repouso do ponto A, atinja o ponto E sem perder contato com a superfície ABCDE, a não ser no trecho entre C e D.
- b. Nas circunstâncias do item a, calcule a força normal que o loop exerce sobre o corpo quando este passa pelo ponto C. Indique claramente o módulo, a direção e o sentido do vetor.

06 O instrumento da figura consiste em uma barra em L lisa, disposta em um plano horizontal, e um pequeno corpo A de massa m , ligado por uma mola ao ponto B. A constante elástica da mola é k . O sistema gira ao redor de um eixo vertical que passa pelo ponto O, a uma velocidade angular ω . Quanto vale a deformação relativa da mola? O resultado depende do sentido de rotação? Obs.: O corpo A pode deslocar-se sem atrito ao longo da barra em L.

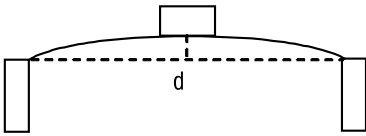


07 (ITA-99) Um pêndulo é constituído por uma partícula de massa m suspensa por um fio de massa desprezível, flexível e inextensível, de comprimento L . O pêndulo é solto a partir do repouso, na posição A, e desliza sem atrito ao longo de um plano de inclinação α , como mostra a figura. Considere que o corpo abandona suavemente o plano no ponto B, após percorrer uma distância d sobre ele. A tração no fio, no instante em que o corpo deixa o plano, é:



- (A) $mg (d/L) \cos \alpha$.
- (B) $mg \cos \alpha$.
- (C) $3 mg (d/L) \sin \alpha$.
- (D) $mg (d/L) \sin \alpha$.
- (E) $3 mg$.

08 Existe uma ponte de forma parabólica sobre um rio com $d = 100$ m de largura. O ponto mais alto da ponte está 5 metros acima da base dela. Um carro de massa 1.000 kg está atravessando a ponte a uma velocidade constante de 20 m/s. Calcule a força feita na ponte pelo carro quando ele está no ponto mais alto da ponte.



09 Um corpo suspenso em repouso de um ponto fixo por uma mola de comprimento natural L_0 gera um novo comprimento da mola igual a L_1 . Se esse corpo for movido em uma trajetória circular horizontal (como um pêndulo cônico), sendo que o fio forma um ângulo θ com a vertical, qual o período de revolução?

10 (FUVEST-04) Um brinquedo consiste em duas pequenas bolas A e B , de mesma massa M , e um fio flexível: a bola B está presa na extremidade do fio e a bola A possui um orifício pelo qual o fio passa livremente. Para o jogo, um operador (com treino!) deve segurar o fio e girá-lo, de tal forma que as bolas descrevam trajetórias circulares, com o mesmo período T e raios diferentes. Nessa situação, como indicado na figura 1, as bolas permanecem em lados opostos em relação ao eixo vertical fixo que passa pelo ponto O . A figura 2 representa o plano que contém as bolas e que gira em torno do eixo vertical, indicando os raios e os ângulos que o fio faz com a horizontal.

Assim, determine:

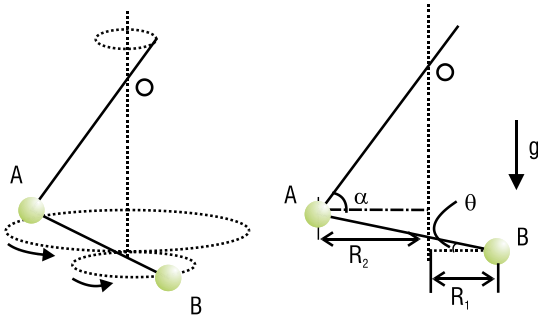


Figura 1

Figura 2

- o módulo da força de tensão F , que permanece constante ao longo de todo o fio, em função de M e g .
- a razão $K = \sin \alpha / \sin \theta$, entre os senos dos ângulos que o fio faz com a horizontal.
- o número N de voltas por segundo que o conjunto realiza quando o raio R_1 da trajetória descrita pela bolinha B for igual a 0,10 m.

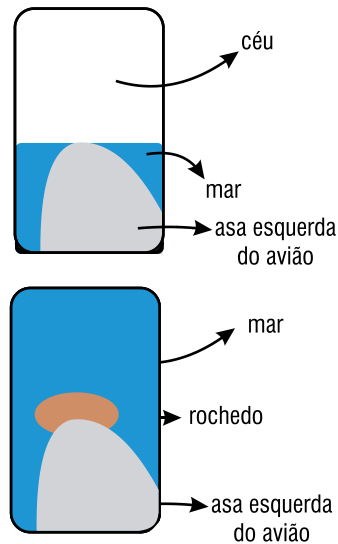
Note e adote:

Não há atrito entre as bolas e o fio.

Considere $\sin \theta \approx 0,4$ e $\cos \theta \approx 0,9$; $\pi \approx 3$.

11 (FUVEST) Um avião voa horizontalmente sobre o mar com velocidade V constante (a ser determinada). Um passageiro, sentado próximo ao centro de massa do avião, observa que a superfície do suco de laranja, que está em um copo sobre a bandeja fixa ao seu assento, permanece paralela ao plano da bandeja. Estando junto à janela, e olhando em uma direção perpendicular à da trajetória do avião, o passageiro nota que a ponta da asa esquerda

do avião tangencia a linha do horizonte, como mostra a figura A . O piloto anuncia que, devido a um problema técnico, o avião fará uma curva de 180° para retornar ao ponto de partida. Durante a curva, o avião se inclina para a esquerda, de um ângulo $\theta = 30^\circ$, sem que haja alterações no módulo de sua velocidade e na sua altura. O passageiro, olhando sempre na direção perpendicular à da velocidade do avião, observa que a ponta da asa esquerda permanece durante toda a curva apontando para um pequeno rochedo que aflora do mar, como representado na figura B . O passageiro também nota que a superfície do suco permaneceu paralela à bandeja, e que o avião percorreu a trajetória semicircular de raio R (a ser determinado), em 90 s. Percebe, então, que com suas observações, e alguns conhecimentos de Física que adquiriu no ensino médio, pode estimar a altura e a velocidade do avião.



- Encontre uma relação entre V , R , g e θ , para a situação descrita.
- Estime o valor da velocidade V do avião, em km/h ou m/s.
- Estime o valor da altura H , acima do nível do mar, em metros, em que o avião estava voando.

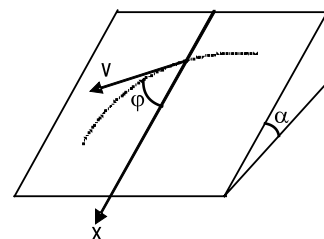
Note/adote

$$\pi = 3; \sin 30^\circ = 0,5; \cos 30^\circ = 0,86; \tan 30^\circ = 0,6 = 1/1,7$$

Aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$

As distâncias envolvidas no problema são grandes em relação às dimensões do avião.

12 Sobre um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal foi colocado um pequeno bloco A ao qual foi comunicada uma velocidade inicial v_0 . Encontre a relação entre a velocidade do bloco e o ângulo φ , se o coeficiente de atrito $\mu = \tan \alpha$ e, no momento inicial, $\varphi_0 = \pi/2$. Obs.: O eixo x está paralelo às extremidades do plano e φ é o ângulo entre a velocidade e o eixo x .



1. 2ª Lei da Termodinâmica (1ª forma)

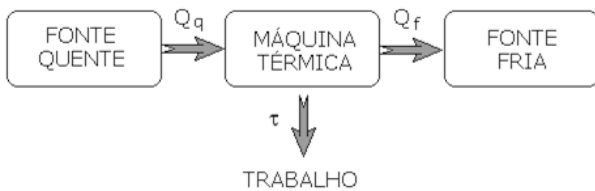
A 2ª Lei da Termodinâmica pode ser enunciada de várias formas; uma que nos é conveniente nesta primeira abordagem é:

“O calor só pode passar espontaneamente de um corpo para outro de temperatura mais baixa que o primeiro. É impossível de se converter totalmente calor em outra forma de energia.”

Por exemplo, para operarmos uma máquina térmica (que são máquinas que se utilizam da transferência de calor para produzir trabalho), precisamos de duas fontes: uma quente e uma fria. Parte do calor que sai da fonte quente vai para a fonte fria, e outra parte é convertida em trabalho útil.

2. Máquinas térmicas

Estudemos as máquinas térmicas tendo em mente as leis da Termodinâmica. Para isso, façamos um esquema geral:



Perceba que, para que a máquina térmica execute um trabalho τ , é necessário ligá-la a duas fontes de calor: uma fonte quente e uma fonte fria. Espontaneamente, o calor tende a se transferir da fonte quente para a fonte fria, pelo 2º princípio da termodinâmica. A máquina térmica “rouba” parte desse calor e o converte em trabalho, de modo que parte do calor Q_q fornecido pela fonte quente chega à fonte fria como Q_f , e a outra parte se transforma em trabalho útil τ . É claro que, pela lei da conservação da energia:

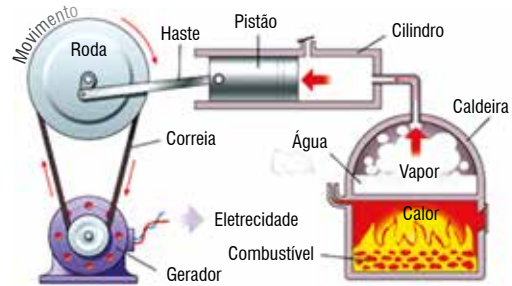
$$\tau = Q_q - Q_f$$

Também podemos pensar no rendimento η dessa máquina térmica. Por definição, seu rendimento calcula qual a fração de calor provindo da fonte quente Q_q que efetivamente se torna trabalho útil τ , ou:

$$\eta = \frac{\tau}{Q_q} = \frac{Q_q - Q_f}{Q_q} = 1 - \frac{Q_f}{Q_q}$$

Lembre-se que rendimento é uma grandeza adimensional, a qual deve ser expressa como um número entre 0 e 1, ou em porcentagem.

As principais máquinas térmicas reais usam como substância de trabalho vapor-d'água e, como fonte de calor, o calor provindo de uma combustão de madeira, carvão ou de reações nucleares.

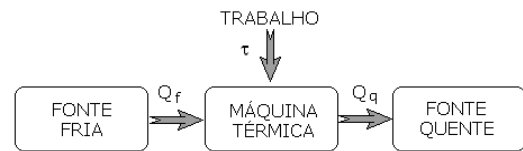


Exemplo real de uma máquina térmica

Disponível em: <gemb-arhte.blogspot.com.br>.

Refrigeradores

Um refrigerador é uma máquina que, operando entre duas fontes, uma quente e uma fria, retira calor da fonte fria e o entrega à fonte quente. É claro que esse processo não é espontâneo; logo, para efetuá-lo, a máquina térmica precisa receber trabalho. Observe o esquema geral:



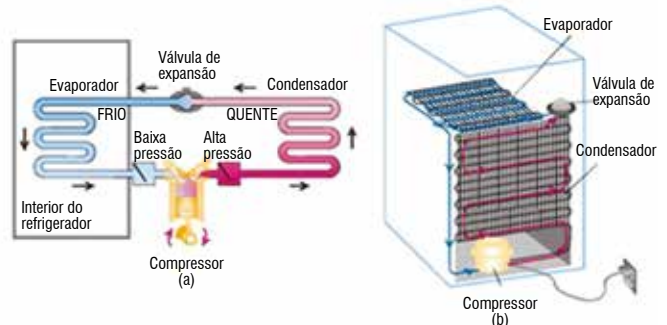
O refrigerador opera recebendo um trabalho τ de uma fonte externa, de modo que isso possibilite retirar calor Q_f de uma fonte fria e entregá-lo à fonte quente, através de um processo não espontâneo. Pela conservação de energia, o calor total Q_q que chega à fonte quente é dado por:

$$Q_q = \tau + Q_f$$

No caso de refrigeradores, não definimos para eles um rendimento, e sim algo semelhante chamado “eficiência” (e). A eficiência de um refrigerador é entendida como a fração de calor Q_f retirada da fonte fria por trabalho cedido ao refrigerador:

$$e = \frac{Q_f}{\tau} = \frac{Q_f}{Q_q + Q_f} = \frac{1}{\frac{Q_q}{Q_f} + 1}$$

Observe que, diferentemente do rendimento, a eficiência não tem a restrição de estar compreendida entre 0 e 1. Por essa razão, **não** pode ser expresso em porcentagem. Quanto maior o calor retirado da fonte fria e quanto menor o trabalho necessário para isso, maior será a eficiência do refrigerador.



Exemplo real de um refrigerador

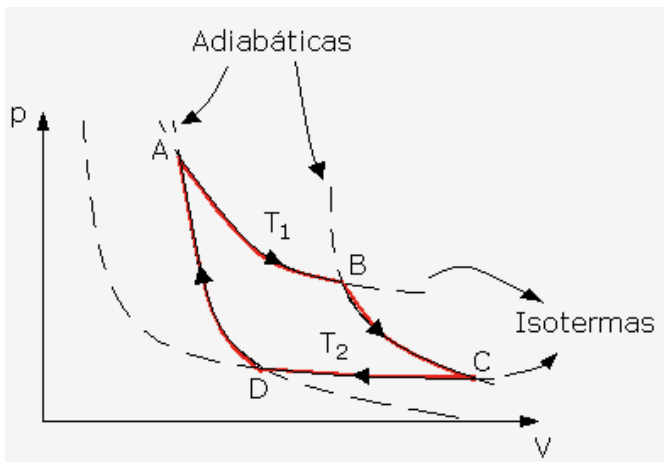
Disponível em: <<http://www.fisica.ufmg.br/>>.

Ciclo de Carnot

Antigamente, acreditava-se na possibilidade de se criar máquinas térmicas com rendimento de 100%, isto é, uma máquina que poderia converter integralmente em trabalho o calor retirado de uma fonte quente. O jovem engenheiro francês Nicolas Carnot demonstrou a impossibilidade dessa ambição ao demonstrar dois fatos:

- I. Fixadas duas fontes (uma quente e uma fria), existe um ciclo que, operado entre tais fontes, proporciona a máxima extração de trabalho possível do fluxo de calor.
- II. É impossível que o ciclo supracitado tenha rendimento de 100%.

Uma máquina térmica de rendimento máximo usa como substância de trabalho um fluido que, trabalhando entre duas fontes de calor – uma quente e uma fria – opera em ciclos. Cada ciclo é composto por duas transformações isotérmicas e duas transformações adiabáticas, unidas entre si. Observe o diagrama de Clapeyron, que mostra um desses ciclos – denominado “ciclo de Carnot”:



Repare que as isotermas são hipérbolas, pois há uma relação de proporcionalidade inversa entre pressão e volume; contudo, as adiabáticas são mais inclinadas, pois, pela equação de Poisson (lembre-se: em uma transformação adiabática, $p \cdot V^\gamma = \text{constante}$), a variável de estado “volume” está elevada a γ , fator maior do que 1; e na equação de Boyle ($p \cdot V = \text{constante}$), está elevada a 1.

No gráfico, temos:

- A → B: expansão isotérmica a temperatura T_q (recebe calor da fonte quente);
- B → C: expansão adiabática, de T_q a T_f ;
- C → D: compressão isotérmica a temperatura T_f , com $T_f < T_q$ (cede calor à fonte fria);
- D → A: compressão adiabática, de T_f a T_q .

Assim como uma máquina térmica qualquer, durante a evolução cíclica, o sistema recebeu um calor Q_q de uma fonte quente, forneceu um calor Q_f à fonte fria e realizou um trabalho τ , que é numericamente igual à área do ciclo, com $\tau = Q_q + Q_f$.

Já sabemos que, em um ciclo de uma máquina térmica qualquer, o rendimento é dado por:

$$\eta = \frac{\tau}{Q_q} = \frac{Q_q - Q_f}{Q_q} = 1 - \frac{Q_f}{Q_q}$$

Porém, para o caso específico de um ciclo de Carnot, é possível demonstrarmos que o rendimento *também* pode ser escrito como:

$$\eta = \frac{T_q - T_f}{T_q} = 1 - \frac{T_f}{T_q}$$

em que T_q é a temperatura absoluta da fonte quente (no diagrama anterior, T_1) e T_f , a temperatura absoluta da fonte fria (no diagrama anterior, T_2). A demonstração dessa expressão encontra-se no próximo item.

Há, ainda, o Teorema de Carnot, que enuncia:

“O rendimento de uma máquina térmica que funcione segundo um ciclo de Carnot é máximo.”

Observe que ele afirma que, fixadas duas fontes de calor (uma quente e uma fria), a máquina térmica que pode extrair o máximo de trabalho do processo é aquela que opera em um ciclo de Carnot.

Observe ainda que esse rendimento não pode ser de 100%, pois $\eta = 1$ conduz a um $T_f = 0$ no ciclo de Carnot – o que é impossível pela 2ª Lei da Termodinâmica, que afirma que, para haver produção de trabalho e transferência de calor, a fonte fria deve continuamente receber calor.

No caso de refrigeradores, também temos uma nova expressão para sua eficiência máxima:

$$e = \frac{1}{\frac{Q_q}{Q_f} + 1} = \frac{1}{-\frac{T_q}{T_f} + 1}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Uma máquina térmica trabalha entre as temperaturas de 300 K e 600 K.

Em cada ciclo, a máquina retira 221 J de calor da fonte quente e rejeita 170 J de calor para a fonte fria. O rendimento da máquina e o rendimento máximo, em porcentagem, que ela poderia ter com as temperaturas entre as quais opera são, respectivamente:

- (A) 44 e 56.
- (B) 23 e 50.
- (C) 50 e 77.
- (D) 23 e 77.

Solução: Letra B.

Rendimento real: $e = 1 + \frac{Q_f}{Q_q} = 1 + \frac{-170}{221} = 0,23 = 23\%$

Rendimento máximo: $e = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{300}{600} = 0,5 = 50\%$

Atenção aos sinais

Caso você queira usar os valores em módulo, é necessário fazer um ajuste nas seguintes fórmulas.

Relação entre calor e temperatura de Carnot:

$$\frac{Q_q}{Q_f} = -\frac{T_q}{T_f} \text{ passa a ser } \frac{Q_q}{Q_f} = \frac{T_q}{T_f}$$

Trabalho total de um ciclo: $\tau = Q_q + Q_f$, passa a ser $\tau = Q_q - Q_f$

Rendimento de máquina térmica: $e = 1 + \frac{Q_f}{Q_q}$ passa a ser $e = 1 - \frac{Q_f}{Q_q}$

Rendimento de refrigerador: $e = \frac{1}{\frac{Q_q}{Q_f} + 1}$ passa a ser $e = \frac{1}{\frac{Q_q}{Q_f} - 1}$

02 Uma geladeira industrial consome 20 MJ em um dia para manter em -23°C a temperatura interior e o ambiente externo é muito quente (em média 77°C). Sabe-se que, em média, a quantidade de calor lançada para esse ambiente externo é de, aproximadamente, 50% maior que a energia necessária para a geladeira operar.

Determine:

- O calor recebido pela fonte quente
- A eficiência desse refrigerador
- A eficiência máxima desse refrigerador para as condições do problema

Solução:

a. $\tau = -20 \text{ MJ}$

$Q_c = 1,5 \times 20 = -30 \text{ MJ}$

Logo

$\tau = Q_c + Q_f \rightarrow -20 = -30 + Q_f \Rightarrow Q_f = 10 \text{ MJ}$

b. $e = \frac{Q_c}{Q_f + 1} = \frac{-30}{10 + 1} = -0,5$ (Não pode colocar em %)

c. $e = \frac{1}{-\frac{350}{250} + 1} = -2,5$

03 Imagine uma máquina de Carnot que opera entre as temperaturas $T_A = 800 \text{ K}$ e $T_B = 300 \text{ K}$. A máquina realiza 2200J de trabalho em cada ciclo, o qual leva 0,25 s.

- Qual a eficiência dessa máquina?
- Qual é a potência média dessa máquina?
- Quanta energia Q_A é extraída sob a forma de calor do reservatório de alta temperatura em cada ciclo?

Solução:

a. $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{300}{800} = 0,625 = 62,5\%$

b. $P = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{2200}{0,25} = 8800 \text{ W}$

c. $\frac{Q_q}{Q_f} = -\frac{T_q}{T_f} = -\frac{800}{300} \rightarrow Q_f = -\frac{3}{8} Q_q$

$\tau = Q_c + Q_f \rightarrow 2200 = Q_c - \frac{3}{8} Q_c \rightarrow Q_c = 3520 \text{ J}$

04 Um inventor alega ter construído uma máquina que possui uma eficiência de 75% quando operada entre as temperaturas dos pontos de ebulição e congelamento da água. Isso é possível?

Solução:

Atenção: Não esqueça que a unidade de temperatura deve sempre ser Kelvin!

O rendimento máximo é dado por $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_q} = 1 - \frac{273}{373} = 26,8\%$

Logo, não é possível.

Demonstração da Fórmula de Rendimento Carnotiano

- Entre A e B , no gráfico $P \times V$ anterior, é válida a expressão de transformação isotérmica:

$$Q_q = \tau_{ab} = nRT_q \ln \frac{V_B}{V_A}$$

- Entre C e D , no gráfico $P \times V$ anterior, é válida a expressão de transformação isotérmica:

$$Q_f = \tau_{cd} = nRT_f \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Dividindo as equações acima, temos:

$$\frac{Q_q}{Q_f} = \frac{T_q}{T_f} \cdot \frac{\ln \frac{V_B}{V_A}}{\ln \frac{V_D}{V_C}} \quad (\text{equação 1})$$

- Entre B e C , no gráfico $P \times V$ anterior, é válida a expressão de transformação adiabática:

$$P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma \rightarrow \frac{nRT_q}{V_B} V_B^\gamma = \frac{nRT_f}{V_C} V_C^\gamma \rightarrow T_q V_B^{\gamma-1} = T_f V_C^{\gamma-1}$$

- Entre D e A , no gráfico $P \times V$ anterior, é válida a expressão de transformação adiabática:

$$P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma \rightarrow \frac{nRT_q}{V_A} V_A^\gamma = \frac{nRT_f}{V_D} V_D^\gamma \rightarrow T_q V_A^{\gamma-1} = T_f V_D^{\gamma-1}$$

Dividindo as equações anteriores, temos:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} \quad (\text{equação 2})$$

Combinando as equações (1) e (2):

$$\boxed{\frac{Q_q}{Q_f} = -\frac{T_q}{T_f}}$$

4. Processos reversíveis e irreversíveis

Denomina-se processo reversível aquele em que o sistema passa por estágios ('caminho') de equilíbrio intermediário. O processo pode ser revertido, passando pelos mesmos estágios de equilíbrio, retornando às condições iniciais sem a interferência externa.

Do ponto de vista dos gases ideais, em outras palavras, podemos dizer que os processos reversíveis são aqueles em que é possível traçar o gráfico ($P \times V$ ou $P \times T$ ou $V \times T$).

Na verdade, na natureza, todos os processos são irreversíveis! Os processos reversíveis são uma simplificação teórica (modelos teóricos). Exemplo de um **processo reversível** (aproximadamente)

Compressão lenta (processo quasi-estático) de um gás de modo que, em cada instante, o sistema permaneça em equilíbrio termodinâmico. A compressão muito lenta (isotérmica) de um gás, através de um êmbolo de seringa, é praticamente um processo reversível, pois ao largar-se, o êmbolo, após a compressão, volta à posição inicial. A energia fornecida ao gás sob a forma de trabalho, quando este é comprimido, é então libertada para os arredores quando o gás se expande.

Exemplo de um **processo irreversível**

Expansão livre de um gás. Expansão livre é um processo em que um sistema físico – geralmente um gás ideal – tem seu volume instantaneamente aumentado, ou tem seu volume aumentado de forma que este aumento no volume não se dê em virtude da pressão que ele exerce sobre as fronteiras móveis do sistema, pressão que, durante a expansão, reduz-se a zero. Não há, pois, dispêndio de energia (nem calor nem trabalho) por parte do sistema para se realizar tal expansão.

Entropia

Em 1865, Rudolf Clausius utilizou o conceito para explicar como as Leis da Natureza podem atuar em um sistema isolado tornando-o sempre mais desorganizado.

Este conceito levou à definição da **entropia**, que seria a medida da desordem de um sistema. Este conceito poderia explicar mais uma diferença entre os processos reversíveis e irreversíveis, além de indicar o sentido natural (espontâneo) dos processos, como um simples objeto caindo, uma pedra de gelo derretendo, a expansão de um gás, envelhecimento dos seres vivos, etc.

5. Introdução à Entropia

A primeira lei da termodinâmica diz respeito à conservação da energia em um processo. Porém, ela não diz nada a respeito da possibilidade de esse processo ocorrer naturalmente (espontaneamente).

Por exemplo, embora a energia se conserve em um modelo imaginário em que uma poça-d’água se congele formando um cubo de gelo à temperatura ambiente, isso não ocorre espontaneamente. O ambiente não retirará energia da poça para que a água se congele nesse modelo. Da mesma forma, sabemos que é impossível um processo espontâneo em que parte da energia cinética das moléculas do chão sejam transferidas para uma pedra sobre ele, de modo que a pedra atinja uma altura e que a nova energia potencial gravitacional da pedra, em sua altura limite, seja igual à energia cinética por ela recebida – embora tal processo seja, pelos olhos da 1ª Lei, possível.

A segunda lei da termodinâmica é uma resposta para a previsão de espontaneidade de um processo. Associada a essa lei, define-se uma grandeza termodinâmica útil chamada “entropia”. Na verdade, a todas as leis da termodinâmica associam-se “grandezas úteis”. À lei zero foi associada a grandeza “temperatura”, e à primeira, a grandeza “energia”.

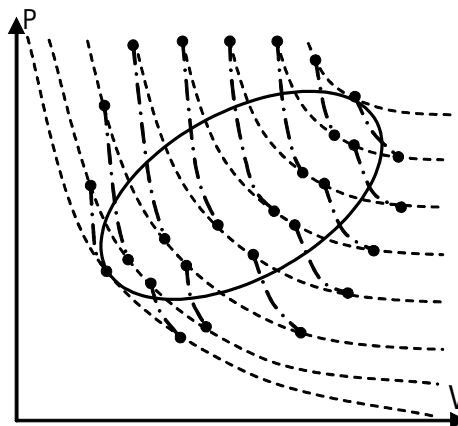
Antes de definirmos entropia e reenunciarmos a 2ª Lei do ponto de vista dessa nova variável, algumas definições mais primitivas fazem-se necessárias:

- Uma transformação é dita “reversível” quando ela pode se realizar no sentido inverso por meio de uma variação diferencial do ambiente (por exemplo, ao variar-se infinitesimalmente a altura do pistão de um cilindro de gás, ocorre uma transformação adiabática reversível).
- Se uma transformação não é reversível, ela é denominada “irreversível”.

Na prática, todas as transformações e processos são irreversíveis, mas podemos aproximar alguns deles a modelos reversíveis.

6. Entropia em processos reversíveis

Podemos aproximar um ciclo reversível para infinitos ciclos de Carnot, ao dividirmos esse ciclo em diversas famílias de isotermas e adiabáticas:



Dividindo em ciclos de Carnot infinitos e somando esses percursos, temos o ciclo original (para os que têm noção de cálculo integral, realizamos uma soma de Riemann).

Tendo em vista que, em um ciclo de Carnot:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Ao incluirmos um sinal negativo do calor cedido, temos:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

No ciclo acima, temos, então:

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

Como são infinitos ciclos diferenciais e estamos somando uma área fechada:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Uma variável de estado é aquela que possui integral de linha nula em um percurso fechado simplesmente conexo. A variável de estado dQ/T foi chamada de “entropia” e é usualmente denotada pela letra S. Logo:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Entre dois estados quaisquer do ciclo, a variação da entropia é dada por:

$$\Delta S = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um bloco de gelo com massa de 240 g derrete reversivelmente. A temperatura permaneceu 0°C durante todo o processo. (Dado: $L_{\text{fusão}} = 327,6 \text{ J/g}$.)

- a. Qual a variação de entropia do gelo?
 Como a temperatura permanece constante nesse processo, a variável T na fórmula da variação de entropia pode “sair” da integral, de modo que, em geral, para processos isotérmicos:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T}$$

No caso descrito:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mL}{T} = \frac{240 \times 327,6}{273} = 288 \text{ J/K}$$

- b. Qual a variação de entropia do meio externo?
 Como o processo é reversível, a variação de entropia do meio corresponde ao negativo da variação de entropia do gelo, de modo que a soma das duas se anulam. Logo: $\Delta S_{\text{meio}} = -288 \text{ J/K}$.

Nota: Quando ocorre uma transformação reversível em um sistema isolado, a entropia não aumenta nem diminui.

7. Entropia em processos irreversíveis

A probabilidade de se retirar um ás de ouro em um baralho normal é igual à de se retirar um dois de paus (1/52).

Porém, se atribuirmos o valor de 10 pontos ao ás de ouro e 0 ponto às demais cartas em um jogo, a probabilidade de se sacar uma carta de 10 pontos (ás de ouro) é de apenas 1/52, enquanto que a de se sacar uma carta de 0 ponto (todas as demais) é de 51/52. Em física probabilística, chamamos de “macroestado” um conjunto de eventos de iguais probabilidades chamados de “microestados”. No caso, o ás de ouro possui um saque de 1 microestado em um macroestado de probabilidades equipartido em 52 pedaços. As cartas de 0 pontos constituem em 51 microestados.

Podemos interpretar a entropia como a medida do grau de desordem de um sistema. Ela é proporcional à probabilidade de um evento (n° de microestados). É por isso que o calor passa do corpo mais quente para o mais frio, pois o modelo de energia equipartida (ou seja, distribuída entre corpos e não concentrada em um único) possui um número maior de microestados. É o Princípio da Equipartição de Energia.

Há uma fórmula (que não demonstraremos devido ao nível pretendido nesta apostila) que relaciona a entropia de um processo com o evento estudado. Ei-la:

$$S = k \cdot \ln w$$

em que:

- k : constante de Boltzmann
- w : probabilidade de o evento ocorrer.

Como o número de microestados nos leva a uma medida de desordem do universo, conclui-se que todo sistema natural evolui para um estado de maior desordem. Por isso, a 2ª Lei da Termodinâmica pode ser re enunciada em uma outra forma também muito conhecida e útil, que veremos no próximo item.

Note ainda que, pelo fato de a variação de entropia entre dois estados não depender do caminho do processo, podemos calcular a variação de entropia em um processo irreversível como se esta fosse uma variação reversível com os mesmos estados inicial e final.

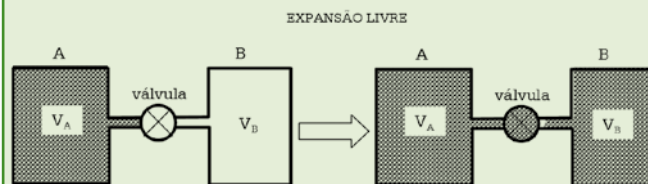
Para processos irreversíveis, a entropia sempre aumenta e sua propriedade central é conhecida como postulado da entropia que pode ser enunciado como:

“Se um processo irreversível ocorrer em um sistema fechado, a entropia S dos sistemas sempre aumenta, ela nunca diminui”.

Como a entropia não depende do processo (‘caminho’), se conhecemos os estados inicial e final de um processo irreversível podemos calcular a variação de entropia procurando um processo reversível que passe pelos mesmos estados.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um gás ideal está contido no recipiente A. No recipiente B é mantido vácuo. As paredes dos recipientes são isolantes. Calcule a variação de entropia do gás quando a válvula é aberta e o gás passa rapidamente a ocupar os dois recipientes.



Como se trata de uma expansão livre (sem resistência), apesar de haver variação de volume, o gás não realiza trabalho.

$$\tau = \int p \cdot dV = 0$$

O processo é adiabático, pois as paredes dos recipientes são isolantes.

$$Q = 0$$

Pela primeira Lei Termodinâmica:

$$\Delta U = Q - \tau = 0 \rightarrow T_{\text{final}} = T_{\text{inicial}}$$

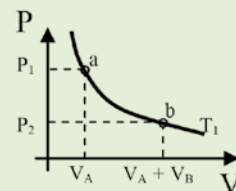
Apesar de não conhecermos as etapas deste processo, sabemos muito bem o seu estado final e inicial.

Estado Inicial:

- Pressão: P_1
- Volume: V_A
- Temperatura: T_1

Estado Final:

- Pressão: P_2
- Volume: $V_A + V_B$
- Temperatura: T_1



O processo isotérmico $a-b$ representado na figura acima será o escolhido para calcular a variação de entropia:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{1}{T} \int d\tau = \frac{\tau}{T} = \frac{nRT \ln \frac{V_A + V_B}{V_A}}{T} = nR \ln \frac{V_A + V_B}{V_A}$$

Boltzmann definiu a entropia de forma geral e inequívoca em termos mecânicos, a partir da teoria cinética dos gases. No túmulo de Boltzmann, no Cemitério Central de Viena, encontra-se gravada a equação correspondente às suas ideias:

$$S = k \log W = -k \log p$$

em que

S – entropia;

W – uma medida do caos do sistema, que significa a quantidade de microestados iguais dentro de um macroestado;

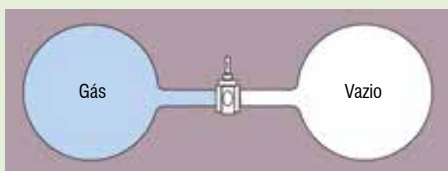
p – probabilidade de ocorrer o microestado ($p = 1/W$).

k – constante de Boltzmann.

Ou seja, a fórmula de Boltzmann relaciona entropia e caos (desordem). Sua teoria foi definitivamente aceita pouco depois de sua morte, quando medidas de J. Perrin, em 1908, mostraram o movimento dos átomos e moléculas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Suponha que 1,0 mol de gás nitrogênio está confinado no lado esquerdo do recipiente da figura ao lado. Você abre a válvula e o volume do gás dobra. Qual é a variação de entropia do gás para este processo irreversível? Trate o gás como sendo ideal e o recipiente como adiabático. ($R = 8,3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$)



Solução:

estado inicial do gás	estado final do gás
$N = 1$	$N = 1$
V_0	$V = 2V_0$
T_0	$T = T_0$
P_0	$P = P_0/2$

Por se tratar de um caso conhecido de expansão livre, podemos calcular a variação de entropia desse processo claramente irreversível usando um processo reversível isotérmico:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{\tau}{T} = \frac{n \cdot R \cdot T \ln \frac{V}{V_0}}{T} = n \cdot R \cdot \ln \frac{V}{V_0} = 1 \cdot 8,3 \cdot \ln 2 \cong 5,8 \text{ J/K}$$

8. 2ª Lei da Termodinâmica (2ª forma)

“Todo sistema físico evolui espontaneamente para situações de máxima entropia.”

Por exemplo, se atirarmos tijolos aleatoriamente no chão, a probabilidade maior é de formar-se uma pilha desorganizada, e não um muro perfeito (embora possível, é improvável).

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 O 2º princípio da Termodinâmica pode ser enunciado da seguinte forma:

“É impossível construir uma máquina térmica operando em ciclos, cujo único efeito seja retirar calor de uma fonte e convertê-lo integralmente em trabalho.”

Por extensão, esse princípio nos leva a concluir que:

- (A) sempre se pode construir máquinas térmicas cujo rendimento seja 100%.
- (B) qualquer máquina térmica necessita apenas de uma fonte quente.
- (C) calor e trabalho não são grandezas homogêneas.
- (D) qualquer máquina térmica retira calor de uma fonte quente e rejeita parte desse calor para uma fonte fria.
- (E) somente com uma fonte fria, mantida sempre a 0°C, seria possível a uma certa máquina térmica converter integralmente calor em trabalho.

02 Um ciclo de Carnot trabalha entre duas fontes térmicas: uma quente, em temperatura de 227°C, e uma fria, em temperatura – 73°C. O rendimento desta máquina, em percentual, é de:

- (A) 10.
- (B) 25.
- (C) 35.
- (D) 50.
- (E) 60.

03 Uma máquina térmica opera segundo o ciclo de Carnot entre as temperaturas de 500 K e 300 K, recebendo 2.000 J de calor da fonte quente. O calor rejeitado para a fonte fria e o trabalho realizado pela máquina, em joules, são, respectivamente:

- (A) 500 e 1.500.
- (B) 700 e 1.300.
- (C) 1.000 e 1.000.
- (D) 1.200 e 800.
- (E) 1.400 e 600.

04 Um motor de Carnot, cujo reservatório à baixa temperatura está a 7,0°C, apresenta um rendimento de 30%. A variação de temperatura, em Kelvin, da fonte quente, a fim de aumentarmos seu rendimento para 50%, será de:

- (A) 400.
- (B) 280.
- (C) 160.
- (D) 560.
- (E) 725.

05 Uma máquina térmica opera entre duas fontes, uma quente, a 600 K, e outra fria, a 200 K. A fonte quente libera 3.700 J para a máquina. Supondo que esta funcione no seu rendimento máximo, o valor do trabalho, em J, por ciclo e o seu rendimento, são, respectivamente:

- (A) 1.233 e 33%.
- (B) 1.233 e 100%.
- (C) 2.464 e 67%.
- (D) 3.700 e 100%.

06 Uma máquina, com eficiência de 20%, efetua 100 J de trabalho em cada ciclo. Qual a quantidade de calor absorvida e rejeitada em cada ciclo?

07 Um refrigerador absorve 5 kJ de um reservatório frio e rejeita 8 kJ.

- a. Calcule o rendimento desse refrigerador.
- b. O refrigerador é reversível e pode operar como máquina térmica ($Q_c = 8 \text{ kJ}$ e $Q_f = 5 \text{ kJ}$). Qual a sua eficiência?

08 Uma máquina de Carnot reversível funciona entre uma fonte quente (a 600 K) e uma fonte fria a T_0 . Qual o máximo valor que T_0 pode assumir para que a quantidade de energia térmica devolvida pela máquina à fonte fria não ultrapasse o valor da energia mecânica produzida?

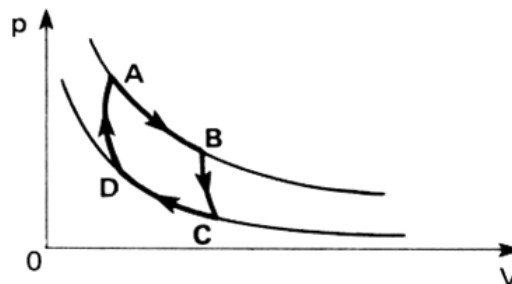
09 Uma máquina térmica opera entre duas temperaturas, T_1 e T_2 . Pode-se afirmar que seu rendimento:

- (A) máximo pode ser 100%.
- (B) pode ser maior que 100%.
- (C) nunca será inferior a 80%.
- (D) será máximo, se operar em ciclo.
- (E) será máximo, se operar em ciclo de Carnot.

10 O ciclo de Carnot, de importância fundamental na Termodinâmica, é constituído por um conjunto de transformações definidas. Em um diagrama (p, V) você esboçaria esse ciclo usando:

- (A) uma isotérmica, uma isobárica, uma adiabática e uma isocórica (isovolumétrica).
- (B) duas isotérmicas e duas adiabáticas.
- (C) duas isobáricas e duas isocóricas (isovolumétricas).
- (D) duas isobáricas e duas isotérmicas.
- (E) uma isocórica (isovolumétrica), um isotérmica e uma isobárica.

11 O gráfico representa um ciclo de Carnot, para o caso de um gás ideal.



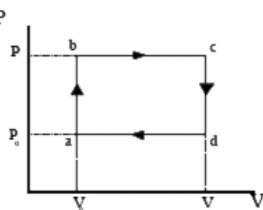
Assinale, dentre as seguintes, a proposição **FALSA**:

- (A) De A até B, a transformação é isotérmica e o gás recebe calor do meio externo.
- (B) De C até D, a transformação é isotérmica e o gás rejeita calor para o meio externo.
- (C) De B até C, a transformação é adiabática e o gás realiza trabalho contra o meio externo.
- (D) De D até A, a transformação é adiabática e o gás realiza trabalho contra o meio externo.
- (E) Durante o ciclo, o trabalho realizado pelo gás sobre o meio externo é maior que o trabalho realizado pelo meio externo sobre o gás.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Uma máquina térmica recebe vapor de água aquecido, a 270°C, e descarrega vapor condensado, a 50°C. A eficiência é 30% e 200 kW é a potência útil da máquina. Qual a quantidade de calor que a máquina descarrega na sua vizinhança em 1 hora?

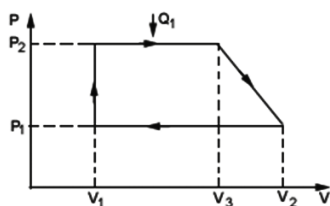
02 Um mol de gás ideal monoatômico é usado como substância de trabalho de uma máquina que opera no ciclo mostrado na figura. Admita que $P = 2P_0$ e $V = 2V_0$.



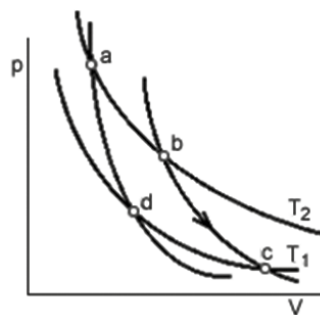
Pede-se:

- a. o trabalho realizado por ciclo;
- b. o calor absorvido por ciclo durante a fase de expansão abc;
- c. a eficiência da máquina.
- d. Qual a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre as temperaturas mais alta e mais baixa presentes no ciclo da figura? Como isto se compara com o item C?

03 Certo gás é obrigado a percorrer o ciclo da figura, em que P representa a pressão e V , o volume. Sabe-se que, ao percorrê-lo, o gás absorve uma quantidade de calor Q_1 . Qual a eficiência η (razão do trabalho fornecido para a energia absorvida do ciclo, em função de P_1, P_2, V_3, V_2, V_1 e Q_1 ?



04 O gráfico adiante representa um ciclo de Carnot percorrido por um gás ideal. Sendo $\gamma = c_p/c_v$ a relação dos calores específicos desse gás a pressão e a volume constantes, podemos afirmar que no trecho ab do ciclo vale a seguinte relação entre a pressão p , o volume V e a temperatura absoluta T do gás:



- (A) $p \cdot T^{(1-\gamma)} = \text{constante}$
- (B) $p \cdot V^\gamma = \text{constante}$
- (C) $p = \text{constante} \cdot V^\gamma$
- (D) $p = \text{constante} \cdot V^{-1}$
- (E) $p = \text{constante} + T \cdot V^\gamma$

05 Sobre as leis da Termodinâmica, pode-se afirmar:

- (A) A primeira lei expressa a conservação da energia.
- (B) A primeira lei garante que não há fluxo de calor entre dois corpos à mesma temperatura.
- (C) A segunda lei implica que o calor não pode fluir espontaneamente de um corpo frio para um corpo quente.
- (D) A segunda lei implica que é impossível a conversão total de qualquer quantidade de calor em energia mecânica, em qualquer máquina cíclica.
- (E) A segunda lei implica que dois gases, uma vez misturados, têm grande probabilidade de voltar a separar-se espontaneamente.

Quais são as verdadeiras (V) e quais são as falsas (F)?

06 Quando certa máquina de vapor desenvolve uma potência útil de 7 kW, recolhem-se 5 Kcal por segundo no seu condensador, que está a 25°C.

- (A) Calcule o rendimento da máquina.
- (B) Sabendo que esse rendimento é igual a 9/10 do rendimento térmico máximo, qual é a temperatura da caldeira? Dê a resposta em graus Celsius e adote 1 cal = 4,2 J.

07 Uma geladeira retira, por segundo, 1.000 kcal do congelador, enviando para o ambiente 1.200 kcal. Considere 1 kcal = 4,2 kJ. Qual a potência do compressor da geladeira?

08 Calor pode ser removido da água a 0,0°C e pressão atmosférica sem que a água congele, se o processo for feito com o mínimo possível de perturbação sobre a água. Suponha que uma gota-d'água é resfriada desta maneira até que sua temperatura seja a do ar circundante, que é -5,0°C. A gota subitamente se congela e transfere calor para o ar até ficar novamente a -5,0°C. Qual é a variação de entropia por grama de água durante o congelamento e a transferência de calor?

09 Suponha que a mesma quantidade de calor, por exemplo, 260 J, é transferida por condução de um reservatório a 400 K para outro a:

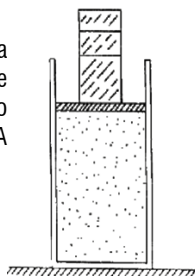
- a. 100 K;
- b. 200 K.

Calcule a variação de entropia em cada caso.

10 Em uma experiência de calores específicos, 200 g de alumínio ($c = 0,215 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$) a 100°C se misturam com 50,0 g de água a 20,0°C.

- a. Ache a temperatura de equilíbrio.
- b. Calcule a variação de entropia do alumínio.
- c. Calcule a variação de entropia da água.
- d. Calcule a variação de entropia do sistema.

11 A figura a seguir representa um cilindro com êmbolo móvel de massa $m = 200 \text{ kg}$ e área $S = 100 \text{ cm}^2$, que contém inicialmente 2,4 litros de um gás ideal à temperatura de 27°C. Aquece-se o sistema até a temperatura estabilizar em 127°C. A pressão atmosférica é igual a 10^5 N/m^2 .



- a. Qual o volume final do gás?
- b. Qual o trabalho mecânico realizado?

12 Dois mols de um gás perfeito sofrem uma expansão isotérmica reversível de 0,02 m³ a 0,04 m³ na temperatura de 300 K. Qual a variação de entropia? (Considere $R = 8,3 \text{ J/mol.K}$.)

13 Considera-se nula a entropia da água quando na fase líquida a 0°C e sob pressão atmosférica.

- a. Qual a quantidade de calor que deve ser fornecida para elevar a temperatura de 1 kg de água de 0°C a 100°C?
- b. Qual a entropia de 1 kg de água a 100°C?
- c. Mistura-se 1 kg de água a 0°C com 1 kg de água a 100°C. Determine a temperatura de equilíbrio.
- d. Calcule a entropia da mistura após o equilíbrio.

14 Uma máquina térmica reversível opera entre dois reservatórios térmicos e temperaturas 100°C e 127°C, respectivamente, gerando gases aquecidos para acionar uma turbina. A eficiência dessa máquina é mais bem representada por:

- (A) 68%.
- (B) 6,8%.
- (C) 0,68%.
- (D) 21%.
- (E) 2,1%.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

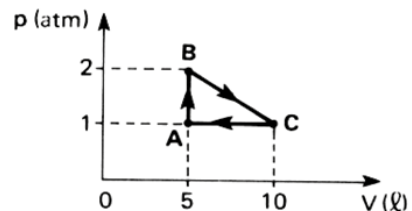
01 Duas máquinas térmicas – M_1 reversível e M_2 não reversível – retiram energia na forma de calor de uma fonte, à temperatura T_1 , e entregam uma parte desta energia em forma de calor, à temperatura T_2 . Se Q_1 é a quantidade de calor retirada por M_1 e Q_2 a retirada por M_2 , e chamando de W_1 e W_2 as energias mecânicas fornecidas, respectivamente, pelas máquinas M_1 e M_2 , tem-se necessariamente que:

- (A) $W_2/(Q_2 - W_2) \leq W_1/(Q_1 - W_1)$
- (B) $W_2/(Q_2 - W_2) \leq (T_1 - T_2)/T_1$
- (C) $W_2 > W_1$
- (D) $W_1/(Q_1 - W_1) = (T_1 - T_2)/T_1$
- (E) $Q_1 > Q_2$

02

- a. Um inventor afirmou ter construído uma máquina térmica cujo desempenho atinge 90% daquele de uma máquina de Carnot. Sua máquina, que trabalha entre as temperaturas de 27°C e 327°C, recebe, durante certo período, $1,2 \cdot 10^4 \text{ cal}$ e fornece, simultaneamente, um trabalho útil de $1 \cdot 10^4 \text{ J}$. A afirmação do inventor é verdadeira? Justifique. (Dado: 1 cal = 4,186 J.)
- b. Se o trabalho útil da máquina térmica do item anterior fosse exercido sobre o êmbolo móvel de uma ampola contendo um gás ideal, à pressão de 200 Pa, qual seria a variação de volume sofrida pelo gás, caso a transformação fosse isobárica?

03 Uma certa massa de gás ideal desenvolve o ciclo indicado na figura:



Determine:

- (A) o trabalho realizado pelo gás, ao percorrer o ciclo uma vez;
- (B) a potência desenvolvida, sabendo-se que a duração de cada ciclo é de 0,5 s;
- (C) o ponto em que a energia do sistema é máxima e em que é mínima. (Dados: 1 atm = 10^5 N/m^2 ; 1 L = $1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$.)

04 A temperaturas muito baixas, o calor específico molar C_V para muitos sólidos é, aproximadamente, proporcional a T^3 , isto é, $C_V = A \cdot T^3$, em que A depende da substância. Para o alumínio, $A = 7,53 \cdot 10^{-6} \text{ cal/mol.K}^4$. Ache a variação de entropia de 4,00 mols de alumínio, quando sua temperatura varia de 5,00 a 10,0 K.

05 Com a instalação do gasoduto Brasil-Bolívia, a quota de participação do gás natural na geração de energia elétrica no Brasil será significativamente ampliada. Ao se queimar 1,0 kg de gás natural obtêm-se $5,0 \times 10^7$ J de calor, parte do qual pode ser convertida em trabalho em uma usina termoelétrica. Considere uma usina queimando 7.200 quilogramas de gás natural por hora, a uma temperatura de 1.227°C. O calor não aproveitado na produção de trabalho é cedido para um rio de vazão 5.000 l/s, cujas águas estão inicialmente a 27°C. A maior eficiência teórica da conversão de calor em trabalho é dada por: $\eta = 1 - (T_{\min}/T_{\max})$, sendo T_{\min} e T_{\max} as temperaturas absolutas das fontes fria e quente, respectivamente, ambas expressas em Kelvin. Considere o calor específico da água $c = 4.000$ J/kg.°C.

- Determine a potência gerada por uma usina cuja eficiência é metade da máxima teórica.
- Determine o aumento de temperatura da água do rio ao passar pela usina.

06 Um recipiente cilíndrico vertical é fechado por meio de um pistão, com 8,00 kg de massa e 60,0 cm² de área, que se move sem atrito. Um gás ideal, contido no cilindro, é aquecido de 30°C a 100°C, fazendo o pistão subir 20,0 cm. Nesta posição, o pistão é fixado, enquanto o gás é resfriado até sua temperatura inicial. Considere que o pistão e o cilindro encontram-se expostos à pressão atmosférica. Sendo Q_1 o calor adicionado ao gás durante o processo de aquecimento e Q_2 o calor retirado durante o resfriamento, assinale a opção correta que indica a diferença $Q_1 - Q_2$:

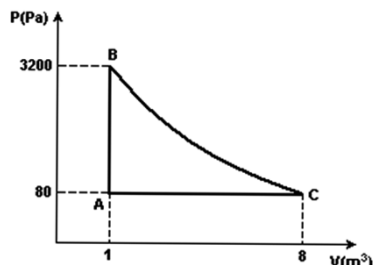
- | | |
|------------|-----------|
| (A) 136 J. | (D) 16 J. |
| (B) 120 J. | (E) 0 J. |
| (C) 100 J. | |

07 Mostre que a eficiência e de uma máquina de Carnot e o coeficiente de rendimento K de um refrigerador de Carnot estão relacionados por $K = (1 - e)/e$.

08 Fornece-se calor a 0,5 kg de gelo a 0°C até que toda a massa derreta.

- Qual a variação na entropia da água?
- Sendo a fonte de calor um corpo de massa muito grande a temperatura de 20°C, qual a variação na entropia deste corpo?
- Qual a variação total na entropia do sistema água-fonte de calor? (Considere $L_{\text{fusão}} = 80$ cal/g; 1 cal = 4,2 J.)

09 Uma máquina térmica opera com um mol de um gás monoatômico ideal. O gás realiza o ciclo ABCA, representado no plano PV, conforme mostra a figura.



Considerando que a transformação BC é adiabática, calcule:

- a eficiência da máquina;
- a variação da entropia na transformação BC.

10 Um pesquisador afirma que é possível desenvolver um processo termodinâmico isobárico que converte em trabalho até 50% de calor necessário para a expansão de um gás. Admitindo que o gás seja o ar, determine se este processo é termodinamicamente admissível. Considere válida a hipótese de gás ideal. Dado: $\gamma_{\text{AR}} = 1,4$.

11 Um gás ideal com $\gamma = 5/3$ sofre uma expansão isotérmica em que seu volume aumenta em 50%, seguida de uma contração isobárica até o volume inicial e de aquecimento, a volume constante, até a temperatura inicial.

- Calcule o rendimento desse ciclo.
- Compare o resultado com o rendimento de um ciclo de Carnot que opere entre as mesmas temperaturas extremas.

12 No Ciclo de Otto do motor a gasolina, AB e CD são duas adiabáticas. AB representa a compressão rápida (adiabática) da mistura de ar com vapor de gasolina, de um volume inicial V_0 para V_0/r (r é a taxa de compressão); BC representa o aquecimento a volume constante devido à ignição; CD é a expansão adiabática dos gases aquecidos, movendo o pistão; DA simboliza a queda de pressão associada à exaustão dos gases da combustão a volume constante. A mistura é tratada como um gás ideal de coeficiente adiabático γ .

- Mostre que o rendimento do ciclo é dado por $\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$.
- Calcule η para $\gamma = 1,4$ e $r = 10$ (compressão máxima para evitar a pré-ignição).

13 Uma chaleira contém 1 litro de água em ebulição. Despeja-se toda a água em uma piscina, que está à temperatura de 20°C.

- De quanto variou a entropia da água da chaleira?
- De quanto variou a entropia do universo?

14 Qual é a variação de entropia que ocorre quando dois mols de hélio e três mols de oxigênio, ambos nas CNTP e em volumes adjacentes, podem se misturar através da remoção da separação entre ambos?

15 Mostre que, em um ciclo de Carnot, o produto do maior e do menor volume é igual ao produto dos volumes intermediários.

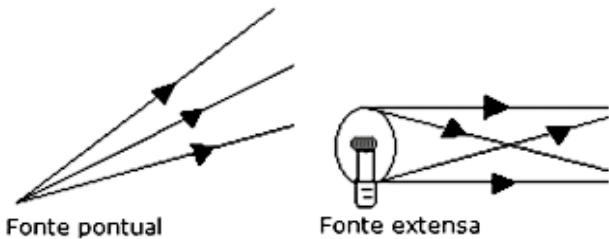
16 Uma máquina de Carnot opera entre as temperaturas T_1 (quente) e T_2 (fria). Ela faz funcionar um refrigerador de Carnot que opera entre duas outras temperaturas, T_3 (fria) e T_4 (quente). Ache a razão Q_3/Q_1 em função das quatro temperaturas dadas.

1. Conceitos gerais

- **Fonte de luz:** é um corpo emissor ou refletor de luz. As chamadas fontes primárias geram luz, e as “fontes secundárias” refletem a luz por elas recebida.
- Uma fonte de luz será denominada *pontual* quando suas dimensões forem desprezíveis em relação às suas distâncias aos corpos por ela iluminados. Caso contrário, a fonte será denominada *extensa*.
- Chama-se de *meio* o ambiente por onde a luz se propaga.
- *Meios transparentes* são aqueles que permitem que a luz os atravesse descrevendo trajetórias regulares (por exemplo, vidro liso).
- *Meios translúcidos* são aqueles que permitem que a luz os atravesse descrevendo trajetórias irregulares (por exemplo, papel vegetal).
- *Meios opacos* são aqueles que não permitem que a luz os atravesse (por exemplo, madeira).
- **Raio luminoso:** indica a direção e o sentido de propagação da luz ao partirem de uma fonte qualquer.



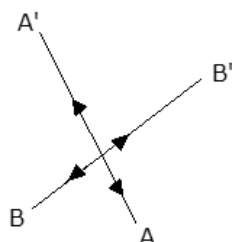
- **Pincel luminoso:** é um conjunto de raios luminosos.



2. Princípios da Óptica Geométrica

A Óptica Geométrica baseia-se em princípios fundamentais. São eles:

- **Princípio da propagação retilínea:** nos meios homogêneos e transparentes, a luz se propaga em linha reta entre dois pontos.
- **Princípio da independência dos raios luminosos:** em um cruzamento de raios de luz, cada um deles continua sua propagação independentemente do cruzamento com o(s) outro(s).
- **Princípio da reversibilidade:** a trajetória de um raio de luz não se modifica quando se inverte o sentido de sua propagação entre dois pontos.



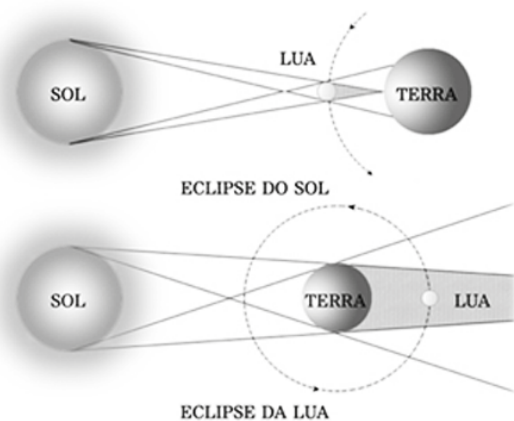
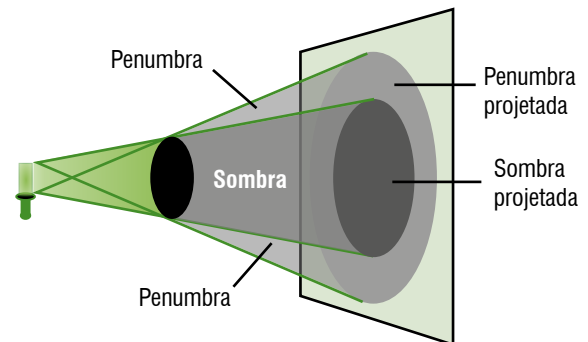
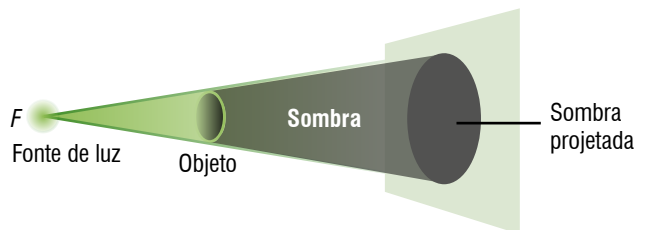
Obs.: Esses três princípios podem ser resumidos em um único princípio geral, elaborado por Fermat: “A trajetória que um raio de luz faz entre dois pontos é tal que o tempo gasto para realizá-lo é mínimo (situação mais comum), máximo ou estacionário”.

Matematicamente:

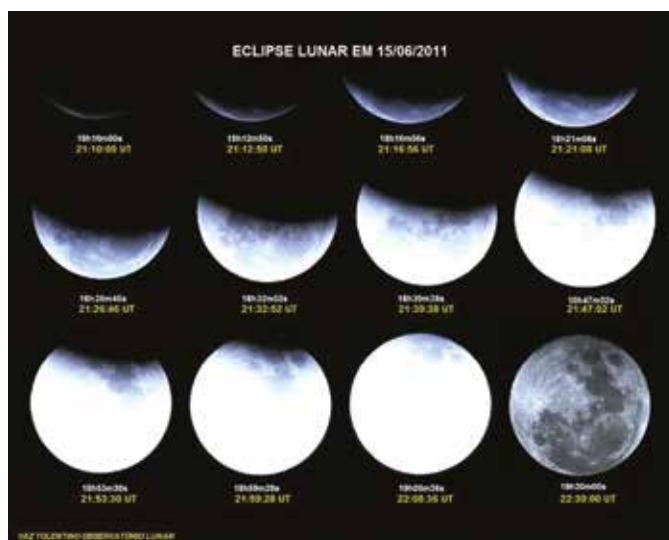
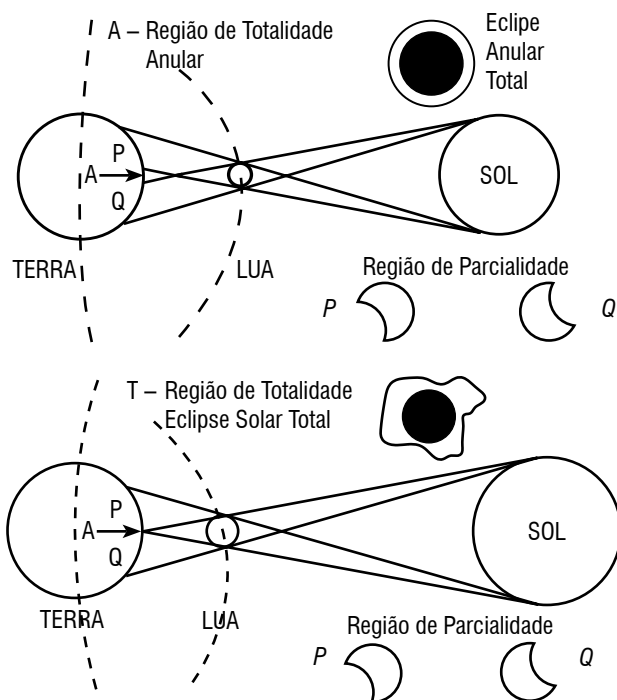
$$\frac{d\ell}{dx} = 0$$

em que ℓ é o comprimento total do raio e x é a distância que determina o percurso.

3. Sombra, penumbra e eclipses



O eclipse do Sol ocorre na fase da Lua Nova, e o eclipse da Lua ocorre na fase da Lua Cheia.



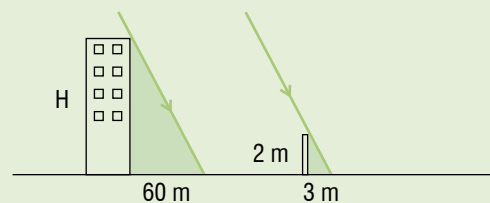
Na sequência fotográfica acima, o professor Ricardo Tolentino utilizou-se de um telescópio refrator.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Desejando medir a altura H de um prédio, um estudante fixou verticalmente no solo uma estaca de 2,0 m de comprimento. Em certa hora do dia, ele percebeu que o prédio projetava no solo uma sombra de 60 m de comprimento, enquanto a estaca projetava uma sombra de 3,0 m de comprimento. Considerando os raios solares paralelos, que valor o estudante encontrou para H ?

Solução:

Deve-se primeiramente fazer a figura representando a situação:



Note os dois triângulos semelhantes hachurados e faça a proporção entre os lados homólogos:

$$\frac{H}{60} = \frac{2}{3} \rightarrow H = 40 \text{ m.}$$

(lados homólogos são os lados opostos aos mesmos ângulos)



Eclipse solar nas Filipinas



Fotografia de eclipse solar tirada na China em janeiro de 2010

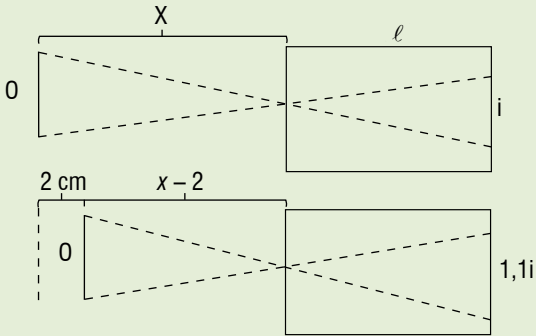
Disponível em: <ultimosegundo.ig.com.br>.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um objeto está disposto verticalmente em frente a uma câmara de orifício. Aproximando 2 cm este objeto da câmara, observa-se um aumento de 10% no tamanho da imagem. Determine a distância inicial do objeto a câmara.

Solução:

É fundamental que se façam duas figuras representando a formação da imagem no fundo da câmara, antes e depois do afastamento.



Muito cuidado para não confundir os triângulos semelhantes!!
Das semelhanças obtemos:

$$\begin{cases} \frac{x}{l} = \frac{o}{i} \\ \frac{x-2}{l} = \frac{o}{1,1i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{o \cdot l}{i} \\ 1,1(x-2) = \frac{o \cdot l}{i} \end{cases}$$

$$1,1(x-2) = x \rightarrow x = \frac{2,2}{0,1} = 22 \text{ cm}$$

5. Reflexão e refração seletivas

A luz solar (luz branca) é policromática, ou seja, composta de várias cores – dentre elas, as principais: vermelho, alaranjado, amarelo, verde, azul, anil, violeta.

Atente-se aos seguintes fatos:

- Se vemos um corpo preto, ele está absorvendo todas as cores da luz solar.
- Se vemos um corpo branco, ele está refletindo todas as cores da luz solar.
- Se vemos um corpo de alguma cor monocromática, por exemplo, verde, que está sendo iluminado por luz policromática, significa que ele está “selecionando” apenas a cor verde para refletir da luz solar.
- Um corpo que, se iluminado por luz policromática, nos parece monocromático, por exemplo, vermelho, se apresentará escuro quando iluminado por luz monocromática de cor diferente da que nos apresenta (por exemplo, se esse objeto vermelho for iluminado com luz verde).
- Um corpo branco pode refletir todas as cores monocromáticas.
- “Filtros” podem deixar passar apenas determinadas luzes monocromáticas:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Tem-se um papel cartão pintado com duas cores, conforme a figura abaixo.



Ao iluminar este papel com diferentes fontes de luz obtemos resultados bem diferentes. Diga quais resultados correspondem a quais fontes.

Fontes	Resultado
Monocromática vermelha	
Policromática azul + verde + laranja + branco	
Monocromática laranja	
Bricromática verde + laranja	

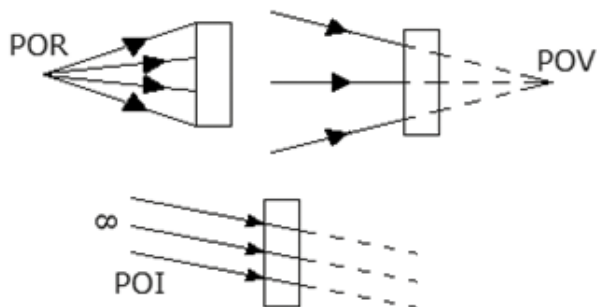
Solução

- MONOCROMÁTICA LARANJA
- BICROMÁTICA VERDE + AMARELA
- POLICROMÁTICA AZUL + VERDE + LARANJA + BRANCO
- MONOCROMÁTICA VERMELHA

6. Tipos de pontos

- (A) Relativamente a determinado sistema óptico, chama-se **ponto objeto** o vértice do pincel de raios **incidentes**. Ele será:
- “real”, se for vértice de pincel incidente divergente;
 - “virtual”, se for vértice de pincel incidente convergente;
 - “impróprio”, se o pincel for composto por raios paralelos, estando o objeto no infinito.

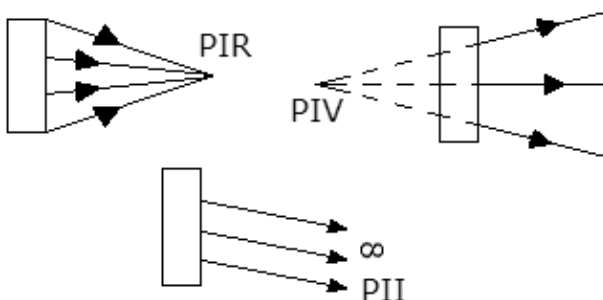
Exemplos:



(B) Relativamente a determinado sistema óptico, chama-se “**ponto imagem**” o vértice do pincel de raios **emergentes**. Ele será:

- “real”, se for vértice de pincel emergente convergente;
- “virtual”, se for vértice de pincel emergente divergente;
- “impróprio”, se o pincel for composto por raios paralelos, estando a imagem no infinito.

Exemplos:



Notas

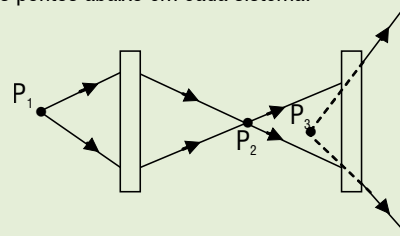
- As imagens reais podem ser projetadas em anteparos, como telões ou paredes.
- As imagens virtuais não podem ser projetadas em anteparos.

(C) *Classificação de pontos em sistemas ópticos associados.* Um mesmo ponto pode receber diferentes classificações relativas a sistemas ópticos distintos. Portanto, quando tivermos de classificar pontos pertencentes a uma associação de vários sistemas ópticos, faz-se útil o seguinte procedimento sistemático:

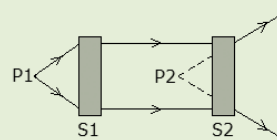
- Escolha um dos sistemas ópticos. Você deverá analisar apenas os pontos que são vértices de raios que incidem/emergem diretamente nesses/desses sistemas.
- Escolha um dos pontos selecionados no item 1. Se os raios que passam por ele **incidem** no sistema óptico considerado, ele será **ponto objeto**, e será **real** se o pincel **diverge** do ponto, **virtual** se o pincel **converge** no ponto ou **impróprio** se o pincel for composto de raios paralelos. Porém, se os raios que passam por ele **emergem** do sistema óptico considerado, ele será **ponto imagem**, e será **real** se o pincel **converge** no ponto, **virtual** se o pincel **diverge** do ponto ou **impróprio** se o pincel for composto de raios luminosos (leia de novo).
- Repita o item 2 para todos os pontos referentes ao sistema escolhido.
- Repita os itens anteriores para todos os sistema ópticos da associação.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Classifique os pontos abaixo em cada sistema.

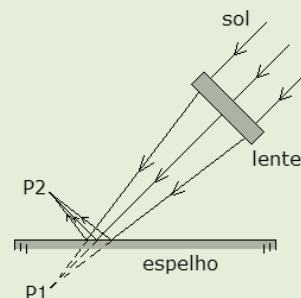


Ponto/sistema	S1	S2
P1	POR	–
P2	PIR	POR
P3	–	PIV



Ponto/sistema	S1	S2
P1	POR	–
P2	–	PIV
∞	PII	POI

Vejam os em uma situação real de sistema ótico:



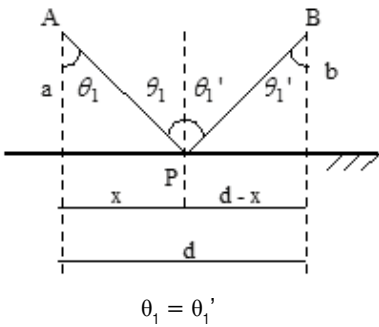
Ponto/sistema	lente	espelho
P1	PIR	POV
P2	–	PIR
Sol	POI	–

7. Espelhos planos

7.1 Introdução

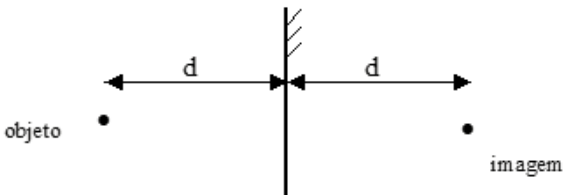
Um espelho plano é qualquer superfície lisa, plana e com alto poder de reflexão. A reflexão, de modo geral, obedece a duas leis gerais para qualquer caso, inclusive espelhos planos:

- 1ª: O raio incidente e o raio refletido, relativos ao espelho, pertencem a um mesmo plano.
- 2ª: O ângulo de incidência e o ângulo de reflexão, medidos em relação à reta normal relativa ao ponto de incidência, são congruentes.



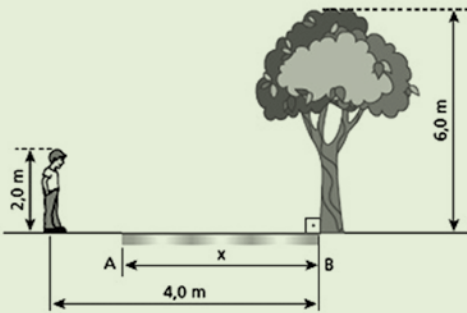
Cada ponto de um objeto, se refletido pelo espelho plano, conjugará uma imagem equidistante ao espelho na zona de imagens (propriedade da reflexão simétrica). Veja:

7.2 Imagem de objeto pontual:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

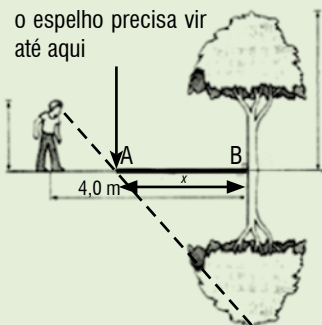
01 No esquema, o observador deseja visualizar a imagem da árvore através do espelho plano *AB* deitado sobre o solo:



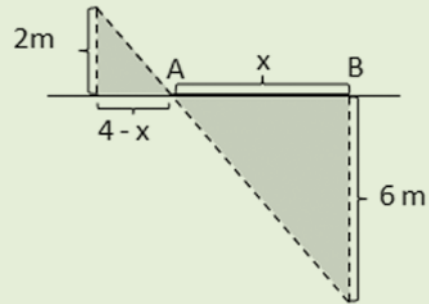
Qual deve ser o menor comprimento *x* do espelho para que o observador veja a imagem completa da árvore, isto é, do topo até o pé?

Solução

Devemos fazer a imagem da árvore para saber até onde o espelho precisa estar para que o observador possa ver o seu topo.

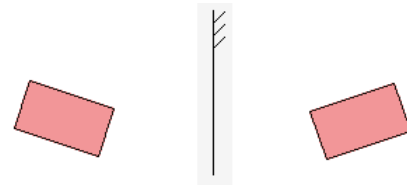


Desta figura redesenharemos apenas os triângulos semelhantes formados e faremos a proporção entre os lados homólogos:

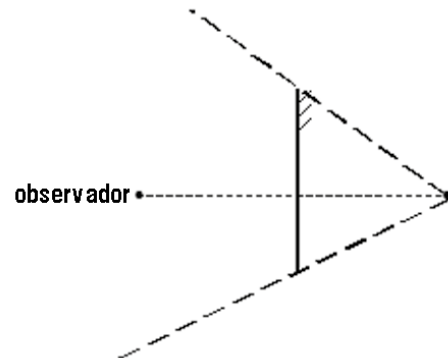


$$\frac{2}{4-x} = \frac{6}{x} \rightarrow 24 - 6x = 2x \rightarrow x = 3 \text{ m.}$$

7.3 Imagem de objeto extenso:



Chama-se de “campo visual” toda a região que um observador pode ver através de um espelho. O campo visual pode ser facilmente identificado para um observador, usando-se a propriedade da reflexão simétrica. Tudo ocorre como se esse campo visual fosse o mesmo de um observador virtual (que não é nada mais do que a imagem do observador) atrás do espelho, e esse espelho fosse uma janela:



7.4 Translações

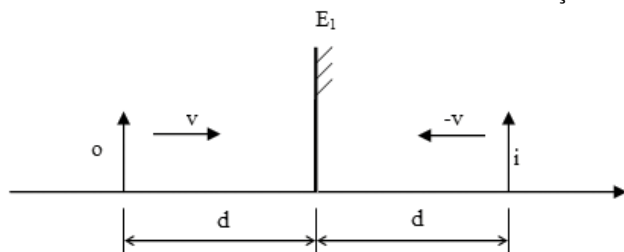
Quando o objeto e/ou o espelho sofrem mudanças de posição (sejam estas discretas ou contínuas), estamos diante de um caso de translação. Nesses casos, podemos estudar a posição, a velocidade e/ou a aceleração dos objetos, imagens e espelhos usando como base a propriedade de reflexão simétrica dos espelhos planos.

7.4.1 Translação do objeto

Imagine, por exemplo, que um observador *o* caminha com velocidade constante *v* em direção a um espelho plano fixo *E₁*, em relação a esse espelho. A cada instante, a distância de sua imagem ao espelho é

congruente à distância entre si próprio ao espelho; logo, podemos afirmar que se ele se desloca L unidades de comprimento em relação ao espelho, sua imagem também se desloca L unidades de comprimento em relação ao espelho com sentido oposto, e a velocidade da imagem, também em relação ao espelho, é $-v$ (o sinal negativo indica que o sentido dessa velocidade é contrária à do observador, embora o módulo seja comum aos dois). Também a aceleração da imagem possui o mesmo módulo (e sentido contrário) que a aceleração do objeto – ambos em relação ao espelho fixo.

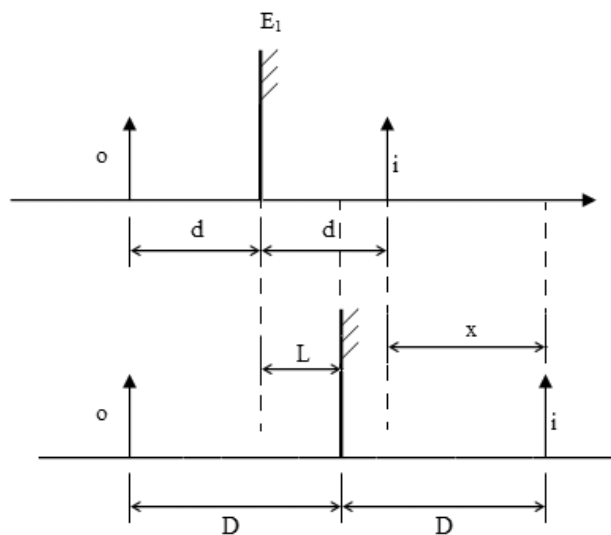
Observe ainda que, se tomarmos o objeto como referência, a velocidade da imagem é $-2v$; e se tomarmos a imagem como referência, a velocidade do objeto é $2v$. Da mesma forma, pode-se encontrar expressões para esses mesmos referenciais ao estudarmos deslocamentos ou acelerações.



7.4.2 Translação do espelho

Se um espelho varia sua posição em relação a um objeto, de quanto deverá se deslocar a imagem desse objeto em relação à sua posição original?

Essa pergunta é muito simples de ser respondida. Precisamos apenas ter em mente que, antes e depois do deslocamento do espelho, a imagem deve ser simétrica ao objeto, em relação ao espelho. Veja a figura abaixo e observe as relações feitas:



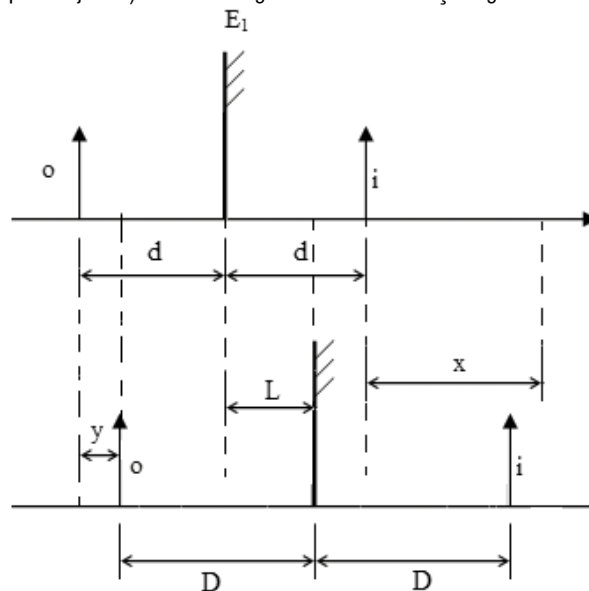
$$x = 2D - 2d = 2(D - d) = 2L \rightarrow x = 2L$$

Portanto, uma translação de L unidades de comprimento em um espelho, em relação ao objeto, mantendo este fixo, provoca uma translação de $2L$ unidades de comprimento na imagem.

Se tomarmos uma variação de espaço na unidade de tempo, podemos da mesma forma dizer que se o espelho se move com uma velocidade constante v , em relação ao objeto fixo, a imagem se moverá com uma velocidade $2v$, na mesma direção e sentido. O mesmo podemos afirmar para variações na velocidade: se o espelho possui uma aceleração a , a imagem possuirá aceleração $2a$.

7.4.3 Translação simultânea do objeto e do espelho

Usando o princípio da reflexão simétrica, é possível deduzir expressões que relacionam variações de espaço, velocidade e aceleração do objeto (índice o), espelho (índice e) e imagem (índice i) quando existe translação simultânea de objeto e espelho. Na realidade, tais expressões seriam um caso geral das possibilidades de translação quando se trabalha com espelhos planos, sendo os casos I e II acima apenas casos particulares (dependendo do que esteja fixo). Observe a figura abaixo e as relações geométricas:



$$d + L - y = D \quad (\text{equação 1}) \quad x + d - L = D \quad (\text{equação 2})$$

Substituindo a equação 1 na equação 2:

$$x + d - L = d + L - y \rightarrow x = 2L - y$$

Portanto:

$$\Delta \vec{S}_i = 2\Delta \vec{S}_e - \Delta \vec{S}_o; \quad \vec{v}_i = 2\vec{v}_e - \vec{v}_o; \quad \vec{a}_i = 2\vec{a}_e - \vec{a}_o$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um móvel encontra-se na origem de um sistema de coordenadas unidimensional e move-se de forma progressiva e retardada com velocidade inicial 4 m/s e aceleração 2 m/s². Inicialmente, a frente deste móvel, na coordenada $x = 50$ m, encontra-se um espelho plano disposto sobre uma base móvel em movimento uniforme e progressivo, com sua superfície refletora voltada para o móvel. Determine a velocidade do espelho para que a imagem do móvel passe pela coordenada $x = 205$ m no instante $t = 5$ s.

Solução:

Função velocidade do móvel (objeto): $v_o = 4 - 2t$

Função velocidade do espelho: $v_e = v_e$

Função velocidade da imagem: $v_i = 2v_e - (4 - 2t) = (2v_e - 4) + 2t$

$2v_e$ = Velocidade inicial da imagem

$2t$ = Aceleração da imagem

Assim, a função das posições da imagem será:

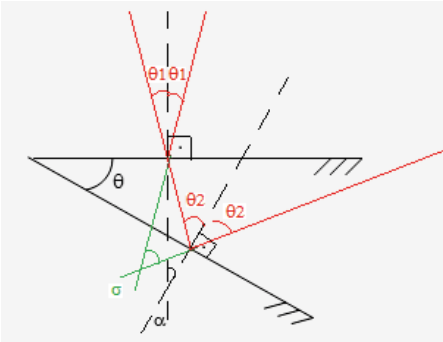
$$X_i(t) = 100 + (2v_e - 4)t + t^2$$

Substituindo $X_i(5) = 205$:

$$205 = 100 + (2v_e - 4)(5) + (5)^2 \rightarrow v_e = 10 \text{ m/s}$$

7.5 Rotação

Se um raio luminoso incide sobre um espelho plano, e rotacionamos os extremos desse espelho (mantendo o outro extremo fixo) de certo ângulo, o raio refletido sofrerá uma rotação, no mesmo sentido, de um ângulo duas vezes maior. Observe:



Por semelhança de triângulos e usando as leis da reflexão, anotamos os ângulos acima. As relações abaixo são então deduzidas:

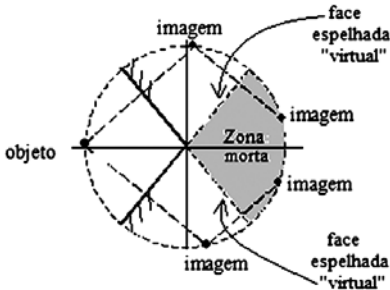
$$2\theta_2 = 2\theta_1 + \sigma \rightarrow \sigma = 2(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\theta_1 + \alpha = \theta_2 \rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \alpha$$

$$\rightarrow \sigma = 2\alpha$$

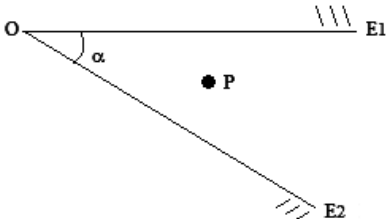
7.6 Imagens múltiplas

Quando associam-se dois espelhos de modo que um dos vértices de cada espelho estejam unidos, e as faces espelhadas uma defronte à outra, haverá a formação de imagens (ou partes de imagens) múltiplas devido a sucessivas reflexões simultâneas. Haverá formação de imagem simétrica ao objeto (ou a outra imagem) enquanto esse objeto ou a imagem a ser refletida está defronte a uma face espelhada, seja ela real ou virtual. Quando isso não for possível, diz-se que o ponto encontra-se sob a “zona morta”:



É possível calcularmos o número de imagens que serão formadas a partir do processo de associação de espelhos usando conceitos geométricos.

Em um caso específico, dado que tenhamos um objeto *P* entre dois espelhos *E*₁ e *E*₂ associados com um ângulo α (dado em graus) a partir de um centro comum *O*, haverá a formação de *n* imagens, de modo que:



$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1 \text{ (somente para } \alpha \text{ divisor de } 360^\circ)$$

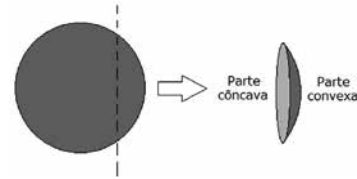
Observações acerca da fórmula anterior:

- Todos os objetos e imagens estão sobre uma mesma circunferência centrada em *O*.
- Se a razão $360^\circ/\alpha$ for par, a fórmula é válida para qualquer posição de *P* entre *E*₁ e *E*₂.
- Se a razão $360^\circ/\alpha$ for ímpar, a fórmula só é válida quando *P* estiver posicionado sobre o plano bissetor de α .

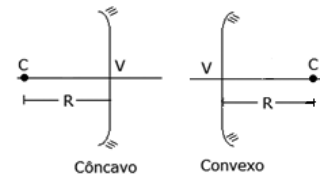
8. Espelhos esféricos

8.1 Conceitos gerais

Um espelho esférico é uma superfície polida e refletora com forma de calota esférica, podendo ser côncava (se a parte refletora for o interior da esfera geratriz) ou convexa (se a parte refletora for o exterior da esfera geratriz).



Costuma-se representar um espelho esférico da seguinte forma:



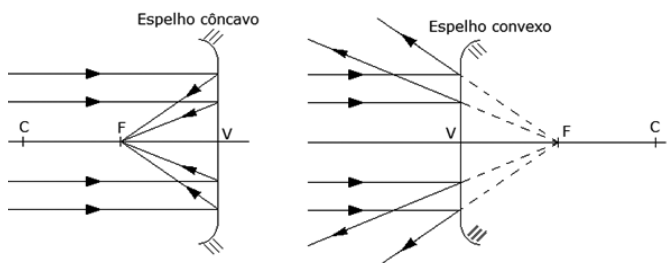
Em que:

- *C*: centro de curvatura (centro da esfera geratriz do espelho)
- *V*: “vértice” do espelho
- *CV*: eixo principal
- *R*: raio de curvatura (raio da esfera geratriz)

Para que as imagens formadas pelas reflexões em espelhos esféricos sejam nítidas e bem definidas, os raios luminosos que atingem a superfície refletora devem ser pouco inclinados em relação ao eixo principal. Consideraremos isto a partir deste ponto. Qualquer espelho que esteja refletindo raios nessa condição diz-se obedecer a “condição de nitidez de Gauss”.

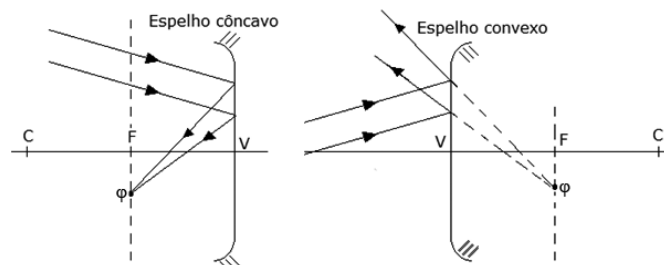
8.2 Focos

Um foco é qualquer ponto cujo conjugado seja impróprio. O **foco principal** de um espelho esférico é o ponto para onde convergem (no caso de espelhos côncavos) ou de onde divergem (no caso de espelhos convexos) raios luminosos cuja incidência é paralela ao eixo principal:

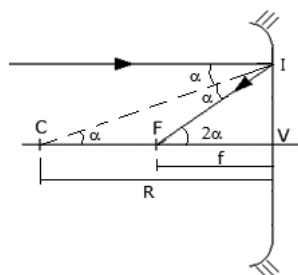


O foco dos espelhos côncavos é real, enquanto o foco dos espelhos convexos é virtual.

Existem ainda *focos secundários*, tanto para espelhos côncavos quanto para convexos. Os focos secundários são os pontos para onde convergem raios paralelos entre si mas que façam no espelho incidência oblíqua em relação ao eixo principal. Todos os infinitos focos secundários possíveis encontram-se em uma mesma região denominada *plano focal*, que é o plano que contém o foco principal e é paralelo ao espelho. Nas figuras abaixo, temos exemplo de um foco secundário φ para cada tipo de espelho esférico. O eixo que contém C e φ é chamado de **eixo secundário**.



O foco principal F de um espelho esférico é muito importante no estudo da formação de imagens nestes. Podemos facilmente encontrar sua posição no eixo principal. Faremos isso para o espelho côncavo, mas a demonstração e o resultado final também são compatíveis com espelhos convexos:



$C\hat{I}P = \hat{F}I\hat{C} = \alpha$ (2ª Lei da Reflexão; lembre-se que o espelho é esférico; logo, CI = raio = reta normal)

$I\hat{F}V = 2\alpha$ (ângulo alterno interno)

$\rightarrow I\hat{C}F = \alpha$ (teorema do ângulo externo)

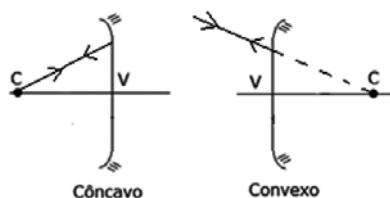
$\rightarrow CF = FI$, mas $FI \sim FV$ (pelo referencial de Gauss)

$\rightarrow CF \sim FV$

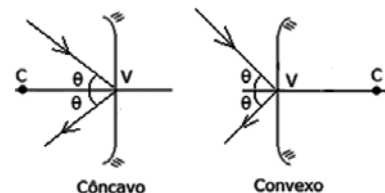
$$f = R/2$$

8.3 Raios notáveis

I. Centro de curvatura (C): o raio incidente (ou seu prolongamento) que contém C é refletido sobre sua própria reta suporte.



II. Vértice (V): o raio incidente que passa pelo vértice é refletido simetricamente em relação ao eixo principal.



III. Foco principal (F): o raio incidente (ou seu prolongamento) que passa por F é refletido paralelamente ao eixo principal, e, reciprocamente, raios paralelos ao eixo principal são refletidos passando por F . Isso vem da própria definição de foco (já vista).

IV. Foco secundário (φ): o raio incidente (ou seu prolongamento) que passa por φ é refletido paralelamente ao eixo secundário. Isso vem da própria definição de foco secundário (já vista).

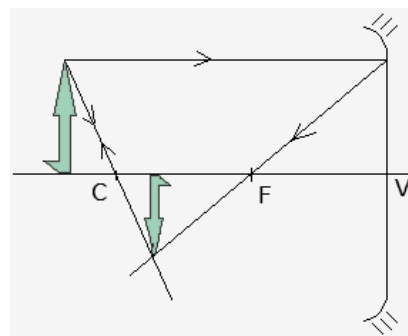
8.4 Construção de imagens de objetos

Utilizando os raios notáveis, podemos saber onde haverá a formação da imagem relativa a um objeto qualquer disposto perante um espelho esférico. Podemos usar todos os raios notáveis distintos que quisermos nessas construções, mas basta dois deles (usados corretamente) para que se defina a posição da imagem. Mostraremos as possibilidades de construção de imagens para os dois tipos de espelhos esféricos.

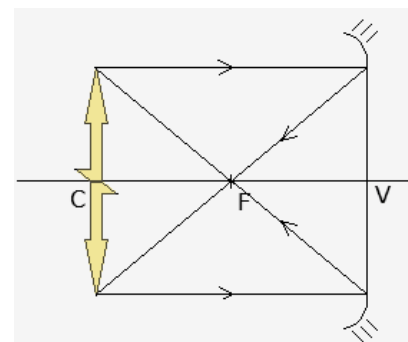
8.5 Espelho côncavo

Existem 5 possibilidades de posicionamento do objeto relativamente ao espelho:

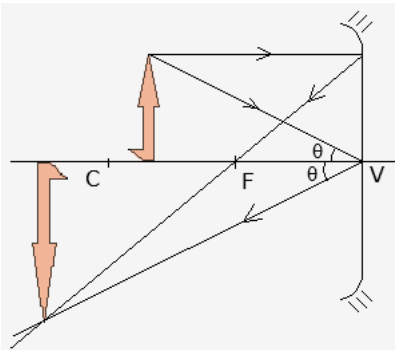
(A) *Objeto à esquerda do centro de curvatura*: a imagem é real, em relação ao objeto, menor e invertida.



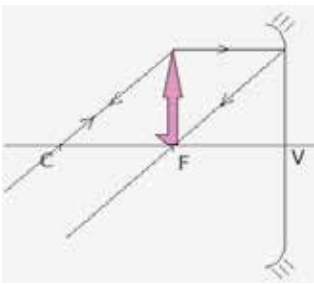
(B) *Objeto sobre o centro de curvatura*: a imagem é real, em relação ao objeto, do mesmo tamanho e invertida.



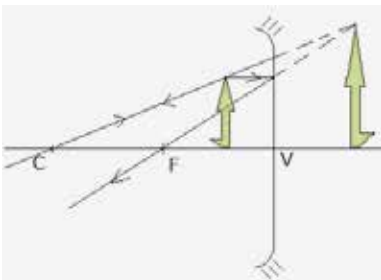
(C) Objeto entre os pontos C e F do eixo principal: a imagem é real, em relação ao objeto, e invertida.



(D) Objeto sobre o foco principal: a imagem é imprópria.

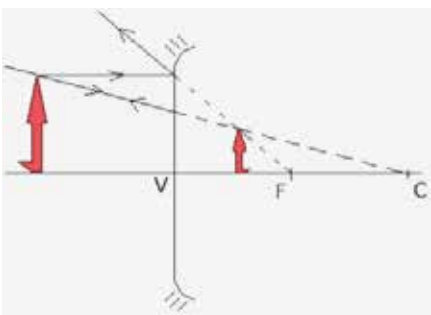


(E) Objeto entre os pontos F e V do eixo principal: a imagem é virtual, em relação ao objeto, maior e direita. Perceba que é o único caso em que a imagem refletida por um espelho esférico côncavo é virtual.



8.6 Espelho convexo

Existe apenas uma possibilidade de posicionamento do objeto relativamente ao espelho. A imagem sempre é virtual, em relação ao objeto, direita e menor; além disso, situa-se em algum lugar entre o foco e o vértice do espelho.



9. Estudo Analítico

9.1 O referencial gaussiano

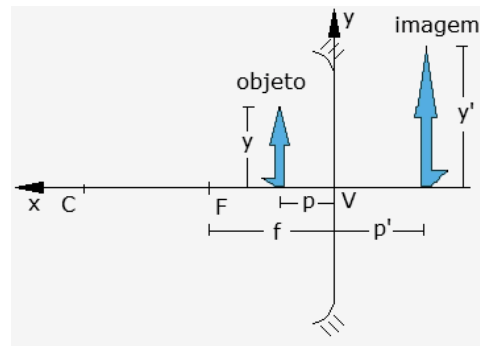
Faremos agora um estudo analítico do espelho esférico, adotando um sistema cartesiano regido pelo **referencial gaussiano**. Tal referencial é de suma importância na aplicação das equações que regerão o estudo analítico dos espelhos esféricos, e, portanto, deve se tornar muito familiar ao leitor. Ele apresenta as seguintes características:

- É um sistema cartesiano de coordenadas retangulares;
- A origem do par das retas cartesianas orientadas é o vértice (V) do espelho;
- A orientação positiva do eixo das abscissas (Ox) é oposta à do sentido da luz incidente;
- Os elementos reais possuem abscissa positiva;
- Os elementos virtuais possuem abscissa negativa;
- O sinal da abscissa do foco (F) para espelhos côncavos é positivo ($f > 0$);
- O sinal da abscissa do foco (F) para espelhos convexos é negativo ($f < 0$).

Além disso, usaremos as seguintes notações:

- p: abscissa do objeto
- p': abscissa da imagem
- f: abscissa focal
- y: ordenada do objeto
- y': ordenada da imagem
- |f|: distância focal

Observe abaixo um exemplo do uso do referencial gaussiano:



9.2 A função dos pontos conjugados (equação de Gauss)

Usando-se o referencial apontado e as leis da reflexão aplicadas para espelhos esféricos, com raios luminosos de pouca inclinação em relação ao eixo principal, deduz-se facilmente a famosa relação entre f , p e p' :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

9.3 Aumento linear transversal

O aumento linear transversal (A) é a razão entre uma medida da imagem e a medida equivalente do objeto:

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-p'}{p}$$

O sinal negativo que precede p' é meramente uma correção que visa a compensar o fato de que a imagem pode ou não estar invertida em relação ao objeto.

Observe que:

- Se $A > 0$: y e y' têm o mesmo sinal (logo, a imagem é direita); p e p' têm sinais opostos (e logo a imagem tem natureza oposta à do objeto).
- Se $A < 0$: y e y' têm sinais opostos (logo, a imagem é invertida); p e p' têm o mesmo sinal (logo, a imagem tem a mesma natureza do objeto).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um objeto está diante da parte espelhada de um espelho esférico de diâmetro 40 cm. Verifica-se que sua imagem, virtual, está a 15 cm do objeto e está reduzida em 50%. Determine a posição do objeto e o tipo de espelho.

Solução:

Como a imagem é virtual e menor, concluímos que o espelho é convexo. Neste caso, pelo referencial de Gauss:

Diâmetro = - 40 cm \Rightarrow Raio = - 20 cm \Rightarrow foco = - 10 cm

Além disso, também sabemos que a imagem será direita, assim,

$$i = + \frac{1}{2} o.$$

Usando a equação de ampliação:

$$\frac{i}{o} = - \frac{p'}{p} \rightarrow \frac{1}{2} = - \frac{p'}{p} \rightarrow p' = - \frac{p}{2}$$

Quando é fornecida a distância entre o objeto e a imagem, todos os problemas podem ser resolvidos por equação modular:

$$|p - p'| = 15$$

Substituindo, temos:

$$\left| p - \left(- \frac{p}{2} \right) \right| = 15 \rightarrow \left| p + \frac{p}{2} \right| = 15 \rightarrow p = \pm 10 \text{ cm}$$

Neste exercício, como na maioria, o objeto é real (está em frente a parte espelhada) e por isso é positivo.

p = 10 cm

02 Um espelho côncavo pode concentrar os raios solares a 20 cm de seu vértice. Um objeto luminoso de 8 cm de altura está 15 cm a frente do espelho. O espelho pode produzir uma imagem nítida do objeto luminoso.

Determine:

- a posição da imagem;
- a altura da imagem;
- a classificação da imagem;
- a ampliação deste sistema óptico.

Solução:

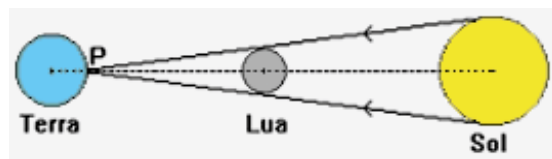
a. $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{15} + \frac{1}{p'} \rightarrow p' = - 60 \text{ cm}$

b. $\frac{i}{o} = - \frac{p'}{p} \rightarrow \frac{i}{8} = - \frac{- 60}{15} \rightarrow i = 32 \text{ cm}$

c. $p' < 0 \rightarrow$ virtual; $i > 0 \rightarrow$ direita; $|i| > o \rightarrow$ maior

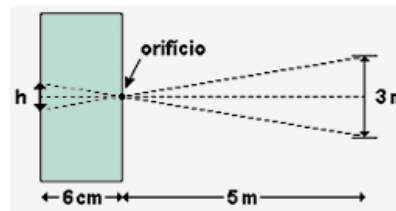
EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 No dia 3 de novembro de 1994, ocorreu o último eclipse total do Sol deste milênio. No Brasil, o fenômeno foi mais bem observado na região Sul. A figura mostra a Terra, a Lua e o Sol alinhados em um dado instante durante o eclipse; neste instante, para um observador no ponto P, o disco da Lua encobre exatamente o disco do Sol.

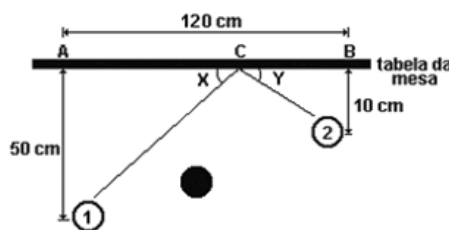


Sabendo que a razão entre o raio do Sol (R_s) e o raio da Lua (R_L) vale $R_s/R_L = 4,00 \times 10^2$ e que a distância do ponto P e ao centro da Lua vale $3,75 \times 10^5 \text{ km}$, calcule a distância entre P e o centro do Sol. Considere propagação retilínea para a luz.

02 No mundo artístico, as antigas “câmaras escuras” voltaram à moda. Uma câmara escura é uma caixa fechada de paredes opacas que possui um orifício em uma de suas faces. Na face oposta à do orifício, fica preso um filme fotográfico, onde se formam as imagens dos objetos localizados no exterior da caixa, como mostra a figura. Suponha que um objeto de 3 m de altura esteja a uma distância de 5 m do orifício e que a distância entre as faces seja de 6 cm. Calcule a altura h da imagem.



03 Em um jogo de bilhar, um dos jogadores encontra-se em uma situação de sinuca e deseja marcar o ponto C sobre a tabela da mesa de forma que a bola 1 descreva a trajetória mostrada na figura a seguir.

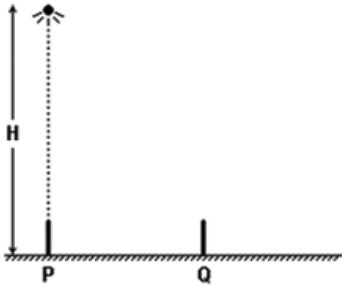


- Determine a razão x/y . Justifique a sua resposta.
- Determine a que distância do ponto A se encontra o ponto C.

04 Admita que o sol subitamente “morresse”, ou seja, sua luz deixasse de ser emitida. 24 horas após este ocorrido, um eventual sobrevivente, olhando para o céu, sem nuvens, veria:

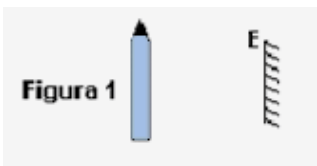
- a Lua e estrelas.
- somente a Lua.
- somente estrelas.
- uma completa escuridão.
- somente os planetas do sistema solar.

05 Para determinar a que altura H uma fonte de luz pontual está do chão, plano e horizontal, foi realizada a seguinte experiência. Colocou-se um lápis de 0,10 m, perpendicularmente sobre o chão, em duas posições distintas: primeiro em P e depois em Q . A posição P está, exatamente, na vertical que passa pela fonte e, nesta posição, não há formação de sombra do lápis, conforme ilustra esquematicamente a figura. Na posição Q , a sombra do lápis tem comprimento 49 (quarenta e nove) vezes menor que a distância entre P e Q . A altura H é, aproximadamente, igual a:



- (A) 0,49 m.
- (B) 1,0 m.
- (C) 1,5 m.
- (D) 3,0 m.
- (E) 5,0 m.

06 Um lápis encontra-se na frente de um pequeno espelho plano E , como mostra a figura. O lápis e a imagem estão corretamente representados na alternativa:

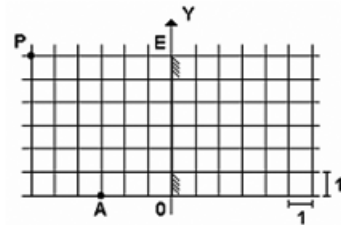


- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

07 Durante a final da Copa do Mundo, um cinegrafista, desejando alguns efeitos especiais, gravou cena em um estúdio completamente escuro, onde existia uma bandeira da “Azurra” (azul e branca) que foi iluminada por um feixe de luz amarela monocromática. Quando a cena foi exibida ao público, a bandeira apareceu:

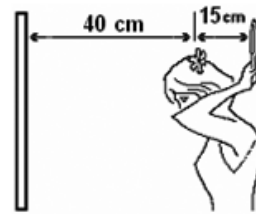
- (A) verde e branca.
- (B) verde e amarela.
- (C) preta e branca.
- (D) preta e amarela.
- (E) azul e branca.

08 Na figura a seguir tem-se o perfil de um espelho plano E , desenhado sobre um eixo OY . Para que um raio luminoso emitido por uma fonte pontual em A atinja o ponto P , após refletir nesse espelho, ele deve incidir em um ponto do espelho cuja ordenada Y vale:



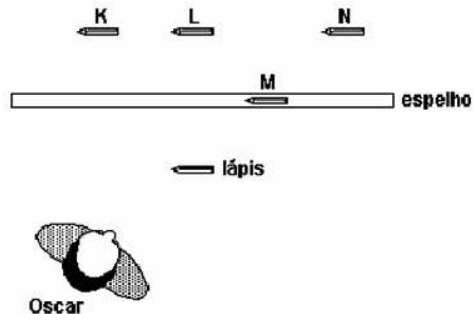
- (A) 1.
- (B) 1,5.
- (C) 2.
- (D) 2,5.
- (E) 3.

09 Uma garota, para observar seu penteado, coloca-se em frente a um espelho plano de parede, situado a 40 cm de uma flor presa na parte de trás dos seus cabelos. Buscando uma visão melhor do arranjo da flor no cabelo, ela segura, com uma das mãos, um pequeno espelho plano atrás da cabeça, a 15 cm da flor. A menor distância entre a flor e sua imagem, vista pela garota no espelho de parede, está próxima de:



- (A) 55 cm.
- (B) 70 cm.
- (C) 95 cm.
- (D) 110 cm.

10 Oscar está na frente de um espelho plano, observando um lápis, como representado na figura. Com base nessas informações, é correto afirmar que Oscar verá a imagem desse lápis na posição indicada pela letra:



- (A) K.
- (B) L.
- (C) M.
- (D) N.

11 Um objeto colocado muito além de C , centro de curvatura de um espelho esférico côncavo, é aproximado vagarosamente dele. Estando o objeto colocado perpendicularmente ao eixo principal, a imagem do objeto conjugada por este espelho, antes de o objeto atingir o foco, é:

- (A) real, invertida e se aproxima do espelho.
- (B) virtual, direita e se afasta do espelho.
- (C) real, invertida e se afasta do espelho.
- (D) virtual, invertida e se afasta do espelho.
- (E) real, invertida, fixa em um ponto qualquer.

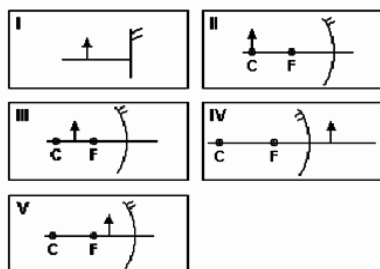
12 A vigilância de uma loja utiliza um espelho convexo de modo a poder ter um ampla visão do seu interior. A imagem do interior dessa loja, vista através desse espelho, será:

- (A) real e situada entre o foco e o centro da curvatura do espelho.
- (B) real e situada entre o foco e o espelho.
- (C) real e situada entre o centro e o espelho.
- (D) virtual e situada entre o foco e o espelho.
- (E) virtual e situada entre o foco e o centro de curvatura do espelho.

13 O espelho retrovisor de uma motocicleta é convexo porque:

- (A) reduz o tamanho das imagens e aumenta o campo visual.
- (B) aumenta o tamanho das imagens e aumenta o campo visual.
- (C) reduz o tamanho das imagens e diminui o campo visual.
- (D) aumenta o tamanho das imagens e diminui o campo visual.
- (E) mantém o tamanho das imagens e aumenta o campo visual.

14 Um objeto real, representado pela seta, é colocado em frente a um espelho podendo ser plano ou esférico, conforme as figuras. A imagem fornecida pelo espelho será virtual:



- (A) apenas no caso I.
- (B) apenas no caso II.
- (C) apenas nos casos I e II.
- (D) nos casos I, IV e V.
- (E) nos casos I, II e III.

15 Um estudante colocou uma caneta a uma distância relativamente grande de uma colher bem polida e observou o tipo de imagem que aparecia na parte interna da colher. A imagem que ele viu, comparada com a caneta, era:

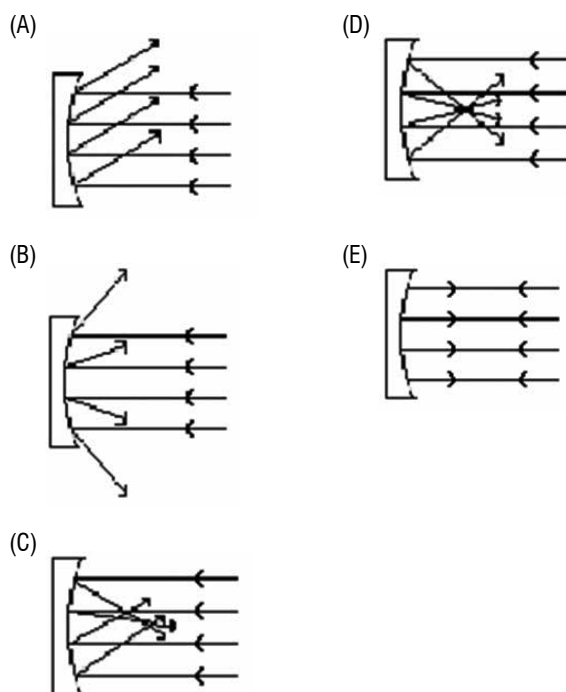
- (A) maior, direta e virtual.
- (B) maior, invertida e real.
- (C) menor, invertida e virtual.
- (D) menor, direta e real.
- (E) menor, invertida e real.

16 A imagem de um objeto real, formada por um espelho convexo, é sempre:

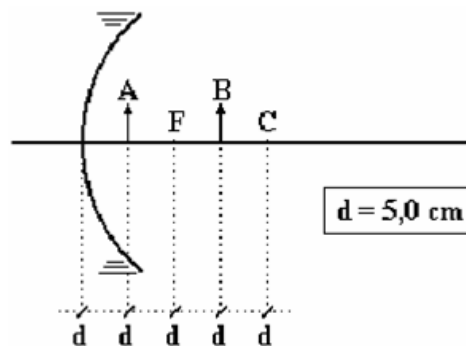
- (A) real, invertida e maior do que o objeto.
- (B) real, direita e menor do que o objeto.
- (C) real, direita e maior do que o objeto.
- (D) virtual, invertida e maior do que o objeto.
- (E) virtual, direita e menor do que o objeto.

17 Isaac Newton foi o criador do telescópio refletor. O mais caro desses instrumentos até hoje fabricado pelo homem, o telescópio espacial Hubble (1,6 bilhão de dólares), colocado em órbita terrestre em 1990, apresentou em seu espelho côncavo, dentre outros, um defeito de fabricação que impede a obtenção de imagens bem definidas das estrelas distantes.

Qual das figuras a seguir representaria o funcionamento perfeito do espelho do telescópio?



18 Em frente a um espelho esférico côncavo, de centro de curvatura C e foco principal F , são colocados dois objetos, A e B , conforme a ilustração a seguir. A distância entre as respectivas imagens conjugadas de A e B é:

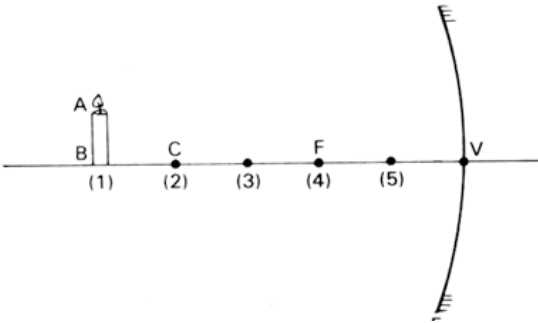


- (A) 10 cm.
- (B) 20 cm.
- (C) 30 cm.
- (D) 40 cm.
- (E) 50 cm.

19 Um espelho esférico côncavo é utilizado para projetar, sobre uma tela, a imagem do Sol. A distância focal do espelho é de 2,0 metros. Qual é, aproximadamente, a distância entre a imagem do Sol e o espelho?

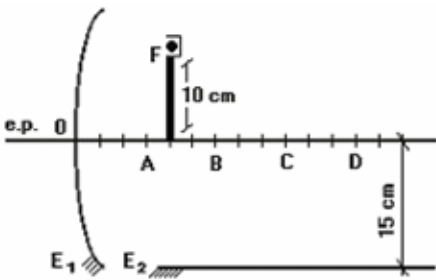
20 Define-se um ano-luz como sendo a distância percorrida por um sinal luminoso no vácuo, durante um ano terrestre. Sabendo que, no vácuo, a luz viaja com velocidade de $3,0 \cdot 10^8$ km/s, calcule, em metros, o comprimento equivalente a um ano-luz.

21 No esquema a seguir, E é um espelho esférico côncavo de centro de curvatura C , foco principal F e vértice V . AB é um objeto luminoso postado diante da superfície refletora. Levando em conta as condições de Gauss, construa graficamente a imagem de AB , considerando as posições (1), (2), (3), (4) e (5). Em cada caso, dê a classificação da imagem obtida.



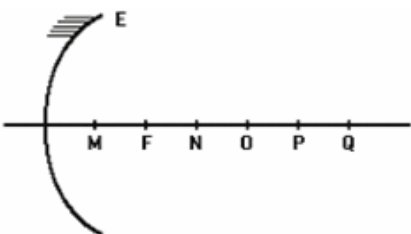
EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 A figura apresenta uma montagem utilizada por um professor de Física em uma aula experimental, sendo E_1 um espelho côncavo de distância focal 15 cm. E_2 é um espelho plano, disposto paralelamente ao eixo principal do espelho E_1 . F é uma fonte luminosa, situada a 5 cm do ponto A , de paredes opacas, dotada de uma abertura, de forma que a luz incide inicialmente em E_1 . Na figura, $AO = AB = BC = CD = 15$ cm. A respeito da imagem final conjugada pelos dois espelhos, pode-se afirmar:



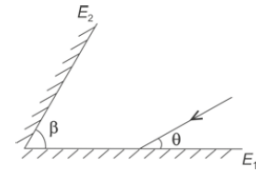
- (A) É virtual e se forma no ponto C .
- (B) Não será projetável, pois E_2 conjuga imagem virtual.
- (C) É real e se localiza entre E_2 e o eixo principal de E_1 .
- (D) É real e vai se formar no ponto D .
- (E) É virtual e está localizada no ponto B .

02 A figura a seguir ilustra um espelho esférico côncavo E . Sobre o eixo principal estão indicados pontos equidistantes, entre os quais se encontram o foco F e o centro da curvatura O . Se um objeto real é colocado no ponto N , a imagem conjugada pelo espelho se formará no ponto:



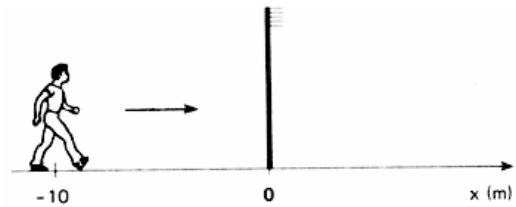
- (A) M .
- (B) Q .
- (C) O .
- (D) P .

03 A figura a seguir mostra uma vista superior de dois espelhos planos E_1 e E_2 que formam entre si um ângulo β . Sobre o espelho E_1 incide um raio de luz horizontal e que forma com este espelho um ângulo θ . Após reflexão nos dois espelhos, o raio emerge formando um ângulo α com a normal ao espelho E_2 . O ângulo α vale:



- (A) $\beta + \theta$.
- (B) $\beta + \theta - 90^\circ$.
- (C) $\beta + \theta + 90^\circ$.
- (D) $\beta - \theta$.

04 O esquema seguinte representa o instante inicial ($t_0 = 0$) do movimento retilíneo e uniforme de um garoto diante da superfície refletora de um espelho plano fixo verticalmente no solo:



O garoto aproxima-se do espelho caminhando ao longo do eixo Ox com velocidade escalar de módulo 2,0 m/s. Em relação ao eixo Ox , podemos afirmar que as funções horárias $x = f(t)$ do movimento do garoto e da sua imagem conjugada pelo espelho são, respectivamente, em unidades do SI:

- (A) $x = 2,0t$ e $x = -2,0t$.
- (B) $x = 10 + 2,0t$ e $x = -10 - 2,0t$.
- (C) $x = -10 + 2,0t$ e $x = 10 - 2,0t$.
- (D) $x = -10 - 2,0t$ e $x = 10 + 2,0t$.
- (E) $x = 10 + 2,0t$ e $x = 10 + 2,0t$.

05 Tem-se um objeto O em frente de dois espelhos planos perpendiculares entre si. Os pontos A , B e C correspondem às imagens formadas do referido objeto. A distância AB é igual a 80 cm e a distância BC , igual a 60 cm.



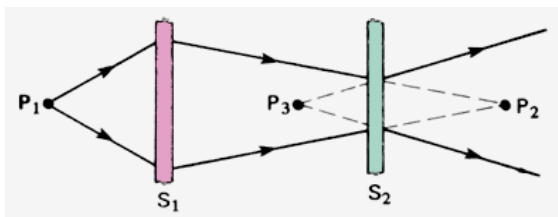
- a. Qual a distância entre o objeto e a imagem B ?
- b. Desenhe o esquema com os espelhos, o objeto e as imagens.

06 Desloca-se uma pequena lâmpada acesa ao longo do eixo principal de um espelho esférico côncavo, até que a posição da imagem formada pelo espelho coincida com a posição do objeto. Neste caso, a imagem é invertida e a distância da lâmpada ao espelho é de 24 cm. Qual a distância focal do espelho?

07 Uma vela acesa de 18 cm de comprimento é colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico, a 60 cm do vértice. A imagem real correspondente forma-se a 30 cm do espelho. Determine:

- a. se o espelho é côncavo ou convexo;
- b. o comprimento da imagem;
- c. o traçado gráfico do objeto e de sua imagem conjugada pelo espelho.

08 Na figura seguinte, S_1 e S_2 são sistemas ópticos e P_1 é uma fonte puntiforme de luz:



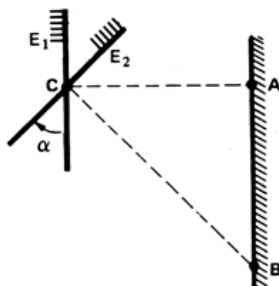
Com base nessa situação, responda:

- O que representa P_1 em relação a S_1 ?
- O que representa P_2 em relação a S_1 ? E em relação a S_2 ?
- O que representa P_3 em relação a S_2 ?

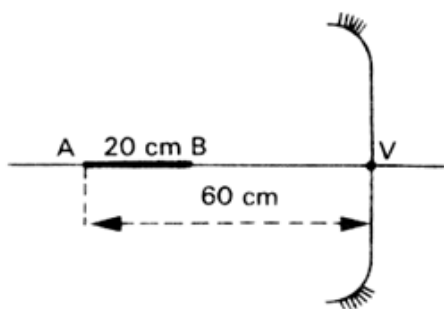
09 Um caminhão trafega em uma estrada retilínea com velocidade de 40 km/h. Olhando no espelho retrovisor, o motorista contempla a imagem de um poste fixo na estrada.

- Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao solo?
- Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao motorista do caminhão?

10 A figura mostra um espelho plano que pode girar em torno de um eixo contendo seu centro C . Estando na posição E_1 , o espelho capta a luz proveniente de uma fonte puntiforme A , fixa no anteparo, refletindo-a de volta ao ponto de partida. O espelho sofre, então, uma rotação equivalente a um ângulo α , passando para a posição E_2 . Neste caso, ao receber a luz emitida por A , reflete-a para o ponto B . Sabendo-se que $AB = \sqrt{3} AC$, calcule o ângulo α .



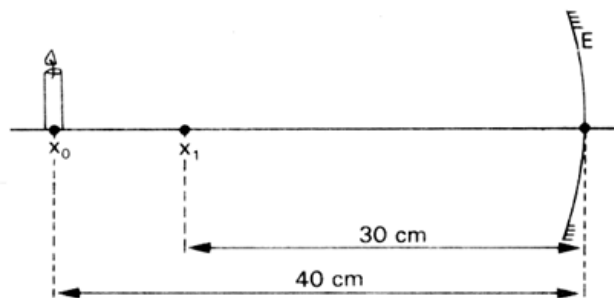
11 Uma barra AB de 20 cm de comprimento está colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo. A extremidade B encontra-se sobre o centro de curvatura do espelho, enquanto a extremidade A encontra-se a 60 cm do espelho, conforme mostra a figura.



Determine:

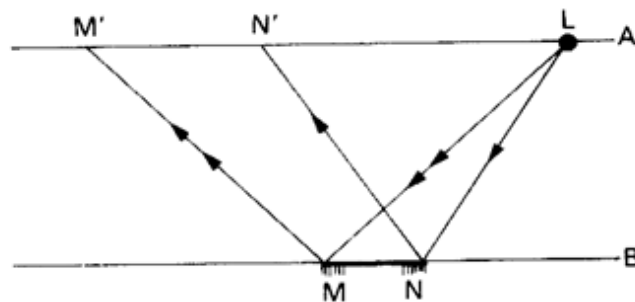
- a distância focal do espelho;
- o comprimento da imagem da barra conjugada pelo espelho.

12 Em uma experiência de Óptica Geométrica, dispuseram-se um toco de vela e um espelho côncavo gaussiano E , de distância focal igual a 20 cm, como mostra a figura:



O toco de vela foi deslocado de x_0 a x_1 , com velocidade escalar de módulo 1,0 cm/s. Enquanto o toco de vela foi deslocado, qual foi o módulo da velocidade escalar média da imagem, expressa em cm/s?

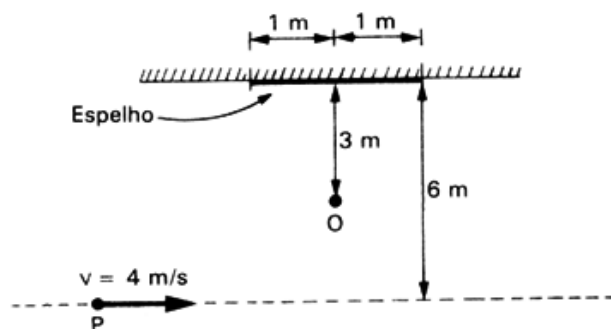
13 Considere um corredor delimitado por duas paredes planas, verticais e paralelas entre si. Em uma das paredes (A) está incrustada uma lâmpada puntiforme (L) acesa. Na outra parede (B) está fixado um espelho plano (MN), que reflete luz proveniente de L , iluminando a região $M'N'$ da parede A .



Admitindo-se que a parede A passe a se aproximar da parede B com velocidade constante de módulo V , permanecendo, porém, paralela a B , pode-se afirmar que a velocidade de M' em relação a N' terá módulo:

- nulo.
- $V/2$.
- V .
- $2V$.
- Um outro valor.

14 Um observador O de dimensões desprezíveis posta-se em repouso a uma distância de 3 m em frente ao centro de um espelho plano de 2 m de largura, que também está em repouso. Um objeto puntiforme P desloca-se uniformemente com 4 m/s ao longo de uma trajetória retilínea paralela à superfície do espelho e distante 6 m desta (veja figura). Inicialmente, o observador não vê o objeto.

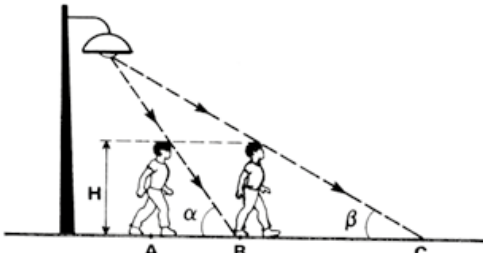


A partir de um certo ponto de sua trajetória, o objeto passa a ser visto pelo observador. Por quanto tempo ele permanece visível?

15 Um homem quer se barbear com o auxílio de um espelho côncavo de distância focal igual a $1,2 \cdot 10^2$ cm. Para ele ver uma imagem direta de sua face, aumentada de 50% em relação à real, a que distância deve colocar-se do espelho?

16 Um objeto linear é colocado frontalmente diante da superfície refletora de um espelho esférico côncavo, de raio de curvatura igual a 120 cm e que obedece às condições de Gauss. Sabendo que a imagem é quatro vezes maior que o objeto, calcule a distância do objeto ao espelho.

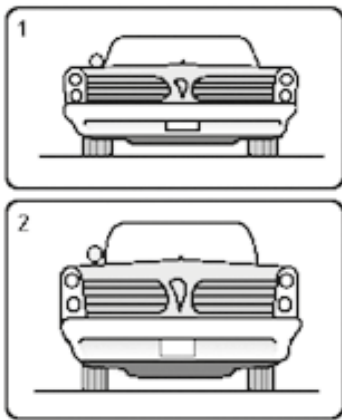
17 A figura a seguir representa um homem de altura H que vai do ponto A ao ponto B em movimento retilíneo. Durante o mesmo intervalo de tempo, a sombra de sua cabeça, projetada no solo horizontal, vai do ponto B ao ponto C :



Conhecendo os ângulos α e β ($\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 30^\circ$), determine a relação entre as velocidades médias da sombra (v_s) e do homem (v_h).

18 Determine o comprimento l mínimo de um espelho de parede, de modo que uma pessoa com altura h possa se ver por inteiro no espelho, desde o topo da cabeça até os pés.

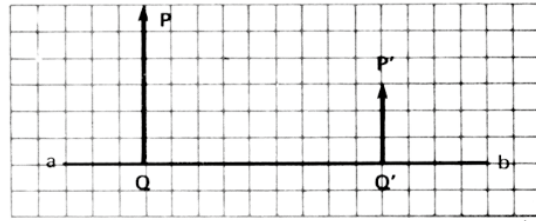
19 Em alguns carros, é comum que o espelho retrovisor modifique a altura aparente do carro que vem atrás. As imagens a seguir são vistas pelo motorista em um retrovisor curvo (Fig. 1) e em um retrovisor plano (Fig. 2).



- Qual é (qualitativamente) a curvatura do retrovisor da Fig. 1?
- A que distância o carro detrás se encontra, quando a sua imagem vista pelo motorista ocupa todo o espelho plano (Fig. 2), cuja altura é de 4,0 cm? Considere que a altura real do carro seja de 1,6 m e que o teto do carro, o olho do motorista (situado a 50 cm do retrovisor) e o topo da imagem no espelho estejam alinhados horizontalmente.

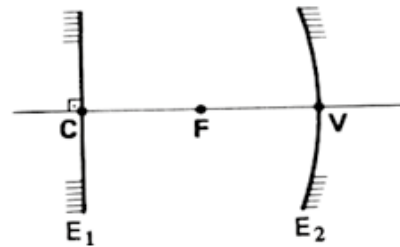
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 No esquema seguinte, ab é o eixo principal de um espelho esférico gaussiano, PQ é um objeto luminoso contido num plano frontal e $P'Q'$ é a imagem que o espelho conjuga ao objeto considerado:



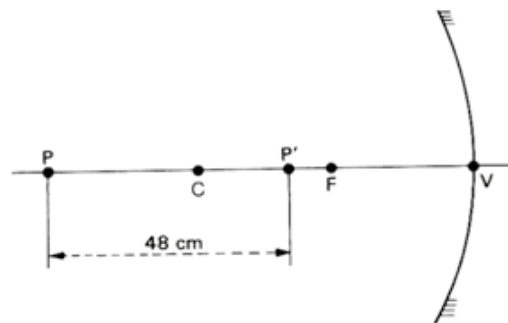
Obtenha graficamente a posição e a natureza do espelho, bem como as posições de seu foco principal e de seu centro de curvatura.

02 No esquema a seguir, E_1 é um espelho plano e E_2 é um espelho esférico côncavo de raio de curvatura $R = 60$ cm:



C , F e V são, respectivamente, em relação a E_2 , o centro de curvatura, o foco e o vértice. Em F , é colocada uma fonte pontual de luz. Determine a distância da fonte a sua imagem, considerando que a luz sofre dupla reflexão, primeiramente em E_1 e posteriormente em E_2 .

03 No esquema abaixo, P é um ponto luminoso e P' é sua imagem conjugada por um espelho côncavo gaussiano, de 20 cm de raio de curvatura:



Os pontos C , F e V representam, respectivamente, o centro de curvatura, o foco principal e o vértice do espelho. Chamando o comprimento PV de p e o comprimento $P'V$ de p' , é correto que:

- $p = 63$ cm e $p' = 15$ cm.
- $p = 62$ cm e $p' = 14$ cm.
- $p = 61$ cm e $p' = 13$ cm.
- $p = 60$ cm e $p' = 12$ cm.

04 O ponto médio de uma haste de arame, de 6,0 cm de comprimento, desloca-se ao longo do eixo principal de um espelho côncavo, de 10 cm de distância focal, de maneira que a haste mantém uma posição perpendicular em relação ao eixo. Seja d a distância entre esse ponto e o vértice do espelho. Qual das expressões abaixo melhor representa o comprimento, em cm, da imagem virtual da haste conjugada pelo espelho, em função de d ?

- (A) $\frac{60}{10-d}$ para $d < 10$. (D) $\frac{10}{10-d}$ para $d < 10$.
 (B) $\frac{60}{10-d}$ para $d \neq 10$. (E) $\frac{30}{10-d}$ para $d < 10$.
 (C) $\frac{30}{10-d}$ para $d \neq 10$.

05 Uma esfera metálica oca tem diâmetro interno $D = 4,000$ m, a 20°C . Corta-se uma calota dessa esfera, polindo-se sua parte côncava. Dirige-se seu eixo óptico principal para uma estrela, da qual se obtém uma imagem em um ponto A . Em seguida, aquece-se a calota até 80°C . Em uma experiência idêntica à anterior, a posição da imagem da estrela é B , sendo que o vértice do espelho mantém-se na mesma posição. Se o coeficiente de dilatação volumétrica do material da esfera é $30 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$, o valor do deslocamento AB da imagem é:

- (A) 0 mm. (D) 18 mm.
 (B) 6 mm. (E) diferente dos anteriores.
 (C) 12 mm.

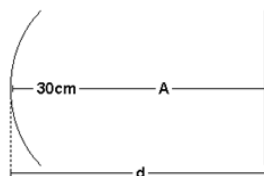
06 Colocam-se frente a frente um espelho convexo e outro côncavo de modo que seus eixos principais coincidam. As distâncias focais são iguais e valem 40 cm e a distância entre os espelhos é 120 cm. A que distância do espelho convexo se deve colocar um objeto para que as imagens em ambos os espelhos sejam de mesma altura?

07 Um excitador pulsado que gera faíscas a uma frequência de 10^6 Hz está localizado no centro de curvatura C de um espelho côncavo de 1 m de raio de curvatura. Considere que o tempo de duração de cada faísca seja desprezível em relação ao intervalo de tempo entre duas faíscas consecutivas. A 2 m do centro de curvatura do espelho está situado um anteparo normal aos raios refletidos. O espelho gira em torno de C com uma frequência de 500 rotações por segundo, formando faixas luminosas equidistantes no anteparo. O comprimento do intervalo entre duas faixas luminosas formadas pelos raios refletidos no anteparo é de, aproximadamente:

- (A) 3,1 mm. (C) 12,6 mm.
 (B) 6,3 mm. (E) 9,4 mm.
 (D) 1,0 mm.

08 Um espelho plano está colocado em frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa A , centrada no eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente sobre os dois espelhos e formam, sobre a própria fonte A , uma imagem real dela. O raio de curvatura do espelho é 40 cm e a distância do centro da fonte A até o centro do espelho esférico é de 30 cm. A distância d do espelho plano até o centro do espelho côncavo é, então:

- (A) 20 cm.
 (B) 30 cm.
 (C) 40 cm.
 (D) 45 cm.
 (E) 50 cm.



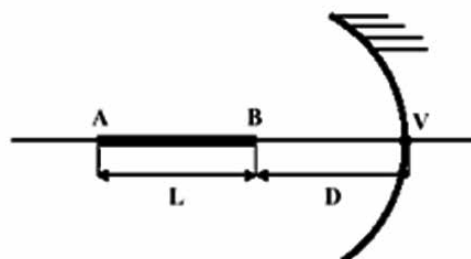
09 Uma partícula executa um movimento circular uniforme de raio 10 cm com velocidade igual a 5 cm/s. No instante $t = 0$ um espelho côncavo está junto ao plano da circunferência descrita pelo corpo, mas começa a afastar-se com velocidade de 10 cm/s. Sabendo que a distância focal do espelho é de 40 cm, responda ao itens abaixo: (o centro do MCU está no eixo óptico)

- a. Qual o tipo de imagem nos instantes $t = 3$ s e $t = 7$ s?
 b. Quanto valem o raio e o módulo do vetor velocidade da imagem da partícula no instante $t = 3$ s?

10 Dois espelhos, um côncavo e outro convexo, de distâncias focais iguais a 2 m, formam um sistema centrado. Um objeto é colocado a 2,5 m do espelho côncavo. Os raios luminosos, após refletirem-se sucessivamente no espelho côncavo e depois no espelho convexo, dão uma imagem final virtual e invertida e do mesmo tamanho do objeto. Calcule a distância entre os vértices dos espelhos.

- (A) 11,67 m.
 (B) 10 m.
 (C) 13 m.
 (D) 16 m.
 (E) 12,33 m.

11 Uma haste retilínea AB , de comprimento L , localiza-se sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo, como ilustrado na figura a seguir. A distância focal do espelho é denotada por f . Sabe-se que a extremidade B da haste encontra-se a uma distância D do vértice V do espelho. Considere que $D > f$.



- a. Calcule o comprimento da imagem da haste em função de f , L e D .
 b. Considere a situação particular em que $f = 20$ cm e $L = 30$ cm. Calcule as coordenadas das extremidades A e B e as posições de suas respectivas imagens, a fim de que a imagem da haste fique superposta sobre si mesma.

12 Um espelho esférico côncavo de aço polido, de abertura pequena, está montado de tal modo que, no decorrer desta experiência descrita a seguir, seu vértice permaneça fixo. Uma fonte luminosa pontual está situada sobre o eixo do espelho, distando d deste. O feixe refletido é convergente. Aquece-se o espelho. Quando a temperatura passa pelo valor $\theta^\circ\text{C}$, o feixe refletido torna-se paralelo e a seguir divergente. Sabendo-se que o coeficiente de dilatação linear do aço é λ , calcule a distância focal do espelho à temperatura de 0°C .

1. Índice de refração

Quando a luz muda de meio, sua velocidade pode se alterar, devido às propriedades do novo meio. Associado a esse fato, também poderá ocorrer a *mudança da direção de propagação da luz*. Todos esses fenômenos consistem na “refração luminosa”.

O índice de refração de um meio (n) é uma relação útil que se faz entre a velocidade de propagação da luz no vácuo (c) e a velocidade de propagação da luz no meio (v):

$$n = \frac{c}{v}$$

Perceba que a utilidade do índice de refração reside na ideia de que, ao compararmos dois meios de diferentes índices de refração, saberemos que aquele que possui maior índice de refração será o que mais desviará a luz, pois:

- I. “ c ” é uma constante, logo “ n ” varia apenas com “ v ”;
- II. se “ v ” aumenta, “ n ” diminui, pois a relação é de proporção inversa;
- III. “ v ” diminuir significa que a luz no meio percorre um espaço menor num dado tempo, e logo sua direção de propagação desvia-se mais da original.

Sobre o índice de refração, fazemos ainda as seguintes observações:

- No vácuo, $n = 1$ (pois $v = c$);
- Nos meios materiais, $n > 1$ (pois “ v ” é sempre menor que “ c ” fora do vácuo);
- No ar, “ n ” é *aproximadamente* igual a 1 (embora seja maior, a diferença é tão pequena que, na prática, consideramos $n_{Ar} = 1$);
- Quanto maior a densidade de uma mesma substância, maior será seu índice de refração (pois haverá mais partículas da substância num mesmo volume, que desviarão a luz);
- “Índice de refração relativo”: compara dois índices de refração por meio de uma razão. O índice de refração do meio 2 em relação ao meio 1 ($n_{2,1}$) é dado por:

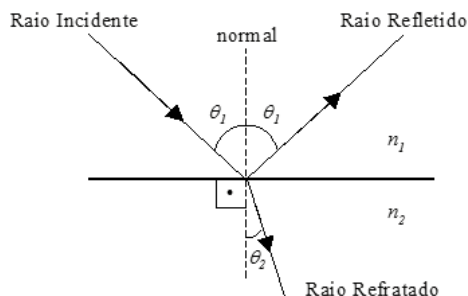
$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$$

- “Dioptro”: é o nome dado à interface de separação de dois meios de diferentes índices de refração.

2. Leis da refração

Assim como acontece com a reflexão, o fenômeno da refração obedece a duas leis gerais:

1ª) O raio incidente, o raio refratado e a reta normal que passa pelo ponto de incidência são todos coplanares.



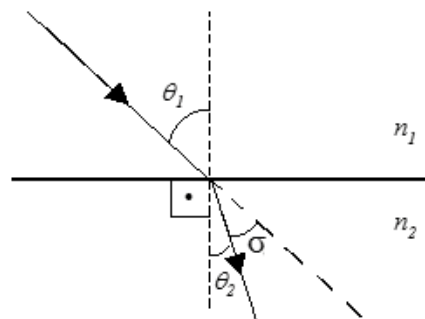
2ª) O desvio do raio refratado obedece à “Lei de Snell”:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Obs.: Os ângulos utilizados na Lei de Snell são os ângulos que os raios fazem com a reta normal, e não com a superfície de separação.

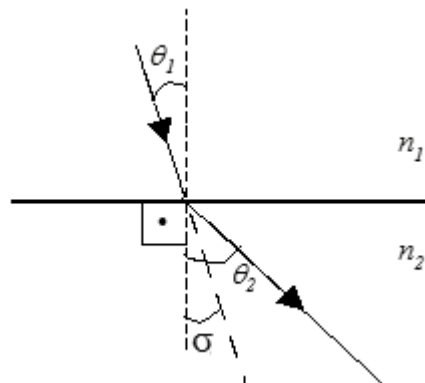
3. Tipos de incidências

(A) Incidência oblíqua com $n_2 > n_1 \rightarrow \theta_2 < \theta_1$:



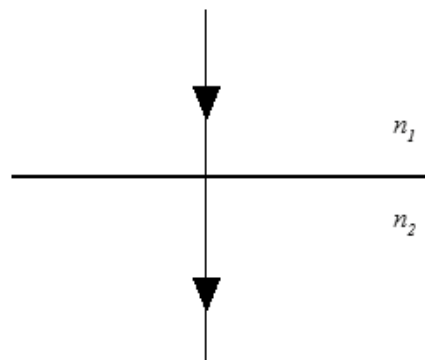
Ângulo de desvio (σ): $\sigma = \theta_1 - \theta_2$

(B) Incidência oblíqua com $n_2 < n_1 \rightarrow \theta_2 > \theta_1$:



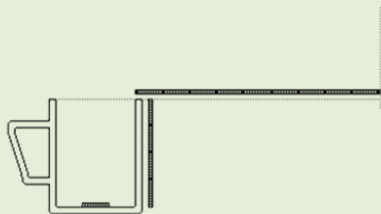
Ângulo de desvio (σ): $\sigma = \theta_2 - \theta_1$

(C) Incidência normal: $\theta_2 = \theta_1 = 0$, para todo n :



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

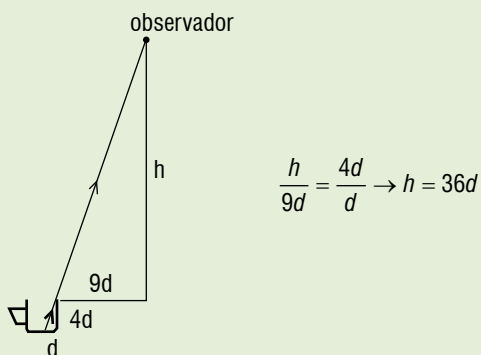
01 Uma moeda encontra-se exatamente no centro do fundo de uma caneca. Despreze a espessura da moeda. Considere a altura da caneca igual a 4 diâmetros da moeda, $d(m)$, e o diâmetro da caneca igual a $3d(m)$.



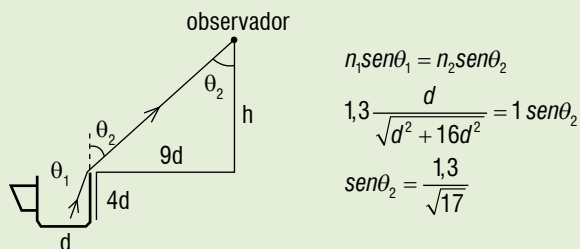
- Um observador está a uma distância de $9d(m)$ da borda da caneca. Em que altura mínima, acima do topo da caneca, o olho do observador deve estar para ver a moeda toda?
- Com a caneca cheia de água, qual a nova altura mínima do olho do observador para continuar a enxergar a moeda toda? $n(\text{água}) = 1,3$.

Solução:

a. A figura abaixo representa o ponto objeto que deve ser visto pelo observador. Da figura podemos aplicar semelhança de triângulos.



b. Agora aplicaremos a lei de Snell para determinar θ_2 .



Da figura temos que:

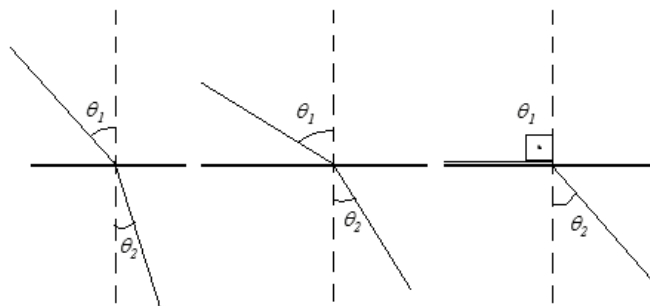
$$\text{tg} \theta_2 = \frac{9d}{h} \Rightarrow \frac{\text{sen} \theta_2}{\text{cos} \theta_2} = \frac{9d}{h} \Rightarrow \frac{1,3}{\frac{\sqrt{15,31}}{\sqrt{17}}} = \frac{9d}{h}$$

$$h = \frac{9d \sqrt{15,31}}{1,3} \cong 27,1d$$

4. Ângulo limite e casos especiais de refração

Refração e reflexão são fenômenos vinculados, já que, ao atingir uma superfície de separação de meios, um raio luminoso sofre simultaneamente reflexão e refração. Porém, a intensidade de um dos raios (refletido ou refratado) pode ser maior do que a do outro, de modo que, em condições limites, um deles pode ser considerado como praticamente nulo. Além disso, às vezes suprimimos de algum esquema um dos raios por termos interesse apenas no outro. Veja, por exemplo, o que acontece nos casos a seguir:

I. Aumento gradativo de θ_1 com $n_2 > n_1$:

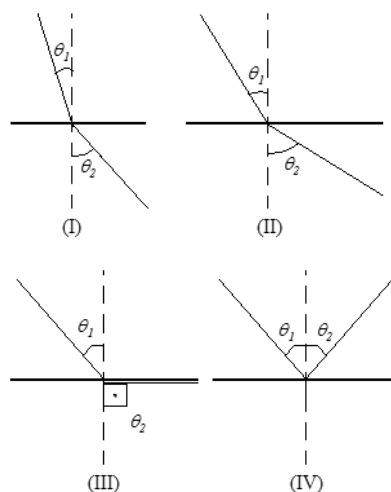


No limite, $\theta_1 = 90^\circ$. Temos o caso **limite de refração** e θ_2 é chamado de “ângulo limite de refração” (r_L). Pela Lei de Snell:

$$n_1 \text{sen} 90^\circ = n_2 \text{sen} r_L$$

$$\text{sen} r_L = n_1/n_2$$

II. Aumento gradativo de θ_1 com $n_2 < n_1$:

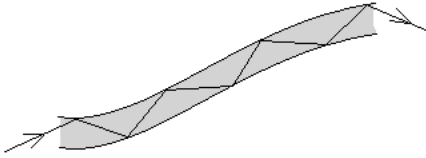


Do caso (I) ao caso (III), θ_1 vai aumentando gradativamente, até o caso limite em que θ_2 atinge o valor de 90° , de modo que, se θ_1 for ligeiramente aumentado, teremos reflexão total do raio incidente e nenhum raio será refratado (como mostra o caso IV). Nesse caso, temos o caso de **reflexão total** e θ_1 é chamado de “ângulo limite de reflexão total” (i_L). Pela Lei de Snell, no caso (III):

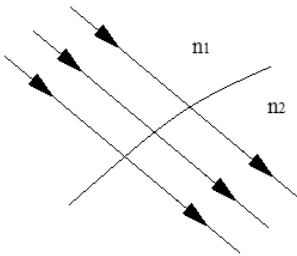
$$n_1 \text{sen} i_L = n_2 \text{sen} 90^\circ$$

$$\text{sen} i_L = n_2/n_1$$

Obs.: As **fibras ópticas** permitem a transmissão de informações através de raios luminosos que sofrem inúmeras reflexões totais em pequenos tubos maleáveis. Geralmente, esses tubos são feitos com vidro de óxido de silício e óxido de germânio, tendo cerca de 0,1 mm de diâmetro.



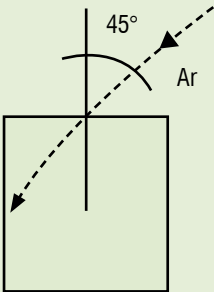
III. $n_2 = n_1$;



Nesse tipo de caso, há o fenômeno da “continuidade óptica”. O imerso torna-se invisível. Temos, como exemplo, o vidro e o tetracloretoeno (C_2Cl_4): ao imergir uma barra de vidro em C_2Cl_4 , um observador de fora não será capaz de ver a barra de vidro, pois ela está aproximadamente invisível (os índices de refração são aproximadamente iguais, não havendo, portanto, desvios de luz).

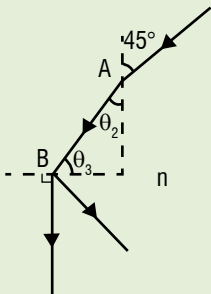
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um raio luminoso incide sobre um cubo de vidro, como indica a figura. Qual deve ser o valor do índice de refração do vidro, para que ocorra reflexão total na face vertical?



Solução:

Para determinar o índice (mínimo) do cubo, devemos representar, na parede vertical, a situação limite, isto é, a representação geométrica onde o raio refratado faz 90° com a vertical. Veja abaixo:



Refração no ponto de incidência A (cálculo de θ_2): $1 \cdot \text{sen}45^\circ = n \cdot \text{sen}\theta_2$

Refração no ponto de incidência B (cálculo de θ_3): $n \cdot \text{sen}\theta_3 = 1 \cdot \text{sen}90^\circ$

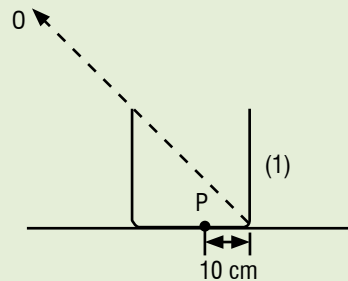
Observando na figura que θ_2 e θ_3 são complementares temos:
 $\text{sen}\theta_3 = \text{cos}\theta_2$

Pelo teorema fundamental da trigonometria:
 $\text{sen}^2 \theta_2 + \text{cos}^2 \theta_2 = 1$

$$\left(\frac{\text{sen}45^\circ}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{2}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{3}{2n^2} = 1 \rightarrow n = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

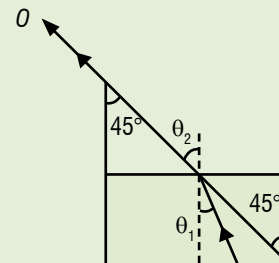
02 Na figura a seguir, temos um recipiente cúbico de paredes opacas, vazio, de 40 cm de aresta:



Na posição em que se encontra, o observador O não vê o fundo do recipiente, mas vê completamente a parede (1). Calcule a altura mínima da água que se deve despejar no recipiente, para que o observador passe a ver a partícula P . Adote o índice de refração da água em relação ao ar igual a $4/3$.

Solução:

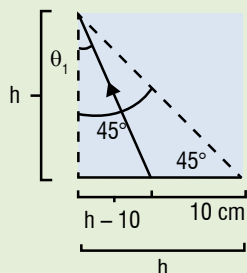
Como na maioria dos problemas de física, principalmente, óptica geométrica, é fundamental que seja feita uma figura ilustrando o caminho da luz e os raios e ângulos envolvidos. Nesse caso, é interessante que destaquemos apenas o raio de luz que sai do objeto e chega no observador. Ficando assim:



Da figura notamos que $\theta_2 = 45^\circ$

Aplicando a Lei de Snell: $\frac{4}{3} \text{sen}\theta_1 = 1 \cdot \text{sen}45^\circ \rightarrow \text{sen}\theta_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

Destacando da figura a região dentro do líquido, podemos identificar melhor a altura:



Da figura acima, temos que $tg\theta_1 = \frac{h-10}{h} = \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{cos}\theta_1}$

Onde $\text{cos}\theta_1 = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{18}{64}} = \frac{\sqrt{46}}{8}$

Substituindo, temos $\frac{h-10}{h} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{8}}{\frac{\sqrt{46}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{23}} \rightarrow h = \frac{10\sqrt{23}}{\sqrt{23}-3}$ cm

Sugestão: aproximação de radicais

$$\sqrt{23} = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{25\left(1 - \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 - \frac{2}{25}} \cong 5\left(1 - \frac{1}{25}\right) \cong \frac{24}{5} \cong 4,8$$

No problema acima, o resultado aproximado seria então: h

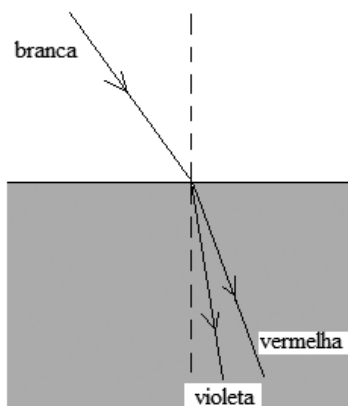
$$h = \frac{10 \cdot 4,8}{4,8 - 3} = \frac{48}{1,8} \cong 26,7 \text{ cm}$$

5. Dispersão de luz policromática

Luz policromática é formada por uma infinidade de luzes monocromáticas que a constituem. Embora todos esses componentes monocromáticas tenham a mesma velocidade (c) no vácuo, cada um deles tem uma respectiva velocidade distinta ao atravessarem um meio material, de modo que, se luz policromática vinda do vácuo atravessar um meio material, esta será decomposta em suas monocromáticas constituintes.

Esse fenômeno é explicado considerando os diferentes comprimentos de onda de cada raio monocromático, e esses detalhes serão vistos nos capítulos sobre ondas.

Sofrem maior desvio componentes monocromáticos de menor comprimento de onda. A decomposição da luz branca (luz solar), por exemplo, tem como extremos visíveis as monocromáticas violeta e vermelha:

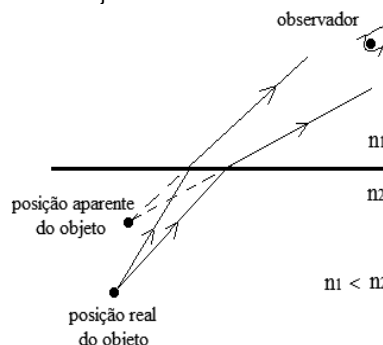


Os arcos-íris também ocorrem por esse fenômeno. As gotículas de água dispersas no ar, em determinadas condições, podem provocar, para um dado observador, a decomposição da luz branca.

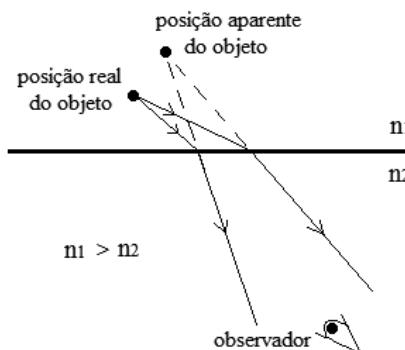
6. Dioptro plano e dioptro esférico

Quando um observador, situado num meio qualquer, olha para um objeto, situado em outro meio de diferente índice de refração, ele pode perceber o objeto numa posição diferente da verdadeira, devido à refração luminosa. Veja os dois casos possíveis:

- I. O observador se encontra num meio de menor índice de refração do que o do meio do objeto:

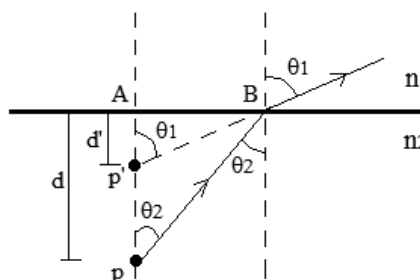


- II. O observador se encontra num meio de maior índice de refração do que o do meio do objeto:



Vamos agora fazer o estudo analítico de um caso especial de dioptro plano, que é quando temos pequenos ângulos de incidência. Deduziremos uma expressão para o caso (a) acima, mas a dedução para o caso (b) é análoga.

Quando os ângulos de incidência são pequenos, as posições real e aparente do objeto estão aproximadamente sobre uma mesma reta vertical. No desenho abaixo, não faremos pequenos ângulos de incidência simplesmente para que se possa analisá-lo melhor, mas tomaremos como hipótese que, de fato, os ângulos são pequenos:

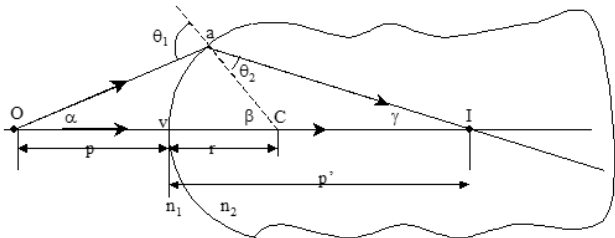


$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{AB}{AP}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{AB}{P'A}$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{P'A}{PA} = \frac{d'}{d} \cong \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \boxed{\frac{d'}{d} = \frac{n_{\text{destino}}}{n_{\text{origem}}}}$$

Um *dioptra esférica* possui como interface de separação uma parte de circunferência. Vejamos a dedução de sua equação:



Pela Lei de Snell, temos:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (I)$$

$$\Delta COA: \theta_1 = \alpha + \beta$$

$$\Delta ICA: \beta = \theta_2 + \gamma$$

Admitindo θ_1 e θ_2 pequenos:

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \rightarrow$$

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta = \frac{n_1}{n_2} (\alpha + \beta) + \gamma \rightarrow n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta$$

Da figura obtemos:

$$\alpha \cong \frac{av}{p} \quad \beta = \frac{av}{r} \quad \gamma \cong \frac{av}{p'}$$

Substituindo obtemos:

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$$

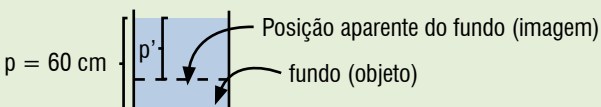
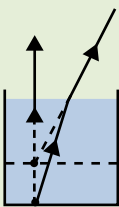
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Coloca-se água em um aquário de modo a ocupar 60 cm de sua altura. Quando visto verticalmente de cima para baixo, a água parece ocupar uma altura diferente h . Supondo que a velocidade de propagação da luz no ar seja de $3,00 \cdot 10^8$ km/s e na água, de $2,25 \cdot 10^8$ km/s, determine a altura aparente h .

- (A) 30 cm.
- (B) 65 cm.
- (C) 90 cm.
- (D) 70 cm.
- (E) 45 cm.

Solução: Letra E.

A figura da situação do problema é a seguinte:



Pela fórmula de dioptra plana temos: $\frac{n}{p} = \frac{n'}{p'} \rightarrow \frac{c}{p} = \frac{c}{p'} \rightarrow vp = v'p'$

Onde

v = velocidade do raio incidente = $2,25 \cdot 10^8$ km/s

P = posição do objeto (fundo do aquário) = 60 cm

v' = velocidade do raio refratado = $3,00 \cdot 10^8$ km/s

P' = posição da imagem

Assim teremos: $2,25 \cdot 10^8 \cdot 60 = 3,00 \cdot 10^8 \cdot p' \rightarrow p' = 45$ cm

02 Um aquário tem a forma de uma esfera de diâmetro 60 cm, está preenchido com água ($n = 4/3$) e tem um peixe no seu interior. Um gatinho observa esse peixe aparentemente a 10 cm da parede do aquário.



Disponível em: <www.123people.com/>.

Desprezando a espessura do vidro do aquário, determine a posição real do peixe.

Solução:

Trata-se de uma situação de dioptra esférica côncava. O objeto é o peixe que está na água (n). A luz vai de dentro do aquário para fora (n'), onde está a menina.

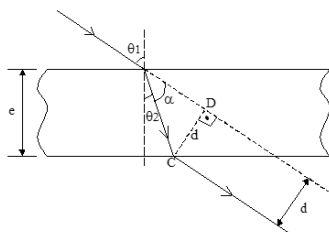
Aplicando a fórmula de dioptra esférica: $\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{n' - n}{R}$

Substituindo pelos dados:

$$\frac{4/3}{p} + \frac{1}{-10} = \frac{1 - 4/3}{-30} \rightarrow \frac{4}{3p} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90} \rightarrow p = \frac{36}{3} = 12$$
 cm

7. Lâmina de faces paralelas

Uma lâmina de faces paralelas é a situação que ocorre quando um paralelepípedo de certo material é imerso num meio de material de diferente índice de refração. Quando há incidência de luz oblíqua sobre ele, o raio de luz sofre *deslocamento lateral* após sofrer refrações. Vejamos, por exemplo, a situação de uma lâmina de vidro de espessura “e” imersa no ar:



Aplicando a Lei de Snell nas duas refrações que ocorrem, é facilmente provado que o desvio angular é nulo, ou seja, o raio emergente é paralelo ao raio incidente. O deslocamento lateral “d” (que é a distância entre as retas paralelas mencionadas) pode, também, ser facilmente calculado:

$$\Delta ABC: \cos \theta_2 = \frac{e}{AC} \rightarrow AC = \frac{e}{\cos \theta_2}$$

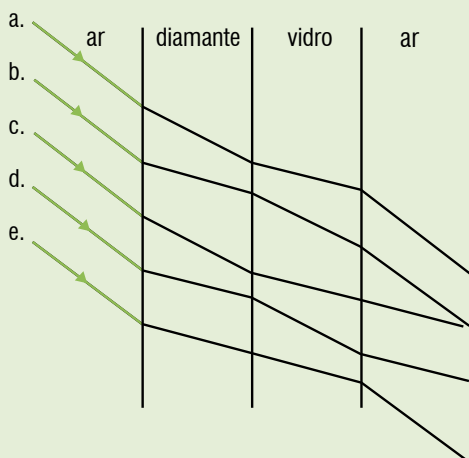
$$\Delta ADC: \sin \alpha = \frac{d}{AC} \rightarrow \sin (\theta_1 - \theta_2) = \frac{d}{AC}$$

$$\sin (\theta_1 - \theta_2) = \frac{d}{e} \cos \theta_2$$

$$d = \frac{e \cdot \sin (\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um feixe de luz monocromática incide sobre lâminas paralelas de diamante e vidro, como representado na figura. Sendo os índices de refração absolutos 2,42 para o diamante e 1,52 para o vidro, qual das linhas da figura que melhor representa a trajetória do feixe luminoso?



Solução: Letra B.

Nesses problemas qualitativos, basta conhecer a relação de proporcionalidade entre os ângulos e os índices que, nesse caso, são inversamente proporcionais, isto é, quanto maior o índice, menor o ângulo.

Cuidado para não confundir aqui! Estamos falando de ângulos de incidência e refração! São os ângulos entre o raio e a normal.

Quando o ângulo for maior, isto significa que está se afastando da normal (ou se aproximando do dióptro).

Vamos lá!

Do ar para o diamante o índice aumenta, logo, o ângulo diminui (somente B e D obedecem nesse caso).

Do diamante para o vidro, o índice diminui, logo, o ângulo aumenta (B e D ainda estão corretas).

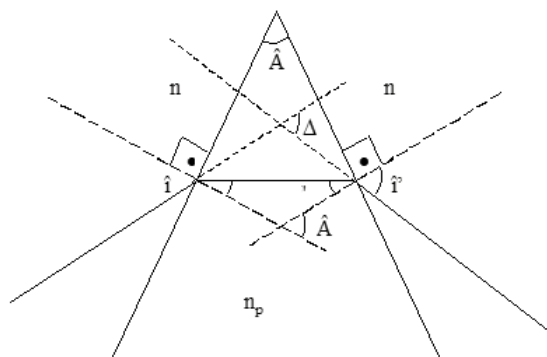
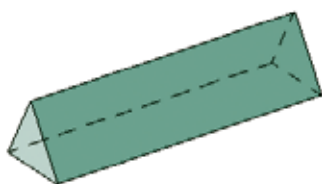
Do vidro para o ar o índice diminui novamente, logo, o ângulo aumenta (apenas B está correta).

Vale também ressaltar que o raio emergente para o ar será paralelo ao incidente do ar comprovado pelas relações abaixo:

$$n_{ar} \cdot \text{sen} \theta_{ar} = n_{diamante} \cdot \text{sen} \theta_{diamante} = n_{vidro} \cdot \text{sen} \theta_{vidro} = n_{ar} \cdot \text{sen} \theta_{ar}$$

8. Prismas

Em óptica geométrica, costuma-se chamar simplesmente por “prisma” um prisma de base triangular. Ao analisarmos o prisma, de frente para uma das faces triangulares, quando um raio luminoso o atravessa por uma das faces laterais, haverá desvio do raio se os índices de refração do prisma e do meio forem diferentes.



Da figura acima:

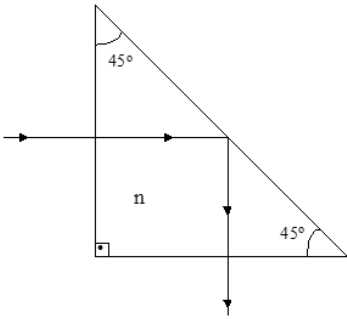
$$A = \hat{i} + \hat{r}'$$

$$\Delta = (\hat{i} - \hat{r}) + (\hat{i}' - \hat{r}') = (\hat{i} + \hat{i}') - A$$

Ou seja, o desvio angular Δ é igual à soma do ângulo de incidência com o de emergência, subtraído do ângulo de abertura.

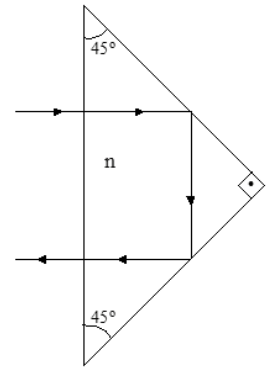
Obs.:

- I. O ângulo de emergência, ou de incidência, se não forem dados, podem ser obtidos geralmente pela aplicação da Lei de Snell.
- II. Nem sempre ocorrerá emergência do raio luminoso, pois pode haver reflexão total no prisma.
- III. O menor desvio possível ocorre quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de emergência.
- IV. Prismas de reflexão total: são prismas capazes de provocar reflexão total nos raios incidentes. Seguem os dois mais famosos:



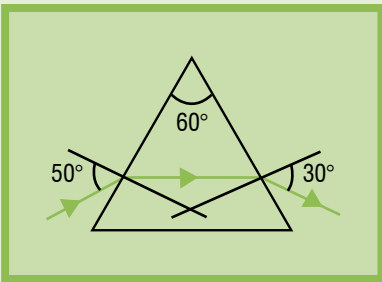
Pela Lei de Snell, se o meio for o ar, para $n > \sqrt{2}$, haverá reflexão total com o desvio de 90° .

Pela Lei de Snell, se o meio for o ar, para $n > \sqrt{2}$, haverá reflexão total com o desvio de 180° .



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

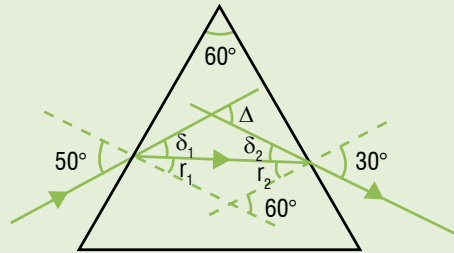
01 A figura abaixo representa um raio de luz que atravessa um prisma. O desvio sofrido por esse raio de luz, em graus, vale:



- (A) 20.
- (B) 30.
- (C) 50.
- (D) 60.
- (E) 90.

Solução: Letra A.

Precisamos prolongar até que se encontrem as normais, os raios incidente e emergente:



Pelo teorema das retas perpendiculares entre si, o ângulo do prolongamento das normais é igual ao ângulo de abertura do prisma (60°).

Assim: $r_1 + r_2 = 60^\circ$ (teorema do ângulo externo)

Ângulos opostos pelos vértices: $50 = \delta_1 + r_1$ e $30 = \delta_2 + r_2$

$$r_1 = 50 - \delta_1$$

$$r_2 = 30 - \delta_2$$

$$r_1 + r_2 = 60^\circ = (50 - \delta_1) + (30 - \delta_2) \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 20$$

Pelo teorema do ângulo externo, temos: $\Delta = \delta_1 + \delta_2 = 20^\circ$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Um raio de luz monocromática propaga-se no ar (meio 1) e atinge a superfície plana da água (meio 2) sob ângulo de incidência θ igual a 45° . Admitindo que o índice de refração da água vale $\sqrt{2}$ para a citada luz, determine:

- a. o ângulo de refração;
- b. o desvio experimentado pelo raio, ao se refratar;
- c. uma figura em que compareçam o raio incidente, o raio refletido e o raio refratado.

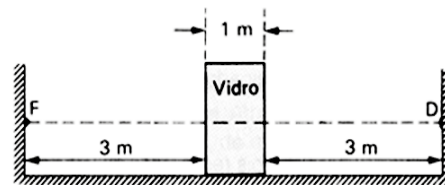
02 Analise as afirmações a seguir:

- I. Quando um raio incidente oblíquo passa do meio menos refringente para o mais refringente, ele aproxima-se da normal.
- II. Quando um raio incidente oblíquo passa do meio mais refringente para o menos refringente, ele afasta-se da normal.
- III. Quando um raio de luz incide na fronteira entre dois meios transparentes opticamente diferentes, ocorre reflexão.
- IV. A velocidade de propagação da luz necessariamente altera-se na refração.

Responda de acordo com o código:

- (A) Se apenas I e II forem corretas.
- (B) Se apenas I, II e III forem corretas.
- (C) Se apenas I, II e IV forem corretas.
- (D) Se todas forem corretas.
- (E) Se todas forem incorretas.

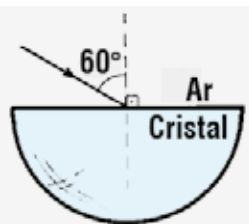
03 No esquema, temos uma fonte luminosa **F** no ar, defronte a um bloco de vidro, após o qual se localiza um detector **D**. Observe as distâncias e dimensões indicadas no desenho:



São dados índice de refração do ar = 1,0; índice de refração do vidro em relação ao ar = 1,5; velocidade da luz no ar = 300.000 km/s.

- a. Qual o intervalo de tempo para a luz propagar-se de **F** a **D**?
 b. Represente graficamente a velocidade da luz, em função da distância, a contar da fonte **F**.

04 Um raio de luz monocromática incide no centro da face circular de uma peça hemisférica de cristal transparente. A figura mostra a seção da peça determinada pelo plano de incidência do raio:



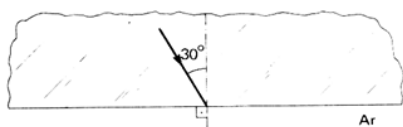
Sendo $\sqrt{3}$ o índice de refração do cristal para a referida radiação, determine a trajetória do raio refratado até emergir para o ar, indicando os ângulos envolvidos.

05 Um raio de luz monocromática atravessa a fronteira plana entre dois meios **A** e **B**, de **A** para **B**, com ângulo de incidência igual a 30° e ângulo de refração igual a 60° . Determine:

- a. o comportamento de um raio de luz de mesma frequência, que se dirige de **A** para **B** com ângulo de incidência de 60° ;
 b. o comportamento de um raio de luz de mesma frequência, que forma no meio **B** um ângulo de 30° com a normal e dirige-se de **B** para **A**.

06 No fundo de um tanque de profundidade **p** igual a 2,0 m, existe uma fonte de luz **F** considerada pontual. O tanque é, então, preenchido com um líquido de índice absoluto de refração $\sqrt{2}$, em cuja superfície é posto a flutuar um disco opaco, circular e de centro pertencente à vertical que passa por **F**. Calcule o mínimo diâmetro que o disco deve ter para que observadores situados no ar não consigam ver a fonte **F**. As paredes do tanque são opacas.

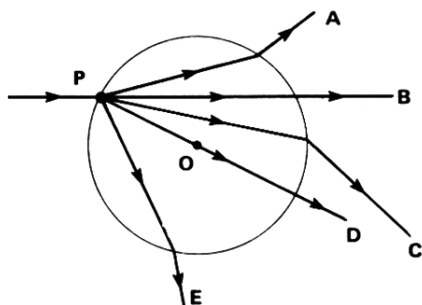
07 Um pincel cilíndrico de luz monocromática propaga-se num bloco sólido transparente e incide na fronteira plana entre o bloco e o ar, sob ângulo de incidência igual a 30° :



Sabendo que o índice de refração do bloco para a radiação considerada vale $\sqrt{3}$, determine:

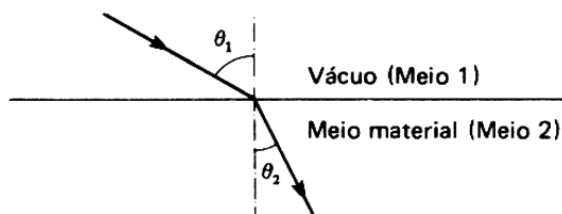
- a. o ângulo de refração;
 b. o desvio experimentado pela luz, ao se refratar;
 c. a representação esquemática dos raios incidente, refletido e refratado.

08 Um raio de luz monocromática proveniente do ar incide em uma esfera de vidro, como mostra a figura:



Dos trajetos indicados (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**), qual é possível?

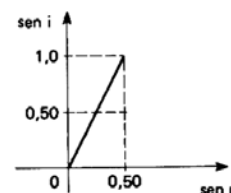
09 Um raio de luz de frequência igual a $6,0 \cdot 10^{14}$ Hz passa do vácuo para um meio material transparente, como ilustra a figura:



Sabendo-se que $\sin \theta_1 = 0,8$, $\sin \theta_2 = 0,6$ e que a velocidade da luz no vácuo é $v_1 = 300.000$ km/s, determine:

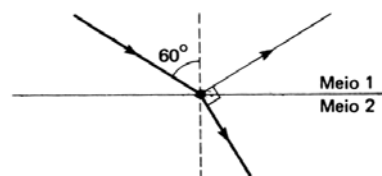
- a. a velocidade da luz no meio material (v_2);
 b. o índice de refração absoluto do meio material;
 c. o comprimento de onda dessa luz no vácuo (γ_1) e no meio material (γ_2).

10 Uma mesma luz monocromática passa do vácuo para o interior de uma substância, com diversos ângulos de incidência. Os senos do ângulo de incidência (i) e do ângulo de refração (r) são dados através do gráfico seguinte:



Calcule o índice de refração absoluto dessa substância.

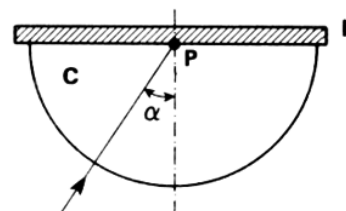
11 Na figura seguinte, representa-se um pincel cilíndrico de luz monocromática que, propagando-se num meio 1, incide na fronteira separadora deste com um meio 2. Uma parcela da luz incidente é refletida, retornando ao meio 1, enquanto a outra é refratada, passando para o meio 2.



Sabendo que os pincéis refletido e refratado são perpendiculares entre si, obtenha:

- a. os ângulos de reflexão e de refração;
 b. o índice de refração do meio 2 em relação meio 1.

12 Para a determinação do índice de refração (n_1) de uma lâmina de vidro (**L**), foi usado o dispositivo da figura, em que **C** representa a metade de um cilindro de vidro opticamente polido, de índice de refração $n_2 = 1,80$. Um feixe fino de luz monocromática é feito incidir no ponto **P**, sob um ângulo α , no plano do papel.

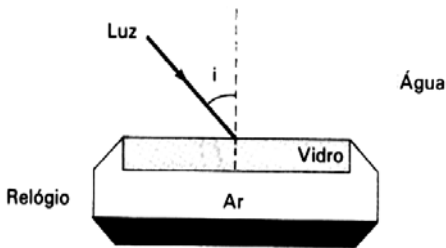


Observa-se que, para $\alpha \geq 45^\circ$, o feixe é inteiramente refletido na lâmina. Qual é o valor de n_1 ?

13 Determinada luz monocromática apresenta velocidade de $2,3 \cdot 10^8$ m/s na água e de $2 \cdot 10^8$ m/s num certo tipo de vidro. O que ocorre quando um raio dessa luz, propagando-se no vidro, incide na fronteira do vidro com a água sob ângulo de incidência de 70° ?

14 Um ladrão escondeu o produto de seu roubo numa caixa pendurada por uma corda de 2,4 m de comprimento e amarrada no centro da base circular de uma boia. A boia estava em água de índice de refração 5/4. De qualquer ponto da superfície era impossível ver a caixa. Quanto vale, no mínimo, o raio da base da boia?

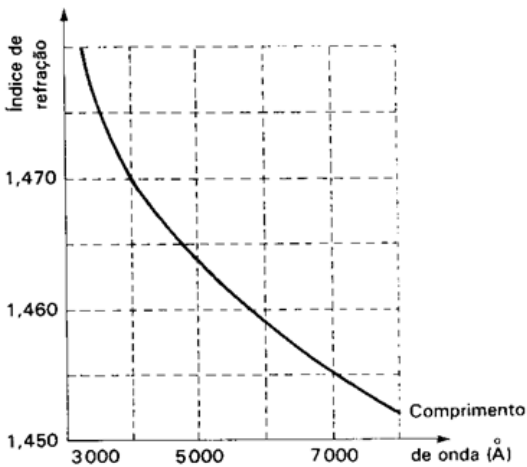
15 Alguns alunos contaram a um professor de Física que os mostradores de seus relógios pareciam belos espelhos quando visados de certas posições, durante um mergulho. Aberta a discussão para a análise do fenômeno, um aluno lembrou que sob o vidro do mostrador existe ar e que o fenômeno era devido à reflexão total na interface vidro-ar.



Determine para que valores do ângulo de incidência i ocorre o fenômeno descrito.

(Dados: índice de refração do ar = 1,0, índice de refração da água = 1,3; índice de refração do vidro = 1,4; $\text{sen } 45^\circ = 0,71$; $\text{sen } 46^\circ = 0,72$; $\text{sen } 47^\circ = 0,73$; $\text{sen } 48^\circ = 0,74$; $\text{sen } 49^\circ = 0,75$; $\text{sen } 50^\circ = 0,77$.)

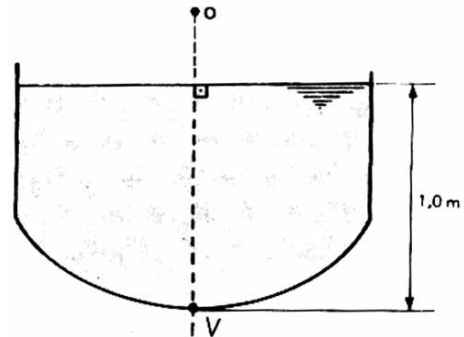
16 O gráfico abaixo mostra como varia o índice de refração de um cristal em função do comprimento de onda da radiação, medido no vácuo:



- Qual o índice de refração da cristal para uma radiação de 4.000 \AA ?
- Qual radiação visível terá, no meio citado, a menor velocidade? Justifique.
- O que acontece com a luz branca quando atravessa obliquamente a fronteira entre o ar e o cristal?

17 Uma pedrinha encontra-se no fundo de uma piscina, a uma profundidade igual a 2,0 m. Considerando igual a 4/3 o índice de refração da água, qual a profundidade aparente dessa pedra para uma pessoa que se encontra fora da água, olhando para ela, nas vizinhanças da vertical que passa pela pedra?

18 Na figura seguinte, tem-se um reservatório cujo fundo é constituído por um espelho esférico côncavo. O reservatório contém água, de índice de refração 4/3, até a altura de 1,0 m em relação ao vértice V do espelho. Raios luminosos paralelos entre si, provenientes do Sol a pino, incidem normalmente na superfície líquida, refratando-se para o interior da água.

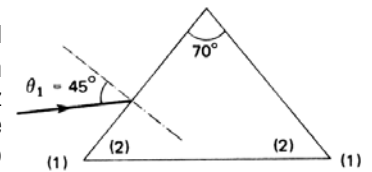


Sabendo-se que, para um observador cujo globo ocular situa-se no ponto O, a imagem do Sol conjugada pelo sistema parece estar a uma profundidade de 30 cm, calcule a distância focal do espelho.

19 Um raio luminoso proveniente do ar atinge uma lâmina de vidro de faces paralelas com 8,0 cm de espessura e 1,5 de índice de refração. Este raio sofre refração e reflexão ao atingir a primeira superfície, refração e reflexão ao atingir a segunda superfície (interna).

- Trace as trajetórias dos raios incidente, refratados e refletidos.
- Determine o tempo para o raio refratado atravessar a lâmina, sendo o seno do ângulo de incidência 0,9.

20 Um prisma de abertura $A = 70^\circ$ e índice de refração igual a $\sqrt{2}$, imerso no ar, recebe um estreito pincel cilíndrico de luz monocromática sob ângulo de incidência θ_1 igual a 45° , como mostra a figura:

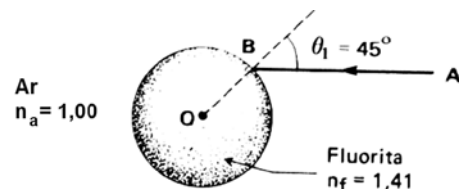


(Dados: $\text{sen } 40^\circ = 0,64$; $\text{sen } 64^\circ = 0,90$.)

Determine:

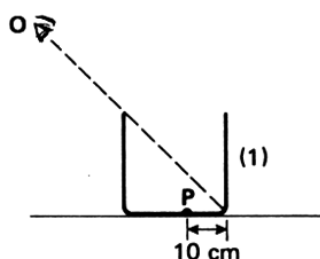
- o desvio do pincel na primeira refração;
- o desvio do pincel na segunda refração;
- o desvio total.

21 Um raio de luz proveniente do ponto A propaga-se pelo ar até o ponto B da superfície de uma esfera de fluorita ($n_f = 1,41$):



- Determine o ângulo de refração do ar para a fluorita.
- Se o raio atravessa a esfera, sofre uma segunda refração e continua propagando-se pelo ar, qual o valor do ângulo de desvio do raio? (Isto é, qual o ângulo entre a nova direção do raio e aquela que o raio teria, se a esfera não existisse?)

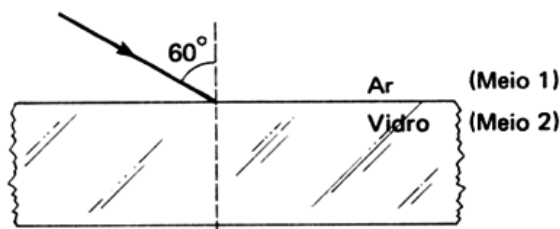
22 Na figura a seguir, temos um recipiente cúbico de paredes opacas, vazio, de 40 cm de aresta:



Na posição em que se encontra, o observador O não vê o fundo do recipiente, mas vê completamente a parede (1). Calcule a altura mínima da água que se deve despejar no recipiente, para que o observador passe a ver a partícula P . Adote o índice de refração da água em relação ao ar igual a $4/3$.

23 Um mergulhador imerso nas águas de um lago observa um avião no instante em que ambos estão aproximadamente na mesma vertical. O avião está 600 m acima da superfície da água, cujo índice de refração admite-se igual a $4/3$. A que altura da superfície da água o avião aparenta estar, em relação ao mergulhador?

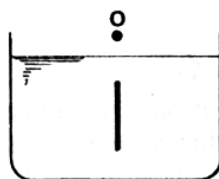
24 Sobre uma lâmina de vidro de 4,0 cm de espessura e índice de refração $\sqrt{3}$, mergulhada no ar, incide um raio de luz monocromática, como ilustra a figura:



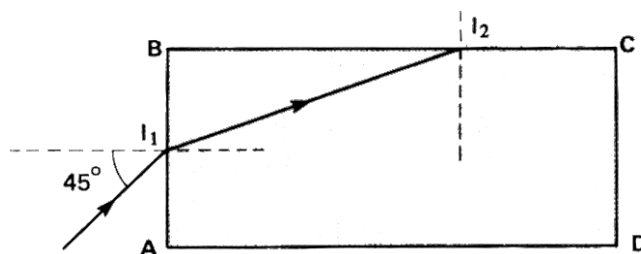
Calcular o deslocamento lateral do raio emergente, em relação ao raio incidente.

25 Coloca-se água em um aquário de modo a ocupar 60 cm de sua altura. Quando visto verticalmente de cima para baixo, a água parece ocupar uma altura diferente, h . Supondo que a velocidade de propagação da luz no ar seja de 300.000 km/s e na água de 225.000 km/s, determine, em cm, a altura aparente h .

26 No esquema ao lado, um observador visa um bastão cilíndrico de 20 cm de comprimento totalmente imerso na água (índice de refração igual a $4/3$). O eixo longitudinal do bastão é perpendicular à superfície da água e o olho O do observador encontra-se nas vizinhanças desse eixo. Admitindo que o meio externo ao recipiente seja o ar (índice de refração igual a 1), calcule o comprimento aparente que o observador detecta para o comprimento do bastão.



27 Tem-se um bloco de vidro transparente em forma de paralelepípedo reto imerso no ar. Sua secção transversal $ABCD$ está representada na figura. Um raio de luz monocromática pertencente ao plano definido por $ABCD$ molde em I_1 , refratando-se para o interior do bloco e incidência em I_2 :



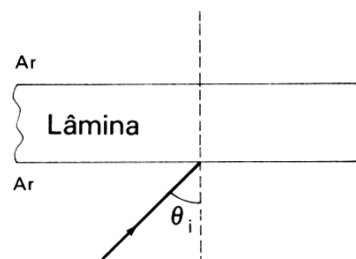
Sabendo que o índice de refração do vidro em relação ao ar vale $\sqrt{2}$:

- calcule o ângulo limite para o dióptro vidro-ar;
- verifique o que ocorre com a luz, logo após a incidência em I_2 .

28 O índice de refração n de uma lâmina de faces paralelas depende do comprimento de onda da luz que a atravessa segundo a relação:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

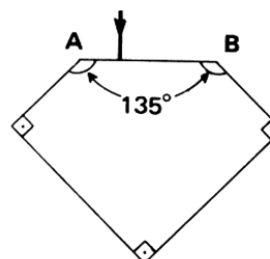
Em que A e B são constantes positivas. Um feixe, contendo uma mistura de luz vermelha ($\gamma = 6.500 \cdot 10^{-10}$ m) e luz azul ($\gamma = 4.500 \cdot 10^{-10}$ m), incide sobre esta lâmina, conforme a figura:



Desenhe a mesma figura e trace as trajetórias de cada cor ao atravessar e sair da lâmina. Indique na figura os possíveis ângulos iguais.

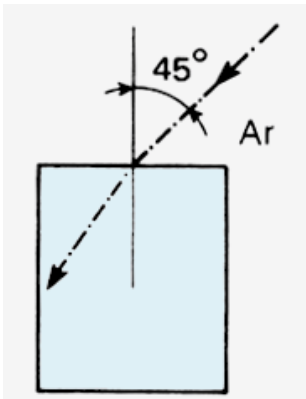
29 Um prisma de vidro tem ângulo de 60° e o seu índice de refração, em relação ao ar, para a luz amarela é $\sqrt{2}$. Um raio luminoso amarelo, no ar, incide em uma das faces do prisma segundo um ângulo de 45° . Qual o ângulo de incidência na segunda face e qual o ângulo de desvio desse raio?

30 A figura ilustra um raio de luz, proveniente do ar, penetrando perpendicularmente na face AB de um diamante lapidado, com índice de refração 2,4. Velocidade da luz no ar: $3 \cdot 10^8$ m/s.

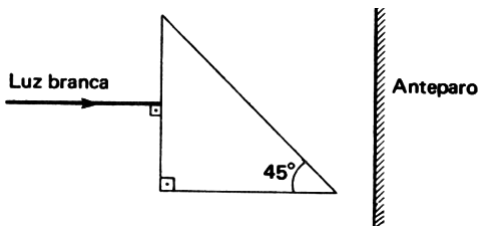


- Qual a velocidade da luz no interior do diamante?
- Represente a trajetória do raio até sair do diamante?

31 Um raio luminoso incide sobre um cubo de vidro, como indica a figura. Qual deve ser o valor do índice de refração do vidro, para que ocorra reflexão total na face vertical?



32 Um pincel de luz branca incide perpendicularmente a uma das faces de um prisma, cuja secção principal está representada na figura:



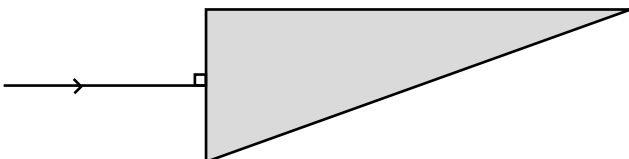
O prisma está imerso no ar e seus índices de refração para as cores componentes do pincel de luz branca são dados a seguir:

Violeta	1,48
Anil	1,46
Azul	1,44
Verde	1,42
Amarelo	1,40
Alaranjado	1,39
Vermelho	1,38

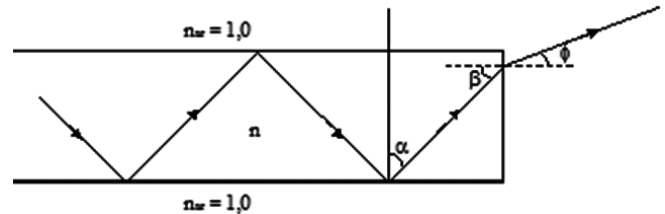
Determine quais dessas cores emergem do prisma atingindo o anteparo.

33 Um raio de luz incide perpendicularmente à face de um prisma cujo índice de refração é $n_p = \sqrt{3}$. O meio externo ao prisma possui índice de refração $n_{ext} = 1$.

Calcule o ângulo formado entre o raio incidente e o meio emergente.

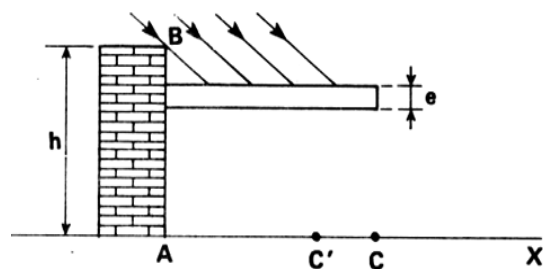


34 A figura abaixo representa uma certa fibra óptica que consiste de um núcleo cilíndrico de índice de refração $n > 1$, circundando por ar cujo índice vale, 1,0. Se o ângulo α , representado na figura, for suficientemente grande, toda a luz será refletida em zigue-zague nas paredes do núcleo, sendo assim guiada e transmitida por longas distâncias. No final da fibra, a luz sai para o ar formando um cone de ângulo ϕ , conforme a figura:



- Qual o valor mínimo de $\sin \alpha$ em termos de n para que a luz seja guiada?
- Qual o valor de $\sin \phi$ em termos de n .

35 A figura representa a secção transversal de um muro vertical AB iluminado pelos raios solares paralelos ao plano da secção. AC representa, nessa secção, a largura da sombra projetada pelo muro sobre o plano horizontal X:

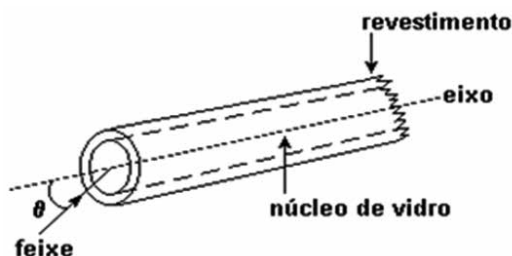


Coloca-se, então, horizontalmente, uma lâmina de faces paralelas em contato com o muro por uma das extremidades e em nível qualquer entre A e B. Constata-se que a largura da sombra passou de AC a AC'. Calcule o índice de refração da lâmina. (Dados: $AC = 3,0$ m; $CC' = 5$ mm; $AB = h = 4,0$ m; $e = 2,0$ cm.)

36 Prove que, num prisma de pequena abertura e para pequenos ângulos de incidência (inferiores a 10°), o desvio δ sofrido pelo raio que o atravessa é dado aproximadamente por: $\delta = A(n_{2,1} - 1)$ em que A é o ângulo de abertura e $n_{2,1}$ é o índice de refração do prisma em relação ao meio que o envolve.

37 Através de um tubo fino, um observador enxerga o topo de uma barra vertical de altura H apoiada no fundo e na lateral de um cilindro vazio de diâmetro 2H. O tubo encontra-se a uma altura $2H + L$ e, para efeito de cálculo, é de comprimento desprezível. Quando o cilindro é preenchido com um líquido até uma altura 2H, mantido o tubo na mesma posição, o observador passa a ver a extremidade inferior da barra. Determine literalmente o índice de refração desse líquido.

38 Em meados do século XX, pesquisadores começaram a sugerir a utilização de guias para conduzir a luz. Em 1970, isto foi conseguido com um fio muito fino de fibra de vidro (núcleo) revestido por outro material, escolhido de modo a permitir que a luz fosse totalmente refletida ao longo do fio. Desta forma, obteve-se o que atualmente é conhecido como fibra óptica. Suponha que um feixe LASER penetre no núcleo de uma fibra óptica a partir do ar, fazendo um ângulo θ com seu eixo, como indicado na figura.



Dados:

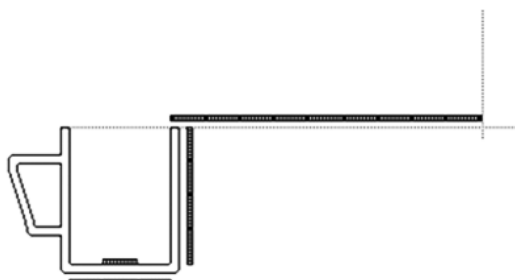
Índice de refração do revestimento = 1,52.

Índice de refração do vidro = 1,60.

Índice de refração do ar = 1,00.

Calcule o maior valor de θ que possibilita a propagação do feixe ao longo da fibra.

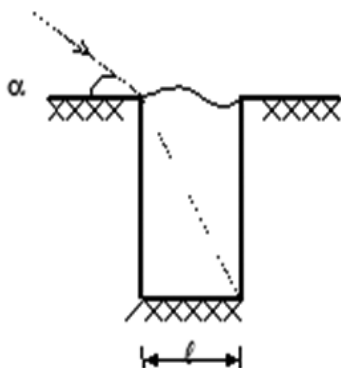
39 Uma moeda encontra-se exatamente no centro do fundo de uma caneca. Despreze a espessura da moeda. Considere a altura da caneca igual a 4 diâmetros da moeda, $d(M)$, e o diâmetro da caneca igual a $3 d(M)$.



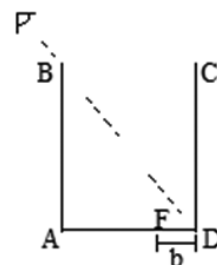
a. Um observador está a uma distância de $9 d(M)$ da borda da caneca. Em que altura mínima, acima do topo da caneca, o olho do observador deve estar para ver a moeda toda?

b. Com a caneca cheia de água, qual a nova altura mínima do olho do observador para continuar a enxergar a moeda toda? $n(\text{água}) = 1,3$.

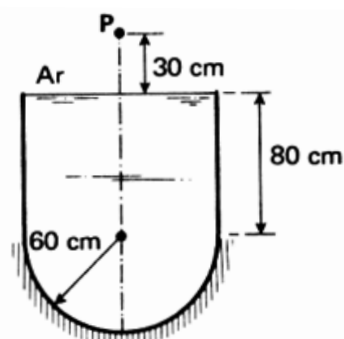
40 Um poço tem seção reta quadrada, de lado l , duas de suas paredes opostas são metálicas. Enche-se o poço, até a borda, com um líquido de constante dielétrica K e índice de refração n . Fazendo-se incidir um raio luminoso monocromático em uma borda, com um ângulo α em relação à horizontal, o raio entrante atinge exatamente a aresta interna oposta, no fundo do poço. Dê, em função dos dados do problema, a expressão da capacitância entre as duas placas metálicas do poço cheio pelo líquido.



41 Um recipiente cúbico, com paredes opacas, é colocado de tal modo que o olho de um observador não vê seu fundo, mas vê integralmente a parede CD , conforme a figura abaixo. Determine o volume de água que é necessário colocar no recipiente, para que um observador possa ver um objeto que se encontra a uma distância b do vértice D . A aresta do cubo é a e o índice de refração da água é n . Dê a resposta em função de b, a, n e $\text{sen } i$, sendo i o ângulo de incidência.



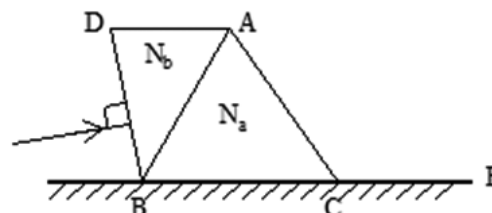
42 Consideremos um recipiente de base hemisférica, cheio de água. A base está externamente recoberta de prata e seu raio vale 60 cm.



Admitamos que apenas raios paraxiais emitidos pela fonte P atravessem a fronteira ar-água e incidam na superfície hemisférica, que produz a imagem P' . Supondo o índice de refração da água $4/3$, determine a posição de P' em relação à superfície livre da água.

43 Uma lâmina de faces paralelas tem 5 mm de espessura. Levada a um microscópio, verifica-se que, para se passar da localização de um ponto da superfície superior a um da face inferior da lâmina, deve-se deslocar o canhão do microscópio 3 mm. Qual é o índice de refração do material de que é feita a lâmina?

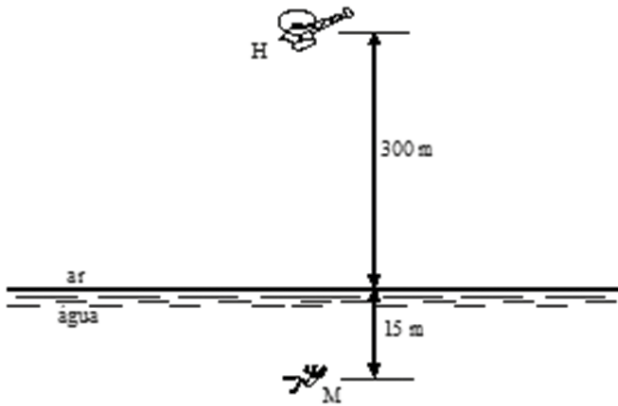
44 Um prisma com ângulo $A = 60^\circ$ e o índice de refração $N_a = \sqrt{3}$ é justaposto a um prisma invertido com ângulo $B = 45^\circ$ e índice de refração $N_b = \sqrt{3}/2$. O prisma ABC é equilátero e sua base BC apoia-se em um espelho plano. Um raio de luz incide normalmente na face do prisma ADB , conforme figura. O sistema está imerso no ar.



Indique o percurso do raio de luz, colocando os valores de todos os ângulos, e calcule o desvio resultante do sistema prismas – espelho.

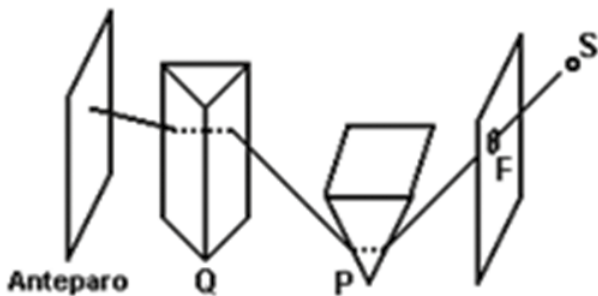
45 Um feixe paralelo incide normalmente sobre uma esfera sólida de vidro. Determine a posição da imagem em função do índice de refração n e do raio r da esfera.

46 No desenho esquemático abaixo, H é um helicóptero e M é um mergulhador. A distância entre a **imagem** do mergulhador observada do helicóptero e a **imagem** do helicóptero observada pelo mergulhador será (considerando o índice de refração da água do mar 50% maior – mais refringente, do que o índice de refração do ar atmosférico):



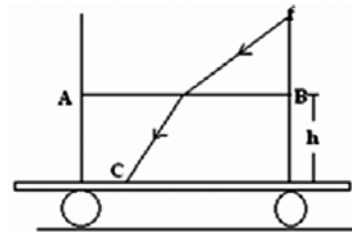
- (A) 465 m.
- (B) 460 m.
- (C) 315 m.
- (D) 215 m.
- (E) 210 m.

47 Isaac Newton, no início de 1666, realizou a seguinte experiência: Seja S o Sol e F um orifício feito na janela de um quarto escuro. Considere P e Q dois prismas de vidro colocados em posição cruzada um em relação ao outro, ou seja, com suas arestas perpendiculares entre si, conforme mostra a figura a seguir. Represente por A a cor violeta, por B a amarela e C a vermelha. Após a passagem dos raios luminosos pelo orifício e pelos dois prismas, a forma da imagem e a disposição das cores formadas no anteparo são mais bem representadas por:



- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

48 Uma fonte luminosa f , no ar, emite um pequeno feixe colimado, monocromático, que atinge a superfície de um líquido de índice de refração $n = \sqrt{2}$ no ponto médio do segmento AB . A luz refratada atinge o piso do recipiente cúbico que contém o líquido no ponto C . O sistema é posteriormente fixado a um móvel que passa a acelerar horizontalmente com aceleração de módulo igual a g .



Determine o deslocamento sofrido pelo ponto C devido à aceleração do móvel.

- Dados:
- Índice de refração do ar = 1
 - Aceleração da gravidade = g
 - Aresta do cubo = $2h$

RASCUNHO

1. Introdução

Neste capítulo, introduziremos o conceito de potencial gravitacional como base para o entendimento do conceito-chave deste módulo: potencial elétrico. Com isso, iremos abordar, também de forma comparativa com o campo gravitacional, a definição de energia potencial elétrica, abordando-se pela primeira vez o potencial elétrico.

A partir daí, veremos o potencial elétrico produzido por uma ou mais partículas eletrizadas, destacando também o potencial elétrico gerado por uma esfera condutora carregada. Além disso, será abordado o conceito de superfícies equipotenciais e suas propriedades, destacando suas relações com as linhas do campo elétrico.

Neste momento, iremos estudar o trabalho realizado pela força elétrica durante o movimento de cargas, destacando a importância da diferença de potencial para a ocorrência dos movimentos.

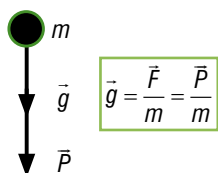
Por fim, falaremos sobre a definição de capacitância, para compreendermos como se dá o equilíbrio eletrostático entre corpos interligados. No fim, será abordado o potencial elétrico da Terra.

2. Analogia entre os campos elétrico e gravitacional

Conforme vimos no módulo anterior, existe uma relação muito próxima entre o estudo do campo elétrico e do campo gravitacional. Dessa forma, vamos analisar de maneira comparativa os conceitos das forças dos campos mencionados.

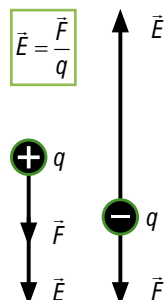
Campo gravitacional

Considere um corpo de massa m sujeito à ação da força gravitacional. Definimos o campo gravitacional (g) como a razão entre a força peso e a massa do corpo.



Campo elétrico

Considere uma partícula com carga q sujeita à ação da força elétrica. Definimos o campo elétrico (E) como a razão entre a força elétrica e a carga da partícula.



2.1 Energia potencial elétrica armazenada por uma partícula eletrizada

Considere um corpo de massa m localizado a uma altura h do solo (nível de referência zero) e em um campo gravitacional g .

Definimos como energia potencial gravitacional (E_p) desse corpo:

$$E_{p_g} = m \cdot g \cdot h$$

em que $V = g \cdot h$ é denominado potencial gravitacional de um ponto em relação a um plano de referência.

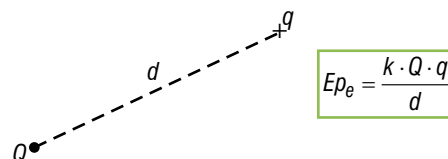
Considere, agora, uma partícula de carga q localizada em um campo elétrico E . Analogamente ao caso do potencial gravitacional, definiremos a energia potencial elétrica (E_p) dessa partícula como:

$$E_{p_e} = q \cdot V$$

em que V é denominado potencial elétrico de um ponto em relação a um ponto de referência.

2.2 Energia potencial elétrica armazenada por um sistema de partículas

Agora, vamos considerar uma partícula eletrizada com carga Q gerando um campo elétrico em uma certa região. Se colocarmos uma segunda partícula eletrizada com carga q nessa região, em um ponto que dista d da primeira partícula, dizemos que a energia potencial elétrica armazenada no sistema constituído por essas duas cargas será dada por:



Obs.: A energia potencial de um sistema de N partículas será determinada através da soma das energias potenciais de todas as combinações das N cargas, duas a duas. Assim, para um sistema de três partículas eletrizadas, teremos:

$$E_{p_e} = \frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{d_{12}} + \frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_3}{d_{13}} + \frac{k \cdot Q_2 \cdot Q_3}{d_{23}}$$

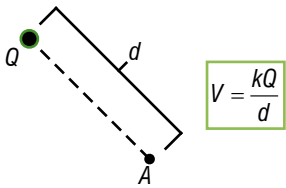
3. Potencial elétrico em um campo criado por uma partícula eletrizada

Vimos anteriormente que a energia potencial elétrica poderia ser determinada de duas formas:

$E_{p_e} = q \cdot V_A$ (energia potencial adquirida por uma carga de prova colocada em um ponto A do campo elétrico.)

$E_{p_e} = \frac{k \cdot Q \cdot q}{d}$ (energia potencial armazenada por um sistema de duas cargas puntiformes que distam d .)

Associando essas duas expressões e considerando que a carga puntiforme q está no ponto A que dista d da carga Q , podemos então descobrir o valor do potencial elétrico gerado pela carga puntiforme Q nesse ponto A .

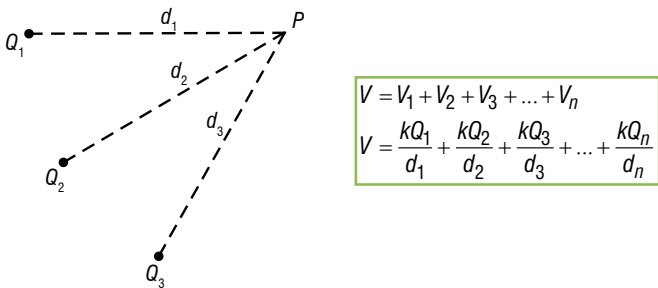


Obs.1: Note que, ao contrário da força elétrica e do campo elétrico, que são grandezas vetoriais, o potencial elétrico é uma grandeza escalar, ou seja, não há necessidade de definir direção e sentido para o potencial.

Obs.2: O potencial elétrico criado por uma partícula negativa será negativo.

3.1 Potencial elétrico criado por várias partículas eletrizadas

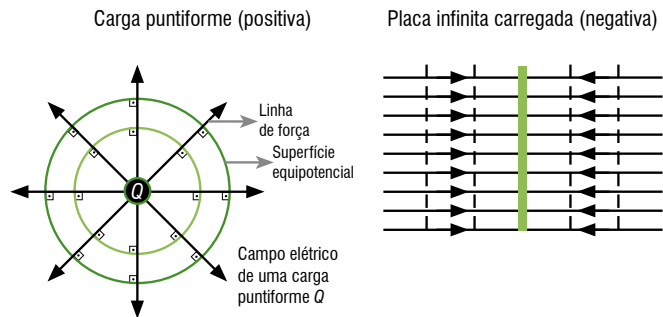
O potencial elétrico gerado por n partículas em um ponto P é o somatório do potencial gerado por cada partícula.



Obs.: O ponto de referência para o potencial elétrico nulo se encontra no infinito.

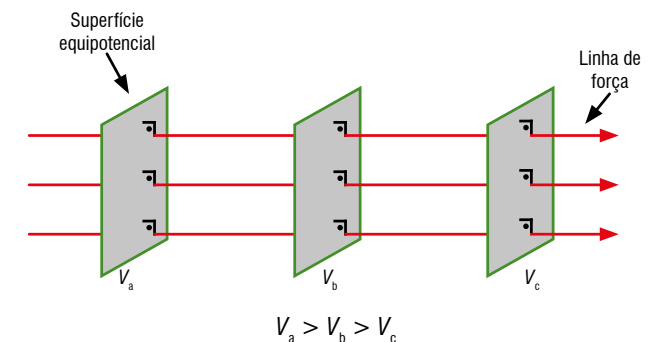
4. Superfícies equipotenciais

São superfícies em que o potencial elétrico é constante. Geralmente, as linhas das superfícies equipotenciais são representadas por linhas pontilhadas, enquanto as linhas do campo elétrico são contínuas e orientadas.



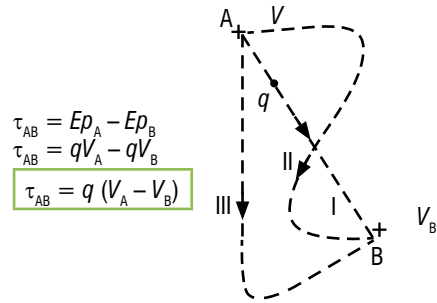
Obs.1: As superfícies equipotenciais são **sempre** perpendiculares às linhas de força.

Obs.2: Note que o potencial elétrico decresce no mesmo sentido das linhas do campo elétrico, independentemente do sinal do carga do corpo que o gerou.



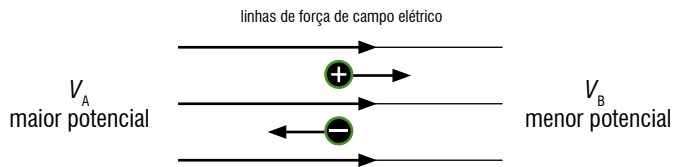
5. Trabalho da força elétrica

Utilizando-se da analogia do campo elétrico e do campo gravitacional, temos que, o trabalho realizado por um campo elétrico sobre uma carga q para ir do ponto A ao ponto B é:



Obs.1: O trabalho do campo elétrico, assim como do campo gravitacional, é conservativo, ou seja, não depende da trajetória seguida pela carga e somente dos pontos de partida (A) e chegada (B).

Obs.2: Com a relação existente entre o sentido do campo e da força elétrica, conclui-se que uma carga elétrica positiva move-se voluntariamente no sentido das linhas de força do campo elétrico, ou seja, do maior para o menor potencial elétrico. Já com uma carga negativa ocorre o contrário.



Obs.3: 1 eV (elétron-volt) = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J

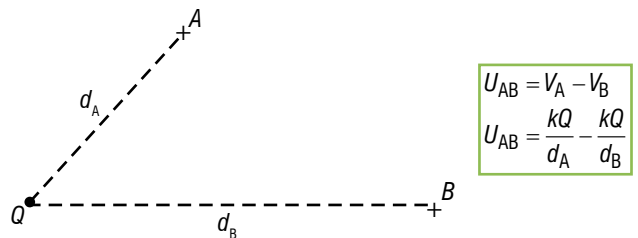
6. Diferença de potencial (d.d.p.)

Representa o valor da diferença entre os potenciais de dois pontos quaisquer do espaço.

Símbolo: U **Unidade SI de d.d.p.:** [V] – volts

6.1 D.d.p. em um campo elétrico criado por uma (ou várias) partículas eletrizadas

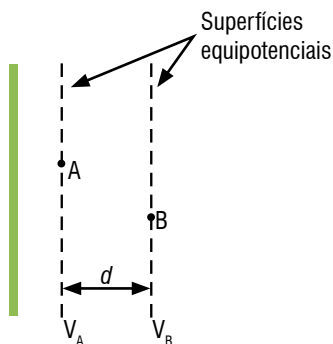
Exemplo para uma partícula:



Atenção!

Não confundir diferença de potencial com variação de potencial $U \neq \Delta V$.

6.2 D.d.p. em um campo elétrico uniforme (criado por uma placa fina infinita carregada)



Seja uma partícula eletrizada com carga q localizada no ponto A . O trabalho da força elétrica para que ela seja transferida para B será dado por:

$$\tau_{AB} = q (V_A - V_B) = q \cdot U_{AB} \text{ (I)}$$

Porém, como o campo elétrico é uniforme, a força elétrica sobre a partícula é constante, e assim:

$$\tau_{AB} = F \cdot d_{AB} \cdot \cos\theta = q \cdot E \cdot d \text{ (II)}$$

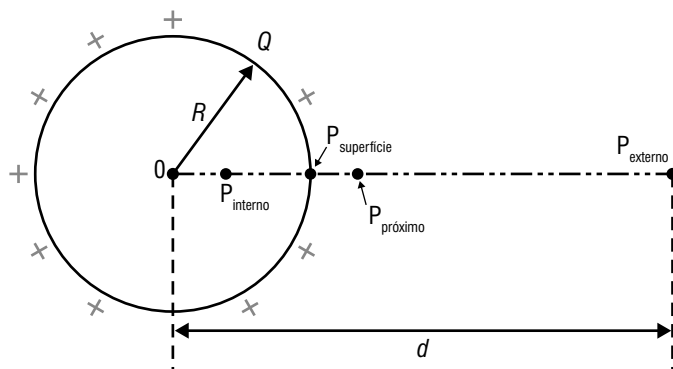
Unindo as duas expressões:

$$U_{AB} = E \cdot d$$

Obs.: Note que a d.d.p., em uma região de campo elétrico uniforme, depende da distância entre as equipotenciais dos pontos desejados.

7. Potencial criado por um condutor elétrico eletrizado de raio R

Considere um condutor de raio R eletrizado, como na figura abaixo:



Como no interior do condutor o campo elétrico é nulo (constante), conclui-se que a d.d.p. entre dois pontos que estejam no interior ou na superfície do condutor também será nula. Logo o potencial elétrico para pontos internos ou na superfície é igual.

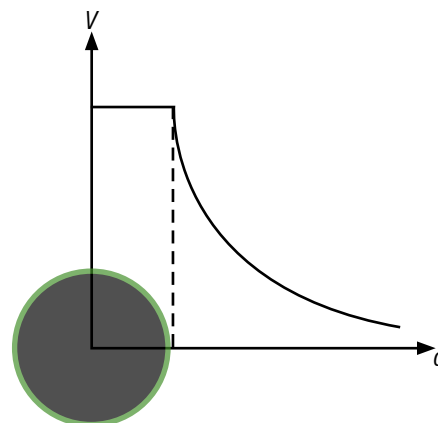
No interior ou na superfície ($P_{superfície}$), o potencial elétrico vale: $V = \frac{kQ}{R}$

Já para pontos fora da superfície, o potencial elétrico será dado por:

$$V = \frac{kQ}{d}, \text{ em que } d \text{ é a distância do ponto ao centro da esfera.}$$

Obs.: Repare que para pontos fora da esfera, o potencial elétrico é semelhante ao de uma carga puntiforme localizada no centro da esfera (idêntico para o campo elétrico, como visto anteriormente).

O gráfico do potencial elétrico gerado pelo condutor em função da distância ao centro está representado no gráfico a seguir:

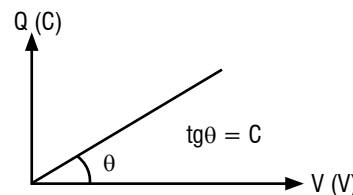


Obs.: Repare que dentro do condutor ($d \leq R$), o potencial elétrico é constante. Quando $d > R$, o potencial diminui em função do aumento da distância do ponto $P_{externo}$ (são inversamente proporcionais).

8. Capacitância

Capacitância é a grandeza escalar associada à capacidade de um corpo de armazenar carga elétrica e, conseqüentemente, energia elétrica.

$$C = \frac{Q}{V}$$



Em que C é a capacitância, Q representa a carga elétrica armazenada e V é o potencial elétrico do corpo.

Unidade SI de capacitância: [F] – Farad.

Podemos, dessa forma, relacionar linearmente a carga elétrica armazenada com o potencial do corpo, uma vez que a capacitância é constante para cada corpo.

8.1. Capacitância de um condutor esférico

Como vimos anteriormente, o potencial elétrico na superfície de um condutor esférico é dado por:

$$V = \frac{kQ}{R}$$

Assim, podemos obter uma expressão para a capacitância de um condutor esférico:

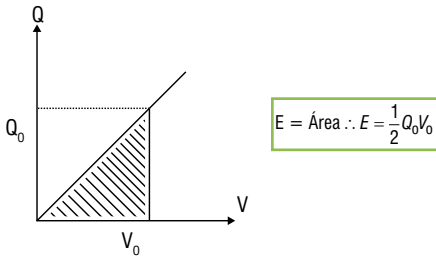
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{kQ}{R}} \Rightarrow C = \frac{R}{k}$$

Podemos concluir que a capacidade de um condutor esférico para armazenar carga é diretamente proporcional ao seu raio.

8.2. Energia potencial elétrica armazenada em um condutor

Como a energia potencial, em um instante, é dada por $E_p = q \cdot V$, como visto anteriormente, a energia armazenada será obtida pela área do gráfico $Q \times V$.

Para um condutor que possui carga Q_0 e potencial V_0 , sua energia potencial elétrica armazenada é dada por:



Dessa expressão e da definição de capacitância, podemos derivar outras expressões para o potencial elétrico armazenado por um condutor:

$$E = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

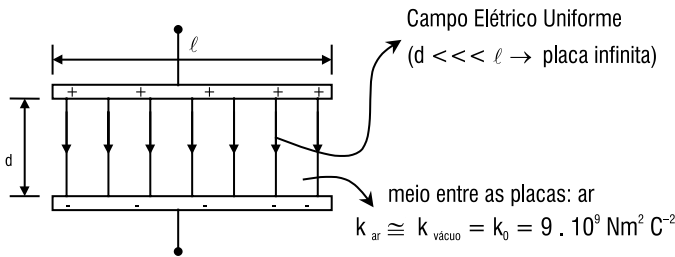
8.3 Capacitor de placas planas e paralelas

Capacitor é o elemento físico passivo de um circuito que tem como finalidade armazenar carga elétrica (energia elétrica).

O capacitor mais conhecido é o constituído por duas placas isolantes e paralelas, separadas por espaço que pode ser preenchido por um material isolante (dielétrico) ou não.

Um capacitor adquire carga elétrica quando os terminais de suas placas estão conectados a potenciais elétricos distintos, ou seja, quando o capacitor estiver sujeito a uma d.d.p. Nesse caso, cada placa adquire cargas de mesmo módulo, porém sinais opostos.

Seja a representação de um capacitor desse tipo:



O campo elétrico produzido por cada placa é dado por:

$$E = 2k_0\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

em que $\sigma = \frac{Q}{A}$ é a densidade superficial de carga ($A \rightarrow$ área da placa).

Assim, o campo elétrico uniforme resultante entre as placas será:

$$E_T = 4k_0\pi\sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Dessa expressão, visto que o campo no interior é praticamente uniforme, podemos obter a d.d.p. entre as placas.

$$U = E_T d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad U = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

Daí obtemos a capacitância desse tipo de capacitor, com área A e distância entre as placas d :

$$U = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Obs.: Repare que a capacitância de um capacitor depende diretamente de suas dimensões.

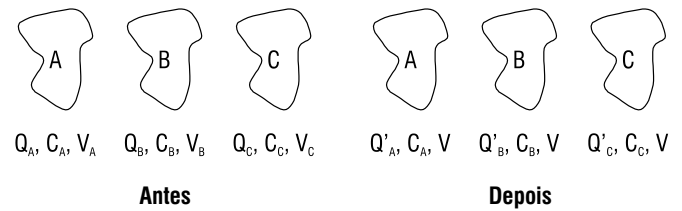
9. Equilíbrio entre condutores elétricos

Observamos anteriormente que o movimento de cargas elétricas ocorre quando há uma diferença de potencial em pontos do espaço. Vimos que cargas elétricas positivas movimentam-se no sentido do menor potencial elétrico, enquanto as cargas negativas buscam os pontos de maior potencial. Ou seja, dizemos que só haverá movimento de cargas elétricas enquanto houver uma d.d.p. na região onde elas se encontram.

Assim, quando colocamos em contato ou interligamos por meio de fios condutores ideais condutores elétricos carregados, haverá movimentação de cargas entre eles (eletrização) até que o potencial elétrico V dos condutores fiquem iguais (equilíbrio eletrostático).

Portanto, dizemos que dois ou mais corpos estão em equilíbrio elétrico quando seus potenciais elétricos são iguais, não necessariamente possuindo a mesma quantidade de carga elétrica.

Para exemplificar, sejam 3 condutores elétricos distintos A, B e C que foram interligados e estão representados antes e depois de o equilíbrio ser alcançado:



Aplicando-se o princípio da conservação das cargas e definição de capacitância, temos:

$$Q_A + Q_B + Q_C = Q'_A + Q'_B + Q'_C$$

$$Q_A = C_A \cdot V_A; Q'_A = C_A \cdot V = C_A \cdot V \rightarrow Q_A + Q_B + Q_C = C_A V + C_B V + C_C V$$

$$Q_B = C_B \cdot V_B; Q'_B = C_B \cdot V = C_B \cdot V$$

$$Q_C = C_C \cdot V_C; Q'_C = C_C \cdot V = C_C \cdot V \rightarrow V = \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{C_A + C_B + C_C} = \frac{\sum Q}{\sum C}$$

Assim podemos obter as cargas finais de cada condutor:

$$Q'_A = C_A \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{C_A + C_B + C_C}; Q'_B = C_B \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{C_A + C_B + C_C}; Q'_C = C_C \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{C_A + C_B + C_C}$$

Obs.: Quando os condutores são idênticos, como foi visto no assunto *eletrização por contato*, chegamos novamente àquela "velha" expressão de condutores idênticos: $C_A = C_B = C_C = C$.

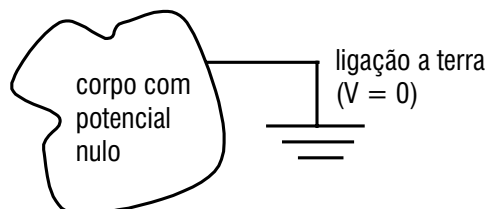
$$Q'_A = C \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{C + C + C}; Q'_A = \frac{Q_A + Q_B + Q_C}{3}$$

Da mesma forma, poderemos encontrar a carga dos demais condutores.

10. Potencial da Terra

Como a Terra possui uma infinidade de cargas (positivas e negativas), adota-se como referência o seu potencial elétrico como sendo nulo.

Dessa forma, podemos dizer que todo corpo que esteja em equilíbrio com a terra terá potencial nulo.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Em um ponto A distante 45 cm de uma carga elétrica puntiforme Q, o potencial assume o valor $5,0 \cdot 10^4$ V. Sabendo que o meio que envolve a carga é o vácuo, determine o valor de Q.
(Dado: constante eletrostática do vácuo: $K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$).

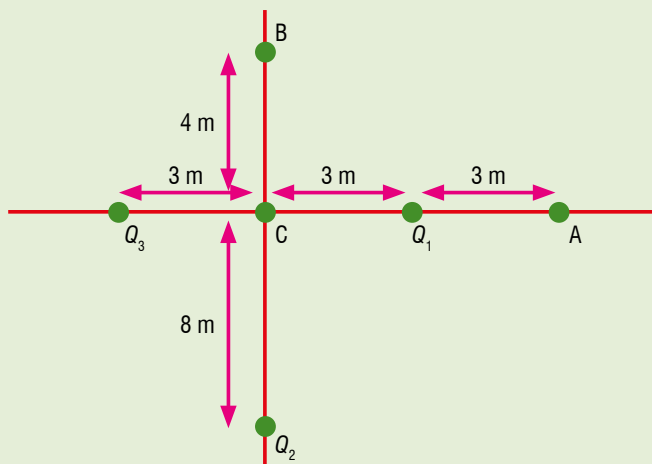
Solução:

$$d = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}$$

$$V = \frac{kQ}{d} \rightarrow 5 \cdot 10^4 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot Q}{0,45}$$

$$Q = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 2,5 \mu\text{C}$$

02 A figura representa uma distribuição discreta de cargas elétricas $Q_1 = 15 \text{ nC}$, $Q_2 = 60 \text{ nC}$ e $Q_3 = -45 \text{ nC}$ no vácuo.
(Dado: $K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$)



- Qual a diferença de potencial entre os pontos A e B?
- Qual o trabalho necessário para levar uma carga elétrica de 10 mC do ponto A para o ponto B?

Solução:

a. O potencial elétrico em um ponto P, gerado por três cargas elétricas, é dado por:

$$v_A = K \frac{Q_1}{d_1} + K \frac{Q_2}{d_2} + K \frac{Q_3}{d_3}$$

Assim:

$$v_A = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{15 \cdot 10^{-9}}{3} + \frac{60 \cdot 10^{-9}}{10} - \frac{45 \cdot 10^{-9}}{9} \right)$$

$$v_A = 54 \text{ V}$$

$$v_B = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{15 \cdot 10^{-9}}{5} + \frac{60 \cdot 10^{-9}}{12} - \frac{45 \cdot 10^{-9}}{5} \right)$$

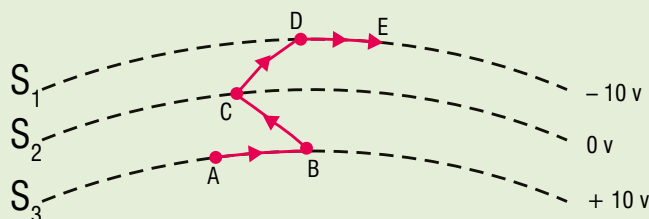
$$v_B = -9,0 \text{ V}$$

Portanto: $U_{AB} = v_A - v_B = 54 - (-9)$

$$U_{AB} = 63 \text{ V.}$$

- $\tau_{CE} = q(v_A - v_B)$
 $\tau_{CE} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 63$
 $\tau_{CE} = 0,63 \text{ J.}$

03 Considere as superfícies equipotenciais abaixo, S_1 , S_2 e S_3 , com seus respectivos potenciais elétricos indicados, e determine o trabalho realizado pela força elétrica que atua em uma carga de 2 C quando ela se desloca do ponto A ao ponto E, percorrendo a trajetória indicada.



Solução:

O trabalho da força elétrica depende apenas da diferença de potencial no ponto A e no ponto E, independentemente do caminho seguido.

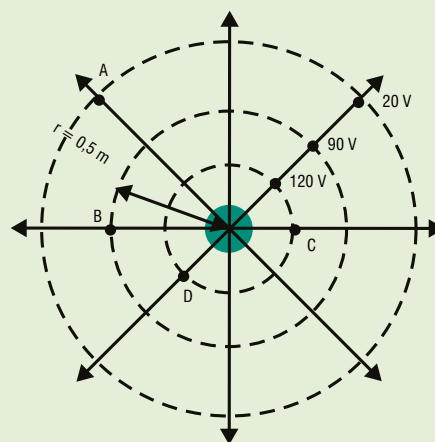
$$\tau = q \cdot U_{AE} = q \cdot (V_A - V_E)$$

$$\tau = 2 \cdot [10 - (-10)]$$

$$\tau = 40 \text{ J.}$$

Apesar de ser uma diferença de potencial, não é o potencial final menos o potencial inicial, e sim o inverso. Por isso a diferença de potencial é representada por U e não por ΔV , pois quando usamos a letra grega delta (Δ) na frente de uma grandeza física, nos referimos a uma diferença entre a grandeza final e inicial.

04 No esquema, apresentam-se as superfícies equipotenciais e as linhas de força no campo de uma carga elétrica puntiforme Q fixa.



Considere que o meio é o vácuo ($K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$) e determine:

- o valor de Q;
- o valor do campo elétrico em B;
- o trabalho realizado pela força elétrica sobre a carga $q = -2,0 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ para levá-la de A a C.

Solução:

a. Sabemos a distância do ponto B ao centro da esfera ($d_B = 0,5 \text{ m}$), portanto, usaremos o potencial elétrico nesse ponto ($V_B = 90 \text{ V}$) para o cálculo da carga elétrica Q.

$$V = \frac{kQ}{d} \rightarrow 90 = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{0,5} \rightarrow Q = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 5 \text{ nC}$$

b. Basta usar a expressão que define o campo elétrico em função da distância do ponto à carga.

$$E = \frac{k|Q|}{d^2} \rightarrow E = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{0,5^2}$$

$$E = 180 \text{ V/m.}$$

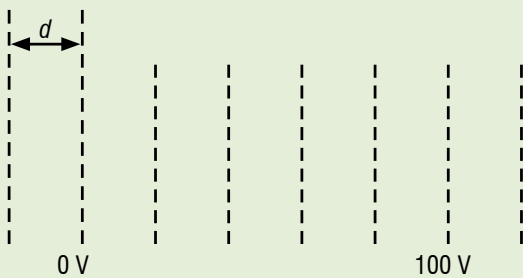
c. Pela figura, o potencial elétrico em A vale $V_A = 20 \text{ V}$ e no ponto C vale $V_C = 120 \text{ V}$.

$$\tau = q \cdot U_{AC} = q \cdot (V_A - V_C)$$

$$\tau = -2 \cdot 10^{-10} \cdot (20 - 120)$$

$$\tau = 2 \cdot 10^{-8} \text{ J.}$$

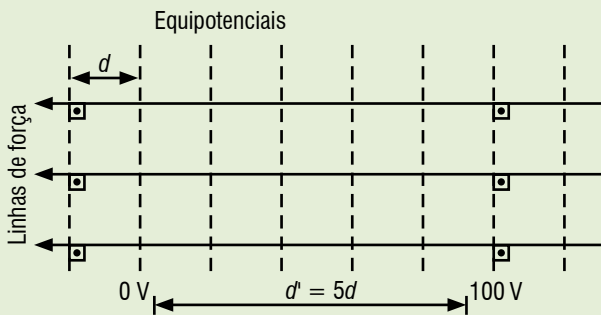
05 Na figura a seguir, estão representadas as superfícies equipotenciais, planas, paralelas e separadas pela distância $d = 2 \text{ cm}$ de um campo elétrico uniforme:



Determine a intensidade, a direção e o sentido do referido campo elétrico.

Solução:

As linhas de força de um campo elétrico têm sempre direção perpendicular às equipotenciais e sentido que vai do maior para o menor potencial. Assim, a representação esquemática do referido campo elétrico pode ser:



A intensidade desse campo elétrico uniforme pode ser calculada por:

$$Ed' = U \Rightarrow E = \frac{U}{d'} = \frac{U}{5d}$$

Como $d = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, temos:

$$E = \frac{100 \text{ V}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

$$E = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

06 Determine a intensidade de um campo elétrico uniforme, sabendo que a diferença de potencial entre duas de suas equipotenciais, separadas por 20 cm , é de 300 V .

Solução:

O campo elétrico é uniforme; portanto podemos usar a expressão:

$$U = E \cdot d \quad d = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$300 = E \cdot 0,2$$

$$E = 1,5 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

07 Uma esfera condutora neutra de $7,2 \text{ cm}$ de raio encontra-se no vácuo, onde a constante eletrostática vale $9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$. Determine:

- a capacitância da esfera;
- o potencial atingido pela esfera, quando recebe uma carga igual a $1,6 \mu\text{C}$.

Solução:

a. A capacitância de um condutor esférico pode ser calculada pela relação:

$$C = \frac{r}{K}$$

Assim, sendo $r = 7,2 \text{ cm} = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ e $K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$, temos:

$$C = \frac{7,2 \cdot 10^{-2}}{9,0 \cdot 10^9} \Rightarrow C = 8,0 \cdot 10^{-12} \text{ F} \rightarrow C = 8,0 \text{ pF}$$

b. Para qualquer condutor, vale a expressão:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}$$

Assim,

$$Q = 1,6 \mu\text{C} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ e}$$

$$C = 8,0 \text{ pF} = 8,0 \cdot 10^{-12} \text{ F, obtemos: } V = \frac{1,6 \cdot 10^{-6}}{8,0 \cdot 10^{-12}} \Rightarrow V = 2,0 \cdot 10^6 \text{ volts}$$

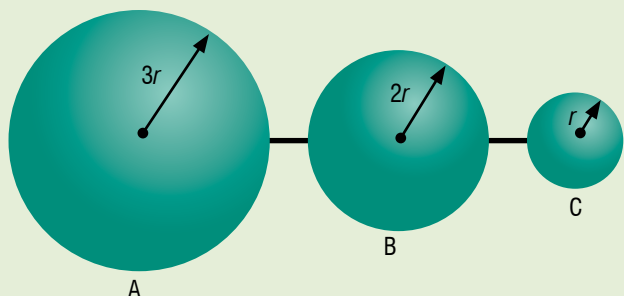
08 Quando duas partículas eletrizadas, que se repelem, são aproximadas, a energia potencial do sistema formado por elas:

- aumenta.
- diminui.
- fica constante.
- diminui e logo depois aumenta.
- aumenta e logo depois permanece constante.

Solução: Letra A.

Na Física, a busca de todo sistema é atingir uma situação de energia potencial **mínima**. Se duas partículas se repelem, essa situação será atingida com o afastamento. Se elas são aproximadas, a energia potencial aumenta.

09 Três esferas condutoras de raios $3r$, $2r$ e r encontram-se ligadas por fios condutores:



Antes das ligações, a esfera *A* tinha carga *Q* e as esferas *B* e *C* tinham carga nula. No equilíbrio eletrostático do sistema, as superfícies esféricas:

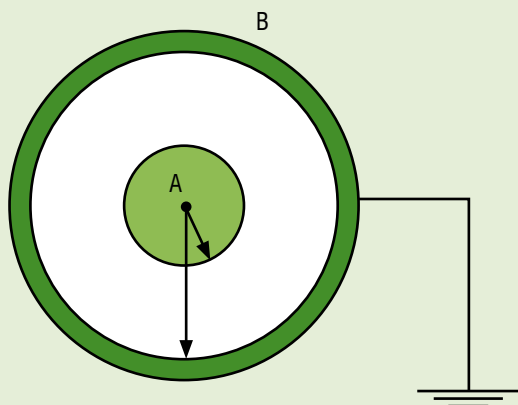
- I. estão com o mesmo potencial;
- II. tem a mesma carga $\frac{Q}{3}$;
- III. de maior carga têm maior potencial;
- IV. têm o mesmo potencial, logo, suas cargas são diferentes.

Quais dessas afirmações são corretas?

Solução: I e IV.

- I. Correta.
O equilíbrio eletrostático ocorre quando os potenciais das esferas tornam-se iguais.
- II. Incorreta.
A carga adquirida é proporcional à capacitância do condutor:
 $Q = C_v$ (v igual para todos).
Como $C = \frac{Q}{R}$, a carga adquirida é proporcional ao raio da esfera.
A esfera maior fica com carga elétrica maior.
- III. Incorreta.
Os potenciais finais são iguais.
- IV. Correta.
Os potenciais são iguais, e as cargas elétricas são proporcionais aos raios das esferas.

10 Na figura a seguir, há dois condutores esféricos, sendo um maciço, *A*, de 30 cm de raio, e outro oco, *B*, de raio interno igual a 80 cm e externo igual a 100 cm. O condutor *A* está eletrizado com carga igual a $+4,0 \mu\text{C}$, enquanto *B* está ligado à terra:



Determine:

- a. o potencial na esfera *A*;
- b. o potencial na esfera *B*;
- c. o potencial em um ponto *P*, a 50 cm do centro das esferas;
- d. o esboço do gráfico do potencial em função da distância do centro das esferas.

(Dado: constante eletrostática do meio = $9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.)

Solução:

- a. Na esfera *A*:

$$v_{(A)} = v_A + v_B \Rightarrow v_{(A)} = K \frac{Q_A}{R_A} + K \frac{Q_B}{R_B}$$

$$v_{(A)} = 9,0 \cdot 10^9 \left[\frac{(+4,0 \cdot 10^{-6})}{0,30} + \frac{(-4,0 \cdot 10^{-6})}{0,80} \right]$$

$$v_{(A)} = 7,5 \cdot 10^4 \text{ V}$$

- b. Como a esfera *B* está ligada à terra, seu potencial é nulo.
 $v_{(B)} = 0$

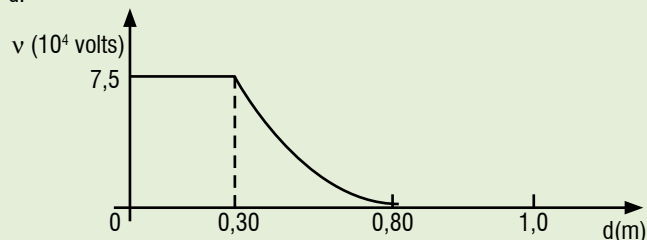
- c. O ponto *P* é interno à esfera *B* e externo à esfera *A*. Assim:

$$v_P = K \frac{Q_A}{d} + K \frac{Q_B}{R_B}$$

$$v_P = 9,0 \cdot 10^9 \left[\frac{(4,0 \cdot 10^{-6})}{0,50} + \frac{(-4,0 \cdot 10^{-6})}{0,80} \right]$$

$$v_P = 2,7 \cdot 10^4 \text{ V}$$

- d.

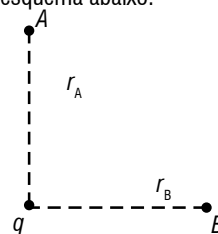


EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Duas cargas de valor *q* estão separadas de um ponto *A* pela distância *d*. A que distância do ponto *A* deve ser colocada uma carga $-q$ para que o potencial em *A* seja nulo?

- (A) $d/2$.
- (B) d .
- (C) $2d$.
- (D) $4d$.

02 Calcule $V_A - V_B$ no esquema abaixo:



$$q = -1,2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

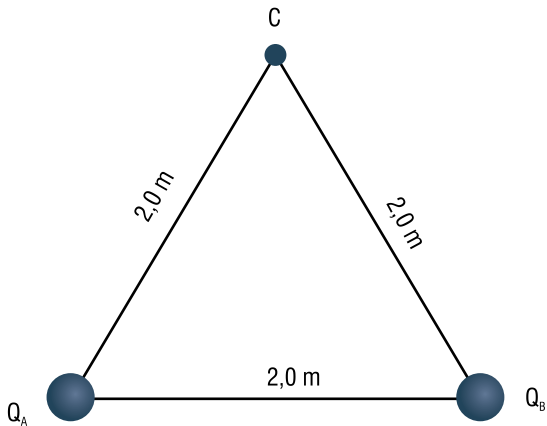
$$r_A = 1 \text{ cm}$$

$$r_B = 2 \text{ cm}$$

$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

- (A) -54 V .
- (B) $+54 \text{ V}$.
- (C) -108 V .
- (D) $+108 \text{ V}$.

03 Nos vértices A e B do triângulo equilátero representado a seguir, foram fixadas duas partículas eletrizadas com cargas $Q_A = +6,0 \mu\text{C}$ e $Q_B = -4,0 \mu\text{C}$:



Considerando a constante eletrostática do meio igual a $1,0 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$, determine:

- a. o potencial elétrico resultante no vértice C ;
- b. a energia potencial elétrica armazenada no sistema;
- c. a energia potencial adquirida por uma carga de prova $q = +2,0 \text{ mC}$, ao ser colocada no vértice C .

04 Uma partícula eletrizada com carga q , no vácuo, cria a uma distância d um potencial de 300 volts e um campo elétrico de intensidade 100 newtons/coulomb. Quais os valores de d e de q ? Adote, nos cálculos, a constante eletrostática do meio igual a $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.

05 Uma partícula fixa, eletrizada com carga $+5,0 \mu\text{C}$, é responsável pelo campo elétrico existente em uma determinada região do espaço. Uma carga de prova de $+2,0 \mu\text{C}$ e $0,25 \text{ g}$ de massa é abandonada a 10 cm da carga fonte, recebendo desta uma força de repulsão. Determine:

- a. o trabalho que o campo elétrico realiza, para levar a carga de prova a 50 cm da carga fonte;
- b. a velocidade escalar da carga de prova, quando estiver a 50 cm da carga fonte.

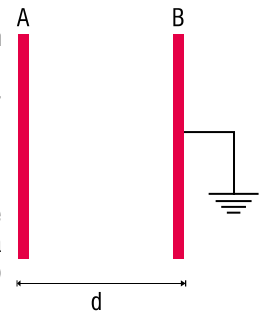
(Dado: constante eletrostática do meio $= 1,0 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$.)

06 Em uma região existe um campo elétrico tal que o potencial elétrico em cada ponto dessa região é definido por: $V = b \cdot x$, em que $b = 1 \text{ V/m}$ e x é a abscissa do ponto, em metros.

Uma carga negativa puntiforme móvel de 2 picocoulombs é deslocada do ponto A , de abscissa nula, até o ponto B , de abscissa negativa de 1 m . Qual o trabalho, em picojoules, realizado sobre a carga móvel pelo campo elétrico existente na região, no deslocamento acima especificado?

07

O dispositivo representado consiste em duas placas eletrizadas, de forma que existe, entre elas, um campo elétrico uniforme. Sabe-se que $d = 8,0 \text{ cm}$, que a placa A tem potencial $V_A = 400 \text{ V}$ e que a placa B está ligada à terra.



Determine a intensidade da força elétrica que apareceria aplicada numa partícula eletrizada com $5,0 \mu\text{C}$, se a mesma fosse colocada no campo existente entre as placas.

08 Uma esfera metálica de 27 cm de raio, situada no vácuo, recebe uma determinada carga elétrica Q , que produz, na sua superfície, um potencial de $4,0 \cdot 10^4 \text{ V}$. Qual o valor da carga Q ? (Dado: $K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.)

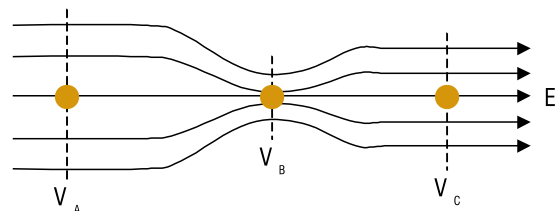
09 Dois condutores bastante afastados possuem capacitâncias $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$ e $C_2 = 0,4 \mu\text{F}$, estando eletrizados com cargas $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ e $Q_2 = 3 \mu\text{C}$, respectivamente. Ao ligarmos esses condutores através de um fio metálico, qual será o novo potencial comum?

10 Em uma região onde o meio é o vácuo, são colocadas duas partículas eletrizadas com cargas de $+5,0 \mu\text{C}$ e $-3,0 \mu\text{C}$ em dois pontos A e B , respectivamente. Sabe-se que a distância entre os dois pontos é de $2,0 \text{ m}$ e que o valor da constante eletrostática do vácuo é $9,0 \cdot 10^9$ unidades do SI. Determine:

- a. a intensidade do campo elétrico do ponto M , médio do segmento AB ;
- b. o valor do potencial no ponto M ;
- c. a intensidade da força que apareceria numa carga de prova de $+2,0 \mu\text{C}$, se fosse colocada no ponto M ;
- d. a energia potencial elétrica adquirida pela referida carga de prova, em M .

Este enunciado refere-se às questões 11 e 12.

Ao se mapear uma região do espaço onde existe um campo elétrico produzido por uma determinada distribuição de carga, encontrou-se o seguinte conjunto de linhas de força:



11 A respeito das intensidades do campo elétrico nos pontos A , B e C , podemos afirmar que:

- (A) $E_A = E_B$.
- (B) $E_A > E_C$.
- (C) $E_A = E_C$.
- (D) $E_B > E_C$.
- (E) $V_C = E_C$.

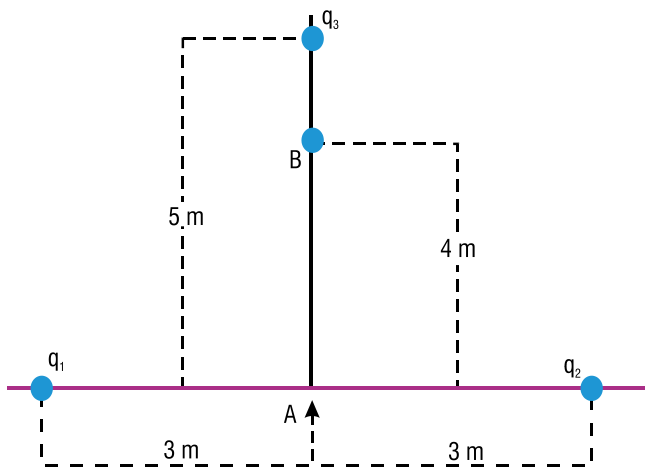
12 A respeito dos potenciais V_A , V_B e V_C das equipotenciais que passam pelos pontos A , B e C , podemos afirmar que:

- (A) $V_A = V_B$.
- (B) $V_A > V_C$.
- (C) $V_C > V_B$.
- (D) $V_B > V_A$.
- (E) $V_C > V_A$.

13 No vácuo ($K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$), a intensidade do vetor campo elétrico e o potencial elétrico em um ponto P do campo gerado por uma carga pontual valem, respectivamente, $18 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ e $36 \cdot 10^3 \text{ V}$. Qual o valor da carga elétrica que gera esse campo?

14 Em uma região onde a constante eletrostática vale $1,0 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, são fixadas duas partículas eletrizadas positivamente com cargas Q_A e Q_B , distantes entre si $1,0 \text{ m}$. Uma carga de prova de $2,0 \mu\text{C}$ é colocada no segmento AB , a 60 cm de Q_A , permanecendo em repouso apesar de adquirir uma energia potencial elétrica igual a $1,0 \text{ J}$. Quais os valores de Q_A e de Q_B ?

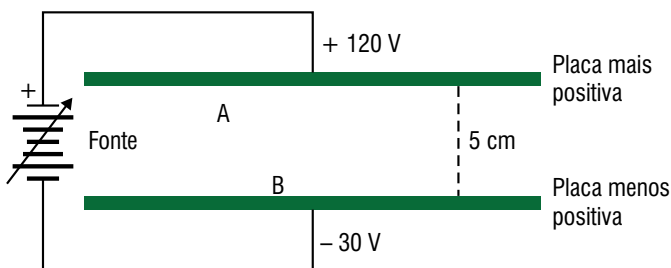
15 Na figura abaixo, $q_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, $q_2 = 10 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ e $q_3 = -20 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Considerando-se o sistema no vácuo, qual o trabalho realizado pela força elétrica que desloca uma carga $q = 10^{-2} \text{ C}$ desde o ponto A até B ?



16 Em uma região de campo elétrico uniforme, de intensidade $2 \cdot 10^3 \text{ N/C}$, a diferença de potencial, em volts, entre dois pontos, situados sobre uma linha de força do campo elétrico e separados por uma distância de 50 cm , é:

- (A) 10^3 .
- (B) 10^5 .
- (C) $4 \cdot 10^3$.
- (D) $2,5 \cdot 10^4$.

17 Seja o capacitor abaixo alimentado por fonte variável de corrente contínua:



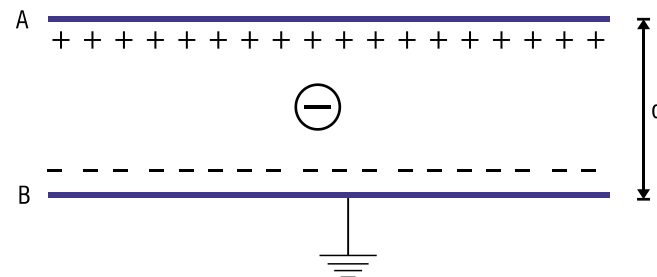
Abandona-se em A , equidistante das placas, uma partícula de carga $-5 \cdot 10^{-6} \text{ Coulombs}$. Observa-se então que ela permanece em repouso, como se estivesse "parada no ar", sem ser acelerada em direção à placa positiva. A massa, em gramas, desta partícula carregada vale, portanto (considerar a aceleração da gravidade como 10 m/s^2):

- (A) 5,5.
- (B) 3,0.
- (C) 2,5.
- (D) 1,5.
- (E) 1,0.

18 Com base, ainda, no capacitor da questão anterior, aumenta-se a diferença de potencial imposta a ele pela fonte variável até que a força elétrica sobre a mesma partícula carregada, agora posicionada no ponto B (sua velocidade inicial é, portanto, nula), fique triplicada. Essa partícula será imediatamente acelerada em direção à placa positiva do capacitor. A sua quantidade de movimento, ao se chocar contra essa placa positiva, vale, aproximadamente:

- (A) $4,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- (B) $3,7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- (C) $2,1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- (D) $1,3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- (E) $0,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

19 Entre duas placas eletrizadas dispostas horizontalmente existe um campo elétrico uniforme. Uma partícula com carga de $3,0 \mu\text{C}$ e massa m é colocada entre as placas, permanecendo em repouso.



Sabendo que o potencial da placa A é de 500 V , que a placa B está ligada à terra, que a aceleração da gravidade no local vale 10 m/s^2 e que a distância d entre as placas vale $2,0 \text{ cm}$, determine a massa m da partícula.

20 Uma esfera condutora de raio R é eletrizada com uma carga de $4,0 \mu\text{C}$. Qual o valor de R , sabendo-se que a 70 cm da superfície da esfera, no vácuo, o potencial vale 30 kV ? Considere, nos cálculos, a constante eletrostática do vácuo igual a $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Um capacitor plano tem armaduras com áreas iguais a A , espaçadas por uma distância d . Liga-se esse capacitor a uma bateria até que ele adquira carga elétrica Q e d.d.p. igual a V . Depois de desligado da bateria, aumenta-se o espaçamento para o valor $2d$. Pode-se afirmar que a:

- (A) carga elétrica manteve-se igual a Q .
- (B) d.d.p. manteve-se igual a V .
- (C) carga elétrica reduziu-se para $Q/2$.
- (D) d.d.p. reduziu-se para $V/2$.

02 Duas esferas condutoras A e B , de raios $r_A = 4 \text{ cm}$ e $r_B = 8 \text{ cm}$, estão eletrizadas com cargas $Q_A = 4 \mu\text{C}$ e $Q_B = 8 \mu\text{C}$. Colocadas em contato até o equilíbrio, quais serão suas novas cargas elétricas?

03 Uma esfera condutora de raio $r_1 = 5 \text{ cm}$ está eletrizada com uma carga $Q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Uma segunda esfera, de raio $r_2 = 10 \text{ cm}$, inicialmente neutra, é colocada em contato com a primeira, sendo afastada em seguida. Determine:

- a. o potencial elétrico da primeira esfera, antes do contato;
- b. seu novo potencial elétrico, após o contato com a segunda esfera.

(Dado: constante eletrostática do meio = $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.)

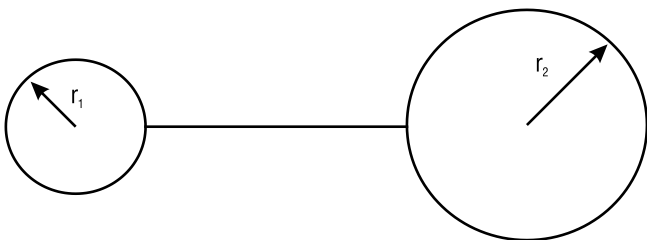
04 Um fio condutor homogêneo de 25 cm de comprimento foi conectado entre os terminais de uma bateria de 6 V. A 5 cm do polo positivo, faz-se uma marca P sobre esse fio, e a 15 cm, uma outra marca Q . Então, a intensidade E do campo elétrico dentro desse fio e a diferença de potencial U_{PQ} existente entre os pontos P e Q dentro do fio serão, respectivamente, dados por:

- (A) 6,0 V/m e 0,6 V. (D) 6,0 V/m e 6,0 V.
 (B) 2,4 V/m e 2,4 V. (E) 24 V/m e 6,0 V.
 (C) 24 V/m e 2,4 V.

05 (ITA 05/06) Algumas células do corpo humano são revestidas externamente por uma película com carga positiva e, internamente, por outra película semelhante, mas com carga negativa de mesmo módulo. Considere que sejam conhecidas a densidade superficial de ambas as cargas ($\sigma = \pm 0,50 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$; $\epsilon_0 \cong 9,0 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$), parede com volume de $4,0 \cdot 10^{-16}$ e constante dielétrica $k = 5,0$. Assinale, então, a estimativa da energia total acumulada no campo elétrico dessa parede:

- (A) 0,7 eV. (D) 17 eV.
 (B) 1,7 eV. (E) 70 eV.
 (C) 7,0 eV.

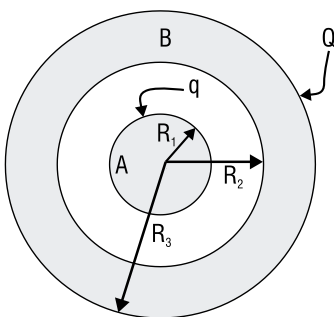
06 O sistema de condutores perfeitos da figura consta de duas esferas de raios $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, interligadas por um fio condutor de capacidade nula. Quando o sistema é eletrizado com carga positiva Q , após o equilíbrio eletrostático ser alcançado, o condutor de raio r_1 apresenta densidade superficial de carga σ_1 e o de raio r_2 apresenta densidade superficial de carga σ_2 . Nessa situação, qual a relação σ_1/σ_2 ?



07 Duas esferas condutoras A e B de raios r e $2r$, respectivamente, estão isoladas e muito distantes uma da outra. As cargas das duas esferas são de mesmo sinal e a densidade superficial de carga da primeira é igual ao dobro da segunda. As duas esferas são interligadas por um fio condutor. Diga se uma corrente elétrica se estabelece no fio. Em caso afirmativo, qual o sentido da corrente? Justifique a resposta, em qualquer caso.

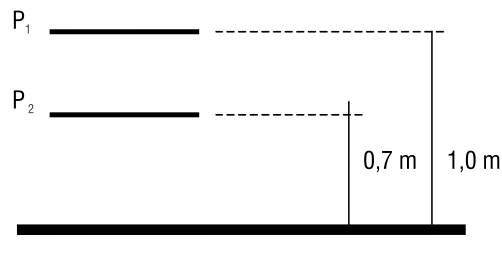
08 Na figura, há dois condutores esféricos A e B concêntricos:

- São dados:
 I. $R_1 = 30 \text{ cm}$, $R_2 = 60 \text{ cm}$ e $R_3 = 90 \text{ cm}$.
 II. Carga elétrica da esfera maciça: $q = -1,0 \mu\text{C}$; carga elétrica da esfera oca: $Q = +10 \mu\text{C}$.
 III. Constante eletrostática do meio: $K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.



Esboce o gráfico do potencial em função da distância ao centro das esferas.

09 Na figura abaixo, P_1 e P_2 constituem um capacitor de placas paralelas, afastadas 1,0 m e 0,7 m, respectivamente, do solo. Em um dado instante, P_2 cai livremente, ficando P_1 fixa em sua posição original.



Determine:

- a. quantos segundos serão necessários para que a capacitância entre P_1 e P_2 fique com 1/3 de seu valor inicial.
 b. a energia armazenada no capacitor se uma tensão de 60 v for aplicada entre as placas no instante calculado no item a.

Dados: C_0 (capacitância inicial) = $0,06 \mu\text{F}$
 $g = 10 \text{ m/s}^2$

10 Uma esfera metálica isolada, de 10,0 cm de raio, é carregada no vácuo até atingir o potencial $U = 9,0 \text{ V}$. Em seguida, ela é posta em contato com outra esfera metálica isolada, de raio $R = 5,0 \text{ cm}$. Após atingido o equilíbrio, qual das alternativas a seguir melhor descreve a situação física?

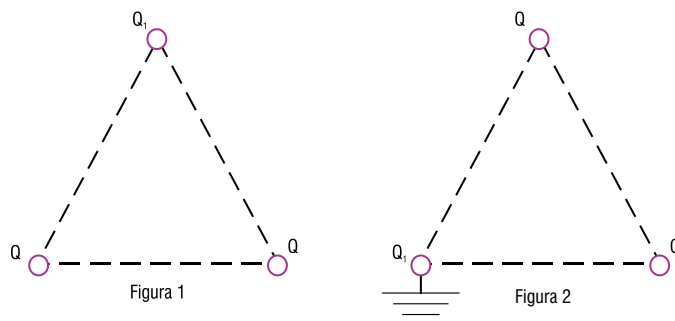
É dado que $(1/4 \pi \epsilon) = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

- (A) A esfera maior terá uma carga de $0,66 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.
 (B) A esfera maior terá um potencial de 4,5 V.
 (C) A esfera menor terá uma carga de $0,66 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.
 (D) A esfera menor terá um potencial de 4,5 V.
 (E) A carga total é igualmente dividida entre as 2 esferas.

11 Considere as cargas elétricas $q_1 = 1 \text{ C}$, situada em $x = -2 \text{ m}$, e $q_2 = -2 \text{ C}$, situada em $x = -8 \text{ m}$. Então, o lugar geométrico dos pontos de potencial nulo é:

- (A) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -4 \text{ m}$ e $x = 4 \text{ m}$.
 (B) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -16 \text{ m}$ e $x = 16 \text{ m}$.
 (C) um elipsoide que corta o eixo x nos pontos $x = -4 \text{ m}$ e $x = 16 \text{ m}$.
 (D) um hiperboloide que corta o eixo x no ponto $x = -4 \text{ m}$.
 (E) um plano perpendicular ao eixo x que o corta no ponto $x = -4 \text{ m}$.

12 Três esferas condutoras, de raio a e carga Q , ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado $b > a$, conforme mostra a figura 1. Considere as figuras 2, 3 e 4, em que, respectivamente, cada uma das esferas se liga e desliga da terra, uma de cada vez. Determine, nas situações 2, 3 e 4, a carga das esferas Q_1 , Q_2 e Q_3 , respectivamente, em função de a , b e Q .



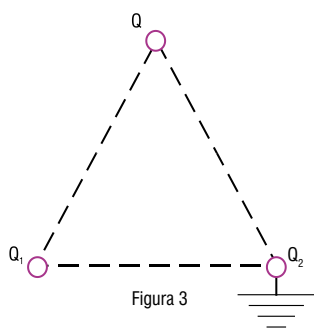


Figura 3

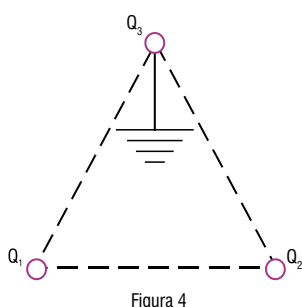
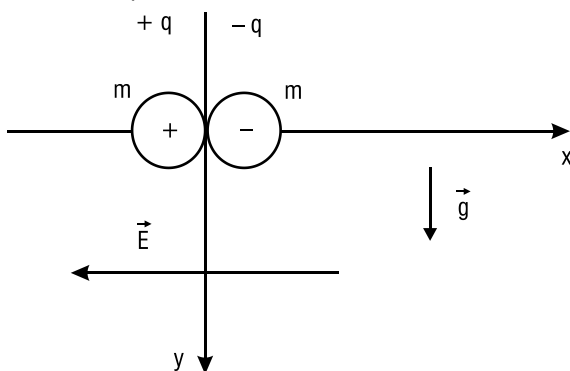
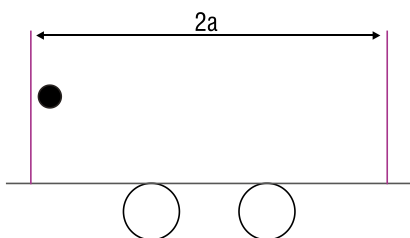


Figura 4

13 Duas cargas pontuais $+q$ e $-q$, de massas iguais m , encontram-se inicialmente na origem de um sistema cartesiano xy e caem devido ao próprio peso a partir do repouso, bem como devido à ação de um campo elétrico horizontal e uniforme E , conforme mostra a figura. Por simplicidade, despreze a força coulombiana atrativa entre as cargas e determine o trabalho realizado pela força peso sobre as cargas ao se encontrarem separadas entre si por uma distância horizontal d .



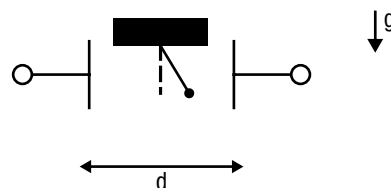
14 Um capacitor plano é formado por duas placas paralelas, separadas entre si de uma distância $2a$, gerando em seu interior um campo elétrico uniforme E . O capacitor está rigidamente fixado em um carrinho que se encontra inicialmente em repouso. Na face interna de uma das placas encontra-se uma partícula de massa m e carga q presa por um fio curto e inextensível. Considere que não haja atritos e outras resistências a qualquer movimento e que seja M a massa do conjunto capacitor mais carrinho. Por simplicidade, considere ainda a inexistência da ação da gravidade sobre a partícula. O fio é rompido subitamente e a partícula move-se em direção à outra placa. A velocidade da partícula no momento do impacto resultante, vista por um observador fixo ao solo, é:



- (A) $\sqrt{\frac{4qEMa}{m(M+m)}}$
- (B) $\sqrt{\frac{2qEMa}{m(M+m)}}$
- (C) $\sqrt{\frac{qEa}{(M+m)}}$
- (D) $\sqrt{\frac{4qEma}{M(M+m)}}$
- (E) $\sqrt{\frac{4qEa}{m}}$

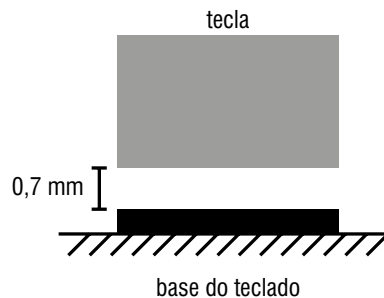
15 Uma pequena esfera de massa igual a $0,2\text{ g}$ pende por um fio isolante entre duas placas verticais e paralelas, separadas por uma distância de 5 cm . A carga na esfera é $6 \cdot 10^{-9}\text{ C}$. Qual será a diferença de potencial entre as placas se o fio permanecer em equilíbrio em um ângulo de 30° com a vertical?

16 (ITA 01/02) Uma esfera de massa m e carga q está suspensa por um fio frágil e inextensível, feito de um material eletricamente isolante. A esfera se encontra entre as placas paralelas de um capacitor plano, como mostra a figura. A distância entre as placas é d , a diferença de potencial entre elas é V e o esforço máximo que o fio pode suportar é igual ao quádruplo do peso da esfera. Para que a esfera permaneça imóvel, em equilíbrio estável, é necessário que:



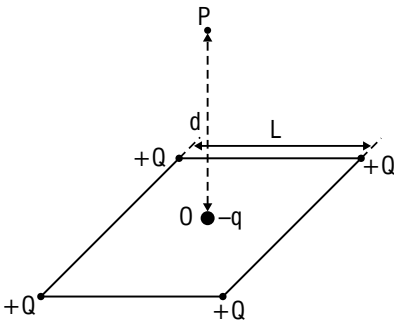
- (A) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 < 15\text{ mg}$.
- (B) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 < 4\text{ (mg)}^2$.
- (C) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 < 15\text{ (mg)}^2$.
- (D) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 < 16\text{ (mg)}^2$.
- (E) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 < 15\text{ mg}$.

17 (ITA 04/05) Considere o vão existente entre cada tecla de um computador e a base do seu teclado. Em cada vão existem duas placas metálicas, uma delas presa na base do teclado e a outra, na tecla. Em conjunto, elas funcionam como um capacitor de placas planas paralelas imersas no ar. Quando se aciona a tecla, diminui a distância entre as placas e a capacitância aumenta. Um circuito elétrico detecta a variação da capacitância, indicativa do movimento da tecla. Considere então um dado teclado, cujas placas metálicas têm 40 mm^2 de área e $0,7\text{ mm}$ de distância inicial entre si. Considere ainda que a permissividade do ar seja $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}\text{ F/m}$. Se o circuito eletrônico é capaz de detectar uma variação da capacitância a partir de $0,2\text{ pF}$, então, qualquer tecla deve ser deslocada de pelo menos:



- (A) $0,1\text{ mm}$.
- (B) $0,2\text{ mm}$.
- (C) $0,3\text{ mm}$.
- (D) $0,4\text{ mm}$.
- (E) $0,5\text{ mm}$.

18 Um quadrado de lado L tem uma carga puntiforme $+Q$ fixa em cada um de seus vértices, como indicado na figura a seguir. No centro O do quadrado é fixada uma carga puntiforme $-q$. O ponto P , localizado ao longo do eixo perpendicular ao plano do quadrado e que passa pelo seu centro, dista d do ponto O . Considere que todo o sistema se encontra no vácuo e que a constante eletrostática do vácuo é denotada por K .



- Calcule o valor da carga localizada no centro para que o campo elétrico resultante em P seja nulo.
- Calcule o valor da carga localizada no centro para que o potencial elétrico total em P seja nulo. Nessa situação, determine o trabalho total realizado pelas forças elétricas sobre uma carga de prova qualquer para trazê-la do infinito até o ponto P , segundo uma trajetória arbitrária.

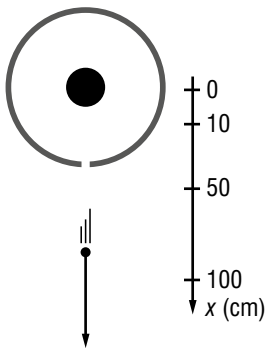
19 N gotas esféricas de mercúrio, iguais, se carregam até uma potencial V . Qual será o potencial V' da gota grande que se obtém como resultado da união destas gotas?

- (A) $V' = V \cdot N$. (D) $V' = V \cdot N^3$.
 (B) $V' = V \cdot N^{2/3}$. (E) n.r.a.
 (C) $V' = V \cdot N^2$.

20 Duas pequenas esferas condutoras carregadas, de raio R , estão situadas a uma distância r uma da outra (de centro a centro). Essas esferas são conectadas à terra, uma de cada vez, durante um certo período de tempo. Calcule a carga final da segunda esfera a ser aterrada, se inicialmente cada esfera tinha potencial elétrico V .

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Um corpo esférico, condutor, oco de espessura irrelevante e com carga total nula tem um raio $R_b = 50,0$ cm e envolve um corpo esférico, a ele concêntrico, condutor e em equilíbrio eletrostático que apresenta um raio $R_a = 10,0$ cm e contém uma carga elétrica $Q_a = 1,00 \mu\text{C}$ de eletricidade positiva. Num dado instante, um corpúsculo de massa $m = 2,00 \cdot 10^{-7}$ g, contendo uma carga $q = 1,00$ nC de eletricidade positiva, abandona a superfície do corpo interno, acelera e, como o corpo maior apresenta um furo, tal corpúsculo passa por ele e é detectado movendo-se na posição $x = 100,0$ cm, como mostrado. Todo o sistema encontra-se no vácuo. Nessas condições:

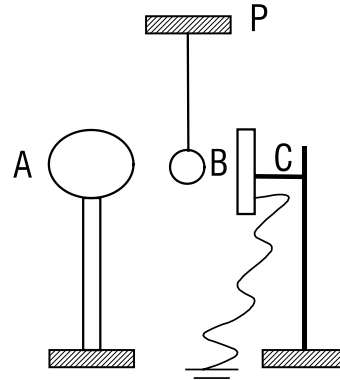


- calcule a intensidade da força elétrica sobre o corpúsculo no instante em que ele passa por um ponto entre os condutores situado a $20,0 \cdot 10^{-2}$ m do centro deles.
- calcule a velocidade do corpúsculo ao passar pela posição $x = 100,0$ cm.

Dado: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

02 Duas esferas metálicas concêntricas sem cargas, cujos raios valem R_1 e R_2 , sendo $R_1 < R_2$, estão unidas por um fino fio condutor. Esse fio passa por um pequeno orifício de uma outra esfera, situada concêntricamente entre as duas primeiras. Essa terceira esfera tem raio R_3 e possui uma carga Q por ela distribuída. Determine o valor da carga induzida na esfera metálica interna.

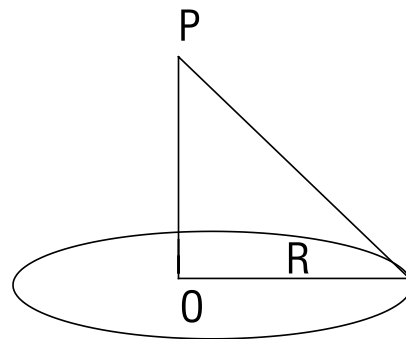
03 A figura abaixo mostra, esquematicamente, uma campainha eletrostática. A e B são condutores esféricos, com diâmetros de 20 cm e 4 cm, respectivamente. B é suspenso de P por um fio isolante. A placa metálica C é ligada à terra.



Considere $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ se $|x| < 1$.

A esfera A, carregada inicialmente a um potencial de 50 kV, atrai B, que, após o contato, é repelida e se choca com a placa C, descarregando-se. A operação se repete enquanto o potencial de A for superior a 25 kV. Determine o número de vezes que B baterá em A.

04 Um anel encontra-se uniformemente eletrizado com uma carga elétrica total de 9 pC e tem raio igual a 3 cm. Observe a figura.

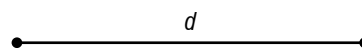


Dados: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$
 Distância $OP = 4,0$ cm

Determine:

- a intensidade do vetor campo elétrico no centro O e no ponto P;
- o potencial elétrico no ponto O e no ponto P.

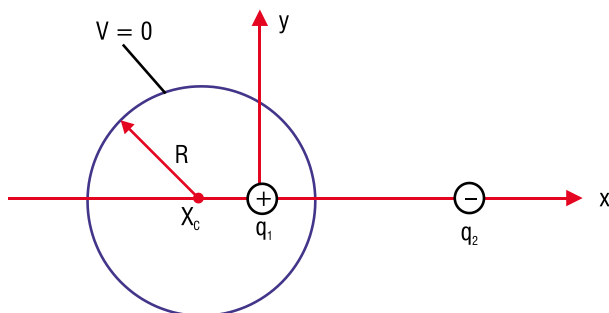
05 Duas partículas A (massa $2M$, carga positiva Q) e B (massa M , carga positiva q), separadas por uma distância d , são abandonadas no vácuo, a partir do repouso, como mostra a figura:



Suponha que as únicas forças atuantes nas partículas sejam as forças eletrostáticas devidas às suas cargas. Sendo K a constante eletrostática do vácuo, determine:

- as velocidades v_A e v_B das partículas A e B quando a distância entre elas for "infinita", ou seja, quando estiverem afastadas o suficiente para que a interação entre elas se torne desprezível;
- a velocidade com que B chegaria ao "infinito", se a partícula A fosse fixa.

06 Uma carga puntiforme $q_1 = +6e$ está fixa na origem de um sistema de coordenadas retangulares, e uma segunda carga puntiforme $q_2 = -10e$ está fixa em $x = 8 \text{ nm}$, $y = 0$. O lugar geométrico de todos os pontos no plano xy , com $V = 0$, é um círculo centrado sobre o eixo x , como mostra a figura abaixo.



Determine:

- a posição x_c do centro do círculo;
- o raio R do círculo.

07 Ao longo de uma linha reta existe um número infinito de cargas alternadamente positivas e negativas $\pm q$, todas as cargas adjacentes separadas por uma mesma distância d .

Mostre que a energia potencial de uma carga é $E_p = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r} \ln 2$.

08 É dada uma esfera metálica oca, isolada, tendo em seu polo superior um pequeno orifício. O raio da esfera é R e a espessura da parede pode ser desprezada. Pelo orifício caem na esfera gotas de água esféricas de raio r e eletrizadas com potencial V . Determine o potencial V' da esfera quando ela se apresentar cheia de água até a metade.

09 Duas esferas condutoras isoladas, cada uma de raio $0,1 \text{ m}$, são carregadas até potenciais de 200 V e 400 V e depois ligadas através de um fio condutor. Calcule o calor gerado nesse fio.

10 Uma pequena esfera carregada positivamente de massa m está suspensa por um fio isolante de massa desprezível. Outra pequena esfera carregada positivamente é movida bem lentamente de uma distância muito grande até que esteja na posição original da bola original. Como resultado, a primeira bola sobe uma altura h . Qual o trabalho realizado?

RASCUNHO

1. Introdução

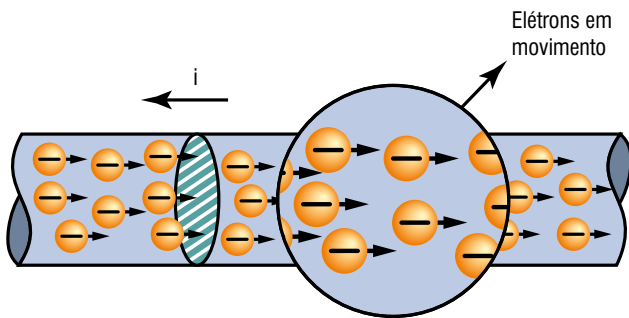
Neste módulo, iniciaremos o estudo da eletrodinâmica apresentando primeiramente o fenômeno da corrente elétrica, destacando sua definição, sua causa, os conceitos de potência e do Efeito Joule que ocorre com a passagem da corrente.

Em seguida, abordaremos as propriedades físicas dos condutores que interferem na intensidade da corrente, com destaque para a resistência elétrica, conceito fundamental no estudo dos circuitos elétricos.

Por fim, falaremos sobre as duas leis de Ohm, destacando os dois tipos de resistores que serão trabalhados e as formas de se calcular a potência dissipada e a energia elétrica consumida por eles.

2. Corrente elétrica

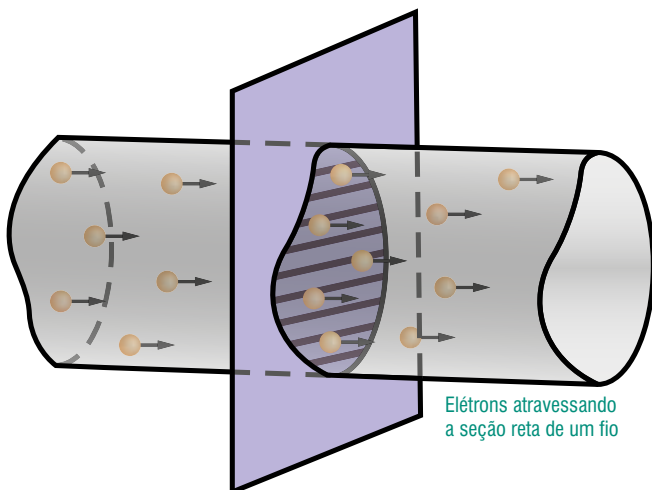
Corrente elétrica é a expressão relacionada ao movimento ordenado de cargas elétricas. Os elementos portadores de cargas elétricas podem ser os elétrons livres (metais e grafite), íons positivos ou negativos (soluções aquosas de ácidos ou bases) e gases ionizados (lâmpadas fluorescentes).



Movimento ordenado dos elétrons em um fio.

2.1 Intensidade média de corrente elétrica

A intensidade de corrente está associada à quantidade de portadores de cargas elétricas que atravessam a seção transversal de um condutor por unidade de tempo.



Elétrons atravessando a seção reta de um fio

Unidade SI de corrente elétrica: [A] – Ampère.

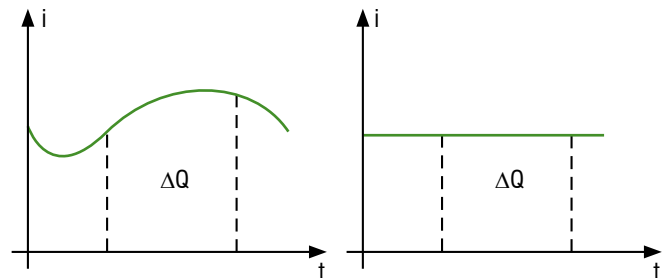
$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad 1A = \frac{1C}{1s}$$

Obs.: Lembre-se que $\Delta Q = n \cdot e$

n → número de cargas
e → carga elementar

2.2 Gráfico da intensidade de corrente em função do tempo

Sabemos que o fluxo de cargas elétricas que atravessam a seção de um condutor pode variar com o tempo. Assim, poderíamos representar o gráfico da intensidade com o tempo, como os exemplos abaixo:



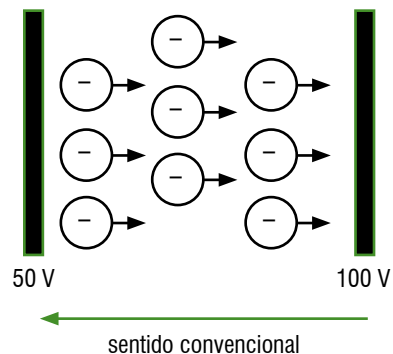
Além disso, a carga total que atravessa uma seção transversal do fio em um certo intervalo de tempo é numericamente igual à área do gráfico corrente versus tempo neste intervalo.

$$\Delta Q = \text{Área}$$

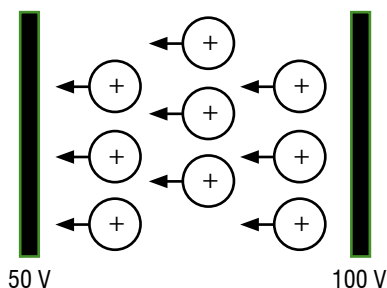
3. Diferença de potencial, d.d.p. ou tensão elétrica (U)

No capítulo anterior (Potenciais elétricos) foi visto este assunto, e aqui será reafirmado que:

- cargas elétricas negativas fluem naturalmente do menor para o maior potencial;

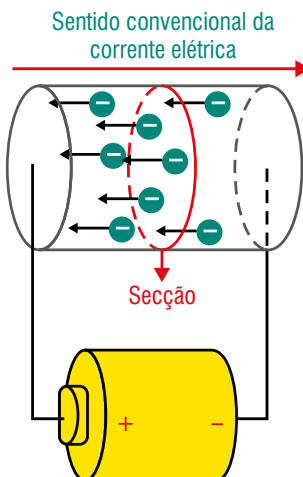


- cargas elétricas positivas fluem naturalmente do maior para o menor potencial.



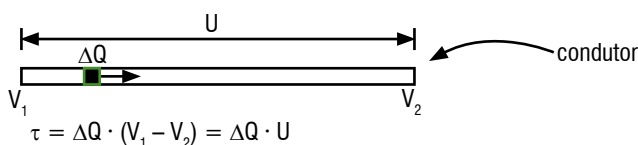
Como os sentidos dos movimentos das cargas positivas e negativas são opostos na existência de tensão elétrica, observou-se a necessidade de convencionar um sentido único para a corrente.

O sentido convencional da corrente elétrica é definido como do maior potencial para o menor potencial. Porém, como os portadores de carga são os elétrons, o sentido real da corrente é do menor potencial para o maior potencial. Caso nada seja citado nos exercícios, adotamos o sentido **convencional**.



4. Potência elétrica

O trabalho da força elétrica para mover uma quantidade de carga ΔQ de um potencial V_1 para outro V_2 foi determinado anteriormente:



A potência elétrica é definida pela razão entre a energia e o tempo gasto naquela troca de energia dado por:

$$P = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \cdot U}{\Delta t} \rightarrow P = U \cdot i$$

Unidade SI de potência elétrica: [W] – Watt
 $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot \text{A}$ (volt-ampère)

5. Efeito joule

Vimos durante a definição de corrente elétrica que o movimento de portadores de cargas ocorre de forma ordenada, uma vez que cargas de mesmo sinal se deslocam no mesmo sentido. Porém, este movimento dos portadores é caracterizado por colisões entre eles e deles com as paredes do condutor.

Desta forma, chama-se de Efeito Joule a transformação de energia elétrica em térmica (dissipada) que ocorre durante a passagem de corrente elétrica, graças às colisões mencionadas.

6. Resistividade (ρ)

A resistividade é uma propriedade física de cada material, diretamente proporcional a sua temperatura, que está relacionada com a dificuldade para a passagem da corrente por um condutor feito deste material.

Unidade SI de resistividade: [$\Omega \cdot \text{m}$] - ohm-metro.

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

em que:

- ρ → resistividade para uma temperatura T;
- ρ_0 → resistividade referência para uma temperatura T_0 ;
- α → coeficiente de temperatura do material;
- ΔT → variação de temperatura ($\Delta T = T - T_0$).

7. Condutividade (σ)

É o inverso da resistividade, ou seja, é a característica física de cada material, inversamente proporcional a temperatura. Em outros termos é a característica física que facilita a passagem da corrente por um condutor.

$$\sigma = 1/\rho$$

Unidade SI de condutividade: [S/m] – siemens/metro = [Ω^{-1}/m]

8. Resistência (R)

Propriedade física de cada material, inversamente proporcional à área transversal do condutor e diretamente proporcional ao seu comprimento.

Unidade SI de resistência: [Ω] – ohm

$$R = \frac{\rho \cdot \ell}{A}$$

Obs.: Tal relação é conhecida como a 2ª Lei de Ohm

9. Condutância (G)

É o inverso da resistência.

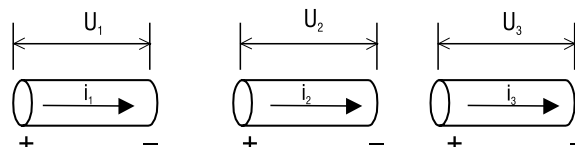
Unidade SI de condutância: [S] – Siemens = [Ω^{-1}]

$$G = \frac{1}{R}$$

10. Primeira lei de ohm

Quando ligamos os terminais de um condutor a uma certa tensão elétrica, vemos que se estabelece uma corrente elétrica por ele. Ao variarmos a tensão nos terminais deste condutor, a intensidade da corrente sofrerá variação proporcionalmente.

Desta forma, a uma dada temperatura, para o mesmo condutor a razão $\frac{U}{i}$ será constante.



$$\frac{U_1}{i_1} = \frac{U_2}{i_2} = \frac{U_3}{i_3} = \dots = \text{constante} = R$$

Desta forma, podemos enunciar a 1ª Lei de Ohm como:

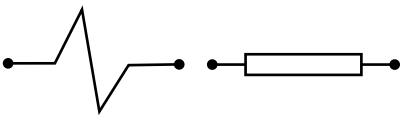
$$U = R \cdot i$$

11. Resistor

Resistor é o elemento físico passivo de um circuito que consome energia elétrica ao dissipar calor devido ao Efeito Joule. Na prática, representam os aparelhos elétricos mais comuns no nosso dia a dia, tais como lâmpadas, ferro de passar, televisão, geladeira, dentre outros.

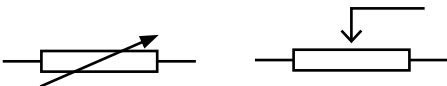


Simbologia



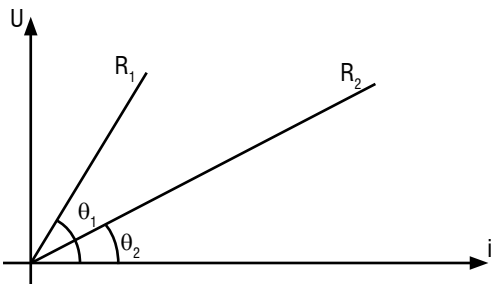
Obs.: Reostato é um resistor de resistência variável, cujo valor é ajustado com a posição de um cursor móvel que determina o comprimento da resistência.

Símbolos para o reostato



11.1 Resistor ôhmico

É o elemento que, mantida a sua temperatura constante, a intensidade de corrente é diretamente proporcional à tensão aplicada, ou seja, obedece a Lei de Ohm.

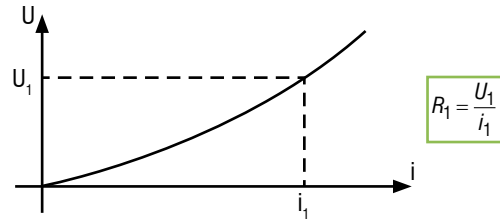


$$R_1 = \text{tg } \theta_1$$

$$R_2 = \text{tg } \theta_2$$

11.2 Resistor não ôhmico

É o elemento que, mesmo mantida a sua temperatura constante, a intensidade de corrente não é diretamente proporcional à tensão aplicada, ou seja, não obedece à Lei de Ohm. Daí, podemos dizer que sua resistência varia de acordo com a intensidade da corrente.



Obs.: Exceto quando se mencionar informação contrária, todos os resistores serão considerados ôhmicos.

12. Potência dissipada em um resistor

A partir da definição de potência elétrica, e juntamente com a primeira lei de Ohm, obtemos as seguintes expressões para a potência dissipada em um resistor:

$$P = U \cdot i \quad P = R \cdot i^2 \quad P = \frac{U^2}{R}$$

13. Energia elétrica

A energia elétrica consumida por um resistor pode ser calculada através da potência dele:

$$P = \frac{E_{ELE}}{\Delta t} \Rightarrow E_{ELE} = P \cdot \Delta t$$

Onde P representa a potência do aparelho e Δt , o tempo em que ele mesmo fica ligado.

Vale ressaltar que, em cálculos de consumo de energia elétrica, costumamos usar outras unidades para as grandezas físicas envolvidas. Assim, usamos o quilowatt-hora (kWh) como unidade de medida da energia elétrica consumida, trabalhando assim com a potência em quilowatts (kW) e o tempo em horas (h).

14. Valores nominais

Os resistores apresentam determinados valores máximos de tensão, corrente elétrica e potência elétrica, que representam especificações para o seu perfeito funcionamento. Tais valores são chamados de valores nominais ou ideais.

Ex.: Chuveiro 110V – 200W

Pelos valores fornecidos, observamos que tal chuveiro funciona idealmente quando conectado a uma tensão de 110V, dissipando a sua máxima potência de 200W. Isto quer dizer que se este chuveiro, mantida a sua resistência constante, for conectado a uma rede elétrica de tensão inferior a 110V, sua potência também será inferior a 200W. Por outro lado, se conectado a uma d.d.p. superior a 110V, ele provavelmente queimará.

15. Fusíveis e disjuntores

São dispositivos de segurança usados em circuitos, com o objetivo de limitar a corrente que percorrerá um trecho do circuito ou um resistor. Ambos possuem como especificação um valor máximo de corrente elétrica limite. Enquanto o fusível queima e abre o circuito quando percorrido por uma corrente elétrica superior ao valor limite, o disjuntor desarma através de uma chave que também abre o circuito, impedindo a passagem de corrente por ali.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Cerca de 10^6 íons de Na^+ penetram em uma célula nervosa, em um intervalo de tempo de 1 ms, atravessando sua membrana. Calcule a intensidade da corrente elétrica através da membrana, sendo $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C a carga elétrica elementar.

Solução:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Repare, porém, que não temos a carga elétrica que atravessa uma seção reta do condutor (ΔQ), mas sabemos que essa carga pode ser calculada por:

$$\Delta Q = n \cdot e$$

$$t = 1 \text{ ms} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n \cdot e}{\Delta t} = \frac{10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1 \cdot 10^{-3}}$$

$$i = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ A}$$

02 Por um chuveiro elétrico circula uma corrente de 20 A, quando ele é ligado a uma tensão de 220 V. Determine:

- a potência elétrica recebida pelo chuveiro;
- a energia elétrica consumida pelo chuveiro em 15 minutos de funcionamento, expressa em kWh.
- a elevação da temperatura da água ao passar pelo chuveiro com vazão igual a 50 gramas por segundo, supondo que ela absorva toda a energia dissipada. Use: calor específico da água = $4,0 \text{ J/g } ^\circ\text{C}$.

Solução:

a. Para calcular a potência elétrica, temos três fórmulas distintas. Precisamos identificar as grandezas fornecidas pelo problema, que nesse caso são: a corrente elétrica ($i = 20 \text{ A}$) e a d.d.p. ($U = 220 \text{ V}$).

Portanto, usaremos $P = Ui$.

$$P = 220 \cdot 20$$

$$P = 4400 \text{ W}$$

b. A energia elétrica consumida é dada por $E = P \cdot \Delta t$

- Não esqueça que a unidade da potência deve ser em kW e o tempo, em horas.

$$P = 4400 \text{ W} = 4,4 \text{ kW}$$

$$t = 15 \text{ min} = 0,25 \text{ h}$$

$$E = 4,4 \cdot 0,25 = 1,1 \text{ kWh}$$

c. A potência do chuveiro é 4400 W, o que significa 4400 J/s, ou seja, a cada segundo, o chuveiro fornece para a água 4400 J.

Sempre preste atenção na unidade do calor específico, que nesse caso é J/g $^\circ\text{C}$. Portanto, a massa da água deve estar em gramas e o calor fornecido, em joules.

Substituindo na expressão do calor sensível:

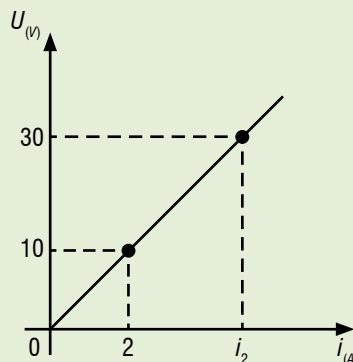
$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

$$4400 = 50 \cdot 4 \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = 22^\circ\text{C}$$

03 No diagrama a seguir está representada a curva característica de um resistor mantido em temperatura constante.

Analise as seguintes afirmações:



São corretas as seguintes afirmações:

- | | |
|--------------------------|---------------------|
| (A) I, II e III, apenas. | (D) todas. |
| (B) I e IV, apenas. | (E) I e II, apenas. |
| (C) I, II e IV, apenas. | |

Solução: Letra D.

- Verdadeira.
Quando o gráfico $U \times i$ é uma reta inclinada para cima, indica que essas duas grandezas são diretamente proporcionais e obedecem à Lei de Ohm: $U = R \cdot i$
- Verdadeira.
Escolhendo o par ordenado ($i = 2 \text{ A}$ e $U = 10 \text{ V}$) do gráfico e aplicando na Primeira Lei de Ohm, temos:
 $U = R \cdot i$
 $10 = R \cdot 2$
 $R = 5 \Omega$
- Verdadeira.
Aplicando a Lei de Ohm para $U = 30 \text{ V}$ e i_2 , temos:
 $U = R \cdot i$
 $30 = 5 \cdot i_2$
 $i_2 = 6 \text{ A}$
- Verdadeira.
A energia consumida será $E = P \cdot t = U \cdot i \cdot t$
 $E = 10 \cdot 2 \cdot 20 = 400 \text{ J}$

04 Um resistor usado em circuitos, como os de receptores de rádio e televisores, por exemplo, é especificado pelo valor de sua resistência e pela potência máxima que pode dissipar sem danificar-se. Considerando um resistor de especificações $10 \text{ k}\Omega - 1 \text{ W}$, determine a máxima intensidade de corrente que ele pode suportar.

Solução:

Conhecemos a resistência do resistor ($R = 10 \text{ k}\Omega = 10.000 \Omega$) e a potência máxima por ele dissipada ($P = 1 \text{ W}$). Portanto:

$$P = U \cdot i$$

$$1 = 10000 \cdot i$$

$$i = 10^{-4} \text{ A}$$

05 A área A de um círculo de raio r é dada por: $A = \pi r^2$. Calcule, então, quantos metros deve ter um fio de cobre com 2,0 mm de diâmetro, para que sua resistência elétrica seja igual a $1,0 \Omega$. Considere a resistividade do cobre igual a $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Use $\pi = 3,1$.

Solução:

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

Pelos dados do problema, tais como área e resistividade, é fácil identificar que usaremos a expressão da Segunda Lei de Ohm. A unidade da resistividade é $\Omega \cdot m$; portanto, o raio deve estar em metros também ($r = 1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$).

$$1 = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot l}{3,1 \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$l \cong 182 \text{ m}$$

06 Considere uma lâmpada de incandescência com as seguintes especificações (valores nominais): 100 W–220 V.

- Calcule a resistência elétrica dessa lâmpada operando corretamente.
- Ignorando a variação da resistência elétrica com a temperatura, calcule a potência dissipada pela lâmpada se for ligada a uma rede de 110 V.

Solução:

a. Conhecendo $Pot = 110 \text{ V}$ e $U = 220 \text{ V}$, é mais imediato usar:

$$Pot = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{Pot} = \frac{220 \cdot 220}{100} \Rightarrow R = 484 \Omega$$

b. Quando a lâmpada está ligada corretamente ($U = 220 \text{ V}$), temos:

$$Pot = \frac{U^2}{R} = 100 \text{ W}$$

Na nova situação ($U' = 110 \text{ V} = \frac{U}{2}$), a potência dissipada será:

$$Pot' = \frac{U'^2}{R} = \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{R} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U^2}{R} = \frac{1}{4} \cdot 100 \text{ W} = 25 \text{ W}$$

Com a redução da potência dissipada, reduz-se também a potência luminosa irradiada, que é uma pequena fração da potência dissipada, já que o rendimento dessa lâmpada é muito baixo. Consequentemente, ela passa a iluminar menos.

07 Um resistor usado em circuitos, como os de receptores de rádio e televisores, por exemplo, é especificado pelo valor de sua resistência e pela potência máxima que pode dissipar sem danificar-se. Considerando um resistor de especificações $10 \text{ k}\Omega$ –1 W, determine a máxima intensidade de corrente que ele pode suportar.

Solução:

$$Pot = R \cdot i^2 \Rightarrow 1 = 10^4 \cdot i^2 \Rightarrow i = 10^{-2} \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

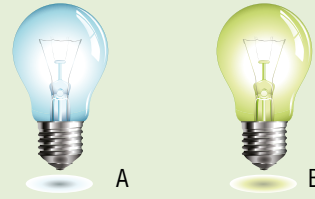
08 Um fio de nicromo, de resistência igual a $3,0 \Omega$, é submetido a uma diferença de potencial de $6,0 \text{ V}$. Com isso, ele passa a liberar quantas cal/s (calorias por segundo)? Use: $1,0 \text{ cal} = 4,0 \text{ J}$.

Solução:

$$Pot = \frac{U^2}{R} = \frac{6,0^2}{3,0} \Rightarrow Pot = 12 \text{ W} = 12 \text{ J/s}$$

Isto equivale a uma dissipação de $3,0 \text{ cal/s}$.

09 (PUC-RJ) Considere duas lâmpadas, A e B, idênticas a não ser pelo fato de que o filamento de B é mais grosso que o filamento de A. Se cada uma estiver sujeita a uma d.d.p. de 110 volts:



- A será a mais brilhante, pois tem a maior resistência.
- B será a mais brilhante, pois tem a maior resistência.
- A será a mais brilhante, pois tem a menor resistência.
- B será a mais brilhante, pois tem a menor resistência.
- ambas terão o mesmo brilho.

Solução: Letra D.

$$R = \frac{\rho \ell}{A} : A_B > A_A \Rightarrow R_B < R_A$$

$$Pot = \frac{U^2}{R} : R_B < R_A \Rightarrow Pot_B > Pot_A$$

10 (VUNESP-SP) Um jovem casal instalou em sua casa uma ducha elétrica moderna de 7700 watts/220 volts. No entanto, os jovens verificaram, desiludidos, que toda vez que ligavam a ducha na potência máxima, o disjuntor desarmava(o que equivale a queimar o fusível de antigamente) e a fantástica ducha deixava de aquecer. Pretendiam até recolocar no lugar o velho chuveiro de 3300 watts/220 volts, que nunca falhou. Felizmente, um amigo – físico, naturalmente – os socorreu. Substituiu o velho disjuntor por outro, de maneira que a ducha funcionasse normalmente.

A partir desses dados, indique a única alternativa que descreve corretamente a possível troca efetuada pelo amigo:

- Substituiu o velho disjuntor de 20 ampères por um novo, de 30 ampères.
- Substituiu o velho disjuntor de 20 ampères por um novo, de 40 ampères.
- Substituiu o velho disjuntor de 10 ampères por um novo, de 40 ampères.
- Substituiu o velho disjuntor de 30 ampères por um novo, de 20 ampères.
- Substituiu o velho disjuntor de 40 ampères por um novo, de 20 ampères.

Solução: Letra B.

Com o velho chuveiro ($30 \text{ W} / 220 \text{ V}$):

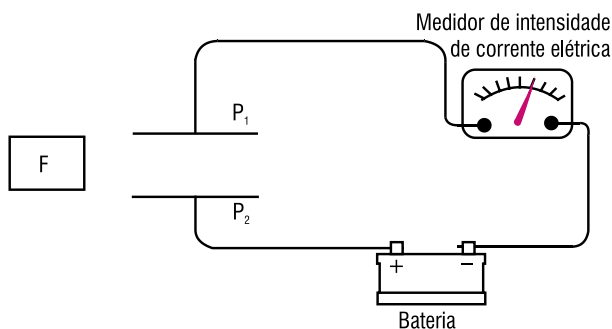
$$Pot = U \cdot i \Rightarrow 3300 = 220 i \Rightarrow i = 15 \text{ A}$$

Com a moderna ducha ($7700 \text{ W} / 220 \text{ V}$):

$$Pot' = U \cdot i' \Rightarrow 7700 = 220 i' \Rightarrow i' = 35 \text{ A}$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Na montagem esquematizada na figura, P_1 e P_2 são duas placas metálicas ligadas por fios condutores a uma bateria e a um medidor de intensidade de corrente elétrica e F é uma fonte de radiação gama. Quando a radiação citada atravessa o ar entre as placas, o medidor detecta a passagem de uma corrente elétrica de pequena intensidade. Isto ocorre porque a radiação torna o ar:



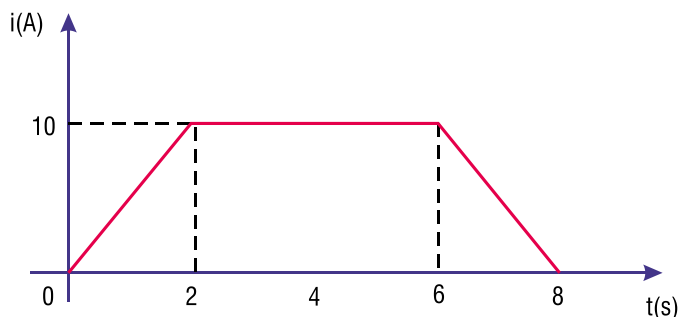
- (A) seco.
- (B) úmido.
- (C) isolante.
- (D) imantado.
- (E) ionizado.

02 A energia proveniente de uma queda-d'água, utilizada para acender uma lâmpada, sofreu basicamente a seguinte transformação:

- (A) mecânica → elétrica → calorífica.
- (B) elétrica → calorífica → mecânica.
- (C) calorífica → elétrica → mecânica.
- (D) calorífica → mecânica → elétrica.
- (E) elétrica → mecânica → calorífica.

03 A partida de um automóvel é acionada durante 5 s, e nesse intervalo de tempo a corrente elétrica que circula pela bateria tem intensidade 200 A. Quanto tempo a bateria leva para se recuperar da descarga, se nesse processo a corrente elétrica tem intensidade 20 A?

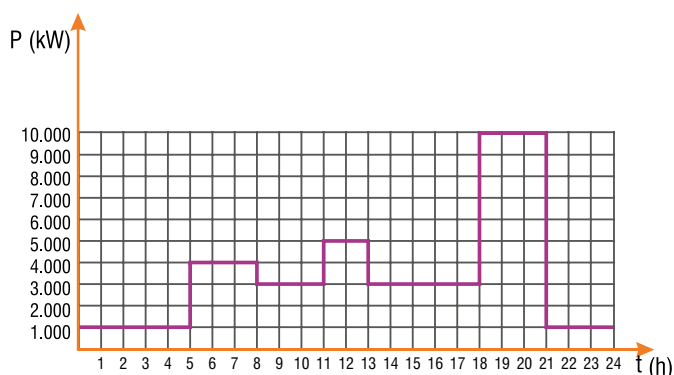
04 A intensidade da corrente elétrica que passa por um condutor metálico varia com o tempo, de acordo com o diagrama abaixo.



Determine:

- a. o módulo da carga elétrica total que passa por uma seção transversal desse condutor, nos 8 segundos;
- b. a intensidade média de corrente elétrica nesse intervalo de tempo.

05 O gráfico abaixo mostra como a potência gerada por uma usina elétrica, em quilowatts (kW), varia ao longo das horas do dia:

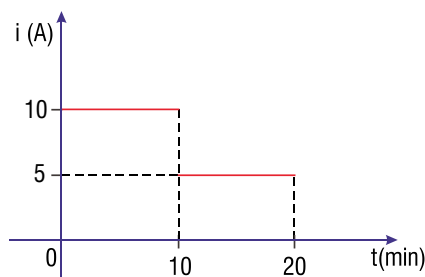
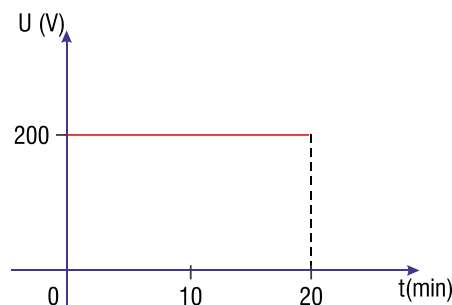


Calcule a energia fornecida por esta usina, em quilowatts-hora (kWh), entre 16 h e 21 h.

06 Uma lâmpada traz em seu bulbo a seguinte inscrição: 60 W – 220 V. Determine, supondo constante a resistência elétrica:

- a. a potência dessa lâmpada se for instalada em uma residência em que a tensão da rede é de 110 V;
- b. a energia elétrica consumida pela lâmpada em kWh durante um mês, supondo que ela permaneça acesa dez horas por noite sob tensão de 220 V.

07 Os gráficos a seguir representam a tensão (U) e a intensidade de corrente elétrica (i) em um aquecedor, em função do tempo (t).



Calcule o consumo de energia elétrica, em kWh, nos vinte minutos de funcionamento.

08 Um aquecedor elétrico ligado a uma rede de tensão de 220 V é percorrido por uma corrente elétrica de intensidade 10 A. Supondo que não haja perdas, determine o intervalo de tempo necessário para esse aquecedor elevar de 20°C a 75°C a temperatura de 1 litro de água (adote 1 cal = 4 J).

09 A bacia hidrográfica do rio Tocantins abrange 767.000 km² (1,4 vezes maior que a França, estendendo-se por 2.500 km no sentido sul-norte, desde o Planalto Central até o estuário do rio Amazonas. Apresenta um potencial hidrelétrico de 25 milhões de kVA. Recentemente foi inaugurada a UHE Tucuruí que, totalmente pronta em 1993, irá produzir 8 milhões de kVA – a maior hidrelétrica genuinamente nacional. Cada uma das duas turbinas já em funcionamento produz 330.000 kVA. A unidade kVA representa:

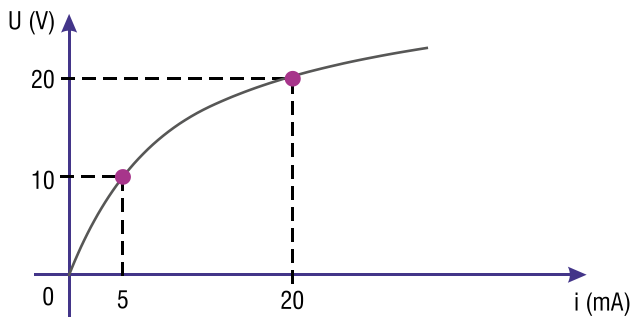
- (A) energia. (D) amperagem.
 (B) potência. (E) voltagem.
 (C) carga.

10 A potência de um chuveiro é de 2.200 watts. Considere 1 cal = 4 J. Qual a variação de temperatura da água, ao passar pelo chuveiro com uma vazão de 0,022 litros?

11 Um chuveiro elétrico opera a uma tensão de 220 V e consome 2.200 W.

- a. Qual é a resistência elétrica deste chuveiro?
 b. Imaginando que você utilize este chuveiro para tomar um banho com água à temperatura de 37°C e que a temperatura ambiente da água seja de 27°C, calcule a vazão da água, em litros por segundo, que você deve exigir deste chuveiro. (Dado: calor específico da água ≅ 4,2 J/(g°C).)

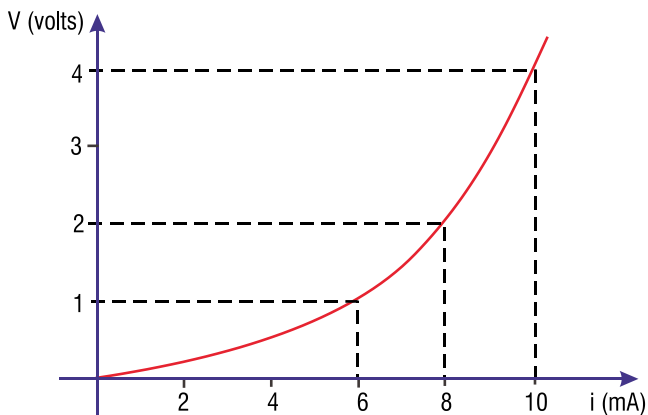
12 A curva característica de um condutor é apresentada na figura abaixo.



Determine:

- a. se o referido condutor é ôhmico;
 b. a resistência elétrica do condutor, quando submetido à tensão de 20 V.

13 A curva característica de um elemento resistivo é vista na figura abaixo.



- a. Qual a potência dissipada quando $i = 10$ mA?
 b. Qual é a carga que passa em 10 segundos, quando $V = 2,0$ volts?

14 Um chuveiro elétrico opera na potência de 4.400 W, sob tensão de 220 V.

Determine:

- a. a resistência elétrica desse chuveiro.
 b. a energia dissipada em 30 minutos de funcionamento.

15 Um fio, em cujas extremidades aplica-se uma diferença de potencial de 20 volts, libera calor à razão de 800 cal/s. Calcule sua resistência elétrica, considerando 1 cal ≅ 4,2 J.

16 Determine a resistência, em Ω , de um condutor que dissipa 1.000 cal/s, ligado a uma diferença de potencial de 50 V.

(Dado: 1 cal = 4,18 J)

- (A) 0,10. (C) 0,60.
 (B) 0,30. (D) 0,90.

17 Um chuveiro elétrico, submetido à tensão constante, pode ser regulado para fornecer água em maior ou menor temperatura (inverno e verão, respectivamente). A resistência elétrica do chuveiro:

- (A) não tem relação com o aquecimento da água.
 (B) é maior quando se deseja água mais aquecida.
 (C) é maior quando se deseja água menos aquecida.
 (D) é menor quando se deseja água menos aquecida.

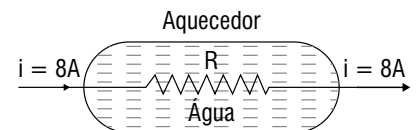
18 (ITA 01/02) Para se proteger do apagão, o dono de um bar conectou uma lâmpada a uma bateria de automóvel (12,0 V). Sabendo que a lâmpada dissipa 40,0 W, os valores que melhor representam a corrente I que a atravessa e sua resistência R são, respectivamente, dados por:

- (A) $I = 6,6$ A e $R = 0,36 \Omega$
 (B) $I = 6,6$ A e $R = 0,18 \Omega$
 (C) $I = 6,6$ A e $R = 3,6 \Omega$
 (D) $I = 3,3$ A e $R = 7,2 \Omega$
 (E) $I = 3,3$ A e $R = 3,6 \Omega$

19 A figura representa um aquecedor de água que eleva a temperatura da água de 15°C para 24°C em 30 minutos, quando uma corrente elétrica de 8 ampères passa através da resistência R . O aquecedor contém 80 kg de água de calor específico de 1 cal/g °C. Considerando-se que toda energia elétrica dissipada na resistência é utilizada no aquecimento da água, o valor da resistência e o de sua potência dissipada são, respectivamente, iguais a:

(Dado: 1 cal = 4 J)

- (A) 60 Ω e 5 kW.
 (B) 50 Ω e 4 kW.
 (C) 25 Ω e 1,6 kW.
 (D) 45 Ω e 3 kW.
 (E) 30 Ω e 2 kW.



20 (ITA 01/02) Sendo dado que 1 J = 0,239 cal, o valor que melhor expressa, em calorias, o calor produzido em 5 minutos de funcionamento de um ferro elétrico, ligado a uma fonte de 120 V e atravessado por uma corrente de 5,0 A, é:

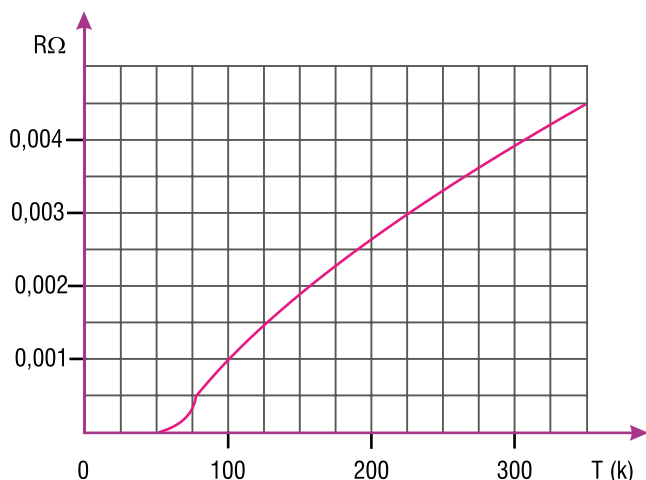
- (A) $7,0 \cdot 10^4$. (D) $0,43 \cdot 10^4$.
 (B) $0,70 \cdot 10^4$. (E) $4,3 \cdot 10^4$.
 (C) $0,070 \cdot 10^4$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

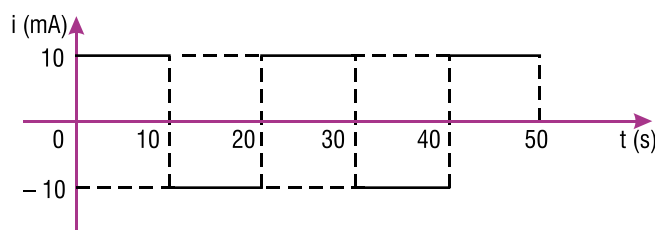
01 Aplica-se uma diferença de potencial de 220 V a um resistor de resistência 50 Ω. A potência e a intensidade de corrente elétrica são, respectivamente, iguais a:

- (A) 968 W e 44 A.
- (B) 968 W e 4,4 A.
- (C) 968 W e 0,44 A.
- (D) 96,8 W e 44 A.
- (E) 96,8 W e 4,4 A.

02 O gráfico representa o comportamento da resistência de um fio condutor em função da temperatura em K. O fato de o valor da resistência ficar desprezível abaixo de uma certa temperatura caracteriza o fenômeno da supercondutividade. Pretende-se usar o fio na construção de uma linha de transmissão de energia elétrica em corrente contínua. À temperatura ambiente de 300 K, a linha seria percorrida por uma corrente de 1000 A, com uma certa perda de energia na linha. Qual seria o valor da corrente na linha, com a mesma perda de energia, se a temperatura do fio fosse baixada para 100 K?



03 A intensidade de corrente elétrica em um resistor ôhmico de resistência elétrica igual a 1 kΩ é dada em função do tempo, conforme o gráfico a seguir:



Determine a energia elétrica dissipada no resistor, no intervalo de tempo de 0 a 50 s.

04 Ao ser conectado a uma rede elétrica que fornece uma tensão eficaz de 200 V, a taxa de consumo de energia de um resistor ôhmico é igual a 60 W.

Determine o consumo de energia, em kWh, desse resistor, durante quatro horas, ao ser conectado a uma rede que fornece uma tensão eficaz de 100 V.

05 A tabela a seguir mostra componentes eletroeletrônicos de uma residência, com suas respectivas especificações e tempo médio de uso diário em horas, por elemento.

Componente	6 lâmpadas	1 televisor	1 chuveiro	1 ferro elétrico
Potência	100 W	500 W	2400 W	1200 W
Tensão	220 V	220v	220 V	220 v
Tempo	2,0	4,0	1,5	1,0

Buscando minimizar o gasto mensal, os moradores dessa residência resolveram retirar duas lâmpadas e reduzir o uso do chuveiro e do ferro elétrico em 30 minutos cada. Com esta atitude, foi conseguida uma economia de:

- (A) 22,5%.
- (B) 25,0%.
- (C) 27,5%.
- (D) 30,0%.
- (E) 32,5%.

06 Produz-se um campo elétrico de 1 V/m em um condutor cilíndrico de cobre de resistividade $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ e comprimento de 100 m, resultando uma corrente elétrica de 1 A.

- a. Qual a d.d.p. nos terminais do condutor?
- b. Qual a resistência elétrica do condutor?
- c. Qual a área da seção transversal desse fio?
- d. Qual a potência dissipada?

07 Um fio de resistência elétrica R tem comprimento ℓ e área de seção transversal A . Estica-se esse fio até que seu comprimento dobre. Qual será a nova resistência desse fio, supondo que não tenha havido alteração de sua resistividade nem de sua densidade?

08 Em circulação assistida, ou em experiência com animais, normalmente é de grande valia a pressão intra-aórtica ou pressão intraventricular. Para tanto, utiliza-se um dispositivo chamado *gauge*, com resistores dependentes da tração mecânica, que têm o nome de *strain gauges*. Estes dispositivos, em princípio, constam de um fio que é esticado até aumentar o comprimento, com respectiva redução de área e, portanto, apresentam uma resistência variável.

Supondo que tivéssemos, para uma determinada condição, um *strain gauge* de Isoelastic, de resistividade $\rho = 1,12 \frac{m}{mm^2}$, 1,00 m de comprimento e área de seção transversal de $4,48 \cdot 10^{-4} mm^2$, qual a resistência elétrica apresentada por esse *strain gauge*?

09 Com um certo material de resistividade elétrica ρ foi construída uma resistência na forma de um bastão de 5,0 cm de comprimento e seção transversal quadrada de 5,0 mm de lado. A resistência assim construída, ligada a uma tensão de 120 V, foi usada para aquecer água. Em operação, verificou-se que o calor fornecido pela resistência ao líquido em 10 s foi de $1,7 \cdot 10^3$ cal.

- a. Calcule o valor da resistividade ρ .
- b. Quantos segundos seriam necessários para aquecer 1 litro de água da temperatura de 20°C até 37°C?

Observação: Considere a resistividade do material e o calor específico da água constantes naquele intervalo de temperatura. (Use 1 cal = 4 J.)

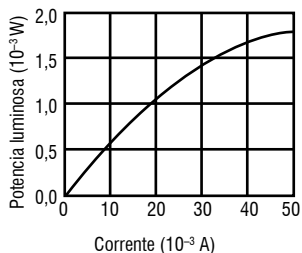
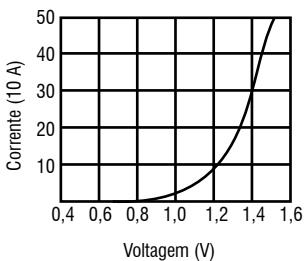
10 Pretende-se determinar a resistência de uma lâmpada, cuja tensão nominal é de 120 volts, com um circuito no qual se pode medir simultaneamente a tensão aplicada à lâmpada e a intensidade da corrente nela. Foram feitas duas medições: primeiro a 120 volts e, depois, a 40 volts. Calculou-se a resistência da lâmpada aplicando-se a Lei de Ohm e obteve-se resistência sensivelmente maior para 120 volts. Pode-se afirmar que:

- (A) houve erro nas medidas, pois os resultados deveriam ser iguais.
- (B) houve um curto-circuito no filamento da lâmpada, diminuindo a resistência na segunda medida.
- (C) a diferença decorre da desigualdade de temperatura do filamento nas duas tensões.
- (D) o processo não serve para medir resistência.

11 Fusíveis são interruptores elétricos de proteção que desligam o circuito elétrico quando a corrente ultrapassa determinado valor. Uma residência de 110 V é protegida por fusíveis de 20 ampères. O proprietário possui um aquecedor de água de 4.400 W, um ferro de passar de 880 W, lâmpadas de 100 W, e uma sauna de 6.600 W. Os equipamentos que podem ser ligados na rede elétrica, um de cada vez, sem queimar o fusível, são, respectivamente:

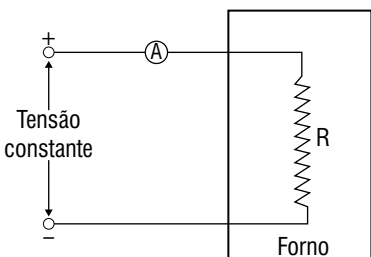
- (A) o ferro e o aquecedor.
- (B) o ferro e a lâmpada.
- (C) a lâmpada e o aquecedor.
- (D) a lâmpada e a sauna.
- (E) o ferro e a sauna.

12 Um LED (do inglês *Light Emitting Diode*) é um dispositivo semicondutor para emitir luz. Sua potência depende da corrente elétrica que passa através desse dispositivo, controlada pela voltagem aplicada. Os gráficos abaixo representam as características operacionais de um LED com comprimento de onda na região do infravermelho, usado em controles remotos.

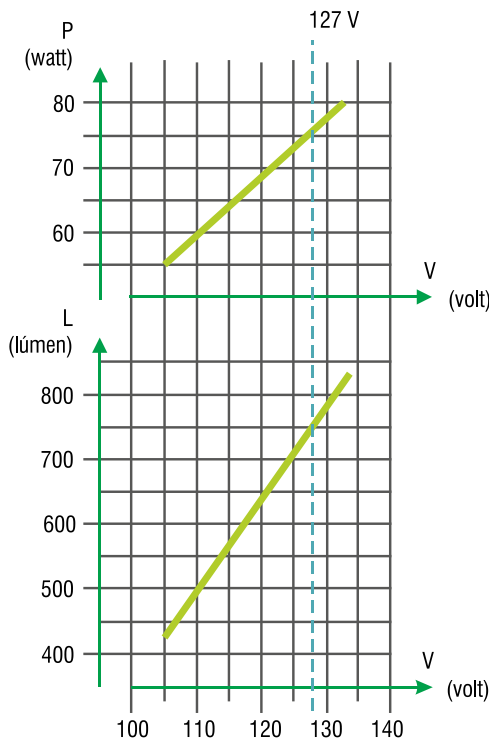


- a. Qual é a potência elétrica do diodo, quando uma tensão de 1,2 V é aplicada?
- b. Qual é a potência de saída (potência elétrica transformada em luz) para essa voltagem? Qual é a eficiência do dispositivo?
- c. Qual é a eficiência do dispositivo sob uma tensão de 1,5 V?

13 (MACK-SP) A temperatura de um forno é calculada através da corrente elétrica indicada pelo amperímetro, como mostra a figura. O resistor R é feito de material cuja resistividade tem coeficiente de temperatura igual a $5 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Estando o forno a 20°C , o amperímetro indica 2,0 A. Quando o amperímetro indicar 1,6 A, qual será a temperatura do forno?



14 Os gráficos apresentados a seguir, caracterizam a potência P , em watt, e a luminosidade L , em lúmen, em função da tensão, para uma lâmpada incandescente. Para iluminar um salão, um especialista programou utilizar 80 dessas lâmpadas, supondo que a tensão disponível no local seria de 127 V. Entretanto, ao iniciar-se a instalação, verificou-se que a tensão no local era de 110V. Foi necessário, portanto, um novo projeto, de forma a manter a mesma luminosidade no salão, com lâmpadas desse mesmo tipo.



Para esse novo projeto, determine:

- a. o número N de lâmpadas a serem utilizadas;
- b. a potência adicional P_A , em watts, a ser consumida pelo novo conjunto de lâmpadas, em relação à que seria consumida no projeto inicial.

15 Mediante chave seletora, um chuveiro elétrico tem a sua resistência graduada para dissipar 4,0 kW no inverno, 3,0 kW no outono, 2,0 kW na primavera e 1,0 kW no verão. Em uma manhã de inverno, com temperatura ambiente de 10°C , foram usados 10,0 L de água desse chuveiro para preencher os 16% do volume faltante do aquário de peixes ornamentais, de modo a elevar sua temperatura de 23°C para 28°C . Sabe-se que 20% da energia é perdida no aquecimento do ar, a densidade da água é $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$ e calor específico da água é $4,18 \text{ J/gK}$. Considerando que a água do chuveiro foi colhida em 10 minutos, em que posição se encontrava a chave seletora? Justifique.

16 Em uma sala há várias tomadas elétricas aparentemente idênticas. No entanto, algumas fornecem uma diferença de potencial (d.d.p.) de V_0 e outras, uma d.d.p. de $2 V_0$. Um estudante deve diferenciar os dois tipos de tomadas. Para isso, lhe são fornecidas 2 lâmpadas fabricadas para operar sob uma d.d.p. de V_0 e com potência P_0 e fios condutores ideais para que possa construir um circuito a fim de testar as tomadas.

- a. De que modo o estudante deve ligar as lâmpadas no circuito para que não corra risco de queimá-las? Represente o circuito por meio de um esquema.
- b. Explique como o estudante pode diferenciar as tomadas que fornecem a d.d.p. de V_0 das que fornecem a d.d.p. de $2 V_0$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

17 Um estudante do ITA foi a uma loja comprar uma lâmpada para o seu apartamento. A tensão da rede elétrica do alojamento dos estudantes do ITA é 127 V, mas a tensão da cidade de São José dos Campos é de 220 V. Ele queria uma lâmpada de 25 W de potência que funcionasse em 127 V, mas a loja tinha somente lâmpadas de 220 V. Comprou, então, uma lâmpada de 100 W fabricada para 220 V, e ligou-a em 127 V. Se pudermos ignorar a variação da resistência do filamento da lâmpada com a temperatura, podemos afirmar que:

- (A) o estudante passou a ter uma dissipação de calor no filamento da lâmpada acima da qual ele pretendia (mais de 25 W).
- (B) a potência dissipada na lâmpada passou a ser menor que 25 W.
- (C) a lâmpada não acendeu em 127 V.
- (D) a lâmpada, tão logo foi ligada, “queimou”.
- (E) a lâmpada funcionou em 127 V perfeitamente, dando a potência nominal de 100 W.

18 A casa de um certo professor de Física do ITA, em São José dos Campos, tem dois chuveiros elétricos que consomem 4,5 kW cada um. Ele quer trocar o disjuntor geral da caixa de força por um que permita o funcionamento dos dois chuveiros simultaneamente com um aquecedor elétrico (1,2 kW), um ferro elétrico (1,1 kW) e 7 lâmpadas comuns (incandescentes) de 100 W. Disjuntores são classificados pela corrente máxima que permitem passar. Considerando que a tensão da cidade seja de 220 V, o disjuntor de menor corrente máxima que permitirá o consumo desejado é de:

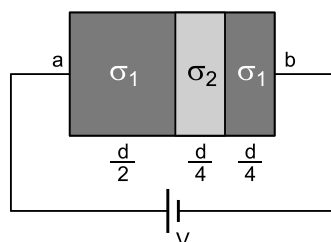
- (A) 30 A.
- (B) 40 A.
- (C) 50 A.
- (D) 60 A.
- (E) 80 A.

19 Um fio condutor é derretido quando o calor gerado pela corrente que passa por ele se mantém maior que o calor perdido pela superfície do fio (desprezando a condução de calor pelos contatos). Dado que uma corrente de 1 A é a mínima necessária para derreter um fio de seção transversal circular de 1 mm de raio e 1 cm de comprimento, determine a corrente mínima necessária para derreter um outro fio da mesma substância com seção transversal circular de 4 mm de raio e 4 cm de comprimento.

- (A) 1/8 A.
- (B) 1/4 A.
- (C) 1 A.
- (D) 4 A.
- (E) 8 A.

20 A figura mostra três camadas de dois materiais com condutividade σ_1 e σ_2 , respectivamente. Da esquerda para a direita, temos uma camada do material com condutividade σ_1 , de largura $d/2$, seguida de uma camada do material de condutividade σ_2 , de largura $d/4$, seguida de outra camada do primeiro material de condutividade σ_1 , de largura $d/4$. A área transversal é a mesma para todas as camadas e igual a A . Sendo a diferença de potencial entre os pontos a e b igual a V , a corrente do circuito é dada por:

- (A) $4V A/d(3\sigma_1 + \sigma_2)$.
- (B) $4V A/d(3\sigma_2 + \sigma_1)$.
- (C) $4V A\sigma_1\sigma_2/d(3\sigma_1 + \sigma_2)$.
- (D) $4V A\sigma_1\sigma_2/d(3\sigma_2 + \sigma_1)$.
- (E) $AV(6\sigma_1 + 4\sigma_2)/d$.



01 Um anel circular de raio R encontra-se uniformemente eletrizado com densidade linear de cargas igual a λ . O anel roda com velocidade angular constante, igual a ω , em torno de seu eixo. Determine a intensidade de corrente gerada pela rotação do anel.

02 Um condutor metálico cilíndrico, cuja seção transversal tem área A , é percorrido por uma corrente elétrica de intensidade constante i . Sendo N o número de elétrons livres por unidade de volume do condutor, e e a carga elétrica elementar e v a velocidade média de deslocamento dos elétrons livres, determine a intensidade da corrente elétrica.

03 As lâmpadas fluorescentes iluminam muito mais que as lâmpadas incandescentes de mesma potência. Nas lâmpadas fluorescentes compactas, a eficiência luminosa, medida em lumens por watt (lm/W), é da ordem de 60 lm/W e, nas lâmpadas incandescentes, da ordem de 15 lm/W. Em uma residência, 10 lâmpadas incandescentes de 100 W são substituídas por fluorescentes compactas que fornecem iluminação equivalente (mesma quantidade de lumens). Admitindo que as lâmpadas ficam acesas, em média, 6 horas por dia e que o preço da energia elétrica é de R\$ 0,20 por kWh, determine a economia mensal na conta de energia elétrica dessa residência.

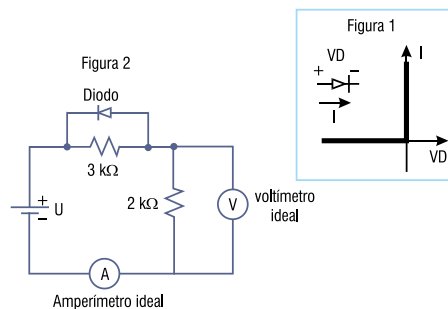
04 A base de uma nuvem de tempestade, eletricamente carregada, situa-se a 500 m do solo. O ar se mantém isolante até que o campo elétrico entre a nuvem e o solo atinja o valor de $5,00 \cdot 10^6$ N/C. Em um dado instante, a nuvem descarrega-se por meio de um raio, que dura 0,10 s e libera a energia de $5,00 \cdot 10^{11}$ J. Calcule:

- a. a diferença de potencial entre a base da nuvem e o solo;
- b. a corrente elétrica média durante a descarga;
- c. a quantidade de cargas transportadas pelo raio.

05 Um objeto metálico é colocado próximo a uma carga de $+0,02$ C e aterrado com um fio metálico de resistência de 8Ω . Suponha que a corrente que passa pelo fio seja constante por um tempo de 0,1 ms até o sistema entrar em equilíbrio e que a energia dissipada no processo seja de 2 J. Conclui-se que, no equilíbrio, a carga no objeto metálico é:

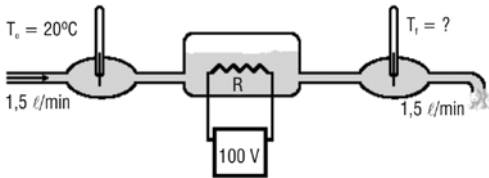
- (A) $-0,02$ C.
- (B) $-0,01$ C.
- (C) $-0,005$ C.
- (D) 0 C.
- (E) $+0,02$ C.

06 Grande parte da tecnologia utilizada em informática e telecomunicações é baseada em dispositivos semicondutores, que não obedecem à lei de Ohm. Entre eles está o diodo, cujas características ideais são mostradas no gráfico (figura 1). O gráfico deve ser interpretado da seguinte forma: se for aplicada uma tensão negativa sobre o diodo ($V_D < 0$), não haverá corrente (ele funciona como uma chave aberta). Caso contrário ($V_D > 0$), ele se comporta como uma chave fechada. Considere o circuito (figura 2).



- Obtenha as resistências do diodo para $U = +5V$ e $U = -5V$
- Determine os valores lidos no voltímetro e no amperímetro para $U = +5V$ e $U = -5V$.

07 Em um experimento de laboratório, um fluxo de água constante, de 1,5 litro por minuto, é aquecido através de um sistema cuja resistência R , alimentada por uma fonte de 100 V, depende da temperatura da água. Quando a água entra no sistema, com uma temperatura $T_0 = 20^\circ C$, a resistência passa a ter um determinado valor que aquece a água. A água aquecida estabelece novo valor para a resistência e assim por diante, até que o sistema se estabilize em uma temperatura final $T(f)$.



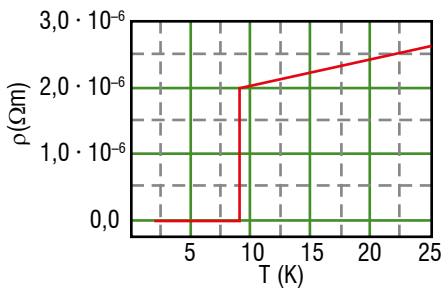
Para analisar o funcionamento do sistema:

- Escreva a expressão da potência $P(R)$ dissipada no resistor, em função da temperatura do resistor, e represente $P(R) \times T$ no gráfico.
- Escreva a expressão da potência $P(A)$ necessária para que a água deixe o sistema a uma temperatura T , e represente $P(A) \times T$ no mesmo gráfico.
- Estime, a partir do gráfico, o valor da temperatura final $T(f)$ da água, quando essa temperatura se estabiliza.

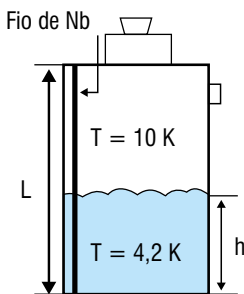
Note e adote:

- Nas condições do problema, o valor da resistência R é dado por $R = 10 - \alpha T$, quando R é expresso em Ω , T em $^\circ C$ e $\alpha = 0,1 \Omega / ^\circ C$.
- Toda a potência dissipada no resistor é transferida para a água e o resistor está à mesma temperatura de saída da água.
- Considere o calor específico da água $c = 4.000 \text{ J}/(\text{kg} \cdot K)$ e a densidade da água $\rho = 1 \text{ kg}/\text{litro}$.

08 (Unicamp-SP) O gráfico a seguir mostra a resistividade elétrica de um fio de nióbio (Nb) em função da temperatura. No gráfico, pode-se observar que a resistividade apresenta uma queda brusca em $T = 9,0 \text{ K}$, tornando-se nula abaixo dessa temperatura. Esse comportamento é característico de um material supercondutor.

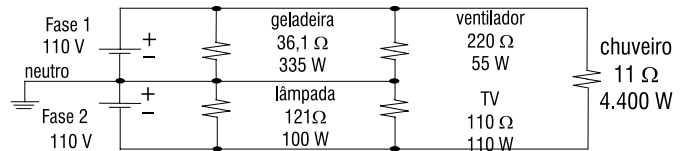


Um fio de Nb de comprimento total $L = 1,5 \text{ m}$ e seção transversal de área $A = 0,050 \text{ mm}^2$ é esticado verticalmente do topo até o fundo de um tanque de hélio líquido, a fim de ser usado como medidor de nível, conforme ilustrado na figura ao lado. Sabendo-se que o hélio líquido se encontra a $4,2 \text{ K}$ e que a temperatura da parte não imersa do fio fica em torno de 10 K , pode-se determinar a altura h do nível de hélio líquido através da medida da resistência do fio.



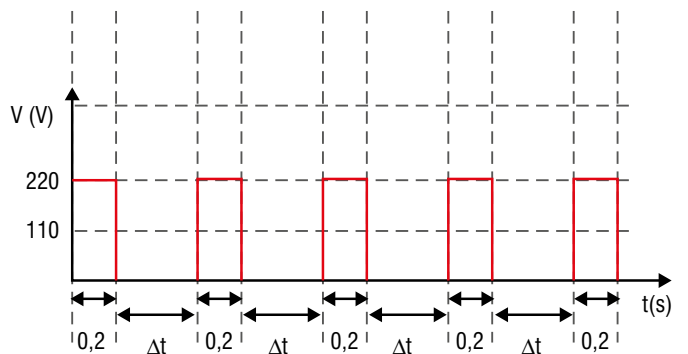
- Calcule a resistência do fio quando toda a sua extensão está a 10 K , isto é, quando o tanque está vazio.
- Qual é a altura h do nível de hélio líquido no interior do tanque em uma situação em que a resistência do fio de Nb vale 36Ω ?

09 Algumas residências recebem três fios da rede de energia elétrica, sendo dois fios correspondentes às fases e o terceiro ao neutro. Os equipamentos existentes nas residências são projetados para serem ligados entre uma fase e o neutro (por exemplo, uma lâmpada, ou entre duas fases (por exemplo, um chuveiro). Considere o circuito abaixo, que representa, de forma muito simplificada, uma instalação elétrica residencial. As fases são representadas por fontes de tensão em corrente contínua e os equipamentos, representados por resistências. Apesar de simplificado, o circuito pode dar uma ideia das consequências de uma eventual ruptura do fio neutro. Considere que todos os equipamentos estejam ligados ao mesmo tempo.



- Calcule a corrente que circula pelo chuveiro.
- Qual é o consumo de energia elétrica da residência em kWh durante quinze minutos?
- Considerando que os equipamentos se queimam quando operam com uma potência 10% acima da nominal (indicada na figura), determine quais serão os equipamentos queimados caso o fio neutro se rompa no ponto A.

10 (Fuvest-SP) Um determinado aquecedor elétrico, com resistência R constante, é projetado para operar a 110 V . Pode-se ligar o aparelho a uma rede de 220 V , obtendo os mesmos aquecimento e consumo de energia médios, desde que haja um dispositivo que o ligue e desligue, em ciclos sucessivos, como indicado no gráfico. Nesse caso, a cada ciclo, o aparelho permanece ligado por $0,2 \text{ s}$ e desligado por um intervalo de tempo Δt . Determine:



- a relação Z_1 entre as potências P_{220} e P_{110} , dissipadas por esse aparelho em 220 V e 110 V , respectivamente, quando está continuamente ligado, sem interrupção;
- o valor do intervalo Δt , em segundos, em que o aparelho deve permanecer desligado a 220 V , para que a potência média dissipada pelo resistor nessa tensão seja a mesma que quando ligado continuamente em 110 V ;
- a relação Z_2 entre as correntes médias I_{220} e I_{110} , que percorrem o resistor quando em redes de 220 V e 110 V , respectivamente, para a situação do item anterior.

RASCUNHO

1. Introdução

Neste módulo, daremos continuidade ao estudo de eletrodinâmica, trabalhando desta vez com circuitos com mais de um resistor. A ideia principal será reduzir uma associação de resistores a apenas um resistor equivalente, de forma que seja possível calcular de maneira mais simples a corrente de um circuito ou a potência total dissipada no mesmo.

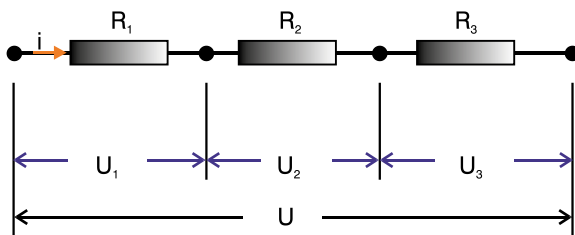
Desta forma, iremos inicialmente apresentar os três tipos de associação (série, paralelo e mista), bem como explicar os fenômenos do curto circuito e da Ponte de Wheatstone.

Por fim, explicaremos ferramentas importantes utilizadas para resolver associações de resistores mais complexas (simetria e transformações delta-estrela), além de apresentar os instrumentos de medidas mais usados no estudo dos circuitos elétricos

2. Associação de resistores

2.1 Associação em série

Dois ou mais resistores estão associados em série quando a corrente elétrica que os percorre é a mesma. Ex.: lâmpadas de pisca-pisca de Natal.

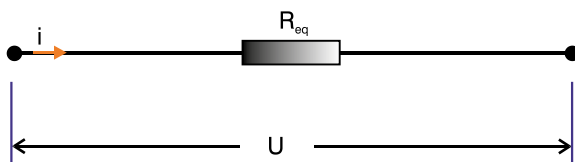


Associação de resistores em série

Assim, a tensão total da associação é igual à soma das tensões de cada resistor:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + R_3 \cdot i$$

$$U = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot i$$



Resistência equivalente: R_{eq}

$$U = R_{eq} \cdot i$$

Comparando os dois resultados, vemos que: $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$

Logo, em uma associação em série de n resistores $R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$

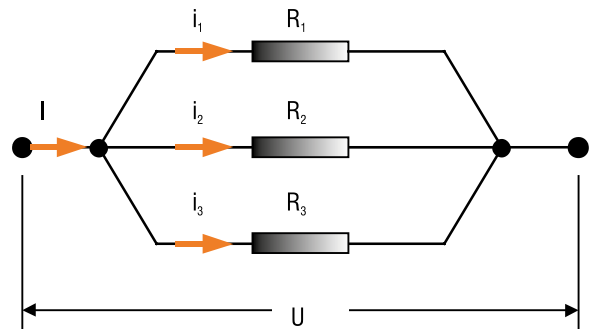
Resumindo, podemos dizer que em uma associação em série:

- a voltagem, nos extremos da associação, é igual à soma das quedas de tensão em cada resistor.
- a resistência equivalente (R_{eq}) da associação é igual à soma das resistências associadas.

Obs.: repare que, em uma associação em série, se um resistor queimar (abrindo o circuito), não haverá mais passagem de corrente nos demais e os resistores cessarão seu funcionamento.

2.2 Associação em paralelo

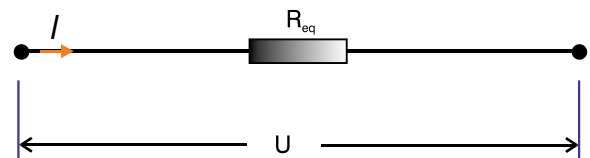
Dois ou mais resistores estão associados em paralelo quando a tensão elétrica (D.D.P) entre os seus terminais é a mesma. Ex.: aparelhos ligados em um circuito residencial.



Associação de resistores em paralelo

$$I = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

$$I = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$



Resistência equivalente: R_{eq}

$$I = \frac{U}{R_{eq}} = U \cdot \frac{1}{R_{eq}}$$

Novamente, comparando os resultados encontrados, temos:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Portanto, em uma associação em paralelo de n resistores: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$

Em suma, em uma associação de resistores em paralelo:

- todos os resistores estão submetidos à mesma tensão;
- a corrente total é a soma das correntes em cada um dos resistores.

Obs.: Neste caso, se um resistor queimar, os demais irão continuar operando com a mesma intensidade de corrente, uma vez que suas tensões permanecem inalteradas.

2.2.1 Dois resistores em paralelo

Quando dois resistores estiverem em paralelo, a resistência equivalente é dada pela razão entre o produto e a soma desses resistores.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{\text{produto das resistências}}{\text{soma das resistências}}$$

Essa expressão é útil para cálculos mais rápidos sem a necessidade de montar a expressão com fração do item anterior.

Ex.: Qual a resistência equivalente entre dois resistores em paralelo de 2 Ω e 3 Ω?

Pela definição: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Usando a regra do produto-soma, o resultado é direto:

$$R_{eq} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1,2 \Omega$$

2.2.2 Resistores iguais em paralelo

Quando n resistores iguais estão associados em paralelo, a resistência equivalente é a razão entre o valor dos resistores pelo número de resistores (n).

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \dots = \frac{n}{R}$$

$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$

$$R_{eq} = \frac{\text{resistência de um resistor}}{\text{número de resistências}}$$

Assim como a regra do produto-soma, essa regra é útil para cálculos mais rápidos da resistência equivalente.

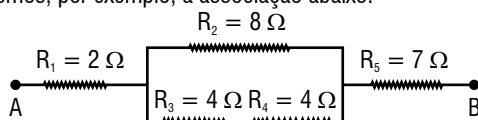
Ex.: Qual a resistência equivalente de 5 resistores de 40 Ω ligados em paralelo?

Pela definição: $\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40}$

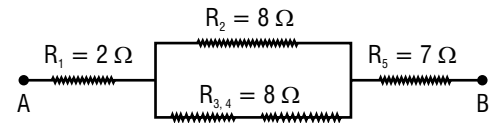
Usando a regra acima, o resultado é direto: $R_{EQ} = \frac{40}{5} = 8 \Omega$

2.3 Associação mista

Uma associação mista contém resistores associados em série e em paralelo de forma conjunta. A determinação da resistência equivalente, em uma associação mista, deve ser feita simplificando, paulatinamente, o esquema inicial, através da resolução das associações (série e paralelo). Consideremos, por exemplo, a associação abaixo:

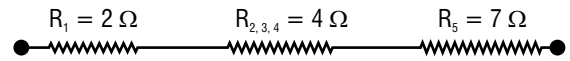


Os resistores R_3 e R_4 estão em série. Logo, a resistência equivalente aos dois será $R_{3,4} = R_3 + R_4 = 8 \Omega$. O circuito se reduz, então, a:



Os dois resistores de 8 Ω estão agora em paralelo. Determinaremos a resistência equivalente ($R_{2,3,4}$) desses dois resistores: $R_{2,3,4} = \frac{8}{2} = 4 \Omega$

O circuito se reduz, então, a:

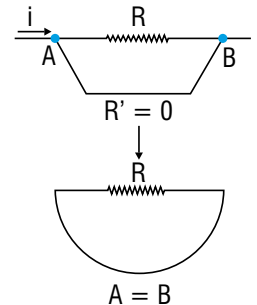


Como os três resistores estão em série, determinamos, finalmente, a resistência equivalente R_{eq} entre A e B:

$$R_{eq} = 2 + 4 + 7 = 13 \Omega.$$

3. Curto circuito

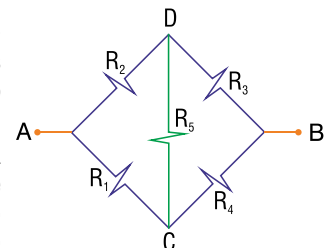
Considere uma corrente elétrica i percorrendo uma resistência R . Se ligarmos os pontos A e B por um fio de resistência nula, o potencial elétrico no ponto A será igual ao potencial elétrico no ponto B, resultando em uma diferença de potencial nula.



A corrente elétrica passa pelo fio de resistência elétrica nula e não passa pela resistência R . Dizemos, neste caso, que o resistor R encontra-se em curto circuito (tensão nula).

4. Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é constituída por quatro resistores ligados de acordo com a configuração ao lado:



Dizemos que a ponte está equilibrada quando a corrente i_5 (que passa no resistor R_5) é nula. Com isso os potenciais dos pontos C e D são iguais ($V_C = V_D$) e este resistor estará em curto-circuito, podendo ser retirado sem alterar o circuito.

Desta forma, temos:

$$U_{AC} = U_{AD} \rightarrow R_1 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2$$

$$U_{CB} = U_{DB} \rightarrow R_3 \cdot i_3 = R_4 \cdot i_4$$

Como $i_1 = i_4$ e $i_2 = i_3$, ao dividirmos ambas as equações acima, teremos:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

Portanto, a ponte está equilibrada quando ocorrer a seguinte relação

entre as resistências: $R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$

Neste caso, quando retiramos o resistor R_5 (em curto) do circuito, observamos R_1 e R_4 ficam associados em série, assim como os resistores R_2 e R_3 .

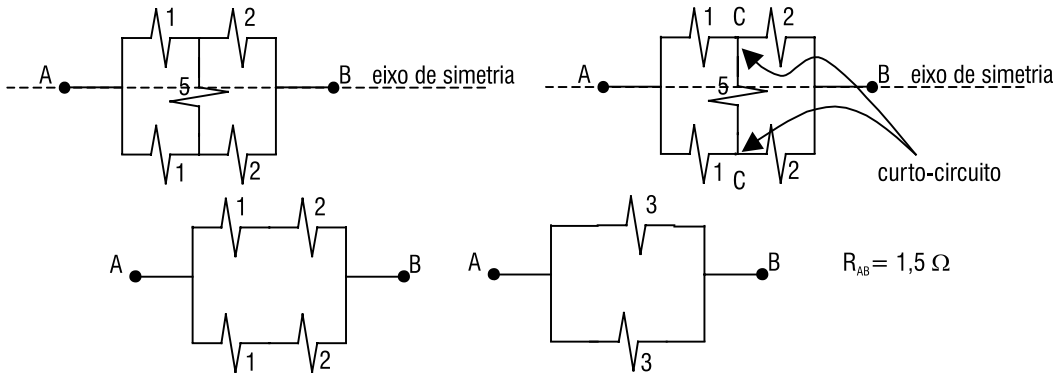
5. Problemas envolvendo simetria

Em alguns casos, podemos utilizar argumentos de simetria para simplificar o cálculo da resistência equivalente de uma associação.

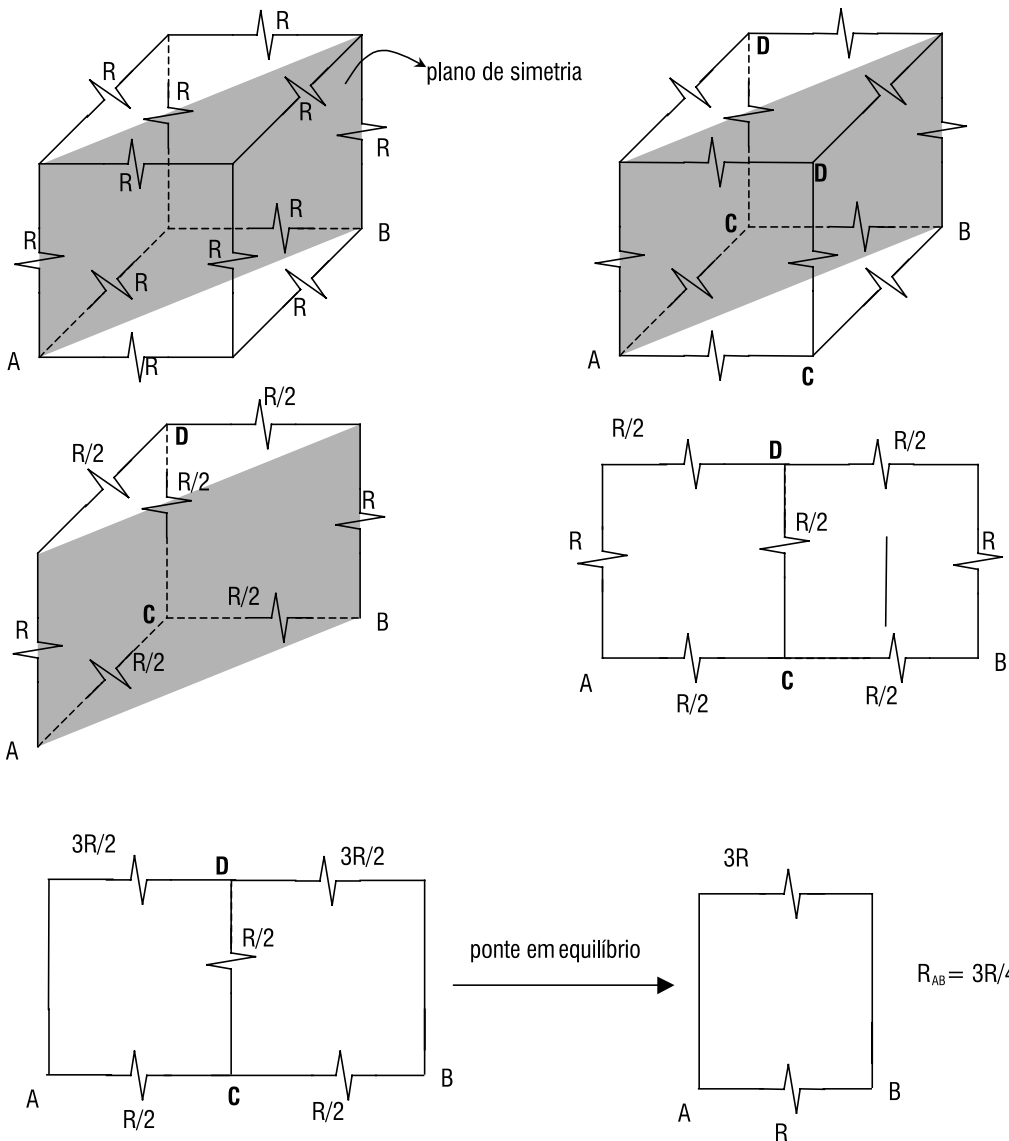
Para isto, se conseguirmos encontrar um eixo ou plano de simetria que passe pelos terminais da associação, será possível determinar pontos que

tenham mesmo potencial, fato que pode provocar situações de resistores em paralelo ou em curto circuito. Daí, o circuito poderá ser reduzido de forma mais simples. Vejamos alguns exemplos.

Ex.₁: $R_{AB} = ?$

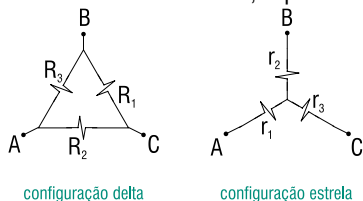


Ex.₂: $R_{AB} = ?$



6. Transformação delta → estrela

Em algumas situações como em pontes não equilibradas, uma ferramenta utilizada para simplificar associações de resistores é a chamada transformação delta-estrela ou estrela-delta, dependendo do caso.



Em uma associação em delta, temos as seguintes relações para as possíveis resistências equivalentes:

$$R_{AB} = \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_3 + (R_1 + R_2)}$$

$$R_{AC} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_2 + (R_1 + R_3)}$$

$$R_{BC} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + (R_2 + R_3)}$$

Já para uma associação em estrela, encontramos as seguintes equações:

$$R_{AB} = r_1 + r_2$$

$$R_{AC} = r_1 + r_3$$

$$R_{BC} = r_2 + r_3$$

Assim, quando desejarmos transformar uma configuração delta em uma estrela, resolvendo o sistema de equações acima teremos:

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

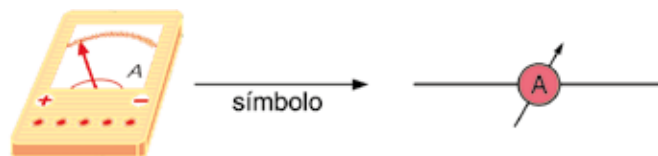
Por outro lado, se precisarmos transformar uma configuração estrela em uma delta, chegaremos nas seguintes relações:

$$R_1 = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3}{r_1} \quad R_2 = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3}{r_2} \quad R_3 = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3}{r_3}$$

7. Instrumentos de medida

7.1 Amperímetro

Para medirmos o valor da corrente elétrica que atravessa um determinado ponto do circuito, utilizamos um aparelho denominado *amperímetro*, que deve ser ligado em série com o circuito a ser medido.

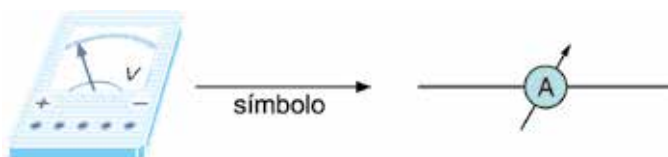


Um amperímetro ideal é aquele que possui resistência nula.

Obs.: galvanômetro é um *amperímetro* analógico, com fundo de escala, usado para medir correntes de pequena intensidade.

7.2 Voltímetro

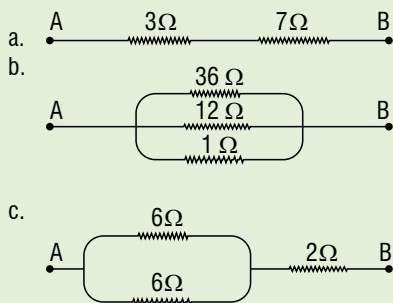
Para medir a D.D.P. entre dois pontos de um circuito, utilizamos um aparelho denominado *voltímetro*, que deve ser ligado em paralelo com os pontos do circuito a ser medida a diferença de potencial.



Um voltímetro ideal é aquele que possui resistência infinita.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Em cada uma das associações a seguir, determine a resistência equivalente entre os pontos A e B:



Solução:

- Os dois resistores estão em série (repare que o fio é único e não se divide em partes). Portanto, a resistência equivalente (R_{EQ}) será: $R_{EQ} = 3 + 7 = 10 \Omega$.
- Os três resistores estão em paralelo, pois o fio principal se ramifica em três e cada resistor ocupa uma ramificação:

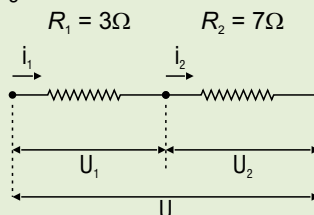
$$\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{R_{EQ}} = 0,9 \Omega$$

Interpretando o resultado: sempre que calcularmos a resistência equivalente de resistores em paralelo, a R_{EQ} sempre será um valor menor que o menor dos resistores da associação. Portanto, como o menor dos resistores é 1Ω , o R_{EQ} deveria ser menor que esse valor, o que realmente ocorreu. Sempre preste atenção nesse detalhe nos exercícios.

- Temos aqui uma associação mista. Repare que o fio principal se ramifica em dois ramos (onde temos um resistor de 6Ω em cada ramo, portanto ambos estão em paralelo). Esses dois resistores em paralelo podem ser trocados por um único resistor que estará em série com o resistor de 2Ω . $\frac{1}{R_{EQ(PARALELO)}} = \frac{R_{EQ}}{n} + \frac{2}{6} = 3 \Omega$
Os dois resistores em paralelo são iguais, portanto usaremos o macete: $R_{EQ(TOTAL)} = 3 + 2 = 5 \Omega$

02 A figura representa a associação de dois resistores em série, em que a D.D.P. U_1 é igual a $12 V$:



Determine:

- as intensidades de corrente i_1 e i_2 .
- a D.D.P. U_2 e a D.D.P. U .
- a potência dissipada em cada resistor.

Solução:

a. Atenção, pois sabemos que resistores ligados em série são percorridos pela mesma corrente elétrica, ou seja, $i_1 = i_2 = i$. Como conhecemos a D.D.P. no resistor R_1 , aplicaremos a Lei de Ohm nesse resistor:

$$U_1 = R_1 \cdot i$$

$$12 = 3 \cdot i$$

$$i = 4 \text{ A}$$

b. Aplicando a Lei de Ohm e sabendo que a corrente que passa no resistor R_2 também é 4 A:

$$U_2 = R_2 \cdot i$$

$$U_2 = 7 \cdot 4$$

$$U_2 = 28 \text{ V}$$

A D.D.P. total em é a soma das tensões dos dois resistores:
 $U = 12 + 28 = 40 \text{ V}$.

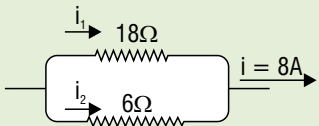
c. Aplicando $P = U \cdot i$ nos dois resistores:

$$P_1 = U_1 \cdot i = 12 \cdot 4 = 48 \text{ W}$$

$$P_2 = U_2 \cdot i = 28 \cdot 4 = 112 \text{ W}$$

Repare que, como a corrente elétrica é a mesma na associação em série, potência e resistência são diretamente proporcionais, ou seja, a maior potência dissipada ocorre no maior resistor.

03 Sendo $i = 8 \text{ A}$, calcule as intensidades de corrente i_1 e i_2 na associação de resistores a seguir:



Solução:

Os dois resistores estão em paralelo, pois o fio principal se ramifica em dois e temos um resistor em cada ramificação. As suas D.D.P.s são iguais:

$$U_1 = U_2 \quad \text{Mas } i = i_1 + i_2$$

$$R_1 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 \quad 8 = i_1 + 3 \cdot i_1$$

$$18 \cdot i_1 = 6 \cdot i_2 \quad i_1 = 2 \text{ A}$$

$$i_2 = 3 \cdot i_1 \quad i_2 = 6 \text{ A}$$

Interpretando o resultado: para a mesma D.D.P. (U), a resistência e a corrente elétrica são inversamente proporcionais de acordo com a Lei de Ohm ($U = R \cdot i$). Portanto, pelo maior resistor passará a menor corrente, resultado que foi encontrado.

$$R_1 = 18 \Omega; i_1 = 2 \text{ A}$$

$$R_2 = 6 \Omega; i_2 = 6 \text{ A}$$

04 Deseja-se montar um aquecedor elétrico de imersão, que será ligado em uma tomada em que a D.D.P. U é constante. Para isso, dispõe-se de três resistores: um de 30Ω , um de 20Ω e outro de 10Ω . Para o aquecedor ter a máxima potência possível, deve-se usar:

- apenas o resistor de 10Ω .
- apenas o resistor de 30Ω .
- os três resistores associados em série.
- os três resistores associados em paralelo.
- apenas os resistores de 10Ω e 20Ω , associados em paralelo.

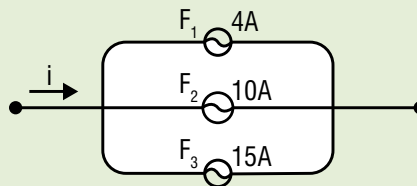
Solução: Letra D.

Esse tipo de exercício é bastante recorrente e geralmente o raciocínio usado leva a erros. A princípio poderíamos imaginar que para dissipar a maior potência possível, deveríamos ter a maior resistência possível, o que aconteceria se os resistores estivessem ligado em série, em que a R_{eq} seria de 60Ω . Porém, esse raciocínio só é válido se o sistema tivesse uma corrente elétrica constante, o que não ocorre. Nesse caso, não importa como ligamos os resistores, a D.D.P. U é **constante** e a

expressão que devemos analisar é: $P = \frac{U^2}{R}$.

Em que a potência (P) e a resistência (R) são **inversamente** proporcionais, que é diferente do nosso senso comum. Para o aquecedor ter a maior potência possível, a resistência deve ser a menor possível, que ocorre quando ligamos todos os três resistores em paralelo.

05 Na figura, F_1, F_2 e F_3 são fusíveis de resistências iguais, que suportam correntes máximas de 4 A, 10 A e 15 A, respectivamente:



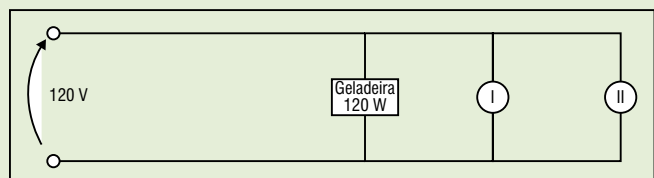
Para que nenhum fusível se queime, a corrente i pode valer, no máximo:

- 29 A.
- 30 A.
- 45 A.
- 12 A.
- 4 A.

Solução: Letra D.

As resistências dos fusíveis são iguais, portanto, as correntes que passarão por cada fusível também serão as mesmas. Como o menor fusível é de 4 A, até 4 A pode passar nesse ramo, que é a mesma intensidade de corrente que percorrerá os outros 2 ramos. A corrente total será o somatório das três correntes de 4 A, portanto, 12 A.

06 (UFF-RJ) A figura a seguir mostra o esquema elétrico de um dos circuitos da cozinha de uma casa, no qual está ligada uma geladeira, de potência especificada na própria figura. Em cada uma das tomadas I e II pode ser ligado apenas um eletrodoméstico de cada vez. Os eletrodomésticos que podem ser usados são: um micro-ondas (120 V – 900 W), um liquidificador (120 V – 200 W), uma cafeteira (120 V – 600 W) e uma torradeira (120 V – 850 W).



Quanto maior a corrente elétrica suportada por um fio, maior é seu preço. O fio, que representa a escolha mais econômica possível para este circuito, deverá suportar, dentre as opções a seguir, uma corrente de:

- (A) 5 A.
- (B) 10 A.
- (C) 15 A.
- (D) 20 A.
- (E) 25 A.

Solução: Letra D.

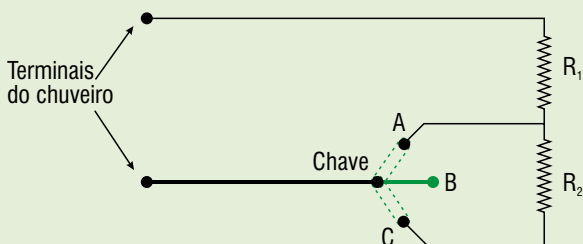
$$Pot_{Max} = Pot_{Gel} + Pot_{Mic} + Pot_{Tor}$$

$$Pot_{Max} = 120 \text{ W} + 900 \text{ W} + 850 \text{ W} = 1870 \text{ W}$$

$$Pot_{Max} = U i_{Max} \Rightarrow 1870 = 120 i_{Max}$$

$$i_{Max} \cong 15,6 \text{ A}$$

07 A figura representa esquematicamente a parte elétrica de um chuveiro, cuja chave oferece três opções: desligado, verão e inverno. Associe essas opções às possíveis posições (A, B ou C) da chave.



Solução: A: inverno; B: desligado; C: verão.

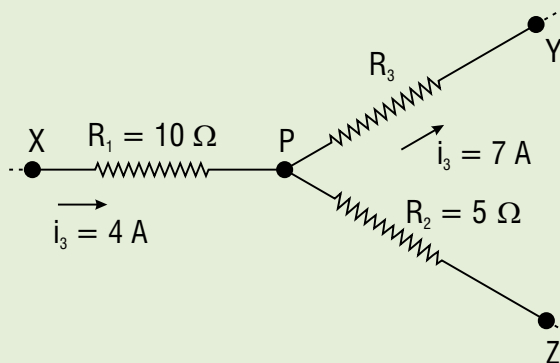
Para qualquer posição da chave, o valor de U entre os terminais do chuveiro é o mesmo.

$$Pot_A = \frac{U^2}{R_1} : \text{maior potência} \Rightarrow \text{A: inverno}$$

$$Pot_C = \frac{U^2}{R_1 + R_2} : \text{chuveiro operando com potência menor} \Rightarrow \text{C: verão}$$

B: desligado

08 No trecho de circuito esquematizado a seguir, determine a diferença de potencial U_{XZ} entre os pontos X e Z ($U_{XZ} = v_X - v_Z$):



Solução:

É necessário lembrar que a corrente em um resistor tem sentido do potencial maior para o menor. Assim, o potencial v_X é maior que o potencial v_P :

$$U_{XP} = R_1 \cdot i_1 = 10 \cdot 4$$

$$U_{XP} = 40 \text{ V}$$

$$v_X - v_P = 40 \text{ V}$$

Observe que a corrente em R_2 tem intensidade $i_2 = 3 \text{ A}$ e sentido de Z para P. Portanto v_Z é maior que v_P :

$$U_{ZP} = R_2 \cdot i_2 = 5 \cdot 3$$

$$U_{ZP} = 15 \text{ V}$$

$$v_Z - v_P = 15 \text{ V}$$

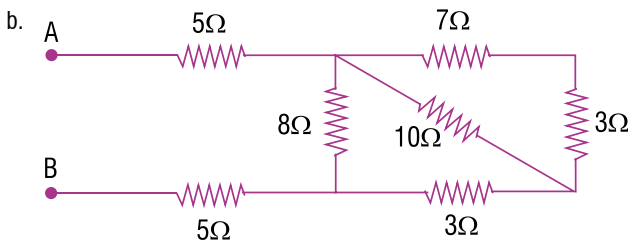
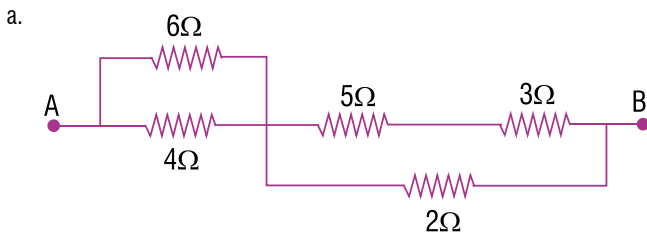
Subtraindo membro a membro a expressão (II) da expressão (I), temos:

$$v_X - v_Z = 25 \text{ V}$$

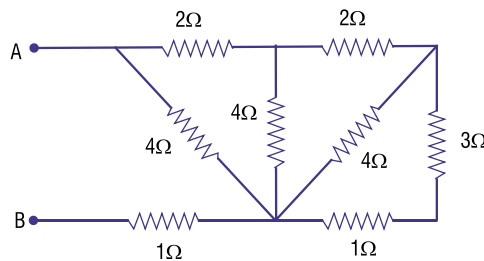
$$U_{XZ} = 25 \text{ V}$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

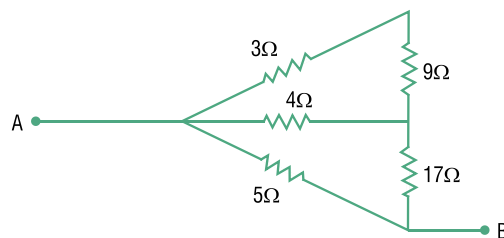
01 Calcule a resistência equivalente entre os terminais A e B, nos seguintes casos:



02 Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito:



03 Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito:



04 Dispõe-se de três resistores de resistências de 300 ohms cada um. Para se obter uma resistência de 450 ohms, utilizando-se os três resistores, como devemos associá-los?

05 Um cordão de lâmpadas decorativas contém 20 lâmpadas de 5 W ligadas em série à rede de 110 V. Uma das lâmpadas queimou e vai ser substituída por um pedaço de fio metálico. Determine a resistência desse pedaço de fio, para que o brilho das lâmpadas acesas continue igual ao anterior.

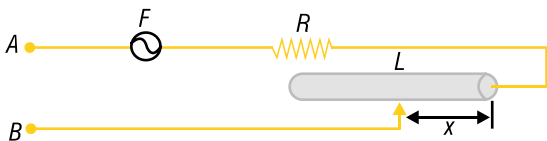
06 Em duas lâmpadas de incandescência A e B encontramos, respectivamente, as seguintes inscrições: 60 W – 115 V e 100 W – 115 V. Essas lâmpadas são associadas em série e os terminais da associação são ligados a uma tomada de 115 V.

- Qual delas iluminará melhor, comparativamente?
- E se estivessem associadas em paralelo, qual iluminaria melhor?

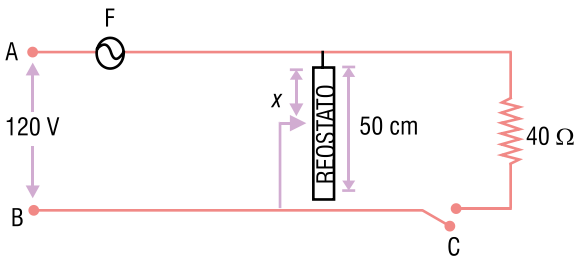
07 Um aquecedor elétrico pode funcionar com um ou com dois resistores idênticos de mesma resistência R . Ao funcionar apenas com um resistor, uma certa quantidade de água entra em ebulição em t_0 minutos. Em quanto tempo entrará em ebulição um volume igual de água, se o aquecedor funcionar com os dois resistores ligados:

- em paralelo?
- em série?

08 No circuito representado na figura, F é um fusível que suporta no máximo 5 A, R é um resistor de resistência de 10Ω e L é um cilindro feito de um material de resistividade igual a $5 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ m}$, com 2 mm^2 de área de seção transversal, que funciona como um reostato. Determine o menor valor possível de x , para que o fusível não queime, quando se aplica aos terminais A e B uma tensão de 100 V.

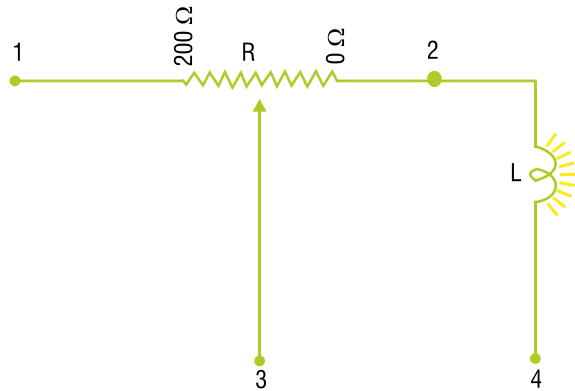


09 No circuito representado a seguir, o fusível F está suportando a máxima corrente (6 A), quando o valor de x é 10 cm e a chave C está aberta:



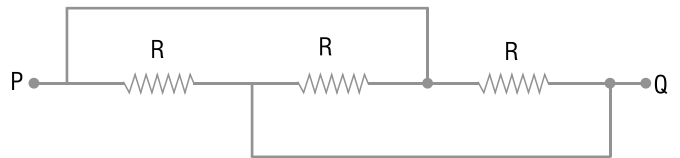
Fechando-se a chave C , qual deve ser o menor valor de x , para que o fusível não queime?

10 Na figura, R representa um reostato de 200Ω e L uma lâmpada de 80 V – 40 W. Entre os pontos 3 e 4 do circuito aplica-se uma D.D.P. de 120 V:

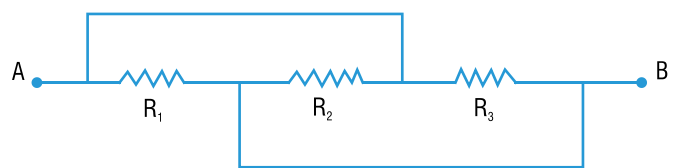


- Qual a resistência do filamento da lâmpada?
- Qual a posição do cursor do reostato para que a lâmpada acenda normalmente (conforme especificação)?
- O que acontece quando deslocamos o cursor do reostato para a esquerda?

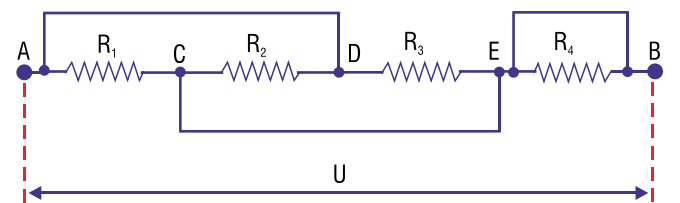
11 Determine a resistência equivalente entre P e Q :



12 Determine a intensidade da corrente que atravessa o resistor R_2 da figura, quando a tensão entre os pontos A e B for igual a V e as resistências R_1 , R_2 e R_3 forem iguais a R :

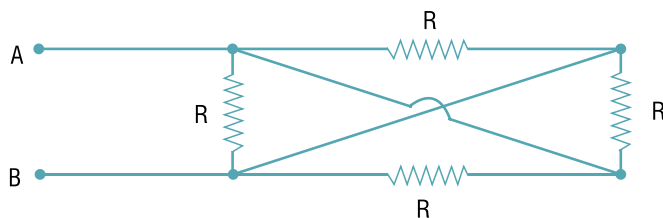


13 Entre os terminais A e B do circuito esquematizado a seguir há uma diferença de potencial constante e igual a U . Assinale a alternativa correta:

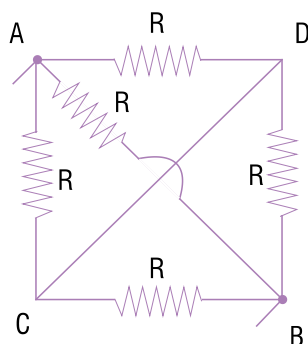


- Uma parte da corrente total passa por R_4 .
- Não passa corrente em R_1 e em R_2 , porque não há diferença de potencial entre A e D.
- Não passa corrente em R_2 e em R_3 , porque não há diferença de potencial entre C e E.
- Entre A e C, C e D, e D e E a diferença de potencial é diferente de zero.
- R_1 , R_2 e R_3 estão associados em série.

14 Determine a resistência equivalente entre os pontos A e B:

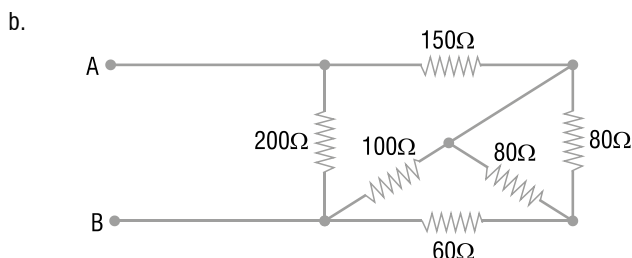
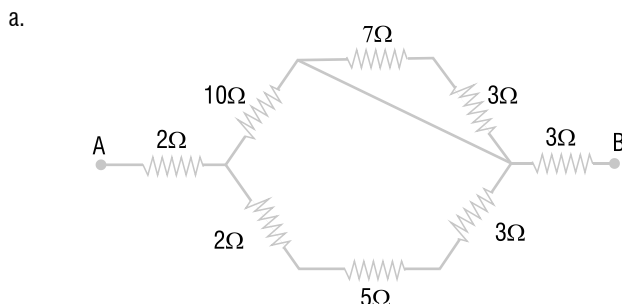


15 Determine, no circuito esquematizado, o valor da resistência equivalente entre os terminais A e B:



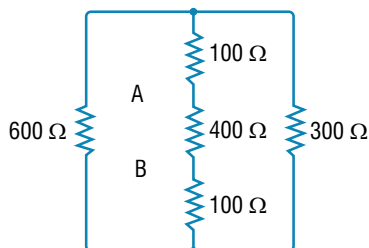
Obs.: Todos os resistores possuem resistências iguais a R .

16 Nos circuitos esquematizados a seguir, calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B:

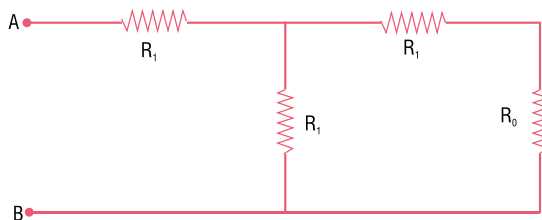


EXERCÍCIOS NÍVEL 2

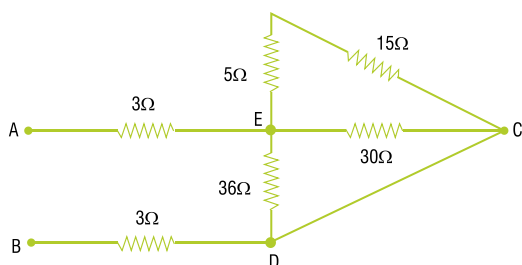
01 Determine a resistência equivalente entre A e B, no circuito a seguir:



02 No circuito apresentado a seguir, um dos resistores tem resistência R_0 . Determine R_1 , em função de R_0 , para que a resistência vista pelos terminais A e B seja igual a R_0 :

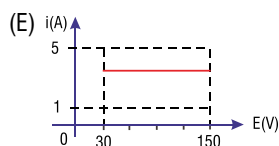
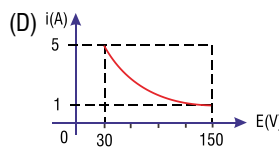
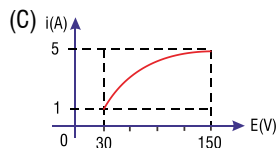
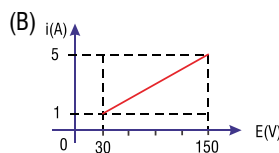
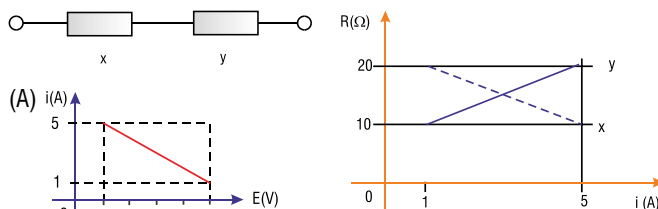


03 Na associação esquematizada a seguir, a D.D.P. entre os pontos A e B é igual a 30 V:

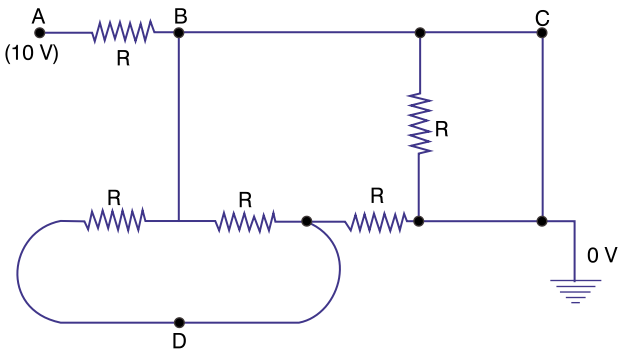


Determine a intensidade de corrente no fio CD, de resistência desprezível.

04 Dois resistores (X e Y) não ôhmicos estão associados em série. No gráfico, mostra-se como a resistência elétrica de cada resistor varia em função da corrente elétrica (i) que passa por ele. Em qual dos seguintes gráficos melhor se representa a corrente que atravessa a associação dos dois resistores em função da diferença de potencial (E) entre seus terminais?



05 No esquema a seguir, $R = 10 \Omega$ e os fios de ligação têm resistência desprezível. O potencial da Terra é considerado nulo e o potencial no ponto A é de 10 V:

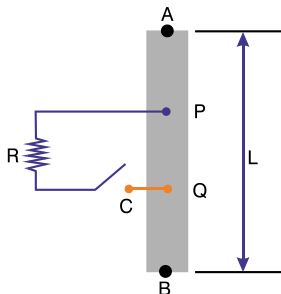


Determine:

- a resistência equivalente ao sistema esquematizado;
- a intensidade de corrente em D;
- o potencial em B;
- a resistência equivalente ao sistema, se o circuito for aberto no ponto C;
- a potência dissipada no sistema, com o circuito aberto em C.

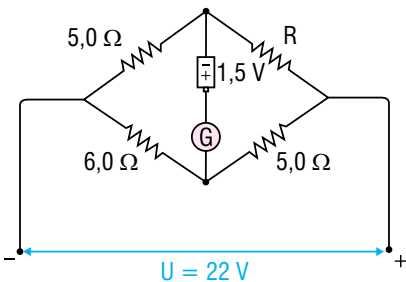
06

Na figura, AB representa um resistor filiforme, de resistência r e comprimento L . As distâncias AP e QB são $2L/5$ e $L/5$, respectivamente. A resistência R vale $0,40 r$. Quando a chave C está aberta, a corrente constante $i_0 = 6,00 \text{ A}$ passa por r . Quando a chave C for fechada, a corrente que entrará em A será:

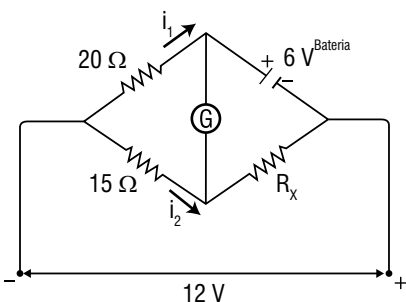


- 7,5 A.
- 12,0 A.
- 4,5 A.
- 9,0 A.
- indeterminada, pois o valor de r não foi fornecido.

07 No circuito esquematizado a seguir, determine a resistência elétrica R , para que o galvanômetro G , ligado a uma pilha de 1,5 V, indique zero.



08 No circuito indicado, não há passagem de corrente pelo galvanômetro. Determine as intensidades de corrente i_1 e i_2 .

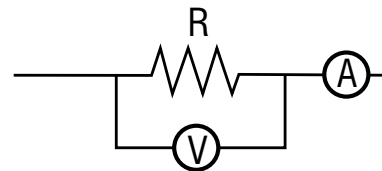


09 (UFJF-MG) Um disjuntor é um interruptor elétrico de proteção que desarma quando a corrente em um circuito elétrico ultrapassa um certo valor. A rede elétrica de 110 V de uma residência é protegida por um disjuntor de 40 ampêres, com tolerância de $\pm 5\%$. Se a residência dispõe de um chuveiro elétrico de 3.960 watts, um ferro de passar roupas de 880 watts e algumas lâmpadas de 40 watts:

- Determine o maior valor da corrente que passa pelo disjuntor, abaixo do qual ele não desarma, com certeza (o limite inferior da faixa de tolerância). Determine também o menor valor da corrente, acima do qual o disjuntor desarma, com certeza (o limite superior da faixa de tolerância).
- O chuveiro e o ferro de passar roupas podem ser ligados juntos sem que o disjuntor desarme? Justifique por meio de cálculos.
- Quando o chuveiro está ligado, quantas lâmpadas podem ser ligadas sem que o disjuntor desarme com certeza? Justifique por meio de cálculos.

10 (Vunesp-SP) Um estudante utiliza-se das medidas de um voltímetro V e de um amperímetro A para calcular a resistência elétrica de um resistor e a potência dissipada nele. As medidas de corrente e voltagem foram realizadas utilizando o circuito da figura a seguir.

O amperímetro indicou 3 mA e o voltímetro, 10 V. Cuidadoso, ele lembrou-se de que o voltímetro não é ideal e que é preciso considerar o valor da resistência interna do medidor para se calcular o valor da resistência R .



Se a especificação para a resistência interna do aparelho é $10 \text{ k}\Omega$, calcule:

- o valor da resistência R obtida pelo estudante;
- a potência dissipada no resistor.

11 (ITA 07/08) Um resistor R_x é mergulhado em um reservatório de óleo isolante. A fim de estudar a variação da temperatura do reservatório, o circuito de uma ponte de Wheatstone foi montado, conforme mostra a figura 1. Sabe-se que R_x é um resistor de fio metálico de 10 m de comprimento, área da seção transversal de $0,1 \text{ mm}^2$, e resistividade elétrica ρ_0 de $2,0 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, a 20°C . O comportamento da resistividade ρ versus temperatura t é mostrado na figura 2. Sabendo-se que o resistor R_x foi variado entre os valores de 10Ω e 12Ω para que o circuito permanecesse em equilíbrio, determine a variação da temperatura nesse reservatório.

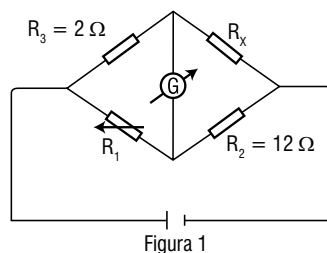


Figura 1

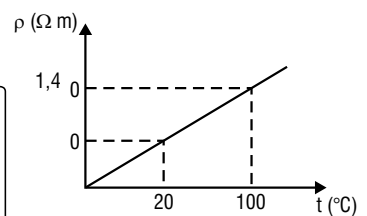
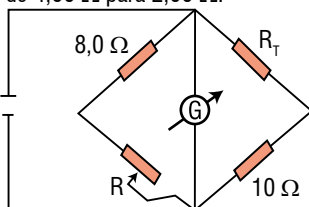


Figura 2

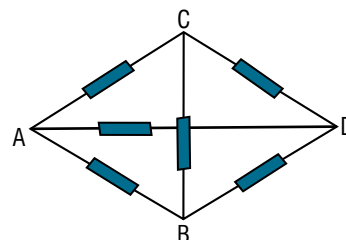
12 (ITA) O circuito da figura a seguir, conhecido como ponte de Wheatstone, está sendo utilizado para determinar a temperatura do óleo de um reservatório, no qual está inserido um resistor de fio de tungstênio R_T . O resistor variável R é ajustado automaticamente de modo a manter a ponte sempre em equilíbrio, passando de $4,00 \Omega$ para $2,00 \Omega$.

Sabendo que a resistência varia linearmente com a temperatura e que o coeficiente linear de temperatura para o tungstênio vale $\alpha = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, a variação da temperatura do óleo deve ser de:



- (A) $-125 \text{ } ^\circ\text{C}$.
- (B) $-35,7 \text{ } ^\circ\text{C}$.
- (C) $25,0 \text{ } ^\circ\text{C}$.
- (D) $41,7 \text{ } ^\circ\text{C}$.
- (E) $250 \text{ } ^\circ\text{C}$.

13 (ITA) Considere um arranjo em forma de tetraedro construído com 6 resistências de 100Ω , como mostrado na figura. Pode-se afirmar que as resistências equivalentes R_{AB} e R_{CD} entre os vértices A, B e C, D, respectivamente, são:

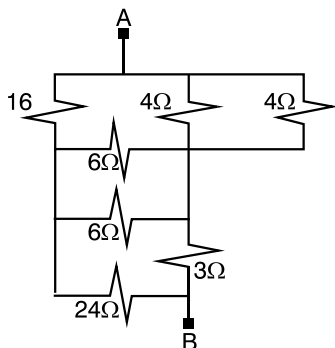


- (A) $R_{AB} = R_{CD} = 33,3 \Omega$.
- (B) $R_{AB} = R_{CD} = 50 \Omega$.
- (C) $R_{AB} = R_{CD} = 66,7 \Omega$.
- (D) $R_{AB} = R_{CD} = 83,3 \Omega$.
- (E) $R_{AB} = 66,7 \Omega$ e $R_{CD} = 83,3 \Omega$.

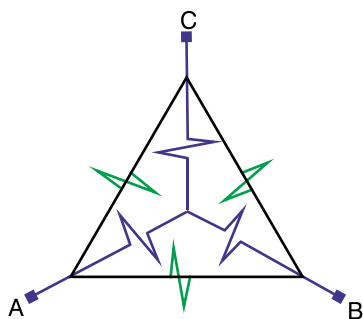
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Calcule a resistência equivalente entre os terminais A e B.

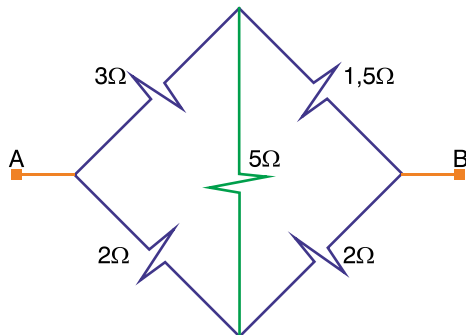
a.



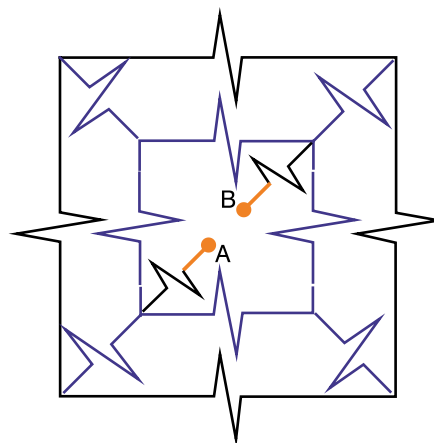
b. Todos os resistores têm 2Ω .



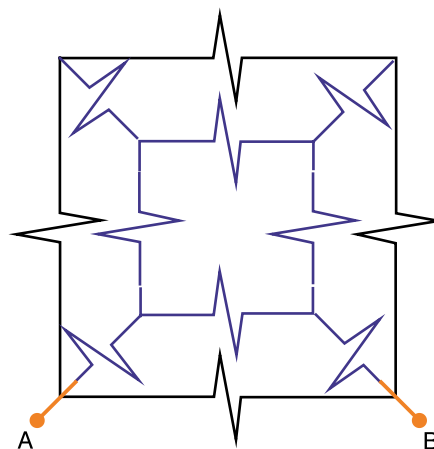
c.



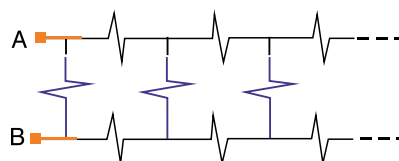
d. Todas as resistências iguais a R .



e. Todas as resistências iguais a R .

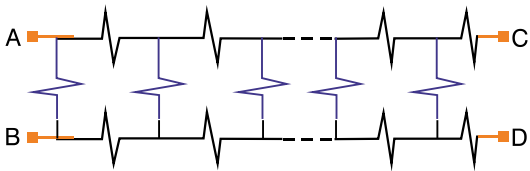


f. Todas as resistências iguais a R .

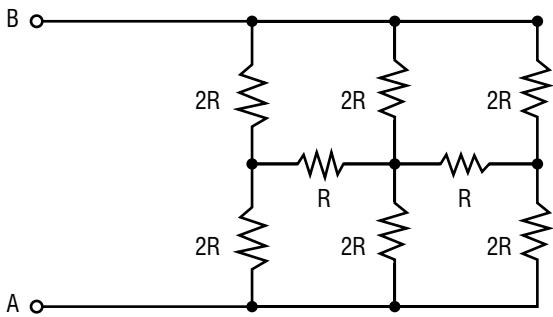


02 Determine a resistência entre dois vértices opostos de um cubo em que todas as arestas são formadas por resistores de mesma resistência R .

03 Determine a resistência do resistor que devemos ligar entre C e D para que a resistência equivalente entre A e B não dependa do nº de células. (todas as resistências são iguais a R).



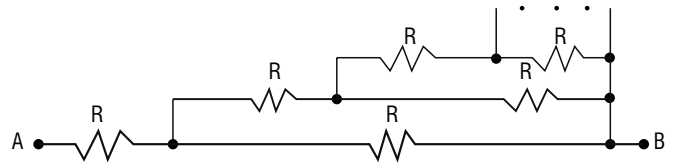
04 (IME 08/09) A resistência equivalente entre os terminais A e B da figura abaixo é:



- (A) $1/3 R$.
- (B) $1/2 R$.
- (C) $2/3 R$.

- (D) $4/3 R$.
- (E) $2 R$.

05 (IME 09/10) Sabendo que todos os resistores da malha infinita da figura têm resistência R , a resistência equivalente entre A e B é:



- (A) $R(1 + \sqrt{2})/2$
- (B) $R(1 + \sqrt{3})/2$
- (C) $3R/2$
- (D) $R(1 + \sqrt{5})/2$
- (E) $R(1 + \sqrt{6})/2$

06 Considere um aquecedor elétrico que possui três resistências internas: R_1 , R_2 e R_3 . Unindo-se em série duas a duas estas resistências, observa-se que a água em um recipiente ferve, respectivamente, em t_A , t_B e t_C minutos. Determine em quanto tempo ferverá a água nesse mesmo recipiente, se as resistências forem unidas em:

- a. série;
- b. paralelo.

RASCUNHO