PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO

DOM BOSCO
by Pearson

3

MATERIAL DO PROFESSOR

• Matemática

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

DOM BOSCO
by Pearson

PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO 3

MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

DOM BOSCO - SISTEMA DE ENSINO
PRÉ-VESTIBULAR 3
Matemática e suas tecnologias.

Vice-presidência de Educação Juliano Melo Costa
Gerência editorial nacional Alexandre Mattioli
Gerência de produto Silvana Afonso
Autoria Rafael Schaffer e Edilson Sousa Santos
Coordenação editorial Luiz Molina Luz
Edição de conteúdo Paulo Roberto de Jesus Silva
Leitura crítica Fernando Manenti
Preparação e revisão Igor Debiasi e Sérgio Nascimento
Gerência de Design Cleber Figueira Carvalho
Coordenação de Design Diogo Mecabo
Edição de arte Alexandre Silva
Coordenação de pesquisa e licenciamento Maiti Salla
Pesquisa e licenciamento Cristiane Gameiro, Heraldo Colon, Andrea Bolanho, Maricy Queiroz, Sandra Sebastião, Shirlei Sebastião
Ilustrações Alex Cói, Carla Viana, Cláudia Oliveira, Madine Oliveira, Renato Calderaro
Projeto Gráfico Apis design integrado
Diagramação Editorial 5
Capa Apis design integrado
Imagem de capa mvp64/istock
Produtor multimídia Cristian Neil Zaramella
PCP George Baldim, Paulo Campos

Av. Santa Marina, 1193 - Água Branca
São Paulo, SP – CEP 05036-001
Tel. (11) 3521-3500

www.pearson.com.br

APRESENTAÇÃO

Um bom material didático voltado ao vestibular deve ser maior que um grupo de conteúdos a ser memorizado pelos alunos. A sociedade atual exige que nossos jovens, além de dominar conteúdos aprendidos ao longo da Educação Básica, conheçam a diversidade de contextos sociais, tecnológicos, ambientais e políticos. Desenvolver as habilidades a fim de obterem autonomia e entenderem criticamente a realidade e os acontecimentos que os cercam são critérios básicos para se ter sucesso no Ensino Superior.

O Enem e os principais vestibulares do país esperam que o aluno, ao final do Ensino Médio, seja capaz de dominar linguagens e seus códigos; construir argumentações consistentes; selecionar, organizar e interpretar dados para enfrentar situações-problema em diferentes áreas do conhecimento; e compreender fenômenos naturais, processos histórico-geográficos e de produção tecnológica.

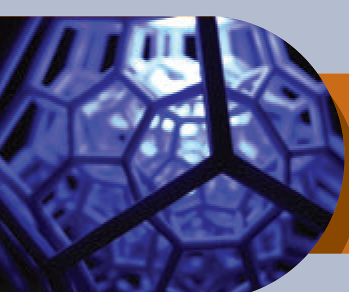
O Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Dom Bosco sempre se destacou no mercado editorial brasileiro como um material didático completo dentro de seu segmento educacional. A nova edição traz novidades, a fim de atender às sugestões apresentadas pelas escolas parceiras que participaram do Construindo Juntos – que é o programa realizado pela área de Educação da Pearson Brasil, para promover a troca de experiências, o compartilhamento de conhecimento e a participação dos parceiros no desenvolvimento dos materiais didáticos de suas marcas.

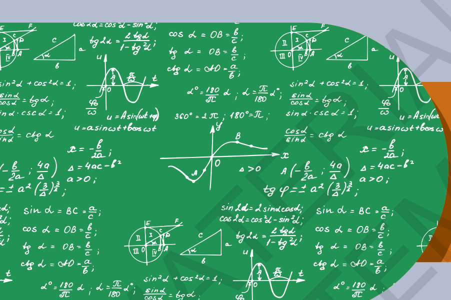
Assim, o Pré-Vestibular Extensivo Dom Bosco by Pearson foi elaborado por uma equipe de excelência, respaldada na qualidade acadêmica dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as quatro áreas de conhecimento com projeto editorial exclusivo e adequado às recentes mudanças educacionais do país.

O novo material envolve temáticas diversas, por meio do diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes curriculares de uma ou mais áreas do conhecimento, com propostas curriculares que contemplem as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como eixos integradores entre os conhecimentos de distintas naturezas; o trabalho como princípio educativo; a pesquisa como princípio pedagógico; os direitos humanos como princípio norteador; e a sustentabilidade socioambiental como meta universal.

A coleção contempla todos os conteúdos exigidos no Enem e nos vestibulares de todo o país, organizados e estruturados em módulos, com desenvolvimento teórico associado a exemplos e exercícios resolvidos que facilitam a aprendizagem. Soma-se a isso, uma seleção refinada de questões selecionadas, quadro de respostas e roteiro de aula integrado a cada módulo.

SUMÁRIO





MATEMÁTICA 1

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

33 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

- Noções de sequência
- Sequências numéricas
- Progressão aritmética
- Fórmula geral do termo de uma PA
- Classificação de PA

HABILIDADES

- Reconhecer uma sequência.
- Identificar se os termos de uma sequência numérica representam uma progressão aritmética.
- Calcular a razão de uma PA.
- Classificar progressões aritméticas.
- Identificar termos que não pertencem a uma PA.


WILLIAM BOOTH/SHUTTERSTOCK

Em 1202, Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, descreveu o crescimento de uma população de coelhos por meio de uma sequência numérica.

Introdução

As sequências estão presentes em nosso dia a dia, ainda que muitas vezes não as percebamos. Ao realizarmos uma contagem regressiva ou lidarmos com sequências numéricas quando visualizamos a quilometragem em uma estrada ou observamos nossa classificação em um *game*, estamos fazendo uso de sequências. Faz parte dos estudos dessa área da Matemática prever os próximos termos dessas sequências ou identificar se elas são crescentes ou decrescentes.

NOÇÕES DE SEQUÊNCIA

O conjunto de elementos que segue uma ordenação é chamado **sequência**. Em nosso cotidiano, conseguimos observar diversos exemplos:

- Dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado.
- Anos bissextos a partir de 2000: 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, ...

Cada elemento de uma sequência é um **termo**, e cada termo pode ser representado com base em sua posição.

No exemplo da sequência dos **dias da semana**, o segundo termo é "segunda-feira". Assim, podemos representá-lo por a_2.

Na sequência dos **anos bissextos** a partir do ano 200, o elemento "2016" é o quinto termo. Dessa forma, é possível representá-lo por b_5.

Uma sequência com **n** termos pode ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$$

É possível ainda observarmos que uma sequência pode ser finita ou infinita. Geralmente utilizamos reticências (...) ao término de sua representação para indicar que é uma sequência infinita.

Nos exemplos apresentados, os **dias da semana** formam uma sequência finita; os **anos bissextos**, por sua vez, uma sequência infinita.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência é chamada **sequência numérica** quando pode ser representada por uma lei de formação, ou seja, uma expressão matemática que nos possibilita determinar qualquer um de seus termos.

Vamos analisar este exemplo:

$$a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que **n** representa a posição de determinado termo a_n da sequência. Ou seja, se desejamos determinar o primeiro termo, substituímos **n** por 1, e assim sucessivamente:

- 1º termo: $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- 2º termo: $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- 3º termo: $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$
- 4º termo: $a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$
- 5º termo: $a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

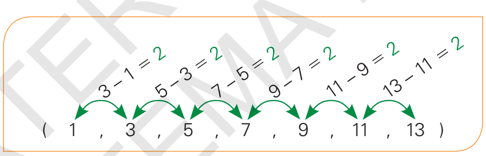
No exemplo, essa lei de formação determina a sequência (1, 3, 5, 7, 9, ...), que nada mais é do que a sequência dos números ímpares.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética (PA) é um tipo especial de sequência numérica que atende à seguinte condição:

> Qualquer termo de uma PA é igual à soma do termo imediatamente anterior com um valor real r, chamado **razão**.

Observe a sequência dos números ímpares obtida no exemplo anterior:



Repare que cada termo é igual ao anterior acrescido de 2 unidades. Por essa razão, dizemos que tal sequência numérica é uma PA de razão r = 2:

- 1º termo: $a_1 = 1$
- 2º termo: $a_2 = a_1 + 2 = 3$
- 3º termo: $a_3 = a_2 + 2 = 5$
- 4º termo: $a_4 = a_3 + 2 = 7$
- 5º termo: $a_5 = a_4 + 2 = 9$
- e assim sucessivamente.

FÓRMULA GERAL DO TERMO DE UMA PA

Podemos escrever os termos de uma PA a partir do primeiro termo da sequência e de sua razão **r**.

Tomando a sequência do exemplo anterior, é possível escrevê-la da seguinte forma:

- 1º termo: $a_1 = 1$ e $r = 2$
- 2º termo: $a_2 = a_1 + r = 1 + 2 = 3$
- 3º termo: $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2 \cdot r = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- 4º termo: $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3 \cdot r = 1 + 3 \cdot 2 = 7$
- 5º termo: $a_5 = a_4 + r = a_1 + 4 \cdot r = 1 + 4 \cdot 2 = 9$
- e assim sucessivamente.

Dessa forma, podemos definir a fórmula geral de uma PA da seguinte maneira:

> $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$,
> sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$
> Em que **n** é a posição do termo a_n e r é a razão da PA.

CLASSIFICAÇÃO DE PA

Observe as seguintes progressões aritméticas:

- Sequência 1: (0, 4, 8, 12, 16, ...)
- Sequência 2: (200, 170, 140, 110, ...)
- Sequência 3: (2, 2, 2, 2, ...)

Podemos notar que essas sequências apresentam padrões diferentes. Na sequência 1, os termos aumentam; na sequência 2, eles diminuem; na sequência 3, os termos são iguais.

Quando observamos a razão de cada uma dessas sequências, notamos que:

- Sequência 1: $r = a_2 - a_1 = 4 - 0 = 4$
- Sequência 2: $r = a_2 - a_1 = 170 - 200 = -30$
- Sequência 3: $r = a_2 - a_1 = 2 - 2 = 0$

Dessa forma, podemos classificar uma PA com base em sua razão **r**:

- **PA crescente**: quando a razão é r > 0;
- **PA decrescente**: quando a razão é r < 0;
- **PA constante**: quando a razão é r = 0.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Enem C4-H15

Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

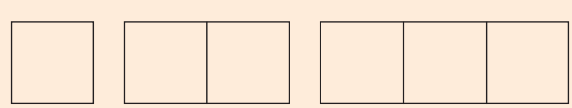


Figura I Figura II Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a) C = 4Q
b) C = 3Q + 1
c) C = 4Q – 1
d) C = Q + 3
e) C = 4Q – 2

Resolução

Observando a imagem, podemos notar que há uma relação entre a quantidade de quadrados (Q) e a quantidade de canudos (C) utilizados para representá-los.

É possível representarmos cada termo dessa sequência da seguinte forma:

1º termo: 4 canudos

2º termo: 7 canudos

3º termo: 10 canudos (e assim sucessivamente).

Repare que cada termo é igual ao anterior acrescido de 3 unidades. Assim, podemos concluir que essa sequência é uma progressão aritmética de razão $r = 3$. Seus termos podem ser representados por:

a_1: 4

a_2: $a_1 + r = 4 + 3 = 7$

a_3: $a_2 + r = 7 + 3 = 10$

...

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$

Observe ainda que n (posição do termo da PA) representa a quantidade de quadrados em cada figura e que o valor de cada termo representa a quantidade de canudos. Dessa forma, podemos realizar a seguinte associação:

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$

$C = 4 + (Q - 1) \cdot 3$

Por fim, podemos escrever a expressão da seguinte forma:

$C = 4 + (Q - 1) \cdot 3$

$C = 4 + 3Q - 3$

$C = 3Q + 1$

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Identificar a relação de dependência entre grandezas.

ROTEIRO DE AULA

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Sequências

- Dias da semana: domingo, segunda-feira, ..., sábado
- Cores do arco-íris: vermelho, laranja, ..., violeta
- Temperaturas na semana: 18 °C, 24 °C, ..., 16 °C

Sequências numéricas

- Números ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, ...
- Números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- Múltiplos de 10: 0, 10, 20, 30, 40, ...

Progressão aritmética

Regra geral

$a_n = a_{n-1} + r$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$

Termo geral

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$

Classificação

Crescente: $r > 0$

Decrescente: $r < 0$

Constante: $r = 0$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unimontes – Considere a progressão aritmética em que o número de termos é 12, constituída quando se insere 10 termos entre o primeiro termo $a_1 = 3$ e o último termo $a_{12} = 25$. Nessas condições, é CORRETO afirmar que a razão dessa progressão vale:

a) r = 1
b) r = 2
c) r = 3
d) r = 4

Do enunciado temos: $n = 12$, $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$. Para calcularmos a razão **r** dessa PA, utilizaremos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Assim,

$25 = 3 + (12 - 1) \cdot r \rightarrow 22 = 11r$

$r = \frac{22}{11} = 2$

2. Unifor (adaptado) – Um ciclista pedala 310 km em cincos dias. Cada dia ele pedala 10 km a mais do que andou no dia anterior. Assim, qual a distância pedalada pelo ciclista no primeiro dia?

Seja **n** a distância, em quilômetros, pedalada pelo ciclista no primeiro dia. Do enunciado, temos que o ciclista pedala 10 km a mais do que pedalou no dia anterior. Assim, podemos concluir que:

$n + (n + 10) + (n + 20) + (n + 30) + (n + 40) = 310$

$5n = 210$

$n = 42$

Logo, a distância pedalada pelo ciclista no primeiro dia foi de 42 km.

3. Fatec (adaptado) C5-H19

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicadas eptendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho. Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como Brood II (Ninhada II, em tradução livre), foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão. Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

Disponível em: <http://tinyurl.com/zh8daj6>
Acesso em: 30 ago. 2016. (Adaptado)

Com relação à Ninhada II, e adotando o ano de 1996 como o 1º termo (a_1) de uma Progressão Aritmética, a expressão algébrica que melhor representa o termo geral (a_n) da sequência de anos em que essas cigarras sairão à superfície, com n*, é dada por

a) $a_n = 17n + 1979$
b) $a_n = 17n + 1998$
c) $a_n = 17n + 2013$
d) $a_n = 1996n + 17$
e) $a_n = 1979n + 17$

A razão da progressão aritmética pode ser identificada pelo seguinte trecho do texto: "Elas vivem a pelo menos 20 cm sob o solo há 17 anos". Assim, consideramos r = 17.

No enunciado da questão foi informado o primeiro termo: $a_1 = 1996$.

Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1996 + (n - 1) \cdot 17 = 1996 + 17n - 17$

$a_n = 1979 + 17n$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

4. Unesp – A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $3n^2 - 2n$, onde n é um número natural. Para essa progressão, o primeiro termo e a razão são, respectivamente,

a) 7 e 1.
b) 1 e 6.
c) 6 e 1.
d) 1 e 7.
e) 6 e 7.

Podemos calcular a soma do primeiro e do segundo termo da progressão.

Para o primeiro termo (a_1):

$S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

Então, o primeiro termo é $a_1 = 1$.

Para o segundo termo (a_2):

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2$

$1 + a_2 = 12 - 4 = 8$

$a_2 = 8 - 1 = 7$

A razão (r) é a diferença entre dois termos consecutivos.

Portanto, $r = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6$.

Então, o primeiro termo é 1, e a razão é 6.

5. Unifor – A taxa de um determinado condomínio da cidade de Fortaleza é paga de acordo com o andar em que se mora. Quem mora no 1º andar paga R$ 105,00; no 2º andar paga R$ 120,00. Sabendo que os valores a serem pagos estão em progressão aritmética, quanto pagará, em reais, quem mora no décimo andar desse condomínio?

a) 180.
b) 185.
c) 225.
d) 235.
e) 240.

Do enunciado, sabemos que a quantia da taxa paga está em PA, sendo $a_1 = 105{,}00$ e $a_2 = 120{,}00$.

Com isso, temos que a razão r é $r = 120 - 105 = 15$.

Para encontrarmos o valor pago para quem mora no 10º andar (a_{10}), usamos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{10} = 105 + (10 - 1) \cdot 15 \rightarrow a_{10} = 105 + 9 \cdot 15 = 105 + 135 \rightarrow a_{10} = 240{,}00$

Logo, quem mora no 10º andar paga uma taxa de 240,00.

6. Fatec (adaptado) – Uma pessoa financiou a compra de uma casa pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), em que as prestações são decrescentes. A primeira prestação é de R$ 600,00; a segunda é de R$ 597,00; a terceira é de R$ 594,00; a quarta é de R$ 591,00; e as demais obedecerão ao mesmo critério de cálculo. Nessas condições, calcule o valor da 100ª parcela.

Com base nos termos mencionados, obtemos a razão de uma progressão aritmética decrescente:

$r = 597 - 600 = 594 - 597 = 591 - 594 = -3$

Então, o termo 100 será:

$a_{100} = 600 + (100 - 1) \cdot (-3) = 600 - 297 = 303$

Portanto, o valor da 100ª prestação será de R$ 303,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

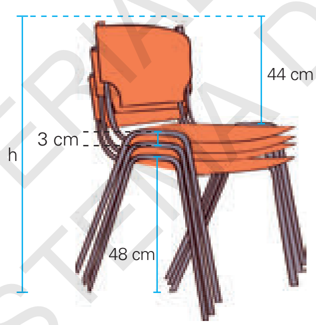
7. UERJ – Considere a sequência $(a_n) = (2, 3, 1, -2, ...)$, $n \in \mathbb{N}^*$, com 70 termos, cuja fórmula de recorrência é:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

O último termo dessa sequência é:

a) 1
b) 2
c) –1
d) –2

8. Unesp (adaptado) – A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo h a altura da pilha em relação ao chão.



(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de n cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m, se n for igual a:

a) 14.
b) 17.
c) 13.
d) 15.
e) 18.

9. EEAR – As medidas, em cm, dos lados de um pentágono estão em Progressão Aritmética (PA). Se o perímetro desse polígono é 125 cm, o terceiro elemento da PA é

a) 25
b) 30
c) 35
d) 40

10. IFBA (adaptado)

A Meia Maratona Shopping da Bahia Farol a Farol foi criada pela Personal Club e mais uma vez contará com a parceria do Shopping da Bahia. Tradicional no mês de outubro, a maior e mais esperada corrida de rua da Bahia, que já se encontra em sua sexta edição, e será realizada nos percursos de 5 km, 10 km e 21 km, com largada no Farol de Itapuã e chegada no Farol da Barra, dois dos principais cartões postais da cidade de Salvador.

Disponível em: <http://www.meiamaratonafarolafarol.com.br/>. Acesso em: ago. 2016.

Um atleta, planejando percorrer o percurso de 21 km, fez um plano de treinamento que consistia em correr 1 000 m no primeiro dia e, a cada dia subsequente, percorreria a distância do dia anterior acrescida de 400 m. Sendo assim, qual será o dia em que esse atleta vai atingir a distância diária de 21 km?

11. Uece – Seja (a_n) uma progressão aritmética crescente, de números naturais, cujo primeiro termo é igual a 4 e a razão é igual a r. Se existe um termo desta progressão igual a 25, então a soma dos possíveis valores de r é

a) 24.
b) 28
c) 32.
d) 36.

12. UERJ – Admita a seguinte sequência numérica para o número natural n:

$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ e } a_n = a_{n-1} + 3$$

Sendo $2 \leq n \leq 10$, os dez elementos dessa sequência, em que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_{10} = \frac{82}{3}$, são:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{19}{3}, \frac{28}{3}, \frac{37}{3}, a_6, a_7, a_8, a_9, \frac{82}{3}\right)$$

A média aritmética dos quatro últimos elementos da sequência é igual a:

a) $\frac{238}{12}$
b) $\frac{137}{6}$
c) $\frac{219}{4}$
d) $\frac{657}{9}$

13. Unicamp – Seja x um número real, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tal que a sequência (tg x, sec x, 2) é uma progressão aritmética (PA). Então a razão dessa PA é igual a:

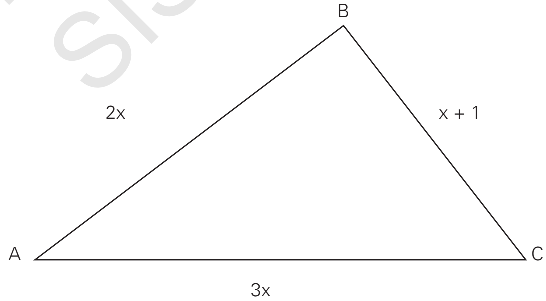
a) 1.

b) $\frac{5}{4}$.

c) $\frac{4}{3}$.

d) $\frac{1}{3}$.

14. UPE (adaptado) – As medidas dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.



Qual é a medida do perímetro desse triângulo?

15. Uece – As medidas, em metro, dos comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética cuja razão é igual a 1. Se a medida de um dos ângulos internos deste triângulo é 120°, então, seu perímetro é:

a) 5,5

b) 6,5

c) 7,5

d) 8,5

16. UTFPR – A quantidade de números inteiros entre 50 e 100 que sejam múltiplos dos números 3 e 4 ao mesmo tempo é:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 13.
e) 17.

17. Unesp – A sequência dos números n_1, n_2, n_3, ..., n_i,...

está definida por $\begin{cases} n_1 = 3 \\ n_{i+1} = \dfrac{n_i - 1}{n_i + 2} \end{cases}$,

para calcular cada inteiro positivo i.

Determine o valor de n_{2013}.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C1-H2

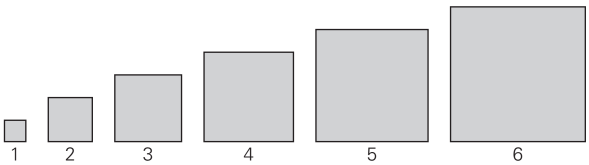
O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

a) 32
b) 34
c) 33
d) 35
e) 31

19. Enem C1-H2

Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, da esquerda para a direita, como mostra a figura.



O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado tem lado medindo 3 cm, e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência, foi representada por An.

Para $n \geq 2$, o valor da diferença $A_n - A_{n-1}$, em centímetro quadrado, é igual a

a) $2n - 1$
b) $2n + 1$
c) $2n + 1$
d) $(n - 1)^2$
e) $n^2 - 1$

20. Enem C1-H2

Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (A, B e C) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo A deveriam bater palmas a cada 2 s, os alunos do grupo B deveriam bater palmas a cada 3 s e os alunos do grupo C deveriam bater palmas a cada 4 s.

O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 s. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 s.

Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente.

Qual é o termo geral da sequência anotada?

a) 12 n, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 5$.
b) 24 n, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 2$.
c) 12 (n – 1), com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 6$.
d) 12 (n – 1) + 1, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 5$.
e) 24 (n – 1) + 1, com n um número natural, tal que $1 \leq n \leq 3$.

34

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

- Progressão geométrica
- Fórmula geral do termo de uma PG
- Classificação de PG

HABILIDADES

- Identificar se os elementos de uma sequência numérica representam uma progressão geométrica.
- Calcular a razão de uma PG.
- Classificar progressões geométricas.
- Identificar termos que não pertencem a uma PG.

NATALIEIME/SHUTTERSTOCK

Algumas culturas de bactérias aumentam em quantidade em certo período de tempo. Dessa forma, microbiologistas utilizam regras matemáticas para estudar esses seres vivos.

Introdução

Sabemos que as bactérias se reproduzem basicamente por processo assexuado, por meio de um processo chamado divisão binária, no qual cada célula se divide e origina outra. Quando desejamos prever a quantidade de bactérias em certa cultura após determinado período de tempo, usamos **progressões geométricas**.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

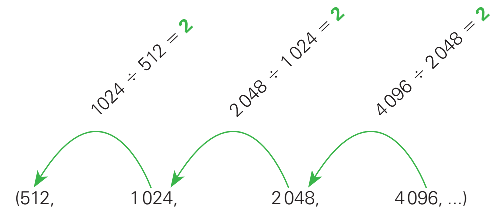
Uma progressão geométrica (PG) é um tipo de sequência numérica que atende à seguinte condição:

> Qualquer termo não nulo de uma PG é igual à multiplicação entre o termo imediatamente anterior e um valor real **q**, chamado **razão**.

Considere uma cultura de bactérias que, em condições ideais para reprodução, dobra de tamanho a cada hora. Observe a evolução dessa cultura de bactérias levando em conta que inicialmente contava com 512 bactérias:

- Início: 512
- 1ª hora: 1 024
- 2ª hora: 2 048
- 3ª hora: 4 096
- e assim sucessivamente

Note que cada termo dessa sequência é obtido multiplicando-se o termo anterior por 2. Observe a sequência formada:



Ou seja, chamamos **progressão geométrica** toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (com base no segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado **razão q da progressão**.

Repare que cada termo é igual ao anterior multiplicado por 2. Por conta disso, dizemos que essa sequência numérica é uma PG de razão q = 2.

- 1º termo: $a_1 = 512$
- 2º termo: $a_2 = a_1 \cdot 2 = 1\,024$
- 3º termo: $a_3 = a_2 \cdot 2 = 2\,048$
- 4º termo: $a_4 = a_3 \cdot 2 = 4\,096$
- e assim sucessivamente

FÓRMULA GERAL DO TERMO DE UMA PG

Os termos de uma PG podem ser escritos a partir do primeiro termo da sequência e de sua razão q.

Tomando a sequência do exemplo anterior, ela ainda pode ser escrita da seguinte forma:

- 1º termo: $a_1 = 512$ e $q = 2$
- 2º termo: $a_2 = a_1 \cdot q = 512 \cdot 2 = 1\,024$
- 3º termo: $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 = 512 \cdot 2^2 = 2\,048$
- 4º termo: $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 = 512 \cdot 2^3 = 4\,096$
- 5º termo: $a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4 = 512 \cdot 2^4 = 8\,192$
- e assim sucessivamente

Dessa forma, podemos definir a fórmula geral de uma PG como:

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

sendo $a_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}^*$

em que **n** é a posição do termo a_n e **q** é a razão da PG

CLASSIFICAÇÃO DE PG

Observe as progressões geométricas a seguir:

- Sequência 1: (2, 6, 18, 54, ...)
- Sequência 2: (200, 100, 50, 25, ...)
- Sequência 3: (10, 10, 10, 10, ...)
- Sequência 4: (4, –8, 16, –32, ...)

Podemos notar que essas sequências apresentam padrões diferentes. Na sequência 1, os termos aumentam; na sequência 2, eles diminuem; na sequência 3, os termos são iguais; na sequência 4, eles crescem (em valores absolutos), porém são alternados.

Quando observamos a razão de cada uma dessas sequências, notamos que:

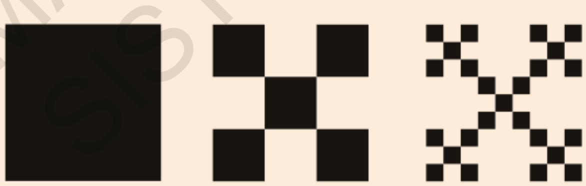
- Sequência 1: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$
- Sequência 2: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{100}{2} = \frac{1}{2}$
- Sequência 3: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{10} = 1$
- Sequência 4: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{(-8)} = -\frac{1}{2}$

Dessa forma, podemos classificar uma PG com base no primeiro termo a_1 e na razão q:

- **PG crescente**: quando a razão é $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$;
- **PG decrescente**: quando a razão é $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$;
- **PG constante**: quando a razão é $q = 1$;
- **PG alternante**: quando a razão é $q < 0$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

UFRGS – Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é:

a) $\frac{125}{729}$.

b) $\frac{125}{2187}$.

c) $\frac{625}{729}$.

d) $\frac{625}{2187}$.

e) $\frac{625}{6561}$.

Resolução

O quadrado da etapa 1 apresenta lado 1. Dessa forma, sua área é A = 1.

Como o quadrado da etapa 2 equivale ao quadrado da etapa 1 dividido em nove quadrados, sendo quatro deles retirados, podemos concluir que sua área é $\frac{5}{9}$.

Ao realizarmos o mesmo processo para o quadrado da etapa 3, concluímos que sua área equivale a $\frac{25}{81}$.

Ou seja, obtemos a seguinte sequência:

$1, \frac{5}{9}, \frac{25}{81}, \ldots$

Note que se trata de uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{5}{9}$.

Desejamos obter o 5º termo dessa sequência. Assim, podemos utilizar a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{(5-1)}$$

$$a_5 = \left(\frac{5}{9}\right)^4$$

$$a_5 = \frac{625}{6\,561}$$

ROTEIRO DE AULA

Progressão geométrica

Regra geral

$a_n = a_{n-1} \cdot q$, sendo $a_{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}^*$

Termo geral

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, sendo $a_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{R}^*$

Classificação

Crescente: $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$

Decrescente: $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$

Constante: $q = 1$

Alternante: $q < 0$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Cesgranrio – O primeiro termo de uma progressão geométrica é 4 e a razão é 5. Qual é o quarto termo dessa progressão geométrica?

a) 320
b) 500
c) 1 024
d) 1 280
e) 2 500

Sabemos do enunciado que $a_1 = 4$ e $q = 5$.

Assim, para encontrarmos o quarto termo da PG, ou seja, a_4, utilizamos a relação:

$a_n = a_1 \,.\, q^{(n-1)}$

Como n = 4, temos:

$a_4 = 4 \cdot 5^{(4-1)} \rightarrow a_4 = 4 \cdot 5^3 \rightarrow a_4 = 4 \cdot 125 = 500.$

2. UEG-GO (adaptado) – Dada a sequência (–7, 21, –63, ...), que forma uma progressão geométrica, determine o sexto termo dessa progressão.

Da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos que a razão da PG é:

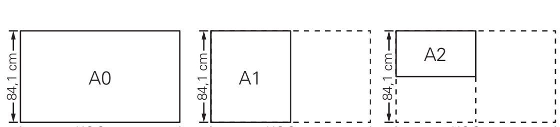
$21 = -7 \cdot q^{2-1} \rightarrow q = \frac{21}{-7} = -3$

Assim, para calcularmos o sexto termo, temos que n = 6.

Logo, $a_6 = -7 \cdot (-3)^{6-1} \rightarrow a_6 = 1\,701.$

3. Enem C2-H8

O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos Estados Unidos e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm × 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em: <http://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 4 abr. 2012 (Adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

a) 8
b) 16
c) 64
d) 128
e) 256

Do enunciado, notamos que existe uma razão de 2 para cada novo formato de folha, que é obtido com base no tamanho anterior.

Sendo o primeiro termo da progressão correspondente à folha A0, a folha A8 corresponderá ao 9º termo.

Assim, chamando de a_9 a quantidade de folhas de tamanho A8:

$a_9 = a_1 \cdot q^{n-1} = 129 - 1 = 256$

Portanto, são obtidas 256 folhas A8 com base em uma folha A0.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. Famema-SP – Considere a progressão aritmética (a_1, 4, a_3, a_4, a_5, 16, ...) de razão r e a progressão geométrica (b_1, b_2, b_3, b_4, 4, ...) de razão q. Sabendo que $\frac{r}{q} = 6$, o valor de $a_9 - b_3$ é:

a) 12.
b) 6.
c) 3.
d) 15.
e) 9.

Do enunciado, temos que, na PA, $a_2 = 4$ e $a_6 = 16$.

Da relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:

$a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot r \rightarrow 4 = r + a_1$ (I)

$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot r \rightarrow 16 = 5r + a_1$ (II)

Fazendo II – I, temos:

$12 = 4r \rightarrow r = \frac{12}{4} = 3$

Dessa forma, $a_9 = a_1 + (9 - 1) \cdot r \rightarrow$ da equação I, temos $a_1 = 4 - r$

Logo, $a_6 = (4 - r) + 8r = 4 + 7 \cdot 3 \rightarrow a_9 = 25$

Do enunciado, temos que na PG $a_5 = 4$ e que $\frac{r}{q} = 6 \rightarrow q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Assim, da relação $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} \rightarrow 4 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \rightarrow b_1 = \frac{4}{\left(\frac{1}{16}\right)} = 16 \cdot 4 = 64$

$b_3 = b_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow b_3 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{64}{4} \rightarrow b_3 = 16$

Logo, $a_9 - b_3 = 25 - 16 = 9.$

5. PUC-SP – Considere a progressão aritmética $(3, a_2, a_3, ...)$ crescente, de razão r, e a progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, 3, ...)$ decrescente, de razão q, de modo que $a_3 = b_3$ e $r = 3q$. O valor de b_2 é igual a

a) a_6
b) a_7
c) a_8
d) a_9

Do enunciado, temos:

- da PA crescente, que $a_1 = 3$;
- da PG decrescente, que $b_4 = 3$ e ainda que $a_3 = b_3$ e que $r = 3q$.

Assim, temos que $a_3 = 3 + (3 - 1) \cdot r$ e $b_3 = \frac{b_4}{q} \rightarrow b_3 = \frac{3}{q}$.

Como $a_3 = b_3 \rightarrow 3 + 2r = \frac{3}{q} \rightarrow 3 + 2 \cdot 3q = \frac{3}{q} \rightarrow 3q + 6q^2 - 3 = 0$.

Dividindo ambos os termos por 3, temos:

$2q^2 + q - 1 = 0 \rightarrow q = \frac{1}{2}$ ou $q = -1$

A PG é decrescente $0 < q < 1$. Logo, $q = \frac{1}{2}$.

Assim, para calcular b_2, calcularemos primeiro b_1. Assim:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow b_4 = b_1 \cdot q^{4-1} \rightarrow b_1 = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \rightarrow b_1 = 24$

Assim, $b_2 = b_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow b_2 = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow b_2 = 12$

Para identificarmos quando o termo da PA será 12, temos:

$r = 3q = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow r = \frac{3}{2}$

Assim, para $a_n = 12$, temos $12 = 3 + (n - 1) \cdot \frac{3}{2} \rightarrow (n - 1)\,3 = 9 \cdot 2 \rightarrow$

$\rightarrow n - 1 = \frac{18}{3} = 6$

Assim, $n = 6 + 1 = 7$.

Portanto, $12 = b_2 = a_7$

6. Unicamp (adaptado) – Seja (a,b,c) uma progressão geométrica de números reais com $a \neq 0$. Definindo $s = a + b + c$, qual é o menor valor possível para $\frac{s}{a}$?

Da PG, temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow b = a \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow c = a \cdot q^2$

Assim, $s = a + b + c \rightarrow s = a + a \cdot q + a \cdot q^2$.

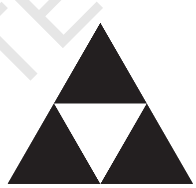
$\frac{s}{a} = \frac{a + a \cdot q + a \cdot q^2}{a} = 1 + q + q^2 = \left(q + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Portanto, o valor mínimo de $\frac{s}{a}$ é $\frac{3}{4}$, ocorrendo para $q = -\frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

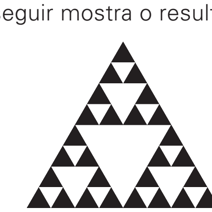
7. SLMANDIC-PR – O matemático polonês Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski, que se obtém a partir de um processo iterativo. Para construir um Triângulo de Sierpinski, pelo processo de remoção de triângulos, devem ser seguidas as instruções:

1. Constrói-se um triângulo equilátero.
2. Em seguida, determinam-se os pontos médios de cada um dos lados do triângulo.
3. Esses pontos médios são ligados para obter quatro triângulos equiláteros menores.
4. A figura a seguir é o resultado da ação descrita em 2 e 3.



(Observe que desses quatro triângulos apenas o triângulo central está invertido, em relação ao original; os outros três mantêm a mesma orientação do original).

5. Para a segunda iteração, o triângulo central deve ser retirado e repetem-se os mesmos procedimentos descritos em 2 e 3 para cada um dos três triângulos restantes.
6. Depois, para a terceira iteração, retiram-se os triângulos centrais, e repete-se o processo para os triângulos restantes.
7. A figura a seguir mostra o resultado dessa iteração.



8. Para as demais iterações, esses procedimentos devem ser repetidos sucessivamente.

Considere uma sequência de figuras em que a primeira é o triângulo equilátero inicial, a segunda a resultante da primeira iteração, a terceira a resultante da segunda iteração, a quarta o resultado da terceira e assim por diante.

Assim, a fórmula do termo geral a_n que permite calcular a quantidade de triângulos obtidos na n-ésima figura, descontando-se os triângulos retirados, é:

a) $a_n = 4^{n-1}$
b) $a_n = 2.3^n - 1$
c) $a_n = 13n + 1$
d) $a_n = 3^{n-1}$
e) $a_n = 3^n - 6$

8. Unicamp – Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a:

a) R$ 25.600,00
b) R$ 24.400,00
c) R$ 23.000,00
d) R$ 18.000,00

9. Udesc – Nos jogos Pan-americanos de 2015, o Brasil ficou com o terceiro lugar no quadro geral de medalhas, conforme apresentado na Tabela 1

Tabela 1 - Número de Medalhas Obtidas no PAN/2015

Lugar	País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1	EUA	103	81	81	265
2	Canadá	A	B	70	217
3	Brasil	41	40	C	141

Sabe-se que a diferença entre o número total de medalhas obtidas pelo Brasil e o número de medalhas de ouro dos Estados Unidos é igual ao número de medalhas de ouro obtidas pelo Canadá menos o número de medalhas de prata obtidas pelo Brasil. Então, nesta ordem, com relação aos números A, B e C, indicados na Tabela 1, é correto afirmar que:

a) formam uma progressão aritmética crescente.
b) formam uma progressão geométrica crescente.
c) formam uma progressão aritmética decrescente.
d) formam uma progressão geométrica decrescente.
e) não formam progressão aritmética nem progressão geométrica.

10. ITA – Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B,C,D,E são dois a dois distintos;
II. os números 1,B,C, e os números 1,C,E estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
III. os números B,C,D,E estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B,C,D,E.

11. UEG-GO – A sequência numérica C_n é definida como $C_n = A_n \cdot B_n$, com $n \in \mathbb{N}$, em que A_n e B_n são progressões aritméticas e geométricas respectivamente.

Sabendo-se que $A_5 = B_5 = 10$ e que as razões A_n e B_n são iguais a 3, o termo C_8 é igual a:

a) 100
b) 520
c) 1 350
d) 3 800
e) 5 130

12. PUC-SP – A sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma progressão aritmética de razão 3, e a sequência $(b_1, b_2, b_3, ...)$ é uma progressão geométrica crescente. Sabendo que $a_2 = b_3$, $a_{10} = b_5$ e $a_{42} = b_7$, o valor de $b_4 - a_4$ é:

a) 2.
b) 0.
c) 1.
d) –1.

13. Famema-SP (adaptado) – A sequência $(2, a_2, a_3, ...)$ é uma progressão aritmética e a sequência $(18, b_2, b_3, b_4, 2, ...)$ é uma progressão geométrica. Sabendo que $a_5 = b_7$, calcule o valor de n, com $n \geq 1$, tal que $a_n = 50$.

a) 33
b) 34
c) 32
d) 35
e) 36

14. FGV (adaptado) – Se o sétimo termo de uma progressão geométrica de termos positivos é 20, e o décimo terceiro termo é 11, então qual será o décimo termo dessa progressão?

15. Fuvest – Dadas as sequências $a_n = n^2 + 4n + 4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de n, considere as seguintes afirmações:

I. a_n é uma progressão geométrica;
II. b_n é uma progressão geométrica;
III. c_n é uma progressão aritmética;
IV. d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas

a) I, II e III.
b) I, II e IV.
c) I e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

16. UPF-RS – Seja a_n uma sequência de números reais cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{4} - n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

a) a_n é uma progressão aritmética de razão – 1.
b) a_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.
c) a_n é uma progressão geométrica de razão 4.
d) a_n não é uma progressão (nem geométrica, nem aritmética).
e) a_n é simultaneamente uma progressão aritmética e geométrica.

17. Unicamp – Considere a sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%.

Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%.

Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geqslant 1$?

a) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$

b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$

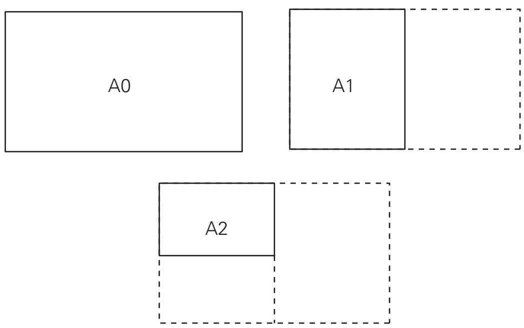
c) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$

d) $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$

e) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

19. Enem C5-H22

O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países. O formato-base é uma folha retangular de papel chamada de A0, cujas dimensões estão na razão 1: $\sqrt{2}$. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, definindo os demais formatos, conforme o número da dobradura. Por exemplo, A1 é a folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 é a folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente, conforme figura.



Um tamanho de papel bastante comum em escritórios brasileiros é o A4, cujas dimensões são 21,0 cm por 29,7 cm.

Quais são as dimensões, em centímetros, da folha A0?

a) 21,0 x 118,8
b) 84,0 x 29,7
c) 84,0 x 118,8
d) 168,0 x 237,6
e) 336,0 x 475,2

20. UEL-PR C1-H2

Leia o texto a seguir.

Segundo teorias demográficas, a população mundial cresceria em ritmo rápido, comparado a uma PG = (2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., a_t, ...), e a produção mundial de alimentos cresceria em um ritmo lento, comparado a uma PA = (1, 2, 3, 4, ..., b_t, ...).

Disponível em: <http://educação.uol.com.br/disciplinas/geografia/teorias-demograficas-malthusianos-neomalthusianos-e-reformista.htm>. Acesso em: 15 jun. 2015.

Suponha que PA seja a sequência que representa a quantidade de alimentos, em toneladas, produzidos no tempo t > 0, e que PG seja a sequência que representa o número de habitantes de uma determinada região, nesse mesmo tempo t. A partir dessas informações, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão entre a quantidade de alimentos, em kg, e o número de habitantes, para t = 10 anos.

a) $\frac{5^3}{2^6}$
b) $\frac{5^4}{2^6}$
c) $\frac{5^5}{2^6}$
d) $\frac{5^3}{2^5}$
e) $\frac{5^4}{2^5}$

35 OPERAÇÕES ENTRE TERMOS DE PROGRESSÕES

- Soma dos termos de uma PA
- Soma dos termos de uma PG
- Produtos dos termos de uma PG

HABILIDADES

- Calcular a soma dos termos de uma PA.
- Calcular a soma dos termos de uma PG.
- Calcular o produto dos termos de uma PG.
- Identificar aplicações relacionadas a operações entre os termos de progressões.

S_PHOTO/SHUTTERSTOCK

Depositar um valor na caderneta de poupança ou em um cofre no mesmo intervalo de tempo é uma forma de progressão aritmética ou geométrica.

Introdução

Já conhecemos diversas situações do cotidiano em que podemos utilizar progressões. Em algumas delas, precisamos realizar operações entre seus termos e, dependendo da quantidade de elementos, torna-se inviável realizá-las termo a termo. Para isso, há fórmulas que nos garantem chegar ao resultado esperado sem que seja necessário calcularmos termo por termo da progressão.

FÓRMULA DA SOMA DOS TERMOS DE UMA PA FINITA

Karl Friedrich Gauss foi um matemático alemão que viveu de 1777 a 1855. Quando tinha aproximadamente 8 anos de idade, seu professor, querendo manter o silêncio em sala de aula por um bom tempo, pediu que os alunos somassem todos os números naturais de 1 a 100. Ou seja, pedia-se o resultado da operação 1 + 2 + 3 + 4 + ... + + 99 + 100. Para surpresa do professor, depois de alguns minutos, Gauss afirmou que o resultado era 5 050.

Vamos observar o raciocínio usado por ele nessa operação.

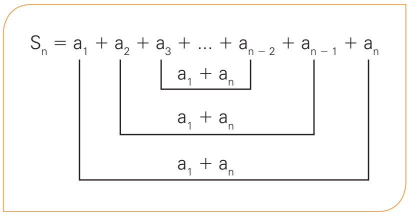
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

Ou seja, Gauss percebeu que:

- $1 + 100 = 101$
- $2 + 99 = 101$
- $3 + 98 = 101$
- e assim sucessivamente

Ele notou que esse padrão se repetia 50 vezes. Então, concluiu que a soma total era $101 \cdot 50 = 5\,050$.

Podemos utilizar o raciocínio de Gauss para obter uma fórmula geral. Considerando a PA finita (a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), de razão r, a soma dos seus n termos pode ser escrita por:



Como cada parcela $a_1 + a_n$ se repete $\frac{n}{2}$ vezes, obtemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

Assim como em progressões aritméticas, podemos obter uma fórmula geral para a soma dos termos de uma PG finita.

Com base na PG finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n), desejamos obter a soma S_n de seus termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \text{ (I)}$$

Multiplicando ambos os lados pela razão **q**, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + ... + a_{n-1}q + a_nq \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow qS_n = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n)q \text{ (II)}$$

Quando subtraímos as equações I e II, obtemos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq$$

Como $a_n = a_1q^{n-1}$:

$$a_nq = a_1q^{n-1}q = a_1q^n.$$

Dessa forma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q}$$

PRODUTO DOS TERMOS DE UMA PG FINITA

De maneira análoga, podemos obter uma fórmula geral para o cálculo do produto dos termos de uma PG finita.

Considerando a PG (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n), o produto P_n de seus **n** primeiros termos pode ser obtido por:

$$\begin{cases} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{cases}$$

Observe que ambas as expressões são similares. Apenas foram arranjados os termos em ordem crescente na primeira e em ordem decrescente, na segunda.

Se multiplicarmos ambas as expressões membro a membro, teremos:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1})(a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot ... \cdot (a_{n-2} \cdot a_3)(a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1)$$

Note que:

$$(a_2 \cdot a_{n-1}) = (a_3 \cdot a_{n-2}) = ... = (a_1 \cdot a_n)$$

Dessa forma:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

Assim:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Também podemos encontrar o produto dos termos de uma PG finita de outra forma, pois:

$$P = a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1 (q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots q^{n-1})$$

Logo:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+n-1},$$

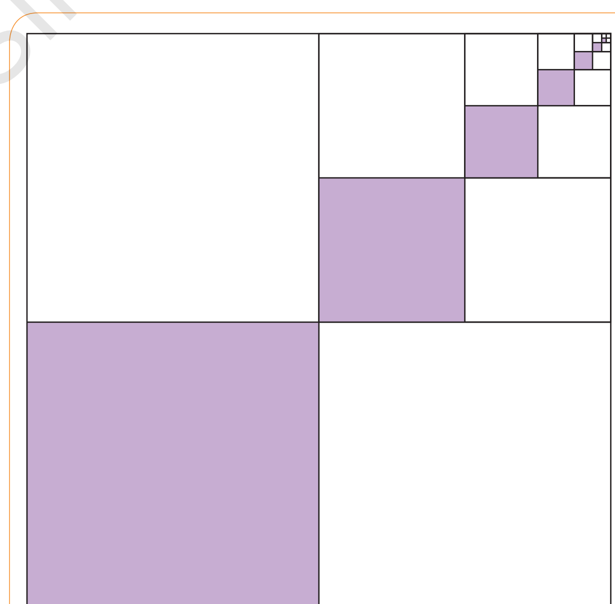
Porém:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Portanto, teremos:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA



É possível calcularmos a soma dos termos de uma série infinita que se comporte como uma progressão geométrica. Se o valor da razão **q** estiver compreendido na forma $0 < |q| < 1$, então o valor da soma de uma PG infinita será dado por:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Uma empresa produziu 10 000 unidades de certo produto em 2007. E, em cada ano seguinte, fabricou 20% a mais desse produto em relação ao ano anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produziu no período de 2007 a 2018?

Resolução

Observe que, a cada ano, a produção aumenta 20%. Ou seja, as unidades produzidas ano a ano compõem uma PG de razão $q = 1{,}20$ e $a_1 = 10\,000$. Como desejamos saber o total produzido entre 2007 e 2018, concluímos que essa PG tem 11 termos. Dessa forma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow S_{11} = 10\,000 \cdot \frac{1-1{,}20^{11}}{1-1{,}20} \rightarrow$$

$$\rightarrow S_{11} = 10\,000 \cdot \frac{1-7{,}43}{-0{,}20} \rightarrow$$

$$S_{11} = 10\,000 \cdot 32{,}15 = 321\,500$$

No período de 2007 a 2018, a empresa produziu 321 500 unidades.

2. Sistema Dom Bosco – Encontre o produto dos 20 primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...).

Resolução

Observe que a PG apresenta $a_1 = 3$ e $q = 2$.

Como desejamos obter o produto dos 20 primeiros termos, precisamos obter a_{20}. Dessa forma:

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{20-1} \rightarrow a_{20} = 3 \cdot 2^{19}$$

Portanto:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \rightarrow P_{20} = \pm\sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^{19})^{20}} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{20} = \pm(3^2 \cdot 2^{19})^{10} \rightarrow P_{20} = \pm 3^{20} \cdot 2^{190}$$

Como os termos da PG são exclusivamente positivos, concluímos que:

$$P_{20} = 3^{20} \cdot 2^{190}.$$

OPERAÇÕES ENTRE TERMOS DE PROGRESSÕES

Soma dos termos de uma PA finita

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Soma dos termos de uma PG finita

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 1^n}{1 - q}$$

Produto dos termos de uma PG finita

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

ou

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Soma dos termos de uma PG infinita

$$S = \frac{a^1}{1 - q}, \text{ se}$$

$$0 < |q| < 1$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. FGV – Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a

a) 18.
b) 36.
c) 39.
d) 42.
e) 48.

Sabemos que, numa progressão geométrica, os termos crescem em uma razão q. Logo, os três primeiros termos da PG são x, xq e xq².

A média aritmética dos dois primeiros termos será $\frac{x+xq}{2} = 6 \rightarrow$
$\rightarrow x(1 + q) + 12 \rightarrow \frac{12}{1+q}$.

Para o segundo e o terceiro termos, temos $\frac{xq+xq^2}{2} = 18 \rightarrow xq(1+q) = 36$.

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$\frac{12}{1+q} \cdot q(1+q) = 36 \rightarrow 12q = 36 \rightarrow q = 3$$

Para descobrirmos x, substituímos o valor de q na primeira equação:

$$x(1+3) = 12 \rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

Assim, a soma dos termos dessa progressão será $3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 39$.

2. UNIFENAS-MG (adaptado) – Considere uma progressão geométrica cujo primeiro termo seja 3 e sua razão $\frac{1}{2}$.

a) Obtenha a soma de seus infinitos termos.

b) Supondo que a PG descrita seja finita e possua 4 termos, calcule o produto dos termos desta PG.

a) Do enunciado, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 3$.

Assim, a soma para os infinitos termos será:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow S = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6$$

Logo, a soma dos infinitos termos é 6.

b) Para calcularmos o produto dos termos de uma PG finita, temos:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Assim, sabendo que a PG tem 10 termos, temos que n = 10.

Calculando o valor do produto:

$$P_4 = 3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4(4-1)}{2}} \rightarrow P_4 = 3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow P_4 = 81 \cdot \left(\frac{1}{64}\right) \rightarrow P_4 = \frac{81}{64}$$

3. Enem C6-H24

As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25.
b) 500,85.
c) 502,87.
d) 558,75.
e) 563,25.

A projeção é descrita por uma PA de razão r = 1,25, pois, da relação $a_n - a_{n-1} = r$, temos:

54 − 52,75 = 1,25

52,75 − 51,50 = 1,25 etc.

Como a projeção é de 2012 a 2021, temos que o valor de 2012 é a_1, 2013 é a_2 e assim sucessivamente. Para encontrarmos o total entre 2012 e 2021, precisamos encontrar a_n, em que n representa o valor para 2021, sendo n = 10.

Logo: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow a_{10} = 50,25 + (10 - 1) \cdot 1,25 \rightarrow$
$\rightarrow a_{10} = 50,25 + 11,25 = 61,50$.

Assim, para o valor total no período:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \rightarrow S = (50,25 + 61,50) \cdot \frac{10}{2} = 111,75 \cdot 5 \rightarrow S = 558,75$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

4. UFSM – No Brasil, falar em reciclagem implica citar os catadores de materiais e suas cooperativas. Visando agilizar o trabalho de separação dos materiais, uma cooperativa decide investir na compra de equipamentos. Para obter o capital necessário para a compra, são depositados, no primeiro dia de cada mês, R$ 600,00 em uma aplicação financeira que rende juros compostos de 0,6% ao mês. A expressão que representa o saldo, nessa aplicação, ao final de n meses, é

a) $100\,600[(1{,}006)^n - 1]$.
b) $100\,000[(1{,}06)^n - 1]$.
c) $10\,060[(1{,}006)^n - 1]$.
d) $100\,600[(1{,}06)^n - 1]$.
e) $100\,000[(1{,}006)^n - 1]$.

Trata-se de juros compostos. Assim, a cada mês a aplicação será de:

$600 \cdot 1{,}006 + 600 \cdot 1{,}006^2 + \ldots + 600 \cdot 1{,}006^n$

Note que o exercício pede o montante ao final do depósito de data n.

Ou seja, devemos aplicar 0,6% ao montante, que poderá ser expresso pela soma de uma PG.

Logo: $1{,}06 \cdot 600 \cdot \frac{1{,}006^n - 1}{1{,}006 - 1} = 1{,}06 \cdot 600 \cdot \frac{1{,}006^n - 1}{0{,}006} =$

$= 1{,}06 \cdot 600 . \frac{1{,}006^n - 1}{\frac{6}{1\,000}} = 1{,}06 \cdot 100\,000 \cdot (1{,}006^n - 1) =$

$= 100\,600[(1{,}006)^n - 1]$

5. FGV – Um anfiteatro tem 12 fileiras de cadeiras. Na 1ª fileira há 10 lugares, na 2ª há 12, na 3ª há 14 e assim por diante (isto é, cada fileira, a partir da segunda, tem duas cadeiras a mais que a da frente).

O número total de cadeiras é:

a) 250
b) 252
c) 254
d) 256
e) 258

Do enunciado que a sequência (10, 12, 14,...) cresce em uma PA de razão 2.

Assim, $a_1 = 10$, $r = 2$, $n = 12$. Para determinar o total de cadeiras, utilizaremos a relação $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Para isso, necessitamos determinar a_n utilizando a relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.

Assim, $a_{12} = 10 + (12 - 1) \cdot 2 = 10 + 22 = 32$.

Logo: $S_n = \frac{(10 + 32) \cdot 12}{2} = 42 \cdot 6 = 252$.

6. FGV

a) Determinar a soma dos 20 primeiros termos da sequência ($a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$) definida por: $a_n = 2 + 4n$ se n é ímpar e $a_n = 4 + 6n$ se n é par.

b) Considere a sequência (1, 10, 11,..., 19, 100, 101,..., 199,...) formada por todos os números naturais que têm 1 como primeiro algarismo no sistema decimal de numeração, tomados em ordem crescente. Se a soma dos seus n primeiros termos é 347, qual é o valor de n e o valor numérico de a_n?

a) Para n ímpar, temos $a_n = 2 + 4n \rightarrow (6, 14, 22, \ldots, 78)$.

Para n par: $a_n = 4 + 6n \rightarrow (16, 28, 40, \ldots, 124)$.

A soma dos pares e ímpares será:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{(6 + 78) \cdot 10}{2} + \frac{(16 + 124) \cdot 10}{2} = 1\,120$$

b) Somando os termos:

$1 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 100 + 101 = 347$

Logo, $n = 13$.

Assim, $a_{13} = 101$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UERJ – Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

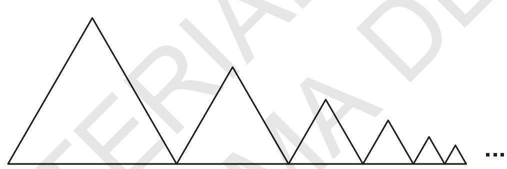
- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

a) 414 **b)** 438 **c)** 456 **d)** 484

8. UFRGS – A sequência representada, na figura abaixo, é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.



A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21.

9. ESPM-SP – Um empréstimo de R$ 10.000,00 foi pago em 5 parcelas mensais, sendo a primeira, de R$ 2.000,00, efetuada 30 dias após e as demais com um acréscimo de 10% em relação à anterior. Pode-se concluir que a taxa mensal de juros simples ocorrida nessa transação foi de aproximadamente:

a) 2,78%
b) 5,24%
c) 3,28%
d) 6,65%
e) 4,42%

10. Fuvest – Um "alfabeto minimalista" é constituído por apenas dois símbolos, representados por * e #. Uma palavra de comprimento n, $n \geqslant 1$é formada por n escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, # é uma palavra de comprimento 1 e #**# é uma palavra de comprimento 4.

Usando esse alfabeto minimalista,

a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?

b) qual é o menor valor de N para o qual é possível formar 1.000.000 de palavras de tamanho menor ou igual a N?

11. UEFS-BA – Em seu primeiro mês de funcionamento, um museu teve 4 200 visitantes, mas desde então esse número diminuiu um valor constante a cada mês. Se o total de visitantes no 2º ano foi 35 700, a não ser que essa tendência mude, espera-se que, no 3º ano, esse número caia para

a) 18 740
b) 21 880
c) 25 620
d) 28 130
e) 30 580

12. Unit-AL – Considerando-se a sequência (131, 124, 117, ..., −2), pode-se concluir que a soma dos seus termos corresponde a:

a) 645
b) 809
c) 1 029
d) 1 290
e) 1 370

13. UEPB – Sendo $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{3^n}$, onde n é um número natural não nulo, o menor valor de n para o qual $S_n > \frac{4}{9}$ é:

a) 3 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

14. UFSM-RS (adaptado)

Nos últimos anos, milhares de pessoas chegaram à Europa depois de atravessarem o Mar Mediterrâneo. Os números foram 3 300 em janeiro e 45 375 em dezembro de 2014.

Disponível em: <www.gazetadopovo.com.br/mundo/so-nestea-no- mais-de-500-mil-imigrantes-cruzam-o-mediterraneo- 8ass-nmxyrzxtewt4zoaeu5o1o>. Acesso em: 28 nov. 2016. (Adaptado)

Considere que o número de chegadas mensais via o Mediterrâneo em 2014 foi dado por uma progressão aritmética $(a_n)_{n \in N}$ com n = 1 correspondendo a janeiro, n = 2 correspondendo a fevereiro, e assim por diante.

Calcule:

a) O número de chegadas em maio.
b) O total de chegadas em 2014.

15. Ifal – Ao saber que a esposa estava grávida, um homem passa a armazenar latas de leite no quarto do bebê, aguardando sua chegada; porém, para ficar bem decorado, ele as junta formando uma pirâmide, onde na fila superior tem uma lata, na segunda fila duas latas, na terceira três e assim por diante até a fila da base. Se ele consegue formar exatamente 10 filas sem sobras de latas, quantas latas ele conseguiu juntar?

a) 10
b) 25
c) 55
d) 60
e) 75

16. UFG-GO (adaptado) – Candidatos inscritos ao vestibular da UFG/2014-1 leram o livro *O cortiço*, com 182 páginas, de uma determinada edição, iniciando-se na página 1. Considere que dois desses candidatos leram o livro do seguinte modo: o primeiro leu duas páginas no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, leu mais duas páginas do que no dia anterior, enquanto o segundo leu uma página no primeiro dia e, em cada um dos dias seguintes, leu o dobro do número de páginas do dia anterior.

Admitindo-se que os dois candidatos começaram a ler o livro no mesmo dia e que o primeiro acabou a leitura no dia 26 de outubro, determine em qual dia o segundo candidato acabou de ler o livro.

Dado: $\log_2 183 = 7{,}6$

a) 19 de outubro.
b) 20 de outubro.
c) 21 de outubro.
d) 22 de outubro.
e) 23 de outubro.

17. UECE (adaptado) – O quadro numérico apresentado a seguir é construído segundo uma lógica estrutural.

1	3	5	7	9	...	101
3	3	5	7	9	...	101
5	5	5	7	9	...	101
7	7	7	7	9	...	101
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
101	101	101	101	101	...	101

Considerando a lógica estrutural do quadro acima, qual será a soma dos números que estão na linha de número 41?

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFG-GO (adaptado) C5-H21

Pretende-se levar água de uma represa até um reservatório no topo de um morro próximo. A potência do motor que fará o bombeamento da água é determinada com base na diferença entre as alturas do reservatório e da represa.

Para determinar essa diferença, utilizou-se uma mangueira de nível, ou seja, uma mangueira transparente, cheia de água e com as extremidades abertas, de maneira a manter o mesmo nível da água nas duas extremidades, permitindo medir a diferença de altura entre dois pontos do terreno. Essa medição fica restrita ao comprimento da mangueira, mas, repetindo o procedimento sucessivas vezes e somando os desníveis de cada etapa, é possível obter a diferença de altura entre dois pontos quaisquer.

No presente caso, realizaram-se 50 medições sucessivas, desde a represa até o reservatório, obtendo-se uma sequência de valores para as diferenças de altura entre cada ponto e o ponto seguinte, h_1, h_2, h_3, ..., h_{50}, que formam uma progressão aritmética, sendo $h_{15} = 0{,}70$ m, $h_{25} = 0{,}75$ m, $h_{35} = 0{,}80$ m, e assim sucessivamente. Com base no exposto, determine a altura do reservatório em relação à represa.

a) 78,75 m.
b) 94,30 m.
c) 96,25 m.
d) 96,50 m.
e) 97,50 m.

19. Enem C1-H2

Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento. Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é

a) 3×345
b) $(3 + 3 + 3) \times 345$
c) $3^3 \times 345$
d) $3 \times 4 \times 345$
e) $3^4 \times 345$

20. Enem C5-H21

Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais r km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais r km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais r km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1 560 km.

A distância r que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é:

a) 3.
b) 7.
c) 10.
d) 13.
e) 20.

36 NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA I

- Origem dos números complexos
- Forma algébrica dos números complexos
- Conjunto dos números complexos
- Operações com números complexos

HABILIDADES

- Reconhecer números complexos.
- Compreender os números complexos do ponto de vista histórico.
- Identificar quando números complexos são iguais.
- Operar com a forma algébrica dos números complexos.
- Aplicar os números complexos em diferentes áreas do conhecimento.

SUWIN/SHUTTERSTOCK

Com auxílio da Matemática e dos números complexos, meteorologistas utilizam diversas técnicas para estudar o clima e suas tendências.

Introdução

Há uma infinidade de aplicações para os números complexos. Um exemplo é quando o relacionamos ao conceito de fractais para fazer a previsão do tempo. Dessa forma, esses dois campos de estudo da Matemática auxiliaram na evolução e no desenvolvimento da meteorologia.

ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os matemáticos da Antiguidade sempre buscaram uma fórmula geral que solucionasse equações cúbicas – assim como equações quadráticas, nas quais se usa a fórmula de Bhaskara.

Diversos estudiosos já haviam encontrado algumas fórmulas gerais, mas que solucionavam casos particulares de equações cúbicas. Foi apenas em 1545, com a publicação de *ArsMagna*, de Girolamo Cardano (1501-1576), que se teve conhecimento de uma fórmula geral para solucionar qualquer equação cúbica.

Tal fórmula solucionava equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$. Embora existam outras variedades, todas são possíveis de serem transformadas nessa equação, mudando-se as variáveis. A fórmula publicada é:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Girolamo Cardano foi filósofo, médico e matemático de grande prestígio em sua época. Ainda que tivesse *status* de destaque na sociedade, não foi ele quem desenvolveu essa fórmula.

Cardano enfrentou diversas dificuldades nos estudos relacionados a essa área, como ao aplicar a fórmula para a equação $x^3 - 15x = 4$. Ele sabia que $x = 4$ era uma solução, mas, aplicando a fórmula, chegou a $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Como Cardano não tinha conhecimento sobre raízes quadradas de números negativos, considerou um valor inexistente na época.

Anos depois, Rafael Bombelli (1526-1572) decidiu realizar estudos com base na solução encontrada por Cardano. Considerou $\sqrt{-1}$ um número e desenvolveu uma técnica que originou um novo tipo de número.

Atualmente, as aplicações desses novos números adquiriram uma enorme importância em vários campos, como na Engenharia (na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos) e na Geometria fractal e em sistemas dinâmicos (no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia).

UNIDADE IMAGINÁRIA

Foi apenas em 1777, com Leonhard Euler (1707-1783), que a letra **i** foi utilizada para representar $\sqrt{-1}$, passando a ser chamada de **unidade imaginária**, logo podemos concluir que $i^2 = -1$. Com isso, é possível solucionarmos diversas equações que não apresentavam solução.

Observe este exemplo:

$$x^2 + 16 = 0 \rightarrow x^2 = -16$$

Note que, no universo dos números reais ($\mathbb{R}$), essa equação não teria solução, pois não existe número real que, elevado ao quadrado, tenha como resultado -16.

Porém, considerando o número **i**, não real, de tal forma que $i^2 = -1$, teremos:

$$x^2 + 16 = 0 \rightarrow x^2 = -16 \rightarrow x^2 = 16i^2 \rightarrow x^2 =$$
$$= \pm\sqrt{16i^2} \rightarrow x = \pm 4i$$

Dessa forma, obtemos o conjunto-solução $S = \{4i, -4i\}$.

Mas, afinal, que números são esses?

Em 1801, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou o livro *Disquisitiones Arithmeticae*, que reunia diversos resultados ligados à teoria dos números. Nessa obra, Gauss passou a chamar esses "novos números" de **números complexos**.

FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Todo número complexo pode ser escrito na forma $z = a + bi$, sendo **a** e **b** números reais e **i** a unidade imaginária. Essa é a **forma algébrica** do número complexo **z**.

O coeficiente **a** representa a **parte real** do número complexo **z** e é denotado por Re(z). Já o coeficiente **b** representa a **parte imaginária** de z e é denotado por Im(z).

Quando um número complexo apresenta sua parte real nula, dizemos que é um número **imaginário puro**. Assim, quando a parte imaginária for nula, consideramos que se trata de um **número real**.

Observe alguns exemplos:

$z = 5 + 3i$ é um número complexo, em que $Re(z) = 5$ e $Im(z) = 3$.

$z = 7$ é um número complexo com $Re(z) = 7$ e $Im(z) = 0$. Chama-se z de número real.

$z = -2i$ é um número complexo com $Re(z) = 0$ e $Im(z) = -2$. Chama-se z de número imaginário puro.

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

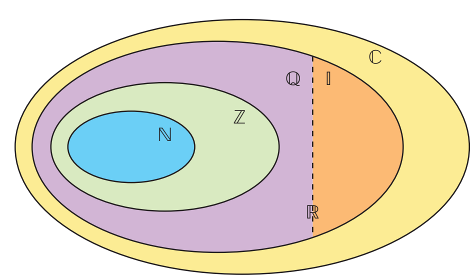
Todos os números que podem ser expressos da forma $z = a + bi$, sendo **a** e **b** reais e **i** a unidade imaginária, compõem o **conjunto dos números complexos**, representado por $\mathbb{C}$. Dessa forma:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi,\ \text{com } a, b \in \mathbb{R} \ \text{ e } i^2 = -1\}$$

Com o surgimento dos números complexos, houve uma ampliação dos conjuntos numéricos. Uma vez que todo número real pode ser escrito como um número complexo, podemos dizer que todo número real é complexo. Assim, é possível afirmarmos que:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Com isso, podemos atualizar o diagrama dos conjuntos numéricos:



OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

IGUALDADE

Dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, serão iguais quando $Re(z) = Re(w)$ e $Im(z) = Im(w)$. Ou seja:

$$z = w \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Para adicionarmos ou subtrairmos dois números complexos, precisamos realizar essas operações entre suas partes reais e imaginárias. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = \\ = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di \} = \\ = (a - c) + (b - d)i$$

MULTIPLICAÇÃO

Para multiplicarmos dois números complexos, devemos aplicar a propriedade distributiva. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, temos:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = \\ = a \cdot c + a \cdot di + c \cdot bi + b \cdot di^2$$

Como $i^2 = -1$, obtemos:

$$z \cdot w = ac + adi + cbi - bd = ac - bd + (ad + bc)i$$

CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dizemos que o conjugado do número complexo $z = a + bi$ (cuja notação é $\bar{z}$) é o número complexo $z = a - bi$. Ou seja, para obtermos o conjugado de **z**, basta inverter o sinal de sua parte imaginária.

Propriedades:

- $z = \bar{z}$, desde que **z** seja real (parte imaginária nula)

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2}$$

$$\bar{z}_1 . \bar{z}_2 = \overline{z_1 . z_2}$$

DIVISÃO

Obtemos a divisão entre dois números complexos de modo similar ao processo de racionalização de denominadores. Para isso, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Ou seja:

$$\frac{z}{w} = \frac{z . \bar{w}}{w . \bar{w}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Resolva, usando os métodos de adição, subtração, multiplicação e divisão, os seguintes números complexos: $z = 2 + i$ e $w = 3 - 4i$.

Resolução

$z + w = 2 + i + 3 - 4i = 2 + 3 + i - 4i = 5 - 3i$

$z - w = 2 + i - (3 - 4i) = 2 + i - 3 + 4i = 2 - 3 + + i + 4i = -1 + 5i$

$z \cdot w = (2 + i) \cdot (3 - 4i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4i) + + 3 \cdot i + i \cdot (-4i) = 6 - 8i + 3i - 4i^2 = = 6 - 8i + 3i - 4(-1) = 10 - 5i$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{(2+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i + 3i + i \cdot 4i}{3 \cdot 3 + 3 \cdot 4i - 4i \cdot 3 - 4i \cdot 4i} =$$

$$= \frac{2 + 11i}{9 + 16} = \frac{2}{25} + \frac{11i}{25}$$

ROTEIRO DE AULA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA

Unidade imaginária

$i^2 = -1$

Forma algébrica

$z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

Operações com números complexos

Sendo $z = a = bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d reais

- Soma: $z + w = (a + c) + (b + d)\,i$
- Subtração: $z - w = (a - c) + (b - d)\,i$
- Multiplicação: $z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)\,i$
- Conjugado: $z =$ $\bar{z} = a - bi$
- Divisão: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unit-AL – É correto afirmar que $m = -4 + 2i$ e $n = -4 - 2i$ são raízes da equação:

a) $x^2 + 8x + 20 = 0$
b) $x^2 - 8x + 12 = 0$
c) $x^2 - 8x - 20 = 0$
d) $x^2 + 8x + 12 = 0$
e) $x^2 + 8x - 20 = 0$

Temos uma função de 2º grau e suas raízes.

Note que, em $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, podemos verificar pelas alternativas que $a = 1$.

É possível então desenvolvermos a função da seguinte forma:

$$f(x) = (x - (-4 + 2i)) \cdot (x - (-4 - 2i)) =$$

$$= ((x + 4) - 2i) \cdot ((x + 4) + 2i) = (x + 4)^2 - (2i)^2 =$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 4 = x^2 + 8x + 20.$$

2. Ifal – Dentro do conjunto dos números complexos, o conjunto solução da equação $x^2 + 625 = 0$ é

a) $S = \{-5,5\}$.
b) $S = \{-25,25\}$.
c) $S = \{-5i,5i\}$.
d) $S = \{-25i,25i\}$.

Resolvendo a equação, obtemos:

$$x^2 + 625 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-625} \rightarrow x = \sqrt{(25)^2 \cdot i^2} \rightarrow x = \pm 25i \rightarrow \begin{cases} x = -25i \\ x = 25i \end{cases}$$

3. Sistema Dom Bosco C1-H3

Ao abrir um equipamento que precisava de conserto, um técnico em eletrônica precisou checar a impedância elétrica do equipamento. Sabendo que a impedância é uma resistência que um circuito faz à passagem da corrente elétrica quando submetido a uma tensão, ou seja, o valor eficaz da corrente elétrica resultante no circuito elétrico, ele identificou que havia uma associação de dois resistores ligados em paralelo. Assim, precisou calcular a impedância total do equipamento utilizando $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$.

Tendo as impedâncias de cada resistor $z_1 = (1+2i)\ \Omega$ e $z_2 = (2 - i)\ \Omega$, qual é o valor da impedância total obtida?

a) $(13+5i)\ \Omega$
b) $(1{,}3+0{,}5i)\ \Omega$
c) $(130+50i)\ \Omega$
d) $(5+3i)\ \Omega$
e) $(0{,}5+1{,}3i)\ \Omega$

Do enunciado, temos que as impedâncias são dadas por $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 - i$.

Para obtermos a impedância total, temos $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$.

Logo:

$$z = \frac{(1+2i)\cdot(2-i)}{1+2i+2-i}$$

$$z = \frac{2 - i + 4i - 2i^2}{3+i} = \frac{4+3i}{3+i}$$

$$z = \frac{4+3i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{12 - 4i + 9i - i^2}{9 - 3i + 3i - i^2} = \frac{13+5i}{10} = 1{,}3 + 0{,}5i.$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

4. Uece – No conjunto dos números complexos, considere a progressão geométrica cujo primeiro termo é igual a $1 + i$ e a razão é igual a i, onde i é o número complexo, tal que $i^2 = -1$. Observa-se que, dentre os termos dessa progressão, existem apenas n números complexos distintos. Então, n é igual a

a) 4. **b)** 8. **c)** 10. **d)** 6.

Do enunciado, o termo $1 + i$ está em PG de razão i.

Assim, das progressões geométricas, temos:

$a_1 = 1 + i$

$a_2 = a_1 \cdot i = (1 + i) \cdot i = i + i^2 = i - 1$

$a_3 = a_2 \cdot i = (i - 1) \cdot i = i^2 - i = -1 - i$

$a_4 = a_3 \cdot i = (-1 - i) \cdot i = -i - i^2 = -i + 1$

$a_5 = a_4 \cdot i = (-i + 1) \cdot i = -i^2 + i = 1 + i$

Então, $a_5 = a_1$. Logo, $n = 4$.

5. Unisc-RS – A parte real do número complexo

$Z = \frac{1+(3i)^2}{1-i}$ é

a) 1 **b)** −1 **c)** 2 **d)** −2 **e)** −4

Primeiro devemos resolver a parte de cima da fração. Logo:

$$Z = \frac{1+(3i)^2}{1-i} = \frac{1+9i^2}{1-i} = \frac{-8}{1-i}$$

Aplicando o método de resolução da divisão de complexos, teremos:

$$Z = \frac{-8}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-8-8i}{2} = -4-4i$$

Logo, Re(z) = −4.

6. Uece (adaptado) – Se os números complexos z e w estão relacionados pela equação $z + wi = i$ e se $z = 1 - \frac{1}{i}$, calcule o valor de w, considerando que i é tal qual $i^2 = -1$.

Partimos da equação $z + wi = i$.

Substituindo o valor de z, $1 - \frac{1}{i} + wi = i$.

Multiplicando por i:

$i - 1 + wi^2 = i^2$

$i - 1 + w \cdot (-1) = (-1)$

$i - 1 - w = -1$

Portanto, $w = i$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEA-AM – Considere os números complexos $z_1 = -3 + pi$ e $z_2 = p - i$, com p um número real. Sabendo que $z_1 \cdot z_2 = -4 + 7i$, o valor de $z_1 + z_2$ é:

a) $2 + 3i$. **c)** $-1 + i$. **e)** $1 + i$.
b) $-1 - 3i$. **d)** $-1 - i$.

8. IFCE – Sendo i a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$, são dados os números complexos $z_1 = 9 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$. Ao calcular corretamente o produto $z_1 \cdot z_2$, obtemos o número:

a) $21 - 6i$. **c)** $-18 + 3i$. **e)** $-21 + 3i$.
b) $x - 18 - 6i$. **d)** $18 - 3i$.

9. ITA – O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação em $Z \in \mathbb{C}$, $z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$ possua uma raiz puramente imaginária é:

a) uma circunferência.
b) uma parábola.
c) uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas paralelas.

10. Sistema Dom Bosco – Sabendo que z_1 e z_2 são números complexos conjugados do tipo a + bi, supondo a = 2 e b = −1, calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$

11. UEFS-BA – O número complexo z que satisfaz $z^8 = 16$ e $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^7 = -6 - 3i$ é

a) $z = i\sqrt{2}$.

b) $z = -1 - i$.

c) $z = -1 + i$.

d) $z = 1 - i$.

e) $z = 1 + i$.

12. Mackenzie-SP – Se $\dfrac{2+i}{\beta+2i}$ tem parte imaginária igual a zero, então o número real β é igual a

a) 4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** −2 **e)** −4

13. Unicamp – Sejam x e y números reais tais que $x + yi = \sqrt{3+4i}$, onde i é a unidade imaginária. O valor de xy é igual a

a) -2. **b)** -1. **c)** 1. **d)** 2.

14. Unisc-RS (adaptado) – Qual é a parte real do número complexo $z = \frac{1+(3i)^2}{1-i}$?

15. Unimontes – Se $z = a + bi$ é um número complexo e $\overline{z} = a - bi$ o seu conjugado, então a equação $z \cdot \overline{z} - 4 = 0$ representa:

a) uma reta paralela ao eixo real.
b) uma circunferência com centro na origem.
c) uma circunferência com centro no ponto (4,0).
d) um segmento de reta de comprimento 4.

16. UEFS-BA – Se z_1 e z_2 forem as soluções complexas da equação $z^2 - 2z + 4 = 0$, então $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ é igual a

a) -1
b) $-i\sqrt{3}$
c) 0
d) $i\sqrt{3}$
e) 1

17. UFPR – Considere o número complexo $z_0 = 4i + \frac{13}{2+3i}$.

a) Determine a parte real e a parte imaginária de z_0.

b) Determine a e b, de modo que $z = 1 - i$ seja solução da equação $z^2 + az + b = 0$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFSC (adaptado) C5-H21

Em circuitos elétricos como, por exemplo, o das instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos. A relação $U = Z \cdot j$ fornece a tensão U em função da impedância Z e da corrente elétrica j. Nesses termos, essas variáveis são expressas através de números complexos $a + bi$. Considere agora $U = 110 \cdot (\cos 0° + i\operatorname{sen} 0°)$ e $Z = 5 + 5i$. O valor da expressão $2a + b$, sendo $j = a + \ + bi$, é:

a) −22
b) −11
c) 11
d) 22
e) 33

19. Uepa C5-H21

Um dos resultados importantes da produção de conhecimentos reside na possibilidade que temos de fazer a interação de múltiplos saberes. O conceito de número complexo é um bom exemplo dessa possibilidade exploratória da produção científica, ao permitir relações com álgebra, geometria plana, geometria analítica, trigonometria, séries e aritmética. Neste sentido, considere os números complexos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 5 - 6i$, $z_3 = -4 + 18i$ e os números reais k_1 e k_2 tais que a soma dos números complexos k_1z_1 e k_2z_2 resulta o complexo z_3. Nessas condições, o valor de k_1^{k2} é:

a) 9
b) 8
c) 1
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{1}{9}$

20. Sistema Dom Bosco C1-H3

Em um chuveiro elétrico, a energia elétrica é transformada em energia térmica, o que possibilita a elevação da temperatura da água. De modo semelhante, em um ferro de passar roupas, o aumento da temperatura ocorre no material da base do aparelho. Essa transformação de energia elétrica em térmica está vinculada à resistência que o material oferece à passagem da corrente elétrica, chamada impedância elétrica. Sabendo que a impedância de um chuveiro elétrico é $z_1 = 2 + i$ e a de um ferro elétrico é $z_2 = c + di$, os valores de c e d para que a impedância do ferro seja o dobro do chuveiro são respectivamente:

a) 2 e 1
b) 1 e 2
c) 4 e 1
d) 4 e 2
e) 2 e 4

37

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA II

- Representação geométrica dos números complexos
- Módulo de um número complexo
- Potências de i

HABILIDADES

- Representar números complexos geometricamente.
- Identificar e operar módulos de números complexos.
- Compreender potências de i.

Introdução

Existem diversas maneiras de representar os números complexos, o que possibilita melhor análise e compreensão sobre eles. Até o momento, utilizamos a representação desses números na forma algébrica, escrevendo $z = a + bi$.

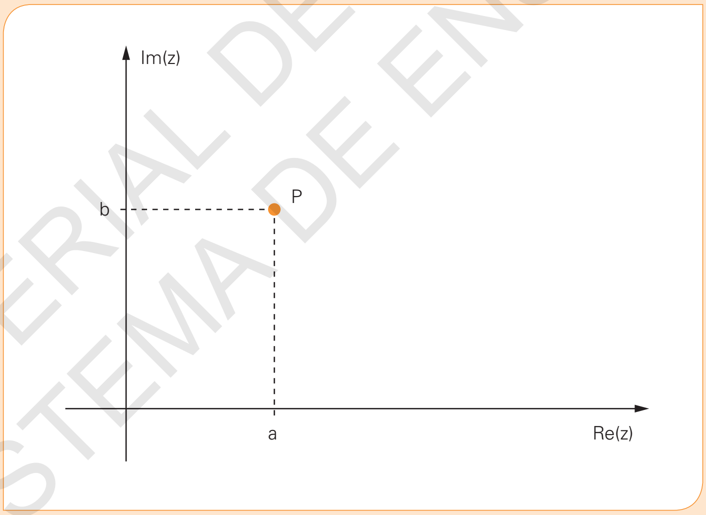
Foi essa ideia que tiveram os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1768-1822). No início do século XIX, de maneira independente, eles decidiram associar os números complexos ao plano cartesiano com base em suas partes real e imaginária.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Gauss e Argand definiram que o eixo das abscissas representaria a parte real do número complexo, chamando-o de **eixo real**. O eixo das ordenadas, por sua vez, representaria sua parte imaginária, denominado **eixo imaginário**.

Dessa forma, quando o plano cartesiano é utilizado para representar números complexos, passa a ser chamado **plano de Argand-Gauss**. Qualquer número complexo do tipo $z = a + bi$ está associado a um único ponto, de modo que $P = (a, b)$.

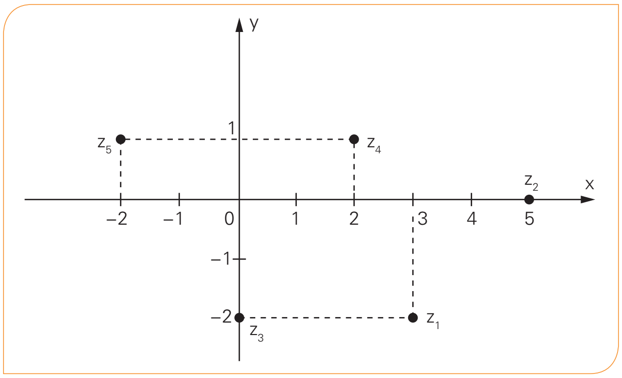
Observe a representação geométrica de um número complexo:



Dizemos que, se $P = (a, b)$ representa o número complexo $z = a + bi$, então P é **imagem de z**. Por sua vez, **z** é chamado **afixo** do ponto **P**.

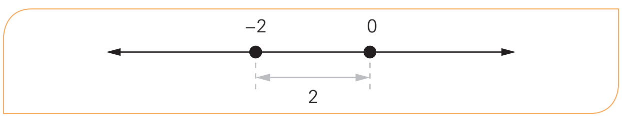
No exemplo a seguir, vamos representar os números complexos: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = -2i$, $Z_4 = 2 + i$ e $z_5 = -2 + 1$

- $z_1 = 3 - 2i \rightarrow (3, -2)$
- $z_2 = 5 \rightarrow (5, 0)$
- $z_3 = -2i \rightarrow (0, -2)$
- $z_4 = 2 + i \rightarrow (2, 1)$
- $z_5 = -2 + i \rightarrow (-2, 1)$



MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Se observarmos os números reais, sabemos que seu módulo nada mais é que a distância desse número à origem, quando o representamos em uma reta real. Observe a representação de $|-2|$ na reta real:

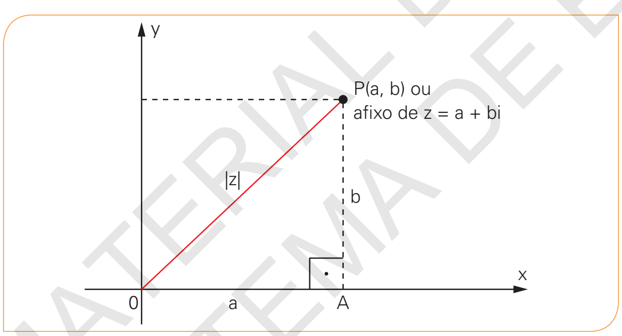


Ou seja, $|-2| = 2$.

Essa mesma definição pode ser utilizada em números complexos. Isso significa que, para obtermos o módulo de um número complexo, basta calcularmos a distância entre a origem e a imagem desse número no plano de Argand-Gauss.

Sabemos que a origem do plano de Argand-Gauss é a origem do plano cartesiano e a representaremos por $O = (0, 0)$.

Observe a representação do módulo do número complexo $z = a + bi$.



Note que podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OAP. Assim:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \rightarrow |z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

Observe que essa relação é válida mesmo para números complexos que estejam situados sobre os eixos ou nos demais quadrantes.

PROPRIEDADES ENVOLVENDO MÓDULO

Para as propriedades a seguir, considere $z, w \in \mathbb{C}$.

1ª $\rightarrow z \cdot \overline{z} = |z|^2$

2ª $\rightarrow |z| = |\overline{z}|$

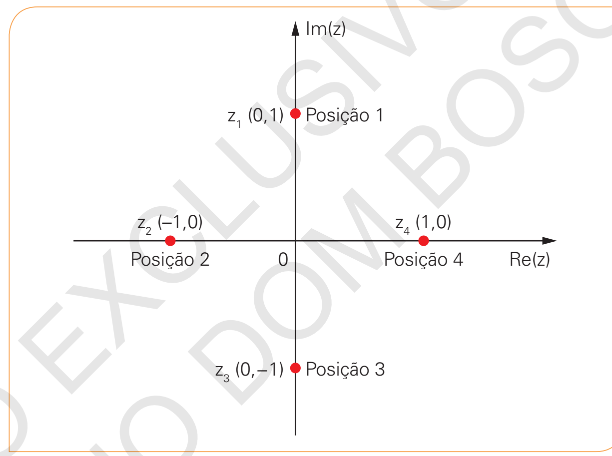
3ª $\rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

4ª $\rightarrow \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ (com $w \neq 0$)

POTÊNCIAS DE *i*

Observe as imagens, no plano de Argand-Gauss, dos seguintes números complexos:

- $z_1 = i$
- $z_2 = i^2 = -1$
- $z_3 = i^3 = i \cdot i^2 = -i$
- $z_4 = i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- $z_5 = i^5 = i \cdot i^4 = i$
- $z_6 = i^6 = i \cdot i^5 = i^2 = -1$



Dizemos que z_1, z_2, z_3... formam, nessa ordem, as **potências de i**. Além disso, no plano de Argand-Gauss, note que:

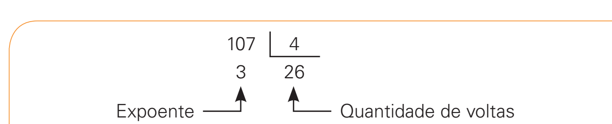
- $z_1 \rightarrow$ posição 1
- $z_2 \rightarrow$ posição 2
- $z_3 \rightarrow$ posição 3
- $z_4 \rightarrow$ posição 4
- $z_5 \rightarrow$ posição 1
- $z_6 \rightarrow$ posição 2
- e assim sucessivamente

Repare que, a partir de z_5, as imagens passam a assumir posições já estabelecidas. Ou seja, z_5 tem a mesma posição de z_1. Já z_6 tem a mesma posição de z_2, e assim sucessivamente.

Com isso, podemos concluir que as potências de i, no plano de Argand-Gauss, podem ocupar apenas 4 posições.

Dessa forma, conseguimos obter o valor de qualquer potência de i. Para isso, basta dividirmos o expoente da potência de i por 4. Assim, teremos como quociente a quantidade de voltas em torno do plano de Argand-Gauss e como resto da divisão a posição que essa potência ocupará no plano.

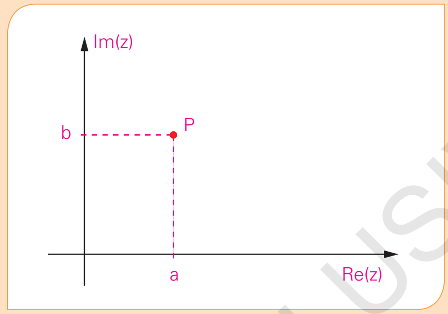
Observe como obtemos o valor de i^{107}:



Ou seja, ao representarmos i^{107} no plano de Argand--Gauss, realizamos 26 voltas sobre o plano e paramos na terceira posição. Então, $i^{107} = i^3 = -i$.

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA II

Representação geométrica



Módulo de um número complexo

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriedades

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|z| = |z|$

$|z| = |z| \cdot |w|$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Potências de i

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

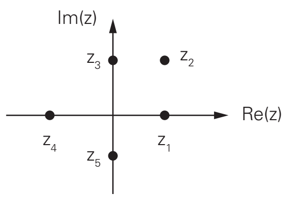
$i^8 = 1$

$i^9 = i$

$i^{10} = -1$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPF-RS – Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Seja $\bar{w}$ o conjugado de w. Na figura, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5. Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\bar{w}}$?



a) z_1
b) z_2
c) z_3
d) z_4
e) z_5

Dos números complexos, sabemos que eles têm o formato z = a + bi.

Temos que, em qualquer ponto em cima da bissetriz dos quadrantes ímpares, os valores de **a** e **b** serão iguais. Logo, a = b.

Sabendo disso, supondo que w seja 1 + i (ou seja, a = b = 1), o conjugado de **w** será $\bar{w} = 1 - i$.

Assim, $\frac{w}{\bar{w}} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{2i}{2} = i$. Ou seja, um número imaginário puro, sendo seu afixo (0,1).

Da imagem, temos que z_3 é o único que é igual a $\frac{w}{\bar{w}}$.

2. Uece (adaptado) – Sejam x um número real e i o número complexo tal que $i^2 = -1$.

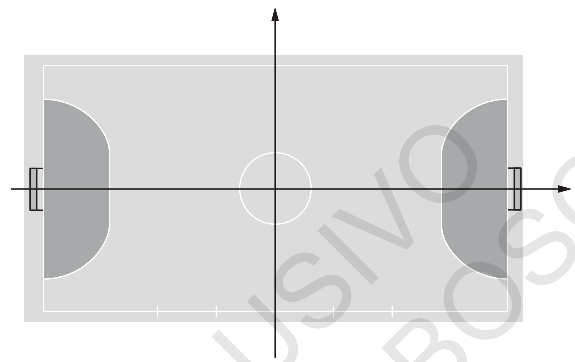
Se p = x + i e q = x – i, então, p + q + p · q será?

Do enunciado, temos que p = x + i e q = x – i. Logo: $p \cdot q = (x + i) \cdot (x - i) = x^2 - xi + xi - i^2 \rightarrow x^2 + 1$.

Portanto, $p + q + p \cdot q = (x + i) + (x - i) + (x^2 + 1) = 2x + x^2 + 1 = (x+1)^2$.

3. PUC-RS C2-H8

Uma cancha de futsal está situada sobre um sistema de coordenadas do plano complexo (Argand-Gauss), com unidades marcadas em metros e com centro sobre o ponto (0, 0), como na figura abaixo.



Se a circunferência central possui uma área de 9 m², a expressão que melhor representa esta circunferência central, em $z \in \mathbb{C}$, é

a) $z^2 = 9$
b) $z = 3$
c) $z = 9$
d) $|z| = 3$
e) $|z| = 9$

Supondo que **r** é o raio da circunferência central, temos que $\pi r^2 = 9\pi \rightarrow r = 3$ m.
Sabendo que a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, a equação dessa circunferência é $x^2 + y^2 = 9$. Assim, se $z = x + yi \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, vemos que a equação se aproxima ao módulo do número complexo. Dessa forma, é um número complexo de módulo 3.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. Unicamp – Considere o número complexo $z = \frac{1+ai}{a-i}$, onde a é um número real e i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O valor de z^{2016} é igual a:

a) a^{2016}.
b) 1.
c) $1 + 2016i$.
d) i.

$z = \frac{1+ai}{a-i} = \frac{1+ai}{a-i} \cdot \frac{a+i}{a+i} \rightarrow z = \frac{a+i+a^2i+ai^2}{a^2+ai-ai-i^2} \rightarrow$

$z = \frac{a+i+a^2i-a}{a^2+1} \rightarrow z = \frac{(a^2+1)i}{a^2+1} = i$

Logo, $z^{2016} = i^{2016}$.

$\frac{2016}{4} \rightarrow$ quociente 24 e resto 0. Portanto, $i^{2016} = i^0 = 1$.

5. Ifal – O quociente entre os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$ é

a) 1.
b) i.
c) 0.
d) 2.
e) 2i.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i}$

Multiplicando o conjugado:

$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i$

6. Faap-SP (adaptado) – Seja $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária. Podemos afirmar que z^{10} é igual a?

$z^{10} = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i + i^2)^5$

Como $i^2 = -1$:

$(1^2 + 2i + i^2)^5 = (1 + 2i - 1)^5 = (2i)^5 = 2^5i^5 = 32i$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unimontes-MG – Considere $x \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária. Se o número complexo $z = (2x - i) \cdot (3x + 2xi)$ é imaginário puro, mas não é uma potência de i, então

a) $z = \frac{13}{9}i$

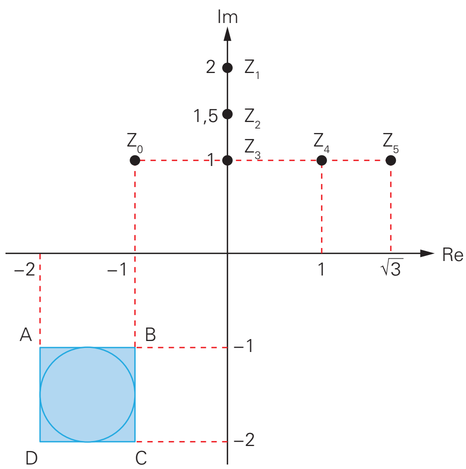
b) $z = -\frac{1}{3}i$

c) $z = \frac{9}{13}i$

d) $z = -3i$

8. Sistema Dom Bosco – No plano de Argand-Gauss, o vértice de um quadrado é o ponto $w = 4 - 3i$. O centro do quadrado é o número $z = 3 - 2i$. Determine o vértice do quadrado que não é consecutivo a w.

9. FGV – No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 e Z_5. Se o afixo do produto de Z_0 por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é:



a) Z_1.
b) Z_2.
c) Z_3.
d) Z_4.
e) Z_5.

10. PUC-SP (adaptado) – Considere os números complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = -b + ai$ e $z_3 = -b - 3i$, com a e b números inteiros. Sabendo que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, qual é o valor de $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$?

11. UFRGS – Considere as seguintes afirmações sobre números complexos.

I. $(2 + i)(2 - i)(1 + i)(1 - i) = 10$

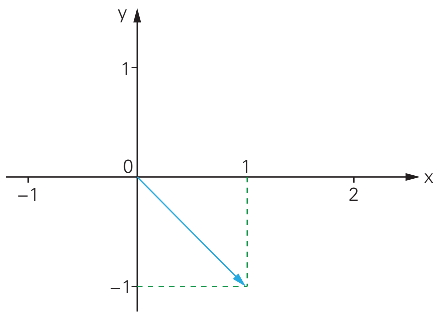
II. $\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{3}\cdot i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\cdot i\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot i$

III. Se o módulo do número complexo z é 5, então o módulo de 2z é 10.

Quais afirmações estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e III.
e) I, II e III.

12. FGV – Observe o plano Argand-Gauss a seguir:



Elevando-se a 2015 o número complexo indicado nesse plano Argand-Gauss, o afixo do número obtido será um ponto desse plano com coordenadas idênticas e iguais a

a) 2^{2015}
b) 2^{1007}
c) 1
d) 2^{-2015}
e) -2^{1007}

13. Mackenzie-SP – Se $p = 4n$ para $n \in \mathbb{N}^*$, o valor da expressão $\dfrac{(1+i)^p}{(1-i)^{p-2}}$ é igual a

a) $-2i$
b) $2i$
c) i
d) $-i$
e) $1 - 2i$

14. UEM-PR (adaptado) – Seja $z = a + bi$ um número complexo, tal que $4z - zi + 5 = -1 + 10i$. Qual é o modulo do complexo z?

15. Unicamp – Chamamos de unidade imaginária e denotamos por i o número complexo, tal que $i^2 = -1$. Então $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2013}$ vale

a) 0.

b) 1.

c) i.

d) 1 + i.

16. UEM-PR (adaptado) – Sejam os números complexos $z = 1 - i$ e $w = 2 + i$. Denotam-se por $\overline{z}$ e $\overline{w}$ os conjugados de z e w, respectivamente.

Considerando esses dados, assinale o que for correto.

I. $z \cdot \overline{w} = 2 - 3i$

II. $\frac{w}{z} = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$

III. z + w é um número imaginário puro.

a) Apenas I é verdadeira

b) Apenas II é verdadeira

c) Apenas III é verdadeira

d) Apenas II e III são verdadeiras

e) I, II e III são falsas

17. Faceres-SP (adaptado) – Sendo i chamado de unidade imaginária, podemos concluir que o valor de $i^{200} \cdot i^{201} \cdot i^{202} \cdot i^{203} \ldots i^{247} \cdot i^{248}$ é?

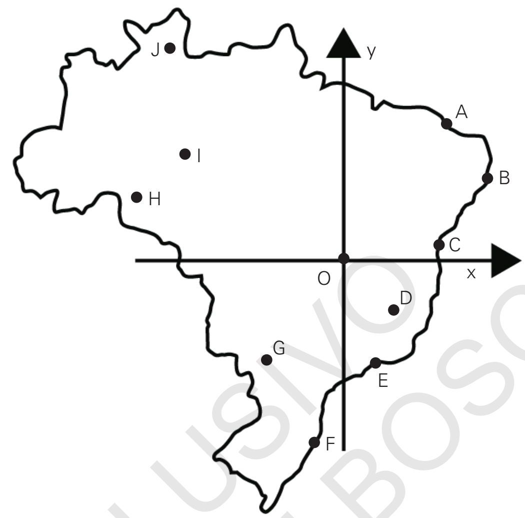
ESTUDO PARA O ENEM

18. UFSM-RS C1-H3

Os edifícios "verdes" têm sido uma nova tendência na construção civil. Na execução da obra desses prédios, há uma preocupação toda especial com o meio ambiente em que estão inseridos e com a correta utilização dos recursos naturais necessários ao seu funcionamento, além da correta destinação dos resíduos gerados por essa utilização. A demarcação do terreno onde será construído um edifício "verde" foi feita através dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, sendo o terreno delimitado pelas poligonais $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, $\overline{P_4P_1}$, medidas em metros. Sabendo que P_1, P_2, P_3 e P_4 representam, respectivamente, a imagem dos complexos $z_1 = 20 + 40i$, $z_2 = -15 + 50i$, $z_3 = -15 - 10i$ e $z_4 = \frac{z_1}{16} - \frac{5\overline{z_3}}{4}$, qual é a área, em m^2, desse terreno?

a) 1 595.
b) 1 750.
c) 1 795.
d) 1 925.
e) 2 100.

19. UnB-DF (adaptado) C5-H21



cidades	pontos	coordenadas
Fortaleza	A	(7,9)
Recife	B	(10, 6)
Salvador	C	(7, 2)
Belo Horizonte	D	(2, –4)
Rio de Janeiro	E	(3, –6)
Porto Alegre	F	(–3, –12)
Campo Grande	G	(–4, –5)
Porto Velho	H	(–12, 4)
Manaus	I	(r, s)
Boa Vista	J	(t, u)

No mapa acima, estão identificadas, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, as localizações de algumas cidades brasileiras, entre elas, aquelas que sediarão a Copa das Confederações. Brasília, indicada por O, corresponde à origem e, na tabela, estão as coordenadas das demais cidades, identificadas pelas letras de A a J. Cada ponto (x, y) do plano está identificado com um número complexo $z = x + iy$, em que i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Nesse sistema, as medidas das coordenadas estão estabelecidas em unidade de distância referencial denotada por u.d.

Considere que os números complexos z_1 e z_2 correspondem, respectivamente, às localizações de Belo Horizonte e Rio de Janeiro. Nesse caso, $\frac{z_1}{z_2}$ vale?

a) 1
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{3}$

20. UEL-PR (adaptado) C1-H3

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

CARNEIRO, J. P. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*, 2004. v. 55. p. 18.) (Adaptado)

Calcule uma composição de rotação dos pontos P (–3, 4) e Q (2, –3) representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

a) $-18 + 17i$
b) $-6 - 12i$
c) $-1 + i$
d) $5 + 7i$
e) $6 + 17i$

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA I

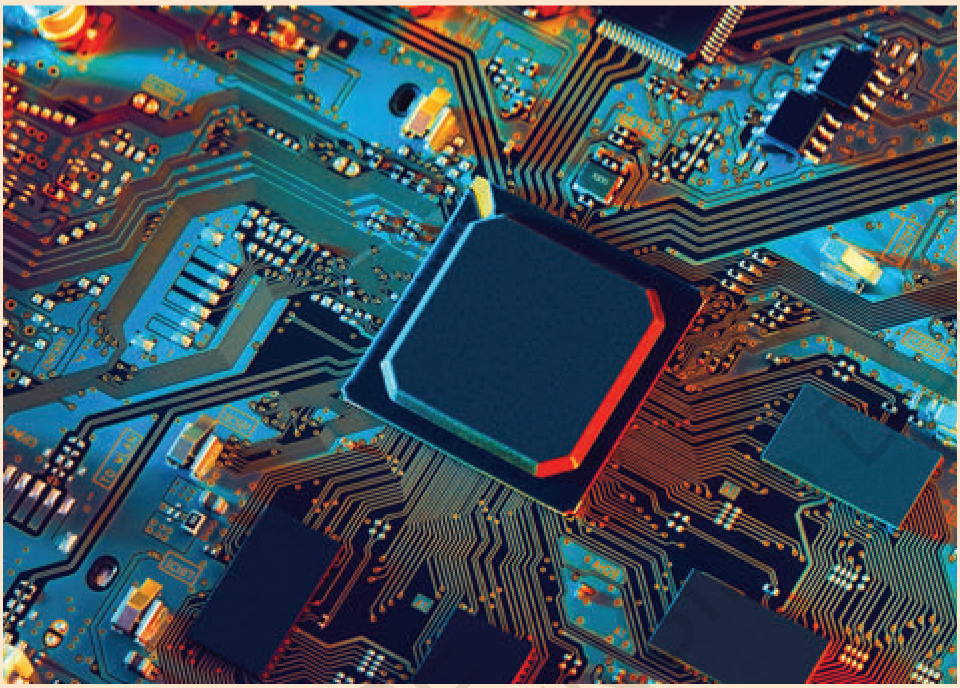
38

- Argumento de um número complexo
- Forma trigonométrica ou polar

HABILIDADES

- Reconhecer números complexos na sua forma trigonométrica.
- Identificar o argumento de um número complexo.
- Representar um número complexo por meio de um vetor e expressá-lo de forma trigonométrica.

RAIMUNDAS/SHUTTERSTOCK



Em elétrica e eletrônica, os números complexos são usados com muita frequência. A aplicação desses números possibilitou diversos avanços na tecnologia, como a criação de microprocessadores.

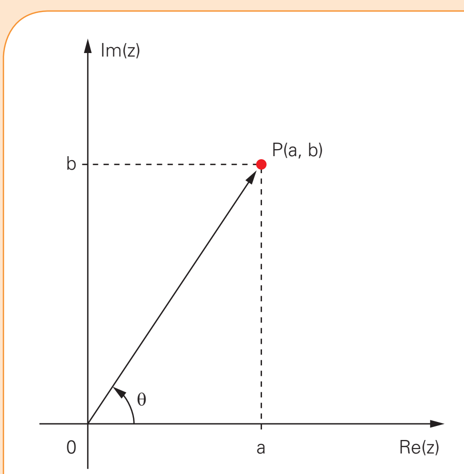
Introdução

Muito utilizados na Engenharia, os números complexos estão presentes principalmente na modelagem de circuitos elétricos. Atualmente, não é possível concebermos a evolução da humanidade sem o uso da tecnologia de ponta, área em que os números complexos contribuíram de forma crucial.

ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Já sabemos que os números complexos podem ser representados de diversas formas. Também temos em mente que um ponto P = (a,b), no plano de Argand-Gauss, representa o número complexo z = a + bi.

Observe o vetor $\overrightarrow{OP}$, cuja extremidade é o ponto P (imagem de z) e cuja origem é o ponto O = (0, 0), origem do plano de Argand-Gaus:



Repare que a direção do vetor $\overrightarrow{OP}$ é dada pelo ângulo θ, formado entre o eixo real e o vetor no sentido anti-horário.

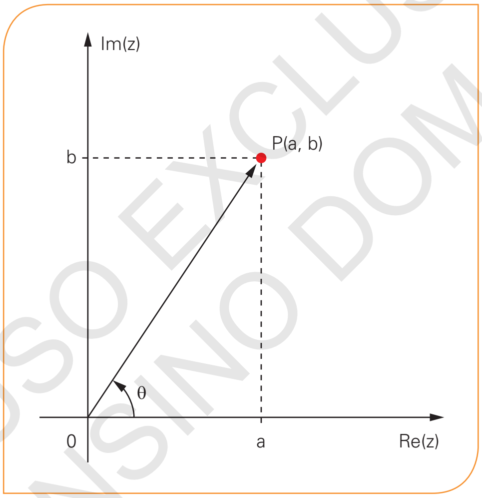
Uma vez que o número complexo não seja nulo – isto é, que não esteja sobre a origem do plano de Argand-Gauss –, dizemos que o ângulo formado é o **argumento do número complexo** e que seu valor estará compreendido entre 0 e 2π. Representamos o argumento como **arg(z)**. Ou seja:

$$\theta = \arg(z)$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

O fato de podermos representar um número complexo por meio de um vetor de origem O = (0, 0), extremidade P = (a, b) e imagem z = a + bi propicia uma nova maneira de expressar um número complexo – é a chamada **forma trigonométrica ou polar**.

Para isso, além de conhecer o argumento θ desse número, precisamos saber o valor de seu módulo $|z|$, a partir de agora representado por ρ (pronuncia-se rô).



Com base nessa ilustração, podemos extrair algumas informações. Usando algumas relações trigonométricas, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta$$

Com isso, substituindo os valores de **a** e **b** em z = a + bi, obtemos:

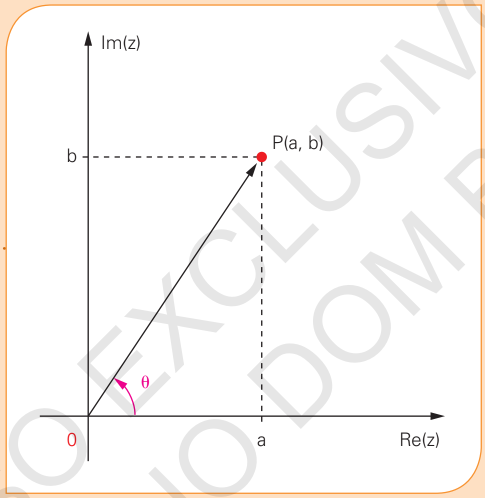
$z = a + bi \rightarrow$

$z = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \operatorname{sen}\theta)i \rightarrow$

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$
Forma trigonométrica ou polar de **z**

Números complexos e sua forma trigonométrica I

Argumento de um número complexo



Forma trigonométrica ou polar

$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unicamp – O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a

a) $\sqrt{2}$.
b) 0.
c) $\sqrt{3}$.
d) 1.

Sabemos que a divisão de $\frac{2014}{4}$ tem resto 2. Já a divisão $\frac{1987}{4}$ tem resto 3.

Então:

$i^{2014} = i^2 = -1$

$i^{1987} = i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

Assim, $z = -1 + (-i) \rightarrow z = -1 - i$.

Calculando o módulo:

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$|z| = \sqrt{1+1}$

$|z| = \sqrt{2}$.

2. Uece (adaptado) – Um número complexo z, em sua forma trigonométrica, é do tipo $z = p(\cos q + i\,\text{sen}\, q)$, onde p é o módulo de z e q é a medida em radiano do argumento de z. Ao apresentarmos o número complexo $z = -1 + i\sqrt{3}$ em sua forma trigonométrica, quais os parâmetros p e q, respectivamente?

Para $z = -1 + i\sqrt{3}$, temos que $|z| = p = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} =$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Assim:

$\cos q = \frac{-1}{2}$

$\text{sen}\, q = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow q = \frac{2\pi}{3}$

Assim, a forma trigonométrica de **z** é dada por:

$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

Portanto, $p = 2$ e $q = \frac{2\pi}{3}$.

3. IFSul-RS C5-H22

De uma forma criativa, após um exame, o professor entregou as notas expressas por números complexos aos seus alunos. Para cada aluno descobrir sua nota, era necessário calcular o módulo (observe que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é calculado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ do número complexo descrito no seu exame.

Dessa forma, as notas representadas pelos números complexos $N_1 = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$,

$N_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$ e $N_3 = \left(\frac{5}{2} + i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) - \frac{3i}{4}$

aproximados são, respectivamente,

a) 4; 3 e 3,5
b) 3; 4 e 3,5
c) 3; 4 e 5
d) 4; 3 e 5

Das notas N_1 e N_2, representadas na forma trigonométrica, os valores 4 e 3 são os valores dos módulos e, consequentemente, das notas, já que é representado por $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$.

Como N_3 está na forma algébrica, é necessário calcular o módulo para encontrarmos a nota. Assim:

$N_3 = \left(\frac{5}{2} + i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\right) - \frac{3i}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5i}{2} + \frac{i}{2} - i^2 - \frac{3i}{4} = \frac{5}{4} - \frac{11i}{4} + 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{9}{4} - \frac{11i}{4} \rightarrow |N_3| = \sqrt{\left[\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{11}{4}\right)^2\right]} \approx 3{,}5$

Logo, as notas são $N_1 = 4$, $N_2 = 3$ e $N_3 = 3{,}5$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

4. Uesb-BA – O argumento principal do número complexo $\frac{3i-1}{2-i}$ é igual a

a) 6
b) 4
c) 3
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{4}$

$$z=\frac{3i-1}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{6i-2+3i^2-i}{4-2i+2i-i^2}=\frac{5i-5}{5}=i-1\rightarrow z=-1+i$$

Para encontrarmos o argumento, temos:

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|}\ \text{e}\ \operatorname{sen}\theta=\frac{b}{|z|}$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Assim:

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}$$

5. Ifal-AL – Escrevendo o número complexo $z = 1 + i$ na forma trigonométrica, temos:

a) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

c) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

d) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

e) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

Sabemos que a forma trigonométrica de um número complexo é escrito por $z=\rho(\cos\theta+i\cdot\operatorname{sen}\theta)$. Assim:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Já o argumento será:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{\rho}\rightarrow\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\rho}\rightarrow\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta=\frac{\pi}{4}$

Assim, a forma trigonométrica será $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

6. UNIFENAS-MG (adaptado) – Dado o número complexo $Z = 2 + 3i$, obtenha o módulo do complexo conjugado.

O número conjugado de $\bar{Z}$ será $2 - 3i$. Assim, o módulo será:

$$|\bar{z}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}\rightarrow|z|=\sqrt{4+9}\rightarrow z=\sqrt{13}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEFS-BA – As soluções da equação $x^2 + bx + c = 0$ são números complexos distintos que, no plano de Argand--Gauss, estão na circunferência de raio 2 centrada na origem.

Portanto, as constantes reais b e c são tais que:

a) $b = 4$ e $-2 \leqslant c \leqslant 2$.
b) $-4 \leqslant b \leqslant 4$ e $c = 2$.
c) $-4 < b < 4$ e $c = 4$.
d) $-2 \leqslant b \leqslant 2$ e $c = 4$.
e) $-2 < b < 2$ e $-4 < c < 4$.

8. Unifeso-RJ – De todos os números complexos Z tais que $|Z - 5i| = 2$, seja Z_1 aquele cujo afixo se encontra mais próximo da origem.

A distância entre a origem e esse afixo é

a) 7
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

9. Sistema Dom Bosco – Se somarmos um número complexo da forma $z = a + bi$ com seu conjugado, obtemos 4. Subtraindo estes mesmos números, obtemos 4i. Sendo assim, a alternativa que representa a forma trigonométrica de z é

a) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

c) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

e) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

10. FGV – Seja f uma função que, a cada número complexo z, associa $f(z) = iz$, onde i é a unidade imaginária. Determine os complexos z de módulo igual a 4 e tais que $f(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z.

11. Mackenzie-SP – O número complexo $z = a + bi$ tal que z, $\frac{1}{z}$ e $1 - z$ tenham o mesmo módulo é:

a) $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

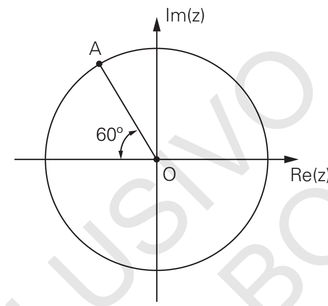
b) $z = 2 \pm \sqrt{3}i$

c) $z = 1 \pm \sqrt{3}i$

d) $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$

e) $z = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$

13. PUC-SP – No plano complexo de origem O, representado na figura abaixo, o ponto A é a imagem de um número complexo u cujo módulo é igual a 4.



Se B é o ponto imagem do complexo $v = \frac{u}{i}$, então é correto afirmar que:

a) o módulo de u + v é igual a $4\sqrt{2}$.
b) o módulo de u − v é igual a $4\sqrt{2}$.
c) B pertence ao terceiro quadrante.
d) B pertence ao quarto quadrante.
e) o triângulo AOB é equilátero.

12. Unicamp – Sejam a e b números reais não nulos. Se o número complexo $z = a + bi$ é uma raiz da equação quadrática $x^2 + bx + a = 0$, então:

a) $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $|z| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $|z| = \sqrt{3}$

d) $|z| = \sqrt{5}$

14. Mackenzie-SP (adaptado) – Se w é um número complexo, satisfazendo $\text{Re}(w) > 0$ e $(w + i) + |\overline{w} + i| = 6$, então qual é o valor de w?

15. PUC-SP – Em relação ao número complexo $z = i^{87} \cdot (i^{105} + \sqrt{3})$ é correto afirmar que:

a) sua imagem pertence ao 3º quadrante do plano complexo.

b) é imaginário puro.

c) o módulo de z é igual a 4.

d) seu argumento é igual ao argumento do número complexo $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

16. UEFS-BA – Sabendo-se que os afixos dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = -1 - 2i$ são vértices não consecutivos de um quadrado cujo lado mede x u.c., pode-se afirmar que x é igual a

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{10}$

c) $2\sqrt{5}$

d) 5

e) 10

17. UEM-PR (adaptado) – Considere o número complexo $z = \left(1, \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$.

a) Escreva z na forma algébrica e na forma trigonométrica.

b) Se multiplicarmos este número por seu conjugado, qual será o resultado?

ESTUDO PARA O ENEM

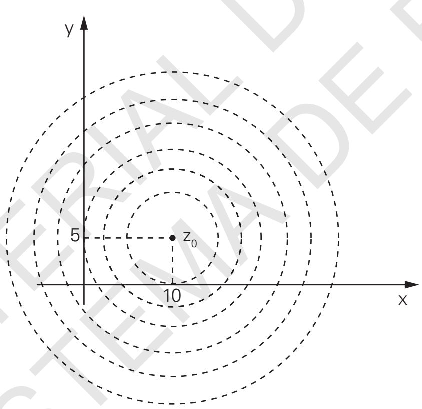
18. UFSC (adaptado) C5-H21

Em circuitos elétricos como, por exemplo, o das instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos. A relação $U = Z \cdot j$ fornece a tensão U em função da impedância Z e da corrente elétrica j. Nesses termos, essas variáveis são expressas através de números complexos $a + bi$. Considere agora $U = 110(\cos 0° + i\,\text{sen}\,0°)$ e $Z = 5 + 5i$. O valor da expressão $2a + b$, sendo $j = a + bi$, é

a) -11
b) $11 - i$
c) $11 + i$
d) 11
e) 2

19. UFSM-RS C5-H21

No plano complexo, o ponto z_0 representa o local de instalação de uma antena de wireless na praça de alimentação de um shopping.



Os pontos $x + yi = z$ que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação, $|z - z_0| = 30$.

De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por

a) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 900 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 775 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 10x + 20y - 900 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 900 = 0$

20. IFSul-RS (adaptado) C5-H22

Em 1823, Arthur Edwin (1861-1939) adotou o termo impedância, bem como utilizou 9 números complexos para os elementos dos circuitos elétricos em corrente alternada. Desde então, os números complexos são fundamentais para a Engenharia Elétrica, sendo que sem os mesmos todos os parâmetros de circuitos elétricos teriam que ser calculados através da álgebra e tudo seria extremamente difícil.

Disponível em: <http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=130%3Aaplicacoesee&catid=38%Aconteudosfvc&Itemid=40>. Acesso em: 10 abr. 2015. (Adaptado.)

Assim sendo, qual é o módulo do valor da impedância $z = \dfrac{2i}{i^{26} - i^3}$?

a) $2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$

39 NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA II

- Multiplicação e divisão na forma trigonométrica
- Potenciação na forma trigonométrica – Primeira fórmula de Moivre
- Radiciação na forma trigonométrica – Segunda fórmula de Moivre

HABILIDADES

- Operar números complexos na sua forma trigonométrica.
- Reconhecer a utilização das fórmulas de Moivre.

Propriedades operatórias da forma polar de um número complexo

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Considere os números complexos não nulos $z = \rho_z\left(\cos\theta_z + i\cdot \text{sen}\theta_z\right)$ e $w = \rho_w\left(\cos\theta_w + i\cdot \text{sen}\theta_w\right)$ na forma trigonométrica.

Para calcularmos o produto z · w, realizamos as seguintes operações:

$z \cdot w = [\rho_z(\cos\theta_z + i \cdot \text{sen}\ \theta_z)] \cdot [\rho_w(\cos\theta_w + i \cdot \text{sen}\ \theta_w)] \rightarrow$

$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot (\cos\theta_z + i \cdot \text{sen}\ \theta_z) \cdot (\cos\theta_w + i \cdot \text{sen}\ \theta_w) \rightarrow$

$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot (\cos\theta_z \cdot \cos\theta_w + i \cdot \text{sen}\theta_w \cdot \cos\theta_z + i \cdot \text{sen}\theta_z \cdot \cos\theta_w + i^2 \cdot \text{sen}\ \theta_z \cdot \cdot \text{sen}\ \theta_w) \rightarrow$

$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot [(\cos\theta_z \cdot \cos\theta_w - \text{sen}\theta_z \cdot \text{sen}\theta_w) + i \cdot (\text{sen}\theta_w \cdot \cos\theta_z + \text{sen}\theta_z \cdot \cos\theta_w)] \rightarrow$

$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot [\cos(\theta_z + \theta_w) + i \cdot \text{sen}\ (\theta_z + \theta_w)]$

Para calcularmos o quociente $\frac{z}{w}$, procedemos da seguinte forma:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z \cdot (\cos\theta_z + i\cdot\text{sen}\theta_z)}{\rho_w \cdot (\cos\theta_w + i\cdot\text{sen}\theta_w)} \rightarrow$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z \cdot (\cos\theta_z + i\cdot\text{sen}\theta_z)}{\rho_w \cdot (\cos\theta_w + i\cdot\text{sen}\theta_w)} \cdot \frac{(\cos\theta_w - i\cdot\text{sen}\theta_w)}{(\cos\theta_w - i\cdot\text{sen}\theta_w)} \rightarrow$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w} \cdot \frac{(\cos\theta_z \cdot \cos\theta_w - i\cdot\text{sen}\theta_w \cdot \cos\theta_z + i\cdot\text{sen}\theta_z \cdot \cos\theta_w - i^2\cdot\text{sen}\theta_z\cdot\text{sen}\theta_w)}{\cos^2\theta_w + \text{sen}^2\theta_w} \rightarrow$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w} \cdot \frac{(\cos\theta_z \cdot \cos\theta_w + \text{sen}\theta_z\cdot\text{sen}\theta_w) + i\cdot(\text{sen}\theta_z \cdot \cos\theta_w - \text{sen}\theta_w \cdot \cos\theta_z)}{1} \rightarrow$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w} \cdot \left[\cos\left(\theta_z - \theta_w\right) + i\cdot\text{sen}\left(\theta_z - \theta_w\right)\right]$$

Dessa forma, com base em **z** e **w** (não nulos), cujos módulos são respectivamente ρ_z e ρ_w, sendo seus argumentos θ_z e θ_w, nessa ordem, temos:

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w \cdot [\cos(\theta_z + \theta_w) + i \cdot \text{sen}\ (\theta_z + \theta_w)]$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w} \cdot \left[\cos\left(\theta_z - \theta_w\right) + i\cdot\text{sen}\left(\theta_z - \theta_w\right)\right]$$

POTENCIAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA - PRIMEIRA FÓRMULA DE MOIVRE

Com base em um número complexo **z** (não nulo) em sua forma trigonométrica, podemos obter potências desse número usando as mesmas técnicas que conhecemos no campo dos números reais.

Desejamos obter $z^n = [\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)]^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, utilizando a multiplicação sucessiva de números complexos, conforme visto anteriormente. Assim:

$$Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot Z \cdot \ldots \cdot Z \cdot Z \cdot Z}_{\text{n fatores}}$$

Dessa forma, realizamos a seguinte operação:

$$Z^n = \underbrace{\rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot \ldots \cdot \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)}_{\text{n fatores}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{Z^n = \rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho \cdot \rho}_{\text{n fatores}} \cdot \left[\cos\ \underbrace{(\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta + \theta + \theta)}_{\text{n fatores}} + i \cdot \text{sen}\ \underbrace{(\theta + \theta + \theta + \ldots + \theta + \theta + \theta)}_{\text{n fatores}}\right]$$

Assim, obtemos a fórmula conhecida como **primeira fórmula de Moivre**:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \text{sen}\,n\theta)$$

RADICIAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA – SEGUNDA FÓRMULA DE MOIVRE

Com base nos números complexos **z** e **w** não nulos, dizemos que todo número **w**, tal que $w^n = z$, é a raiz enésima de z, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

Assim, dizemos que a fórmula $w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ resulta na k-ésima raiz de **z**, com $0 \leqslant k \leqslant (n - 1)$ e $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$. Essa fórmula também é conhecida como **segunda fórmula de Moivre**.

Observe o exemplo a seguir.

Precisamos calcular as raízes quadradas complexas de $z = 3i$. Para isso, é necessário expressarmos o número **z** em sua forma trigonométrica. Então:

$$\rho = \sqrt{(0^2 + 3^2)} = 3$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{3} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{0}{3} = 0$$

Assim, $z = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$.

Utilizando a segunda fórmula de Moivre e sendo $n = 2$ (raiz quadrada), temos que $k = 0$ ou $k = 1$.

O módulo para ambas as raízes tem $\sqrt[n]{\rho}$, ou seja, $|w_0| = |w_1| = \sqrt{3}$.

Para $k = 0$, obtemos $\arg(w_0) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Já para $k = 1$, obtemos $\arg(w_1) = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4}$.

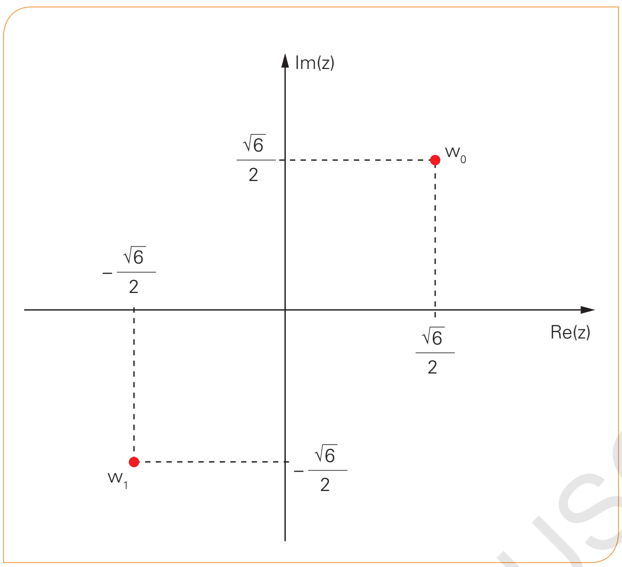
Dessa forma, as duas raízes quadradas de z = 3i são:

$$w_0 = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

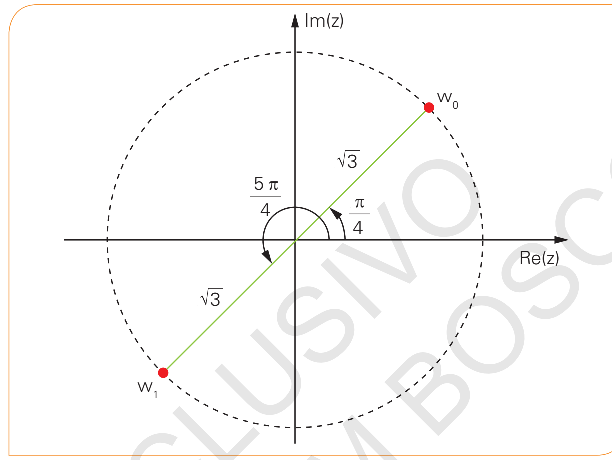
$$w_1 = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{5\pi}{4} \right) =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Observe a representação geométrica desse resultado no plano de Argand-Gauss:



Note que essas raízes são afixos de pontos simétricos em relação à origem. Além disso, se traçarmos uma circunferência no plano de Argand-Gauss com centro na origem e raio $\sqrt{3}$ (módulo das raízes), veremos que esses pontos são extremidades de um de seus diâmetros.



Assim, de maneira geral, podemos dizer que as **n** raízes de um número complexo **z** na sua forma trigonométrica são afixos de **n** pontos que dividem a circunferência de centro na origem no plano de Argand-Gauss e raio $\sqrt[n]{\rho}$ em **n** arcos congruentes medindo $\frac{2\pi}{n}$ rad têm argumentos que formam uma progressão aritmética em que o primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ rad e cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$ rad.

ROTEIRO DE AULA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA II

Multiplicação: $z \cdot w = \rho_z \rho_w \cdot [\cos(\theta_z + \theta_w) + i \cdot \text{sen}(\theta_z + \theta_w)]$

Divisão: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_z}{\rho_w} \cdot \left[\cos(\theta_z - \theta_w) + i \cdot \text{sen}(\theta_z - \theta_w)\right]$

Potenciação: $z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \text{sen}\, n\theta)$

Radiciação: $w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EsPCEx-Aman – Se $(1+i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)=x+iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, o valor de $\sqrt{3}\cdot x+y$ é

a) $\sqrt{6}$.
b) $\sqrt{3}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) $3\sqrt{6}$.
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Escrevendo 1 + i na forma trigonométrica, temos:

$$(1+i)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Logo, $(1+i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\rightarrow$

Portanto, $\sqrt{3}\cdot x+y=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$.

2. Sistema Dom Bosco – Dados os números complexos $z = 2(\cos 15° + i\operatorname{sen}15°)$, $w = \sqrt{3}(\cos 30° + i\operatorname{sen}30°)$ e $k = 4(\cos 45° + i\operatorname{sen}45°)$:

a) Calcule z · w · k.

b) Calcule $\frac{w}{z}$ e $\frac{k}{z}$.

a) Da fórmula de Moivre, temos:

$$z\cdot w\cdot k=\left[2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sqrt{3}(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)\right]\cdot\left[4(\cos 45°+i\operatorname{sen}45°)\right]\rightarrow$$

$$z\cdot w\cdot k=2\cdot\sqrt{3}\cdot 4[(\cos(15°+30°+45°)+i\operatorname{sen}(15°+30°+45°)]\rightarrow$$

$$z\cdot w\cdot k=8\sqrt{3}[(\cos 90°+i\operatorname{sen}90°]$$

b) Para $\frac{w}{z}$ temos $\frac{\sqrt{3}(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)}{2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)}$. Da mesma fórmula de Moivre, obtemos:

$$\frac{w}{z}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot[\cos(30°-15°)+i\operatorname{sen}(30°-15°)]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot[\cos 15°+i\operatorname{sen}15°]$$

Já $\frac{k}{z}=\frac{4(\cos 45°+i\operatorname{sen}45°)}{2(\cos 15°+i\operatorname{sen}15°)}\rightarrow$

$$\rightarrow\frac{k}{z}=\frac{4}{2}\cdot[\cos(45°-15°)+i\operatorname{sen}(45°-15°)]=2\cdot(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)$$

3. Sistema Dom Bosco C5-H19

Na engenharia elétrica utilizam-se os números complexos nos estudos de impedância e fasores, por exemplo. Esta utilização é de extrema importância, já que sem os números complexos o cálculo seria extremamente difícil. Assim sendo, a fim de iniciar os estudos com seus alunos, o professor da turma de engenharia elétrica decidiu relembrar alguns conceitos sobre números complexos. Para isso, forneceu as seguintes suposições:

I. O número complexo 1 + i pode ser representado como $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

II. Para $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, o valor de $z^6=64\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$.

III. Se $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $w=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ então $z\cdot w=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

Das suposições acima, acertaram os alunos que marcaram como corretos os itens:

a) I
b) II
c) III
d) I e II
e) I e III

Analisando cada item, temos:

I) $z = 1 + i \rightarrow |z| = \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

O argumento é dado por:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

Assim, $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ (portanto, correta).

II) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. Da fórmula de Moivre, temos que:

$$z^6=2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{3}\right)=64(\cos 2\pi+i\operatorname{sen}2\pi)\text{ (incorreta)}$$

III) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $w=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$$z\cdot w=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$z \cdot w = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, (portanto, correta)

Assim, acertou quem assinalou os itens I e III como corretas.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

4. Effom – Seja o número complexo $z = -1 - \sqrt{3}i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:

a) $z = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $z = 256\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z = 256\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z = 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z = 256(\cos 2\pi + i\text{sen} 2\pi)$

Primeiro obtemos a forma trigonométrica de **z** calculando o módulo e o argumento. Então, aplicamos a fórmula de Moivre.

Calculando o módulo de z:

$$z = \sqrt{(-1) + (-\sqrt{3})} = \sqrt{4} = 2$$

Considerando θ como argumento de z:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Consequentemente, $\theta = \frac{4\pi}{3}$ rad.

Assim:

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$$

Pela fórmula de Moivre:

$$z^8 = 2^8\left(\cos\left(8.\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(8.\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 256\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

5. Unit-AL – Dado o número complexo

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\text{sen}\frac{2\pi}{9}$, o módulo de z^7 é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{32}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Do enunciado, temos

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{2\pi}{9} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\frac{2\pi}{9} \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{9} + i\text{sen}\frac{2\pi}{9}\right].$$

Da fórmula de Moivre, $z^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)\right]$.

Assim, para z^7 temos:

$$z^7 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7\left[\cos\left(7.\frac{2\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(7.\frac{2\pi}{9}\right)\right] = \frac{8\sqrt{2}}{128}\left[\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\left[\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i\text{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right]$$

Como na fórmula **ρ** é o módulo, temos que módulo de z^7 é $\frac{\sqrt{2}}{16}$.

6. Sistema Dom Bosco – Dado o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\text{sen}\frac{\pi}{10}$, calcule z^{20}.

Do enunciado, temos que $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\text{sen}\frac{\pi}{10} = 1\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\text{sen}\frac{\pi}{10}\right)$.

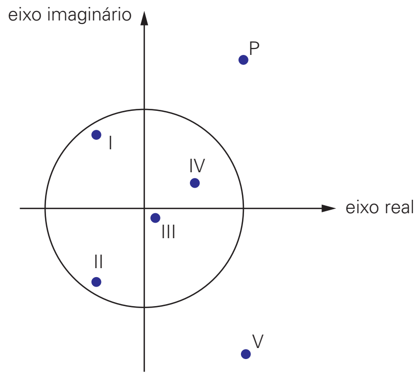
Da fórmula de Moivre, chegamos a:

$$z^{20} = 1^{20}\left[\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{10}\right) + i\text{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{10}\right)\right] = \cos(2\pi) + i\text{sen}(2\pi)$$

Portanto, $z^{20} = 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

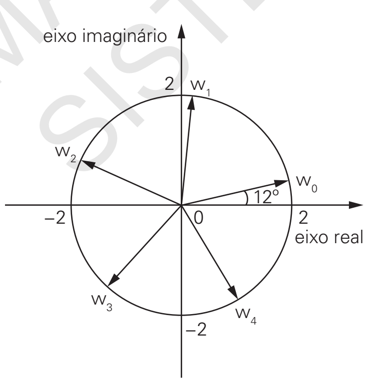
7. FGV – Seja Z um número complexo cujo afixo P está localizado no 1º quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.



Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de $\frac{1}{z}$ pode ser

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

8. Cefet-MG – Considere as raízes complexas w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 da equação $w^5 = z$, onde $z \in \mathbb{C}$ representadas graficamente por



O número complexo z é

a) 16i.

b) 32i.

c) 16+16i.

d) $16+16\sqrt{3}i$.

e) $32+32\sqrt{3}i$.

9. Uece – Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a – 1, e n é um número natural maior do que 2, então pode-se afirmar corretamente que $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que :

a) n for ímpar.

b) n for um múltiplo de 4.

c) n for um múltiplo de 3.

d) n for um múltiplo de 5.

10. UnB-DF (adaptado) – Considerando que, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, cada ponto (x, y) do plano cartesiano seja identificado com um número complexo $z = x + iy$, em que $(i)^2 = -1$. Quais os valores de $\sqrt[3]{i}$?

11. Sistema Dom Bosco – Dado o número complexo $z = -1$, assinale a alternativa que representa o produto das raízes cúbicas deste número.

a) 1
b) $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\dfrac{1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
d) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
e) –1

12. Unioeste-PR – Considere θ um número real qualquer. Sobre os números complexos $z = \cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta)$ e $w = \cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)$, pode-se afirmar que:

a) $|z| + |w| = 1$.
b) $z^2 - w^2 = 0$.
c) $z = \overline{w}$
d) $z - i\overline{w} = 0$
e) $|z|^2 + |w|^2 = 2$.

13. ITA – Se $z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de

$2\text{arcsen}(\text{Re}(z))+5\text{arctg}(2\text{Im}(z))$ é igual a

a) $-\frac{2\pi}{3}$
b) $-\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{4\pi}{3}$
e) $\frac{5\pi}{3}$

14. EsPCEx-Aman (adaptado) – Seja a igualdade

$\frac{a}{3}-\frac{bi}{5}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4$, onde i é a unidade imaginária.

Se a e b são números reais, então qual é o quociente $\frac{a}{b}$?

15. UEFS-BA – Os números complexos $z_1, z_2,...z_n$ têm módulos iguais e constituem no plano complexo os vértices de um polígono regular.

Se z_1 for real positivo, então o produto $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ será

a) real, se n for ímpar, e imaginário, se n for par.
b) imaginário, se n for ímpar, e real, se n for par.
c) real negativo, se n for ímpar, e positivo, se n for par.
d) real positivo, se n for ímpar, e negativo, se n for par.
e) real, sendo que seu sinal independe de n ser par ou ímpar.

16. UEFS-BA – Os números complexos z e w têm módulos $|z| = |w| = 1$. Se z, w e seu produto zw formam, no plano de Argand-Gauss, os vértices de um triângulo equilátero, é correto afirmar que:

a) z é real.
b) $w = \pm 1$ ou $w = \pm i$
c) zw é um imaginário puro.
d) a parte real de w é positiva.
e) z e w são complexos conjugados.

17. EPCAR-MG (adaptado) – Considerando os números complexos z_1 e z_2, tais que,

I. z_1 é a raiz cúbica de $8i$ que tem afixo no segundo quadrante

II. z_2 é raiz da equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e $Im(z_2) > 0$

Determine o valor de $|z_1 + z_2|$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um grupo secreto se reúne mensalmente com todos os seus membros e, para isso, codificam o horário do encontro utilizando números complexos.

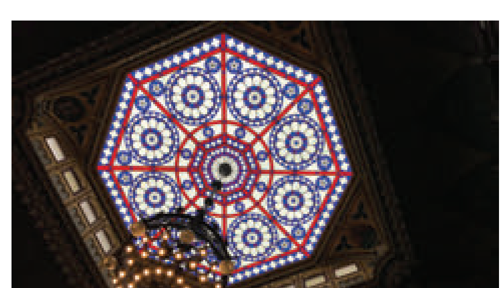
Eles utilizam os números $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ e $w = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e definem o horário com base em operações entre eles, de modo que seus afixos representem as extremidades dos ponteiros do relógio.

Neste mês, a hora é definida fazendo $\frac{z}{w}$ e o minuto fazendo $z \cdot w$. Assim, sabendo que a circunferência em que o relógio está inserido tem diâmetro igual a 4, o horário da reunião deste mês é:

a) 12h
b) 14h
c) 16h
d) 14h30
e) 12h10

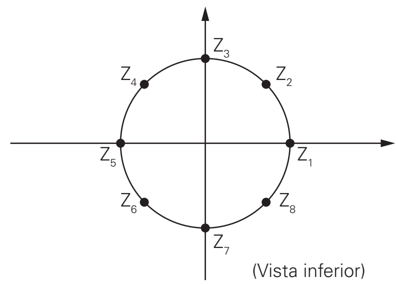
19. UFSM-BA (adaptado) C5-H21

Uma das bibliotecas mais lindas do mundo, o Real Gabinete Português de Leitura, situa-se no Rio de Janeiro. Foi fundada pela princesa Isabel em 1887 e conta com um acervo de cerca de 350 000 exemplares, dentre os quais muitas obras raras. Na claraboia da entrada, encontra-se um enorme candelabro. A fotografia a seguir mostra uma vista do candelabro.



BING FANG/DREAMSTIME

Suponha que o candelabro tenha o formato circular de 2 metros de diâmetro com lâmpadas igualmente distribuídas nas posições Z_1, Z_2, ..., Z_8 conforme a figura a seguir.

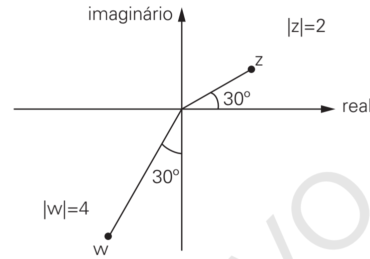


Além disso, se Z_1, Z_2, ..., Z_8 representam números complexos no plano de Argand-Gauss, então o produto de Z_2 com o conjugado de Z_6 é

a) -4
b) -1
c) $-4i$
d) $-i$
e) i

20. UFRJ (adaptado) C5-H22

No jogo Batalha Complexa são dados números complexos z e w, chamados mira e alvo respectivamente. O tiro certeiro de z em w é o número complexo t tal que tz = w.



Considere a mira z e o alvo w indicados na figura acima. O tiro certeiro de z em w é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
b) $\sqrt{3}+i$
c) $\sqrt{3}-i$
d) $-\sqrt{3}-i$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

40

POLINÔMIOS I

- O que é um polinômio?
- Grau de um polinômio
- Valor numérico de um polinômio
- Igualdade de polinômios
- Adição e subtração de polinômios
- Multiplicação de polinômios

HABILIDADES

- Reconhecer um polinômio.
- Identificar o grau de um polinômio.
- Atribuir um valor numérico a um polinômio.
- Compreender a identidade de polinômios.
- Ser capaz de realizar operações de adição, subtração e multiplicação entre polinômios.

GUZEL STUDIO/ SHUTTERSTOCK

Galileu Galilei (1564-1642) soltou do alto da torre de Pisa várias esferas de massas distintas (bolas de mármore, de chumbo e de madeira) e comprovou que chegavam ao mesmo tempo no solo.

Introdução

Os polinômios estão presentes em muitas situações do nosso dia a dia. Na queda livre, por exemplo, o movimento que um corpo deixado em liberdade em um campo gravitacional realiza, sem ser afetado por outras forças, pode ser expresso por $P(t) = \frac{gt^2}{2}$, em que:

t indica o tempo percorrido pelo corpo até chegar ao solo;

g é a aceleração da gravidade na Terra $\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)$;

P(t) é o valor do espaço percorrido pelo corpo nesse tempo t.

POLINÔMIO

O **polinômio** é uma expressão algébrica formada por um ou mais monômios, chamados **termos do polinômio**.

De modo geral, podemos expressar um polinômio por:

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Nessa fórmula:

x é a **variável**;

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... + a_2, a_1, a_0$ são os **coeficientes** (ambos complexos).

Observe alguns exemplos. A expressão:

- $F(x) = 4x^5 - 2x^4 - x^3 + 5x + 7$ indica um polinômio de uma variável (no caso, x);
- $P(x, y) = x^2y - 2xy^2 + 4xy - 1$ é um polinômio de duas variáveis (no caso, x e y);

- $H(x) = -5$ é um **polinômio constante**. É composto por um número, em geral, complexo e não nulo;
- $G(x) = 0$ também é um polinômio constante, porém composto por coeficientes nulos. É chamado **polinômio nulo**.

Quando um polinômio **não** apresenta monômios semelhantes, dizemos que ele é **reduzido**. Observe o polinômio:

$P(x) = 3x^3 + x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

Note que ele pode ser reduzido somando seus monômios semelhantes. Dessa forma:

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ (polinômio reduzido)

GRAU DE UM POLINÔMIO

O **grau** de um polinômio é o valor do maior expoente entre suas variáveis, desde que seu coeficiente não seja nulo. O grau de um polinômio P(x) é representado por gr(P).

Dizemos que o termo independente de um polinômio reduzido é o monômio de grau 0.

Observe alguns exemplos:

- $G(x) = 3\overset{\text{maior expoente}}{x^4} + 4x - 2x^5 + 6 \to gr(G) = 5$
  (o termo independente é 6).
- $P(x) = -\overset{\text{maior expoente}}{x^6} + 2x^5 - 2x^3 + x \to gr(P) = 6$
  (o termo independente é 0).

VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Quando atribuímos um valor para a variável de um polinômio e obtemos seu valor, dizemos que esse é o **valor numérico** do polinômio.

Dado o polinômio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 5$, o valor numérico para $x = 3$ é:

$x = 3 \to P(3) = 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 - 5 = 34$

Ou seja, 34 é o valor numérico de P(x) para $x = 3$.

RAIZ DE UM POLINÔMIO

O valor complexo α é raiz do polinômio P(x), quando obtemos valor numérico nulo para $P(\alpha)$.

Observe o polinômio $H(x) = -x^2 + 4x - 4$. Ao atribuirmos o valor $x = 2$, temos o valor numérico nulo:

$$H(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 0$$

Dessa forma, $x = 2$ é raiz do polinômio H(x).

IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Dois polinômios são **iguais** ou **idênticos** caso seus valores numéricos sejam iguais para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Ou seja:

$$P(x) = Q(x) \leftrightarrow P(\alpha) = Q(\alpha) \ (\forall\ \alpha \in \mathbb{C})$$

Portanto, dois polinômios P(x) e Q(x) serão iguais se tiverem os respectivos coeficientes iguais (os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais).

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$

Para obtermos $P(x) = Q(x)$, devemos ter $a = 2$, $b = 5$, $c = -4$ e $d = 3$.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

A **soma** de dois ou mais polinômios é obtida somando-se os termos semelhantes. Para facilitar o processo, organizamos os polinômios um abaixo do outro, alinhando os termos de mesmo grau. Assim, realizamos o cálculo termo a termo.

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$Q(x) = 2x^2 - x - 3$

Vamos calcular a soma $P(x) + Q(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3 & +\ x^2 & +\ x & +\ 1 \\ + & & 2x^2 & -\ x & -\ 3 \\ \hline & x^3 & +\ 3x^2 & & -\ 2 \end{array}$$

Assim, $P(x) + Q(x)$ resulta em $x^3 + 3x^2 - 2$.

De maneira análoga, a **subtração** de polinômios pode ser obtida por $P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$. Ou seja, basta aplicarmos a técnica da soma, porém a realizando com o oposto do subtraendo.

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = x^2 - x + 2$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5$

Vamos calcular a diferença $P(x) - Q(x)$.

Note que o oposto do subtraendo é dado por $-Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 5$.

Dessa forma:

$$\begin{array}{rrrr} & & x^2 - & x + 2 \\ - & x^3 + 2x^2 & & -\ 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrr} & & x^2 & -\ x & +\ 2 \\ + & -x^3 & -\ 2x^2 & & +\ 5 \\ \hline & -x^3 & -\ x^2 & -\ x & -\ 7 \end{array}$$

Portanto, a subtração $P(x) - Q(x)$ resulta em $-x^3 - x^2 - x + 7$.

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

A **multiplicação** de dois ou mais polinômios pode ser obtida aplicando-se a propriedade distributiva.

Por exemplo, considere os polinômios:

$P(x) = 3x - 4$

$Q(x) = -2x + 5$

Vamos calcular a multiplicação $P(x) \cdot Q(x)$.

$$P(x) \cdot Q(x) = (3x - 4) \cdot (-2x + 5)$$

$P(x) \cdot Q(x) = 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot 5 + (-4) \cdot (-2x) + (-4) \cdot 5$

$P(x) \cdot Q(x) = -6x^2 + 15x + 8x - 20$

$P(x) \cdot Q(x) = -6x^2 + 23x - 20$

POLINÔMIOS I

Definição

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{(n-1)} = a_{n-2}x^{(n-2)} + ... + a_2x^2 + a_1x = a_0$

Considere os polinômios
$P(x) = 7x^6 - x + 9$ e
$G(x) = -x^4 - 3x + 1$

Grau

$gr(P) = 6$

Valor numérico

$G(-1) = 3$

Adição

$P(x) + G(x) = 7x^8 - x^4 + 2x + 8$

Subtração

$P(x) - G(x) = 7x^6 + x^4 + 2x + 8$

Multiplicação

$P(x) \cdot G(x) = 7x^{10} - 21x^7 - 7x^6 + x^5 - 9x^4 + 3x^2 - 28x + 9$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio – Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que p(x) é igual a:

a) $2x^2(x-2)$
b) $2x(x-1)(x+1)$
c) $2x(x^2-2)$
d) $x(x-1)(x+1)$
e) $x(2x^2-2x-1)$

Do enunciado, temos que 1 é raiz de p(x). Portanto, p(1) = 0:
$2 \cdot 1^3 - a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 0$
$2 \cdot 1 - a \cdot 1 - 2 = 0$
$2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = 0$
Assim:
$p(x) = 2x^3 - 0 \cdot x - 2x \rightarrow p(x) = 2x^3 - 2x \rightarrow p(x) = 2x(x^2 - 1) \rightarrow$
$\rightarrow p(x) = 2x(x - 1)(x + 1)$

2. Cefet-MG – Os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^4 - 2x + kx^2 - 3x - 2$ têm uma única raiz em comum. Quais são valores possíveis para k?

De A(x), as raízes são obtidas por $x^2 - 3x + 2 = 0$. Então:
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$
$x = \frac{-(-3) \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 1$

Como há apenas uma raiz em comum, para $x_1 = 2$, temos:
$B(2) = 0 \rightarrow 2^4 - 2 \cdot 2^3 + k \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 0 \rightarrow k = 2$
Já para $x_2 = 1$:
$B(1) = 0 \rightarrow 1^4 - 2 \cdot 1^3 + k \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0 \rightarrow k = 6$
Portanto, os possíveis valores de k são 2 e 6.

3. Sistema Dom Bosco C5-H22

A fim de melhor controlar o gasto de combustível em cada área da empresa, uma fábrica passou a utilizar dois tanques que tinham seus níveis expressos por: $H_1(t) = 250t^3 - 190t + 10$ e $H_2(t) = 150t^3 + 210t + 10$, em que t é o tempo medido em horas.

Ao iniciar o dia (t = 0), em ambos o nível de combustível é igual. Assim, em que horário do dia é possível observar que os níveis voltam a se igualar?

a) t = 1,0
b) t = 1,5
c) t = 2,0
d) t = 2,5
e) t = 3,0

Verificamos que os níveis são expressos por 2 polinômios de 3º grau:
$H_1(t) = 250t^3 - 190t + 10$ e $H_2(t) = 150t^3 + 210t + 10$
Para que os níveis voltem a se igualar, temos que:
$H_1(t) = H_2(t)$
Assim:
$250t^3 - 190t + 10 = 150t^3 + 210t + 10$
$100t(t^2 - 4) = 0$
Logo:
$100t = 0$ ou $t^2 - 4 = 0$
$100t = 0 \rightarrow t = 0$ (dado no enunciado)
$t^2 - 4 = 0 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = \sqrt{4} = \pm 2$
Como −2 não convém, os níveis voltam a se igualar em t = 2.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

4. Sistema Dom Bosco – Se o polinômio $P(x) = x^3 + 3x + 2$ for multiplicado por $g(x) = x^2 - 3$, obtemos:

a) um polinômio de grau 3 dado por $x^5 + 6x^3 + 11x + 6$
b) um polinômio de grau 5 dado por $x^5 + 2x^2 - 9x - 6$
c) um polinômio de grau 5 dado por $x^5 + 6x^3 + 2x^2 - 9x - 6$
d) um polinômio de grau 3 dado por $3x^3 - 9x + 6$
e) um polinômio de grau 5 dado por $x^5 + 2x^2 + 9x - 6$

Dados $P(x) = x^3 + 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 3$, temos que $P(x) \cdot g(x)$ será:
$(x^3 + 3x + 2) \cdot (x^2 - 3) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 3x^3 - 9x - 6 = x^5 + 2x^2 - 9x - 6$

5. EEAr-SP – Dado o polinômio: $ax^3 + (2a + b)x^2 + cx + d - 4 = 0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

a) $a = 0$ e $b = 0$
b) $a = 1$ e $b \neq 0$
c) $a = 0$ e $b \neq 0$
d) $a = -1$ e $b = 0$

Para que um polinômio seja de 2º grau, o maior expoente do polinômio deve ser igual a 2.
Assim, temos que o termo a^3 deve ser nulo. Logo, $a = 0$.
Já o termo $(2a + b)x^2$ deve ser diferente de zero. Logo, $2a + b \neq 0$.
Como $a = 0$:
$2(0) + b \neq 0$
Então, $b \neq 0$.

6. UFPE – Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que $p(x + 1) - p(x) = 6x^2$ e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

Para $p(x + 1) = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1) =$
$= ax + (3a + 2b)x + (3a + 2b + c)x + a + b + c$
Logo:
$p(x + 1) - p(x) = 6x^2 \rightarrow 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c = 6x$
Da identidade, temos:
$3a = 6 \rightarrow a = 2$
$3a + 2b = 0 \rightarrow 3 \cdot 2 + 2b = 0 \rightarrow b = -3$
$a + b + c = 0 \rightarrow 2 + (-3) + c = 0 \rightarrow c = 1$
Portanto, $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$.
Assim:
$a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 4 + 9 + 1 = 14$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. EEAr-SP – Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2
b) 1 e –2
c) –1 e 3
d) –1 e –3

8. CFTMG – Se uma das raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^2 + ax + b$ é 2 e $P(1) = 9$, então o valor de $a^5 - 4b$ é

a) –64
b) –28
c) 16
d) 24

9. Unesp – Sendo x um número real maior que $\frac{2}{3}$, a área de um retângulo é dada pelo polinômio $3x^2 + 19x - 14$. Se a base desse retângulo é dada pelo polinômio $x + 7$, o quadrado da diagonal do retângulo é expresso pelo polinômio:

a) $10x^2 + 26x + 29$
b) $10x^2 + 53$
c) $10x^2 + 65$
d) $4x^2 + 2x + 53$
e) $10x^2 + 2x + 53$

10. Unicamp – Seja (a,b,c,d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$. Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

11. UFJF-MG – Qual é o polinômio que ao ser multiplicado por $g(x) = 3x + 2x + 5x - 4$ tem como resultado o polinômio $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x + 4$?

a) $x^3 + x^2 + x$
b) $x^3 + x^2 - x$
c) $x^3 + 3x^2 + x$
d) $x^3 + 3x^2 + 2x$
e) $x^3 + 3x^2 - x$

12. FGV – Um dos fatores do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é $(x+3)$. Outro fator desse polinômio é

a) $(x + 8)$
b) $(x - 5)$
c) $(x + 4)$
d) $(x - 1)$
e) $(x + 1)$

13. UFRGS – As raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 1$ são

a) {i; –i; 0}

b) {1; –i; 0}

c) {1; –1; –i}

d) {i; –i; 1 + i; 1 – i}

e) {i; –i; –1 + i; – 1 – i}

14. Unicamp – Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Mostre que, se r é uma raiz de p(x), então $\frac{1}{r}$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

b) Determine os valores de a e b para os quais a sequência (p(–1), p(0), p(1)) é uma progressão aritmética (PA), cuja razão é igual a p(2).

15. PUC-Rio – Considere o polinômio $p(x) = x^2 + bx + 3$ e assinale a alternativa correta.

a) O polinômio tem pelo menos uma raiz real para todo $b \in \mathbb{R}$.

b) O polinômio tem exatamente uma raiz real para b = 12.

c) O polinômio tem infinitas raízes reais para b = 0.

d) O polinômio não admite raiz real para $b = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

e) O polinômio tem exatamente três raízes reais para $b = \pi$.

16. UFU-MG – O polinômio p(x), na variável real x, é obtido por meio da multiplicação sucessiva de termos de tipo $(x - i)^i$ para i = 1, 2,..., k. Desse modo, $p(x) = (x - 1)(x - 2)^2 \ldots (x - k)^k$, sendo k um número natural constante.

Se o grau de p(x) é igual a 210, logo k é um número:

a) primo

b) divisível por 5

c) múltiplo de 7

d) ímpar

17. ITA – Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2.$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de p(x).

18. Sistema Dom Bosco C5-H22

O estudo da proliferação de bactérias é de extrema importância para a saúde, tendo em vista que estas podem causar diversas doenças. Muitas indústrias farmacêuticas utilizam estes estudos para determinar o tempo de uso de determinado medicamento. Assim, para determinada bactéria, obteve-se que o tempo de uso do medicamento para que a bactéria fosse eliminada deveria seguir a função $Q(t) = t^2 - 8t - 84$, em que t é o número de aplicações total do medicamento. Sabendo que a pessoa só pode utilizar o medicamento 2 vezes ao dia, quantos dias são necessários para que a bactéria seja eliminada?

a) 7 dias
b) 8 dias
c) 14 dias
d) 16 dias
e) 20 dias

19. Sistema Dom Bosco C5-H21

Uma bióloga, ao estudar duas colônias de fungos inicialmente com as mesmas quantidades de massa, obteve que a colônia A reproduzia-se de acordo com $A(x) = -2 - 24t - t^2 + t^3$ e que a colônia B reproduzia-se de acordo com $B(x) = 70 - 3t - 2t^2 + t^3$. Sendo t o tempo medido em horas, depois de quanto tempo as colônias A e B terão novamente a mesma quantidade de massa?

a) 3 horas
b) 8 horas
c) 21 horas
d) 24 horas
e) 48 horas

20. Unesp (adaptado) C5-H21

Um professor de matemática passou o seguinte desafio para os seus alunos, em uma aula sobre polinômios: "Sendo x um número real maior que $\frac{2}{3}$, a área de um retângulo é dada pelo polinômio $3x^2 + 19x - 14$. Se a base desse retângulo é dada pelo polinômio $x + 7$, o quadrado da diagonal do retângulo é expresso por qual polinômio?". O polinômio encontrado é

a) $10x^2 + 26x + 29$
b) $10x^2 + 53$
c) $10x^2 + 65$
d) $4x^2 + 2x + 53$
e) $10x^2 + 2x + 53$

41 POLINÔMIOS II

- Divisão de polinômios: método da chave
- Dispositivo prático de Briot-Rufini

HABILIDADES

- Aplicar as técnicas de divisão de polinômios.
- Reconhecer situações em que se utiliza divisão de polinômios.
- Identificar em quais situações pode ser aplicado o dispositivo prático de Briot-Rufini.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS: MÉTODO DA CHAVE

Para dividir dois polinômios, necessariamente o grau do dividendo deve ser maior ou igual ao grau do divisor.

Dessa forma, toda divisão satisfaz a seguinte condição:

$$\underbrace{D(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Quociente}} \cdot \underbrace{d(x)}_{\text{Divisor}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto}}$$

O grau do polinômio dividendo será sempre igual à soma dos graus dos polinômios quociente e divisor. Além disso, o grau do polinômio resto é sempre menor que o grau do divisor.

Para realizarmos a divisão entre dois polinômios, seguimos estes passos:

- **1.** Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor, obtendo assim o primeiro termo do quociente.
- **2.** Multiplicamos o termo obtido por cada termo do divisor e subtraímos o resultado do dividendo.
- **3.** Com o novo dividendo, repetimos o processo até que o grau seja menor que o grau do divisor.

Uma vez que o resto da divisão $P(x) \div Q(x)$ seja um polinômio nulo $R(x) = 0$, dizemos que a divisão é exata ou que o polinômio $P(x)$ é divisível por $Q(x)$.

Com base nos polinômios $P(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$ e $Q(x) = x^2 - 1$, vamos obter $P(x) \div Q(x)$

- **1.** Encontramos o quociente entre o termo de maior grau do dividendo e o termo de maior grau do divisor.

$$2x^3 : x^2 \dashrightarrow \begin{array}{l|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

- **2.** Multiplicamos o termo obtido pelo divisor e subtraímos o resultado do dividendo, obtendo assim um novo dividendo.

$$2x \cdot (x^2 - 1) = 2x^3 - 2x \overset{\text{oposto}}{\dashrightarrow} \begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x & 2x \\ \cline{1-1} x^2 + 3x + 1 & \end{array} \dashleftarrow \text{Novo dividendo}$$

- **3.** Obtemos o novo termo do quociente e continuamos a divisão até encontrar um polinômio de grau menor que o divisor, que será o resto da divisão.

$$x^2 : x^2 = 1 \dashrightarrow \begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x & 2x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 + 3x + 1 & \\ -x^2 + 1 & \\ \cline{1-1} 3x + 2 & \end{array} \dashleftarrow \text{Resto}$$

Note que o grau de $3x + 2$ é menor que o grau do divisor $(x^2 - 1)$. Isso indica que a divisão foi concluída. Dessa forma:

$Q(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $R(x) = 3x + 2$

DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

Nascido na Itália, Paolo Ruffini (1765-1822) estudou Matemática e Medicina na Universidade de Módena. Aos 23 anos se tornou professor, assumindo a cadeira de Matemática Elementar aos 26 anos.

Ele foi um dos responsáveis por desenvolver um método para dividir polinômios quando o divisor é do tipo $(x - a)$, sendo **a** um número inteiro. Esse método é chamado **dispositivo prático de Briot-Rufini**.

Observe na prática como aplicar o dispositivo prático de Briot-Rufini na divisão de $(x^2 + 1) : (x - 2)$.

- **1.** Escrevemos os coeficientes de todos os termos do dividendo ordenados de modo decrescente, desde o de maior grau até o termo independente.

	1	0	1

- **2.** Colocamos à esquerda o oposto do termo independente do divisor – ou seja, o número inteiro **a**, que nesse caso é 2.

2	1	0	1

- **3.** Copiamos o primeiro coeficiente na linha dos resultados.

2	1	0	1
	1		

- **4.** Multiplicamos esse coeficiente da linha dos resultados pelo número **a** e somamos ao coeficiente seguinte. Realizamos esse processo para todos os coeficientes do dividendo.

2	1	0	1
	1	2	$\underbrace{5}_{\text{Resto}}$

O último número na linha dos resultados é o resto. Os demais correspondem aos coeficientes do polinômio quociente, cujo grau é uma unidade menor que o grau do dividendo. Dessa forma:

$Q(x) = x + 2$ $\qquad$ $R(x) = 5$

ROTEIRO DE AULA

POLINÔMIOS II

Divisão

Considere os polinômios $P(x) = 3x^3 - 2x + 4$ e $D(x) = x^2 - 1$. $P(x) : D(x)$ resulta em:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 2x + 4^2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 3x & 2x \end{array}$$

$Q(x) = 3x$ e $R(x) = x + 4$

Briot-Ruffini

Considere os polinômios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ e $D(x) = x - 1$.
Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, $P(x) : D(x)$, resulta em:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ \hline & 2 & 5 & 6 & 1 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 5x + 6$ e $R(x) = 1$

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. ESPM-SP – O resto da divisão do polinômio $x^5 - 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:

a) $x - 1$
b) $x + 2$
c) $2x - 1$
d) $x + 1$
e) $x - 2$

Pelo método das chaves, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 3x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 \qquad\quad & x^3 + x - 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 1 & \\ -x^3 + x \qquad\quad & \\ \hline -3x^2 + x + 1 & \\ -(-3x^2 + 3) & \\ \hline x - 2 & \end{array}$$

Então, $r = x - 2$ e $Q(x) = x^3 + x - 3$.

2. UEG-GO (adaptado) – Dividindo o polinômio $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 12x + 5$ pelo polinômio $D(x) = x^2 + 2x - 5$, qual será o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$?

Fazendo a divisão:

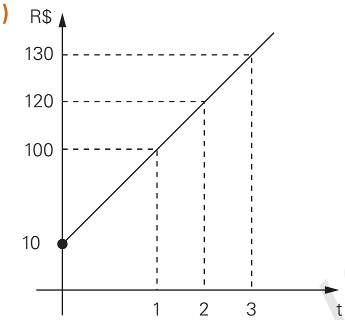
$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 5x^2 - 12x + 5 & x^2 + 2x - 5 \\ \cline{2-2} -3x^3 - 6x^2 + 15x \qquad & 3x - 1 \\ \hline 0 - \quad x^2 + 3x + 5 & \\ x^2 + 2x \ - 5 & \\ \hline 0 + \ 5x \quad & \end{array}$$

Temos que $Q(x) = 3x - 1$ e $R(x) = 5x$

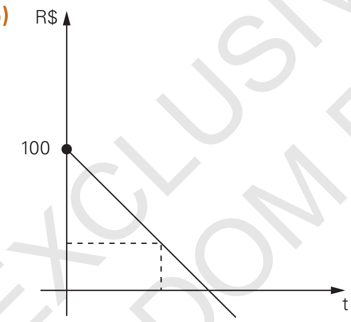
3. Sistema Dom Bosco C5-H21

Em uma corretora de investimentos, fez-se um estudo para prever o rendimento mensal de um cliente. Após diversos cálculos, verificaram que o gráfico do rendimento em função do tempo poderia ser obtido pelo quociente da divisão entre $10t^3 + 50t^2 - 480t + 200$ e $t^2 - 5t + 2$. Assim sendo, assinale a alternativa que contém o gráfico que melhor expressa o rendimento deste cliente:

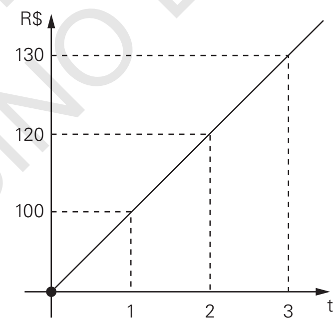
a)



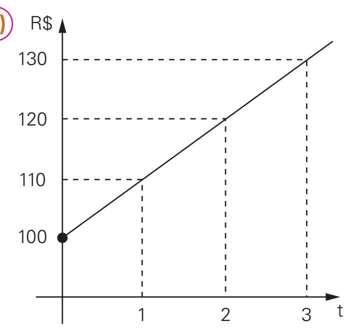
b)



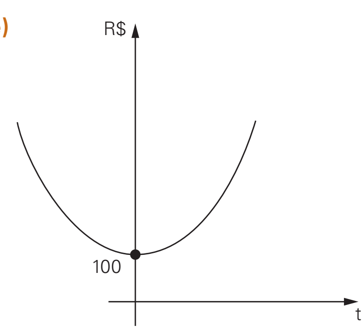
c)



d)



e)



Como o gráfico do rendimento é obtido pelo resto da divisão dos polinômios $10t^3 + 50t^2 - 480t + 200$ e $t^2 - 5t + 2$, utilizando o método das chaves, temos:

$$\begin{array}{r|l} 10t^3 + 50t^2 - 480t + 200 & t^2 - 5t + 2 \\ \hline -10t^3 + 50t^2 - 20t & 10t + 100 \\ 100t^2 - 500t + 200 & \\ -100t^2 + 500t - 200 & \\ 0 & \end{array}$$

Assim, o quociente é $10t + 100$. Logo, será uma reta crescente com início em 100.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Uece – O resto da divisão de $(x^2 + x + 1)^2$ por $x^2 - x + 1$ é

a) $4x$.

b) $4(x - 1)$.

c) $4(x - 2)$.

d) $4(x - 3)$.

$(x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) =$
$= x^4 + x^3 + 1x^2 + x^3 + x^2 + 1x + 1x^2 + 1x + 1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Assim:

$$\begin{array}{l|l} (x^2 + x + 1)^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline \end{array}$$

Isso é o mesmo que:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^4 + x^3 - 1x^2 & x^2 + 3x + 5 \\ 0 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & \\ -3x^3 + 3x^2 - 3x & \\ 0 + 5x^2 - 1x + 1 & \\ -5x^2 + 5x - 5 & \\ 0 + 4x - 4 & \end{array}$$

Colocando 4 em evidência, temos $4(x - 1)$.

5. ESPM-SP – O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x + 3$ são, respectivamente:

a) $x - 2$ e 5

b) $x + 2$ e 6

c) $x - 3$ e 2

d) $x + 1$ e 0

e) $x - 1$ e -2

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 1 & x + 3 \\ \hline -x^2 - 3x & x - 2 \\ 0 - 2x - 1 & \\ 2x + 6 & \\ 0 + 5 & \end{array}$$

Portanto, o quociente será $x - 2$, e o resto será 5.

6. UFJF-MG – Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível por $(x + 1)^2$, determine a e b.

Sabendo que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx + 2$ é divisível pelo polinômio $(x + 1)^2$ e que $(x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (x - 1)$, dividimos P(x) por $(x - 1)$ e seu quociente por $(x - 1)$. Usando o método de Briot-Ruffini, temos:

1	a	0	b	2
1	a	a	(b + a)	(b + a) + 2
	a	2a	(b + 3a)	

Assim, da primeira divisão, temos $a + b = 2 \rightarrow b = 2 - a$.

Da segunda divisão, temos $b + 3a = 0$.

Substituindo o valor de **b** na segunda equação, temos:

$2 - a + 3a = 0 \rightarrow 2a = -2 \rightarrow a = -1$

Logo, $b = 2 - (-1) \rightarrow b = 3$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFJF-MG – Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com a, b, c e d números reais.

Qual deve ser a relação entre os números a, b, c e d para que o polinômio p(x) seja divisível pelo polinômio $x^2 + 1$?

a) $a = -d$; $c = d$
b) $a = c$; $b = d$
c) $a = -c$; $b = -d$
d) $a = d$; $c = -b$
e) $a = b = c = d$

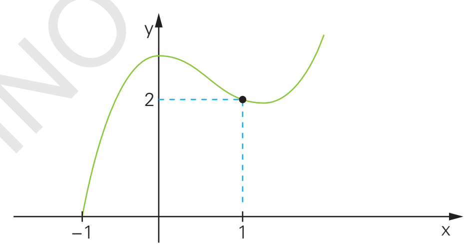
8. EsPCEx-Aman – O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $x^3 - 3x + 2$, deixa resto r(x). Sabendo disso, o valor numérico de r(–1) é

a) –10.
b) –4.
c) 0.
d) 4.
e) 10.

9. Sistema Dom Bosco – Da divisão de P(x) por Q(x), obtém-se o resto 4. Considerando $P(x) = x^3 + ax + b$ e $Q(x) = x^2 + x + 2$, o valor de a + b é:

a) 2
b) –2
c) 3
d) –3
e) 4

10. UERJ – O gráfico abaixo representa a função polinomial P do 3º grau que intersecta o eixo das abscissas no ponto (–1, 0).



Determine o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 1$.

11. Uece – Se o polinômio $p(x) = x^5 + ax^3 + x$ é divisível pelo polinômio $d(x) = x^3 + bx$, onde a e b são números reais, então a relação entre a e b é

a) $a^2 + ab + b^2 = 0$
b) $b^2 - ab + 1 = 0$
c) $a^2 - ab + 1 = 0$
d) $a^2 - ab + b = 0$

12. UEG-GO – Na divisão do polinômio $6x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2$ pelo divisor $x^2 + 3x - 2$, o resto multiplicado por 2 é:

a) $-222x^2 + 252$
b) $444x^2 + 252$
c) $-444x + 252$
d) $222x + 252$
e) $-444x^2 - 252$

13. UEG-GO – A divisão do polinômio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ por $(x + 1) \cdot (x - 2)$ é igual a:

a) $x - 3$
b) $x + 3$
c) $x - 6$
d) $x + 6$

14. FGV (adaptado) – Sabendo-se que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2^k + 2$ por $x - 3$ é igual a $4^k - 220$, qual é o valor de k?

15. IFSC – Dado o polinômio $-6+11x-6x^2+x^3$, é CORRETO afirmar que:

a) Trata-se de um polinômio de grau 6.

b) A fatoração do polinômio é $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$.

c) Se dividirmos o polinômio por $x-3$, o polinômio quociente é x^2-2x+3.

d) O grau do polinômio é 11.

e) Podemos dividir o polinômio por $x^5-6x^2+11x-6$ e obteremos como resposta o monômio x^2.

16. Unicamp – Sejam p(x) e q(x) polinômios com coeficientes reais. Dividindo-se p(x) por q(x), obtêm-se quociente e resto iguais a x^2+1. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) o grau de p(x) é menor que 5.

b) o grau de q(x) é menor que 3.

c) p(x) tem raízes complexas.

d) q(x) tem raízes reais.

17. ESPM-SP (adaptado) – O trinômio x^2+ax+b é divisível por $x+2$ e por $x-1$. Qual é o valor de $a-b$?

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um professor de Matemática tem dois filhos, um de 15 anos e outro de 17. Como os filhos eram bons alunos, o pai decidiu aumentar as mesadas fazendo uma brincadeira para que os filhos pudessem descobrir de quanto seria este aumento. Para isso, deu aos filhos os polinômios $A(x) = 6x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 7$ e $B(x) = 2x^2 + x + 1$ e disse que, para descobrirem quanto cada um ganharia a mais na mesada, deveriam substituir o valor de sua idade no polinômio encontrado no resto da divisão de A(x) por B(x). Assim, os valores aumentados na mesada do filho mais velho e do mais novo foram respectivamente:

a) 68 e 60

b) 60 e 68

c) 80 e 72

d) 72 e 80

e) 80 e 68

19. Sistema Dom Bosco C5-H21

Em um jogo de matemática desenvolvido para treinamento das técnicas aprendidas nas aulas de divisão e multiplicação de polinômios, foram fornecidos 3 dados, um com polinômios de grau 3, outro com polinômios de grau 2 e um com as operações de multiplicação e divisão. Os alunos em duplas deveriam jogar os dados e realizar a operação entre os polinômios obtidos. Assim, na primeira rodada do jogo, nos dados constava a seguinte combinação:

Dado 1: $x^3 + 2x^2 - 1$

Dado 2: Divisão

Dado 3: $x^2 + x + 2$

Após resolver a operação, o quociente e o resto obtidos foram respectivamente

a) $-3x - 3$ e $x + 1$
b) $x + 1$ e $3x + 3$
c) $x - 1$ e $-3x - 3$
d) $x + 1$ e $-3x - 3$
e) $x - 1$ e $3x - 3$

20. Acafe-SC (adaptado) C5-H22

Sabendo que as raízes do polinômio $P(x) = 4x^3 - 28x^2 + 61x - 42$ são as dimensões internas, em metros, de um reservatório com forma de paralelepípedo, sendo que a menor raiz representa a altura desse poliedro e que uma das dimensões vale 2, quanto vale a soma das medidas de todas as arestas do sólido?

a) 20 m.
b) 24 m.
c) 28 m.
d) 32 m.
e) 36 m.

42 POLINÔMIOS III

- Teorema do resto
- Teorema de D'Alembert
- Teorema do fator
- Raízes inteiras de um polinômio

HABILIDADES

- Aplicar as propriedades de polinômios.
- Identificar em quais situações tais propriedades podem ser utilizadas.
- Pesquisar raízes inteiras em polinômios com coeficientes inteiros.

TEOREMA DO RESTO

Considerando um polinômio P(x), com $gr(P) \geqslant 1$, o resto de sua divisão por $(x - a)$ é dado por P(a).

Sabemos que, da divisão de polinômios, podemos escrever:

$P(x) = Q(x) \cdot d(x) + R$

Sendo $d(x) = x - a$, obtemos:

$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$

Dessa forma, fazendo $x = a$, temos:

$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R$

$P(a) = Q(a) \cdot 0 + R$

$R = P(a)$

Ou seja, o resto da divisão de P(x) por $(x - a)$ é P(a).

Note que, como o divisor apresenta grau 1, necessariamente o resto será nulo ou apresentará grau 0, ou seja, será uma constante.

Exemplo:

Vamos obter o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$ por $(x + 3)$.

Observe que não precisamos realizar a divisão de P(x) por $(x + 3)$. Basta utilizarmos o teorema do resto, já que o divisor é do tipo $(x - a)$.

Dessa forma, como $a = -3$:

$R = P(-3)$

$R = 2 \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 5$

$R = -54 + 9 + 9 + 5$

$R = -31$

Logo, o resto da divisão é -31.

TEOREMA DE D'ALEMBERT

Se P(x) for divisível por $(x - a)$, dizemos que **a** é raiz de P(x). Ou seja, $P(a) = 0$.

Como P(x) é divisível por $(x - a)$, concluímos que o resto da divisão de P(x) por $(x - a)$ é nulo. Pelo teorema do resto, $R = P(a) = 0$. Logo, **a** é raiz de P(x).

Exemplo:

Vamos verificar se $P(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ é divisível por $(x - 1)$.

Pelo teorema de D'Alembert, se $x = 1$ for raiz de P(x), este será divisível por $(x - 1)$. Dessa forma:

$P(1) = -1^3 + 1^2 - 1 + 1$

$P(1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

Logo, $x = 1$ é raiz de P(x), o qual é divisível por $(x - 1)$.

TEOREMA DO FATOR

Se **a** é uma raiz do polinômio P(x) de grau n $(n > 0)$, então $(x - a)$ é um fator de P(x).

Ao dividirmos P(x) por $(x - a)$, obtemos o quociente Q(x) e o resto R, sendo $R = P(a)$.

Uma vez que **a** é raiz de P(x), então P(a) = 0. Assim, podemos escrever:

$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R \to P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + P(a) \to P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + 0 \to P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$

Dessa forma, (x – a) é fator de P(x).

RAÍZES INTEIRAS DE UM POLINÔMIO

As raízes inteiras de um polinômio com coeficientes inteiros são divisores do termo independente.

Tomemos como exemplo o polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + 2$, embora esse método seja válido para polinômios de qualquer grau.

Se a é uma raiz inteira de P(x), pelo teorema do resto, P(a) = 0. Ou seja:

$P(a) = a^4 + 2 \cdot a^3 - 3 \cdot a^2 - 6 \cdot a + 2 = 0$

Assim:

$a \cdot (a^3 + 2a^2 - 3a - 6) + 2 = 0$

Como necessariamente **a** é um número inteiro, então a expressão $a^3 + 2a^2 - 3a - 6$ também será um número inteiro **k**, portanto:

$a(a^3 + 2a^2 - 3a - 6) + 2 = 0 \to$

$\to a \cdot k + 2 = 0 \to k = -\frac{2}{a}$

$-k = \frac{2}{a}$

Ou seja, a raiz **a** é um divisor do termo independente (2).

Exemplo:

Quais são as raízes inteiras do polinômio $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$?

As possíveis raízes inteiras do polinômio P(x) serão os divisores do termo independente –2, ou seja, ±1 ou ±2.

- Para x = 1, temos: $2 - 1 - 5 - 2 = -6 \neq 0$.
- Para x = –1, temos: $-2 - 1 + 5 - 2 = 0$.
- Para x = 2, temos: $16 - 4 - 10 - 2 = 0$.
- Para x = –2, temos: $-16 - 4 + 10 - 2 = -12 \neq 0$.

Logo, as raízes inteiras de P(x) são –1 e 2.

ROTEIRO DE AULA

POLINÔMIOS III

Teorema do resto

Se um polinômio P(x), com gr(P) ⩾ 1, o resto de sua divisão por (x – a) é dado por P(a).

Teorema de D'Alembert

Se P(x) for divisível por (x – a), dizemos que a é raiz de P(x), ou seja, P(a) = 0.

Teorema do fator

Se a é uma raiz do polinômio P(x) de grau n (n > 0), então (x – a) é um fator de P(x).

Raízes inteiras de um polinômio

As raízes inteiras de um polinômio com coeficientes inteiros são divisores do termo independente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS – O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, em $\mathbb{R}$, é divisível por $(x - 1)$. Podemos afirmar que $p(p(1))$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) $a + b + c$

e) $-a + b - c$

Se $p(x)$ é divisível por $(x - 1)$, pelo teorema do resto, $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

Assim, $p(1) = 0$.

Logo, $p(p(1)) = p(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 = 0$.

2. PUC-PR (adaptado) – Se $(x - 2)$ é um fator do polinômio $x^3 + kx^2 + 12x - 8$, então qual é o valor de k?

Se $(x - 2)$ é fator do polinômio, então 2 é sua raiz. Assim:

$2^3 + k \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0$

$4k = -24$

$k = -6$

3. UEM-PR (adaptada) C5-H22

O etanol, presente em bebidas alcoólicas, é digerido no estômago e absorvido no intestino, sendo levado ao cérebro pela corrente sanguínea.

Considere o polinômio $p(t) = t^4 - 15t^3 + 77t^2 - 153t + 90$, e suponha que $C(t) = \dfrac{p(t)}{1000}$ indique a concentração de álcool no sangue (em porcentagem), identificado num indivíduo, ao longo das primeiras dez horas do dia, $0 \leq t \leq 10$. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) Somente em $t = 1$ e $t = 3$ a concentração de álcool no sangue desse indivíduo foi nula.

b) A combustão completa do etanol produz apenas CO_2, da mesma maneira que a combustão da gasolina.

c) Pode-se afirmar que esse indivíduo atingiu a concentração de 0,6% de álcool no sangue em $t = 4$.

d) O etanol pode ser obtido por meio da reação de hidrólise do ácido etanoico sob catálise.

e) $(t - 6)$ é fator de $p(t)$.

a) Incorreta. A concentração será nula quando $p(t) = 0$.

Ou seja, $t^4 - 15t^3 + 77t^2 - 153t + 90 = 0$.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini:

1	−1	77	−153	90
3	−14	63	−90	0
	−11	30		

As raízes de $t^2 - 11t + 30 = 0$ são 5 e 6.

Pelo teorema do fator, $p(t) = (t - 1)(t - 3)(t - 5)(t - 6)$.

Dessa forma, a concentração será nula em $t = 1$, $t = 3$, $t = 5$ e $t = 6$.

b) Incorreta. A combustão completa do etanol produz CO_2 e H_2O.

c) Incorreta.

d) Incorreta. O etanol pode ser obtido por meio da reação de hidratação do eteno sob catálise ácida.

e) Correta. Como $t = 6$ é raiz de $p(t)$, então $(t - 6)$ é fator de $p(t)$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

4. Unicamp – Considere o polinômio $x^n + x^m + 1$, em que $n > m = 1$. Se o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é igual a 3, então

a) n é par e m é par
b) n é ímpar e m é ímpar
c) n é par e m é ímpar
d) n é ímpar e m é par

Do enunciado, o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é 3. Portanto:
$p(-1) = 3 \rightarrow (-1)^n + (-1)^m + 1 = 3 \rightarrow (-1)^n + (-1)^m = 2$
Como um número negativo elevado a um número ímpar é negativo, **m** e **n** devem ser pares para que o resultado seja possível.

5. UEPG-PR (adaptado) – Ao dividir o Polinômio $P(x)$ por $x - 2$, obtém-se o quociente $2x^2 + 5$ e o resto 3. Nessas condições, analise os itens a seguir e assinale a alternativa correta:

I. $P(x)$ é divisível por $x + 1$.
II. $P(x)$ é um polinômio do 3º grau.
III. $P(0) = -7$.
IV. O termo independente de x no polinômio vale 11.

a) Apenas os itens II e III estão corretos
b) Apenas os itens II e IV estão corretos
c) Apenas os itens I e III estão corretos
d) Apenas o item II está correto
e) Apenas o item IV está correto

O polinômio $P(x)$ é dado por $P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$.
Assim, $P(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 + 5) + 3 = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$.
Julgando os itens:
I) Incorreto. $P(-1) = 2(-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) - 7 = -18$. Logo, $P(x)$ não é divisível por $x - 1$.
II) Correto. De fato, o grau de P é 3.
III) Correto. $P(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 7 = -7$.
IV) Incorreto. O termo independente de x vale -7

6. Unesp (adaptado) – O polinômio $P(x) = ax^3 + 2x + b$ é divisível por $x - 2$ e, quando divisível por $x + 3$, deixa resto -45. Nessas condições, encontre os valores de a e b.

Com base no enunciado e no teorema do resto, $P(2) = 0$ e $P(-3) = -45$.
Assim:
$a \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 + b = 0 \rightarrow 8a + 4 + b = 0$ (I)
$a(-3)^3 + 2(-3) + b = -45 \rightarrow -27a - 6 + b = -45$ (II)

Multiplicando a equação I por -1 e fazendo I + II:
$-35a - 10 = -45 \rightarrow -35a = -35$. Ou seja, $a = 1$.
Substituindo a na equação I:
$8 \cdot 1 + 4 + b = 0 \rightarrow b = -12$
Assim, $a = 1$ e $b = -12$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unicamp – Considere o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$, onde a é um número real. Se $x = 1$ é a única raiz real de p(x), então podemos afirmar que

a) $a < 0$.
b) $a < 1$.
c) $a > 0$.
d) $a > 1$.

8. Fuvest – O polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ possui uma raiz complexa ξ cuja parte imaginária é positiva. A parte real de ξ^3 é igual a

a) –11
b) –7
c) 9
d) 10
e) 12

9. PUC-SP – Se 2 é a única raiz real da equação $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$, então, relativamente às demais raízes dessa equação, é verdade que são números complexos

a) cujas imagens pertencem ao primeiro e quarto quadrantes do plano complexo.
b) que têm módulos iguais a 2.
c) cujos argumentos principais são 45° e 135°.
d) cuja soma é igual a 2i.

10. UFU-MG – Considere os polinômios $p(x) = x^3 + 2a + b$ e $h(x) = x^4 + a - 2b$, em que a e b são constantes reais e x é uma variável real. Determine os valores de a e b para os quais esses polinômios sejam divisíveis por $x - 4$.

11. Unesp – A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite 1 como raiz. Suas duas outras raízes são:

a) $\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)$ e $\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)$.

b) $(1 + i)$ e $(1 - i)$.

c) $(2 + i)$ e $(2 - i)$.

d) $(-1 + i)$ e $(-1 - i)$

e) $\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)$ e $\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)$.

12. FGV – Um dos fatores do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é $(x + 3)$. Outro fator desse polinômio é

a) $(x + 8)$

b) $(x - 5)$

c) $(x + 4)$

d) $(x - 1)$

e) $(x + 1)$

13. ITA – Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por $p(z) = z^4 + (2 + i)z^3 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i)$. Podemos afirmar que

a) nenhuma das raízes de p é real.

b) não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.

c) a soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2+\sqrt{2}$.

d) o produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.

e) o módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

14. UFRR (adaptado) – O polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$, tem duas raízes complexas z_1 e z_2 e uma raiz real $x = 2$. Podemos afirmar que a soma das raízes complexas z_1 e z_2 é?

15. Unit-AL – Sabendo-se que o polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16$ possui -2 como raiz com multiplicidade 2, é correto concluir que suas outras raízes são números

a) complexos conjugados.

b) racionais não inteiros.

c) irracionais simétricos.

d) irracionais positivos.

e) inteiros e simétricos.

16. Udesc – Um polinômio p(x) dividido por $x + 1$ deixa resto 16; por $x - 1$ deixa resto 12, e por x deixa resto 1. Sabendo que o resto da divisão de p(x) por $(x+1)(x-1)x$ é da forma $ax^2 + bx + c$, então o valor numérico da soma das raízes do polinômio $ax^2 + bx + c$ é:

a) $\frac{3}{5}$

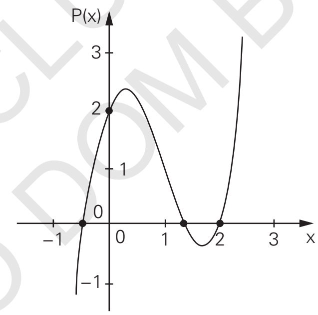
b) 2

c) $\frac{2}{15}$

d) 4

e) -2

17. UERJ – Observe o gráfico da função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.



Determine o conjunto solução da inequação $P(x) > 0$.

18. EBMSP-BA C5-H21

A culinária está em alta nos programas televisivos. Em um desses programas, os participantes foram desafiados a elaborar um prato no qual fossem utilizados, entre outros, os ingredientes A, B e C, cujas quantidades em kg, numericamente, não excedessem às raízes do polinômio $P(x) = 8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$. Sabendo-se que os participantes receberam $\frac{1}{4}$ kg do ingrediente A, pode-se afirmar que as quantidades máximas que podem ser utilizadas dos ingredientes B e C diferem em:

a) 200 g
b) 275 g
c) 350 g
d) 425 g
e) 500 g

19. Sistema Dom Bosco C5-H21

Um jovem decidiu pedir a mão de sua namorada de uma forma inusitada, para isso a levou para um passeio de balão. Ele queria pedi-la em casamento exatamente quando estivessem a 510 m de altura em relação ao solo, mas, como não era possível medir essa altura, decidiu calcular o tempo que levaria para atingi-la. Depois de algumas pesquisas e observações, ele verificou que a altura h do balão em relação ao solo podia ser obtida pela função $h(t) = t^3 - 30t^2 + 243t + 24$ com h(t) em metros e t em minutos.

Sabendo que no instante $t = 3$ min o balão estava a 510 metros de altura, assinale a alternativa que contém os outros instantes t em que o jovem ainda poderia pedir a mão de sua namorada em casamento.

a) 5 min e 7 min
b) 10 min e 20 min
c) 12 min e 24 min
d) 9 min e 18 min
e) 8 min e 14 min

20. UFSM-RS C5-H21

Para avaliar as vendas em 2013, o setor de planejamento de uma empresa utilizou a função polinomial

$N(t) = t^3 - 21t^2 + 126t + 304$

em que N representa o número de tablets vendidos no mês t, com $t = 1$ correspondendo a janeiro, $t = 2$ correspondendo a fevereiro e assim por diante.

De acordo com os dados, o número de tablets vendidos foi igual a 480, nos meses de

a) fevereiro, julho e novembro.
b) fevereiro, agosto e novembro.
c) fevereiro, agosto e dezembro.
d) março, agosto e dezembro.
e) março, setembro e dezembro.

43

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS I

- O que são equações algébricas
- Raiz ou zero de uma equação algébrica

HABILIDADES

- Identificar uma equação algébrica.
- Usar técnicas já conhecidas para obter suas raízes.
- Reconhecer os coeficientes e o grau de uma equação algébrica.

WORAWEE MEEPIAN/SHUTTERSTOCK

Em campos como Administração, Economia e Tecnologia, é preciso utilizar equações algébricas para solucionar problemas reais do nosso cotidiano.

Introdução

Já sabemos que, em uma equação de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2, a soma de suas raízes é dada por $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, e seu produto é obtido por $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Para equações do 3º grau do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3, temos relações similares:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a}$$

RELAÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Equação polinomial ou **algébrica** é toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + a_{n-2} x^{(n-2)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

Nesse tipo de equação:

- a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} e a_n são chamados **coeficientes** e pertencem ao conjunto dos números complexos;
- **n** representa o grau da equação e $n \in \mathbb{N}^*$.

Nas equações a seguir, observe a determinação do grau de cada uma e de seus coeficientes.

Exemplo 1:
$4x + 5 = 0$ é uma equação do 1º grau, e seus coeficientes são $a_1 = 4$ e $a_0 = 5$.

Exemplo 2:
$x^2 - 3x + 4 = 0$ é uma equação do 2º grau, e seus coeficientes são $a_2 = 1$, $a_1 = -3$ e $a_0 = 4$.

Exemplo 3:
$-2x^2 + x^3 - 5x + 5 = 0$ é uma equação do 3º grau, e seus coeficientes são $a_3 = 1$, $a_2 = -2$, $a_1 = -5$ e $a_0 = 5$.

Exemplo 4:
$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ é uma equação do 4º grau, e seus coeficientes são $a_4 = 1$, $a_3 = -2$, $a_2 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_0 = -2$.

Exemplo 5:
$3x^3 - 2ix^2 + 1 = 0$ é uma equação do 3º grau, e seus coeficientes são $a_3 = 3$, $a_2 = -2i$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 1$.

RAIZ OU ZERO DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Raiz ou **zero** de uma equação algébrica é todo valor α ($\alpha \in \mathbb{C}$) para x de modo a satisfazer a igualdade. Ou seja, dada a equação algébrica:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + ... + a_2x^2 + \\ + a_1x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$

Ao substituirmos x por α, a igualdade é verdadeira.
Observe alguns exemplos:

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$ admite $x = 5$ como raiz:
2. $(5)^2 - 7(5) + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ admite $x = 1$ como raiz:
4. $(1)^3 - 3(1)^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
5. $x^4 + x^3 - x^2 - 4 = 0$ admite $x = -2$ como raiz:
6. $(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 - 4 = 16 - 8 - 4 - 4 = 0$
7. $x^2 + 1 = 0$ admite $x = i$ como raiz:
8. $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

OBTENÇÃO DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

Podemos aplicar diversos recursos já conhecidos para obter o conjunto das raízes de uma equação algébrica, também chamado **conjunto-solução**.

Sabemos que equações do 1º grau, de modo geral, são solucionadas da seguinte forma: $ax + b = 0$ (com $a \neq 0$) $\rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

Já equações do 2º grau podem ser solucionadas utilizando a fórmula de Bhaskara: $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$) $\rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ em que $\Delta = b^2 - 4ac$

Porém, solucionar equações de grau maior que 2 por meio de fórmulas gerais é um processo mais complexo. Por isso, concentraremos nossos esforços em desenvolver estratégias para solucioná-las de outra forma.

Além disso, em meados de 1800, os matemáticos Paolo Ruffini e Niels Abel demonstraram que equações de grau maior ou igual a 5 não podem ser solucionadas por meio de uma fórmula geral.

Assim, nosso objetivo é examinar alguns métodos que possibilitam estimar uma ou mais raízes de uma equação algébrica, de modo a determinar todas elas.

Decomposição em fatores de 1º grau

Em 1799, Carl Friedrich Gauss demonstrou o **teorema fundamental da Álgebra**, cujo pressuposto é:

> Toda equação algébrica do tipo p(x)= 0, em que p(x) é um polinômio de grau n($n \geq 1$), tem pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Com base nesse teorema, é possível mostrar que polinômios de grau $n > 1$ podem ser decompostos em um produto de fatores do 1º grau.

Observe a equação $x^2 + 3x - 10 = 0$. Note que 2 é uma raiz dessa equação, já que $p(2) = 0$. Aplicando o teorema de D'Alembert, sabemos que p(x) é divisível por $x - 2$. Dessa forma:

2	1	3	−10
	1	5	0

coeficientes de q1 (x)

Assim, $p(x) = (x - 2) \cdot q_1(x) = (x - 2)(x + 5)$.
Dessa forma, $x^2 + 3x - 10 = 0 \leftrightarrow (x - 2)(x + 5) = 0$.
Portanto, as raízes da equação $x^2 + 3x - 10 = 0$ são $x_1 = 2$ e $x_2 = -5$.

> De modo geral, dado o polinômio de grau n($n \geq 1$):
>
> $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$
>
> Se x_1, x_2, ..., x_n são raízes de p(x), podemos escrevê-lo desta forma:
>
> $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)... (x - x_n) \cdot q_n(x)$, com $q_n(x) = a_n$
>
> Então:
> $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)... (x - x_n)$, da qual x_n são as raízes de p(x) e a_n é o coeficiente de x^n.

Multiplicidade da raiz

Por meio da decomposição de um polinômio p(x) de grau $n \geqslant 1$ em um produto de n fatores do 1º grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos.

Em uma equação algébrica de grau $n(n \geqslant 1)$, obtemos n raízes, das quais algumas podem ser iguais, ou seja, toda equação algébrica de grau $n \geqslant 1$ tem, no máximo, n raízes diferentes.

A multiplicidade de uma raiz é o número de vezes em que ela se repete na solução de uma equação algébrica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Escreva o conjunto-solução da equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, sabendo que $3 + i$ é uma raiz da equação.

Resolução

Sabemos que, se o número complexo $3 + i$ é raiz do polinômio $p(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20$, então seu conjugado também é raiz.

Dessa forma, podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$p(x) = [x - (3 + i)] \cdot [x - (3 - i)] \cdot q(x) \leftrightarrow$$

$$p(x) = [(x - 3) - i] \cdot [(x - 3) + i] \cdot q(x) \leftrightarrow$$

$$p(x) = [(x - 3)^2 - i^2] \cdot q(x) \leftrightarrow$$

$$p(x) = (x^2 - 6x + 10) \cdot q(x)$$

Assim, podemos obter q(x) dividindo p(x) por $x^2 - 6x + 10$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 & x^2 - 6x + 10 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 6x^3 + 10x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 - 3x + 2 \\ \hline
-3x^3 + 20x^2 - 42x + 20 & \\
+3x^3 - 18x^2 + 30x \quad\quad & \\ \hline
2x^2 - 12x + 20 & \\
-2x^2 + 12x - 20 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Assim, fazendo $x^2 - 3x + 2 = 0$ e utilizando a fórmula de Bhaskara, obtemos as raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

Dessa forma, $S = \{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS I

Forma geral

$a_nx^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$

$= 0$ (com $a_n \neq 0$)

Decomposição em fatores de 1º grau

$p(x) = a_n(x - x^1)(x - x^2)(x - x^3)... (x - x^n)$

Multiplicidade da raiz

É o número de vezes em que ela se repete na solução de uma equação algébrica.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Uece – Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ onde a, b e c são números reais, então o valor de $a - b + c$ é

a) 9. **b)** 10. **c)** 12. **d)** 13.

Desenvolvendo a $(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, temos:

$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = ax^2 + 2ab + b)x + a + b + c$

Assim, para que $x^2 + 9$ seja idêntico a $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, devemos ter:

$x^2 + 9 = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$

Logo, $a = 1$. Então:

$2a + b = 0 \rightarrow 2 \cdot 1 + b = 0 \rightarrow b = -2$

$a + b + c = 9 \rightarrow 1 + (-2) + c = 9 \rightarrow c = 10$

Portanto, $a - b + c = 1 - (-2) + 10 = 13$.

2. FGV (adaptado) – Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^2 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, determine o valor da soma $n + m$.

Com base no enunciado, é possível dividir a expressão $mx^3 + nx^2 + 1$ por $x^2 - x - 1$. Aplicando o algoritmo da chave, obtemos, para o primeiro termo (mx^3):

$$\begin{array}{l|l} mx^3 + nx^2 \quad\quad +1 & x^2 - x - 1 \\ \hline -mx^3 + mx^2 + mx & mx \\ (m+n)x^2 + mx + 1 & \end{array}$$

Continuando a divisão para $(m + n)x^2 + mx + 1$:

$$\begin{array}{l|l} mx^3 + nx^2 \quad\quad +1 & x^2 - x - 1 \\ \hline & mx \\ -mx^3 + mx^2 + mx & \\ (m+n)x^2 + mx + 1 & \\ -(m+n)x^2 + (m+n)x + m + n & \\ (2m+n)x + m + n + 1 = 0 & \end{array}$$

Para a expressão $(2m + n)x + m + n + 1 = 0$ ser identicamente nula, ambos os termos devem se anular. Assim, devemos ter: $m + n + 1 = 0$

Portanto, $m + n = -1$.

3. Fuvest (adaptado) C5-H21

Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R\$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R\$ 600,00 além do combinado no acordo original. Assim sendo, assinale a alternativa que contém respectivamente a quantidade de trabalhadores que realizaram o serviço e quanto cada um deles recebeu.

a) 6 e R\$1.800,00
b) 10 e R\$1.800,00
c) 10 e R\$10.800,00
d) 6 e R\$10.800,00
e) 9 e R\$1.800,00

I) Para um número x de trabalhadores, cada um receberia $\frac{10800}{x}$ reais.

Com a desistência de 3 deles, cada trabalhador recebeu mais $\frac{10800}{x-3}$.

Do enunciado, temos, $\frac{10800}{x} + 600 = \frac{10800}{x-3}$.

Dividindo ambos os lados por 600, temos: $\frac{18}{x} + 1 = \frac{18}{x-3} \rightarrow$

$18(x - 3) + x(x - 3) - 18x$

$x^2 - 3x - 54 = 0 \rightarrow x = 9$

Ou $x = -6$.

Como -6 não convém, inicialmente havia 9 trabalhadores. Porém, como 3 desistiram, apenas 6 realizaram o serviço.

II) Sabendo que 6 trabalhadores realizaram o trabalho, temos $\frac{10800}{6} = 1800$.

Assim, o valor total que cada trabalhador recebeu foi de R\$1.800,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Fuvest – A igualdade correta para quaisquer a e b, números reais maiores do que zero, é

a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

b) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{b}$

c) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - b$

d) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

e) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

A expressão que pode ser simplificada e que resulta em uma igualdade correta para as condições impostas é a alternativa E, pois:

$\frac{(a^3 - b^3)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = a - b$

Para as outras alternativas:

a) Se elevarmos a expressão ao cubo, obtemos $a^3 + b^3 \neq (a + b)^3$.

b) O termo envolvendo a raiz quadrada não pode ser removido da expressão de modo que reste apenas b.

c) A raiz quadrada também não pode ser eliminada.

d) O denominador é $\frac{1}{ab}$, e não $\frac{1}{a+b}$.

5. UFRGS – Dada a função f, definida por f(x) 5 $x^2 + 9 - 6x$, o número de valores de x que satisfazem a igualdade f(x) 5 –f(x) é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Do enunciado, temos $f(x) = x^2 - 6x + 9$.
Para que $f(x) = -f(x)$, temos:
$x^2 - 6x + 9 = -(x^2 - 6x + 9) \rightarrow x^2 - 6x + 9 = -x^2 + 6x - 9 \rightarrow$
$\rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0$.
Simplificando por 2, temos $x^2 - 6x + 9 = 0$.
Aplicando Bhaskara, $x_1 = x_2 = 3$. Portanto, há apenas uma solução.

6. Uece (adaptado) – Qual é o termo independente de x no desenvolvimento da expressão algébrica $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$

Para determinar o termo independente, devemos admitir x = 0.
Assim, temos $(0^2 - 1)^3 \cdot (0^2 + 0 + 2)^2 = -1 \cdot 4 = -4$.
Portanto, o termo independente é −4.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS – Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por x, x + 4 e x − 1. Se o volume desse paralelepípedo é 12, então as medidas das dimensões da caixa são:

a) 1, 1 e 12.
b) 1, 2 e 6.
c) 1, 3 e 4.
d) 2, 2 e 3
e) 2, 3 e 4.

8. UEMG – Seja p(x) um polinômio do 2º grau, satisfazendo as seguintes condições:

- −1 e 4 são raízes de p(x).
- p(5) = −12.

O maior valor de x para o qual p(x) = 8 é

a) 0.
b) 3.
c) 6.
d) 12.

9. UFSC (adaptado) – Guardadas as condições de existência, determine o valor numérico da expressão $\dfrac{(x^3-14x^2+49x)\cdot(ax-bx+7a-7b)}{(x^2-49)\cdot(2a-2b)\cdot(7x-49)}$ para $x = 966$.

a) 35
b) 69
c) 36
d) 138
e) 483

10. FGV (adaptado) – O número 1 é raiz de multiplicidade 2 da equação polinomial $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$. Qual é o produto de $a \cdot b$?

11. UTFPR – Assinale a alternativa que apresenta a solução da equação biquadrada $x^4 + x^2 - 6 = 0$, no conjunto dos números reais.

a) $\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
b) $\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
c) $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$
d) $\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}$
e) $\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

12. UFRGS – Considere os polinômios $p(x) = x^3$ e $q(x) = x^2 + x$. O número de soluções da equação $p(x) = g(x)$, no conjunto dos números reais, é

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

13. Sistema Dom Bosco – Dada a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$, a multiplicidade da raiz 1 é

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

14. FGV (adaptado) – Com relação ao polinômio de coeficientes reais dado por $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabe-se que $P(2i) = P(2 + i) = 0$, com $i^2 = -1$. Nessas condições, calcule $a + b + c + d$.

15. PUC-RS – Os polinômios p(x), q(x), f(x), h(x) em $\mathbb{R}$, nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de p(x) e h(x) são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de q(x) com o número de raízes de f(x) é:

a) 24
b) 16
c) 12
d) 8
e) 4

16. IFCE – Se S é o conjunto dos números reais x para os quais se verifica a igualdade $2 \cdot (x^3 + 1) = 3 \cdot (x^2 + x)$, então é verdade que

a) $\{-1, 1, 2\} \subset S$.
b) $\{-1, 1\} \subset S$.
c) $\{1, 2\} \subset S$.
d) $\{-1, 2\} \subset S$.
e) $S = \varnothing$.

17. Fuvest – Os coeficientes a, b e c do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e $1 + \alpha i$, com $\alpha > 0$, são raízes da equação $p(x) = 0$ e que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ é 8, determine

a) o valor de α

b) o quociente de $p(x)$ por $(x+1)$.

i é uma unidade imaginária, $i^2 = -1$

ESTUDO PARA O ENEM

18. IFSC C5-H22

Pedro é pecuarista e, com o aumento da criação, ele terá que fazer um novo cercado para acomodar seus animais. Sabendo-se que ele terá que utilizar 5 voltas de arame farpado e que o cercado tem forma retangular cujas dimensões são as raízes da equação $x^2 - 45x + 500 = 0$, qual a quantidade mínima de arame que Pedro terá que comprar para fazer esse cercado?

a) 545 m **c)** 200 m **e)** 450 m
b) 225 m **d)** 500 m

19. Enem C5-H21

Uma fábrica utiliza sua frota particular de caminhões para distribuir as 90 toneladas de sua produção semanal. Todos os caminhões são do mesmo modelo e, para aumentar a vida útil da frota, adota-se a política de reduzir a capacidade máxima de carga de cada caminhão em meia tonelada. Com essa medida de redução, o número de caminhões necessários para transportar a produção semanal aumenta em 6 unidades em relação ao número de caminhões necessários para transportar a produção, usando a capacidade máxima de carga de cada caminhão. Qual é o número atual de caminhões que essa fábrica usa para transportar a produção semanal, respeitando-se a política de redução de carga?

a) 36 **b)** 30 **c)** 19 **d)** 16 **e)** 10

20. CPII C5-H22

Em março de 2016, Jorge, professor de Matemática, desejava comprar certa quantidade de calculadoras modelo "X" para poder realizar algumas atividades com seus alunos em sala de aula. Após algumas buscas pela internet, observou, na época, que gastaria R$ 300,00 no total.

Como o professor achou que o preço unitário do produto não aumentaria ao longo do ano e como as atividades em que usaria as calculadoras só ocorreriam em setembro, resolveu esperar um pouco. Lembrou-se de fazer uma segunda verificação em julho, quando descobriu que o preço unitário da mercadoria tinha sofrido um acréscimo de R$ 20,00. Como pretendia gastar ainda os mesmos R$ 300,00, percebeu que acabaria comprando, no total, menos quatro peças do que compraria em março.

Sabe-se que o professor pretendia que cada aluno de sua turma recebesse uma calculadora para realizar as atividades planejadas. Sendo assim, podemos afirmar que

a) em março, ele compraria mais de 8 calculadoras.
b) em março, cada peça custaria menos que R$ 30,00.
c) em julho, cada peça custaria mais que R$ 50,00.
d) em julho, ele compraria menos de 6 calculadoras.

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS II

44

- Relações de Girard
- Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros
- Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais

HABILIDADES

- Reconhecer a aplicação de relações de Girard na resolução de equações algébricas.
- Aplicar a pesquisa de raízes racionais para solucionar equações algébricas de coeficientes inteiros.
- Identificar as raízes de equações algébricas quando estas são complexas e não reais.

RELAÇÕES DE GIRARD

Consideremos a equação algébrica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), cujas raízes são x_1 e x_2. A decomposição do primeiro membro em fatores do 1º grau é:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Ao desenvolver o produto, temos:

$ax^2 + bx + c = a\,[\,x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$

Ao dividir todos os termos por **a**, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Dessa forma, concluímos que:

$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a} \leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Observe que já conhecemos essas relações, as quais se estabelecem entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica do 2º grau.

Agora examinaremos equações algébricas de grau maior que 2. Vamos considerar a equação algébrica do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$), cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. A decomposição do primeiro membro em fatores do 1º grau é:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ao desenvolver o produto, temos:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$

Ao dividir todos os termos por **a**, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Dessa forma, concluímos que:

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a} \leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$-x_1x_2x_3 = \frac{d}{a} \leftrightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

De modo geral, se considerarmos a equação algébrica de grau n: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, são válidas as seguintes relações:

1. A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2. O produto das n raízes é:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3. A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b) três a três, é:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c) quatro a quatro, é:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

E assim sucessivamente.

Essas relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica são denominadas **relações de Girard**.

PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE COEFICIENTES INTEIROS

Sabemos que equações algébricas que apresentem grau igual ou superior a 5 não podem ser solucionadas por uma fórmula geral. Além disso, em equações de graus 3 e 4, embora seja possível obter uma solução geral, tal operação é complexa.

Por conta disso, encontramos uma série de estratégias para solucionar equações com grau superior a 2. Uma delas é obter algumas de suas raízes, pois assim conseguimos aplicar técnicas para reduzir o grau e assim obter as demais raízes.

Uma propriedade que auxilia a pesquisa das raízes racionais em uma equação algébrica de coeficientes inteiros é:

> Se o número racional $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si, for raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, então **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n.

RAÍZES COMPLEXAS NÃO REAIS EM UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE COEFICIENTES REAIS

Vamos considerar a equação algébrica $x^2 - 2x + 2 = 0$, em que todos os coeficientes são reais e que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2i}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x_1 = 1 + i \text{ e } x_2 = 1 - i$$

Observe que a raiz 1 + i é um número complexo não real e que a outra raiz (1 – i) é seu conjugado.

A seguir, vamos demonstrar que, se uma equação polinomial de coeficientes reais admitir como raiz o número complexo a + bi, com b ≠ 0, seu conjugado a – bi também será raiz da equação.

Para isso, vamos lembrar antes as propriedades do conjugado de um número complexo.

Dados os números complexos z_1 e z_2, dos quais $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$ são respectivamente seus conjugados, obtemos:

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_1 = \overline{z_1} \leftrightarrow z_1 \text{ (é número real)}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1^n} = \left(\overline{z_1}\right)^n$$

Agora, consideremos a equação algébrica de grau n > 1, com todos os coeficientes reais:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Suponha que o número complexo não real **z** seja raiz dessa equação. Vejamos se $\bar{z}$ também será raiz.

Se **z** é raiz, então:

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{a_nz^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + a_0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \ldots + a_2\overline{z^2} + a_1\overline{z} + a_0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + a_{n-2}\overline{z}^{n-2} + \ldots + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z} + a_0 = 0$$

Ou seja, $\bar{z}$ também é raiz da equação.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Uma equação algébrica do 3º grau tem raízes –1, 1 e 2. Sabendo que o coeficiente do termo de 3º grau é 2, determine os outros coeficientes e escreva a equação.

Resolução

Se a equação é de 3º grau e o coeficiente do termo de 3º grau é 2, sua forma é $2x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Assim:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 1 + 2 = 2 \rightarrow -\frac{b}{2} = 2 \rightarrow b = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -1 - 2 + 2 = -1 \rightarrow \frac{c}{2} = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -2 \rightarrow -\frac{d}{2} = -2 \rightarrow d = 4$$

Logo, os outros coeficientes são b = 4, c = –2 e d = 4. E a equação pedida é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4. = 0$.

2. Sistema Dom Bosco – Resolva a equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

Resolução

Pela equação dada, temos $a_0 = 6$ e $a_4 = 1$. Então:

p é divisor de 6 $\rightarrow p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

q é divisor de 1 $\rightarrow q \in \{-1, 1\}$

Pela propriedade, as possíveis raízes racionais são:

$\frac{p}{q}\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$

Ao pesquisar, concluímos que $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ são raízes da equação. Aplicando o teorema de D'Alembert, obtemos:

–1	1	1	–7	–1	6
1	1	0	–7	6	0
	1	1	–6	0	

$p(x) = (x + 1) \cdot (x - 1)\, q(x) = 0$ e $q(x) = x^2 + x - 6$

Ao resolver a equação $x^2 + x - 6 = 0$, obtemos $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$.

Logo, $S = \{-1, -3, 1, 2\}$.

3. Sistema Dom Bosco – Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, sabendo que $3 + i$ é uma raiz dessa equação.

Resolução

Se $3 + i$ é raiz da equação, seu conjugado $3 - i$ também é raiz. Logo:

$p(x) = [x - (3 + i)][x - (3 - i)]\, q(x) \rightarrow$

$\rightarrow p(x) = [(x - 3) - i][(x - 3) + i]q(x) \rightarrow$

$\rightarrow p(x) = [(x - 3)^2 - i^2]\, q(x) \rightarrow$

$\rightarrow p(x) = (x^2 - 6x + 10)\, q(x)$

Calculemos $q(x)$, dividindo $p(x)$ por $x^2 - 6x + 10$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -9x^3 & +30x^2 & -42x & +20 & x^4 - 6x + 10 \\
\hline
-x^4 & -6x^3 & +10x^2 & & & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
 & -3x^3 & +20x^2 & -42x & +20 & \\
 & +3x^3 & -18x^2 & +30x & & \\
\hline
 & & 2x^2 & -12x & +20 & \\
 & & -2x^2 & +12x & -20 & \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

Dessa forma, $q(x) = x^2 - 3x + 2$. Ao fazer $x^2 - 3x + 2 = 0$, obtemos $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

Assim, $S = \{3 + i, 3 - i, 2, 1\}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS II

Relações de Girard

Para equações do 2º e do 3º grau podemos utilizar as seguintes relações:
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$)

2º

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

3º

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, for raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Raízes complexas não reais de uma equação algébrica de coeficientes reais

Se o número complexo não real z = a + bi é raiz da equação algébrica de coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z}$ = a – bi também será.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Mackenzie – Seja $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ um polinômio do 3º grau e $2x - 1$ um de seus fatores. A média aritmética das raízes de P(x) é

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{8}{2}$
c) $\frac{9}{2}$
d) $\frac{10}{2}$
e) $\frac{11}{6}$

Das relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-11)}{2} = \frac{11}{2}$$

Assim, a média aritmética das raízes é $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\left(\frac{11}{2}\right)}{3} = \frac{11}{6}$.

2. FGV (adaptado) – A equação algébrica $x^3 - 7x^2 + kx + 216 = 0$, em que k é um número real, possui três raízes reais. Sabendo-se que o quadrado de uma das raízes dessa equação é igual ao produto das outras duas, qual o valor de k?

Do enunciado, a equação tem três raízes reais, x_1, x_2 e x_3, sendo que $(x_3)^2 = x_1 \cdot x_2$.

Com base nos coeficientes da equação, $a = 1$, $b = -7$, $c = k$ e $d = 216$.

Da relação de Girard, é possível obter o valor de x_3:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$(x_3)^2 \cdot x_3 = (x_3)^3 = -\frac{216}{1} \rightarrow (x_3)^3 = -216$$

Portanto, $x_3 = -6$

Substituindo o valor da raiz x_3 na equação, obtemos:

$(-6)^3 - 7(-6)^2 + k(-6) + 216 = 0$

$-216 - 252 - 6k + 216 = 0$

$$6k = -252 \rightarrow k = -\frac{252}{6} \rightarrow k = -42$$

3. Sistema Dom Bosco C5-H21

Um professor de Matemática que gostava de criar situações para levar seus alunos à resolução de problemas decidiu fechar uma caixa de bombons em um baú com um cadeado que só poderia ser aberto se fossem inseridos os 3 números do segredo corretamente.

Para que os alunos descobrissem o segredo, ele disse que deveriam encontrar as raízes do polinômio $x^3 - 11x^2 + 31x - 21$ e colocá-las em ordem crescente, em que a soma de duas delas é igual a 10. Assim, o segredo do cadeado é:

a) 113
b) 15
c) 137
d) 317
e) 731

Do enunciado, temos que $x_1 + x_2 = 10$. Das relações de Girard, concluímos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-11}{1} = 11$$

Assim, $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + x_3 = 11 \rightarrow x_3 = 1$.

Dessa forma, dividindo P(x) por $x - 1$, obtemos:

$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = (x - 1)(x^2 - 10x + 21)$

Analisando a fatoração, $Q(x) = x^2 - 10x + 21$. Assim, aplicando novamente Girard, temos:

$x_1 + x_2 = 10$

$x_1 \cdot x_2 = 21$

Logo, as raízes são 3 e 7.

Colocando as 3 raízes em ordem crescente, concluímos que o segredo é 137.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. FGV – Sejam m e n números reais, ambos diferentes de zero. Se m e n são soluções da equação polinomial $x^2 + mx + n = 0$, na incógnita x, então m − n é igual a

a) −3
b) −2
c) 1
d) 2
e) 3

Das relações de Girard, a equação do 2º grau pode ser escrita como $x^2 + Sx + P = 0$, em que S é a soma das raízes com o sinal trocado e P é o produto das raízes.

Como **m** e **n** são soluções da equação, elas são as raízes.

Então, para $x^2 + mx + n = 0$, temos:

$m \cdot n = n$ (I)

$m + n = -m$ (II)

De (I), temos:

$$m = \frac{n}{n} \to m = 1$$

De (II), temos:

$n = -2m$ (substituindo $m = 1$)

$n = -2 \cdot 1$

$n = -2$

Assim, m − n será:

$m - n = 1 - (-2)$

$m - n = 1 + 2$

$m - n = 3.$

5. UFRGS – Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

Se $p(2) = 0$ e $p(-2) = 0$, então as raízes do polinômio p(x) são:

a) −2, 0, 1 e 2.
b) −2, −1, 2 e 3.
c) −2, −1, 1 e 2.
d) −2, −1, 0 e 2.
e) −3, −2, 1 e 2.

Se $p(2) = 0$ e $p(-2) = 0$, então 2 e −2 são raízes do polinômio.

Soma das raízes $= -\frac{b}{a}$. Também temos que p(x) tem grau 4. Logo:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a} \to 2 + (-2) + r_3 + r_4 = -\frac{2}{1}$$

$r_3 + r_4 = -2$

6. Unicamp – O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, −r e s.

a) Determine os valores de r e s.

b) Calcule p(z) para $z = 1 + i$, em que i é a unidade imaginária.

a) Das relações de Girard, temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \to -r + r + s = -\frac{-2}{1} \to s = 2$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a} \to (-r) \cdot r \cdot s = -\frac{18}{1} = -18 \to -r^2 \cdot s = -18,$$

Como, $s = 2 \to -r^2 (2) = -18 \to r^2 = 9 \to r = \pm 3$.

Portanto, $r = \pm 3$ e $s = 2$.

b) Temos que $z = 1 + i$, então $p(z) = (1 + i)^3 - 2(1 + i)^2 - 9(1 + i) + 18$.

Como $(1 + i)^3 = (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$, temos:

$p(z) = (1 + i)^2 \cdot (1 + i) - 2(1 + i)^2 - 9(1 + i) + 18$

$p(z) = (1 + 2i + i^2) \cdot (1 + i) - 2(1 + 2i + i^2) - 9 - 9i + 18$, (sabendo que $i^2 = -1$)

$p(z) = 1 + i + 2i + 2i^2 - 1 - i - 2 - 4i + 2 - 9i + 9$

$p(z) = 7 - 11i$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. FGV – A equação algébrica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possui coeficientes reais a, b, c e d, todos não nulos. Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes dessa equação, então $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^{-1}$ é igual a

a) $-\frac{d}{c}$

b) $-\frac{c}{d}$

c) $-\frac{d}{a}$

d) $-\frac{a}{b}$

e) $-\frac{b}{a}$

8. Unesp – Sabe-se que, na equação $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, uma das raízes é igual à soma das outras duas. O conjunto solução (S) desta equação é

a) S = {– 3, – 2, – 1}

b) S = {– 3, – 2, + 1}

c) S = {+ 1, + 2, + 3}

d) S = {– 1, + 2, + 3}

e) S = {– 2, + 1, + 3}

9. Unesp – Sabe-se que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$. As outras raízes dessa equação, no conjunto numérico dos complexos, são

a) (–1 – i) e (1+i)

b) $(1 - i)^2$

c) (–i) e (+i)

d) (–1) e (+1)

e) (1 – i) e (1+i)

10. UEL-PR – Considere a equação polinomial a seguir.

$$2x^3 - 15x^2 + 34x - 24 = 0$$

Sabe-se que cada uma das raízes dessa equação corresponde a uma das medidas, em cm, do comprimento, da largura e da altura de um paralelepípedo retângulo.

Com base nessa informação, determine a área total e o volume desse paralelepípedo.

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

11. Unicamp – Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + x^2 - ax - 3$, onde a é um número real. Sabendo que r e $-r$ são raízes reais de p(x), podemos afirmar que p(1) é igual a:

a) 3
b) 1
c) -2
d) -4

12. UFU-MG – Considere o polinômio de variável real $p(x) = x^3 - kx + 150$, com k sendo um número natural fixo não nulo.

Se o número complexo $z = 3 + ai$ é uma raiz de p(x), em que a é um número real positivo e i é a unidade imaginária, então o valor do produto $k \cdot a$ é igual a

a) 44.
b) 66.
c) 24.
d) 96.

13. FGV – A equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ tem o seguinte conjunto solução: $\{-1, a, b\}$. Podemos afirmar que o valor de $a^2 + b^2$ é

a) $\frac{13}{4}$
b) $\frac{7}{2}$
c) $\frac{15}{4}$
d) 4
e) $\frac{17}{4}$

14. Fac. Albert Einstein (adaptado) – Um polinômio de quinto grau tem 2 como uma raiz de multiplicidade 3. A razão entre o coeficiente do termo de quarto grau e o coeficiente do termo de quinto grau é igual a -7. A razão entre o termo independente e o coeficiente do termo de quinto grau é igual a 96. Quanto vale a menor raiz desse polinômio?

15. Uece – Se o número complexo $1 + i$ é uma das raízes da equação $P(x) = 0$, onde $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$, então é correto afirmar que $P(x)$ é divisível por:

a) $x^2 + 2x + 1$
b) $x^2 + 2x + 2$
c) $x^2 - 2x + 1$
d) $x^2 - 2x + 2$

16. Fuvest – Considere o polinômio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, em que $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sabe-se que as suas n raízes estão sobre a circunferência unitária e que $a_0 < 0$.

O produto das n raízes de $P(x)$, para qualquer inteiro $n \geqslant 1$, é:

a) -1
b) In
c) i^{n+1}
d) $(-1)^n$
e) $(-1)^{n+1}$

17. ITA – Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

a) -64.
b) -36.
c) -28.
d) 18.
e) 27.

ESTUDO PARA O **ENEM**

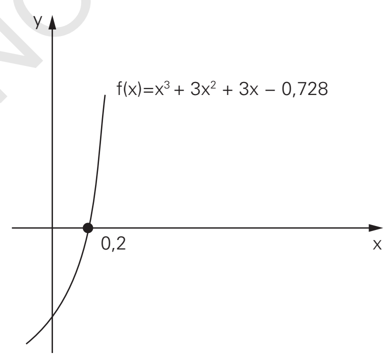
18. UEM-PR (adaptado) C5-H22

Durante um período de 9 anos, a taxa de predação (T) de uma determinada população biológica pôde ser representada por $T = P(t)$ indivíduos/ano, em que $t \in [1, 9]$ representa o ano e $P(t) = t^3 - 13t^2 + 52t - 60$. Assinale a alternativa correta: A partir da análise dessa função polinomial, é possível verificar que:

a) Em $t = 2$, a taxa de predação desta população foi nula, sendo este o único ano em que isso aconteceu.
b) A predação é o único fator limitante que impede o crescimento de uma população.
c) O resto da divisão de $P(t)$ por $D(t) = t - 2$ é diferente de zero, pois 2 é uma raiz desse polinômio.
d) O gráfico de $P(t)$ indica que a taxa de predação desta população foi sempre crescente, no período considerado, a partir de $t = 2$.
e) $t = 2$ é uma raiz de multiplicidade 1, ou raiz simples, da equação polinomial $P(t) = 0$.

19. FGV (adaptado) C5-H20

A editora aplicou o lucro obtido em 2011, R$ 100.000,00, em um fundo de renda fixa, a certa taxa de juro composta. Após 3 anos, deve receber um montante de R$ 172.800,00.



Utilizando os dados do gráfico, a taxa de juros anual que o dinheiro foi aplicado e a soma das raízes complexas da equação que não são números reais é:

a) 0,2% e $-3,2$
b) 20% e $-3,2$
c) 0,2% e 3
d) 20% e 3
e) 20% e 3,2%

20. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um fabricante de paralelepípedos desenvolveu a equação $3x^3 - 15x^2 + 36x - 30 = 0$, de modo que cada raiz correspondesse a uma das medidas de comprimento, largura e altura, todas em centímetros, de um paralelepípedo retângulo. Assim sendo, um funcionário para produzir um lote deste produto, precisou encontrar o volume e área total de cada peça sendo estes, respectivamente:

a) 10 cm^3 e 5 cm^2

b) 24 cm^3 e 10 cm^2

c) 10 cm^3 e 24 cm^2

d) 12 cm^3 e 10 cm^2

e) 10 cm^3 e 12 cm^2

ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 2

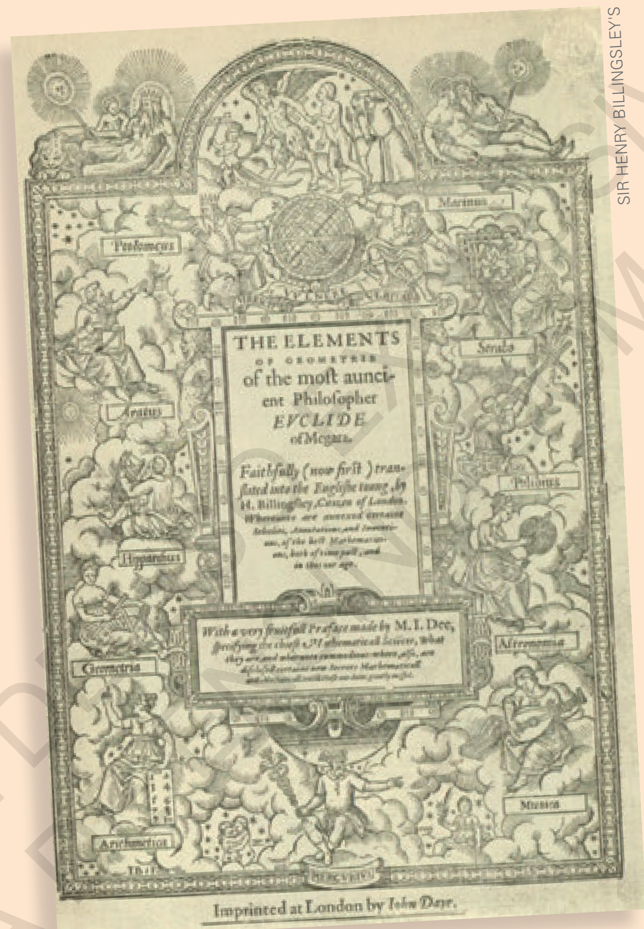
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

33 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO I

- Geometria espacial de posição
- Projeção ortogonal

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Identificar a relação de dependência entre grandezas.


THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most auncient Philosopher
EVCLIDE
of Megara.
Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London.
With a very fruitfull Preface made by M. I. Dee,
Imprinted at London by Iohn Daye.

SIR HENRY BILLINGSLEY'S

Primeira edição em língua inglesa, de 1570, da obra *Elementos*, de Euclides, pertencente a Sir Henry Billingsley.

Introdução

Euclides de Alexandria (III a.C.) foi matemático e é considerado o "pai da Geometria". Escreveu a coleção *Elementos*, composta de 13 volumes. Nessa obra Euclides reuniu de maneira clara e compreensível todos os conhecimentos sobre Matemática de seu tempo.

Neste módulo, trabalharemos os conceitos euclidianos por meio da Geometria espacial de posição.

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Considerando a geometria euclidiana, o estudo da Geometria de posição exige o domínio da seguinte definição:

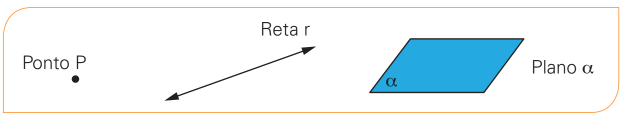
Espaço é o conjunto de todos os pontos.

A Geometria espacial é a parte da Geometria que estuda as posições relativas entre os elementos básicos (ponto, reta, plano), com base em alguns postulados.

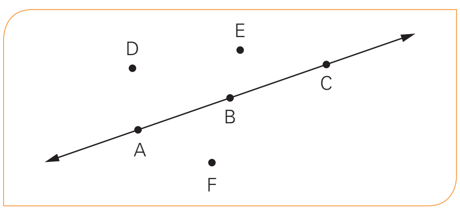
A demonstração de uma propriedade normalmente acontece considerando outras exploradas anteriormente. As primeiras propriedades de uma teoria não dispõem de outras nas quais se baseiam para apoiar suas demonstrações. Elas simplesmente são aceitas como verdadeiras. Chamamos essas propriedades de **postulados**.

POSTULADOS DA EXISTÊNCIA

- Existem ponto, reta e plano.

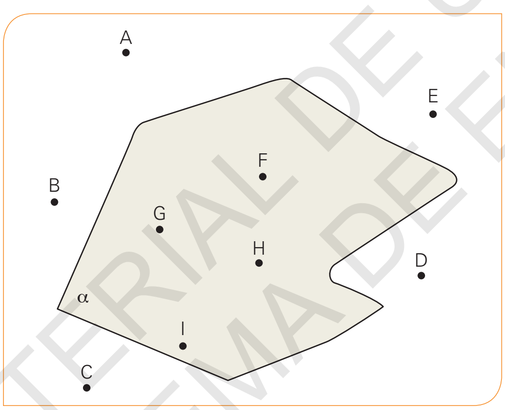


- Na reta e fora dela existem infinitos pontos.



Pontos colineares são aqueles que pertencem à mesma reta, como os pontos **A**, **B** e **C** da figura acima.

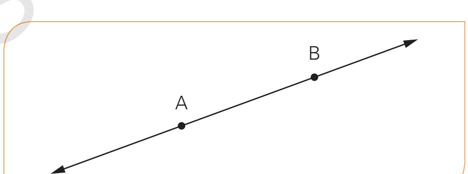
- No plano ou fora dele existem infinitos pontos.



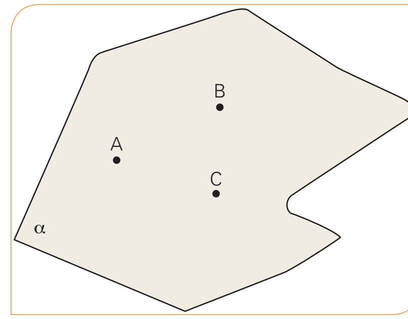
Pontos coplanares são aqueles que pertencem ao mesmo plano, como os pontos **F**, **G**, **H** e **I** da figura acima.

POSTULADOS DA DETERMINAÇÃO

Dois pontos distintos determinam uma única reta.

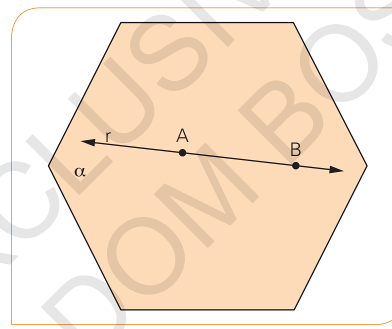


Três pontos não colineares determinam um único plano.



POSTULADO DA INCLUSÃO

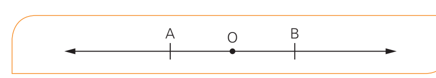
A reta com dois pontos distintos em um plano está nele contida.



$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ A \neq B \end{array}\right\} r = \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

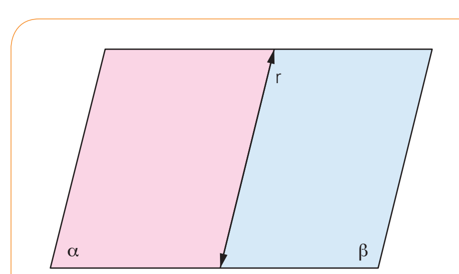
POSTULADOS DA DIVISÃO

Um ponto da reta a divide em duas regiões denominadas **semirretas**. Estas são denominadas opostas com origem no ponto.



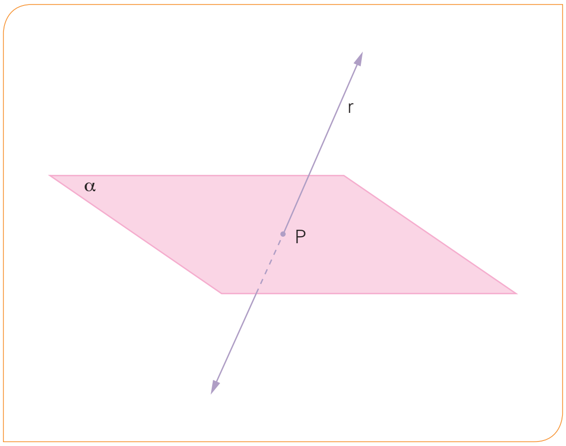
Observe que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas com origem em **O**.

Uma reta de um plano o divide em duas regiões denominadas **semiplanos**. Estes serão opostos com origem na reta.



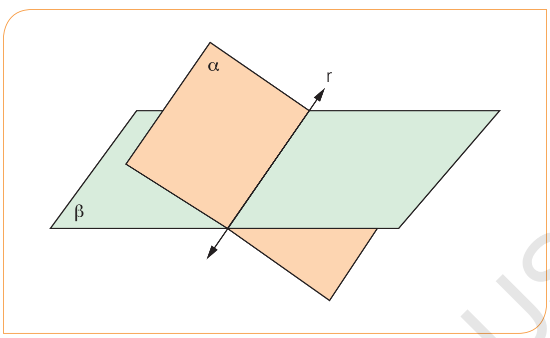
$$\alpha \cap \beta = r$$

Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas **semiespaços**. Estes serão opostos com origem no plano.



POSTULADOS DA INTERSECÇÃO

Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então há uma única reta em comum passando por esse ponto.

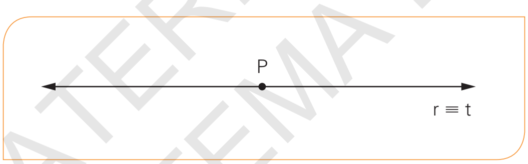


POSTULADOS DAS PARALELAS (EUCLIDES)

Vamos considerar os pontos A e B e uma reta r. Se $\overline{AB} \in r$, teremos os seguintes tipos de paralelas:

I. Paralelas coincidentes

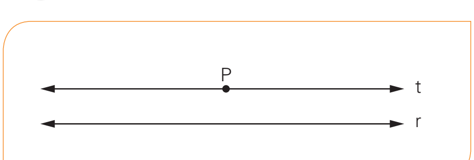
$\overline{AB} \in r$



$\exists t \mid \overline{AB} \in r$ e $\overline{AB} \in t$, então $t // r$ e $t = r$

II. Paralelas distintas

$\overline{AB} \in r$

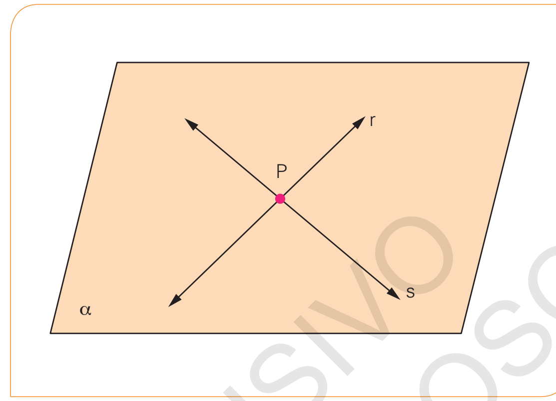


$\exists t \mid t // r$ e $\overline{AB} \in r$ e $\overline{AB} \notin t$, então $t \neq r$

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Retas concorrentes

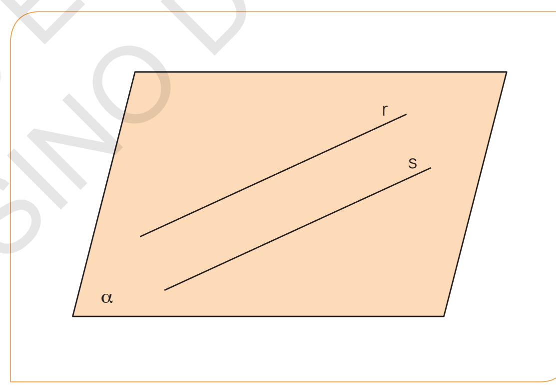
Duas retas que têm um único ponto em comum são denominadas concorrentes.



$r \cap t = \{P\} \leftrightarrow r \times t$ (concorrentes)

Retas paralelas

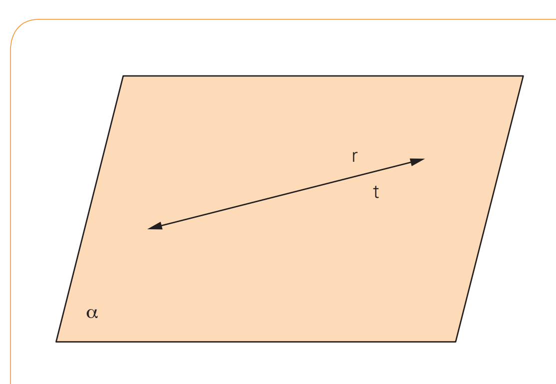
Duas retas distintas, coplanares e que não têm nenhum ponto em comum são denominadas paralelas distintas.



$\exists\, \alpha \mid r \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$ e $r \cap b = \{\ \} \leftrightarrow r // t$ (paralelas distintas)

Retas paralelas coincidentes

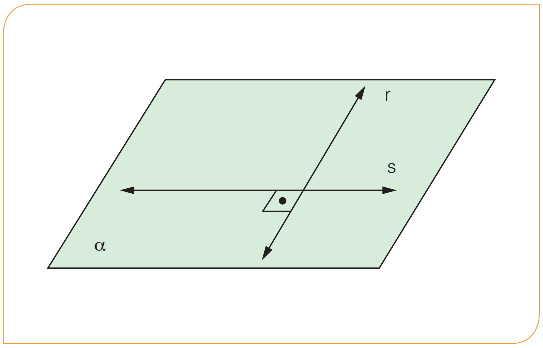
Duas retas paralelas que têm todos os pontos em comum são denominadas coincidentes.



$r \cap s = r = t \leftrightarrow$ r e t são coincidentes

Retas perpendiculares

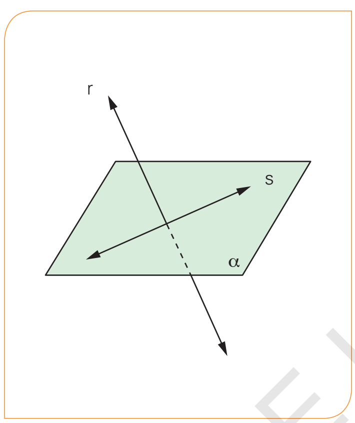
Duas retas concorrentes que formam um ângulo reto entre si são denominadas perpendiculares.



$r \perp s$ (a reta r é perpendicular à reta s)

Retas reversas

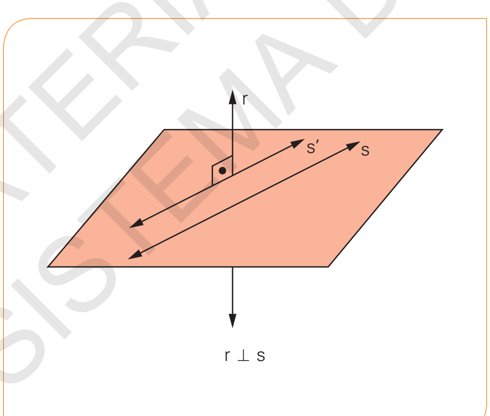
Duas retas são reversas quando não são coplanares.



$\exists\, \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \not\subset \alpha \leftrightarrow$ r e s são reversas

Retas ortogonais

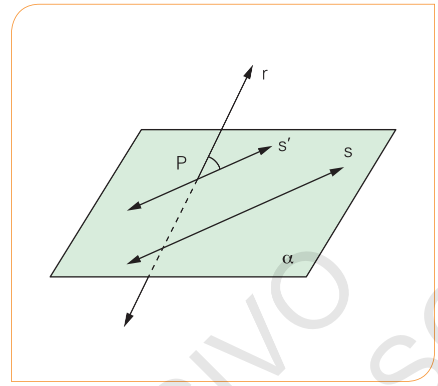
Quando duas retas reversas formam um ângulo reto entre si, são classificadas como ortogonais.



Ângulo entre duas retas reversas

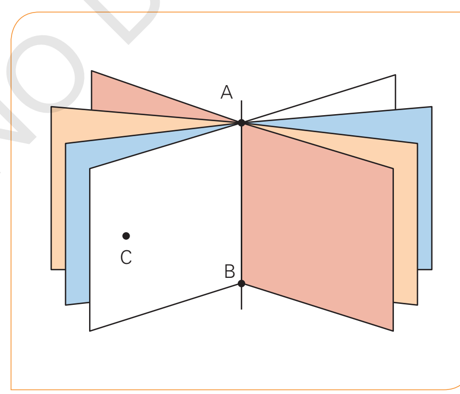
Em referência a um ângulo formado por duas retas, considera-se o ângulo agudo formado entre elas.

Vamos considerar duas retas reversas **r** e **s**. Seja α um plano que contém **s** e intercepta **r** num ponto **P** e trançando por **P** a reta **s'**, paralela a **s**, dizemos que o ângulo entre **r** e **s** é o ângulo entre as retas concorrentes **r** e **s'**.



PLANO DETERMINADO POR TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES

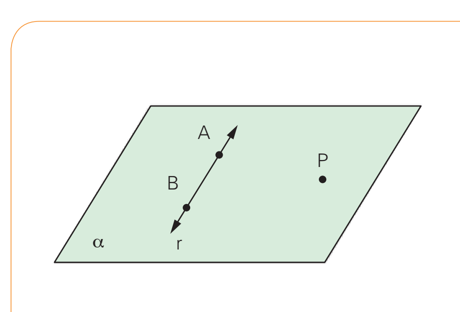
Observe a figura a seguir. Embora haja uma infinidade de planos que passam por A e B, entre os quais os planos que contêm a reta $\overleftrightarrow{AB}$, uma vez que os pontos A, B e C não são colineares, existe apenas um plano que passa pelos três pontos.



Três pontos não colineares determinam um plano.

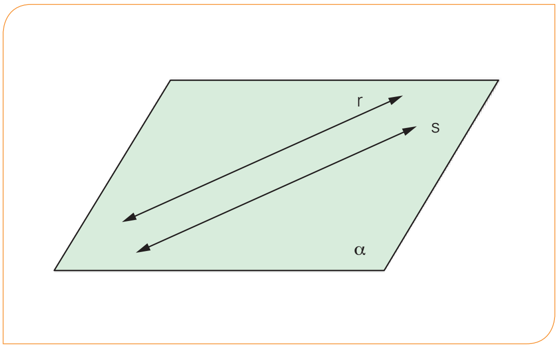
PLANO DETERMINADO POR UMA RETA E UM PONTO FORA DELA

Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.



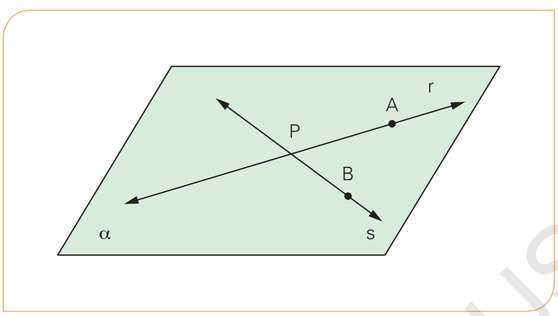
PLANO DETERMINADO POR DUAS RETAS PARALELAS DISTINTAS

Duas retas paralelas distintas determinam um plano.



PLANO DETERMINADO POR DUAS RETAS CONCORRENTES

Duas retas concorrentes determinam um plano.

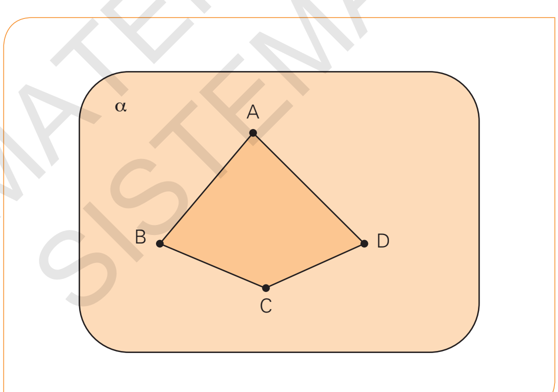


QUADRILÁTERO PLANO REVERSO

Vamos considerar quatro pontos (**A**, **B**, **C**, **D)**, de modo que não existam três colineares. Em relação ao plano α determinado pelos pontos **B**, **C**, **D**, o ponto **A** pode ou não pertencer a ele. Assim:

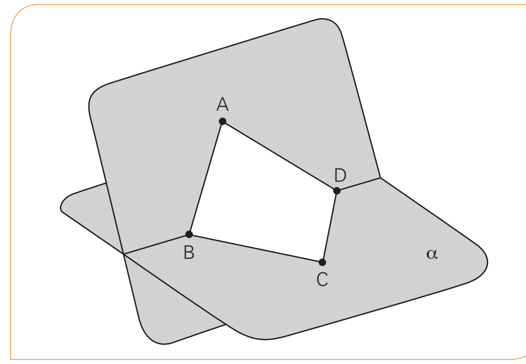
$A \in \alpha$ (BCD)

Os pontos **A**, **B**, **C**, **D** são vértices de um quadrilátero chamado **quadrilátero plano**.



$A \notin \alpha$ (BCD)

Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são vértices de um quadrilátero chamado **quadrilátero reverso**.



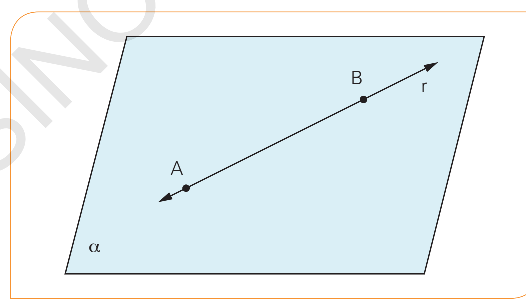
As diagonais de um quadrilátero plano estão em retas concorrentes. Por sua vez, as diagonais de um quadrilátero reverso estão em retas reversas.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Existem três posições possíveis entre reta e plano que envolvem conceitos importantes de continência, concorrência e paralelismo.

Reta contida no plano (continência)

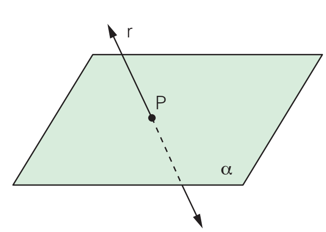
Segundo o postulado da inclusão, uma reta está contida em um plano quando ela tem dois pontos distintos pertencentes ao plano.



$$\left.\begin{array}{c} A \in \alpha \text{ e } A \in r \\ B \in \alpha \text{ e } B \in r \\ A \neq B \end{array}\right\} \leftrightarrow r \subset \alpha \leftrightarrow r \cap \alpha = r$$

Reta concorrente com o plano (concorrência)

Uma reta e um plano que têm um único ponto em comum são denominados concorrentes ou secantes.

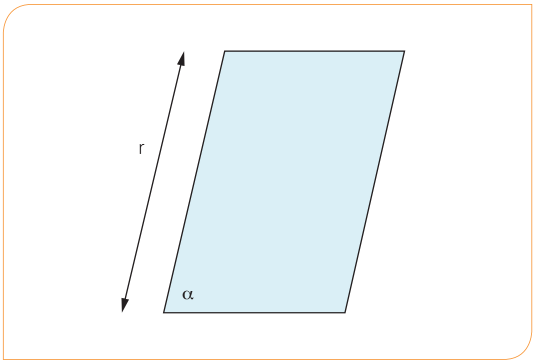


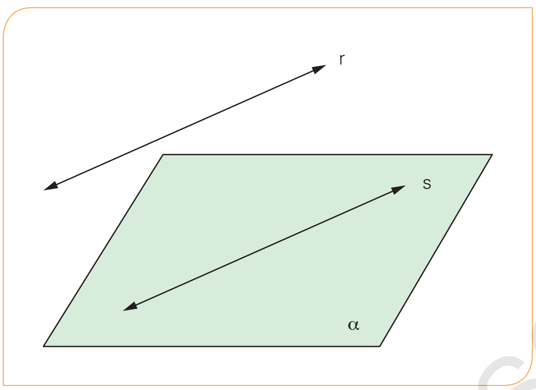
$\exists P \mid r \cap \alpha = \{P\} \leftrightarrow r$ e α são concorrentes

O ponto P é denominado **traço** da reta no plano.

Reta paralela ao plano (paralelismo)

Quando uma reta e um plano não têm pontos em comum, então são paralelos entre si.





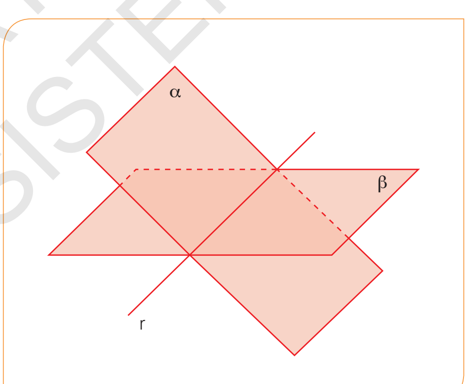
$r \cap \alpha = \{\ \} \leftrightarrow r // \alpha$

Se a reta **r** é paralela ao plano α, ela não tem ponto em comum com α. Desse modo, não tem ponto em comum com as retas contidas em α. Logo, se a reta é paralela ao plano, então ela é paralela ou reversa a qualquer reta do plano.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS

Planos concorrentes

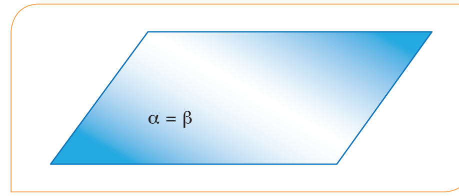
Quando dois planos têm uma reta em comum, são denominados concorrentes ou secantes.



$\exists r \mid \alpha \cap \beta = r \leftrightarrow$ α e β são concorrentes

Planos paralelos coincidentes

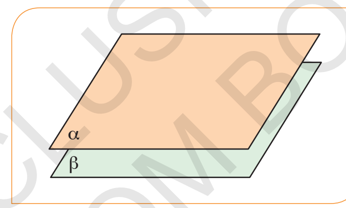
Quando dois planos têm todos os pontos em comum, são classificados como paralelos coincidentes.



$\alpha \equiv \beta$ e $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Planos paralelos distintos

Quando dois planos não têm ponto em comum, são denominados planos paralelos distintos.

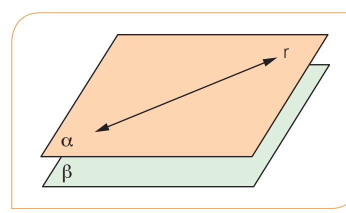


$\alpha \cap \beta = \{\ \} \leftrightarrow \alpha // \beta$

Paralelismo entre planos

Teorema 1

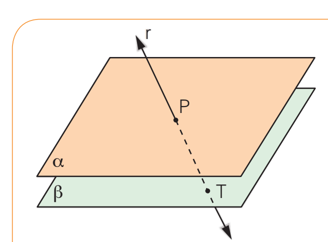
Se dois planos são paralelos e distintos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.



$\alpha \neq \beta$
$\alpha // \beta$
$r \subset \alpha$
Logo, $r // \beta$.

Teorema 2

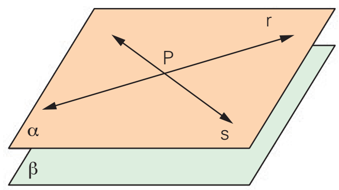
Se dois planos são paralelos distintos, toda reta concorrente com um deles é concorrente com o outro.



$\alpha \neq \beta$
$\alpha // \beta$
$r \cap \alpha = \{P\}$
Logo, **r** e **β** são concorrentes.

Teorema 3

Se um plano contém duas retas concorrentes paralelas a outro plano, então esses planos também são paralelos.

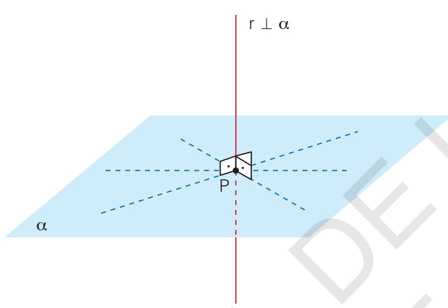


$r \subset \alpha$ e $r \,//\, \beta$
$s \subset \alpha$ e $s \,//\, \beta$
$r \cap s = \{P\}$
Logo, $\alpha \,//\, \beta$.

PERPENDICULARISMO

Reta e plano perpendiculares

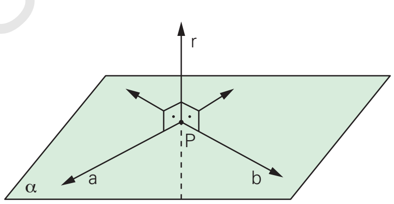
Uma reta **r** é **perpendicular** a um plano α quando ela é concorrente ao plano e perpendicular a todas as retas de α que passam por seu traço no plano.



$$\left.\begin{array}{c} r \cap \alpha = \{P\} \\ \forall \text{ reta} \subset \alpha \mid P \in \text{reta} \\ r \perp \text{reta} \end{array}\right\} \rightarrow r \perp \alpha$$

Teorema do perpendicularismo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

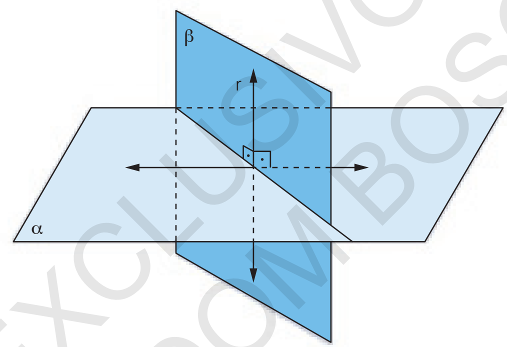


$$\left\{\begin{array}{c} a \subset \alpha,\ b \subset \alpha \\ r \perp a,\ \ r \perp b \\ a \cap b = \{P\} \end{array}\right.$$

Logo, $r \perp \alpha$.

Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



$$\left.\begin{array}{c} r \subset \beta \\ r \perp \alpha \end{array}\right\} \leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

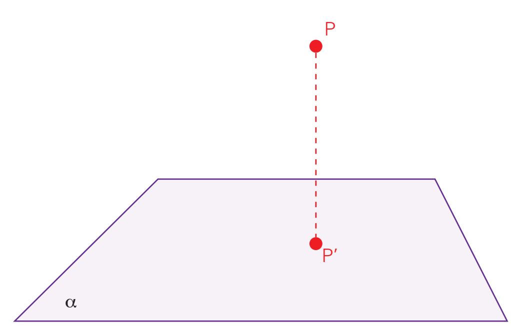
PROJEÇÃO ORTOGONAL

A projeção ortogonal das figuras geométricas sobre um plano corresponde à imagem formada nesse plano pelo pé do segmento de reta ortogonal que liga cada ponto dessa figura ao plano. Na projeção ortogonal, nem sempre o objeto mantém sua forma original.

Um modo simples de imaginar a projeção ortogonal de um objeto é pensar na sombra dele ao ser iluminado por feixes de luz ortogonais ao plano de projeção.

PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PONTO SOBRE O PLANO

A figura formada pela **projeção ortogonal** de um ponto **P** sobre o plano α é um ponto **P'**.



PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM SEGMENTO DE RETA SOBRE UM PLANO

A projeção de uma reta sobre um plano está condicionada ao ângulo que a reta forma com o plano. Caso a reta seja perpendicular ao plano, sua projeção será apenas um ponto, conforme a figura 1. Caso a reta esteja paralela ou inclinada em relação ao plano, sua projeção também será uma reta, limitada por suas extremidades, projetadas ortogonalmente ao plano, conforme a figura 2.

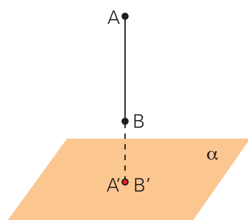


Fig. 1

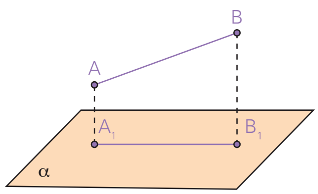
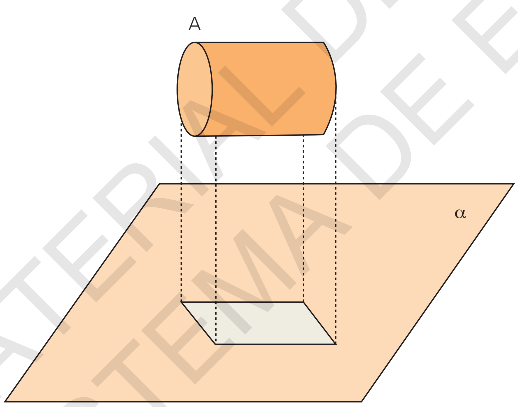


Fig. 2

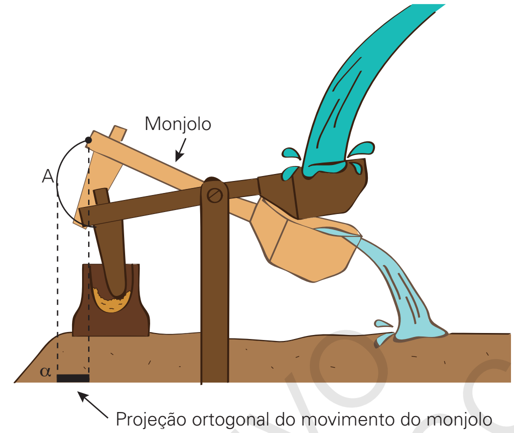
Observe que o ponto A_1 é projeção ortogonal do ponto A. O ponto B_1, por sua vez, é projeção ortogonal do ponto B, formando o segmento de reta $\overrightarrow{A_1B_1}$. Este é a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$.

PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

A projeção ortogonal de uma figura é composta do conjunto de todos os pontos do objeto A, sobre o plano α, conforme a figura.



Caso haja movimento do objeto, devemos imaginar a trajetória realizada por seus pontos. Por exemplo, em um moinho de água (figura a seguir), o monjolo executa um arco de circunferência durante a subida e a descida. Porém, ao analisarmos a projeção ortogonal de um ponto A da superfície do monjolo em um plano α, obtemos um segmento de reta, formado pela trajetória do arco de circunferência.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UFSCar-SP – Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α, a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura S no espaço, a projeção ortogonal de S sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar em uma semirreta.

b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

Resolução

Caso a circunferência esteja contida em um plano perpendicular a α, sua projeção ortogonal será um segmento de reta.

2. UFBA – Com base nos conhecimentos sobre geometria espacial, pode-se afirmar:

01) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular à r também é perpendicular ao plano α.

02) Se um ponto P não pertence à reta s, então existe um único plano passando por P, paralelo à reta s.

04) Se uma reta r está contida em um plano α, e a reta s é reversa a r, então a reta s intercepta o plano α.

08) Se α e β são dois planos perpendiculares, e r é uma reta perpendicular a α, que não está contida em β, então r é paralela à β.

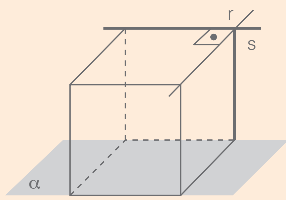
16) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

32) Três planos distintos interceptam-se segundo uma reta ou um ponto.

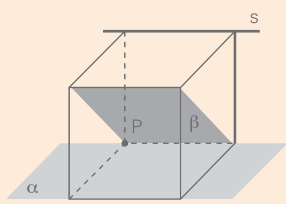
Resolução

Soma: 08 + 32 = 40

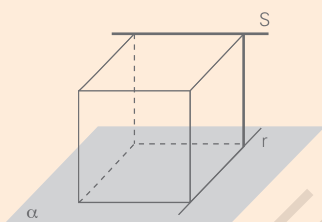
01. Falso. Como podemos observar na figura, é possível que uma reta s seja perpendicular à reta r mesmo que não seja perpendicular ao plano α.



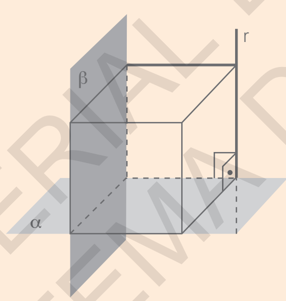
02. Falso. Conforme indica a figura, os planos α e β passam por P e são paralelos a s. Logo, há infinitos planos passando por P e paralelos a s.



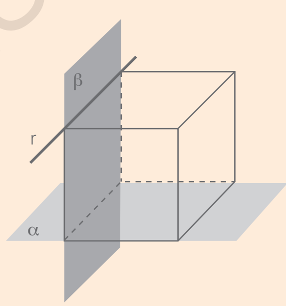
04. Falso. A reta r está contida no plano α, conforme a figura. A reta r é reversa a s, porém a reta s é paralela ao plano α.



08. Verdadeiro. Como α e β são perpendiculares e r é uma reta perpendicular a α que não está contida em β, então r é paralela a β, conforme a figura.



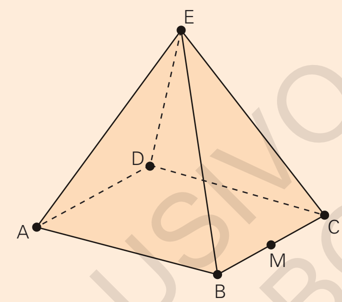
16. Falso. Como podemos observar na figura, os planos α e β são perpendiculares. Apesar de a reta r estar contida no plano β, ela não é perpendicular ao plano α.



32. Verdadeiro. Quando a intersecção entre três planos não resulta em conjunto vazio, ela sempre será uma reta ou um ponto.

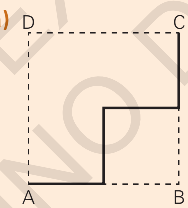
3. Enem C2-H6

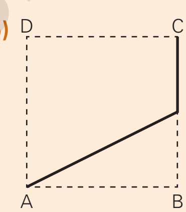
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

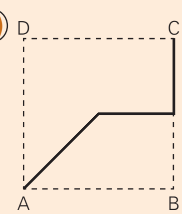


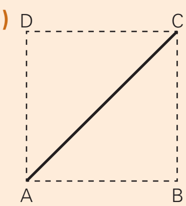
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

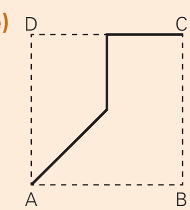
O desenho que Bruno deve fazer é

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução

A figura da alternativa C corresponde à projeção ortogonal do deslocamento do plano da base da pirâmide, supondo ser uma pirâmide regular.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

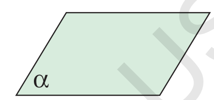
Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

ROTEIRO DE AULA

GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Postulados

Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

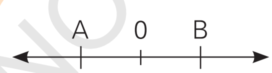


Plano α

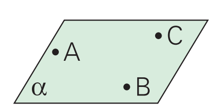
Existem ponto, reta e plano.

Ponto **P**

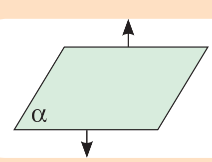
Um ponto de reta a divide em duas regiões denominadas semirretas.



Três pontos não colineares determinam um único plano.



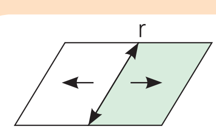
Um plano divide um espaço em duas regiões denominadas semiespaço.



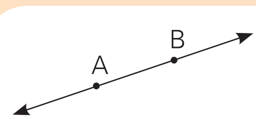
Na reta e fora dela existem infinitos pontos


Reta **r**

Uma reta de um plano o divide em duas regiões denominadas semiplanos



Dois pontos distintos determinam uma única reta.



Projeção ortogonal

Imagem formada pelo pé do segmento de reta ortogonal que liga cada ponto.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEM-PR – No espaço tridimensional, considere um plano π e as retas r, s e t, distintas duas a duas, de modo que r e s são perpendiculares ao plano π e a reta t não possua qualquer ponto em comum com o plano π e seja concorrente com as retas s e r. Sobre a situação descrita, assinale o que for correto.

01) As retas r e s são paralelas.

02) As retas s e t são reversas.

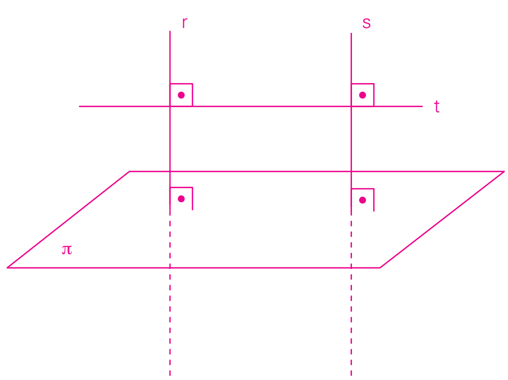
04) A reta t é paralela ao plano π

08) A reta s é perpendicular a qualquer reta do plano π concorrente a ela.

16) Se A e B são pontos distintos de r, e P e Q são pontos distintos de s, então os triângulos APQ e BPQ possuem a mesma área.

Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29

A figura abaixo ilustra a situação descrita na questão.



01) Verdadeira, pois são paralelas ao plano.

02) Falsa, pois são concorrentes.

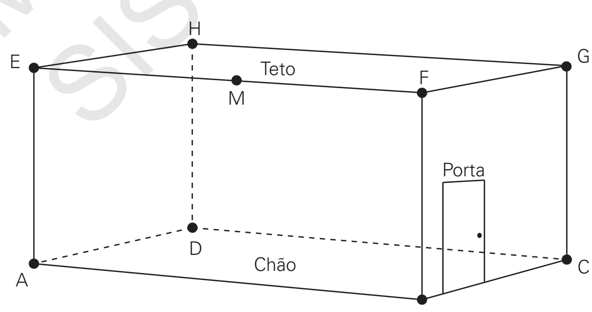
04) Verdadeira, porque não tem ponto comum com o plano.

08) Verdadeira, pois formará 90° com qualquer reta do plano que seja concorrente a ela.

16) Verdadeira, porque terão a mesma base PQ e a mesma altura h, dada pela distância entre as retas paralelas r e s.

2. Enem C2-H6

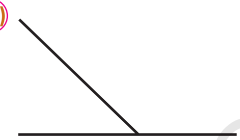
Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.



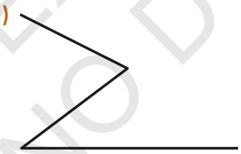
A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

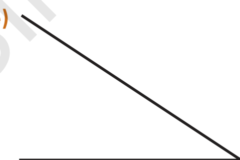
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dada por:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Sendo B, A e M coplanares, a projeção ortogonal do deslocamento de A para M está contida no segmento $\overline{AB}$. Além disso, a projeção ortogonal do deslocamento de M para H sobre o chão do quarto corresponde a um segmento de reta oblíquo em relação a $\overline{AB}$, cuja origem é o ponto M', médio de $\overline{AB}$, e cuja extremidade é o ponto D, projeção de H sobre o plano ABC.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

3. Cefet-MG (adaptado) – No contexto da Geometria Espacial, afirma-se:

I. Se uma reta é paralela a um plano, então ela está contida nesse plano.

II. Duas retas sem ponto comum são paralelas ou reversas.

III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro.

IV. Duas retas distintas paralelas a um plano são paralelas entre si.

O que podemos concluir quanto às afirmações I, II, III e IV?

Analisando cada uma das quatro afirmações acima, temos, respectivamente:

I. Incorreta, pois uma reta é paralela a um plano se, e somente se, eles não têm ponto em comum.

II. Correta, porque duas retas distintas sem ponto comum são paralelas ou reversas.

III. Correta, pois, considerando α e β dois planos distintos paralelos e uma reta $r \in \alpha$, segue-se que $r \cap b = \{\ \}$. Isso implica em $r // \beta$.

IV. Incorreta, pois duas retas distintas paralelas a um plano podem ser concorrentes.

4. Fac. Albert Einstein-SP – Seja uma reta r e os planos secantes α e β de modo que $\alpha \cap \beta = r$. Seja s uma reta paralela à reta r, de modo que $s \cap \beta = \varnothing$. Seja t uma reta secante ao plano β no ponto P, de modo que $P \in r$. De acordo com essas informações, necessariamente

a) $s \cap \alpha = s$

b) $t \cap \beta = \varnothing$

c) $P \notin \alpha$

d) $r \cap t \neq \varnothing$

Com as informações disponíveis, temos que a interseção das retas r e t é o ponto P. Logo, necessariamente, concluímos que $r \cap t \neq \varnothing$. Além disso, sendo r a interseção dos planos α e β, se $P \in r$, então $P \in \alpha$. Sabendo ainda que t é secante a β em P, é imediato que $t \cap \beta = \{P\}$.

Finalmente, é possível termos s paralela a r e fora de α, de tal sorte que $S \cap \alpha = \varnothing$.

5. UPE – Analise as afirmativas a seguir, relativas à geometria espacial e coloque V nas verdadeiras e F nas falsas.

( ) Se uma reta está contida em um plano, então toda reta perpendicular a ela será perpendicular ao plano.

( ) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro.

( ) Se dois planos distintos são paralelos a uma reta fora deles, então eles são paralelos entre si.

( ) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência CORRETA.

a) F – F – V – V

b) F – V – V – F

c) F – F – F – F

d) V – F – F – V

e) V – V – F – F

Falsa. Sejam α um plano e r uma reta contida em α. É imediato que existe pelo menos uma reta s contida em α tal que s é perpendicular a r. Logo, s não é perpendicular a α.

Falsa. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

Falsa. Sejam α e β dois planos distintos não paralelos. Basta considerar a reta r, interseção de α e β, e uma reta s paralela a r.

Falsa. Sejam α e β dois planos paralelos distintos. Se $r \in \alpha$, basta tomar $s \in \beta$ de modo que r e a projeção ortogonal de s sobre α sejam concorrentes.

6. Sistema Dom Bosco – Sobre o conteúdo de retas e planos analisados na Geometria espacial, responda aos itens a seguir.

a) Dois planos sempre se interceptam?

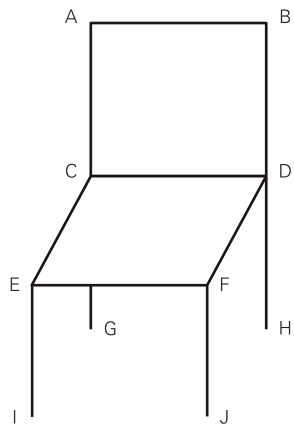
b) Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas?

a) Não, pois dois planos podem ser paralelos.

b) Não, porque, se elas não são paralelas, podem ser reversas ou concorrentes.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. CFTMG – A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto.



A partir dos pontos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas

a) CD e EF são paralelos.

b) BD e FJ são concorrentes.

c) AC e CD são coincidentes.

d) AB e EI são perpendiculares.

8. EsPCEx-SP – Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.

b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.

c) as retas t e s são necessariamente concorrentes.

d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

9. UEM-PR (adaptado) – O que pode-se concluir quanto aos itens a seguir?

a) Sejam a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, onde π_1 e π_2 são planos, e a reta s paralela a r, de tal forma que $s \not\subset \pi_1 \cup \pi_2$. Então, toda reta perpendicular a r contida em um desses dois planos é reversa a s?

b) Dados um ponto P pertencente a um plano π e uma reta r perpendicular a π, tal que $P \in r$, temos que toda reta contendo P perpendicular a r está em π?

c) Considere 6 retas contendo as arestas de um tetraedro regular. Fixada uma das retas, então ela é reversa a apenas uma dessas 6 retas?

d) A interseção de um poliedro convexo com um plano é uma região convexa?

10. UEM-PR – Considerando conhecimentos sobre Geometria Espacial, assinale o que for correto.

01) Se r e s são duas retas no espaço, com $r \cap s = \varnothing$, então a única possibilidade para r e s é que sejam paralelas.

02) Dados três pontos colineares A, B e C e no espaço, então não existe nenhum plano que contenha esses três pontos.

04) Se π, ρ e σ são planos distintos no espaço, então $\pi \cap \rho \cap \sigma$ pode determinar uma única reta, ou um único ponto, ou pode ser vazia.

08) Se r e s são duas retas reversas no espaço, então existe um plano que contém a reta s e é paralelo à reta r.

16) Seja α um plano e $P \notin \alpha$. Para calcular a distância do plano ao ponto P basta escolher um ponto $Q \notin \alpha$ qualquer e calcular a distância entre P e Q.

11. UFJF-MG (adaptado) – Sejam r uma reta e β_1 e β_2 dois planos no espaço, considere as seguintes afirmações:

I. Se $r \cap \beta_1 = \{P_1\}$ e $r \cap \beta_2 = \{P_2\}$ com P_1 e P_2 pontos distintos, então β_1 é paralelo a β_2.

II. $r \cap \beta_1 = \varnothing$ e $r \cap \beta_2 = \varnothing$ então β_1 é paralelo a β_2 ou é coincidente de β_2.

III. Se existem dois pontos distintos em $r \cap \beta_1$, então $r \cap \beta_1 = r$.

O que podemos concluir quanto as afirmações I, II e III?

12. UEM-PR – Sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço, assinale o que for correto.

01) Duas retas r e s são ortogonais quando são reversas e existe uma reta t, paralela a s e perpendicular a r.

02) Se um plano α é paralelo a uma reta r, então todas as retas do plano α são paralelas a r.

04) É possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos.

08) Se um plano α intercepta os planos β e γ formando um ângulo de 90°, então os planos β e γ são paralelos.

16) Considere as retas r, s e t. Se r é reversa a s e a reta s é concorrente a t, então r e t são reversas.

13. EsPCEx-SP – Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

a) Somente II
b) I e II
c) I e III
d) II e III
e) I, II e III

14. Esc. Naval – Nas proposições abaixo, coloque **V** na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e **F** quando for falsa.

( ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

( ) Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

( ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.

( ) Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F – F – V – F – V
b) V – F – V – V – F
c) V – V – F – V – V
d) F – V – V – V – V
e) V – V – V – V – V

15. UPF-RS – Considere os planos definidos por:

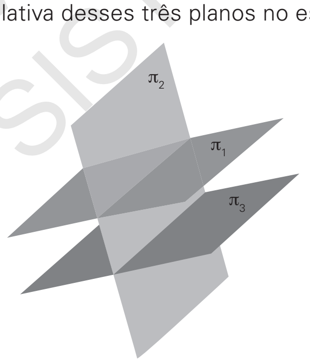
$\pi_1 : 2x - 3y + z = 1;$

$\pi_2 : -x + y + 2z = 0$ e

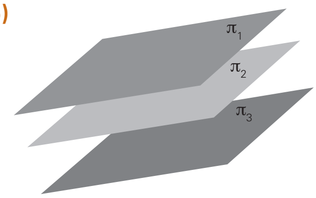
$\pi_3 : -4x + 6y - 2z = -2.$

Qual das figuras a seguir pode descrever a posição relativa desses três planos no espaço?

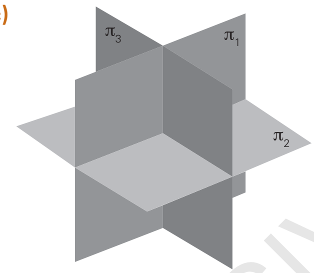
a)



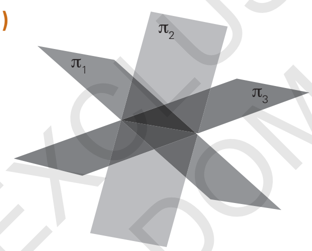
b)



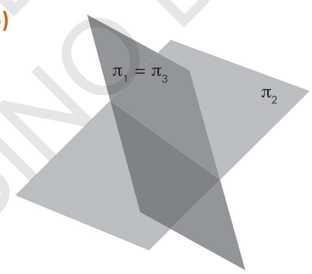
c)



d)



e)



16. UEPG-PR – Considerando os planos α e β, e as retas r e s, assinale o que for correto.

01) Se $\alpha \cap \beta = s$, $r // s$, $r \not\subset \alpha$ e $r \not\subset \beta$, então $r // \alpha$ e $r // \beta$.

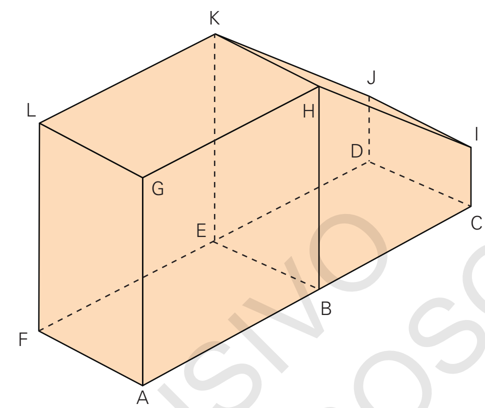
02) Se $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$, $s \subset \alpha$, $s \perp r$, então $s \perp \beta$.

04) Se $r \subset \beta$ e $s \perp r$, então $s \perp \beta$.

08) Se $\alpha // \beta$, $r \perp \alpha$, então $s \perp \beta$.

16) Se $r // \alpha$ e $r // \beta$, então $\alpha // \beta$.

17. EsPCEx-SP – O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.



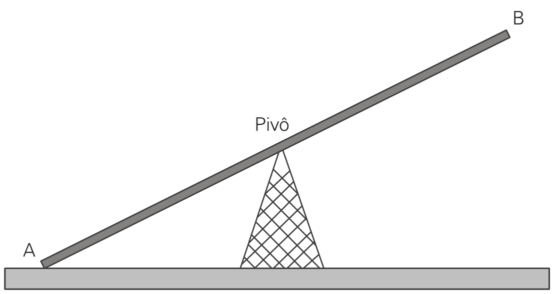
Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overleftrightarrow{LB}$ e $\overleftrightarrow{GE}$, as retas $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{HI}$, e as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{GK}$. Quais são, respectivamente, as posições relativas desses pares de retas?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H6

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

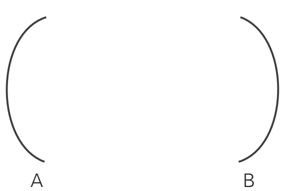
Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 

b) 

c) 

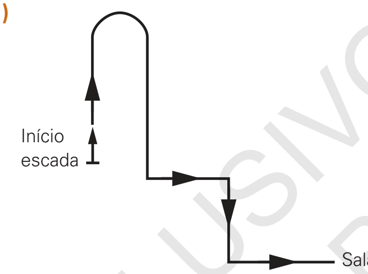
d) 

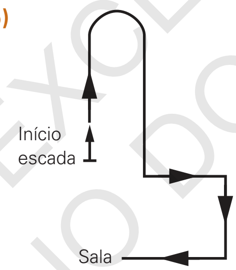
e) 

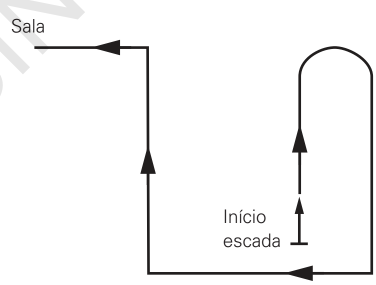
19. Enem C2-H6

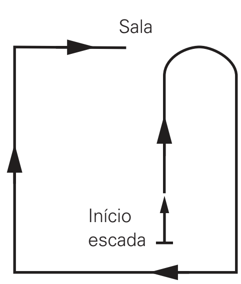
Uma pessoa pede informação na recepção de um prédio comercial de como chegar a uma sala, e recebe as seguintes instruções: suba a escada em forma de U à frente, ao final dela vire à esquerda, siga um pouco à frente e em seguida vire à direita e siga pelo corredor. Ao final do corredor, vire à direita.

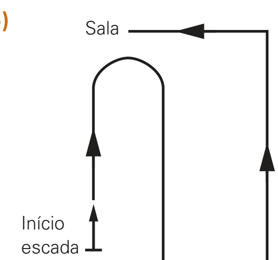
Uma possível projeção vertical dessa trajetória no plano da base do prédio é:

a) 

b) 

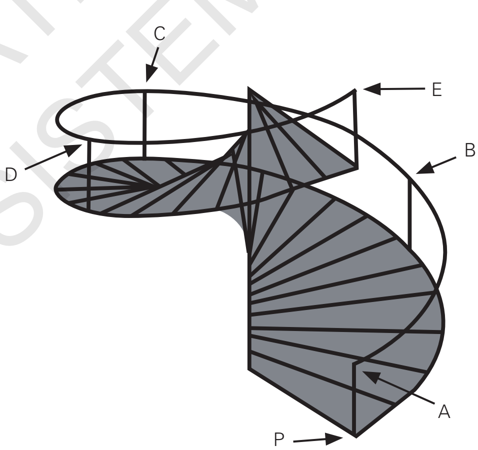
c) 

d) 

e) 

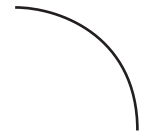
20. Enem C2-H6

O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

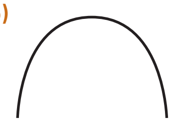


A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

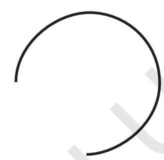
a)



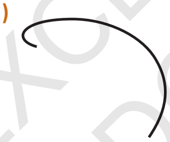
b)



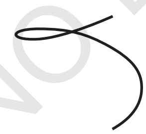
c)



d)



e)



34 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO II

- Poliedro
- Superfícies poliédricas
- Relações de Euler
- Poliedro de Platão

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.


VASILIKI/ISTOCKPHOTO

Estátua de Platão.

Introdução

Platão (c. 428-348 a.C.) foi um filósofo e matemático grego do período clássico. Aluno de Sócrates e professor de Aristóteles, é um dos pensadores mais conhecidos e estudados até a atualidade. Além disso, foi fundador da Academia de Atenas. Dele vem a expressão **amor platônico**, em referência a um sentimento afetivo idealizado. Criou também o famoso “mito da caverna”. Para Platão, existem dois mundos: o das ideias ou ideal (em que tudo é perfeito e eterno) e o real (que, por ser finito e imperfeito é apenas uma cópia mal-acabada do mundo ideal).

Neste módulo, estudaremos os poliedros de Platão. Por esse motivo é válido conhecer um pouco mais sobre um dos maiores pensadores da Antiguidade.

POLIEDRO

A região do espaço delimitada por uma superfície poliédrica fechada é denominada **poliedro**.

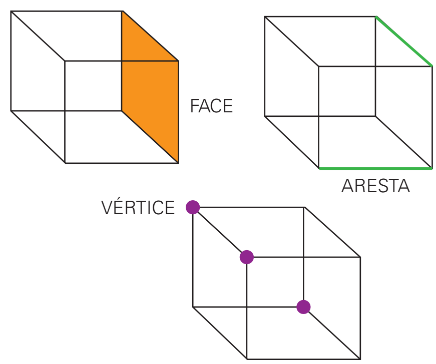
Quando a superfície poliédrica fechada é convexa, o poliedro por ela delimitado é classificado como **poliedro convexo**.

O poliedro convexo é composto de um número finito n ($n \geqslant 4$) de polígonos convexos, tais que:

- dois desses polígonos nunca sejam coplanares;
- o plano contendo um deles deixe os demais no mesmo semiespaço;
- cada lado do polígono seja comum a somente dois polígonos.

ELEMENTOS DOS POLIEDROS

Todo poliedro é composto de face (F), aresta (A) e vértice (V), conforme figura a seguir.



SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS

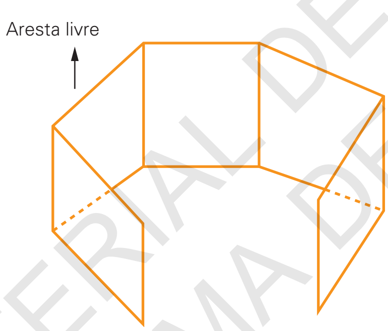
Considere n ($n \in \mathbb{N}^*$) polígonos convexos (regiões poligonais), tais que:

- dois polígonos que tenham um lado em comum nunca sejam coplanares;
- o plano contendo um dos polígonos deixe os demais no mesmo semiespaço;
- cada lado do polígono pertença no máximo a dois polígonos.

Por fim, a união desses polígonos forma a figura denominada **superfície poliédrica convexa**.

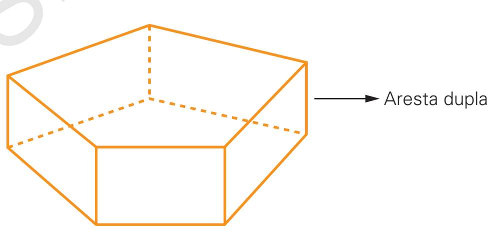
SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA

Uma superfície poliédrica que tenha arestas livres (ou seja, arestas que são lados de um único polígono, formando um único contorno) é denominada **superfície poliédrica aberta**.



SUPERFÍCIE POLIÉDRICA FECHADA

Uma superfície poliédrica que não tenha arestas livres (ou seja, cujas arestas sejam lados de dois polígonos) é denominada superfície poliédrica fechada.



RELAÇÕES DE EULER

Sendo:

- V = número de vértices do poliedro;
- A = número de arestas do poliedro;
- F = número de faces do poliedro.
- Para uma superfície poliédrica aberta, temos:

$V - A + F = 1$

- Para uma superfície poliédrica fechada, ou poliedro convexo, temos:

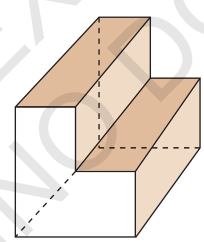
$V - A + F = 2$

Os poliedros que satisfazem essa relação são denominados **poliedros eulerianos**.

Observação: A relação de Euler vale para todos os poliedros convexos, sendo que existem poliedros não convexos e mesmo assim **eulerianos**.

Exemplos:

1. Sistema Dom Bosco – O poliedro abaixo, apesar de não ser convexo, é euleriano?



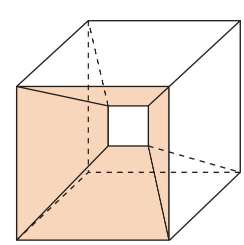
$$\left.\begin{array}{l} V = 12 \\ A = 18 \\ F = 8 \end{array}\right\}$$

$V - A + F = 2$

$12 - 18 + 8 = 2$

$2 = 2 \therefore$ É um poliedro euleriano.

2. Sistema Dom Bosco – Demonstre que o poliedro abaixo não é euleriano.



$$\left.\begin{array}{l} V = 12 \\ A = 24 \\ F = 12 \end{array}\right\}$$

$V - A + F = 2$

$12 - 24 + 12 = 2$

$0 \neq 2 \therefore$ Não é um poliedro euleriano.

A soma dos ângulos de todas as faces do poliedro convexo, sendo V o número de vértices e r o ângulo reto, é dada por $S = (V - 2) \cdot 4r$.

POLIEDRO DE PLATÃO

O poliedro euleriano é considerado poliedro de Platão, quando:

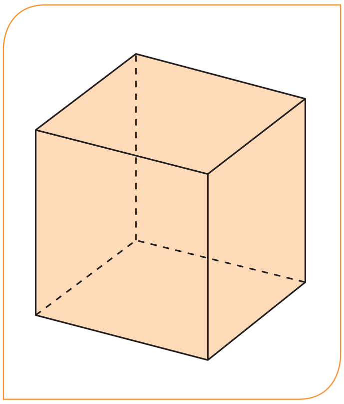
a) todas as faces têm o mesmo número de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Na figura 1, temos um cubo (hexaedro) euleriano, conforme o cálculo. Ele também é considerado um poliedro de Platão, pois todas as suas faces têm o mesmo número de arestas e todos os ângulos têm o mesmo número de arestas.

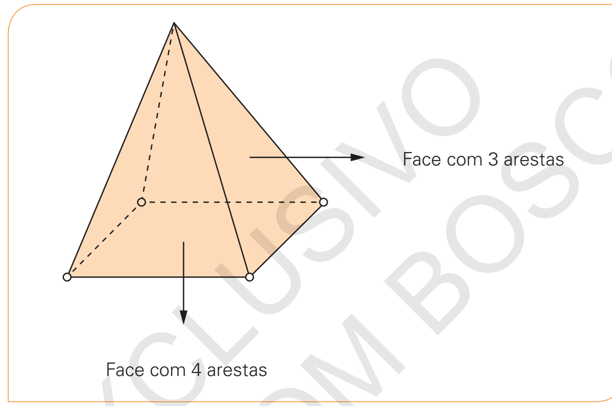
Na figura 2, temos uma pirâmide de base quadrada. Apesar de ser um poliedro euleriano, conforme o cálculo, não é um poliedro de Platão. Isso porque a base (que é uma de suas faces) tem um número diferente de arestas das demais.

Figura 1



$V = 8$, $F = 6$, $A = 12$
$V + F - A = 2$
É euleriano e é um poliedro de Platão.

Figura 2



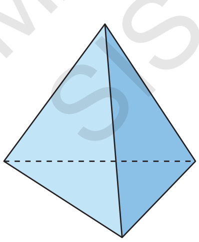
$V = 5$, $F = 5$, $A = 8$
$V + F - A = 2$
É euleriano, mas não é um poliedro de Platão.

Existem apenas cinco poliedros de Platão. Observe a tabela a seguir.

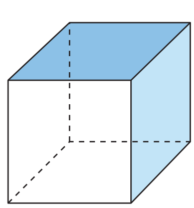
Nome	Tipo de face	V	F	A
Tetraedro	Triângulo	4	4	6
Hexaedro	Quadrilátero	8	6	12
Octaedro	Triângulo	6	8	12
Dodecaedro	Pentágono	20	12	30
Icosaedro	Triângulo	12	20	30

POLIEDROS REGULARES

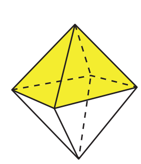
Os poliedros de Platão cujas faces são polígonos regulares congruentes e cujos ângulos poliédricos são congruentes são denominados **poliedros regulares** (os cinco descritos na tabela anterior).



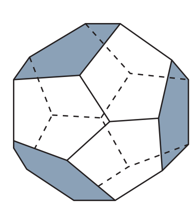
Tetraedro regular
(4 triângulos equiláteros)



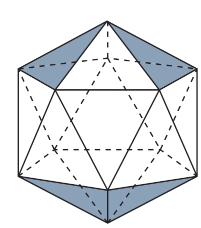
Hexaedro regular
(6 quadrados)



Octaedro regular
(8 triângulos equiláteros)



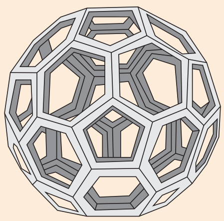
Dodecaedro regular
(12 pentágonos regulares)



Icosaedro regular
(20 triângulos equiláteros)

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Cesgranrio – O poliedro da figura (uma invenção de Leonardo da Vinci utilizada modernamente na fabricação de bolas de futebol) tem como faces 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. O número de vértices do poliedro é:



a) 64
b) 90
c) 60
d) 72
e) 56

Resolução

Como há 20 hexágonos e 12 pentágonos:

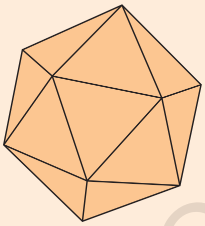
$F = 20 + 12 = 32$

$A = \dfrac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90$

$V + F - A = 2$

$V = 2 + A - F = 2 + 90 - 32 = 60 \therefore V = 60$

2. Sistema Dom Bosco – Quantos vértices tem o icosaedro regular, um dos sólidos de Platão, composto de 20 triângulos equiláteros?



Resolução

Primeiro calculamos o número de arestas do icosaedro.

$A = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30$

Como o icosaedro é um poliedro euleriano:

$V + F - A = 2$

$V = 2 + A - F = 2 + 30 - 20 = 12$

Portanto, o icosaedro tem 12 vértices.

ROTEIRO DE AULA

POLIEDROS

RELAÇÕES DE EULER

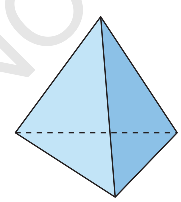
SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA

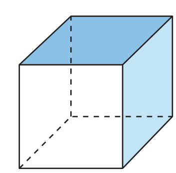
V – A + F = 1

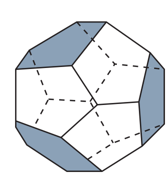
SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA

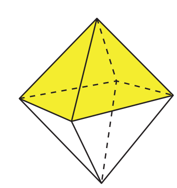
V – A + F = 2

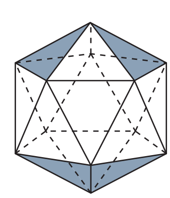
POLIEDROS DE PLATÃO


Tetraedro regular
(4 triângulos equiláteros)


Hexaedro regular
(6 quadrados)


Dodecaedro regular
(12 pentágonos regulares)


Octaedro regular
(8 triângulos equiláteros)


Icosaedro regular
(20 triângulos equiláteros)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C2-H7

Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6
b) 8
c) 14
d) 24
e) 30

Após os cortes, o poliedro P resultante é um sólido com 6 + 8 = 14 faces.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

2. UPE (adaptado) – Um poliedro convexo possui 8 (oito) faces, todas triangulares. Nestas condições, assumindo que tal poliedro exista, qual o número esperado de vértices?

Sendo assim:

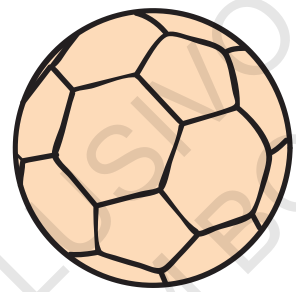
$A = \frac{8 \cdot 3}{2}$ 12 e F = 8

$V - A + F = 2$

$V - 12 + 8 = 2$

$V = 6$

3. Uema (adaptado) – A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas formam os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.



O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,

Pode ser utilizado o Teorema de Descartes-Euler, $A + 2 = V + F$

a) 80 e 60
b) 80 e 50
c) 70 e 40
d) 90 e 60
e) 90 e 50

Total de faces (F): 32 (12 pentagonais e 20 hexagonais).

Total de arestas:

$$A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$$

Total de vértices (V):

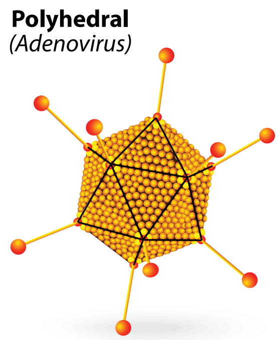
$V - A + F = 2$

$V - 90 + 32 = 2$

$V = 60$

Portanto, 90 arestas e 60 vértices.

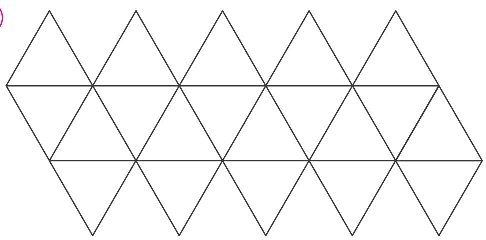
4. UFJF-MG – Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.



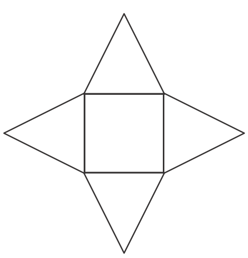
TTSZ/ISTOCKPHOTO

Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

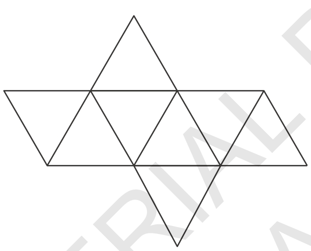
a)



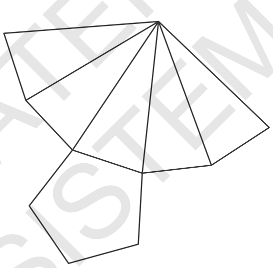
b)



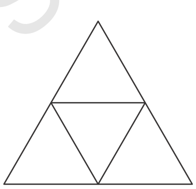
c)



d)



e)



O sólido da figura é um icosaedro, sendo que apenas a alternativa A apresenta 20 faces.

5. IFSP – A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

BETTMANN/GETTY IMAGES

Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação V – A + F = 2. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é

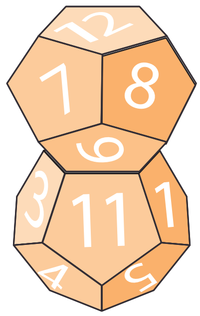
a) 10.
b) 12.
c) 15.
d) 16.
e) 18.

Número de arestas: $\frac{(12\,.\,5)}{2} = 30$.

Número de arestas visíveis: 20.

Número de arestas não visíveis: 30 – 20 = 10.

6. UERJ (adaptado) – Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.

Qual a soma V + F + A?

Para o dodecaedro regular, temos 12 faces pentagonais.

Então, $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ arestas.

Utilizando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2$

$V - 30 + 12 = 2$

$V = 20$ (vértices)

Portanto, o poliedro formado terá:

$12 + 12 - 2 = 22$ faces ($F = 22$)

$30 + 30 - 5 = 55$ arestas ($A = 55$)

$20 + 20 - 5 = 35$ vértices ($V = 35$)

A soma pedida será dada por:

$V + F + A = 35 + 22 + 55 = 112$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Uece (adaptado) – Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. Qual o número de vértices deste polígono?

8. Uece – Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

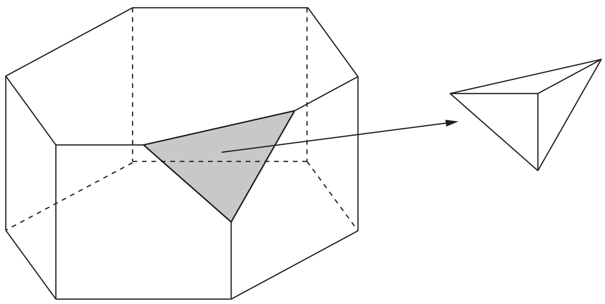
a) 100

b) 120

c) 90

d) 80

9. Insper-SP – De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é

a) 24
b) 20
c) 18
d) 16
e) 12

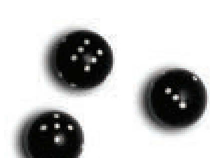
10. UEL-PR (adaptado) – Leia o texto a seguir.

Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila. Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3 500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostas é sete.

Museu Arqueológico do Red Fort. Delhi, Índia. (Adaptado.)

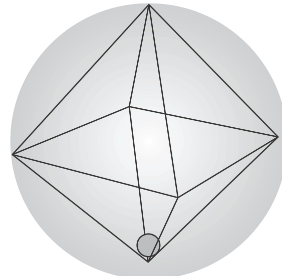
Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram-se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir.

MARIA DMITRIEVA/ISTOCKPHOTO



EVERYDAY IMAGES/ALAMY STOCK PHOTO

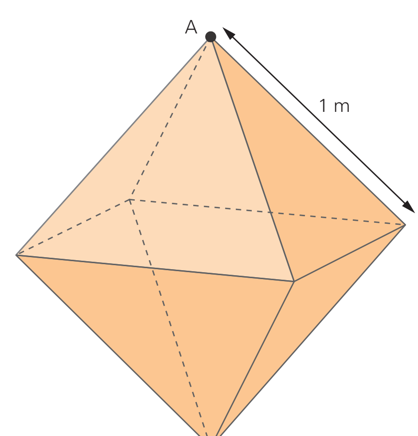
Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.



Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica.

a) O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.
b) O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.
c) O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.
d) O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.
e) O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

11. FMP – A figura mostra uma peça metálica que tem a forma de um octaedro regular, cujas arestas medem 1 metro.



Qual a medida da distância entre os vértices A e B, em metros?

12. UEPG-PR – Em um poliedro convexo só há faces triangulares e quadrangulares e apenas ângulos tetraédricos e pentaédricos. Se esse poliedro tem 15 faces e 12 vértices, assinale o que for correto.

01) O número de arestas é 50.

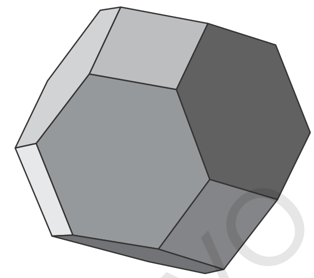
02) O número de faces quadrangulares é a metade do número de faces triangulares.

04) O número de ângulos tetraédricos é o dobro do número de ângulos pentaédricos.

08) A soma dos ângulos das faces é igual a 40 retos.

16) O número de ângulos tetraédricos é 5.

13. UPF-MG – O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:



a) 2160°
b) 5760°
c) 7920°
d) 10080°
e) 13680°

14. UEM-PR – As arestas de um cubo medem 10 cm. De cada um de seus vértices, retira-se uma pirâmide de base triangular, cujas arestas ligadas ao vértice do cubo possuem todas a mesma medida a e são partes das arestas do cubo. Após a remoção das pirâmides, obtém-se um poliedro convexo P. Baseando-se nessas informações, assinale o que for correto.

01) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 14 faces.

02) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 36 arestas.

04) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 24 vértices.

08) Se $a = 5$ cm, o poliedro P tem 30 arestas.

16) Se $a = 5$ cm, o poliedro P tem 16 vértices.

15. FGV – Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

a) 56
b) 32
c) 30
d) 36
e) 48

16. UFG-GO – Um joalheiro produzirá um ornamento para um pingente a partir de uma pedra preciosa, originalmente em forma de um cubo. Para isso, ele retirará de cada vértice do cubo um tetraedro cujos vértices são o vértice do cubo e os pontos médios das arestas que concorrem neste vértice. Os tetraedros serão descartados.

Considerando-se as condições apresentadas, calcule:

a) O número de faces do poliedro que constitui o ornamento.
b) A fração do volume do cubo original que constitui cada tetraedro retirado.

17. Uece – Se, em um tetraedro, três das faces que possuem um vértice comum V são limitadas por triângulos retângulos e as medidas das arestas da face oposta ao vértice V são respectivamente 8 cm, 10 cm e 12 cm, então as medidas, em cm, das outras três arestas são

a) $3\sqrt{6}, \sqrt{10}, 3\sqrt{10}$
b) $\sqrt{6}, 5\sqrt{3}, 9$
c) $2\sqrt{5}, 3\sqrt{6}, 8$
d) $2\sqrt{2}, \sqrt{10}, 2\sqrt{3}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H9

O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

a) 10
b) 12
c) 25
d) 42
e) 50

19. Enem C2-H8

Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

a) $2V - 4F = 4$
b) $2V - 2F = 4$
c) $2V - F = 4$
d) $2V + F = 4$
e) $2V + 5F = 4$

20. Enem C2-H7

Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

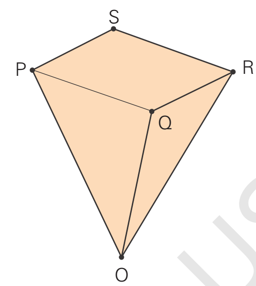


Figura 1

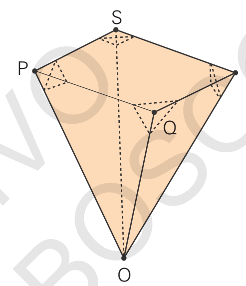


Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

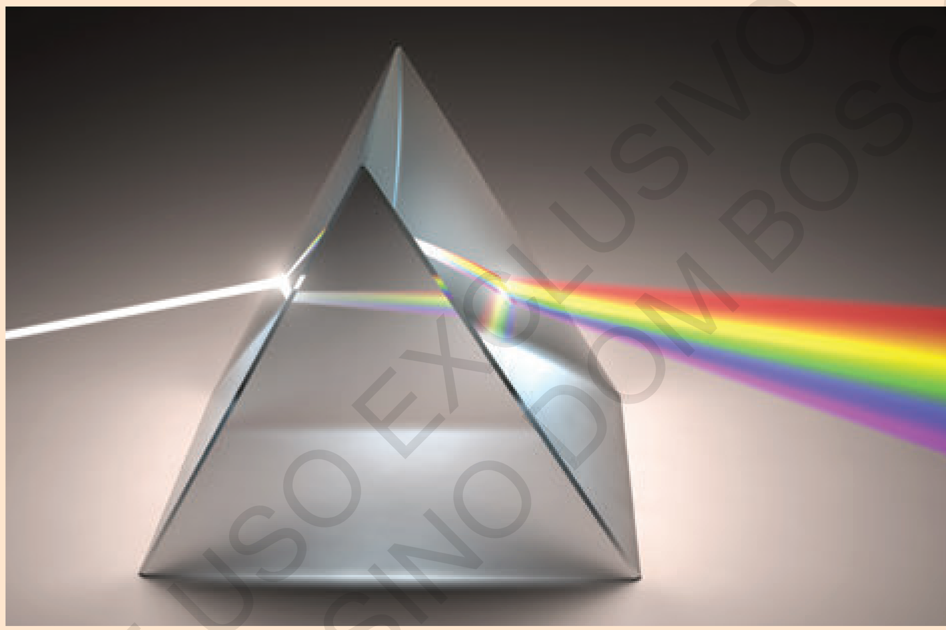
a) 9, 20 e 13.
b) 3, 24 e 13.
c) 7, 15 e 12.
d) 10, 16 e 5.
e) 11, 16 e 5.

35 PRISMAS I

- Prismas

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.


KTSIMAGE/ISTOCKPHOTO

Utilizamos o prisma óptico, um tipo de prisma, para estudar a refração da luz.

Introdução

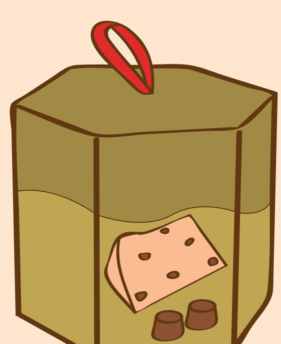
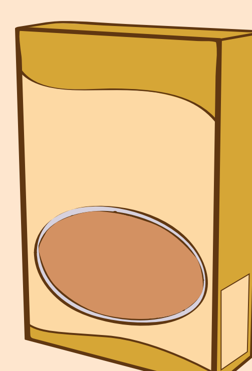
Prismas ópticos são dispositivos transparentes com superfícies retas e polidas que refratam a luz. Para comprovar a decomposição da luz, Isaac Newton utilizou um prisma de reflexão total – um tipo específico de prisma que reflete a luz incidente sobre ele.

Presentes em telescópios, periscópios e câmeras fotográficas, os prismas reflexivos podem ser muito pequenos, da ordem de 0,1 mm de largura, os chamados microprismas. São comuns em fitas reflexivas, sendo utilizados em coletes, automóveis e placas de trânsito.

Neste módulo, conheceremos um pouco mais sobre os prismas, com ênfase em suas características geométricas.

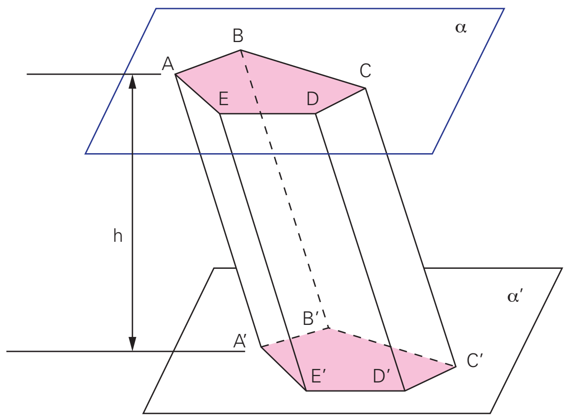
PRISMAS

São assim chamados os sólidos geométricos que têm as bases paralelas e todas as faces em forma de quadrilátero. O uso de prismas é frequente em embalagens diversas, desde caixas de eletrodomésticos até pacotes de biscoitos finos e presentes.

ELEMENTOS DO PRISMA

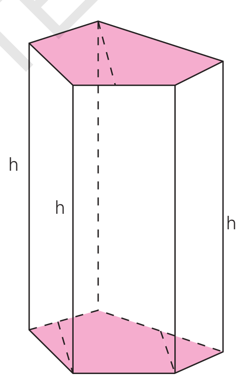
Prisma é um poliedro convexo tal que duas faces são polígonos congruentes (iguais) situados em planos paralelos e cujas demais faces são paralelogramos.



Observando a figura, podemos constatar os seguintes elementos desse sólidos geométricos:

- **Bases** – Correspondem aos pentágonos ABCDE e A′B′C′D′E′, sendo polígonos congruentes e paralelos entre si.
- **Faces laterais** – Correspondem aos paralelogramos ABB′A′, CBB′C′, CDD′C′, DEE′D′ e EAA′E′.
- **Arestas das bases do prisma** – Correspondem aos lados dos polígonos que constituem a base do prisma: AB, BC, CD, DE, EA, A′B′, B′C′, C′D′, D′E′, E′A′.
- **Arestas laterais do prisma** – Correspondem aos lados das faces laterais do prisma: AA′, BB′, CC′, DD′, EE′.
- **Altura do prisma** – Correspondem à distância perpendicular **h** entre os dois planos das bases α e α′.

Caso as arestas laterais sejam perpendiculares aos planos das bases, suas medidas coincidem com a altura do prisma. Nesse caso, as faces laterais são retângulos e estão situadas em planos perpendiculares aos planos das bases.



NOMENCLATURA E CLASSIFICAÇÃO DOS PRISMAS

Nomenclatura

Esses sólidos geométricos são nomeados de acordo com os polígonos das bases, conforme os exemplos:

- prisma triangular (suas bases são triângulos);
- prisma quadrangular (suas bases são quadriláteros);
- prisma pentagonal (suas bases são pentágonos);
- prisma hexagonal (suas bases são hexágonos).

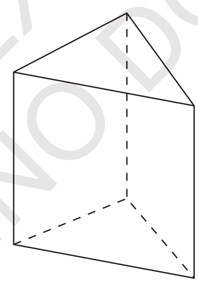
Classificação

Os primas podem ser:

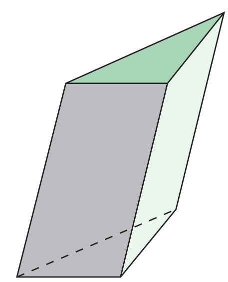
- retos (quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases);
- oblíquos (quando as arestas laterais não são perpendiculares aos planos das bases).

Observação: Prismas retos cujas bases sejam polígonos regulares são denominados prismas regulares.

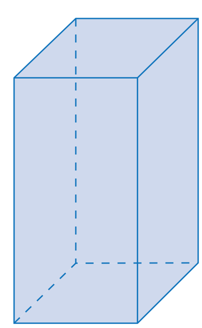
Exemplos:



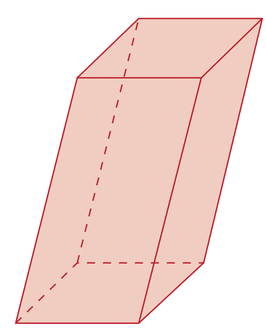
Prisma triangular reto



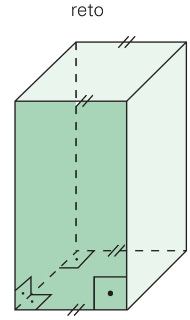
Prisma triangular oblíquo



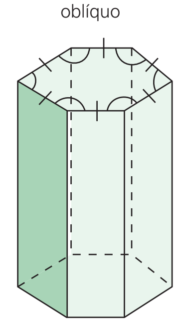
Prisma quadrangular reto



Prisma quadrangular oblíquo



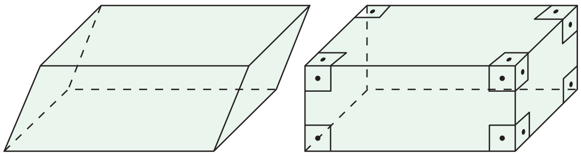
Prisma quadrangular regular



Prisma hexagonal regular

PARALELEPÍPEDO

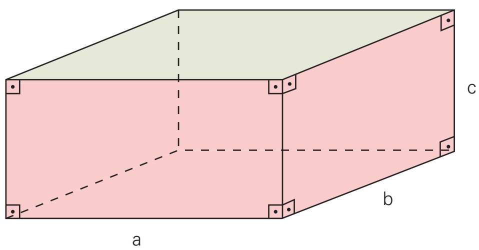
Recebe esse nome o prisma cujas bases são paralelogramos. Assim, todas as faces do paralelepípedo também são paralelogramos.



Paralelepípedo oblíquo	Paralelepípedo reto

Paralelepípedo reto

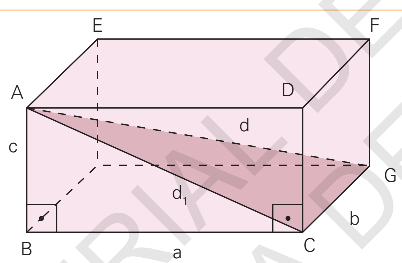
Recebe esse nome o paralelepípedo cujas bases e todas as seis faces sejam retângulos. Também são chamados paralelepípedo retângulo ou ortoedro.



Na figura, **a**, **b** e **c** são as medidas das arestas e serão utilizadas para calcular a diagonal, a área e o volume do paralelepípedo a seguir.

Diagonais do paralelepípedo retângulo

Para calcular a diagonal **d** do paralelepípedo, temos:



No triângulo ABC:

$AC = d_1$ = diagonal da face ABCD do paralelepípedo.

$AB = c$

$BC = a$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$d_1^2 = c^2 + a^2$

No triângulo ACG:

$AG = d$ = diagonal do paralelogramo

$CG = b$

$AC = d_1$

$AG^2 = CG^2 + AC^2$

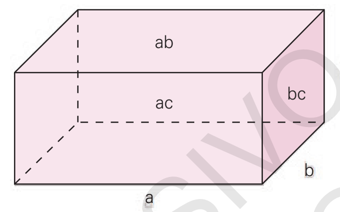
$d^2 = b^2 + c^2 + a^2$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Área do paralelepípedo retângulo

Como já estudamos anteriormente, a área do retângulo é dada por $\mathbf{A_{retângulo}} = \mathbf{base \cdot altura}$. Assim, obtemos a área do paralelepípedo somando as áreas das bases com as áreas das faces.

Sendo **a**, **b** e **c** as dimensões do paralelepípedo retângulo, as áreas de cada par de faces opostas são **ab**, **ac** e **bc**.



Assim:

$A = 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc$

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

Podemos ainda relacionar as medidas das arestas do paralelepípedo **a**, **b** e **c**, com as medidas de diagonal **d** e área **A**.

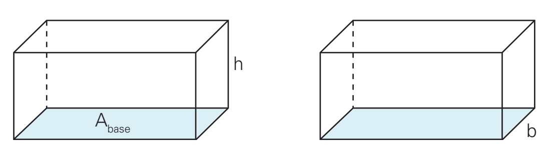
Logo, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Como $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ e $2ab + 2ac + 2bc = A$, temos:

$$(a + b + c)^2 = d^2 + A$$

Volume do paralelepípedo retângulo

Sendo V o volume do paralelepípedo retângulo de medidas **a**, **b** e **c**, podemos obter o valor dele por meio da seguinte relação:

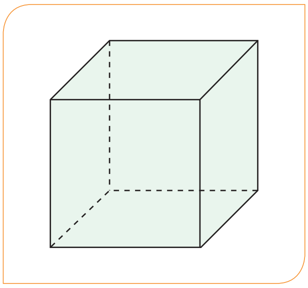


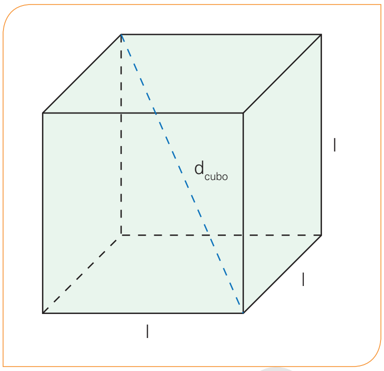
$V = A_{base} \cdot h = (a \cdot b) \cdot c$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

CUBO

Trata-se de um paralelepípedo especial que tem todas as faces quadradas, cuja altura tem a mesma medida da aresta da base.



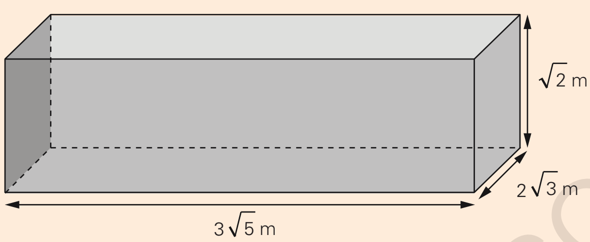


O cubo é um prisma quadrangular retangular. Assim, de maneira similar ao paralelepípedo, podemos demonstrar o cálculo da medida de sua diagonal $\mathbf{d_{cubo}}$, da sua área $\mathbf{A_{cubo}}$ e de seu volume $\mathbf{V_{cubo}}$, obtendo as seguintes relações:

$d_{cubo} = l\sqrt{3}$ $\quad A_{cubo} = 6l^2$ $\quad V_{cubo} = l^3$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. IFSP – A figura a seguir representa uma piscina em forma de bloco retangular.



De acordo com as dimensões indicadas, podemos afirmar corretamente que o volume dessa piscina é, em m³, igual a

a) $5\sqrt{10}$
b) $6\sqrt{10}$
c) $6\sqrt{15}$
d) $5\sqrt{30}$
e) $6\sqrt{30}$

Resolução

$a = 3\sqrt{5}$ m

$b = 2\sqrt{3}$ m

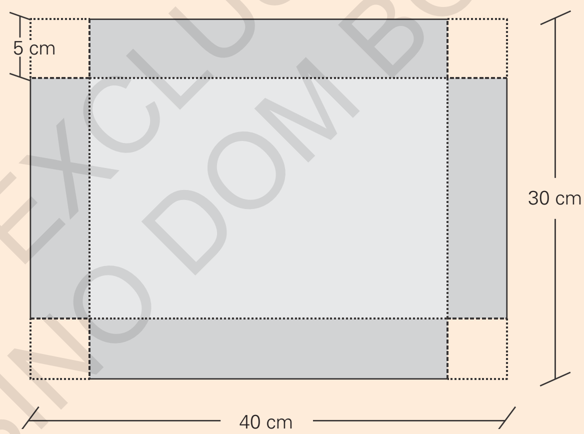
$c = \sqrt{2}$ m

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

$\therefore V = 6\sqrt{30}$ m³

2. IFPE – Uma folha retangular de papelão de 40 cm por 30 cm será utilizada para confeccionar uma caixa, sem tampa, em forma de paralelepípedo, de base retangular. Para isso, deve-se, a partir desta folha de papelão, retirar 4 quadrados de lado 5 cm, de cada um dos vértices e, em seguida, dobrar os lados, conforme a figura a seguir:



Determine, em litros, o volume dessa caixa.

a) 3 litros
b) 2 litros
c) 1 litro
d) 4 litros
e) 5 litros

Resolução

Pela figura, obtemos as medidas a, b e c da caixa:

$a = 40 - 5 - 5 = 30$ cm $= 3$ dm

$b = 30 - 5 - 5 = 20$ cm $= 2$ dm

$c = 5$ cm $= 0{,}5$ dm

Com as medidas da arestas, calculamos o volume da caixa:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 3 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 3$ dm³ $\therefore V = 3$ litros

ROTEIRO DE AULA

PRISMAS

Sólidos geométricos que têm as bases paralelas e todas as faces em forma de quadriláteros.

Classificação

Oblíquo

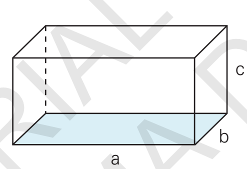
Reto

Regular

Nomenclatura

Os prismas são nomeados de acordo com os polígonos das bases.
Exemplo: prisma triangular, prisma pentagonal

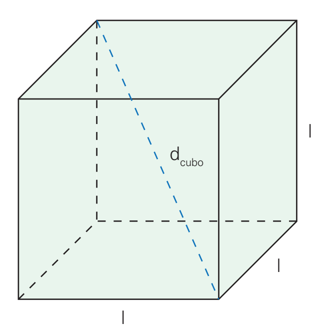
Paralelepípedo



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$



$d_{cubo} = l\sqrt{3}$

$A_{cubo} = 6l^2$

$V_{cubo} = l^3$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEMG (adaptado) – Um *design* projetou um chaveiro no formato de um prisma triangular reto com 12 cm de altura. Sabe-se que as arestas da base formam um triângulo retângulo com catetos de medidas 6 cm e 8 cm. Para cobrir todas as faces desse prisma, adquirindo a quantidade suficiente de papel adesivo, e, com isso, evitar o desperdício, será preciso saber a área total da superfície desse prisma. Fazendo os cálculos corretos, qual a área total desse prisma?

A base triangular tem catetos medindo 6 cm e 8 cm. Portanto, a hipotenusa terá 10 cm.

$A_{bases} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 48$

$A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

Logo, 48 + 288 = 336 cm².

2. Enem C2-H8

Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:

Largura das raias
Cada uma das dez raias mede 2,5 metros, conforme o padrão oficial. Nas provas finais, a primeira e a décima ficarão vazias para evitar que as ondas desfavoreçam os atletas

Profundidade 3 metros
Com essa profundidade, a água que se movimenta em direção ao fundo da piscina demora mais para retornar à superfície e não atrapalha a progressão dos nadadores

Veja, n. 2 278, jul 2012. (Adaptado.)

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

a) 3 750
b) 1 500
c) 1 250
d) 375
e) 150

O volume da piscina é dado por:

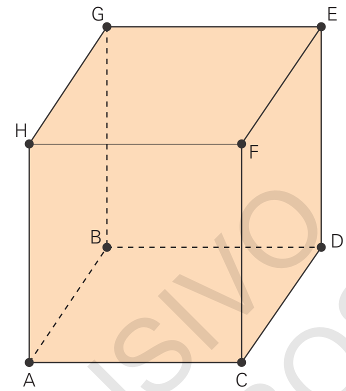
$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 50 \cdot 10 \cdot 2{,}5 \cdot 3 = 3\,750 \therefore V = 3\,750\ m^3$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

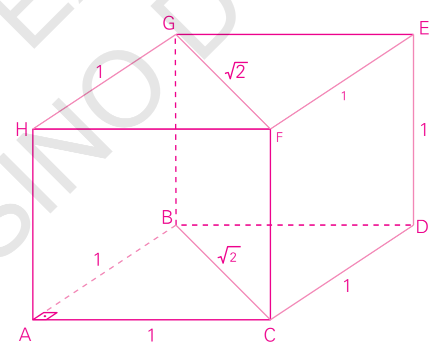
Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

3. UFRGS – Uma partícula parte do ponto A e chega ao ponto H percorrendo a poligonal ABCDEFGH no cubo de aresta unitária, representado na figura abaixo.



A distância percorrida pela partícula é

a) 1.
b) $\sqrt{2}$.
c) 7.
d) $5+2\sqrt{2}$.
e) $5+2\sqrt{3}$.



No triângulo ABC:

$(BC)^2 = 1^2 + 1^2$

$BC = \sqrt{2}$

$GF = BC = \sqrt{2}$

A distância (d) percorrida pela partícula é:

$d = 1 + \sqrt{2} + 1 + 1 + 1 + \sqrt{2} + 1$

$d = 5 + 2\sqrt{2}$

4. PUC-Rio (adaptado) – Uma caixa de chocolate, com a forma de um paralelepípedo, tem dimensões 4 cm x 4 cm x 16 cm. Quantos cm² de papel são necessários para cobrir completamente essa caixa?

Calculando a área total do paralelepípedo, teremos:

$A_T = 2 \cdot (4 \cdot 4 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16)$

$A_T = 2 \cdot (16 + 64 + 64)$

$A_T = 288\ cm^2$

5. UFRGS – Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por x, x + 4 e x – 1.

Se o volume desse paralelepípedo é 12, então as medidas das dimensões da caixa são

a) 1,1 e 12.
b) 1,2 e 6.
c) 1,3 e 4.
d) 2,2 e 3.
e) 2,3 e 2.

Multiplicando-se as medidas das arestas, obtemos o volume do paralelepípedo.

$x \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) = 12$

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

$x^2 \cdot (x + 3) - 4 \cdot (x + 3) = 0$

$(x + 3) \cdot (x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = -3$ ou $x = -2$ ou $x = 2$

Como x é a grandeza de uma das arestas ($x > 0$), vamos considerar apenas $x = 2$.

Logo:

$x = 2$

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

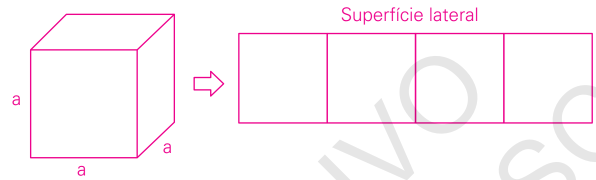
$x - 1 = 2 - 1 = 1$

Portanto, as dimensões do paralelepípedo são 1, 2 e 6.

6. UEPB – Uma cisterna de formato cúbico cuja área lateral mede 200 m² tem por volume, aproximadamente:

a) $250\sqrt{2}$ m³
b) $25\sqrt{2}$ m³
c) $2500\sqrt{2}$ m³
d) $352\sqrt{2}$ m³
e) $125\sqrt{2}$ m³

Medida da aresta da cisterna = a.



$A = 4 \cdot a^2 = 200 \rightarrow a^2 = 50 \rightarrow a = \sqrt{50}\ \therefore\ a = 5\sqrt{2}$ m

Calculando o volume V da cisterna, temos:

$V = a^3 = (5 \cdot \sqrt{2})^3 = 250\sqrt{2}$

$\therefore V = 250\sqrt{2}$ m³

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UPE (adaptado) – Um engenheiro construiu uma piscina em formato de bloco retangular a qual mede 7 m de comprimento, 4 m de largura e 1,5 m de profundidade. Após encher a piscina completamente, o engenheiro abriu um ralo que tem a capacidade de esvaziá-la à razão de 20 litros por minuto. Utilizando esse ralo, em quanto tempo o nível da água dessa piscina vai baixar em 10 centímetros?

8. Enem C2-H28

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm³ e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm³, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1 000.

9. PUC-Rio – Um cubo de aresta a tem volume 24.

Assinale o valor do volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$.

a) $\frac{8}{9}$

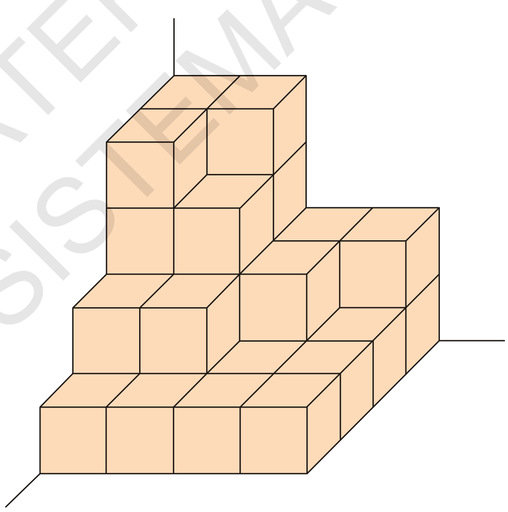
b) $\frac{9}{3}$

c) 8

d) 24

e) 72

10. PUC-Rio – O diagrama abaixo mostra uma pilha de caixas cúbicas iguais, encostadas no canto de um depósito.



Se a aresta de cada caixa é de 30 cm, então o volume total dessa pilha, em metros cúbicos, é de:

a) 0,513

b) 0,729

c) 0,810

d) 0,837

e) 0,864

11. PUC-Rio – O que acontece com o volume de um paralelepípedo quando aumentamos a largura e a altura em 10% e diminuímos a profundidade em 20%?

a) Não se altera

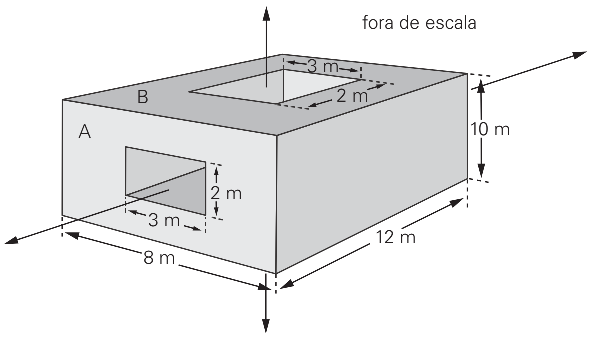
b) Aumenta aproximadamente 3%

c) Diminui aproximadamente 3%

d) Aumenta aproximadamente 8%

e) Diminui aproximadamente 8%

12. Unesp – Um bloco maciço com a forma de paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões 8 m, 12 m e 10 m. Em duas de suas faces, indicadas por A e B na figura, foram marcados retângulos, de 2 m por 3 m, centralizados com as faces do bloco e com lados paralelos às arestas do bloco. Esses retângulos foram utilizados como referência para perfurar totalmente o bloco, desde as faces A e B até as respectivas faces opostas a elas no bloco.



Calcule o volume e a área total do novo sólido, que resultou após a perfuração do bloco.

13. PUC-SP – Um bloco maciço de madeira na forma de um prisma reto de base retangular medindo 18 cm por 24 cm e com 30 cm de altura foi totalmente dividido em cubinhos iguais e de maior aresta possível. Supondo que não tenha ocorrido perda alguma no corte do bloco, o volume de um cubinho é

a) 64 cm^3.

b) 125 cm^3.

c) 216 cm^3.

d) 343 cm^3.

14. Unicamp-SP – Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 cm^2, 3 cm^2 e 4 cm^2. O volume desse paralelepípedo é igual a

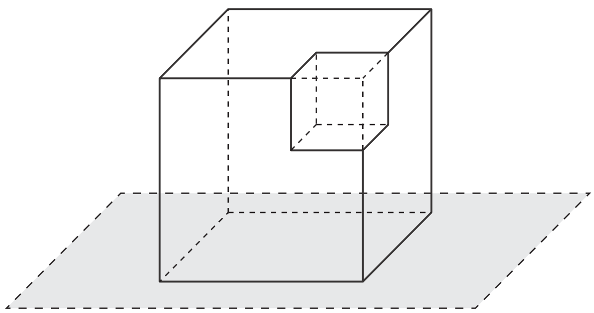
a) $2\sqrt{3}$ cm^3.

b) $2\sqrt{6}$ cm^3.

c) 24 cm^3.

d) 12 cm^3.

15. UPE – Um sólido foi construído removendo-se um cubo menor de um cubo maior, como mostra a figura a seguir. Se a diferença entre as medidas das arestas dos dois cubos é de 4 cm e a medida do volume do sólido é 208 cm^3, qual a medida da área lateral da superfície do sólido?



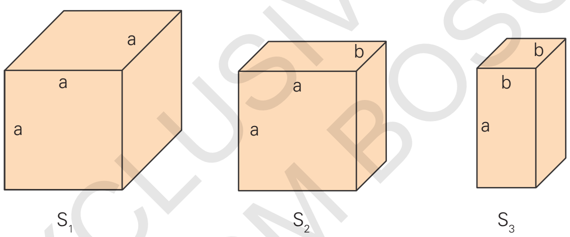
a) 136 cm^2
b) 144 cm^2
c) 160 cm^2
d) 204 cm^2
e) 216 cm^2

16. Acafe-SC – Num reservatório com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, de 1 metro de comprimento, 2 metros de largura e 5 metros de altura, solta-se um bloco de concreto. O nível da água que estava com 60% da altura do reservatório eleva-se até $\frac{3}{4}$ da altura.

O volume de água deslocado (em litros) foi de:

a) 4 500.
b) 1 500.
c) 5 500.
d) 6 000.

17. Unicamp-SP – Considere os três sólidos exibidos na figura abaixo, um cubo e dois paralelepípedos retângulos, em que os comprimentos das arestas, a e b, são tais que $a > b > 0$.



a) Determine a razão $r = \frac{a}{b}$ para a qual o volume de S_1 é igual à soma dos volumes de S_2 e S_3.
b) Sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos é igual a 60 cm, determine a soma das áreas de superfície dos três sólidos.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H9

Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm
- Caixa 2: 72 cm × 82 cm × 90 cm
- Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm
- Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm
- Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

19. Enem C2-H8

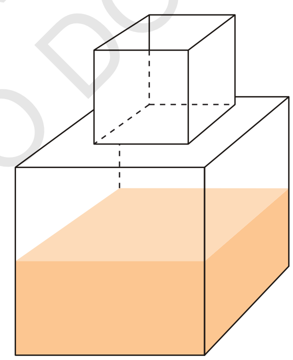
Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

a) 11,25.
b) 27,00.
c) 28,80.
d) 32,25.
e) 49,50.

20. Enem C2-H8

Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8.
b) 10.
c) 16.
d) 18.
e) 24.

36 PRISMAS II

- Prismas

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Identificar a relação de dependência entre grandezas.


NIKKUSHA/ISTOCKPHOTO

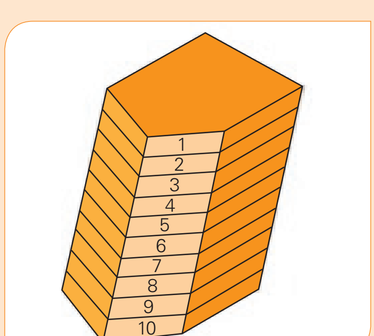
Estátua em homenagem a Franscesco Bonaventura Cavalieri, no pátio principal do Palazzo Breba, em Milão.

Introdução

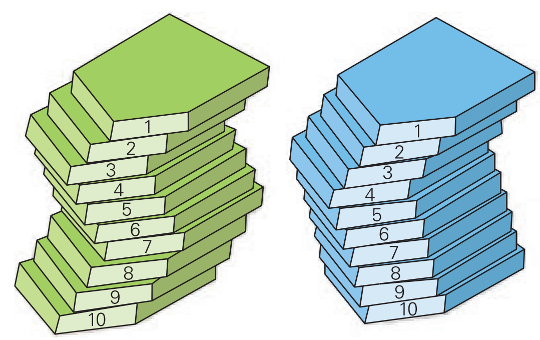
Discípulo de Galileu Galilei, o sacerdote e matemático italiano Franscesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) criou um método para calcular a área e o volume de sólidos geométricos por meio de secções planas de dois sólidos, os quais, apesar de apresentarem formatos distintos, tinham a mesma medida de base e altura. O método batizado de **princípio de Cavalieri** foi o primeiro passo para aquilo atualmente conhecido como cálculo infinitesimal.

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

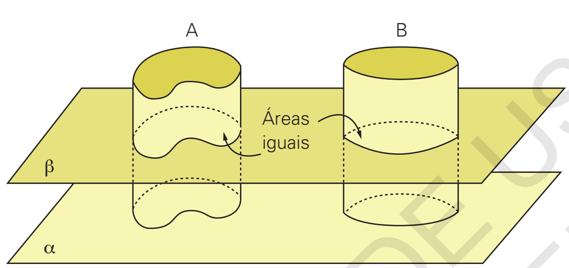
Considere um prisma pentagonal seccionado por planos paralelos que o dividem em dez pequenos prismas pentagonais de mesma base e altura.



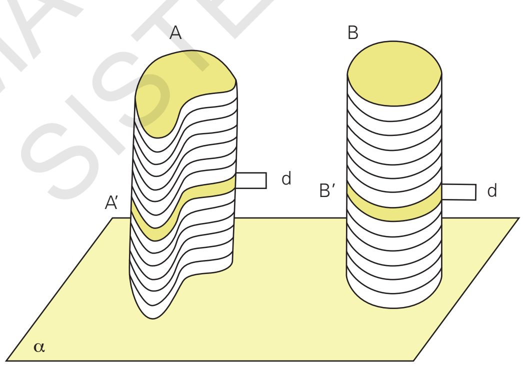
Observe que, embora os dez prismas estejam dispostos de modo diferente, o volume do sólido é o mesmo que o prisma original.



Considere agora os sólidos **A** e **B**, cujas bases tenham a mesma área e estejam contidas no mesmo plano α. Considere ainda que qualquer plano β paralelo a α intercepte os dois sólidos em secções de mesma área.



Seccionando os sólidos **A** e **B** em planos paralelos a α, de modo que a distância **d** entre cada par de planos seja mínima, cada pequeno sólido formado em **A** tem o mesmo volume do correspondente formado em **B**.



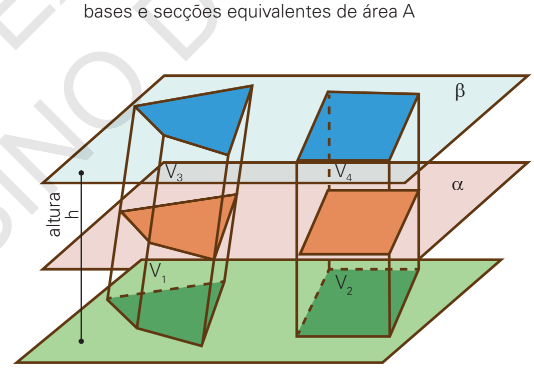
Como o volume de **A** é igual à soma do volume dos pequenos sólidos **A'** e o volume de **f** é igual à soma dos pequenos sólidos **B'**, os sólidos **A** e **B** têm o mesmo volume.

Com base nesse conceito se estabelece o princípio de Cavalieri.

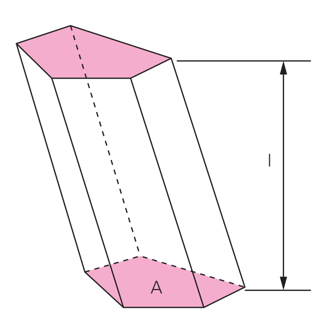
Sejam dois sólidos, **A** e **B**, cujas bases estão contidas no mesmo plano α. Se todo plano β, paralelo a α, intercepta **A** e **B** e determina secções de mesma área, então os sólidos **A** e **B** têm o mesmo volume.

VOLUME DE UM PRISMA QUALQUER

Pelo princípio de Cavalieri, pode-se garantir que, caso os prismas da figura abaixo tenham áreas de bases iguais ($A_1 = A_2 = A$), quando segmentados por planos paralelos à base (α e β), os volumes têm mesma medida ($V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$).



Logo, o volume do prisma é obtido multiplicando-se a área da base (ou a área de qualquer secção reta) pela aresta lateral do prisma.

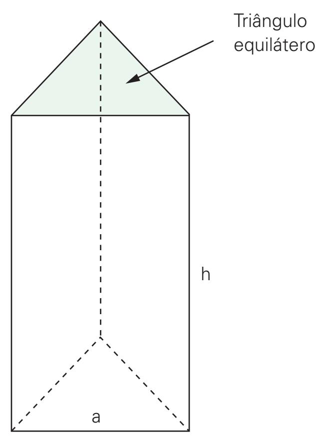


$$V = A \cdot l$$

PRISMAS REGULARES

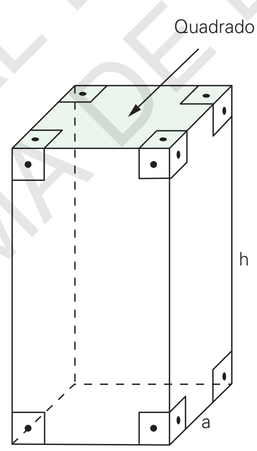
São assim chamados os prismas retos cujas bases são polígonos regulares, muito comuns nos estudos dos prismas. Na análise dos exemplos a seguir, temos área da base **(B)**, altura **(h)**, **aresta da base (a)** e volume **(V).**

Prisma triangular regular



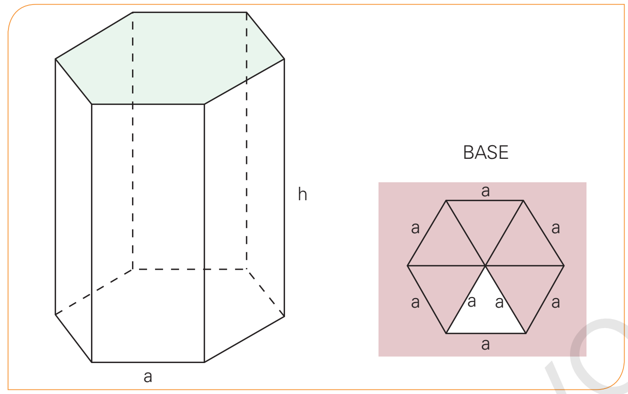
Área da base (B)	Área lateral (A_L)	Área total (A_T)	Volume (V)
$B = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$A_L = 3 \cdot A_{\text{face lateral}}$ $A_L = 3 \cdot a \cdot h$	$A_T = A_L + 2B$ $A_T = 3 \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$V = B \cdot h$ $V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$

Prisma quadrangular regular



Área da base (B)	Área lateral (A_L)	Área total (A_T)	Volume (V)
$B = a^2$	$A_L = 4 \cdot A_{\text{face lateral}}$ $A_L = 4 \cdot a \cdot h$	$A_T = A_L + 2B$ $A_T = 4 \cdot a \cdot h + 2 \cdot a^2$	$V = B \cdot h$ $V = a^2 \cdot h$

Prisma hexagonal regular



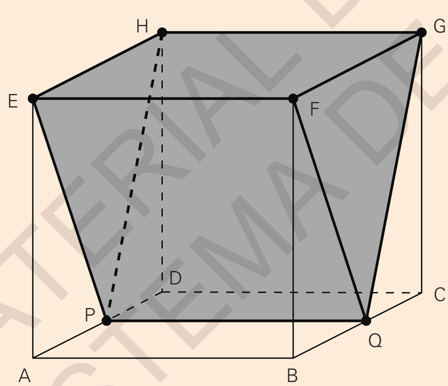
A área da base corresponde à soma das áreas dos seis triângulos equiláteros:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Área da base (B)	Área lateral (A_L)	Área total (A_T)	Volume (V)
$B = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$A_L = 6 \cdot A_{f.\,lateral}$ $A_L = 6 \cdot a \cdot h$	$A_T = A_L + 2B$ $A_T = 6 \cdot a \cdot h +$ $+ 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$	$V = B \cdot h$ $V = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot h$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UFRGS – Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértices, P e Q, sejam os pontos médios, respectivamente, das arestas AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior do cubo, como indicado na figura abaixo.



O volume desse sólido é

a) 64
b) 128
c) 256
d) 512
e) 1 024

Resolução

O sólido em questão é um prisma triangular reto.

Como o triângulo (base do prisma) está contido em um cubo, a área da base do prisma será

$$B = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32.$$

Com o valor da área da base B conhecido, calculamos o volume do prisma:

$V = B \cdot h$

$V = 32 \cdot 8 \quad \therefore \quad V = 256$

2. Esc. Naval – Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é

a) $\frac{2\sqrt{5}}{2}$ **b)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **e)** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Resolução

Aresta lateral: h; aresta da base: a.

Em um prisma hexagonal regular, a área lateral A_L corresponde a 75% da área total:

$6ah = 0{,}75 \times A_T$

Como a área da base é duplicada, corresponde a 12,5% da área total:

$$\frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 0{,}125 \cdot A_T$$

$$\frac{6ah}{\frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{0{,}75A_T}{0{,}125A_T} \rightarrow \frac{12h}{3a\sqrt{3}} = 6 \rightarrow \frac{4h}{a\sqrt{3}} = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{h}{a} = \frac{6\sqrt{3}}{4} \therefore \frac{h}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ROTEIRO DE AULA

PRISMAS II

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Sejam dois sólidos, **A** e **B**, cujas bases estão contidas no mesmo plano α. Se todo plano β, paralelo a α, intercepta **A** e **B**, determinando secções de mesma área, então os sólidos **A** e **B** têm o mesmo volume.

PRISMAS REGULARES

$V = B \cdot h$

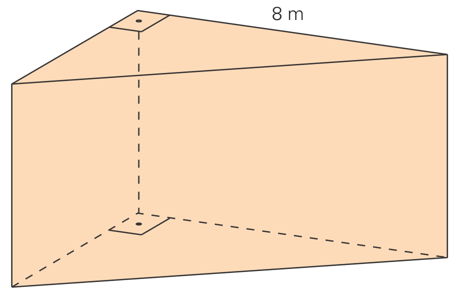
PRISMA TRIANGULAR REGULAR

PRISMA HEXAGONAL REGULAR

PRISMA QUADRANGULAR REGULAR

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPE (adaptado) – Qual é a capacidade, em litros, de uma cisterna que tem a forma da figura abaixo?



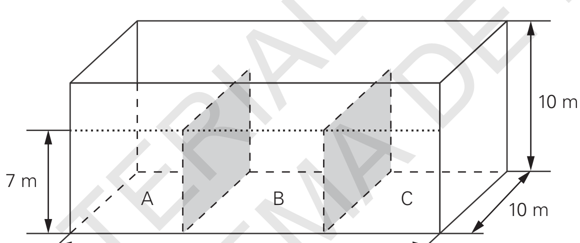
Como a base do prisma é um triângulo retângulo de hipotenusa 10 m e de cateto 8 m, o triângulo é semelhante ao triângulo retângulo pitagórico de lados 5 m, 4 m e 3 m. Assim, o outro cateto da base do prisma mede 6 m.

Sabendo que 1 m^3 = 1 000 dm^3 e que 1 dm^3 = 1L, temos:

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4 = 96\ m^3 \rightarrow 96000\ dm^3 \therefore$ Capacidade = $9{,}6 \cdot 10^4$ litros

2. Enem C2-H8

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \times 10^3\ m^3$
b) $1{,}8 \times 10^3\ m^3$
c) $2{,}0 \times 10^3\ m^3$
d) $3{,}2 \times 10^3\ m^3$
e) $6{,}0 \times 10^3\ m^3$

O volume total de petróleo acumulado no reservatório corresponde a:

$V = 60 \cdot 10 \cdot 10 = 6{,}0 \cdot 10^3\ m^3$

Após o vazamento do volume, restarão apenas:

$\frac{2}{3} \cdot 6{,}0 \cdot 10 \cdot 7 = 2{,}8 \cdot 10^3\ m^3$

Logo, $V_{derramado} = 6{,}0 \cdot 10^3 - 2{,}8 \cdot 10^3 = 3{,}2 \cdot 10^3\ m^3$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

3. Unigranrio – Um prisma reto tem como base um hexágono regular, que pode ser inscrito em uma circunferência de raio 2 m. Se a altura desse prisma é igual ao dobro do lado do hexágono regular que forma a sua base, então pode-se afirmar que seu volume, em m^3, é igual a:

a) $4\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $24\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$
e) $48\sqrt{3}$

O hexágono regular pode ser inscrito em uma circunferência de raio 2 m. Assim, seus lados serão idênticos a 2 m.

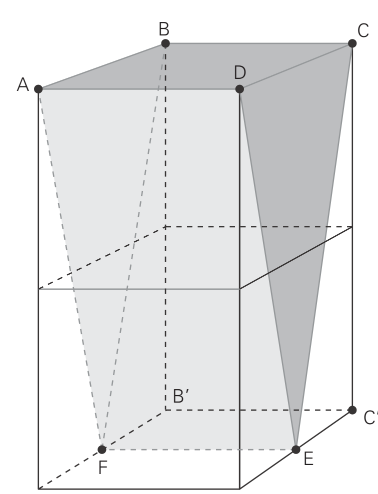
$a = 2$

$h = 2l = 2 \cdot 2 \rightarrow h = 4$

$V = \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot h = \left(6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 4 \rightarrow V = 24\sqrt{3}$

4. UERJ – Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA′B′C′D′. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A′B′ e C′D′, respectivamente.

A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.



O volume do sólido ABCDEF, em cm³, é igual a:

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 12

O sólido ABCDEF é um prisma triangular de bases ABF e DCE. Assim,

$V = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AA'} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 8\ cm^3$.

5. EBMSP-BA – Uma pesquisa realizada durante 75 anos nos Estados Unidos mostrou que não é uma carreira de sucesso, a fama ou os bens adquiridos durante a vida a fórmula da felicidade para uma jornada tranquila. Segundo o estudo, as pessoas que participam de grupos sociais, se relacionam bem com a família, com os amigos e com a comunidade são mais felizes, fisicamente mais saudáveis e vivem mais tempo do que as pessoas que têm menos relações sociais.

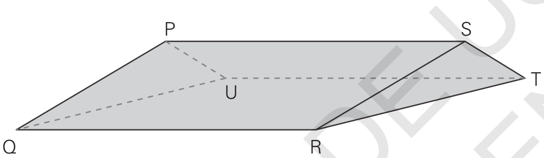


Figura 1

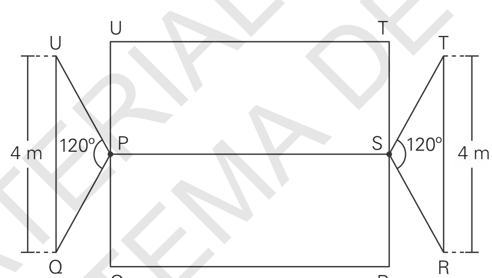
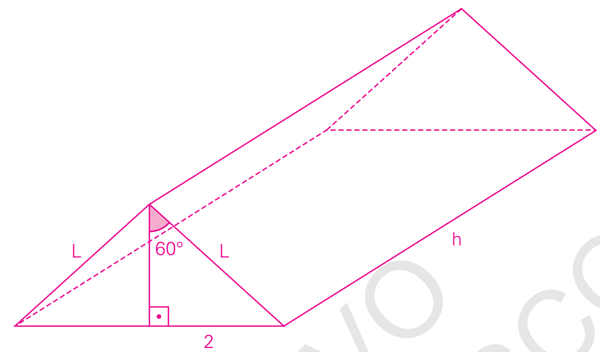


Figura 2

Uma pessoa, para realizar um evento ao ar livre, com familiares e amigos, está planejando instalar um toldo cuja cobertura tem a forma do sólido, de volume igual a $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ m³ representado na figura 1.

Com base nessa informação, calcule a área total da planificação dessa cobertura, constituída por dois retângulos congruentes e dois triângulos, representada na figura 2.

O toldo formará um prisma reto triangular. Com o valor do ângulo (60°), calculamos a aresta L desse triângulo.



Prisma triangular

$\text{sen } 60° = \frac{2}{L} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{L} \rightarrow L = \frac{4}{\sqrt{3}}\ m$

Portanto, a área do triângulo da base será:

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \text{sen } 120° = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ m^2$

O volume do prisma será:

$V = A_\Delta \cdot h \rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{3} \rightarrow h = 5\ m$

Assim, a área total do toldo será a soma das áreas dos dois triângulos e de ambos os retângulos.

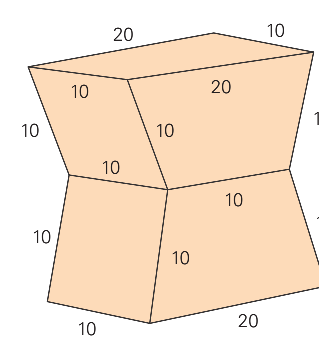
$A_T = 2 \cdot A_\Delta + 2 \cdot A_\square$

$A_T = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 5$

$A_T = \frac{48}{\sqrt{3}}$

$A_T = 16\sqrt{3}\ m^2$

6. UFRGS – O primeiro prêmio de um torneio recebe um troféu sólido confeccionado em metal, com as medidas abaixo.



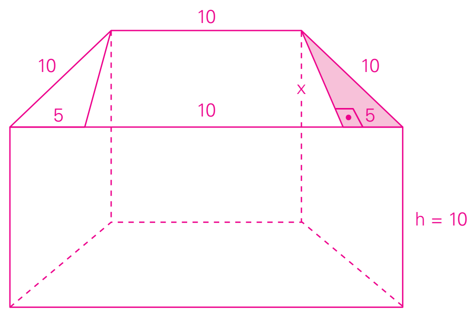
Considerando que as bases do troféu são congruentes e paralelas, o volume de metal utilizado na sua confecção é

a) $100\sqrt{3}$ **c)** $1\,000\sqrt{3}$ **e)** $3\,000\sqrt{3}$

b) $150\sqrt{3}$ **d)** $1\,500\sqrt{3}$

Temos:

Prisma trapezoidal



Analisando essa figura e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos o valor de x:

$x^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow x = 5\sqrt{3}$

Como o valor de x, calculamos a área da base B do prisma:

$B = \dfrac{(10 + 20) \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}$

Como são dois prismas congruentes, obtemos:

$V = 2 \cdot 75\sqrt{3} \cdot 10 = 1\,500\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unesp – Uma chapa retangular de alumínio, de espessura desprezível, possui 12 metros de largura e comprimento desconhecido (figura 1). Para a fabricação de uma canaleta vazada de altura x metros são feitas duas dobras, ao longo do comprimento da chapa (figura 2).

Figura 1

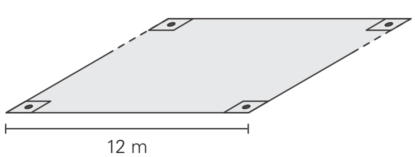
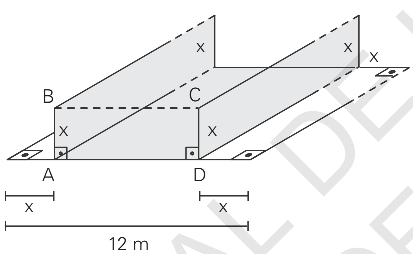


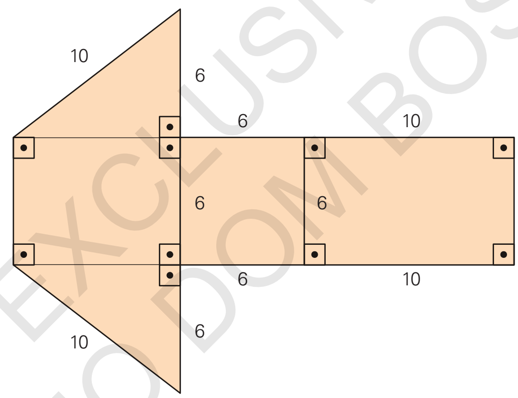
Figura 2



Se a área da secção transversal (retângulo ABCD) da canaleta fabricada é igual a 18 m², então a altura dessa canaleta, em metros, é igual a

a) 3,25
b) 2,75
c) 3,50
d) 2,50
e) 3,00

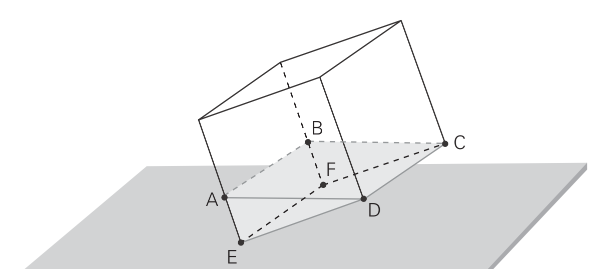
8. UFRGS – Na figura a seguir, encontra-se representada a planificação de um sólido de base quadrada cujas medidas estão indicadas.



O volume desse sólido é

a) 144
b) 180
c) 216
d) 288
e) 360

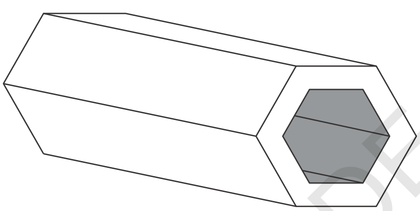
9. UERJ – Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano α de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura abaixo representa o cubo com a água.



Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a $32\sqrt{5}$ dm².

Determine o volume total, em dm^3, de água contida nesse cubo.

10. Uern – A peça geométrica, desenvolvida através de um *software* de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.



Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm que o comprimento do prisma é igual a 35 e, que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm^3:

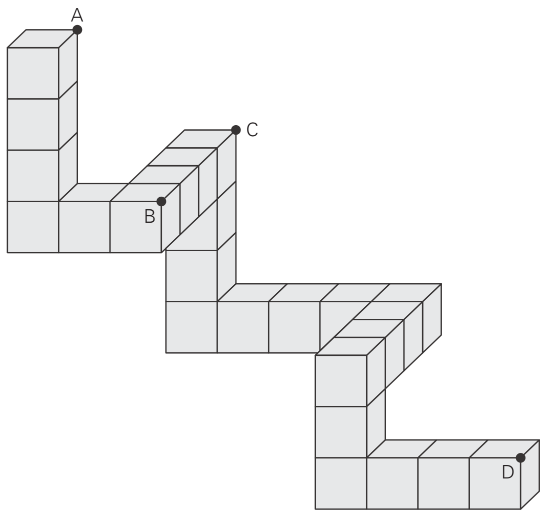
Considere $\left(\sqrt{3} = 1{,}7\right)$

a) 1 064
b) 1 785
c) 2 127
d) 2 499

11. UEPG-PR – Uma caixa A em a forma de um prisma regular triangular e uma caixa B tem a forma de um prisma hexagonal regular. Se o lado da base da caixa A tem o dobro da medida do lado da base da caixa B, assinale o que for correto.

01) A razão entre as áreas da base de A e B é $\frac{2}{3}$.
02) Se a altura de A for a metade da altura de B, então o volume de B é igual ao triplo do volume de A.
04) Para que os volumes sejam iguais, a altura de B deve ser o dobro da altura de A.
08) Se as alturas das caixas são iguais, a área lateral de B é o dobro da de A.

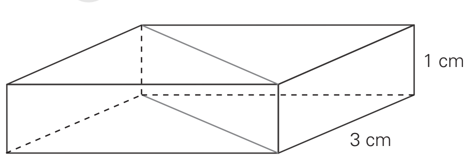
12. Unifesp – Um sólido é formado por 24 cubos idênticos, conforme a figura. O contato entre dois cubos contíguos sempre se dá por meio da sobreposição perfeita entre as faces desses cubos. Na mesma figura também estão marcados A, B, C e D vértices de quatro cubos que compõem o sólido.

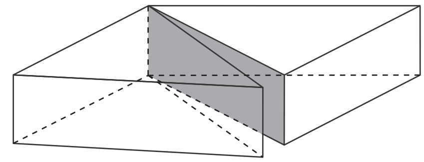


a) Admitindo-se que a medida de $\overline{AB}$ seja $2\sqrt{7}$ cm, calcule o volume do sólido.

b) Calcule a medida de $\overline{CD}$ admitindo-se que a medida da aresta de cada cubo que compõe o sólido seja igual a 2 cm.

13. Unesp – Um paralelepípedo reto-retângulo foi dividido em dois prismas por um plano que contém as diagonais de duas faces opostas, como indica a figura.

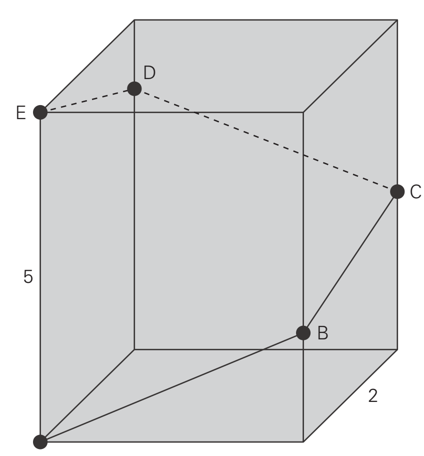




Comparando-se o total de tinta necessária para pintar as faces externas do paralelepípedo antes da divisão como total necessário para pintar as faces externas dos dois prismas obtidos após a divisão, houve um aumento aproximado de

a) 42%
b) 36%
c) 32%
d) 26%
e) 46%

14. ESPM-SP – Em volta do paralelepípedo reto-retângulo mostrado na figura abaixo será esticada uma corda do vértice A ao vértice E, passando pelos pontos B, C e D.



De acordo com as medidas dadas, o menor comprimento que essa corda poderá ter é igual a:

a) 15 **b)** 13 **c)** 16 **d)** 14 **e)** 17

15. EBMSP-BA (adaptado)

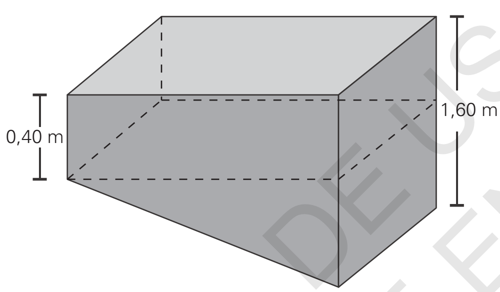


Figura 1

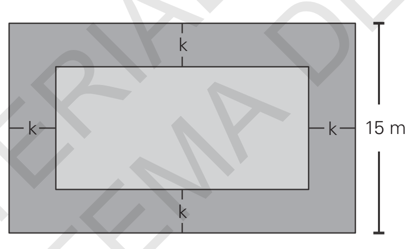


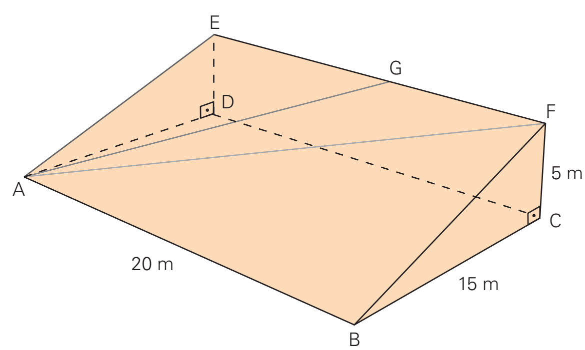
Figura 2

Uma piscina deve ser construída, como representada na figura 1, em um terreno retangular de dimensões 18,0 m por 15,0 m.

Sabendo que a piscina foi projetada tendo cada um dos lados paralelo aos lados do terreno, como indicado na figura 2, o valor de k – distância do lado do terreno à borda da piscina – para que a capacidade máxima da piscina seja igual a 18,0 m³, corresponde a:

a) 3 m **c)** 5 m **e)** 7 m
b) 4 m **d)** 6 m

16. Unesp – Uma rampa, com a forma de prisma reto, possui triângulos retângulos ADE e BCF nas bases do prisma, e retângulos nas demais faces. Sabe-se que AB = 20 m, BC = 15 m e CF = 5 m. Sobre a face ABFE da rampa estão marcados os caminhos retilíneos $\overline{AE}$, $\overline{AG}$ e $\overline{AF}$, com G sendo um ponto de $\overline{EF}$, como mostra a figura.



a) Calcule a medida do segmento $\overline{AE}$. Em seguida, assuma que a inclinação de subida (razão entre vertical e horizontal) pelo caminho $\overline{AG}$ seja igual a $\frac{1}{4}$ e calcule a medida do segmento $\overline{EG}$.

b) Considere os seguintes dados para responder a este item:

α	7,1°	11,3°	14,0°	18,4°
tg α	0,125	0,200	0,250	0,333

Comparando-se o caminho $\overline{AF}$ com o caminho $\overline{AE}$, nota-se que o ângulo de inclinação de $\overline{AF}$ e de $\overline{AE}$, em relação ao plano que contém o retângulo ABCD, aumentou. Calcule a diferença aproximada, em graus, desses ângulos.

17. UEG-GO – Alterando-se as dimensões de uma caixa retangular de altura h, as dimensões da base serão multiplicadas por k e as da altura somado k, em que k é uma constante positiva e não nula. Logo, verifica-se que o volume da nova caixa será em relação à anterior

a) k^3 vezes maior

b) $k^2 + kh$ vezes maior

c) $k^2 + \frac{k^3}{h}$ vezes maior

d) $k^3 + \frac{\sqrt{h}}{k}$ vezes maior

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H7

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

HAKIM DA GREAT/SHUTTERSTOCK

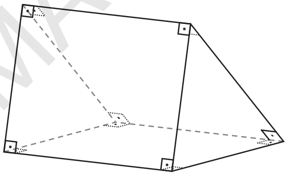


Figura 2

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

a) tetraedro.

b) pirâmide retangular.

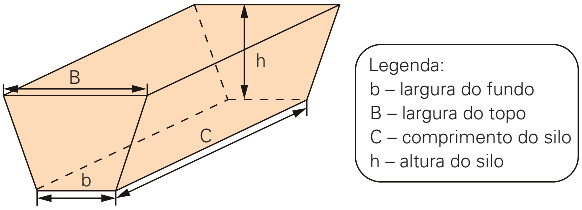
c) tronco de pirâmide retangular.

d) prisma quadrangular reto.

e) prisma triangular reto.

19. Enem C2-H8

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

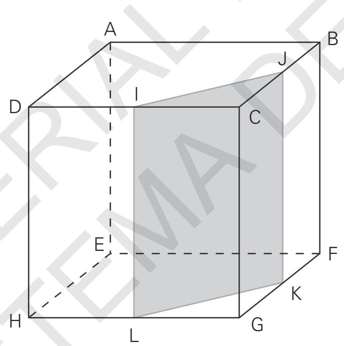
EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: <www.cnpgc.embrapa.br>. Acesso em: 1º ago. 2012. (Adaptado.)

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110
b) 125
c) 130
d) 220
e) 260

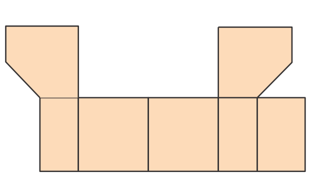
20. Enem C2-H7

Corta-se um cubo ABCDEFGH por um plano ortogonal às faces ABCD e EFGH que contém os pontos médios I e J das arestas CD e BC e elimina-se, em seguida, o prisma IJCLKG, obtendo-se o prisma ABJIDEFKLH.

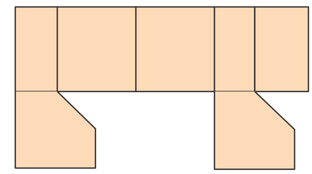


A planificação da superfície do prisma resultante ABJIDEFKLH corresponde à figura

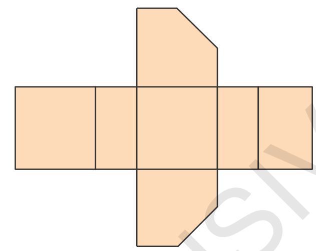
a)



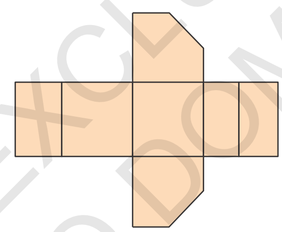
b)



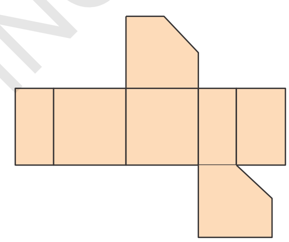
c)



d)



e)



37

PIRÂMIDES

- Pirâmides
- Sólidos especiais

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.

FERRANTRAITE/ISTOCKPHOTO

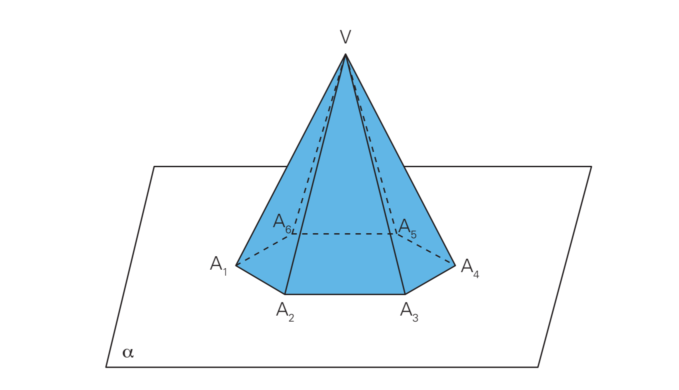
Em primeiro plano, a Pirâmide do Sol, terceira maior pirâmide do mundo.

Introdução

Nas ruínas de Teotihuacán, próximas à Cidade do México, encontra-se a onipotente Pirâmide do Sol. Com 71 m de altura e 223 m de cada lado, é uma das mais altas pirâmides do mundo. Construída nos dois primeiros séculos d.C. por uma civilização anterior à Asteca, foi encontrada já em ruínas e se tornou um local de mito para a nova civilização que ali habitava. Por esse motivo os astecas batizaram o local de Teotihuacán, que significa "cidade dos deuses".

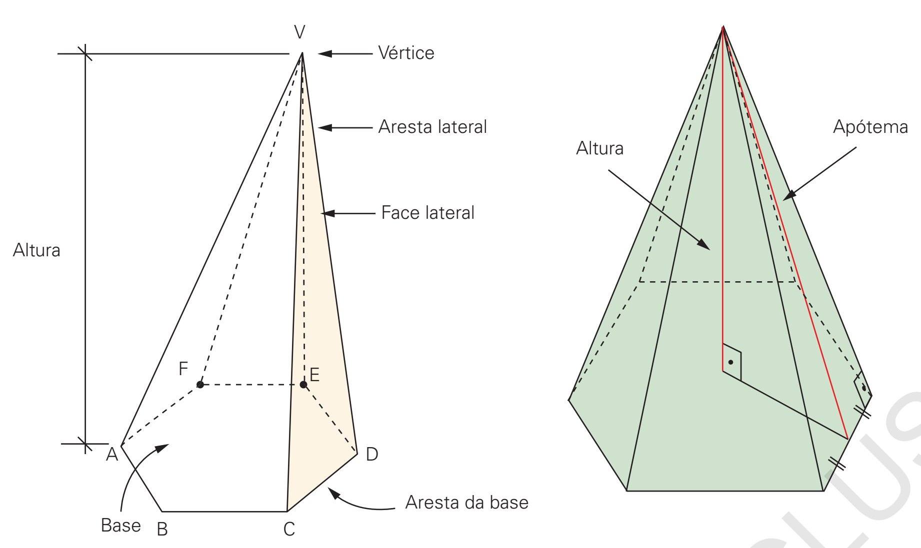
PIRÂMIDES

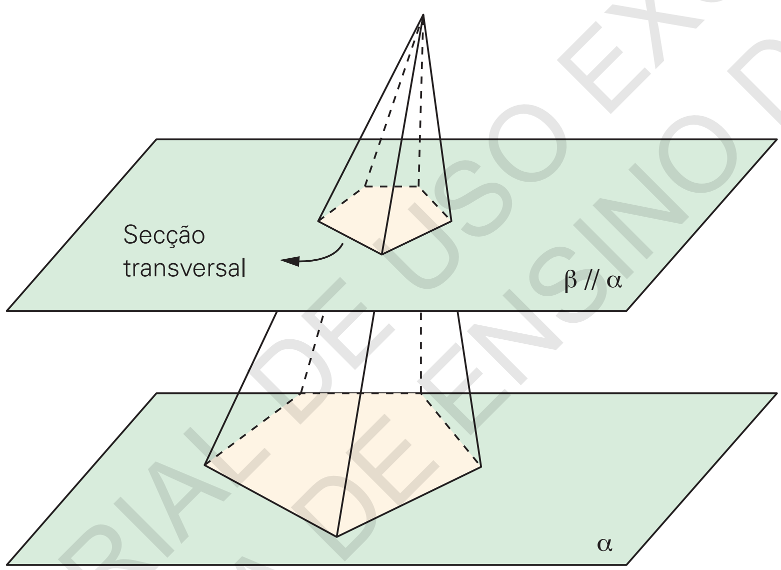
São assim chamados os poliedros cuja base é um polígono convexo $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ de **n** lados num plano α e cujas faces laterais são triângulos com um vértice **V** em comum fora do plano α.



ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE

Na figura, considere os elementos da pirâmide.





- **Vértice** – Ponto em comum **V** entre as faces da pirâmide.
- **Base** – Polígono **ABCDEF**.
- **Arestas da base** – Lados do polígono da base.
- **Arestas laterais** – Segmentos que unem o vértice V aos vértices do polígono da base.
- **Faces laterais** – Triângulos determinados pelo vértice V e cada uma das arestas das bases.
- **Superfície lateral** – Superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
- **Secção transversal** – Intersecção dessa pirâmide com qualquer plano paralelo à sua base.
- **Altura** – Distância do vértice V ao plano da base.
- **Apótema** – Distância perpendicular do vértice à aresta da base da pirâmide.

NOMENCLATURA

O nome da pirâmide é dado de acordo com o polígono da sua base, conforme estes exemplos:

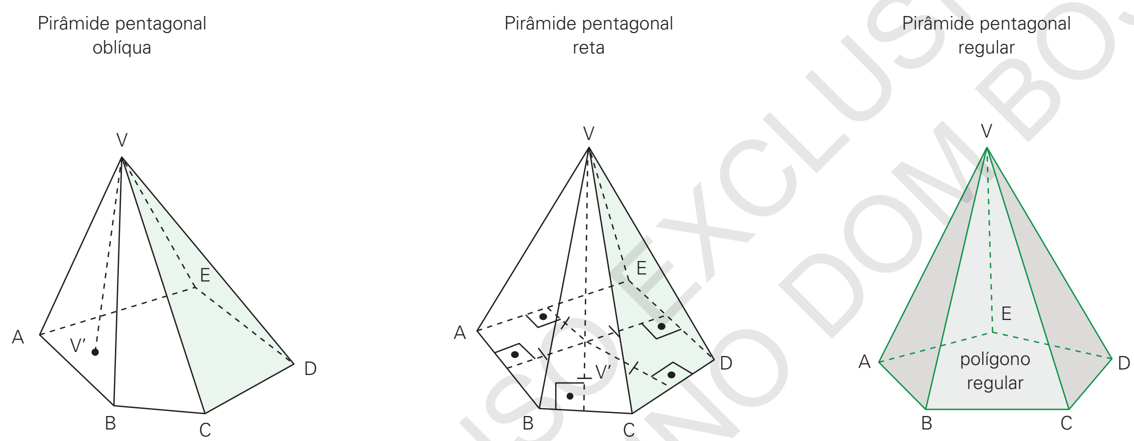
- **Pirâmide triangular:** o polígono da base é um triângulo.

- **Pirâmide quadrangular**: o polígono da base é um quadrilátero.
- **Pirâmide pentagonal**: o polígono da base é um pentágono.
- **Pirâmide hexagonal**: o polígono da base é um hexágono.

CLASSIFICAÇÃO

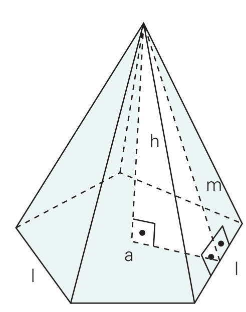
As pirâmides são classificadas conforme a projeção do vértice sobre o plano da base.

- **Pirâmide oblíqua**: a projeção do vértice sobre o centro da base não corresponde ao seu circuncentro.
- **Pirâmide reta**: a projeção do vértice sobre o centro da base corresponde ao seu circuncentro.
- **Pirâmide regular**: corresponde a uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular e tem todas as arestas laterais congruentes.



ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL

Considere uma pirâmide regular de **n** lados, com apótema da base **a**, apótema da pirâmide **m** e aresta da base l.



A área lateral será dada por:

$$A_L = n\cdot\frac{l\cdot m}{2}$$

Sendo B a área da base, a área total da pirâmide é dada por:

$$A_T = A_L + B$$

VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

Pelo princípio de Cavalieri, duas pirâmides com bases e áreas iguais têm volumes iguais.

Para calcular o volume de uma pirâmide, pode-se demonstrar que, independentemente do número de arestas da base, seu volume corresponde a um $\frac{1}{3}$ (um terço) do volume de um prisma $\left(V_{Prisma} = B \cdot h\right)$ de mesma base (B) e mesma altura (h). Portanto:

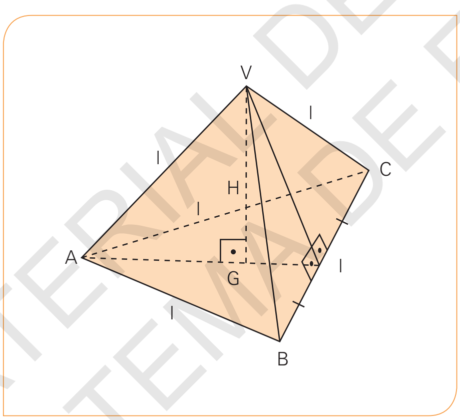
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

SÓLIDOS ESPECIAIS

São compostos de outros sólidos já estudados, por isso seus elementos e suas fórmulas envolvem variações conhecidas.

TETRAEDRO REGULAR

Trata-se de um sólido geométrico cujas quatro faces são triângulos equiláteros de lado l.



Para calcular a área total (A_T) do tetraedro regular, temos:

$$A_T = 4 \cdot A_\Delta = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \therefore A_T = 4 \cdot a^2\sqrt{3}$$

Para calcular a altura (H) do tetraedro regular, temos:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$VA = l$$

$$VG = H$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$VA^2 = VG^2 + AG^2$$

$$l^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \rightarrow H^2 = l^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

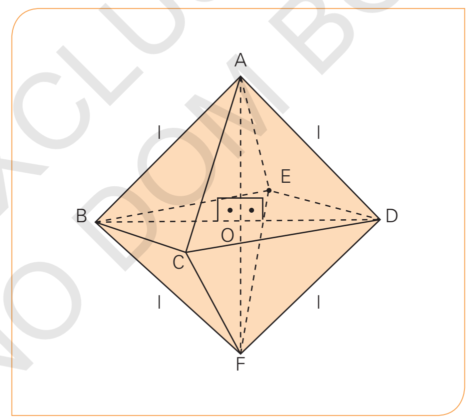
$$\therefore H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

O volume do tetraedro é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} \therefore V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

OCTAEDRO REGULAR

Trata-se de um sólido geométrico cujas oito faces são triângulos equiláteros de lado l.



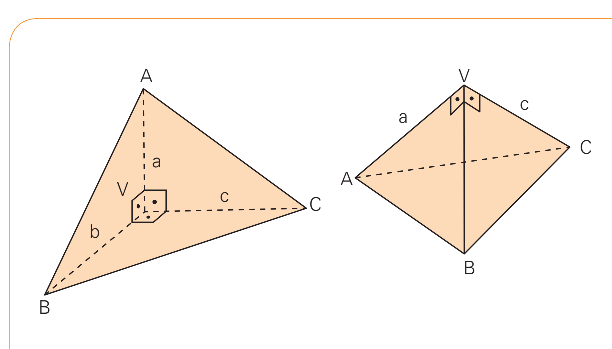
Podemos demonstrar que a área total (A_T) e o volume do octaedro são respectivamente iguais a:

$$A_T = 2 \cdot a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

TETRAEDRO TRIRRETANGULAR

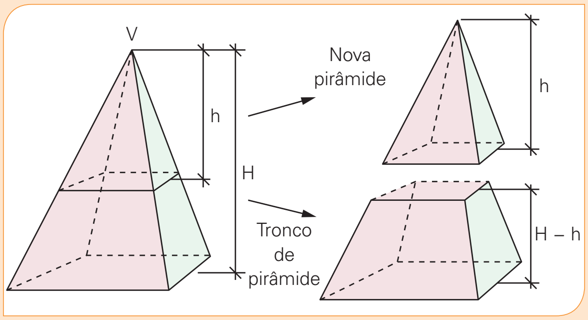
Trata-se de um sólido com triângulos retângulos em três de suas quatro faces. Seu volume é obtido por meio das medidas das arestas **a**, **b** e **c**.



$$V = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}$$

Saiba mais

Considere seccionar a pirâmide de vértice V e altura H por um plano paralelo à sua base à distância h do vértice V.



Assim são obtidos dois sólidos:

- aquele que contém o vértice **V** é uma nova pirâmide de altura **h**;
- aquele que tem a base da pirâmide considerada é um tronco de pirâmide de altura H – h.

Propriedade fundamental

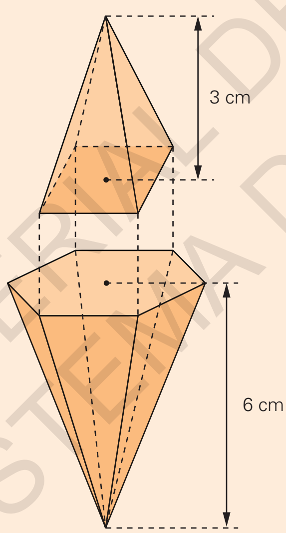
A nova pirâmide e a pirâmide primitiva são semelhantes, com razão de semelhança $k = \dfrac{h}{H}$.

Consequências

- A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança $\dfrac{h^2}{H^2}$.
- A razão entre as áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança $\dfrac{h^2}{H^2}$.
- A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança $\dfrac{h^2}{H^2}$.
- A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança $\dfrac{h^3}{H^3}$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. EPCAr-MG – Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3 cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}$ cm, então o volume do sólido obtido, em cm³, é igual a



a) $15\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $25\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$

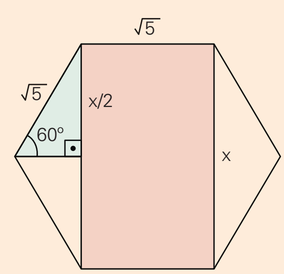
Resolução

Volume da pirâmide: $V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

Área do hexágono: $B = \dfrac{6 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Volume da pirâmide hexagonal: $V_{\text{pir.hex.}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot$
$\cdot\, 6 = 15\sqrt{3}$ cm³.

O hexágono regular é composto de 6 triângulos equiláteros. Assim, com auxílio da figura a seguir, obtemos os lados da base da pirâmide retangular.



$\text{sen } 60° = \dfrac{\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} \to \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} \to x = \sqrt{15}$ cm

Logo, o volume da pirâmide retangular será:

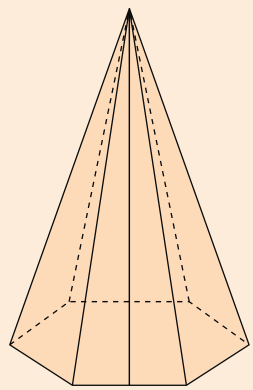
$V_{\text{pir.ret.}} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot 3 = 5\sqrt{3}$ cm³

Portanto, o volume do sólido será:

$V = V_{\text{pir.hex.}} + V_{\text{pir.ret.}}$

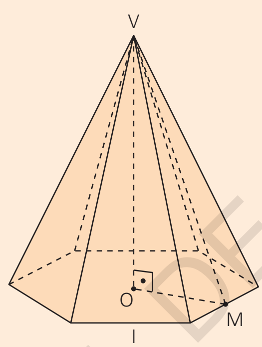
$V = 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \therefore V = 20\sqrt{3}$ cm³

2. UFPE – Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm³. Dado: use a aproximação: $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.



Resolução

Conforme figura a seguir, V, O, M e l são, respectivamente, o vértice, o centro da base, o ponto médio de uma das arestas da base e a medida da aresta da base da pirâmide.



Metade da área lateral da pirâmide: $A'_L = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{l \cdot VM}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l \cdot VM.$

Área lateral: $B = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Igualando as equações, obtemos:

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot l \cdot VM = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \to VM = l\sqrt{3}$

Apótema da base: $OM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Altura da pirâmide: VO = 6 cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMO, obtemos:

$VM^2 = VO^2 + OM^2$

$(l\sqrt{3})^2 = 6^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \to 3l^2 = 36 + \frac{3}{2}l^2 \to \frac{9}{4}l^2 = 36 \therefore$

$\therefore l = 4$ cm

Volume da pirâmide: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cong$

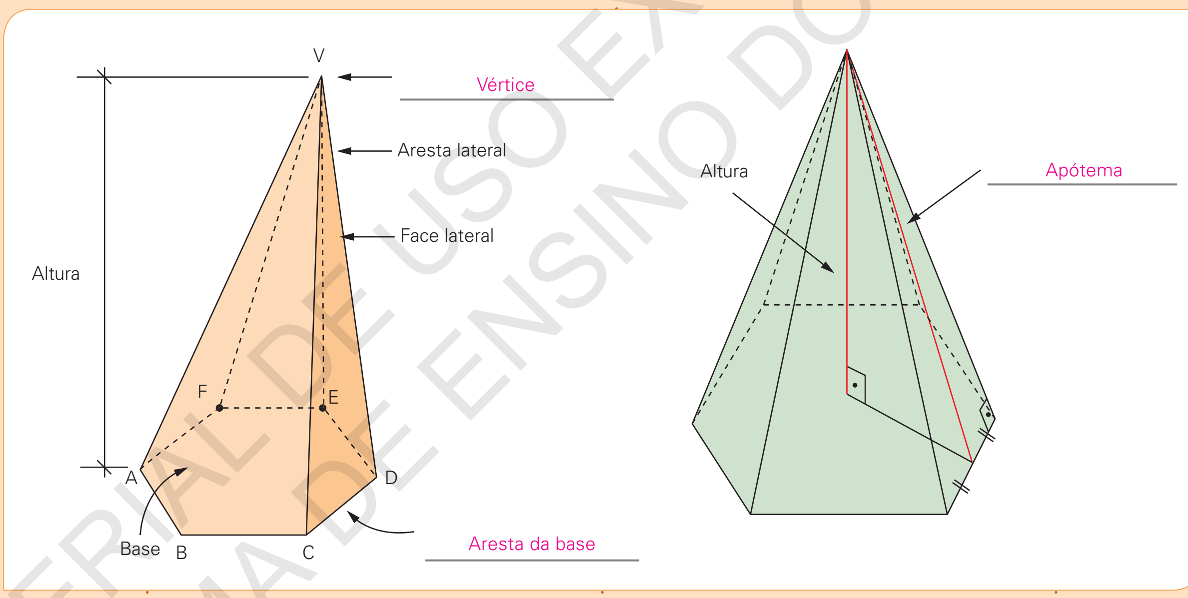
$\cong 83{,}04$ cm³.

$\therefore V = 83$ cm³

ROTEIRO DE AULA

PIRÂMIDE

A nomenclatura de uma pirâmide ocorre conforme a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base, que pode ser oblíqua ou reta.



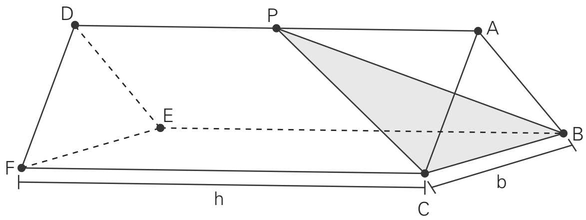
$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$

$A_L = n \cdot \frac{l \cdot m}{2}$

$A_T = A_L + B$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UERJ – A imagem a seguir ilustra um prisma triangular regular. Sua aresta da base mede b e sua aresta lateral mede h.



Esse prisma é seccionado por um plano BCP, de modo que o volume da pirâmide ABCP seja exatamente $\frac{1}{9}$ do volume total do prisma.

Logo, a medida de $\overline{AP}$ é igual a:

a) $\frac{h}{9}$

b) $\frac{h}{3}$

c) $\frac{2h}{3}$

d) $\frac{5h}{6}$

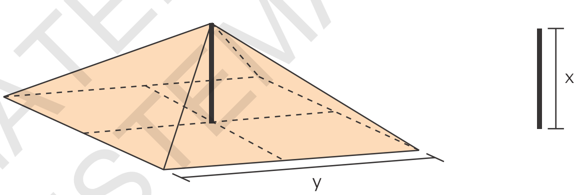
$V_{prisma} = B \cdot h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot \overline{PA} = \frac{1}{9} \cdot V_{prisma}$

$\frac{1}{3} \cdot B \cdot \overline{PA} = \frac{1}{9} \cdot B \cdot h \rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{3}$

2. Enem C2-H9

A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x. Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.



A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x, é dada pela expressão

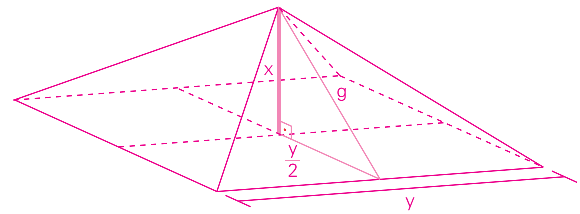
a) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

b) $2y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$

c) $4y\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $4y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

e) $4y\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2}}$



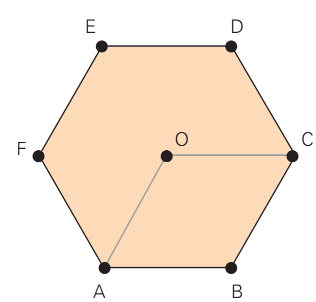
$g^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \rightarrow g = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$

$A_{lateral} = \frac{4 \cdot (y \cdot g)}{2} \rightarrow A_{lateral} = 2y \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}\right)$

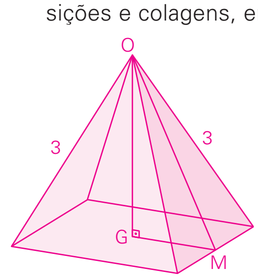
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

3. FGV (adaptado) – Em uma folha de papel, desenha-se um hexágono regular ABCDEF de lado 3 cm e inscrito em uma circunferência de centro O. O hexágono é recortado e, em seguida, faz-se um recorte no raio $\overline{OB}$. A partir do recorte no raio, o pedaço de papel será usado para formar uma pirâmide de base quadrangular e centro O. Tal pirâmide será feita com a sobreposição e a colagem dos triângulos OAB e OCD, e dos triângulos OAF e OBC.



Qual o volume da pirâmide formada após as sobreposições e colagens, em cm³?



$l = 3$

$OM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$GM = \frac{3}{2}$

$(OG)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow OG = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow V = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

4. PUC-Rio – Numa pirâmide de base quadrada, todas as arestas medem x.

Quanto vale o volume da pirâmide?

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3$

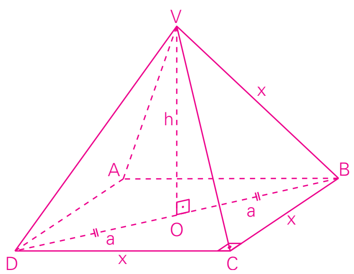
b) πx^2

c) $x^3 + x^2 + x + 1$

d) x^3

e) $\frac{\sqrt{6}}{3}x^3$

Do enunciado, temos:



No triângulo BCD:

$(2a)^2 = x^2 + x^2$

$4a^2 = 2x^2$

$a^2 = \frac{2x^2}{4}$

No triângulo VOB:

$x^2 = h^2 + a^2$

$x^2 = h^2 + \frac{2x^2}{4}$

$h^2 = x^2 - \frac{2x^2}{4}$

$h^2 = \frac{2x^2}{2}$

$h = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

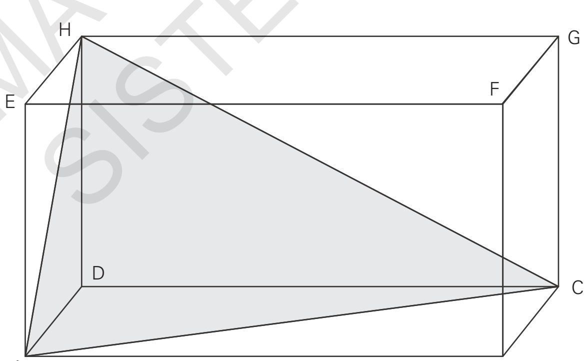
Assim, sendo V o volume da pirâmide:

$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot h$

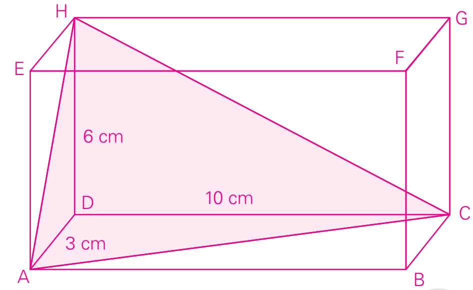
$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{\sqrt{2} \cdot x^3}{6}$

5. UFRGS – Considere ABCDEFGH um paralelepípedo reto-retângulo conforme representado na figura abaixo.



Se as arestas do paralelepípedo medem 3, 6 e 10, qual o volume do sólido ACDH?



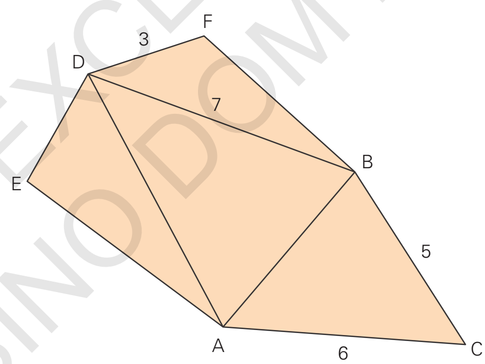
O volume V da pirâmide será dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ (em que B é a área da base da pirâmide e h é a altura).

Logo:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 10}{2} \cdot 6 = 30 \text{ cm}^2$

6. UFRGS – Considere a planificação de um tetraedro, conforme a figura abaixo.



Os triângulos ABC e ABD são isósceles respectivamente em B e D. As medidas dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DF}$ estão indicadas na figura.

A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é

a) 33.

b) 34.

c) 43.

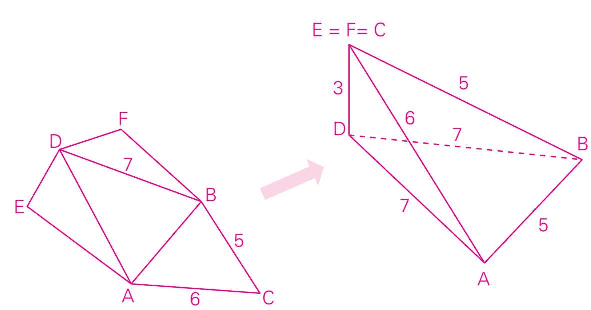
d) 47.

e) 48.

De acordo com os dados do enunciado, podemos estabelecer a seguinte relação entre os segmentos:

DB = DA = 7 e BA = BC = 5

Construindo o tetraedro, temos:



Portanto, a soma das arestas será dada por 3 + 5 + 6 + 7 + 7 + 5 = 33.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

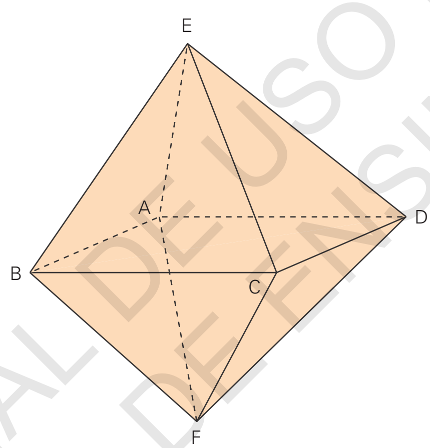
7. Uece – A medida da altura de uma pirâmide é 10 m e sua base é um triângulo retângulo isósceles cuja medida da hipotenusa é 6 m. Pode-se afirmar corretamente que a medida do volume dessa pirâmide, em m³, é igual a

a) 60. **b)** 30. **c)** 15. **d)** 45.

8. Uece – Assinale a opção que corresponde à medida da altura do tetraedro regular cuja medida da aresta é igual a 3 m.

a) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m. **b)** $\sqrt{6}$ m. **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m. **d)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m.

9. UERJ – A figura a seguir representa um objeto com a forma de um octaedro. Admita que suas arestas, feitas de arames fixados nos vértices, possuem os comprimentos indicados na tabela.



Arestas	AB	AD	AE	AF	BC	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF
Comprimento (cm)	10	11	12	10	11	12	11	12	11	10	12	12

Calcule o menor comprimento do arame, em centímetros, necessário para construir esse objeto.

10. Unisc-RS – Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado q. Sabendo que as faces laterais dessa pirâmide são triângulos equiláteros, pode-se afirmar que o seu volume é

a) $q^3\sqrt{2}$

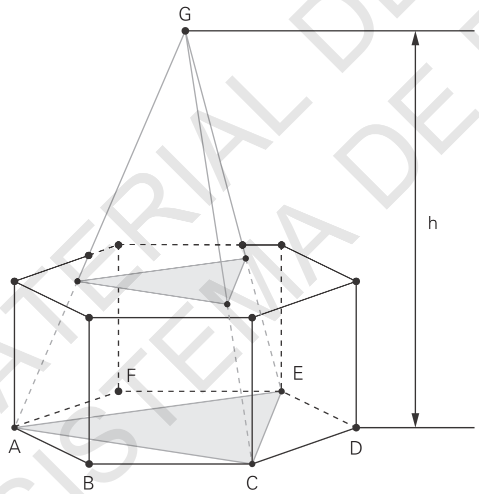
b) $\dfrac{q^3\sqrt{2}}{6}$

c) $\dfrac{q\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{q^3\sqrt{3}}{6}$

e) $\dfrac{q^3\sqrt{3}}{3}$

11. UERJ – O esquema a seguir representa um prisma hexagonal regular de base ABCDEF, com todas as arestas congruentes, e uma pirâmide triangular regular de base ACE e vértice G.



Sabe-se que os dois sólidos têm o mesmo volume e que a altura h da pirâmide mede 12 cm.

A medida da aresta do prisma, em centímetros, é igual a:

a) 1,5
b) $\sqrt{3}$
c) 2
d) $2\sqrt{3}$

12. UEM-PR – Em um prisma quadrangular regular, cuja altura mede o dobro dos lados da base, inscrevem-se duas pirâmides regulares com cada base coincidindo com uma das bases do prisma, e com altura igual à metade da altura do prisma.

Então, é correto afirmar que:

01) As faces laterais do prisma são paralelas às faces laterais das pirâmides.

02) As arestas laterais da pirâmide são maiores que a altura do prisma.

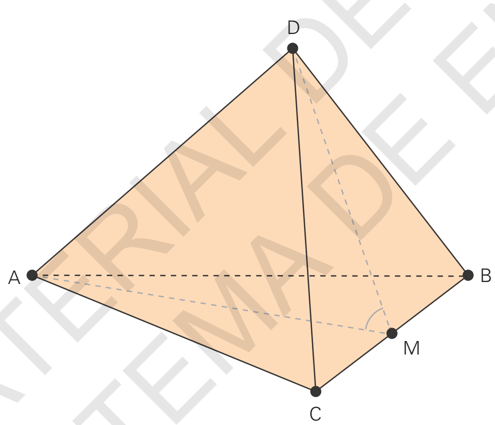
04) Os vértices das pirâmides coincidem em um ponto equidistante das bases do prisma.

08) A soma dos volumes das pirâmides é igual a $\frac{2}{3}$ do volume do prisma.

16) O complementar das pirâmides no prisma é constituído por quatro pirâmides, cujas bases são retângulos.

13. Mackenzie-SP (adaptado) – Qual a altura, em cm, de um tetraedro regular cuja área total mede $48\sqrt{3}$ cm²?

14. UERJ – Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.



O cosseno do ângulo $A\widehat{M}D$ equivale a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

15. Fuvest – Cada aresta do tetraedro regular ABCD mede 10. Por um ponto P na aresta $\overline{AC}$, passa o plano α paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Dado que AP = 3, o quadrilátero determinado pelas interseções de α com as arestas do tetraedro tem área igual a

a) 21

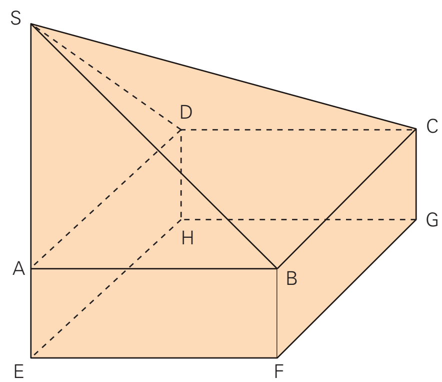
b) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$

c) 30

d) $\frac{30}{2}$

e) $\frac{30\sqrt{3}}{2}$

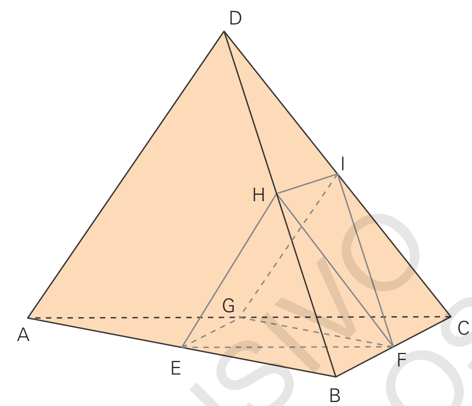
16. Fuvest – O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E que $\overline{AE} = 2$ cm, $\overline{AD} = 4$ cm e $\overline{AB} = 5$ cm.



A medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

17. Fuvest – Considere um tetraedro regular ABCD cujas arestas medem 6 cm. Os pontos E, F, G, H e I são os pontos médios das arestas AB, BC, AC, BD e CD, respectivamente.



a) Determine a área do triângulo EFH.
b) Calcule a área do quadrilátero EGIH.
c) Determine o volume da pirâmide de vértices E, G, I, H e F, cuja base é o quadrilátero EGIH.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H8

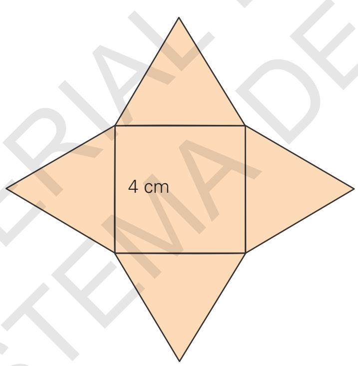
É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.
b) Triângulos e quadrados, apenas.
c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

19. UFPR C2-H8

Temos, abaixo, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



a) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm³.
b) $16\sqrt{3}$ cm³.
c) 32 cm³.
d) $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ cm³.
e) $\frac{64}{3}$ cm³.

20. UTFPR C2-H7

Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente:

a) $6\sqrt{3}$ m² e $6\sqrt{3}$ m³.
b) $3\sqrt{3}$ m² e $3\sqrt{3}$ m³.
c) $5\sqrt{3}$ m² e $2\sqrt{3}$ m³.
d) $2\sqrt{3}$ m² e $5\sqrt{3}$ m³.
e) $4\sqrt{3}$ m² e $8\sqrt{3}$ m³.

38 CILINDROS

- Cilindros
- Cilindros equiláteros

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.

IMU - INTERNATIONAL MATHEMATICAL UNION

Medalha Fields, também conhecida como Medalha Internacional de Descobrimentos Proeminentes em Matemática. É concedida em honraria a estudiosos responsáveis por contribuições relevantes para as ciências matemáticas.

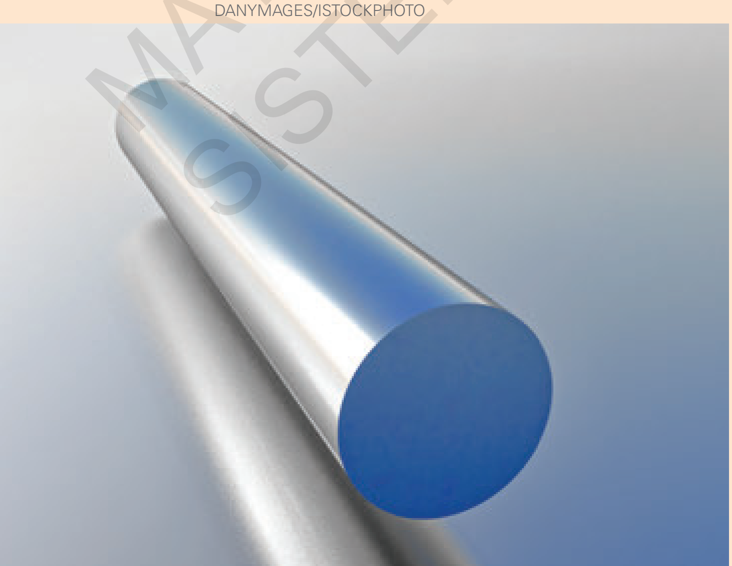
Introdução

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) foi um dos mais emblemáticos físicos e matemáticos da Antiguidade. Também foi referência para estudiosos como Galileu Galilei (1564-1642), Christiaan Huygens (1629-1695) e Isaac Newton (1643-1727).

Além de todos conceitos relacionados a equilíbrio de corpos e hidrostática, Arquimedes foi um exímio geômetra. Descobriu que o volume do cilindro corresponde a 3/2 do volume da esfera de mesmo raio. Era tão fascinado por essa medida que pediu a seus familiares que colocassem um cilindro contendo uma esfera sobre sua sepultura.

A importância de Arquimedes para o Matemática é tamanha que a Medalha Fields tem a imagem entalhada do grego em uma das faces, com os dizeres "Superar as próprias limitações e dominar o universo".

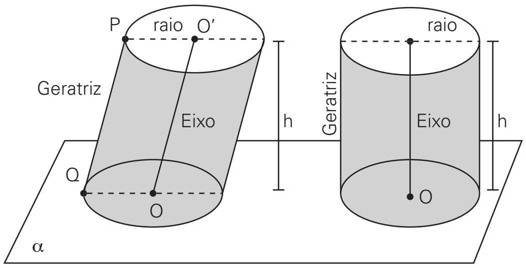
DANYMAGES/ISTOCKPHOTO



CILINDROS

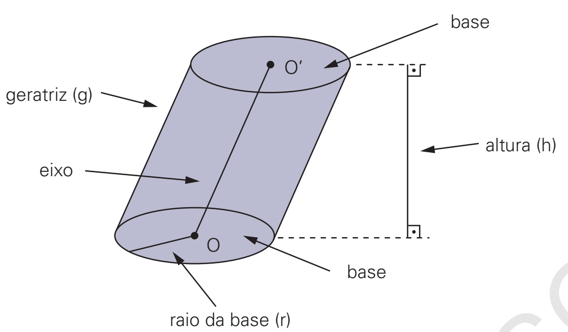
Trata-se de sólidos de revolução, ou seja, são corpos formados pelo movimento completo de uma figura em torno do próprio eixo. Apesar de os cilindros não serem poliedros, são sólidos geométricos com as bases constituídas por círculos.

Na figura a seguir, está representado um círculo de centro O dentro do plano α. Fora desse plano, está um círculo de centro O'. Seja PQ um segmento não paralelo e não contido em α, denomina-se **cilindro circular** a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos ao segmento PQ com extremidades nos círculos e situados no mesmo semiespaço determinados por α.

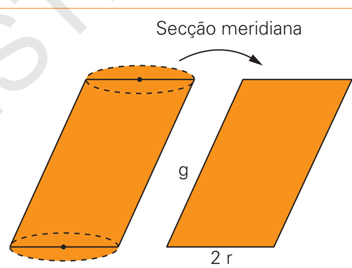


ELEMENTOS DO CILINDRO

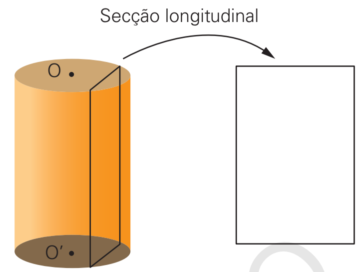
Na figura a seguir, estão representados os elementos de um cilindro.



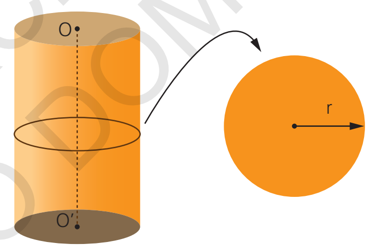
- **Base** – Dois círculos determinados pelas extremidades de todos os segmentos paralelos a PQ, os quais, reunidos, formam o cilindro.
- **Eixo** – Reta determinada pelos centros das bases.
- **Geratriz (g)** – Qualquer segmento com extremidades nas circunferências das bases e que seja paralelo ao eixo do cilindro.
- **Altura (h)** – Distância perpendicular entre os planos das bases do cilindro.
- **Superfície lateral** – Reunião de todas as geratrizes. Denomina-se área lateral do cilindro AL a área da superfície lateral.
- **Seção meridiana** – Quadrilátero obtido pela intersecção do cilindro com um plano que contenha o eixo, conforme a figura.



- **Seção longitudinal** – Quadrilátero obtido pela intersecção do cilindro com um plano que esteja paralelo ao seu eixo (conforme a figura), ou que contenha o eixo do cilindro. Neste caso, a seção longitudinal é denominada seção meridiana.



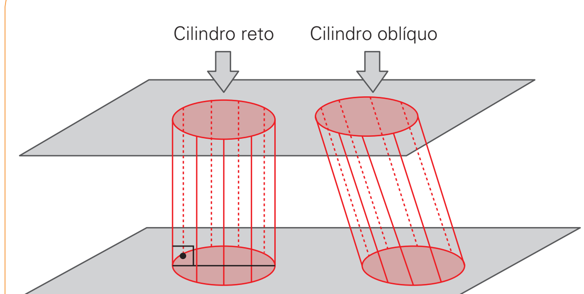
- **Secção transversal** – Círculo congruente à base obtido pela intersecção do cilindro com um plano perpendicular ao eixo da base, conforme a figura, sendo sua área igual à área da base B.



CLASSIFICAÇÃO

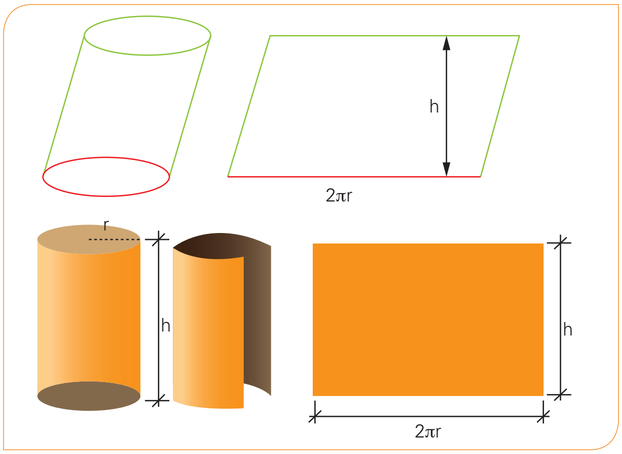
Os cilindros são classificados em:

- **circular oblíquo:** apresenta as geratrizes oblíquas ao plano das bases.
- **circular reto** (ou cilindro de revolução): apresenta as geratrizes perpendiculares ao plano da base.



ÁREA LATERAL

A área lateral (A^L) da superfície de um cilindro corresponde à área de um paralelogramo cujas dimensões equivalem ao comprimento da circunferência da base ($2\pi r$) e à altura do cilindro (h). Se for um cilindro circular reto, a área lateral corresponde à área do retângulo, conforme a figura.



Logo, a área lateral de um cilindro de raio de base **r** e altura **h** é:

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

ÁREA TOTAL

A área total da superfície de um cilindro corresponde à soma das áreas das bases com a área da superfície lateral.

Logo, a área total de um cilindro circular com raio de base r e altura h é:

$$A_T = A_L + 2B$$

$$A_T = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_T = 2\pi r \cdot (h + r)$$

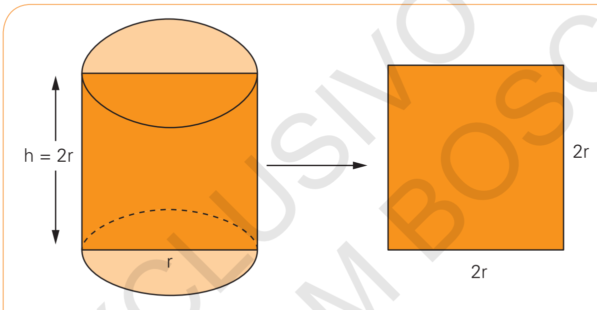
VOLUME

Sendo B a área da base do cilindro e h a altura, o volume do cilindro é obtido pela seguinte relação:

$$V = B \cdot h$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

CILINDRO EQUILÁTERO

É assim chamado o cilindro de revolução cuja secção meridiana é um quadrado (h = 2r). Observe a figura.



Cilindro equilátero Secção meridiana

Área lateral

$$A_L = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r \quad \therefore \quad A_L = 4\pi r^2$$

Área total

$$A_T = 2 \cdot B + A_L = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 \quad \therefore \quad A_T = 6\pi r^2$$

Volume

$$V = B \cdot h = \pi r^2 \cdot 2r \quad \therefore \quad V = 2\pi r^3$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uece – A medida, em m², da área da superfície total (área lateral e bases) de um cilindro circular reto tal que a medida da altura e a medida do raio da base são ambas iguais a 2 m é:

a) 14π **b)** 12π **c)** 16π **d)** 10π

Resolução

Dados:

$h = 2$ m

$r = 2$ m

$B = \pi r^2 = \pi \cdot (2)^2 = 4\pi$

$A_L = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$

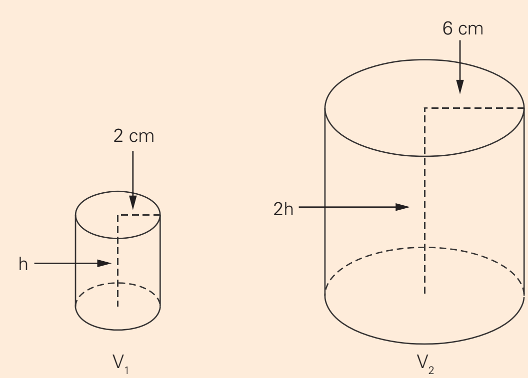
$A_T = 2 \cdot B + AL$

$A_T = 2 \cdot 4\pi + 8\pi = 8\pi + 8\pi = 16\pi$

$\therefore A_T = 16\pi$ m²

2. PUC-SP – Dispõe-se de N tubos cilíndricos, todos iguais entre si, cada qual com diâmetro interno de 4 cm. Se esses tubos transportam a mesma quantidade de água que um único tubo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 12 cm e cujo comprimento é igual ao dobro do comprimento dos primeiros, então:

a) $N > 15$
b) $10 < N < 15$
c) $6 < N < 10$
d) $N < 6$



Resolução

Identificando que o volume 2 (V_2) é N vezes o volume 1 (V_1), obtemos a seguinte relação:

$N \cdot V_1 = V_2$

$N \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 2 \cdot h$

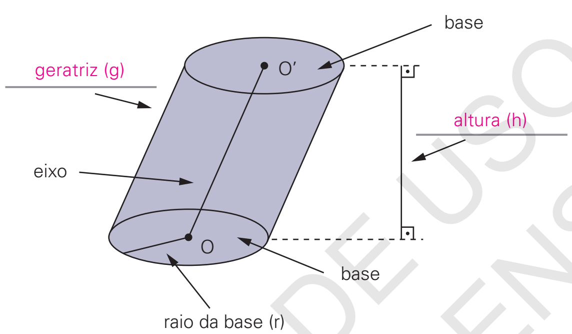
$4\text{ N} = 72 \rightarrow N = 72/4 = 18$

Logo, $N > 15$.

ROTEIRO DE AULA

CILINDRO

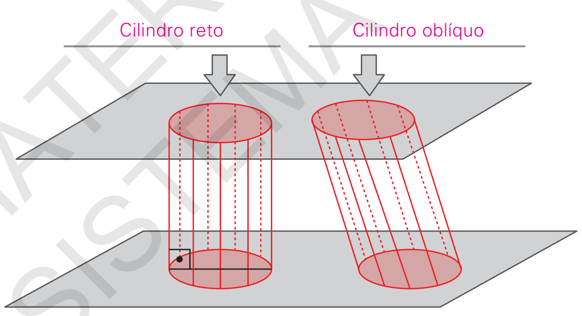
Sólido de revolução é um corpo que se forma a partir do movimento completo de uma figura em torno de seu eixo. Apesar de não ser um poliedro, é um sólido geométrico que bases formadas por círculos.

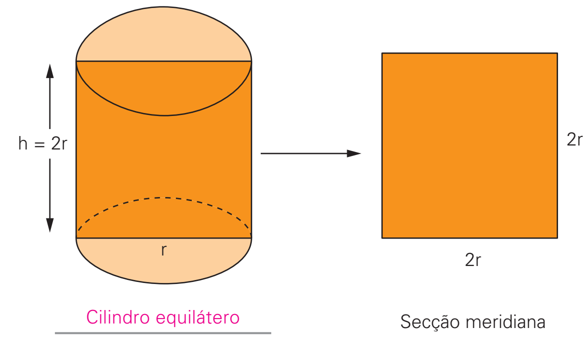


$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$A_T = 2\pi\, r \cdot (h + r)$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

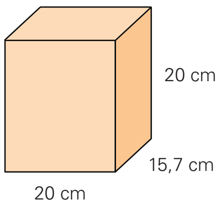




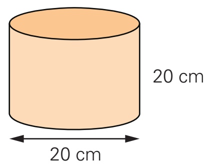
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFBA – Um aluno do curso de Automação Industrial resolveu armazenar parafina líquida em dois recipientes: um na forma de um prisma quadrangular regular e outro na forma de um cilindro circular reto cujas medidas estão indicadas abaixo:

Recipiente 1



Recipiente 2



Adote $\pi = 3,14$

Sobre esses recipientes é correto afirmar:

a) No recipiente 1 cabe mais parafina que no recipiente 2
b) No recipiente 1 cabe menos parafina que no recipiente 2
c) Tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem a mesma quantidade de parafina
d) Tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem menos de 6,1 litros de parafina
e) Tanto no recipiente 1 quanto no recipiente 2 cabem mais de 6,3 litros de parafina

Volume do paralelepípedo (recipiente 1):
$V_P = 20 \cdot 20 \cdot 15,7 = 6\,280 \text{ cm}^3$
Volume do cilindro (recipiente 2):
$V_C = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 3,14 \cdot 2\,000 = 6\,280 \text{ cm}^3$
Logo, tanto no paralelepípedo (recipiente 1) quanto no cilindro (recipiente 2) cabem a mesma quantidade de parafina.

2. Enem C2-H9

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m³ de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

O volume da cisterna é:
$V = \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 3 \cong 9 \text{ m}^3.$

Conservando a altura, o raio r da nova cisterna deverá ser:
$81 = \pi \cdot r^2 \cdot 3 \therefore r \cong 3 \text{ m}.$
Logo, o aumento solicitado será aproximadamente de $3 - 1 = 2$ m.
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

3. UFMG – O lucro bruto de uma empresa é a diferença entre a receita obtida com as vendas e o custo de produção. Um determinado fabricante de cerveja só vende latas cilíndricas de alumínio, fechadas, cheias de cerveja, com 12 cm de altura e 3 cm de raio. O custo da produção de certo número de latas cheias de cerveja é de 1 real por litro de cerveja e mais p reais por metro quadrado de alumínio utilizado na fabricação das latas. A receita da empresa por cada litro de cerveja vendido é de dois reais por litro.

Considerando estas informações,

a) determine a receita gerada pela venda de cada lata de cerveja.
b) determine o custo total de produção de cada lata de cerveja em função de p.
c) determine o valor máximo do preço p do alumínio para que o fabricante não tenha prejuízo.

a) $V_{lata} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi \text{ cm}^3 = 0,108\ \pi\text{L}.$
Como a receita da empresa é de R$ 2,00 por litro vendido, a receita por lata é:
$R = 2 \cdot 0,108\pi = 0,216\pi$ reais

b) Área da superfície da lata:
$A_T = A_L + 2B = 2\pi \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 90\ \pi \text{ cm}^2 = 0,009\ \pi \text{ m}^2$
Como há um custo de R$ 1,00 por litro de cerveja mais p por metro quadrado de alumínio utilizado, o custo total (C) será:
$C = 1 \cdot 0,108\pi + p \cdot 0,009\pi = 0,009\pi \cdot (12 + p)$

c) Para que o fabricante não tenha prejuízo, a receita (R) deve ser maior que o custo (C). Assim:

$R - C \geqslant 0$

$0{,}216\pi - 0{,}009\pi \cdot (12 + p) \geqslant 0$

$-0{,}009p \geqslant -0{,}108$

$p \leqslant 12$

4. Udesc – Uma coroa cilíndrica é a região espacial situada entre dois cilindros concêntricos de mesma altura, um com raio R e outro com raio r, sendo r < R. Se a altura, o volume e a soma das medidas dos raios dessa coroa cilíndrica são, respectivamente, 4 cm, $4{,}25\pi$ cm³ e $4{,}25\pi$ cm, então a área total de sua superfície é:

a) 34π cm²
b) $18{,}0624\pi$ cm²
c) $20{,}125\pi$ cm²
d) $18{,}125\pi$ cm²
e) $36{,}125\pi$ cm²

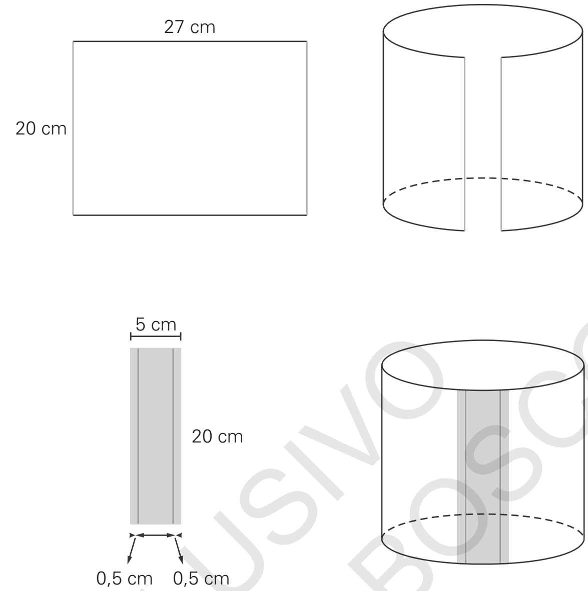
Como o volume da coroa é $4{,}25\pi$ cm³:

$\pi(R^2 - r^2) \cdot 4 = 4{,}25\pi \leftrightarrow R^2 - r^2 = 1{,}0625$

$A_T = 2 \cdot \pi(R^2 - r^2) + 2\pi \cdot 4(R + r) = 2\pi \cdot 1{,}0625 + 8\pi \cdot 4{,}25$

$\therefore A_T = 36{,}125\pi$ cm²

5. Unesp – Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm, conforme indica a figura.



Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando $\pi = 3{,}1$, o volume desse cilindro é igual a

a) 1 550 cm³
b) 2 540 cm³
c) 1 652 cm³
d) 4 805 cm³
e) 1 922 cm³

Seja r a medida do raio da base do cilindro e compreendendo que o comprimento da circunferência da base tem uma dimensão de 31 cm, obtemos:

$31 = 2\pi \cdot r \quad \rightarrow \quad r \cong \dfrac{31}{2 \cdot 3{,}1} \quad \rightarrow \quad r \cong 5$ cm

Assim, $V = 3{,}1 \cdot 5^2 \cdot 20 \cong 1\,550$ cm³.

6. UFU-MG – O rendimento teórico de uma tinta é a quantidade necessária para pintar um metro quadrado de área e serve apenas para determinar o custo por metro quadrado da tinta. O rendimento real de uma tinta é calculado no final do trabalho executado que leva em conta o número de demãos (números de camadas de tintas necessárias para obter o resultado esperado) e as perdas decorrentes da preparação e do método de aplicação. Admita que as perdas usando os diferentes métodos de pintura são estimadas em: pincel 10%, rolo 20% e pistola pneumática 25%.

Um pintor vai pintar toda a superfície de um tanque de combustível na forma de um cilindro circular de 10 m de altura e raio da base igual a 2 m. Sabe-se que a tinta a ser usada tem rendimento teórico de 20 m² por litro e que são necessárias duas demãos.

Determine a quantidade, em litros, de tintas necessárias para pintar esse tanque utilizando a pistola pneumática.

Dado: Use $\pi = 3{,}14$.

Deduzindo que somente a superfície externa do cilindro será pintada e entendendo que serão aplicadas duas demãos, a área que receberá a tinta será $2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot (2 + 10) \cong 301{,}44\ m^2$.

O volume de tinta necessário para pintar o tanque seria de:

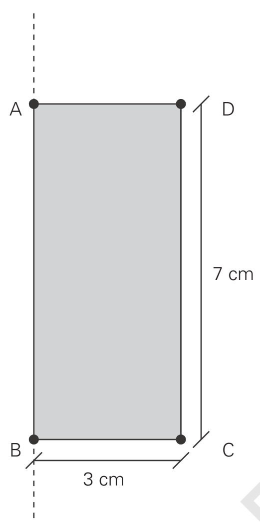
$$V = \frac{301{,}44}{20} = 15{,}072 \text{ litros}$$

No entanto, como a pistola pneumática desperdiça 25% da tinta usada, 15,072 litros correspondem a 75% do volume de tinta necessário. Logo:

$$V_{tinta} = \frac{15{,}072}{0{,}75} \quad \therefore\ V_{tinta} = 20{,}096 \text{ litros}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. FMP – A figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD em torno da reta definida pelo seu lado AB.

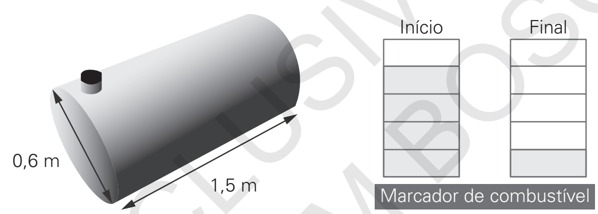


A medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é mais próxima de

a) 750 **c)** 63 **e)** 190
b) 441 **d)** 126

8. UPE – A figura a seguir representa um tanque de combustível de certa marca de caminhão a diesel. Sabendo que esse veículo faz, em média, 3 km/L, e, observando o marcador de combustível no início e no final de uma viagem, quantos quilômetros esse caminhão percorreu?

Considere $\pi = 3$.



a) 243 km **c)** 648 km **e)** 813 km
b) 425 km **d)** 729 km

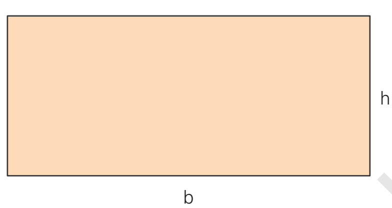
9. UFRGS – Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque.

Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m³.

a) 57
b) 60
c) 63
d) 66
e) 69

10. UFPR – Na modelagem matemática de um processo de fabricação, é comum supor que não há perda de material com emendas, sobreposição de partes etc.

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com diâmetro de 120 cm e capacidade de 1,5 m³. Neste problema, estamos nos referindo a um cilindro circular reto perfeito. Para fazer a lateral desse cilindro, será usada uma chapa metálica retangular de comprimento b e altura h. Use $\pi = 3,14$ e dê suas respostas com duas casas decimais.



a) Calcule o comprimento b que a chapa deve ter.

b) Calcule a altura h que a chapa deve ter.

11. UFU-MG – No Brasil, é comercializada, nos postos de combustível, a mistura do álcool anidro (etanol) com gasolina pura (gasolina A), conhecida como gasolina C. A proporção entre esses combustíveis é indicada pela porcentagem de etanol precedido pela letra E maiúscula. Dessa maneira, a mistura E10 é composta de 10% de etanol e 90% de gasolina A. As misturas mais comuns são E15, E20, E25 e E27.

Suponha-se que um tanque de uma distribuidora, na forma de um cilindro circular reto com 4 metros de diâmetro e capacidade de 120 000 litros, esteja com 100 000 litros da mistura E15. Suponha-se também que, devido a uma nova regulamentação da ANP (Agência Nacional do Petróleo), deva ser adicionado etanol nesse tanque de modo a obter a mistura E20, que passará a ser distribuída para comercialização.

Com base no texto apresentado, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar

a) a quantidade de litros de etanol que serão adicionados a esse tanque.

b) o aumento, em metros, no nível de combustível (altura da coluna) nesse tanque.

Dados: use $\therefore \pi = 3,125$

12. Insper-SP – Um cilindro circular reto, branco, possui 20 cm de diâmetro da base e 80 cm de altura. Sobre a lateral desse cilindro, foi pintada uma faixa marrom de largura uniforme igual a 3,14 cm. A faixa completou duas revoluções ao redor do cilindro, como mostra a figura.

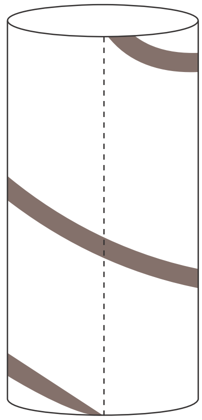
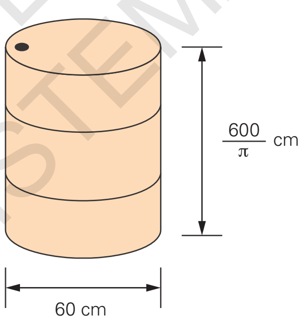


figura fora de escala

Nas condições descritas, a faixa marrom ocupou, da área lateral do cilindro, aproximadamente,

a) 5%
b) 25%
c) 0,5%
d) 2,5%
e) 10%

13. UPF-RS – Um tonel está com 30% da sua capacidade preenchida por um certo combustível. Sabendo que esse tonel tem diâmetro de 60 cm e altura de $\frac{600}{\pi}$ cm, a quantidade de combustível contida nesse tonel, em litros, é

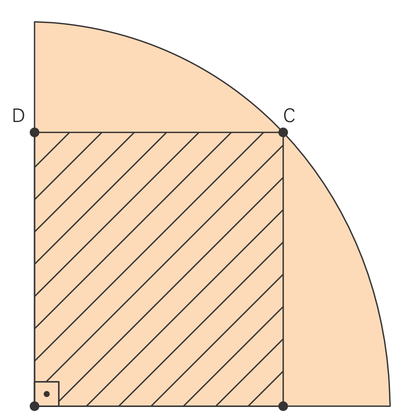


a) 1,62
b) 16,2
c) 162
d) 180
e) 162 000

14. Unicamp – Considere um cilindro circular reto. Se o raio da base for reduzido pela metade e a altura for duplicada, o volume do cilindro

a) é reduzido em 50%.
b) aumenta em 50%.
c) permanece o mesmo.
d) é reduzido em 25%.

15. Cefet-MG – Na figura a seguir, ABCD é um retângulo inscrito em um setor circular de raio R com $\overline{AB} = \frac{2}{3}R$.



O volume do sólido de revolução gerado pela rotação desse retângulo em torno de um eixo que contenha o segmento AD, em função de R, é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{5}\pi \cdot R^3}{3}$

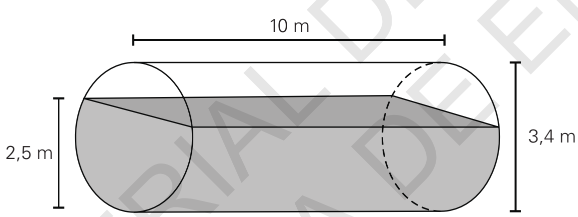
b) $\dfrac{8\pi \cdot R^3}{9}$

c) $\dfrac{4\sqrt{5}\pi \cdot R^3}{27}$

d) $\dfrac{10\pi \cdot R^3}{49}$

e) $\dfrac{5\sqrt{5}\pi \cdot R^3}{54}$

16. UFPR – Um reservatório possui internamente o formato de um cilindro com 3,4 m de diâmetro e 10 m de comprimento, conforme indica a figura.



a) Qual o volume total que esse reservatório comporta?

b) Num certo momento, a altura do líquido no interior do reservatório é de 2,5 m, como indica a figura. Qual a área da superfície do líquido exposta ao ar dentro do reservatório?

17. Fuvest – A grafite de um lápis tem quinze centímetros de comprimento e dois milímetros de espessura. Dentre os valores abaixo, o que mais se aproxima do número de átomos presentes nessa grafite é

Nota:

1) Assuma que a grafite é um cilindro circular reto, feito de grafita pura. A espessura do grafite é o diâmetro da base do cilindro.

2) Adote os valores aproximados de:

- 2,2 g/cm³ para a densidade da grafite;
- 12 g/mol para a massa molar do carbono;
- $6{,}0 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} para a constante de Avogadro;

a) 5×10^{23}

b) 1×10^{23}

c) 5×10^{22}

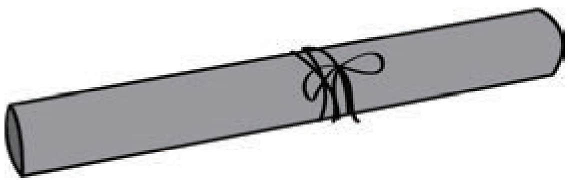
d) 1×10^{22}

e) 5×10^{21}

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H8

Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.



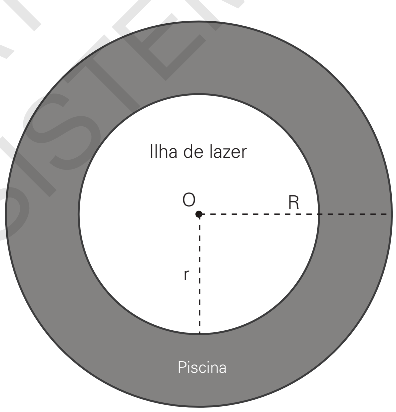
Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

a) πd
b) $2\pi d$
c) $4\pi d$
d) $5\pi d$
e) $10\pi d$

19. Enem C2-H9

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem um raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m^3.



Considere 3 como o valor aproximado para π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de

a) 1,6.
b) 1,7.
c) 2,0.
d) 3,0.
e) 3,8.

20. Enem C2-H8

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças. FNDE;
Instituto Ciência Hoje, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize π = 3).

a) 20 mL.
b) 24 mL.
c) 100 mL.
d) 120 mL.
e) 600 mL.

39 CONES

- Cones
- Cones equiláteros

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.


RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

A cisterna é uma ótima forma de captar água em regiões rurais.

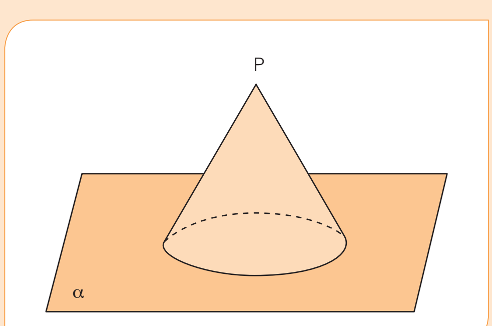
Introdução

Cisternas são ferramentas milenares e bastante úteis para captar água da chuva, que pode ser utilizada para irrigação e lavagem de objetos. Além disso, se a água captada passar por tratamento, pode servir para o consumo humano.

Funcionam como reservatórios da água da chuva e são muito comuns em regiões áridas brasileiras. Em geral, as cisternas têm parte de seu corpo cilíndrico enterrado, o que auxilia a conservar a temperatura da água. Além disso, é comum o uso de tampas em formato cônico.

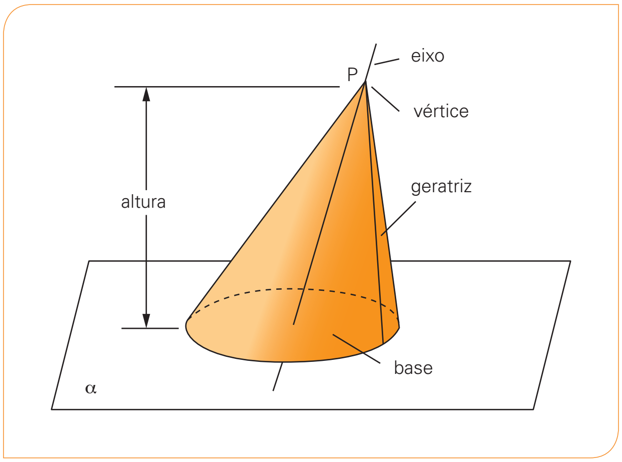
CONES

Trata-se de sólidos de revolução, ou seja, são corpos formados pelo movimento completo de uma figura (no caso, um setor circular) em torno do próprio eixo. Apesar de não serem poliedros, são sólidos geométricos que têm bases constituídas por círculos.



ELEMENTOS DO CONE

Na figura a seguir, estão representados os elementos de um cone.

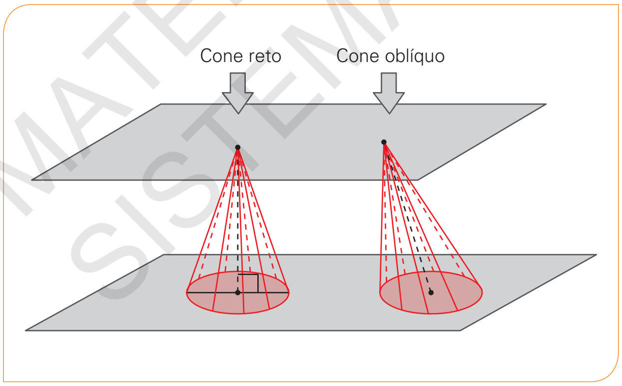


- **Base –** Círculo contido no plano α.
- **Vértice –** Ponto P em que se encontram os segmentos originados na base fora do plano α.
- **Eixo –** Reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- **Geratriz –** Qualquer segmento com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base do cone.
- **Altura –** Distância perpendicular do vértice ao plano da base do cone.

CLASSIFICAÇÃO

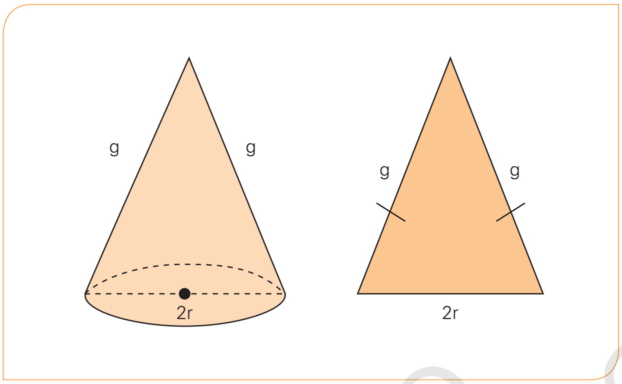
Os cones podem ser classificados em:

- **circular oblíquo:** apresenta as geratrizes oblíquas ao plano das bases.
- **circular reto (ou cilindro de revolução):** tem as geratrizes perpendiculares ao plano da base. A projeção ortogonal do vértice no plano da base é o centro da base.

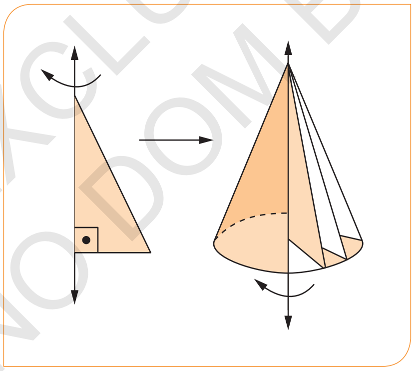


Observações:

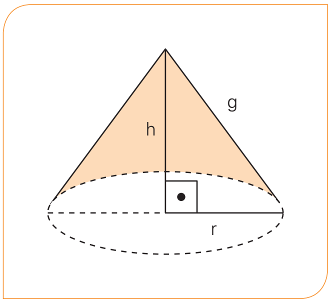
- No cone reto, todas as geratrizes são congruentes entre si. Então, a secção meridional é um triângulo isósceles.



- Todo cone pode ser definido como um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Assim, o cone reto também é conhecido como **cone de revolução**.



- Um dos catetos desse triângulo corresponde à altura do cone (h); o outro, ao raio (r). A hipotenusa é a geratriz (g).



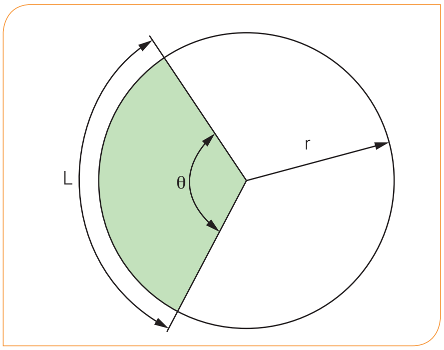
Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

ÁREA LATERAL

Para calcular a área do cone, é válido entender algumas relações matemáticas.

Para um setor circular de raio **r** e ângulo central θ, em radianos, temos:



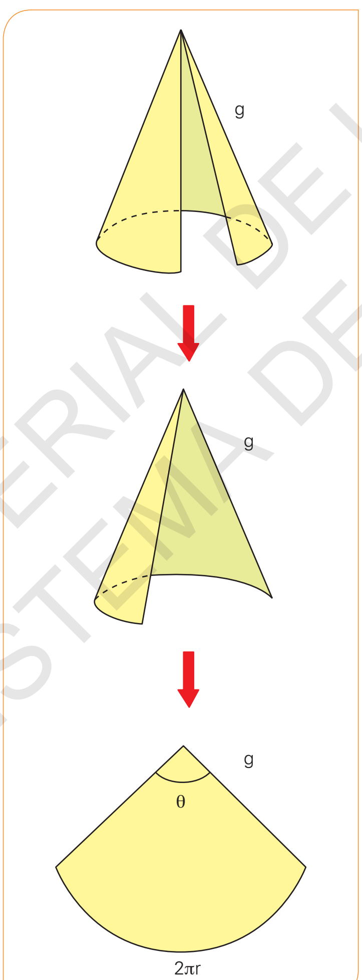
O comprimento L do arco desse setor circular é dado por $L = \theta \cdot r$.

Já a área pintada B do setor circular é dada por:

$$B = \frac{L \cdot r}{2}$$

Fórmula do setor circular

Vamos considerar o cone circular reto (cone de revolução) de geratriz g e raio de base r. Planificando a superfície lateral desse cone, obtemos um setor circular de raio g, cujo arco correspondente tem comprimento igual a $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base).



Para θ em radianos, temos:

$\theta \cdot g = 2\pi r$

Portanto:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g}$$

Já a área lateral do cone é:

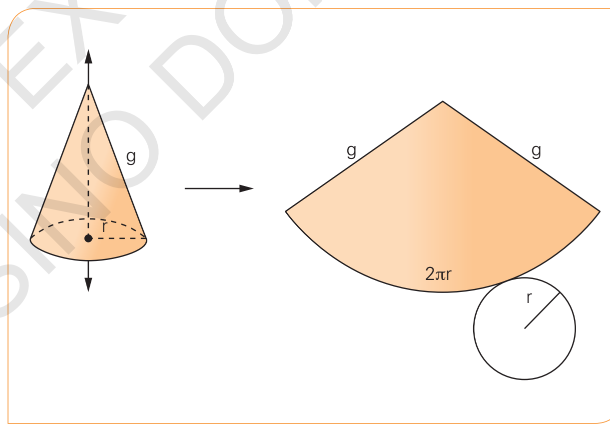
$$A_L = \frac{2\pi r \cdot g}{2}$$

Então:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

ÁREA TOTAL

A superfície total de um cone de revolução de geratriz g e raio de base r é formada pela soma da área lateral (setor circular) com a área do círculo da base.



$A_T = A_L + B \rightarrow A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$

Logo, a área total do cone é dada por:

$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

VOLUME

Podemos demonstrar que, de modo semelhante ao cálculo do volume da pirâmide comparado ao volume do prisma, o volume de um cone corresponde a um terço do volume de um cilindro de mesmo raio.

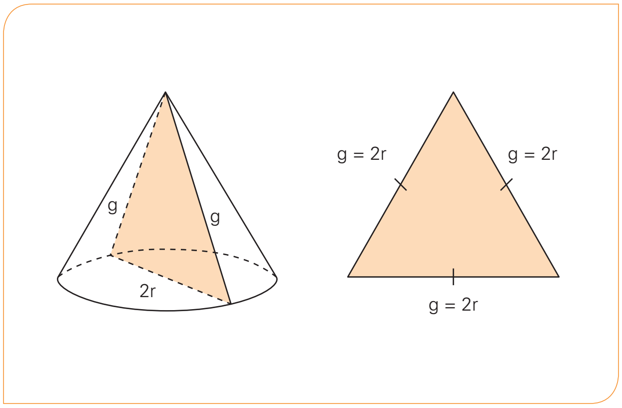
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot h$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

CONE EQUILÁTERO

É assim chamado o cone de revolução cuja secção meridiana é composta de um triângulo equilátero.



Área lateral

$A_L = \pi r \cdot g = 2\pi r \cdot r \therefore A_L = 2\pi r^2$

Área da base

$B = \pi r^2$

Área total

$A_T = A_L + B = 2\pi r^2 + \pi r \therefore A_T = 3\pi r^3$

Altura

$h = \dfrac{2r\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = r\sqrt{3}$

Volume

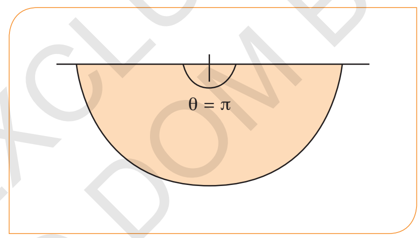
$V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \therefore V = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Ângulo

O ângulo θ, em radianos, da superfície lateral planificada é dado por $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$.

Como para o cone equilátero $g = 2r$, temos que $\theta = \dfrac{2\pi r}{2r} \rightarrow \theta = \pi$.

Portanto, a superfície lateral planificada do cone equilátero é um semicírculo.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uece – A superfície lateral de um cone circular reto, quando planificada, torna-se um setor circular de 12 cm de raio com um ângulo central de 120 graus. A medida, em centímetros quadrados, da área da base deste cone é

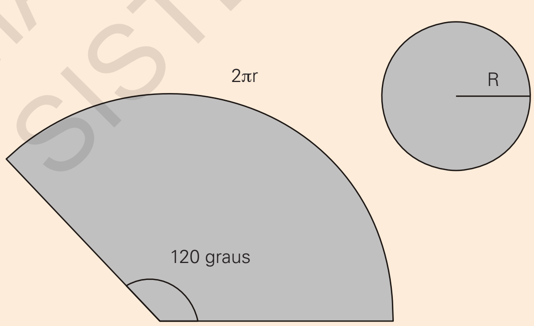
a) 144π
b) 72π
c) 36π
d) 16π

Resolução

Com a planificação do cone circular reto, obtemos:

$g = 12$ cm

$\theta = 120° = \dfrac{2}{3}\pi$ rad



$\theta = \dfrac{2\pi R}{g} \rightarrow 2\pi R = \theta \cdot g \rightarrow 2\pi R = \dfrac{2}{3}\pi \cdot 12 \therefore R = 4$ cm

Com o valor de R, podemos calcular a área da base do cone.

$B = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 4^2 \therefore B = 16\pi$ cm²

2. CFT-SC – Dado um copo em forma de cilindro e outro de forma cônica, de mesma base e altura. Se eu encher completamente o copo cônico com água e derramar toda essa água no copo cilíndrico, quantas vezes terei que fazê-lo para encher completamente esse copo?

a) Apenas uma vez.
b) Duas vezes.
c) Três vezes.
d) Uma vez e meia.
e) É impossível saber, pois não se sabe o volume de cada sólido.

Resolução

Como os copos cilíndrico e cônico têm áreas de base e alturas iguais, podemos calcular a razão entre seus volumes.

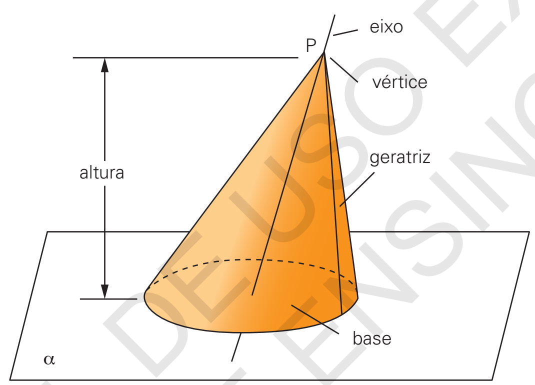
$$\frac{V_{cilindro}}{V_{cone}} = \frac{B \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot B \cdot h} = 3 \therefore V_{cilindro} = 3 \cdot V_{cone}$$

Logo, serão necessários 3 copos cônicos para encher um copo cilíndrico.

ROTEIRO DE AULA

CONE

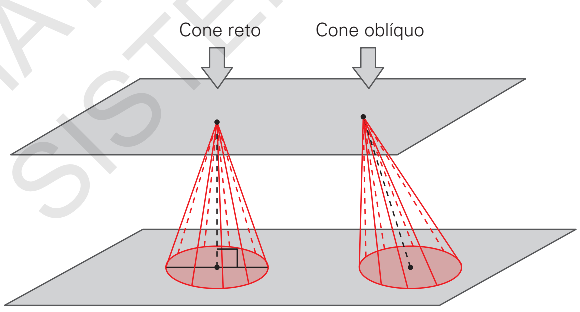
Sólido de revolução, ou seja, corpo formado pelo movimento completo de uma figura (no caso, um setor circular) em torno do próprio eixo. Apesar de não ser um poliedro, é um sólido geométrico cuja base é constituída por um círculo.

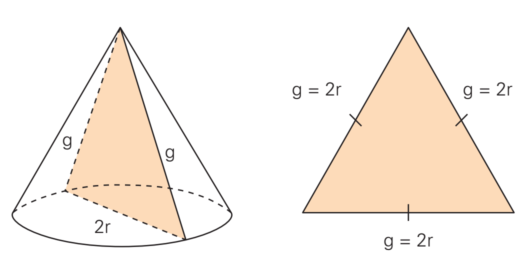


$A_L = 2\pi r^2$

$A_T = 3\pi r^2$

$V = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$





EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. UEMG (adaptado) – Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, qual a altura do nível atingida pela água?

(considere $\pi \cong 3$)

O volume de água no reservatório cônico é:

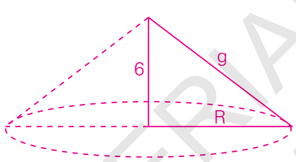
$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 9 \cong 576 \text{ m}^3$.

Portanto, a altura h atingida no reservatório cúbico será:

$10^2 \cdot h = 576 \leftrightarrow h = 5{,}76 \text{ m}^3$.

2. Mackenzie-SP – Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é $128\,\pi$ cm³. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm², é

a) $144\,\pi$
b) $120\,\pi$
c) $80\,\pi$
d) $72\,\pi$
e) $64\,\pi$



Usando o volume do cone, temos:

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 6 = 128\pi$

$R^2 = 64$
$R = 8$

Determinando a geratriz do cone, temos:

$g^2 = 6^2 + 8^2$
$g^2 = 36 + 64$
$g^2 = 100$
$g = 10$

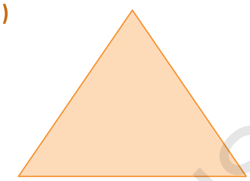
Logo, a área total será dada por:

$A_T = \pi \cdot R \cdot g + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 8 \cdot 10 + \pi \cdot 8^2 = 144\,\pi \text{ cm}^2$

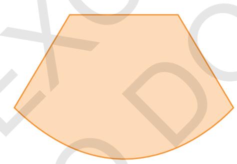
3. Enem C2-H7

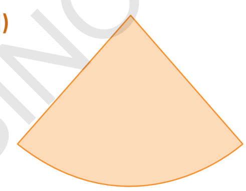
Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

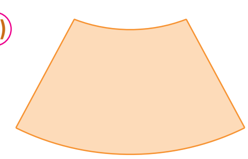
Qual deverá ser a forma do adesivo?

a)


b)


c)


d)


e)


A superfície lateral de um cone é obtida por um setor circular. Assim, o objetivo do responsável pelo adesivo será alcançado se ele fizer o corte indicado na alternativa E.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. FMP (adaptado) – Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

Sejam r e h, respectivamente, o raio da base e a altura do cilindro. Logo, sabendo que os dois sólidos têm o mesmo raio da base e a mesma altura, a resposta é dada por:

$$\frac{V_{cilindro}}{V_{cone}} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 3$$

5. Uece – O volume de uma tradicional casquinha de sorvete, com formato de um cone, feito a partir de um setor circular de 12 cm de raio e ângulo central de 120 graus é igual a

a) $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³

b) $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³

c) $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³

d) $\frac{128\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³

Seja r o raio da base da casquinha. O comprimento de sua base corresponde ao comprimento do arco definido pelo ângulo central de $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad . Ou seja:

$$2\pi \cdot r = \frac{2\pi}{3} \cdot 12 \rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

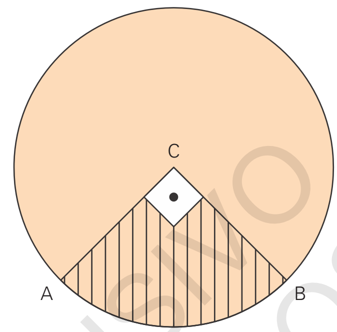
Logo, se h é a altura da casquinha, pelo teorema de Pitágoras:

$$12^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h^2 = 128 \rightarrow h = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Portanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8\sqrt{2} = \frac{128\sqrt{2}\pi}{3} \text{ cm}^3$$

6. EsPCEx-SP – Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios CA e CB.



desenho ilustrativo – fora de escala

O volume desse cone, em cm³, é igual a

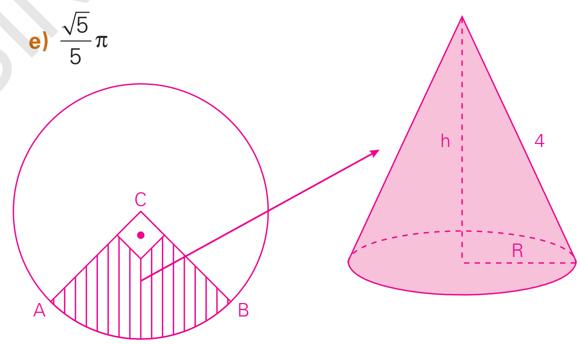
a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$

c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$



desenho ilustrativo – fora de escala

O comprimento do raio, R, da circunferência gerada a partir do cone do arco AB é:

$$2 \cdot \pi \cdot R = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{4} \rightarrow R = 1 \text{ cm}$$

Calculando a altura do cone, temos:

$$h^2 + 1^2 = 4^2 \rightarrow h = \sqrt{15} \text{ cm}$$

Logo, o volume do cone é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15} \cdot \pi}{3} \text{ cm}^3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Mackenzie-SP – Se um cone reto tem altura igual a 12 cm e seu volume é 64 π cm³, então sua geratriz, em cm, mede

a) 20
b) $10\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{10}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{10}$

8. UPE (adaptado) – Um cone reto está inscrito num cubo de aresta 8 cm. Se a altura do cone e o diâmetro de sua base têm medidas iguais, qual é a diferença entre as medidas dos seus volumes? Considere $\pi = 3,0$.

9. UEFS-BA – Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm², mede, aproximadamente,

a) $4\pi\sqrt{6}$
b) $4\pi\sqrt{5}$
c) 4π
d) $\pi\sqrt{3}$
e) $\pi\sqrt{2}$

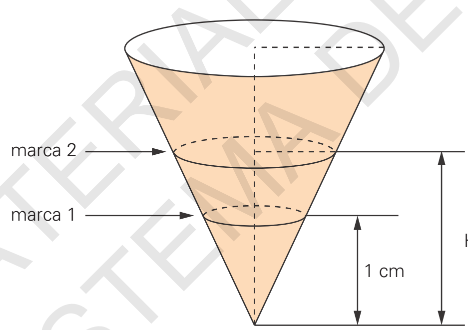
10. Unesp – Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.


SZEFEI/ISTOCKPHOTO

Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm³, e tomando $\pi \cong 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

a) 46.
b) 58.
c) 54.
d) 50.
e) 62.

11. UFU-MG – Um recipiente cônico utilizado em experiências de química deve ter duas marcas horizontais circulares, uma situada a 1 centímetro do vértice do cone, marcando um certo volume V, e outra marcando o dobro deste volume, situada a H centímetros do vértice, conforme figura.



Nestas condições, a distância H, em centímetros, é igual a:

a) $\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{3}$

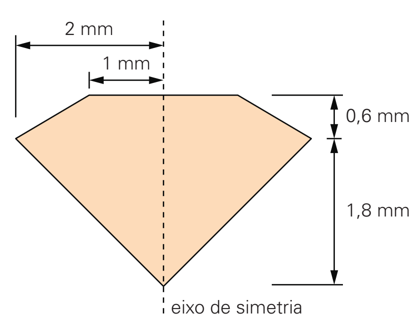
c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

12. Unicamp – Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.

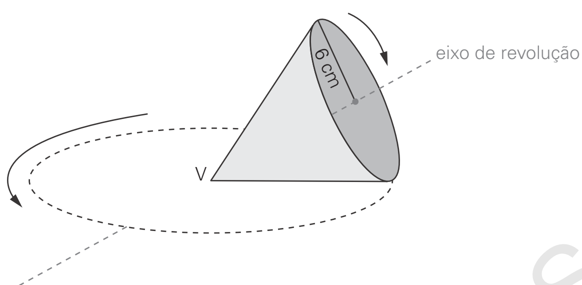
a) Em geologia, um quilate é uma medida de massa que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/cm³, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura abaixo apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.



Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula $V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$ em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

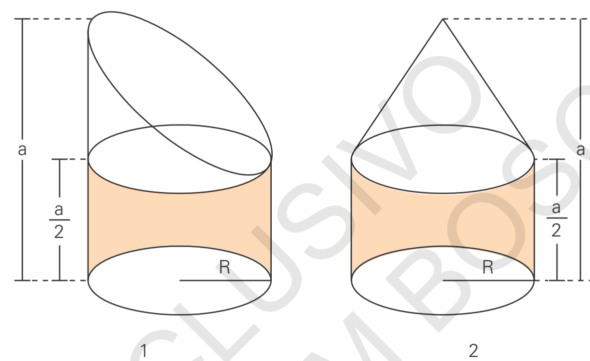
13. Unesp – Um cone circular reto, de vértice V e raio da base igual a 6 cm, encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone gira sob seu eixo de revolução que passa por V, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar, conforme mostra a figura.



O cone retorna à posição inicial após o círculo da sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Considerando que o volume de um cone é calculado pela fórmula $\frac{\pi^2 rh}{3}$, o volume do cone da figura, em cm³, é igual a

a) $72\sqrt{3}\pi$
b) $48\sqrt{3}\pi$
c) $36\sqrt{3}\pi$
d) $18\sqrt{3}\pi$
e) $12\sqrt{3}\pi$

14. EsPCEx-SP – O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



Desenho ilustrativo fora de escala

a) $\frac{13}{12}a$
b) $\frac{7}{6}a$
c) $\frac{5}{4}a$
d) $\frac{4}{3}a$
e) $\frac{17}{12}a$

15. PUC-SP (adaptado) – Considere um cilindro reto de área lateral igual a 64π cm² e um cone reto, com volume igual a 128π cm³, cujo raio da base é o dobro do raio da base do cilindro.

Sabendo que a altura do cone é 2 cm menor do que a altura do cilindro e que a altura do cilindro é um número inteiro, qual a área lateral desse cone?

16. Fuvest – Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:

- π é aproximadamente 3,14.
- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

a) 4 horas e 50 minutos.
b) 5 horas e 20 minutos.
c) 5 horas e 50 minutos.
d) 6 horas e 20 minutos.
e) 6 horas e 50 minutos.

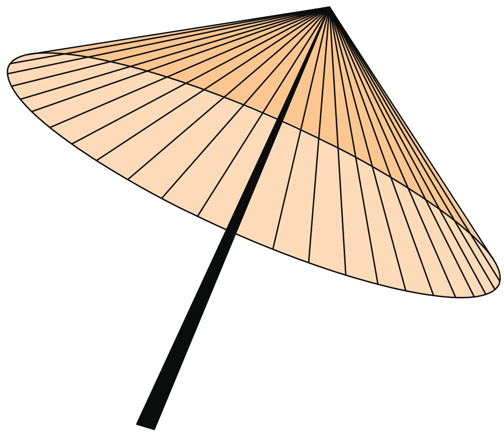
17. Acafe-SC – Uma pirâmide de base triangular regular reta e um cone reto estão inscritos num cilindro reto, cujo raio da base é r e altura h. A relação entre a altura e o raio do cilindro, para que a diferença entre o volume do cone e da pirâmide seja equivalente a $\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right)$ unidades, é:

a) $r^2h = 1$
b) $h = \frac{\pi - \sqrt{3}}{r}$
c) $rh = \frac{\pi - \sqrt{3}}{12}$
d) $rh = 1$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H7

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

a) pirâmide.
b) semiesfera.
c) cilindro.
d) tronco de cone.
e) cone.

19. Enem C2-H8

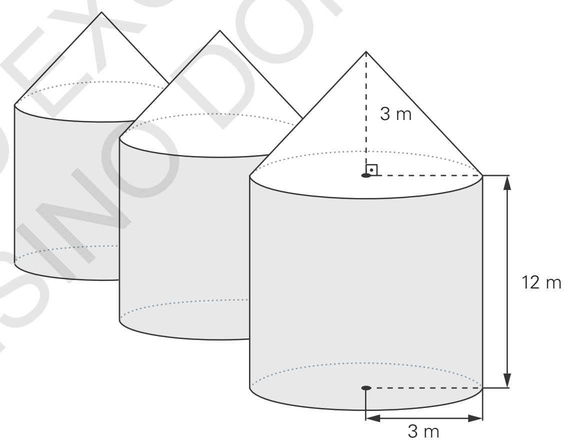
Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

a) 1,44
b) 6,00
c) 7,20
d) 8,64
e) 36,00

20. Enem C2-H9

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6.
b) 16.
c) 17.
d) 18.
e) 21.

40 ESFERAS

- Esfera

HABILIDADES

- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações--problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma para selecionar argumentos que solucionem problemas do cotidiano.
- Resolver situações--problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.

YOLANDAVANNIEKERK/ISTOCKPHOTO

Na ponta de cada caneta esferográfica há uma pequena esfera.

Introdução

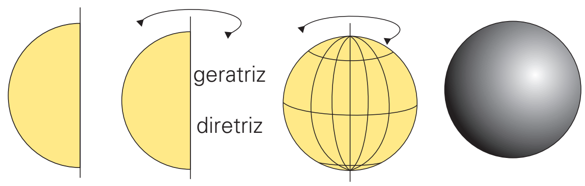
Ao observar o processo de impressão de jornais, em 1937 o húngaro Laszlo Biro teve a brilhante ideia de produzir uma caneta que não borrasse e cuja tinta não secasse nos depósitos. Auxiliado por seu irmão, o químico Georg Biro, e seu amigo Imre Gellért, um técnico industrial, Laszlo inventou uma caneta contendo uma pequena esfera na ponta e um tubo com tinta, o qual inicialmente precisava ser pressionado para se poder escrever. No entanto, ao realizarem ajustes de projeto, os três concluíram que a tinta do tubo deveria ter certa viscosidade e que a esfera de aço na ponta da caneta deveria deslizar milimetricamente. Assim, a caneta funcionaria de modo eficaz somente com a ação da gravidade, que faria a tinta ser liberada na medida correta para não borrar.

A invenção de Laszlo e seus dois ajudantes foi tão bem-sucedida que anos depois a patente foi vendida para a empresa americana Eversharp, por 2 milhões de dólares.

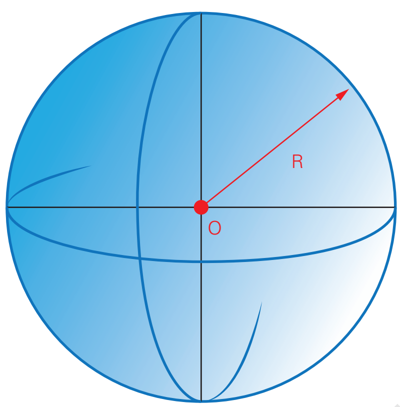
Atualmente, só no Brasil, são consumidas 700 milhões de canetas esferográficas por ano.

ESFERA

Trata-se de um sólido de revolução obtido pela rotação de um semicírculo em torno do eixo que contém o diâmetro. Assim, a esfera é um objeto tridimensional perfeitamente simétrico.

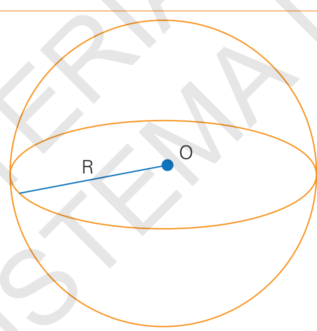


Dado um ponto **O** e uma distância **R**, denomina-se **esfera** o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias em relação ao ponto **O** sejam menores ou iguais a **R**. Assim, o ponto **O** é o centro e **R** é o raio da esfera.



SUPERFÍCIE ESFÉRICA

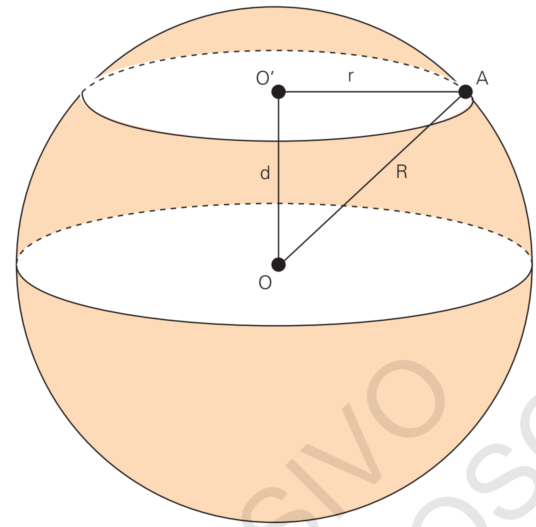
Superfície esférica de centro **O** e raio **R** é o conjunto de todos os pontos **P** do espaço, tais que a distância **OP** é igual a **R**. Ela também é a superfície gerada pela rotação da semicircunferência em torno de seu diâmetro.



SECÇÃO DA ESFERA

Quando seccionamos uma esfera com um plano, obtemos um círculo. Caso o plano passe pelo centro da esfera, o círculo obtido é denominado **círculo máximo**.

Sendo **d** a distância do plano até o centro da esfera de raio **R** ($d < R$), a secção é um círculo de raio **r,** e a relação entre **d**, **R** e **r** é dada pelo teorema de Pitágoras.

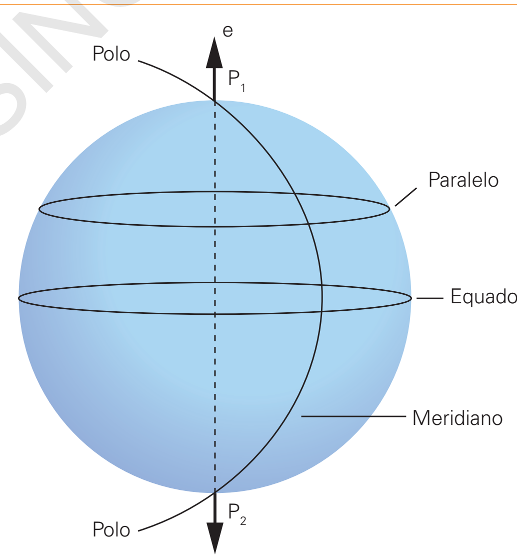


No Δ AO'O, temos:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

ELEMENTOS DE UMA ESFERA

Vamos considerar a superfície esférica de centro **O**, raio **R** e eixo e.



- **Polos –** Pontos em que o eixo intersecta a superfície da esfera.
- **Equador –** Circunferência obtida pela intersecção do plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro O com a superfície esférica.
- **Paralelo –** Circunferência obtida pela intersecção do plano perpendicular ao eixo com a superfície esférica.
- **Meridiano –** Circunferência obtida pela intersecção do plano que contém o eixo com a superfície esférica.

VOLUME

O volume da esfera é dado por:

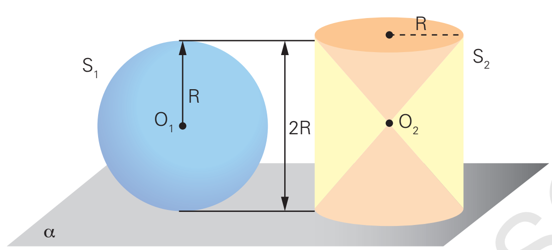
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Demonstração:

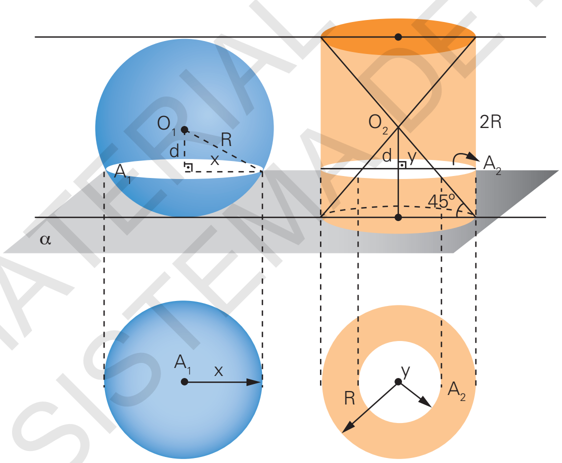
Vamos considerar dois sólidos S_1 e S_2 apoiados no mesmo plano α, definidos do seguinte modo:

- sólido S_1: esfera de centro $\mathbf{O_1}$ e raio $\mathbf{R}$;
- sólido S_2: anticlepsidra de um cilindro equilátero de centro $\mathbf{O_2}$ e raio $\mathbf{R}$.

Ao eliminarmos dois cones com bases nas bases do cilindro e com vértice no centro do cilindro, obtemos um sólido geométrico denominado **anticlepsidra**. Já o sólido formado pelos dois cones delimitados recebe o nome de **clepsidra**.



A secção de S_1 e S_2 por um plano paralelo a α à distância de O_1 e O_2 forma as áreas A_1 e A_2 dessas secções.



Analisando as figuras, obtemos:

$x^2 + d^2 = R^2 \rightarrow \quad x^2 = R^2 - d^2$

$A_1 = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2)$

$y = d$

$A_2 = \pi \cdot (R^2 - y^2) = \pi \cdot (R^2 - d^2)$

Observação:

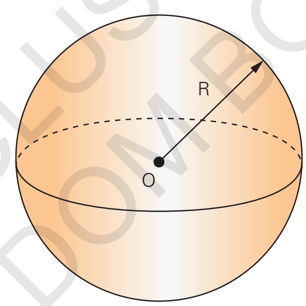
As áreas A_1 e A_2 serão sempre iguais, independentemente da distância $d < R$. Assim, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que seus volumes são iguais.

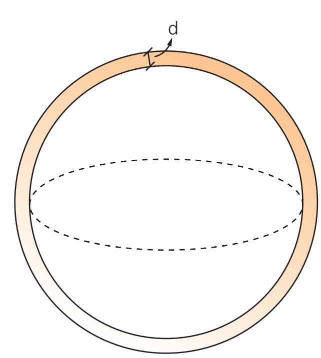
Então, o volume da esfera é igual à diferença entre o volume do cilindro e dos dois cones:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R = 2\pi \cdot R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

O lugar geométrico dos pontos do espaço que estão sempre à mesma distância **R** de um ponto fixo **O** é denominado **superfície esférica**.



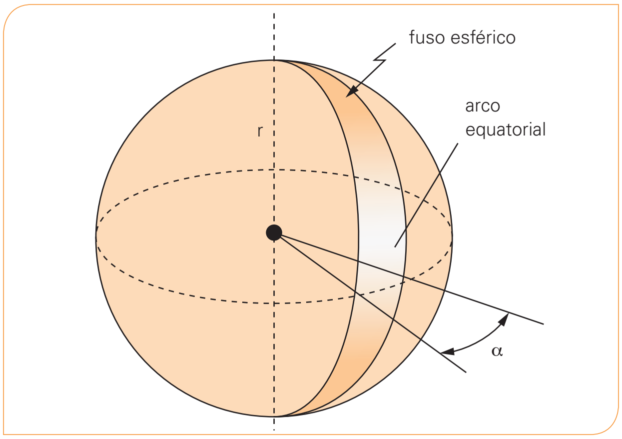


Por meio do volume da esfera e do volume de uma casca esférica de espessura d, é possível demonstrar que a área da superfície esférica é dada por:

$$A = 4\pi \cdot R^2$$

FUSO ESFÉRICO

Recebe esse nome a parte da superfície esférica limitada por dois planos que contenham um diâmetro. O fuso esférico é caracterizado pelo ângulo α medido na secção equatorial.



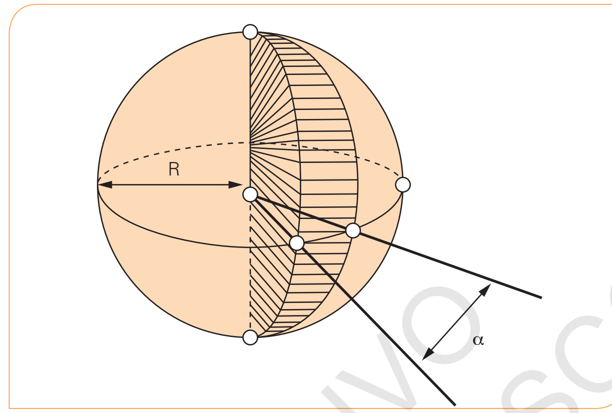
A área do fuso é proporcional à medida do ângulo α.

$$A_{fuso} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 4\pi R^2 \text{ (α em graus)}$$

$$A_{fuso} = \alpha \cdot 2R^2 \text{ (α em radianos)}$$

CUNHA ESFÉRICA

É assim chamada a parte da esfera limitada por dois planos que contenham o diâmetro. A cunha esférica é caracterizada pelo ângulo α medido na secção equatorial.



O volume do fuso é proporcional à medida do ângulo α.

$$V_{cunha} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \text{ (α em graus)}$$

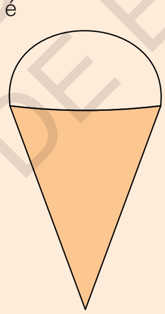
$$V_{cunha} = \alpha \cdot \frac{2R^3}{3} \text{ (α em radianos)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Uern – A figura representa um sorvete de casquinha, no qual todo o volume interno está preenchido por sorvete e a parte externa apresenta um volume de meia bola de sorvete.

Considerando que o cone tem 12 cm de altura e raio 6 cm, então o volume total de sorvete é

a) 216π cm³
b) 360π cm³
c) 288π cm³
d) 264π cm³



Resolução

Dados:

R = 6 cm; h = 12 cm

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot R^3 =$$
$$= \frac{2}{3} \pi \cdot 6^3 = 144\pi$$

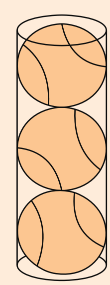
$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 144\pi$$

Logo, o volume total de sorvete é dado pela soma entre os volumes da semiesfera e do cone.

$$V = 144\pi + 144\pi \therefore V = 288\,\pi \text{ cm}^3$$

2. FGV-RJ – Em uma lata cilíndrica fechada de volume 5 175 cm³, cabem exatamente três bolas de tênis.

a) Calcule o volume da lata não ocupado pelas bolas.
b) Qual é a razão entre o volume das três bolas e o volume da lata?



Resolução

a) O raio de cada bola corresponde ao raio do cilindro R. A altura do cilindro h é igual à altura das três bolas: h = 6R.

Logo, o volume do cilindro é:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot h$$

$$\pi R^2 \cdot 6R = 5\,175 \rightarrow R^3 = \frac{5\,175}{6 \cdot \pi} \therefore R^3 = \frac{1\,725}{2\pi}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

$$\frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1\,725}{2\pi} = \frac{6\,900}{3} = 1\,150 \text{ cm}^3$$

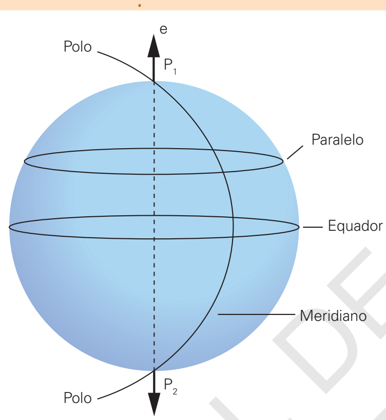
Logo, como o cilindro tem 3 bolinhas, o espaço vazio é:

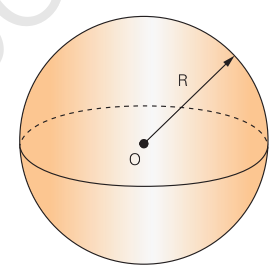
$$5\,175 - 3 \cdot 1\,150 = 5\,175 - 3\,450 = 1\,725 \text{ cm}^3$$

b) $\frac{V_{bolinhas}}{V_{latas}} = \frac{3\,450}{5\,175} = \frac{2}{3}$

ESFERA

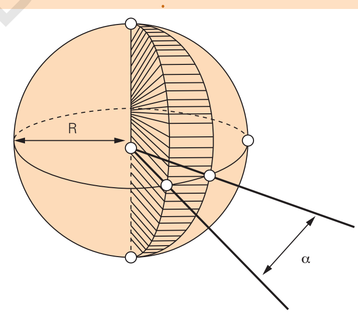
A esfera é um ______sólido de revolução______ obtido através da rotação de um ______semicírculo______ em torno do eixo que contém o diâmetro, sendo um objeto tridimensional perfeitamente simétrico.





$V =$ ______$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$______

$A =$ ______$4\pi \cdot R^2$______



$V_{cunha} =$ ______$\frac{\alpha}{360°} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$______ (α em graus)

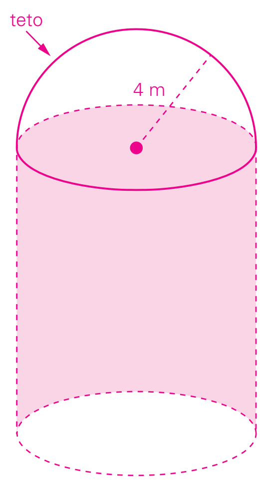
$V_{cunha} =$ ______$\alpha \cdot \frac{2R^3}{3}$______ (α em radianos)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEG-GO (adaptado) – Deseja-se construir um reservatório cilíndrico circular reto com 8 metros de diâmetro e teto no formato de hemisfério. Sabendo-se que a empresa responsável por construir o teto cobra R$ 300,00 por m², qual o valor para construir esse teto esférico?

Use $\pi = 3,1$

De acordo com enunciado, temos:



O teto do reservatório tem formato semicircular de raio 4 m. Logo, sua área é:

$A = \dfrac{4\pi \cdot 4^2}{2} = 32 \cdot \pi \cong 32 \cdot 3,1 \cong 99,2\ m^2$

Calculando o valor a ser pago pela construção do teto, obtemos:

99,2 · R$ 300,00 = R$ 29.760,00

2. Enem C2-H9

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

a) 168
b) 304
c) 306
d) 378
e) 514

$R_1 = 5$ mm; $h = 10$ mm

$V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R_1^3 + \pi R_1^2 h = \dfrac{4}{3} \cdot 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 10 = 500 + 750 = 1\,250\ mm^3$

$R_2 = 4$ mm

$V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R_2^3 + \pi R_2^2 h = \dfrac{4}{3} \cdot 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 10 = 256 + 480 = 736\ mm^3$

A redução do volume é:

$V_1 - V_2 = 1\,250 - 736 = 514\ mm^3$

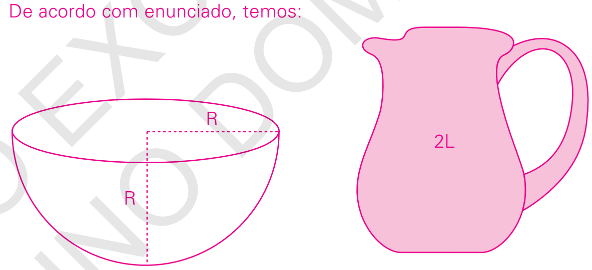
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

3. UFRGS – Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm, que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

De acordo com enunciado, temos:



2 litros = 2 000 cm³

Volume de uma semiesfera: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4R^3}{3} = \dfrac{2R^3}{3}$

$\dfrac{2R^3}{3} = 2\,000 \rightarrow R^3 = \dfrac{3\,000}{\pi} \cong \dfrac{3\,000}{3} \rightarrow R^3 \cong 1\,000 \therefore R \cong 10$ cm

4. Unicamp – Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a R, tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio

a) 2R
b) $\sqrt{3}$R
c) $\sqrt{2}$R
d) R

$A_{cilindro} = 2\pi R^2 \cdot 2\pi R \cdot R = 2\pi R \cdot (R + R) = 4\pi R^2$

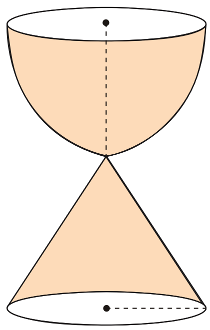
$A_{esfera} = 4\pi r^2$

$A_{esfera} = A_{cilindro}$

$4\pi r^2 = 4\pi R^2$

$r = R$

5. Cefet – Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura abaixo.



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto, o volume de areia, em cm³, é

a) 16π
b) $\frac{64\pi}{3}$
c) 32π
d) $\frac{128\pi}{3}$
e) 64π

$V = V_{semiesfera} + V_{cone} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 4\right) = 64\pi$

$V_{areia} = 0{,}25\,V = 0{,}25\cdot 64\pi = 16\pi\ cm^3$

6. EFOMM (adaptado) – Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A, ambos com a mesma área de superfície. Qual a razão entre o volume do cubo e o volume da esfera?

$A_{cubo} = A_{esfera}$

$6A^2 = 4\pi R^2 \rightarrow A^2 = \frac{2\pi R^2}{3} \rightarrow A = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\cdot R$

Comparando os volumes, temos:

$\frac{V_C}{V_E} = \frac{A^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}R\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. EEAr-SP – Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de 6 m de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende 3 m² por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, _____ litros de tinta. (Considere $\pi \cong 3$)

a) 18
b) 24
c) 36
d) 48

8. Enem C2H9

Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$ cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

a) 2R
b) 4R
c) 6R
d) 9R
e) 12R

9. UEG-GO – Uma laranja com formato esférico e com 6 cm de diâmetro foi descascada até a sua metade. Considerando-se esses dados, verifica-se que a área total da casca retirada da laranja é de aproximadamente (use $\pi = 3{,}14$).

a) 48 cm²
b) 57 cm²
c) 74 cm²
d) 95 cm²

10. UFRGS (adaptado) – Fundindo três esferas idênticas e maciças de diâmetro 2 cm, obtém-se uma única esfera com qual raio?

11. UFU-MG – Um recipiente, no formato de um cilindro circular reto de raio de base r cm, possui um líquido solvente em seu interior. A altura h desse solvente presente no recipiente é igual a $\frac{16}{3}$ cm, conforme ilustra a Figura 1.

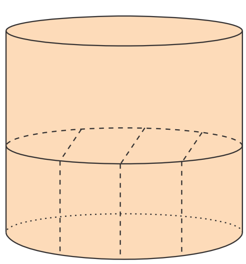


Figura 1
(Ilustrativa e sem escalas)

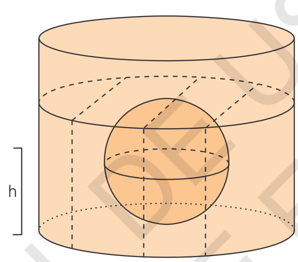


Figura 2
(Ilustrativa e sem escalas)

Quando uma peça maciça, no formato de uma esfera de raio igual a 3 cm, é mergulhada nesse recipiente até encostar no fundo, observa-se que o solvente cobre exatamente a esfera, conforme ilustra a Figura 2.

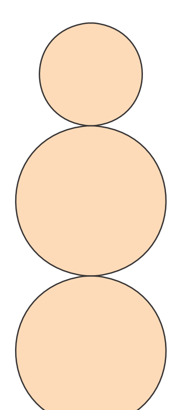
Segundo as condições apresentadas, o raio r, em cm, é igual a

a) $4\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{7}$ **c)** $5\sqrt{2}$ **d)** $3\sqrt{6}$

12. PUC-SP – O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm³, é

a) $42\sqrt{2}\pi$ **b)** $36\sqrt{3}\pi$ **c)** $32\sqrt{2}\pi$ **d)** $24\sqrt{3}\pi$

13. UFJF-MG – João é um menino que gosta muito do Natal. Sabendo disso seu pai resolveu fazer um globo de neve com um boneco de neve dentro. Como materiais, seu pai usou um cilindro circular reto de vidro com 20 cm de altura e com tampa e fundo de 8 cm de diâmetro, duas esferas de isopor de mesmo tamanho e uma terceira esfera com um tamanho menor. O boneco foi construído de acordo com a figura abaixo. Após colocar o boneco no interior do cilindro, o globo foi preenchido completamente com 712 cm³ de um líquido apropriado, de maneira que o vidro ficou sem bolhas de ar. (Utilize $\pi \cong 3$).



a) Calcule o volume do boneco de Neve.

b) Sabendo-se que a razão entre a área da esfera de isopor menor e a área da esfera de isopor maior é $\frac{4}{9}$ e que, na estrutura do boneco, os centros das esferas estão perfeitamente alinhados, calcule a altura do boneco de neve.

14. Fuvest (adaptado)

ALOISIO MAURICIO/FOTOARENA

Relógio Solar é um projeto de Caetano Fraccaroll, executado por Vera Pallamin

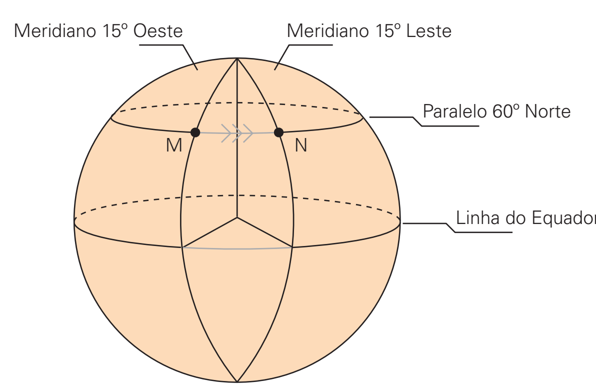
Esta foto é do relógio solar localizado no *campus* do Butantã, da USP. A linha inclinada (tracejada na foto), cuja projeção ao chão pelos raios solares indica a hora, é paralela ao eixo de rotação da Terra. Sendo μ e ρ, respectivamente, a latitude e a longitude do local, medidas em graus, pode-se afirmar, corretamente, que a medida em graus do ângulo que essa linha faz com o plano horizontal é igual a

Nota:

Entende-se por "plano horizontal", em um ponto da superfície terrestre, o plano perpendicular à reta que passa por esse ponto e pelo centro da Terra.

a) ρ
b) μ
c) $90 - \rho$
d) $90 - \mu$
e) $180 - \rho$

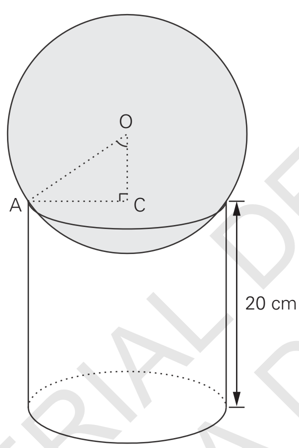
15. Unesp – Observe a figura da representação dos pontos M e N sobre a superfície da Terra.



Considerando a Terra uma esfera de raio 6 400 km e adotando $\pi = 3$, para ir do ponto M ao ponto N, pela superfície da Terra e no sentido indicado pelas setas vermelhas, a distância percorrida sobre o paralelo 60° Norte será igual a

a) 2 100 km
b) 1 600 km
c) 2 700 km
d) 1 800 km
e) 1 200 km

16. FGV (adaptado) – Uma bola de vidro que é uma esfera de centro O se encaixou num copo exatamente como mostra a figura. O raio da bola mede 13 cm e OC = 5 cm. O segmento $\overline{AC}$ é o raio do cilindro. O que tem o maior volume: a bola ou o copo?



17. Esc. Naval – Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de 60° com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{\frac{1}{6}}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$ **b)** $\frac{81\pi}{8}$ **c)** $\frac{8\pi}{81}$ **d)** $\frac{8\pi}{27}$ **e)** $\frac{81}{8\pi}$

18. Enem C2-H6

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

CHEN WS/SHUTTERSTOCK

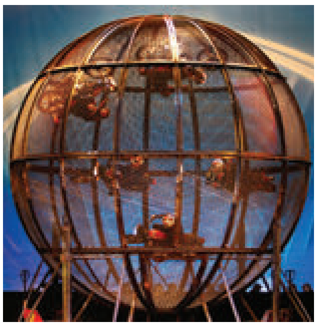


Figura 1

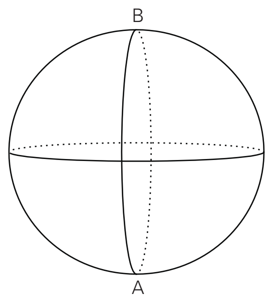


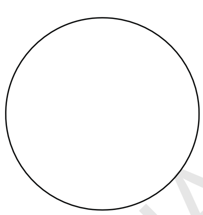
Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

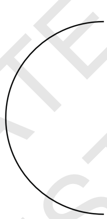
Disponível em: <www.baixaki.com.br>. Acesso em: 29 fev. 2012.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

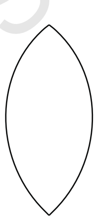
a)



b)



c)



d)

e)

19. Enem C2-H9

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

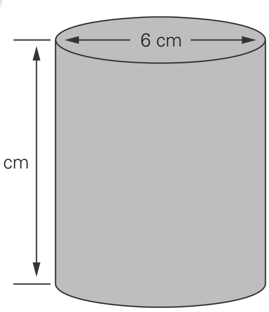


Figura 1

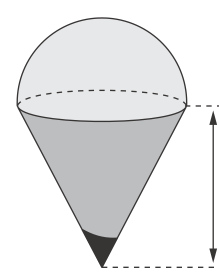


Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

a) 45 **b)** 48 **c)** 72 **d)** 90 **e)** 99

20. Enem C2-H8

A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada.

A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.

BLEEX/ISTOCKPHOTO

Figura 1

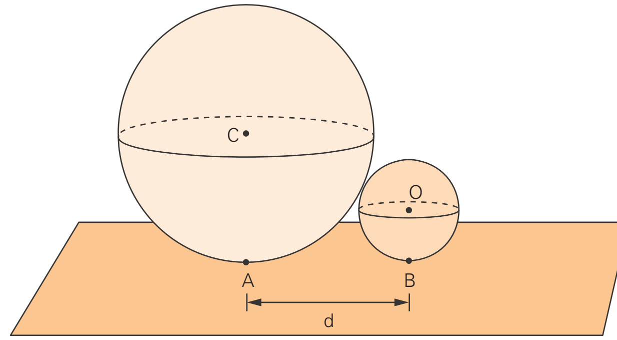


Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d.

Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

a) 1

b) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

d) 2

e) $\sqrt{10}$

ESTATÍSTICA - ANÁLISE DE DADOS I

41

- Variáveis
- Tabelas de frequência
- Representações gráficas

HABILIDADES

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursos para a construção de argumentos.

PALÊ ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é oficialmente o responsável pelo levantamento de dados estatísticos no território brasileiro.

Introdução

A responsabilidade do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é obter informações a fim de produzir conhecimentos sobre a realidade brasileira e promover a cidadania em nosso país. Desde sua fundação, em 29 de maio de 1936, o IBGE identifica e analisa o território brasileiro, contabiliza a população, estuda a economia, os processos de produção e trabalho e as características gerais da vida dos brasileiros.

Em resumo, esse instituto tem grande importância para organizar e planejar ações a serem realizadas para melhorar nossas vidas.

VARIÁVEIS

Em pesquisas, é importante inicialmente conhecer o **conjunto universo** ou a **população** (pessoas ou objetos que tenham em comum a característica pesquisada). Geralmente a totalidade do grupo a ser analisado é grande, o que torna o custo dessa operação inviável. Por isso é definida o que se chama de **amostra**, que nada mais é que uma parcela do grupo a ser pesquisado.

Vamos analisar o caso a seguir.

Exemplo

Uma pesquisa recente na cidade de Dracena (SP) revelou dados interessantes. Foram feitas as três seguintes perguntas a 20 alunos do 3º ano do Ensino Médio de um colégio particular da região central da cidade:

1. Qual sua idade?
2. Qual sua altura?
3. Qual a área do curso para que você pretende prestar vestibular?

Os resultados foram compilados em uma tabela.

Idade	Altura	Área do curso pretendido
17	1,56	Humanas
17	1,65	Saúde
18	1,72	Exatas
16	1,60	Exatas
17	1,70	Humanas
18	1,72	Exatas
19	1,58	Exatas
17	1,74	Biológicas
17	1,58	Tecnológicas
18	1,56	Saúde
17	1,73	Exatas
17	1,74	Humanas
18	1,74	Exatas
17	1,61	Tecnológicas
19	1,71	Exatas
17	1,70	Biológicas
17	1,59	Exatas
16	1,69	Biológicas
17	1,65	Tecnológicas
17	1,68	Saúde

Entre as **variáveis** (nome dado a cada item de uma pesquisa) "idade", "altura" e "área do curso pretendido", as duas primeiras são **variáveis quantitativas**, porque podem ser expressas por números. Ou seja, são mensuráveis. Por outro lado, a variável "área do curso pretendido" tem como resposta uma preferência do entrevistado. Por esse motivo é chamada **variável qualitativa**.

TABELAS DE FREQUÊNCIA

Organizar dados estatísticos em **tabelas de frequência** possibilita a leitura rápida e resumida dos resultados obtidos em uma pesquisa.

Vamos analisar os dois tipos de tabelas de frequência.

FREQUÊNCIA ABSOLUTA

Na construção de uma tabela, precisamos nos atentar para o fato de que cada variável em questão é citada certo número de vezes. Isso corresponde à **frequência absoluta**, representada por **Fa**.

Considerando o exemplo anterior, podemos construir a seguinte tabela:

Idade	Frequência (Fa)
16	2
17	12
18	4
19	2

Observação:

A soma das frequências absolutas deve ser igual ao número total de entrevistados (2 + 12 + 4 + 2 = 20).

FREQUÊNCIA RELATIVA

Define-se **frequência relativa** (Fr) como a razão entre a frequência absoluta (Fa) e o número total de dados (n):

$$Fr = \frac{Fa}{n}$$

A frequência relativa é representada em porcentagem. Para isso, basta multiplicar o resultado da divisão por 100.

Vamos observar a tabela de frequência completa, novamente considerando a pesquisa realizada entre os alunos do colégio na cidade de Dracena.

Idade	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem (%)
16	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
17	12	$\frac{12}{20} = 0,6$	60
18	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20
19	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10
Total	**20**	**1**	**100**

Do modo semelhante, podemos elaborar a tabela de frequência referente à variável "altura". Nesse caso, os valores praticamente não se repetem, e a margem de dispersão é grande. Por isso é possível representarmos os valores por intervalos ou classes.

Altura	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem (%)
$155 \vdash 160$	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25
$160 \vdash 165$	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	10
$165 \vdash 170$	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	20
$170 \vdash 175$	9	$\frac{9}{20} = 0{,}45$	45
Total	**20**	**1**	**100**

Saiba mais

A amplitude da classe $a \vdash b$ é dada pela diferença $b - a$. No exemplo citado, a amplitude de cada classe é 5.

Essa escolha é geralmente definida pelo desenvolvedor da pesquisa, de acordo com a necessidade. Desse modo, a classe pode assumir valor diferenciado para o mesmo experimento.

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Há vários tipos de representação gráfica na Estatística. Elas constituem um recurso importantíssimo para resumir, analisar e interpretar os dados de uma pesquisa. Por esse motivo, os gráficos estão presentes diariamente nos meios de comunicação.

Vamos analisar algumas situações e os respectivos detalhes do processo de construção, interpretação e análise de gráficos.


RIDOFRANZ/ISTOCKPHOTO


FILMFOTO/ISTOCKPHOTO


THIAGONORI/ISTOCKPHOTO

GRÁFICO DE SETORES

É empregado para ressaltar a participação do dado no total, o qual é expresso pelo círculo, cujas divisões representam cada parte que compõe essa totalidade. Cada setor tem área proporcional aos dados da série.

O gráfico de setores é usado quando existem, no máximo, sete dados a serem apresentados.

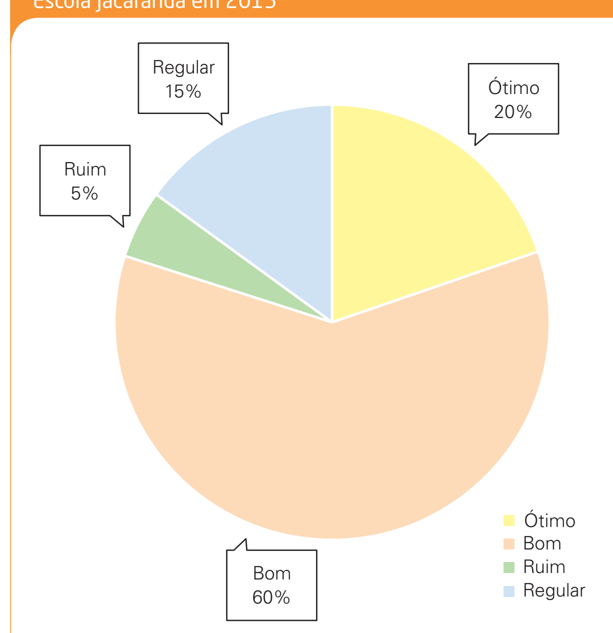
Vamos acompanhar o caso a seguir.

Exemplo

Em 2015, uma pesquisa realizada com um grupo de alunos perguntou sobre a nova alimentação oferecida pela lanchonete da Escola Jacarandá.

Os dados foram organizados e expressos em um gráfico de setores:

Nova alimentação oferecida pela lanchonete da Escola Jacarandá em 2015



Podemos observar que o círculo ficou dividido em quatro partes – ou seja, quatro setores circulares. As medidas de cada parte são ângulos proporcionais às frequências correspondentes.

É possível obtermos as medidas por meio da proporção:

Bom
100% —— 360°
60% —— x
→ x = 216°

Ótimo
100% —— 360°
20% —— y
→ y = 72°

Regular
100% —— 360°
15% —— z
→ z = 54°

Ruim
100% —— 360°
5% —— w
→ w = 18°

Como podemos notar, a soma dos ângulos é $x + y + z + w = 360°$.

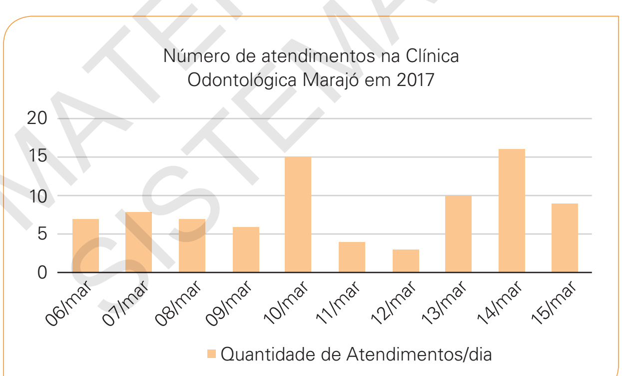
GRÁFICO DE BARRAS

Quando as legendas não são breves, a preferência é pelo gráfico de barras horizontais ou verticais, cujos retângulos têm mesma base e altura proporcional aos respectivos dados. Podemos observar a ordem cronológica na série histórica e a decrescente na série geográfica ou categórica.

Vamos analisar os casos a seguir.

Exemplo 1

O gráfico na sequência considera a quantidade de pessoas atendidas na Clínica Odontológica Marajó. Durante dez dias seguidos do ano de 2017, ela funcionou 24 horas, em sistema de plantão.



Fonte: Arquivo da Clínica Odontológica Marajó.

O número de atendimentos é representado pela coluna vermelha. E os valores de cada dia são proporcionais à altura das colunas.

Note que o período (cronológico) apresentado se inicia em uma segunda-feira (06/03) e encerra em uma quarta-feira (15/03).

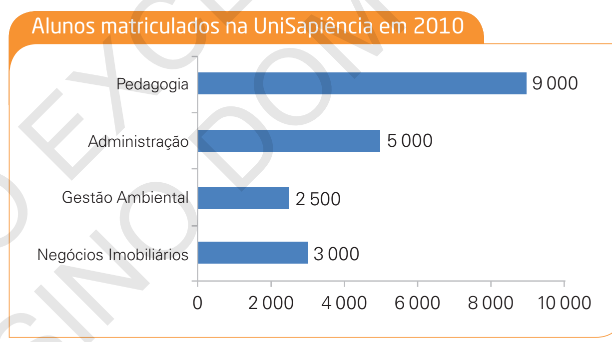
De acordo com o gráfico, podemos saber outras informações:

- o período considerado é de 10 dias.
- no dia 14/03, o número de atendimentos atingiu o maior valor (16 atendimentos).
- entre 06/03 e 09/03, o número de atendimentos praticamente se manteve constante.
- em 12/03, ocorreu a menor quantidade de atendimentos no período (3 atendimentos).

Exemplo 2

Um levantamento de dados realizado na universidade UniSapiência (instituição que tem a maioria de seus cursos na área de Educação e Negócios) apresentou a quantidade de alunos matriculados em seus principais cursos.

Observe o gráfico:



Fonte: Dados fictícios.

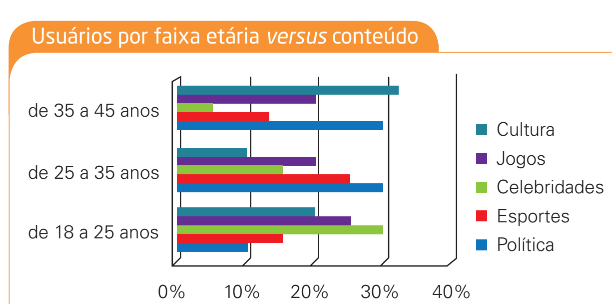
Segundo o gráfico:

- o curso com a maior quantidade de alunos matriculados é Pedagogia;
- os quatro cursos que se destacaram quanto ao número de estudantes matriculados somam $9\,000 + 5\,000 + 2\,500 + 3\,000 = 19\,500$ alunos.

Exemplo 3

Certos dados estatísticos apresentam a relação dos conteúdos consumidos por determinados usuários em função de faixa etária nas buscas realizadas na internet em determinado período do ano.

Observe que o gráfico apresenta três faixas etárias e se resume à pesquisa com um público entre 18 e 45 anos.



De acordo com o gráfico:

- na faixa etária mais jovem (18 a 25 anos) prevalece o interesse pelo assunto "Celebridade", com quase 30% das indicações.
- já na faixa etária de 25 a 35 anos, destaca-se o interesse pelo assunto "Política", com quase 30% das indicações.
- já na faixa etária de 35 a 45 anos, há um equilíbrio entre os temas "Cultura" (pouco mais de 30%) e "Política" (próximo a 30%). Observe que o tema "Celebridade", que foi o destaque positivo na faixa etária (18 a 25 anos), teve o menor percentual entre a faixa etária mais velha da pesquisa (por volta de 5%).

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Uma pesquisa sobre o lazer preferido de 100 funcionários de uma empresa apresentou o seguinte resultado:

Lazer	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem (%)
Esporte	x	0,3	30
Música	20	y	20
Internet	20	0,2	z
Leitura	10	m	10
Outros	n	0,2	p
Total	**100**	**1,0**	**100**

Quais os valores de x, y, m, n, p e z?

Resolução

Para determinar os valores, basta relacionarmos as três colunas, linha por linha.

Para determinar o valor de x, aplicamos regra de três simples direta.

100 ________________ 100%

x ________________ 30% → x = 30

Para determinar o valor de y, seguimos a mesma lógica de x.

1,0 ________________ 100%

y ________________ 20% → y = 0,2

Para determinar m, comparamos ao valor de y.

20 ________________ 0,2

10 ________________ m → m = 0,1

Para determinar n, p e z, seguimos a mesma lógica.

n = 20

p = 20

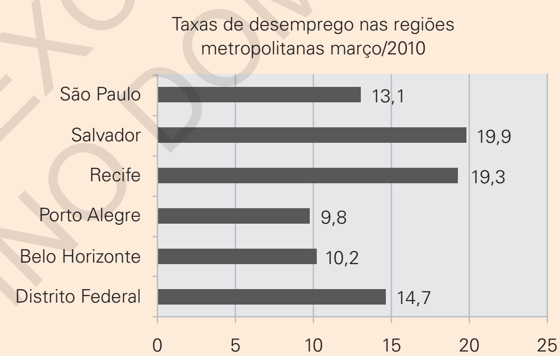
z = 20

Censo (ou recenseamento demográfico) é um levantamento estatístico referente à população. Com ele é possível analisar várias informações, como número de homens, mulheres, crianças, idosos; onde e como vivem as pessoas, entre tantos outros dados importantes.

A maioria dos países realiza esse estudo de dez em dez anos. Para saber mais sobre o assunto, acesse <www.ibge.gov.br>.

2. Enem **C6-H26**

Pesquisa realizada apresenta a taxa de desemprego nas regiões metropolitanas em março/2010. Eis os resultados no gráfico a seguir: (%)



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010. (Adaptado.)

A partir do exposto, qual a média aritmética das taxas de desemprego apresentadas (em %)?

a) 15,2
b) 19,3
c) 9,8
d) 16,1
e) 17,4

Resolução

Somamos os valores expressos no gráfico e os dividimos por cinco (n = 5).

Assim:

Média = (13,1 + 19,9 + 19,3 + 9,8 + 10,2 + 14,7) : 5

87 : 5 = 17,4%

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

ROTEIRO DE AULA

ESTATÍSTICA: ANÁLISE DE DADOS I

Variável:
Quantitativa
Qualitativa

Frequência:
Absoluta
Relativa

Representações gráficas

Gráfico de setores

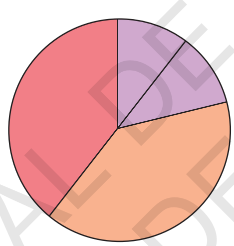
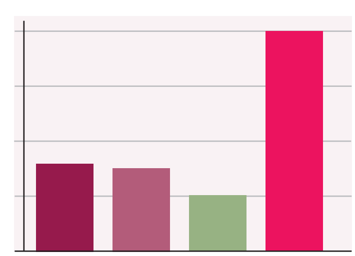
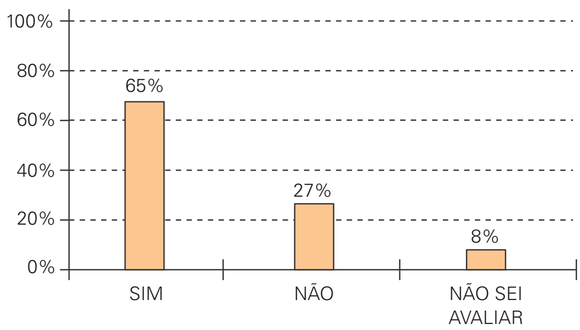


Gráfico de barra



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio (adaptado) – Em uma pesquisa, realizada em janeiro de 2015, perguntava-se aos internautas se eles acreditavam que a reciclagem de lixo era importante para o meio ambiente. Eram 3 alternativas possíveis, e 4 600 internautas responderam, como mostra o gráfico abaixo.



Quantas pessoas responderam "não sei avaliar"?

Pelo gráfico, observamos que 8% dos entrevistados não souberam avaliar.

$\frac{8}{100} \cdot 4\,600 = 368$ pessoas

2. EEAr-SP – A tabela seguinte informa a quantidade de pessoas que compraram ingressos antecipados de um determinado show, cujos preços eram modificados semanalmente.

Valor do ingresso R$	Número de pessoas
50 ⊢ 75	300
75 ⊢ 100	640
100 ⊢ 125	500
125 ⊢ 150	1310
150 ⊢ 175	850
	$\sum = 3\,600$

O percentual de pessoas que adquiriram o ingresso por menos de R$ 125,00 foi

a) 40%
b) 45%
c) 50%
d) 55%

Número de pessoas que compraram com valor abaixo de R$ 125,00:

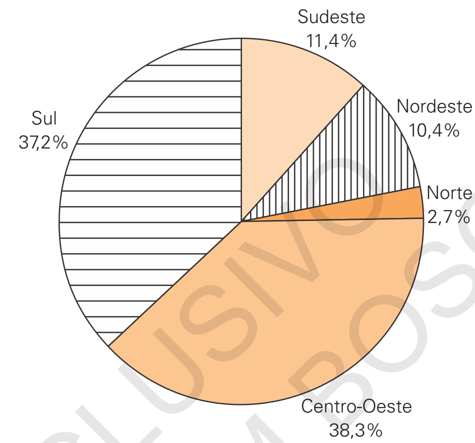
300 + 640 + 500 = 1 440

Com isso, obtemos:

$\frac{1\,440}{3\,600} \cdot 100\% = 40\%$

3. Enem C6-H25

Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 3 jul. 2012.

De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

a) 10,3
b) 11,4
c) 13,6
d) 16,5
e) 18,1

O total, em milhões de toneladas, da safra nacional de cereais (oleaginosas e leguminosas em 2012) corresponde a x.

Centro-Oeste (38,3%) e Sul (37,2%) são os maiores produtores. Logo:

$(0,383 + 0,372) \cdot x = 119,9$

$0,755 \cdot x = 119,9 \rightarrow x = \frac{119,9}{0,755} \therefore x = 158,8$ milhões

Como o objetivo é calcular a produção no Sudeste (11,4%), obtemos:

$0,114 \cdot 158,8 = 18,1$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

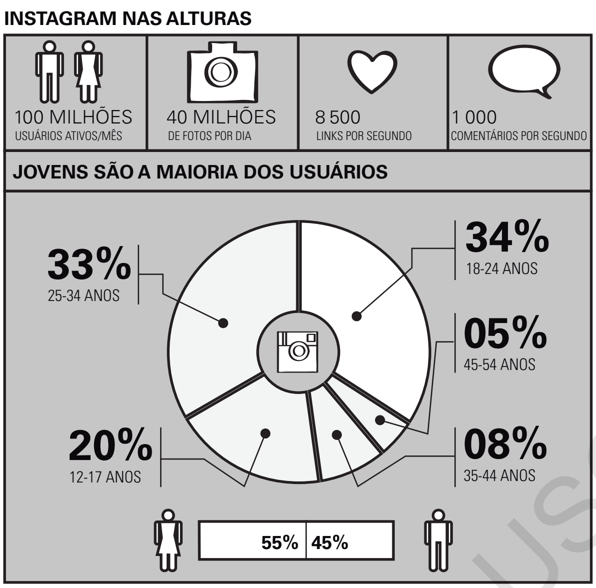
Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. UPE (adaptado)

O Instagram é uma rede social, lançada em outubro de 2010. Nela, é possível o compartilhamento de fotos e vídeos que permitem aos seus usuários aplicar filtros digitais e inseri-los em uma variedade de outras redes sociais, como o Facebook e o Twitter, por exemplo. Esse serviço rapidamente ganhou popularidade e já possui 100 milhões de usuários ativos.

Disponível em: <http://blog.instagram.com>. Acesso em: 3 ago. 2015. (Adaptado.)

Com base nessas informações, analise o infográfico a seguir:



No momento da pesquisa, de acordo com esse infográfico, analise as afirmativas a seguir:

I. O número de usuários do sexo masculino representava $\frac{9}{20}$ do total de usuários ativos/mês.

II. Por ser a maioria dos usuários jovens, eram considerados jovens no Instagram apenas as pessoas que se encontravam na faixa etária dos 18 aos 24 anos.

III. A razão entre o número de fotos/dia e o número de ativos/mês era $\frac{2}{5}$.

IV. O número de usuários ativos/mês a partir dos 45 anos de idade era de 500 mil.

Está CORRETO o que se afirma, apenas, em

a) I e II.
b) I e III.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

I. Verdadeira, pois $\frac{9}{20} = 0,45 = 45\%$.

II. Falsa. Não há nenhuma informação no infográfico que considere pessoas jovens apenas entre 18 e 24 anos.

III. Verdadeira, pois $\frac{40\,000\,000}{100\,000\,000} = \frac{2}{5}$.

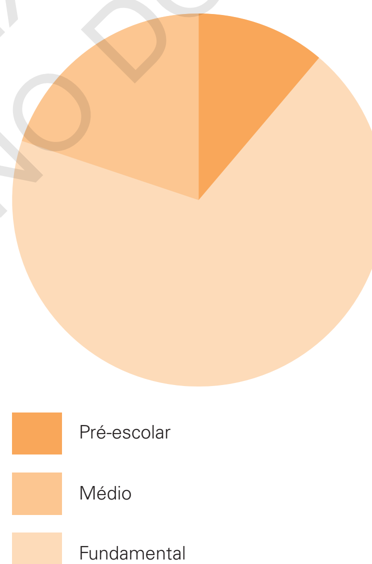
IV. Falsa, pois $5\% = \frac{5}{100} \cdot 100\,000\,000 = 5\,000\,000$.

5. PUC-RS – A matriz abaixo apresenta a distribuição das matrículas, por níveis, nas escolas de Porto Alegre.

Nível	Matrículas
Pré-escolar	25.007
Fundamental	159.162
Médio	45.255

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais - INEP - Censo Educacional, 2015.

Se esses dados forem organizados em um gráfico de setores, qual o valor do ângulo central correspondente ao nível Fundamental, aproximadamente?



Total de matrículas: 25 007 + 159 162 + 45 255 = 229 242.

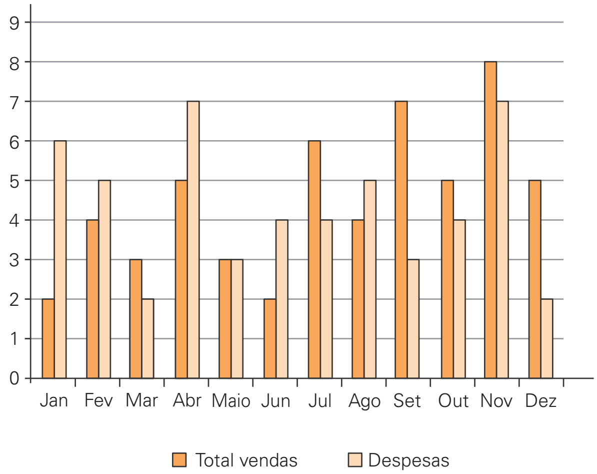
$\frac{159\,162}{229\,242} \cdot 100 = 69,4\,\%$

Por regra de três simples, já que 100% corresponde a 360°, obtemos:

$\frac{69,4}{100} \cdot 360 \cong 250$

6. Enem C6-H24

Uma empresa registrou seu desempenho em determinado ano por meio do gráfico, com dados mensais do total de vendas e despesas.



O lucro mensal é obtido pela subtração entre o total de vendas e despesas, nesta ordem.

Quais os três meses do ano em que foram registrados os maiores lucros?

a) Julho, setembro e dezembro.
b) Julho, setembro e novembro.
c) Abril, setembro e novembro.
d) Janeiro, setembro e dezembro.
e) Janeiro, abril e junho.

Pelo gráfico, observamos que houve lucro nos seguintes meses:
Março (3 – 2 = 1)
Julho (6 – 4 = 2)
Setembro (7 – 3 = 4)
Novembro (8 – 7 = 1)
Dezembro (5 – 2 = 3)
Logo, os meses de maior lucro foram julho, setembro e dezembro.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

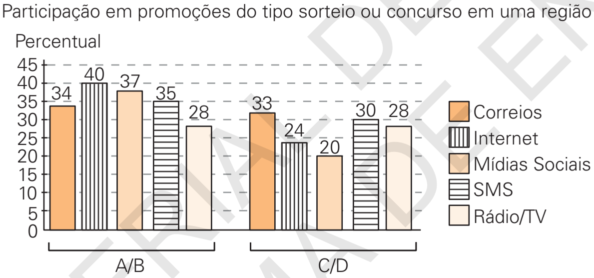
Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Enem C6-H26

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no site da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.

Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região



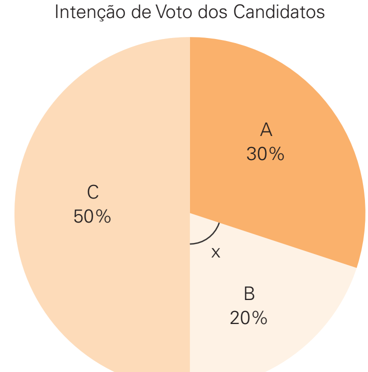
Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) correios e SMS.
b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

8. UEG-GO – Em uma eleição estão concorrendo os candidatos A, B e C. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1 000 eleitores, obteve-se o seguinte resultado, ilustrado no gráfico de setores a seguir.

Intenção de Voto dos Candidatos



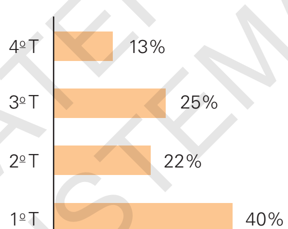
O valor do ângulo x do gráfico de setores é

a) 18 graus
b) 36 graus
c) 60 graus
d) 72 graus

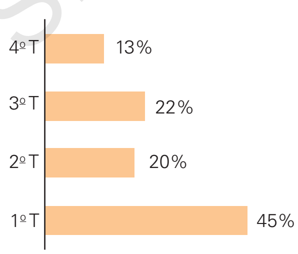
9. UFPR – O Centro de Estudos, Resposta e Tratamento de Incidentes de Segurança no Brasil (CERT.br) é responsável por tratar incidentes de segurança em computadores e redes conectadas à Internet no Brasil. A tabela abaixo apresenta o número de mensagens não solicitadas (spams) notificadas ao CERT.br no ano de 2015, por trimestre. Qual dos gráficos a seguir representa os dados dessa tabela?

Trimestre	Notificações
4º T	135 335
3º T	171 523
2º T	154 866
1º T	249 743

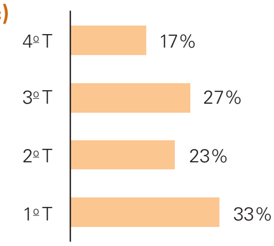
a)



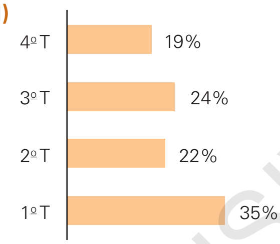
b)



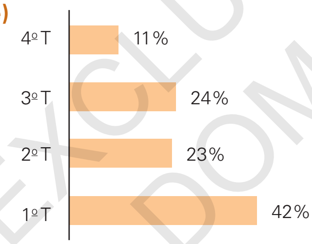
c)



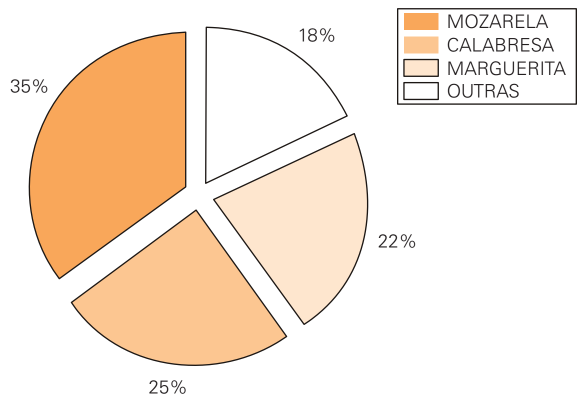
d)



e)



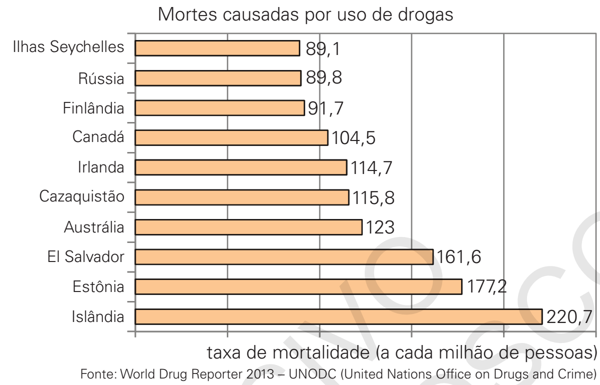
10. Unicamp – A pizza é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de pizzas, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico abaixo exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de pizza.



a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas pizzas são consumidas diariamente no Brasil?

b) Quantas pizzas de mozarela e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

11. UFG-GO – O gráfico a seguir apresenta os dez países com a maior taxa de mortalidade decorrente do uso de drogas.



Na tabela a seguir encontra-se o número estimado de mortes causadas por uso de drogas por continente.

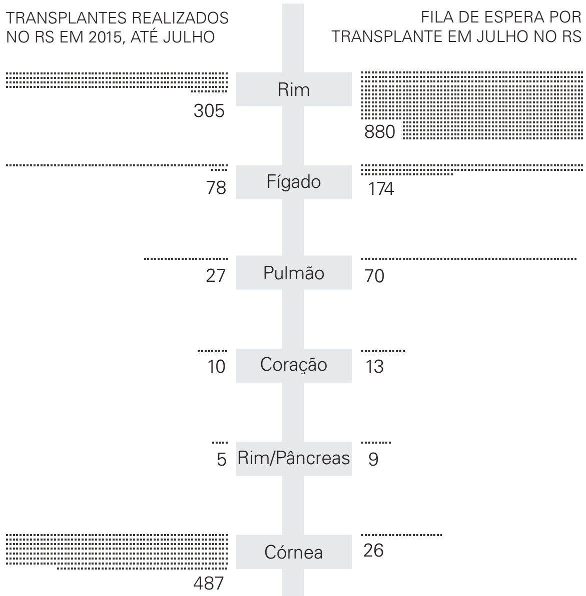
Número estimado de mortes por uso de drogas

Região	Número de mortes estimadas
África	36 435
América do Norte	47 813
América Latina e Caribe	4 756
Ásia	104 116
Europa	15 469
Oceania	1 957
Total Mundial	**210 546**

World Drug Reporter 2013 – UNODC
(United Nations Office on Drugs and Crime)

Sabendo que a população da Islândia é de 320 137 habitantes, determine o porcentual aproximado de mortes desse país em relação ao número de mortes estimadas para o continente europeu.

12. UFRGS – Observe o gráfico abaixo.



Nele está retratado o número de transplantes realizados no Rio Grande do Sul, até julho de 2015, e a quantidade de pessoas que aguardam na fila por um transplante no Estado, no mês de julho de 2015.

Assinale a alternativa que está de acordo com as informações do gráfico.

a) Mais de 50% dos transplantes realizados no RS, até julho de 2015, foram transplantes de córnea.

b) O percentual de pessoas que aguardavam transplante de pulmão em julho de 2015 era 70% do total de pessoas na fila de espera por transplantes.

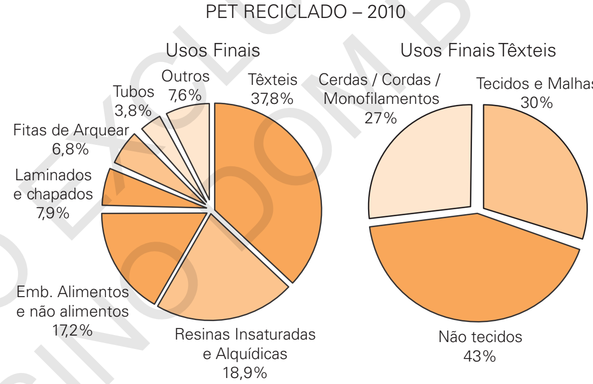
c) O transplante de fígado é o que apresenta maior diferença percentual entre o número de transplantes realizados e o número de pessoas que aguardavam transplante.

d) O número de transplantes de fígado realizados até julho de 2015 é 288% maior do que o número de transplantes de pulmão realizados no mesmo período.

e) O transplante de córneas é o que tem a menor quantidade de pessoas aguardando transplante.

13. Enem C6-H25

O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: <www.abipet.org.br>. Acesso em: 12 jul. 2012. (Adaptado.)

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

a) 16,0

b) 22,9

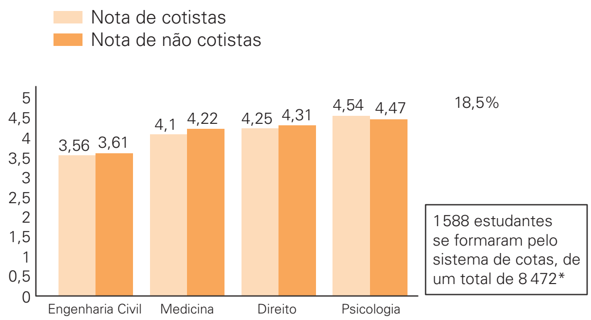
c) 32,0

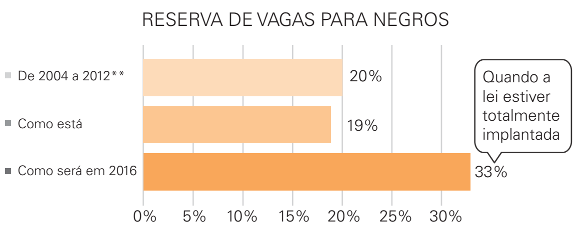
d) 84,6

e) 106,6

14. UFJF-MG – A Universidade de Brasília (UnB) foi a primeira instituição federal de ensino e pesquisa a adotar, em 2004, o sistema de cotas.

Os gráficos, a seguir, apresentam os dados de cotistas (na cor cinza) e não cotistas (na cor preta) de quatro cursos de graduação, em uma década de cotas raciais na UnB.





* Entre 2º sem/2004 e 2012 ** Antes da lei de cotas federais.

Fonte: Decanato de Ensino de Graduação

A partir dos dados apresentados nos gráficos anteriores, considere as seguintes afirmações:

I. O maior índice de rendimento acadêmico (nota) de alunos não cotistas que se formaram entre 2004 e 2012 ocorreu no curso de Psicologia.

II. A previsão para 2016 é de redução de 33% das vagas para estudantes negros.

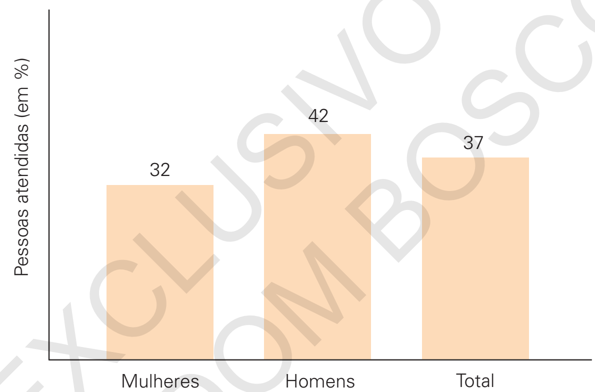
III. Verifica-se que nos cursos de Engenharia Civil, Medicina e Direito, em média, a diferença das notas entre estudantes cotistas e não cotistas é maior que 0,07.

IV. Em uma década de política de cotas na UnB, do total de estudantes que optaram por esse sistema, um em cada quatro estudantes se formou.

É **CORRETO** afirmar que:

a) Apenas I e IV são verdadeiras.
b) Apenas II e III são verdadeiras.
c) Apenas II e IV são verdadeiras.
d) Apenas I e III são verdadeiras.
e) Apenas III e IV são verdadeiras.

15. EBMSP-BA



O gráfico ilustra o número percentual de pessoas que, atendidas em um posto de saúde, em determinado período, apresentaram problemas cardíacos.

Com base nos dados do gráfico e considerando-se M o número de mulheres e H o número de homens atendidos, nesse período, é correto afirmar:

a) $H = M - 10$
b) $H = M$
c) $H = M + 5$
d) $H = M + 10$
e) $H = 2M$

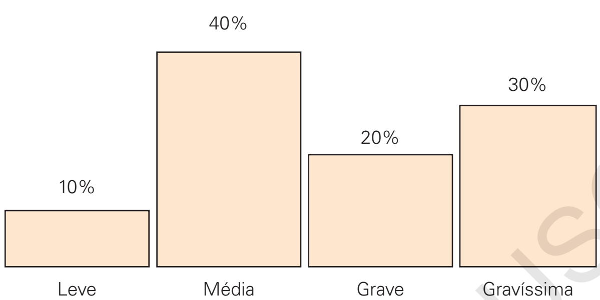
16. Unicamp – O Código de Trânsito Brasileiro classifica as infrações, de acordo com a sua natureza, em leves, médias, graves e gravíssimas. A cada tipo corresponde uma pontuação e uma multa em reais, conforme a tabela abaixo.

Infração	Pontuação	Multa*
Leve	3 pontos	R$ 53,00
Média	4 pontos	R$ 86,00
Grave	5 pontos	R$ 128,00
Gravíssima	7 pontos	R$ 192,00

* Valores arredondados

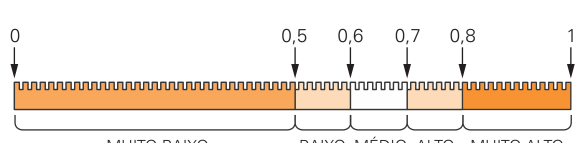
a) Um condutor acumulou 13 pontos em infrações. Determine todas as possibilidades quanto à quantidade e à natureza das infrações cometidas por esse condutor.

b) O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição de 1 000 infrações cometidas em certa cidade, conforme a sua natureza. Determine a soma das multas aplicadas.

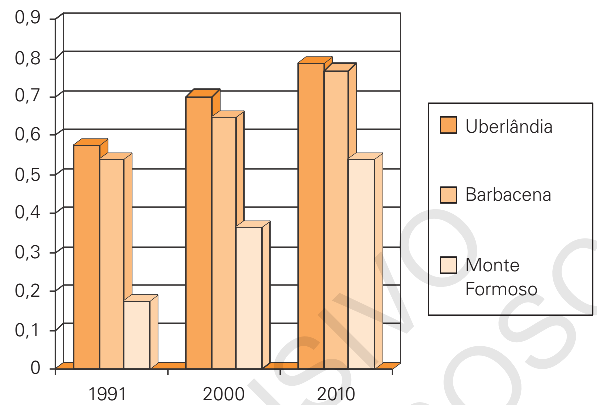


17. EPCAr-SP – No Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil 2013 constam valores do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) de todas as cidades dos estados brasileiros.

O IDHM é um número que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano de um município, conforme escala a seguir.



Abaixo estão relacionados o IDHM de duas cidades de Minas Gerais em condições extremas, Monte Formoso e Uberlândia, e uma em situação intermediária, Barbacena.



Analisando os dados acima, afirma-se que

I. o município de maior crescimento do IDHM, nos períodos considerados, é Monte Formoso.

II. na última década, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia.

III. uma tabela que relaciona cidade, época e faixa de IDHM pode ser representada corretamente como:

	Monte Formoso	Barbacena	Uberlândia
1991	Muito baixo	Baixo	Baixo
2000	Muito baixo	Alto	Alto
2010	Baixo	Alto	Alto

São corretas

a) apenas I e II

b) apenas II e III

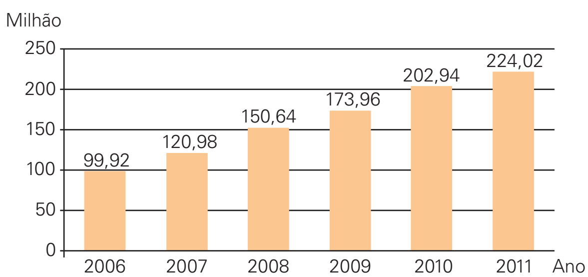
c) apenas I e III

d) I, II e III

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C6-H24

O gráfico mostra a expansão da base de assinantes de telefonia celular no Brasil, em milhões de unidades, no período de 2006 a 2011.



Disponível em: <www.guiadocelular.com>. Acesso em: 1º ago. 2012.

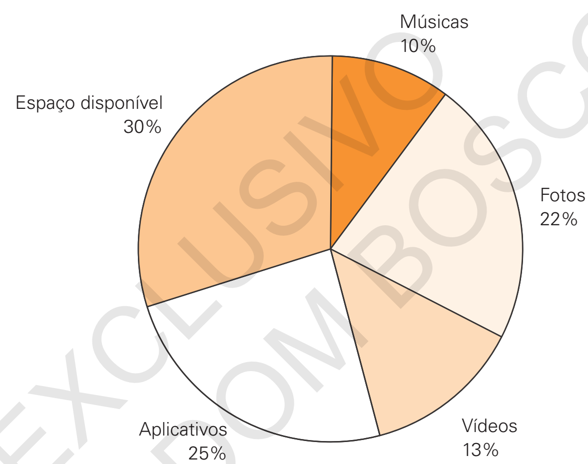
De acordo com o gráfico, a taxa de crescimento do número de aparelhos celulares no Brasil, de 2007 para 2011, foi de

a) 8,53%
b) 85,17%
c) 103,04%
d) 185,17%
e) 345,00%

19. Enem C6-H24

O cartão Micro SD é um tipo de mídia utilizada para armazenamento de dados (arquivos, fotos, filmes, músicas etc.). Um usuário tem um cartão Micro SD de 16 GB, e, utilizando seu computador, visualiza, em termos percentuais, os dados armazenados no cartão, conforme o gráfico.

Dados do cartão Micro SD de 16 GB



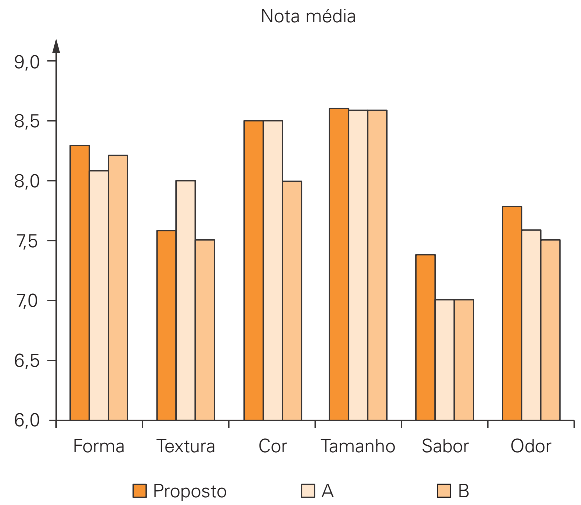
O usuário adquiriu um cartão do mesmo tipo, mas de 32 GB, com o objetivo de gravar os dados do seu cartão de 16 GB em seu novo cartão de 32 GB. No entanto, para aumentar o espaço de armazenamento disponível, decidiu não gravar suas músicas no novo cartão.

Analisando o gráfico, o espaço disponível no novo cartão de 32 GB, em termos percentuais, é igual a

a) 60.
b) 65.
c) 70.
d) 75.
e) 80.

20. Enem C6-H26

A diretoria de uma empresa de alimentos resolve apresentar para seus acionistas uma proposta de novo produto. Nessa reunião, foram apresentadas as notas médias dadas por um grupo de consumidores que experimentaram o novo produto e dois produtos similares concorrentes (A e B).



A característica que dá a maior vantagem relativa ao produto proposto e que pode ser usada, pela diretoria, para incentivar a sua produção é a

a) textura.
b) cor.
c) tamanho.
d) sabor.
e) odor.

ESTATÍSTICA - ANÁLISE DE DADOS II

42

- Representações gráficas
- Pictograma
- Histograma
- Polígono de frequência
- Gráfico de linhas ou poligonal

HABILIDADES

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas para a elaboração de argumentos.

MATEJMO/ISTOCKPHOTO

As diferentes formas de visualizar um gráfico possibilitam melhor compreensão e entendimento do tipo de análise realizada.

Introdução

Atualmente a Estatística é vista como uma ciência capaz de obter, sintetizar, prever e fazer inferências sobre informações. O termo tem origem na palavra latina *status*, que significa Estado.

Existem indícios de que há mais de 5 000 anos já eram realizados censos na Babilônia, na China e no Egito. Eles eram úteis para a taxação de impostos e o alistamento militar. A partir do século XVII, a Estatística passou a ser considerada uma disciplina autônoma, tendo como objetivo descrever os bens do Estado.

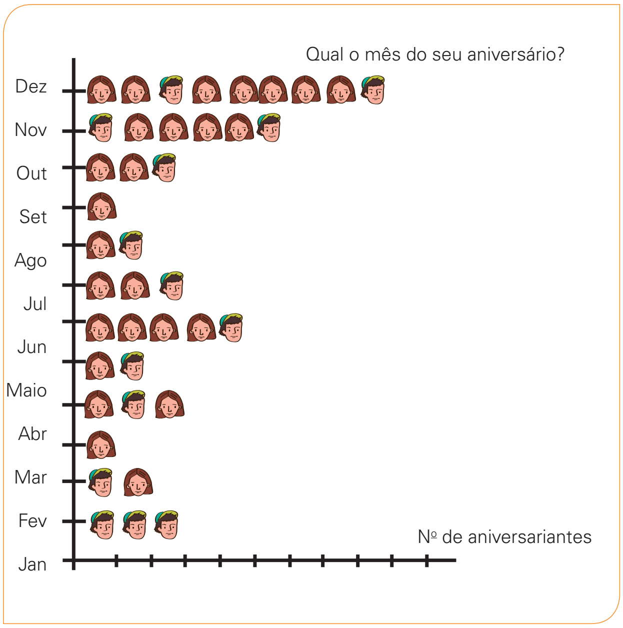
REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

PICTOGRAMA

Trata-se de uma representação gráfica construída com figura representativa da intensidade do fenômeno. Pela forma atraente e sugestiva, o pictograma tem a vantagem de despertar a atenção do público leigo. Nesse tipo de gráfico, os símbolos são autoexplicativos. A desvantagem do pictograma é mostrar apenas uma visão geral do fenômeno, ou seja, não apresenta detalhes do objeto de análise.

Exemplo

Uma pesquisa realizada com um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio visava traçar o perfil dos estudantes da sala. Entre as perguntas realizadas, destacou-se a que questionava o mês de aniversário de cada aluno.



Observando o gráfico pictograma, percebemos que os meses de novembro e dezembro têm as maiores quantidades. Em dezembro há 9 alunos aniversariantes (2 meninos e 7 meninas). Em novembro constam 8 aniversariantes (2 meninos e 6 meninas). Por outro lado, os meses de setembro e março apresentam somente 1 aniversariante cada um.

Esse gráfico se assemelha a um de barras horizontais. E mesmo que uma pessoa não leia o texto sobre as informações nele contidas, é possível que ela tenha uma boa noção do que o gráfico apresenta.

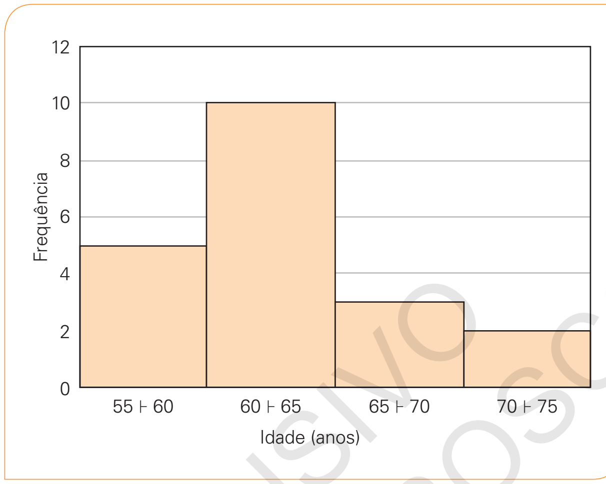
HISTOGRAMA

Esse tipo de gráfico é formado por um conjunto de retângulos justapostos. Suas bases se localizam sobre o eixo horizontal, de tal modo que seus pontos médios coincidam com os pontos médios dos intervalos de classe. A área do histograma é proporcional à soma das frequências simples ou absolutas. Em geral, um histograma representa graficamente situações-problema em que os dados obtidos estão organizados em classes.

Observe uma tabela que representa a idade de um grupo de pessoas que praticam pilates em determinada clínica.

Idade	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr) em porcentagem (%)
55 ⊢ 60	5	25
60 ⊢ 65	10	50
65 ⊢ 70	3	15
70 ⊢ 75	2	10
Total	**20**	**100**

Com base nos dados dessa tabela, foi elaborado um histograma. Observe.

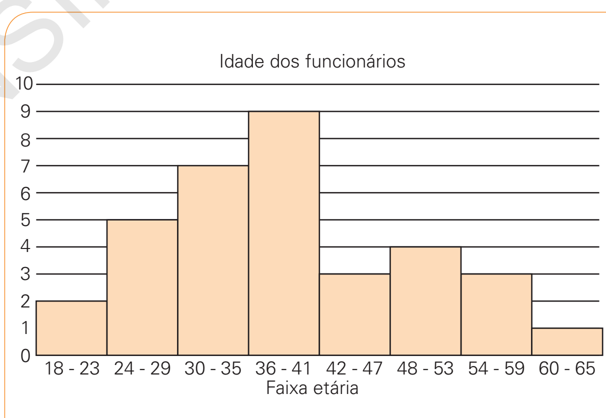


A seguir, vamos analisar outros exemplos de construção de histogramas.

Exemplo 1

Um levantamento de dados apontou a variação da idade de um grupo de funcionários de uma loja de brinquedos. O total de funcionários na loja é 34, e a faixa etária mais frequente é 36-41, sendo que há 9 colaboradores nessa categoria.

Observe a apresentação desses dados no histograma a seguir.

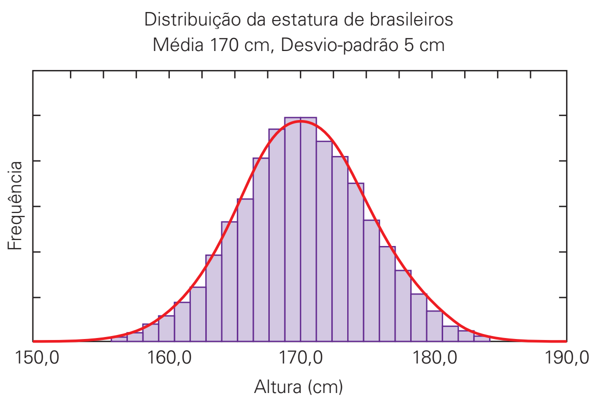


Exemplo 2

Outra importante aplicação do histograma ocorre na área da saúde, em que é muito comum. No caso apresentado nesse exemplo, observamos um fato de destaque, que é a concentração maior dos valores na região central do gráfico.

Quando isso ocorre em um histograma, os pesquisadores identificam e denominam esse fenômeno de **curva de Gauss** ou **curva normal**.

Considerando a distribuição da estatura média de um grupo de brasileiros no final século XX, foi construído o seguinte histograma:



Esse histograma apresenta a variável estatura, com média de 170 cm (1,70 m). Há maior frequência na faixa central do gráfico e menor nos extremos. Ou seja, quanto mais próximo de 150 cm (1,50 m) e 190 cm (1,90 m), menores são as frequências. Esse comportamento é bastante típico, por isso é considerado **estatisticamente normal.**

No caso desse gráfico, outras características se destacam. Observe.

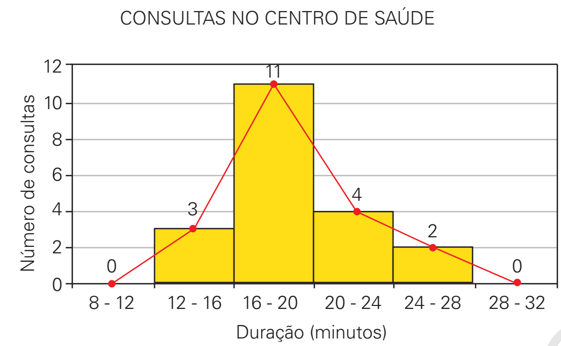
- A linha em vermelho (gráfico em curvas), que se ajusta no gráfico (em forma de sino), representa a curva normal.
- A curva normal (ou curva de Gauss) tem simetria em relação à faixa central. É assintótica (à esquerda e à direita), ou seja, não toca o eixo das abcissas x, apenas o tangência.
- Na distribuição normal, há coincidência entre três medidas de posição ou tendência central (média, mediana e moda têm aproximadamente o mesmo valor). Além disso, o gráfico tem uma medida de dispersão, que é o desvio-padrão. Ele é o referencial de análise do assunto. Esse assunto será abordado posteriormente neste módulo.

POLÍGONO DE FREQUÊNCIA

Trata-se de um gráfico em linha, com frequência marcada sobre as linhas perpendiculares ao eixo horizontal, levantadas pelos pontos médios dos intervalos de classe.

Para obter o polígono (linha fechada), completa-se a figura, ligando os extremos da linha aos pontos médios da classe anterior à primeira linha e da classe posterior à última linha da distribuição.

Para construir um polígono de frequência, geralmente o "pano de fundo" é o histograma de frequências, conforme o exemplo a seguir.



Saiba mais

Originário dos estudos de Pareto, o diagrama que leva o nome do economista italiano é construído com objetivo de se compreender a relação ação/benefício. Ou seja, no diagrama de Pareto prioriza-se a ação que supõe melhor resultado. Ele é composto de um gráfico de barras que ordena a frequência das ocorrências em ordem decrescente e possibilita localizar problemas vitais e eliminar futuras perdas.

Considerada uma das sete ferramentas básicas da qualidade, o diagrama de Pareto baseia-se no princípio de que a maioria das perdas tem poucas causas ou que poucas causas são vitais e que a maioria das causas é trivial.

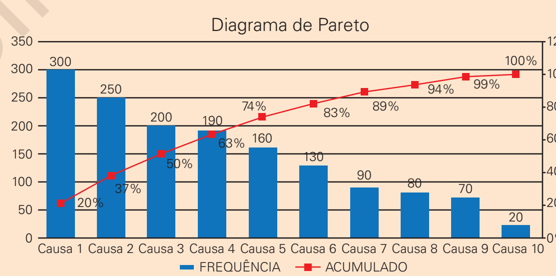


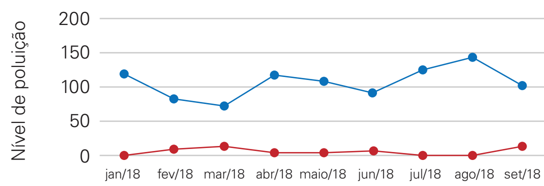
GRÁFICO DE LINHAS OU POLIGONAL

Esse tipo de gráfico constitui uma aplicação do processo de representação das funções no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. É mais comum nas séries cronológicas, em que a variável tempo é representada no eixo horizontal e as respectivas quantidades, no eixo vertical. Esse gráfico pode apresentar uma ou mais linhas, dependendo da situação descrita.

Exemplo

O gráfico a seguir representa a comparação entre os níveis de poluição e os níveis de chuva durante 9 períodos referenciais – representados ao final dos 9 meses iniciais de 2018 (janeiro a setembro).

Níveis de poluição comparados com a presença das chuvas-Jan/18 a Set/18 Local XYZ



	jan/18	fev/18	mar/18	abr/18	maio/18	jun/18	jul/18	ago/18	set/18
Poluição	121	85	75	118	109	95	126	145	104
Chuva	4,2	12,7	15,2	5,7	5,2	8,7	3,8	1,9	15,6

Com base no gráfico, facilmente podemos identificar que a falta de chuvas interfere sensivelmente no nível de poluição. O mês de maior concentração de chuvas coincide com o menor nível de poluição (março). Por outro lado, o mês com menor quantidade de chuva é o que tem maior nível de poluição (agosto).

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Enem C6-H25

Nos últimos anos, a frota de veículos no Brasil tem crescido de forma acentuada. Observando o gráfico, é possível verificar a variação do número de veículos (carros, motocicletas e caminhões), no período de 2000 a 2010. Projeta-se que a taxa de crescimento relativo no período de 2000 a 2010 mantenha-se para a década seguinte.

Evolução do total da frota na década

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2012. (Adaptado.)

Qual será o número de veículos no ano de 2020?

a) 79,2 milhões
b) 102,0 milhões
c) 132,0 milhões
d) 138,0 milhões
e) 145,2 milhões

Resolução

Entre 2000 a 2010, a taxa de crescimento relativo na frota de veículos foi de:

$$\frac{66-30}{30}=\frac{36}{30}=1{,}2$$

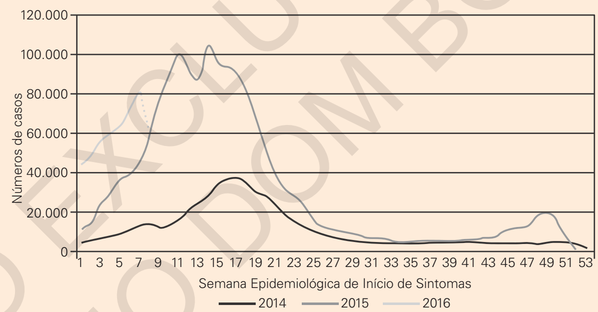
Mantida essa taxa, em 2020 o número (em milhões) de veículos será:

$$66 \cdot (1+1{,}2) = 66 \cdot 2{,}2 = 145{,}2$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

2. UFPA – O gráfico abaixo, retirado do Boletim Epidemiológico 16 de 2016 do Ministério da Saúde, registra os casos de dengue por semana, no Brasil, nos anos de 2014, 2015 e início de 2016.



Fonte: Sinal Online (atualizado em a13/07/2015; b04/01/2016; c07/03/2016). Dados sujeitos a alteração.

Figura – Casos prováveis de dengue, por semana epidemiológica de início de sintomas, Brasil, 2014a, 2015b e 2016c.

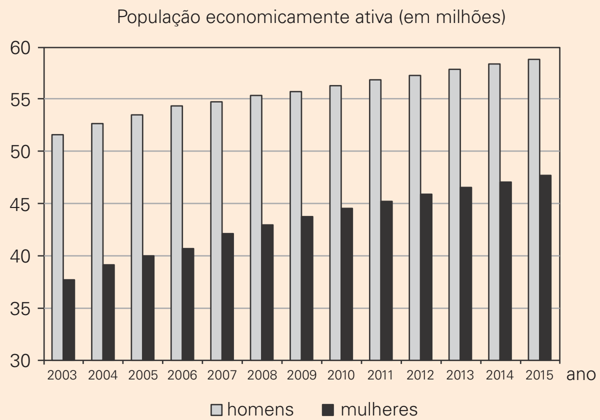
Com base no gráfico, pode-se afirmar que

a) o maior número de casos de dengue ocorreu em 2014.
b) número de casos de dengue tem comportamento crescente próximo da vigésima segunda semana.
c) os dados das 7 primeiras semanas de 2016 indicam uma diminuição do número de casos em relação a 2014 e 2015.
d) o gráfico de 2015 permite afirmar que houve mais de um milhão de casos em 2015.
e) o maior número de casos ocorre em cada ano na décima quarta semana.

Resolução

a) Incorreta. Em todas as semanas de 2015, o número de casos foi maior que em 2014.
b) Incorreta. O comportamento é decrescente em 2014 e 2015.
c) Incorreta. O gráfico de 2016 está acima dos gráficos de 2014 e 2015 nas sete primeiras semanas.
d) Correta. Entre as semanas 9 e 18, o número de casos foi maior ou igual a 80 000.
e) Incorreta. Não há informações sobre o número de casos na 14ª semana de 2016.

3. UFRGS – O gráfico a seguir representa a população economicamente ativa de homens e mulheres no Brasil de 2003 a 2015.



Fonte: Organização das Nações Unidas para Alimentação e Agricultura

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

a) no ano de 2009, a população economicamente ativa de mulheres era cerca de 50% da população economicamente ativa de homens.

b) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de homens cresceu mais do que a de mulheres.

c) em relação a 2005, a população economicamente ativa de mulheres em 2011 cresceu cerca de 5%.

d) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de mulheres cresceu mais do que a de homens.

e) em relação a 2007, a população economicamente ativa de homens em 2015 cresceu cerca de 3%

Resolução

a) Falsa. 50% de 56 = $0,50 \cdot 56 = 28$.

b) Falsa.

Taxa de crescimento dos homens =

$\frac{58-52}{52} = 0,12 = 12\%$.

Taxa de crescimento das mulheres:

$\frac{47-37}{37} = 0,27 = 27\%$.

c) Falsa. A população economicamente ativa de mulheres cresceu: $\frac{45-40}{40} = 0,125 = 12,5\%$.

d) Verdadeira.

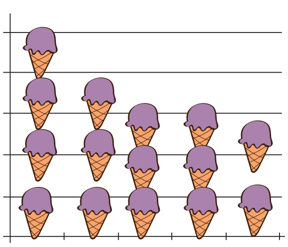
e) Falsa. A população economicamente ativa de homens cresceu: $\frac{58-54}{54} = 0,08 = 8\%$.

ROTEIRO DE AULA

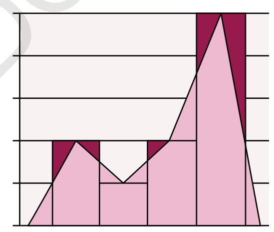
ESTATÍSTICA: ANÁLISE DE DADOS II

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

PICTOGRAMA



POLÍGONO DE FREQUÊNCIA



HISTOGRAMA

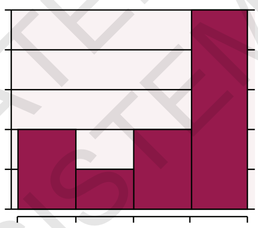
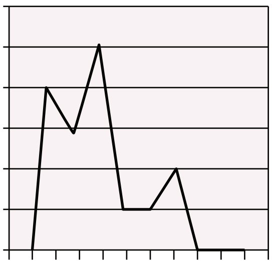
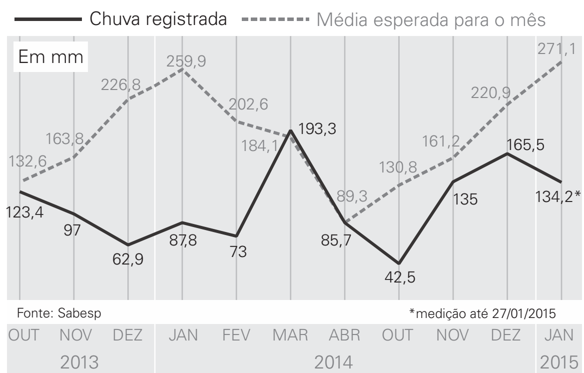


GRÁFICO DE LINHAS



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEG-GO – Na figura a seguir, vê-se o gráfico comparativo entre a quantidade de chuva esperada e a quantidade de chuva registrada no sistema de Captação de Água Cantareira.



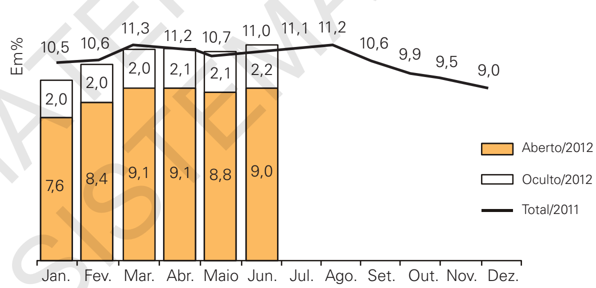
De acordo com o gráfico, o mês em que ocorreu a maior diferença entre o volume de chuva esperada e o volume de chuva registrada foi no mês de

a) dezembro de 2013
b) janeiro de 2014
c) março de 2014
d) janeiro de 2015

A maior diferença ocorreu em janeiro de 2014: 259,9 – 87,8 = 172,1.

2. Enem C6-H25

O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Disponível em: <www.dieese.org.br>. Acesso em: 1º ago. 2012. (Fragmento.)

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a) 1,1 **b)** 3,5 **c)** 4,5 **d)** 6,8 **e)** 7,9

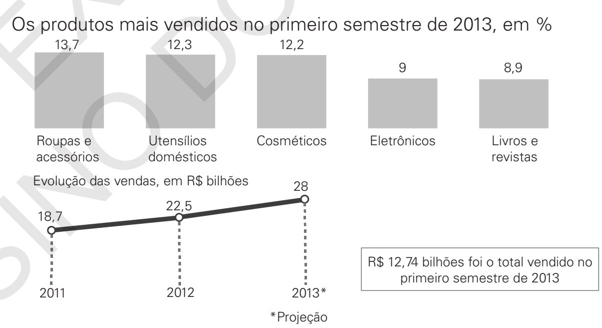
Taxa de desemprego total em dez/11 = 9%.
Taxa de desemprego oculto em jun/12 = 2,2%.
Taxa de desemprego aberto: x

$x + \frac{2,2}{2} = 9 \rightarrow x = 9 - 1,1 \therefore x = 7,9\%$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

3. UFG-GO – Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao comércio eletrônico no Brasil em 2013.



Folha de S.Paulo, São Paulo, 21 set. 2013, p. 1. (Adaptado.)

De acordo com os dados apresentados nesses gráficos, considerando que os produtos mais vendidos no segundo semestre mantenham o mesmo porcentual de vendas do primeiro semestre de 2013, calcule o valor correspondente às vendas de produtos eletrônicos no segundo semestre de 2013.

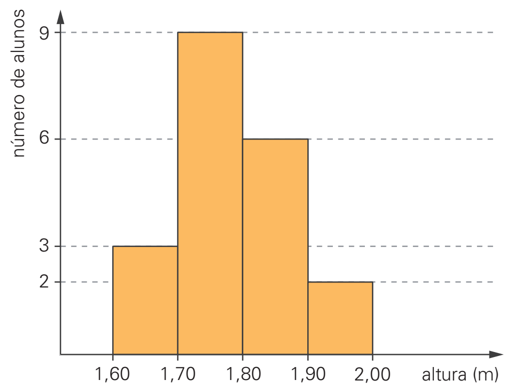
Caso a projeção de vendas em 2013 se realize, temos:

- total vendido no primeiro trimestre = 12,74 bilhões;
- projeção de vendas em 2013 = 28,00 bilhões.

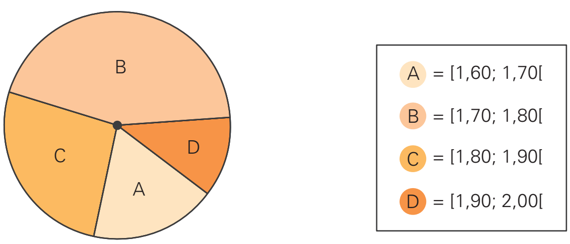
Logo, 28,00 – 12,74 = 15,26 bilhões de vendas são esperadas.
Analisando o gráfico, a venda de eletrônicos corresponde a 9% do total.

Assim, $\frac{9}{100} \cdot 5,26 = 1,37$ bilhão.

4. UERJ – Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:



Os dados do histograma também podem ser representados em um gráfico de setores. Observe:



Calcule o maior ângulo central, em graus, desse gráfico de setores.

O total de alunos (20) corresponde a 360°.

Por regra de três simples, obtemos:

A (3 alunos):

3 —— x

20 —— 360°

$\therefore$ x = 54°

Seguindo o mesmo raciocínio, temos:

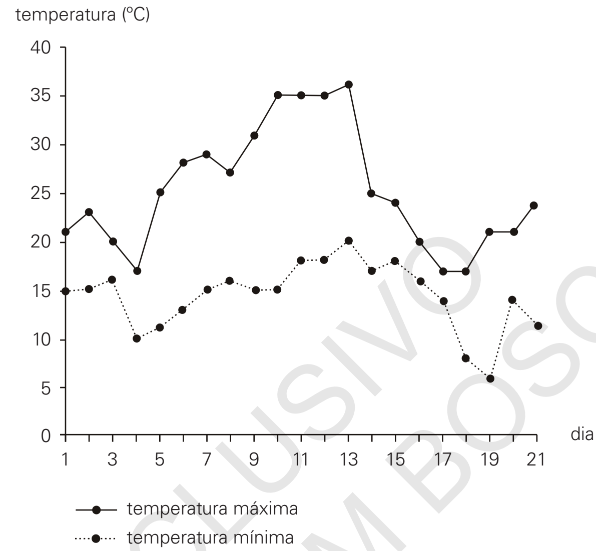
B: 9 alunos correspondem a 162°.

C: 6 alunos correspondem a 108°.

D: 2 alunos correspondem a 36°.

Logo, o maior ângulo corresponde ao setor B: 162°.

5. UFRGS – O gráfico abaixo mostra o registro das temperaturas máximas e mínimas em uma cidade, nos primeiros 21 dias do mês de setembro de 2013.



Assinale a alternativa correta com base nos dados apresentados no gráfico.

a) No dia 13, foi registrada a menor temperatura mínima do período.

b) Entre os dias 3 e 7, as temperaturas máximas foram aumentando dia a dia.

c) Entre os dias 13 e 19, as temperaturas mínimas diminuíram dia a dia.

d) No dia 19, foi registrada a menor temperatura máxima do período.

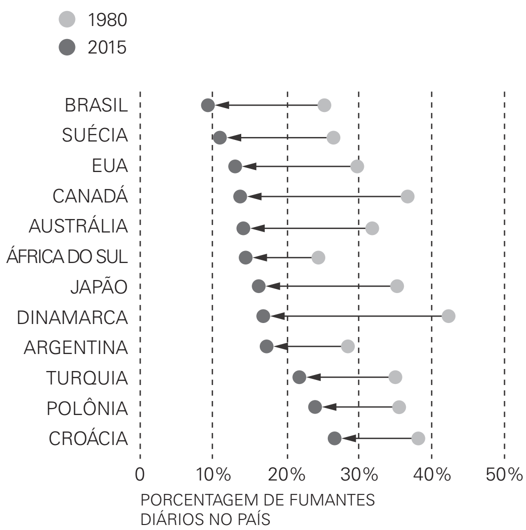
e) No dia 19, foi registrada a menor temperatura do período.

O menor patamar atingido de temperatura no período ocorreu no dia 19.

6. Insper-SP – Observe os gráficos.

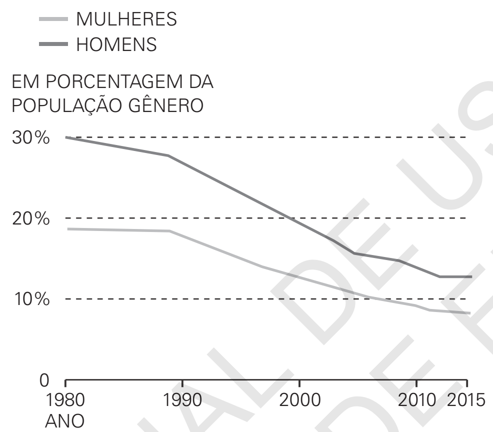
VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO FUMANTE ENTRE 1980 E 2015

No Brasil e em países com a maior variação no período



FUMANTES DIÁRIOS NO BRASIL POR GÊNERO

De 1980 a 2015



Fonte:<http://www.nexojornal.com.br>.

Utilizando apenas a análise dos dados expressos nos gráficos, é possível concluir corretamente que

a) a África do Sul foi o país que teve a maior redução na porcentagem de fumantes diários de 1980 para 2015.

b) em 2015 o Brasil tinha mais fumantes diários do que os EUA.

c) no Brasil houve uma redução maior no percentual de homens fumantes do que no de mulheres fumantes de 1980 para 2015.

d) o país com maior número de fumantes em 1980 era a Dinamarca e, em 2015, passou a ser a Croácia.

e) o Japão sempre teve mais fumantes do que o Brasil no período de 1980 a 2015.

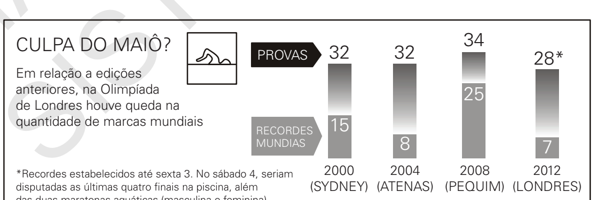
Item a) – Segundo o gráfico, a África do Sul teve menor redução que a Dinamarca na porcentagem de fumantes no período analisado, e não maior.

Itens b), d) e e) – As populações dos países citados não foram informadas. Por isso essa conclusão não é possível.

Item c) – A redução no percentual de homens fumantes foi de aproximadamente 17%. Em relação às mulheres fumantes, esse número foi de 10%.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UPE – O gráfico abaixo mostra o número de competições de natação das últimas olimpíadas e o número de recordes mundiais quebrados em cada uma delas.



De acordo com esse gráfico,

a) sem considerar a Olimpíada de 2012 em Londres, a maior razão entre o número de provas e o número de recordes quebrados aconteceu na Olimpíada de 2008, em Pequim.

b) para que a razão entre o número de provas e o número de recordes quebrados da Olimpíada de Londres se equipare à de Pequim, seriam necessários mais 4 recordes mundiais quebrados.

c) caso não seja quebrado mais nenhum recorde na Olimpíada de Londres, o número de recordes quebrados na Olimpíada de Sydney seria o mesmo do número de recordes quebrados em Atenas e Londres, juntos.

d) a média de recordes quebrados nas Olimpíadas de Sydney, Atenas e Pequim é de 17 recordes quebrados por olimpíada.

e) nas Olimpíadas de Sydney e Atenas, foram quebrados, ao todo, 64 recordes mundiais.

8. Unesp – A revista *Superinteressante* trouxe uma reportagem sobre o custo de vida em diferentes cidades do mundo. A tabela mostra o ranking de cinco das 214 cidades pesquisadas pela "Mercer LLC", empresa americana, em 2010.

Cidade mais cara do mundo fica na África

	Aluguel(1)	Cafezinho(2)	Jornal(3) Importado	Lanche(4)	Gasolina(5)	
1º LUANDA, ANGOLA	R$ 12 129,60	R$ 197,40	R$ 256,20	R$ 909,60	R$ 95,00	R$ 13 587,80
2º TÓQUIO, JAPÃO	R$ 7686,70	R$ 345,60	R$ 288,60	R$ 374,70	R$ 244,00	R$ 8 939,60
3º JAMENA, CHADE	R$ 3 754,00	R$ 162,30	R$ 368,10	R$ 1 353,60	R$ 217,00	R$ 5 855,00
7º LIBREVILLE, GABÃO	R$ 3 609,42	R$ 216,90	R$ 238,20	R$ 1407,60	R$ 192,00	R$ 5 664,12
21º SÃO PAULO	R$ 2 500,00	R$ 90,00	R$ 750,00	R$ 435,00	R$ 240,00	R$ 4 015,00

(1) apartamento de dois quartos num bairro de classe média alta;
(2) 30 cafezinhos;
(3) 30 exemplares do *NewYorkTimes*;
(4) 30 lanches do McDonald's;
(5) 100 litros.

Superinteressante, jan. 2011. (Adaptado.)

Observando as informações, numéricas e coloridas, contidas na tabela, analise as afirmações:

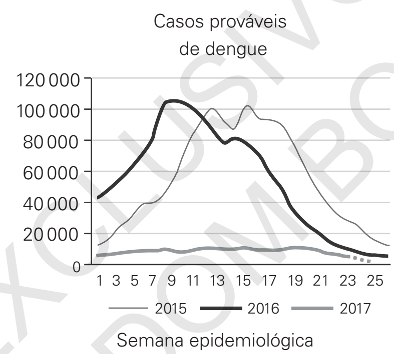
I. O custo do aluguel em Luanda é o mais alto do mundo.
II. O custo do cafezinho em Tóquio é o mais alto do mundo.
III. O custo do jornal importado em São Paulo é o mais alto do mundo.
IV. O custo do lanche em Libreville é o mais alto do mundo.
V. O custo da gasolina em Tóquio é o mais alto do mundo.

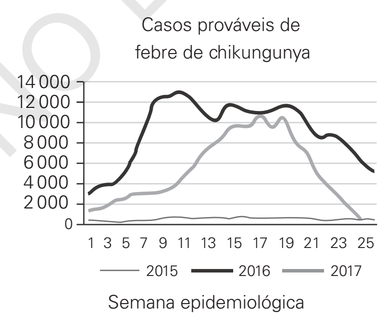
Estão corretas as afirmações:

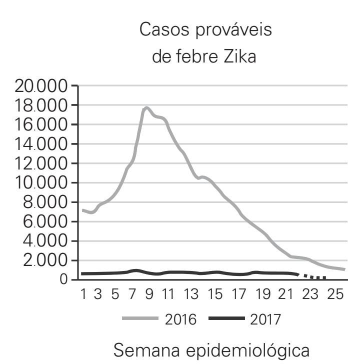
a) I, III e V, apenas.
b) II, III e IV, apenas.
c) I, II, III e IV, apenas.
d) I, III, IV e V, apenas.
e) I, II, III, IV e V.

9. FCMMG – A dengue, a febre de chikungunya e a febre pelo vírus Zika são doenças presentes na Lista Nacional de Notificação Compulsória de Doenças, Agravos e Eventos de Saúde Pública, sendo esta última acrescentada a partir de 2016.

Nos gráficos abaixo, são apresentados dados de monitoramento da situação dessas viroses, de acordo com o Boletim Epidemiológico do Ministério da Saúde, durante o primeiro semestre dos anos de 2015, 2016 e 2017.







(Adaptação de: http://portalarquivos.saude.gov.br/images/pdf/2017/julho/25/Boletim-2017_020-Monitoramento-dos-casos-de-dengue-febre-de-chikungunya-e-febre-pelo-Zika.pdf

A análise desses gráficos NÃO permite que seja feita a seguinte inferência:

a) Durante o respectivo acompanhamento das semanas epidemiológicas, em 2017, o número de casos de dengue, febre de chikungunya e febre Zika não ultrapassou o número de casos de 2016.

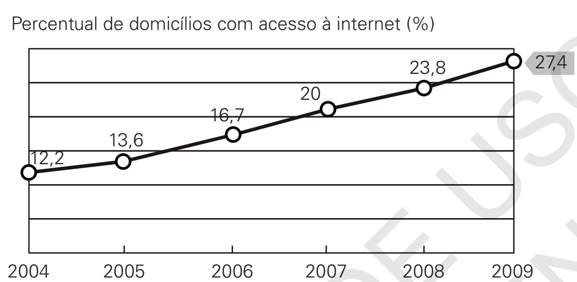
b) Durante o respectivo acompanhamento das semanas epidemiológicas, o número de casos de febre chikungunya em 2017 não ultrapassou o número de casos em comparação com o ano de 2016.

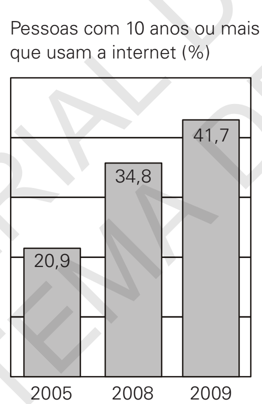
c) Durante o respectivo acompanhamento das semanas epidemiológicas, o número de casos de febre Zika em 2016 sempre esteve mais elevado em comparação com o ano de 2017.

d) Durante o respectivo acompanhamento das semanas epidemiológicas, o número de casos de dengue sempre esteve mais elevado em 2016, em comparação com o ano de 2015.

10. FGV-RJ – Você usa a internet?

Observe os resultados de uma pesquisa sobre esse tema.





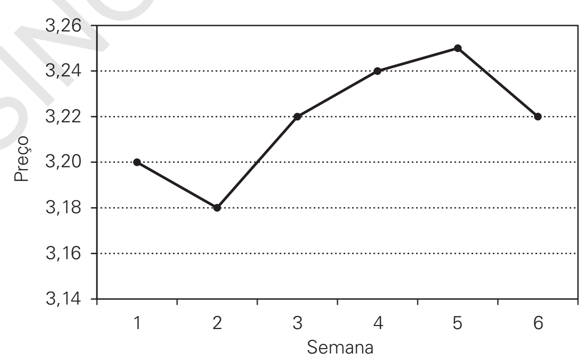
A pesquisa de 2009 foi feita em 500 domicílios e com 2 000 pessoas com 10 anos ou mais de idade.

a) Quantos domicílios pesquisados tinham acesso à internet em 2009?

b) Em 2009, quantas pessoas disseram que usavam a internet?

c) Considere que o gráfico das porcentagens de domicílios com acesso à internet, nos anos 2008, 2009 e 2010, seja formado por pontos aproximadamente alinhados. Faça uma estimativa da porcentagem de domicílios com acesso à internet em 2010.

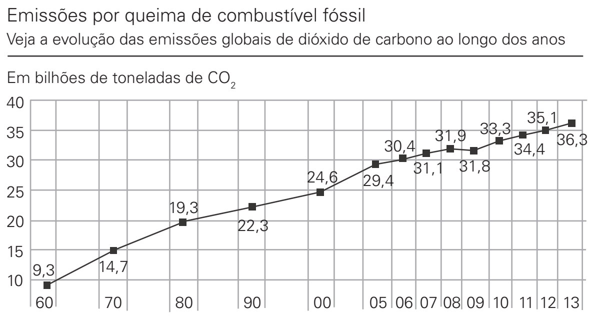
11. UEG-GO – As ações de uma empresa variaram semanalmente conforme os dados da figura a seguir.



De acordo com os dados apresentados, o período de maior variação ocorreu entre as semanas

a) 2 e 3 **b)** 1 e 2 **c)** 4 e 5 **d)** 3 e 4 **e)** 5 e 6

12. UFRGS – O gráfico abaixo apresenta a evolução da emissão de dióxido de carbono ao longo dos anos.



Fonte: CDIAC

Disponível em: <http://noticias.uol.com.br/meio-ambiente/ultimas-noticias/redacao/2013/12/27/em-busca-de-forca-emissoes-recorde-de-co2.html>. Acesso em: 25 set. 2014.

Com base nos dados do gráfico, assinale a alternativa correta.

a) Ao longo do período, a emissão de dióxido de carbono apresentou crescimento constante.

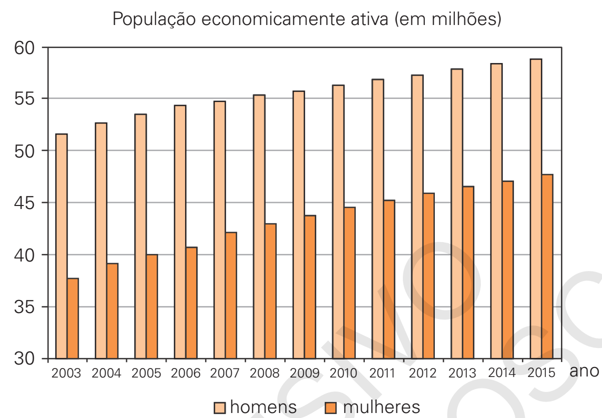
b) Em relação aos anos 80, os anos 90 apresentaram emissão de dióxido de carbono 30% maior.

c) O ano de 2009 apresentou menor valor de emissão de dióxido de carbono da primeira década do século XXI.

d) De 2000 a 2013, houve crescimento percentual de 11,7% na emissão de dióxido de carbono.

e) Em relação a 2000, o ano de 2013 apresentou emissão de dióxido de carbono aproximadamente 50% maior.

13. UFRGS – O gráfico a seguir representa a população economicamente ativa de homens e mulheres no Brasil de 2003 a 2015.



Fonte: Organização das Nações Unidas para Alimentação e Agricultura

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

a) no ano de 2009, a população economicamente ativa de mulheres era cerca de 50% da população economicamente ativa de homens.

b) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de homens cresceu mais do que a de mulheres.

c) em relação a 2005, a população economicamente ativa de mulheres em 2011 cresceu cerca de 5%.

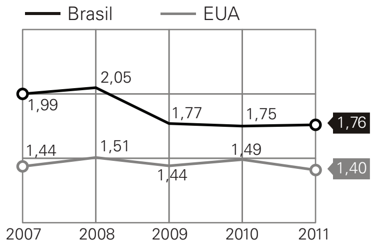
d) de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de mulheres cresceu mais do que a de homens.

e) em relação a 2007, a população economicamente ativa de homens em 2015 cresceu cerca de 3%

14. FGV – Observe a notícia abaixo e utilize as informações que julgar necessárias.

VAREJO MIRA PREVENÇÃO DE PERDAS
Com retomada de inflação, setor ganha importância para manter lucro

Índice de perdas no varejo
Em %, sobre o faturamento líquido do setor



R$ 18,5 milhões
é a perda em valores do varejo brasileiro em 2011

Perdas por segmento	Em %
Supermercado	1,96
Farmácias e drogarias	0,38
Outros*	0,19
Média do varejo	1,76
	19

Causas das perdas	
Furto externo	19
Furto interno	16
Erros administrativos	16
Fornecedores	10
Quebra operacional**	32
Outros ajustes	10

Quem participou da pesquisa	
Empresas	275
Lojas	4486
Centros de distribuição	413

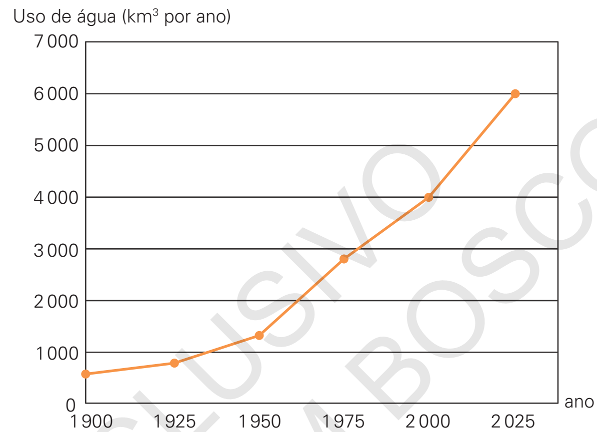
(*) O grupo "outros" inclui varejo da construção civil e lojas de conveniência e roupa, mas não na totalidade desses segmentos.
(**) Quebra operacional inclui produtos danificados por clientes, por funcionários, com validade vencida, e embalagens vazias com conteúdo furtado: Provar (Programa do Varejo) da USP

a) Suponha que a partir de 2010 os índices de perdas no varejo, no Brasil e nos EUA, possam ser expressos por funções polinomiais do 1º grau, $y = ax + b$, em que $x = 0$ representa o ano 2010, $x = 1$, o ano 2011, e assim por diante, e y representa o índice de perdas expresso em porcentagem. Determine as duas funções.

b) Em que ano a diferença entre o índice de perdas no varejo, no Brasil, e o índice de perdas no varejo, nos EUA, será de 1%, aproximadamente? Dê como solução os dois anos que mais se aproximam da resposta.

15. UFRGS – As estimativas para o uso da água pelo homem, nos anos 1900 e 2000, foram, respectivamente, de 600 km³ e 4 000 km³ por ano. Em 2025, a expectativa é que sejam usados 6 000 km³ por ano de água na Terra.

O gráfico abaixo representa o uso da água em km³ por ano de 1900 a 2025.



Fonte: <http://www.fao.org>.

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

a) de 1900 a 1925, o uso de água aumentou em 100%.

b) de 1900 a 2000, o uso da água aumentou em mais de 600%.

c) de 2000 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 66,6%.

d) de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 900%.

e) de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 1 000%.

16. Enem C6-H25

Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

Distribuição da folha salarial

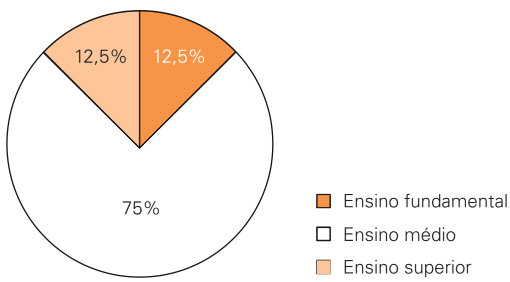


Gráfico 1

Número de funcionários por grau de instrução

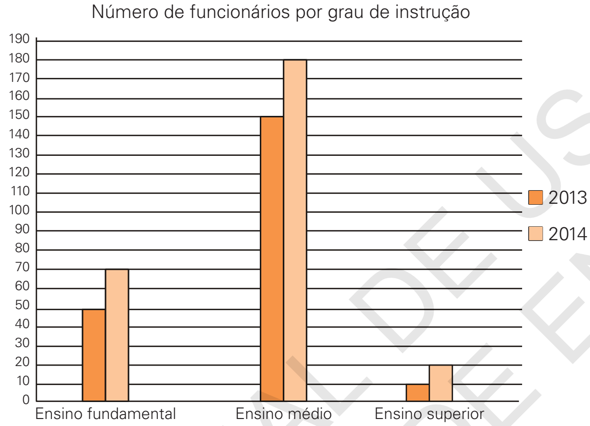


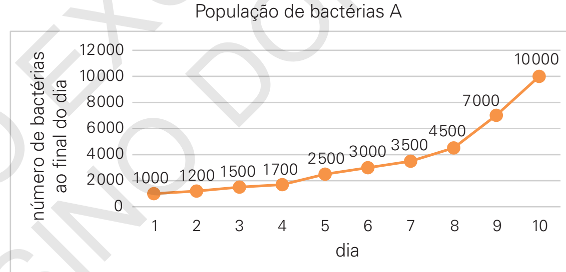
Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

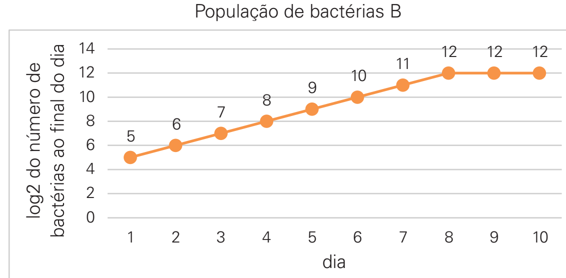
a) R$ 114 285,00
b) R$ 130 000,00
c) R$ 160 000,00
d) R$ 210 000,00
e) R$ 213 333,00

17. FGV – Um biólogo inicia o cultivo de três populações de bactérias (A, B e C) no mesmo dia. Os gráficos seguintes mostram a evolução do número de bactérias ao longo dos dias.

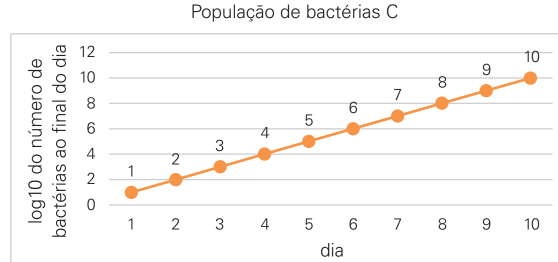
População de bactérias A



População de bactérias B



População de bactérias C



A partir da informação dos gráficos, responda:

a) Em que dia o número de bactérias da população C ultrapassou o da população A?

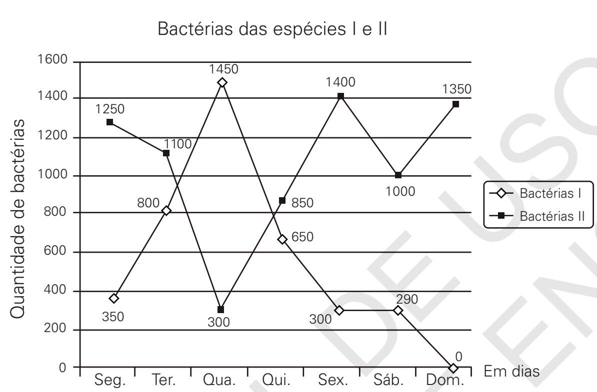
b) Qual foi a porcentagem de aumento da população de bactérias B, entre o final do dia 2 e o final do dia 6?

c) Qual foi a porcentagem de aumento da população total de bactérias (colônias A, B e C somadas) entre o final do dia 2 e o final do dia 5?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C6-H25

Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

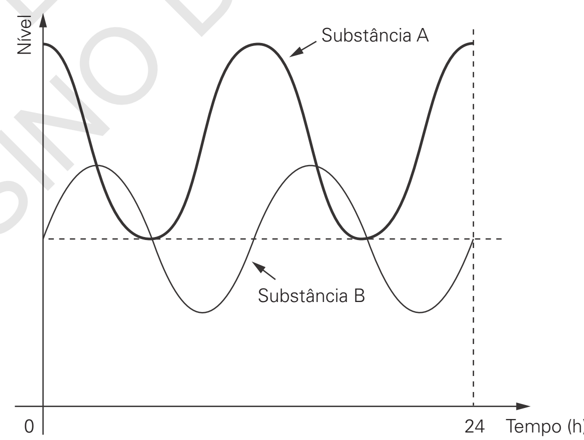


Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira
b) Quarta-feira
c) Quinta-feira
d) Sexta-feira
e) Domingo

19. Enem C6-H25

Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura. Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo número de vezes em que os níveis de A e B forem iguais, porém maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.



Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes.

O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a

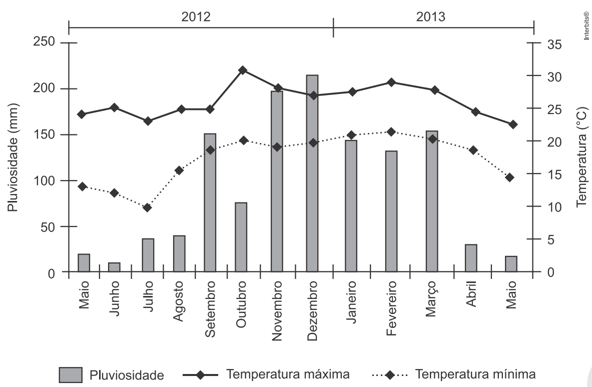
a) 28
b) 21
c) 2
d) 7
e) 14

20. Enem C6-H26

O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15ºC;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5ºC na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

a) janeiro
b) fevereiro
c) agosto
d) novembro
e) dezembro

ESTATÍSTICA – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL I

43

- Medidas de tendência central
- Média aritmética
- Média aritmética ponderada

HABILIDADES

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursos para a construção de argumentos.

VPOPOVIC/ISTOCKPHOTO

Em tabelas de dados estatísticos, é possível obtermos valiosos dados por meio de fórmulas que demonstram onde está a maior parte das informações ou qual é a média dos valores apresentados.

Introdução

A representação gráfica é um importante recurso na interpretação de conjunto de dados. Neste módulo, vamos estabelecer, para esses dados, certas medidas de como se distribuem os valores das variáveis em análise.

O estudo sobre algumas medidas de posição, classificadas aqui como **medidas de tendência central** e **medidas de dispersão**, fornece valores que podem caracterizar o comportamento dos elementos de uma série. Dessa forma, é possível determinarmos se um valor está entre o maior e o menor da série ou no centro do conjunto de dados, por exemplo.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

São as mais importantes medidas de posição, definidas como medidas estatísticas que representam uma série de dados que nos orientam quanto à posição da distribuição no eixo horizontal do gráfico da curva de frequência.

As medidas de posição mais importantes são **média aritmética**, **mediana** e **moda**.

Além disso, as notações mais usadas são:

- x – valor de cada indivíduo da amostra;
- n – tamanho amostral;
- $\bar{x}$ – média aritmética;
- M_e – mediana;
- M_o – moda.

MÉDIA ARITMÉTICA

Calculamos a média aritmética de um conjunto de dados somando todos os valores da população e dividindo o resultado pelo total de elementos dela. Numa população de n elementos, a média aritmética é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Lembrando que:

- $\overline{x}$ – média aritmética;
- x_i – valores da variável;
- n – número de valores.

Usando o símbolo de somatório para representar o numerador da expressão, podemos escrever $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$.

Exemplo

A amostra do preço de um produto x em 5 locais diferentes, em reais, é 14,5; 14,6; 14,5; 14,4; 14,5. Assim, a média é dada por:

$$\overline{x} = \frac{14{,}5 + 14{,}6 + 14{,}5 + 14{,}4 + 14{,}5}{5} = \frac{72{,}55}{5} =$$

$= 14{,}5$ reais

Tecnologia

Ferramentas tecnológicas possibilitam acelerar o processo de cálculos estatísticos, como os *softwares* de edição de planilhas eletrônicas. Para determinarmos a média aritmética de uma série de dados, basta inseri-los na planilha e clicar no botão específico para obter o valor instantaneamente.

AGROBACTER/ISTOCKPHOTO

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Vamos considerar a pesquisa realizada com um grupo de alunos da escola XYZ, em que se questionou a quantidade de irmãos de cada aluno. Observe os resultados.

Números de irmãos	Frequência (f_i)
0	6
1	12
2	3
3	2
4	1

Neste caso, como as frequências são números indicadores de intensidade de cada valor da variável, elas funcionam como **fatores de ponderação**, o que nos possibilita calcular a média aritmética ponderada.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

O modo mais prático de determinarmos a média ponderada é inserir, na tabela, uma coluna correspondente ao $x_i f_i$.

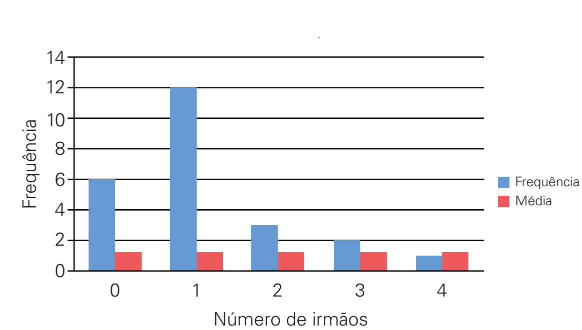
Números de irmãos	Frequência (f_i)	$x_i f_i$
0	6	$0 \cdot 6 = 0$
1	12	$1 \cdot 12 = 12$
2	3	$2 \cdot 3 = 6$
3	2	$3 \cdot 2 = 6$
4	1	$4 \cdot 1 = 4$
	$\sum = 24$	$\sum = 28$

Como $\sum f_i = 24$ e $\sum x_i \cdot f_i = 28$, podemos determinar a média aritmética ponderada:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{28}{24} = 1{,}17 \quad \therefore \quad \overline{x} = 1{,}17 \text{ irmão}$$

Vejamos no gráfico a comparação entre as frequências simples e a média aritmética.

Número de irmãos por aluno



Vamos analisar agora outro exemplo.

Em 20 de outubro de 2011, a seleção brasileira feminina de vôlei venceu a equipe cubana e se sagrou campeã do Pan-Americano realizado em Guadalajara, no México.

Observe a tabela com o nome das jogadoras do Brasil e as respectivas alturas:

Jogadoras	Altura (em metros)
Dani Lins	1,83
Fabi	1,69
Fabiana	1,93
Fernanda Garay	1,79
Jaqueline	1,86
Fabiola	1,84
Juciely	1,84
Mari	1,90
Paula Pequeno	1,85
Sheila	1,86
Tandara	1,86
Thaisa	1,96

Na tabela a seguir, as alturas foram classificadas por classes na tabela de frequência.

Altura	Frequência (f_i)
1,68 ⊢ 1,74	1
1,74 ⊢ 1,80	1
1,80 ⊢ 1,86	4
1,86 ⊢ 1,92	4
1,92 ⊢ 1,98	2

Neste caso, podemos determinar a média aritmética ponderada de modo similar ao anterior, por meio da seguinte fórmula matemática:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Observação:

Neste caso, x_i é representado por uma classe, por isso os pontos médios das classes são encontrados estabelecendo outra coluna para o produto $x_i f_i$.

Altura	f_i	x_i	$x_i f_i$
1,68 ⊢ 1,74	1	1,71	1,71
1,74 ⊢ 1,80	1	1,77	1,77
1,80 ⊢ 1,86	4	1,83	7,32
1,86 ⊢ 1,92	4	1,89	7,56
1,92 ⊢ 1,98	2	1,95	3,90
	$\sum = 12$		$\sum = 22{,}26$

Logo, a média aritmética ponderada é dada por:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{22{,}26}{12} = 1{,}86 \therefore \overline{x} = 1{,}86$$

Podemos concluir, então, que a estatura média das jogadoras citadas é de 1,86 m.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Funcab – A tabela abaixo representa os dados dos balanços das operações do Batalhão de Polícia de Trânsito (BPTran) da Polícia Militar – ES em três grandes feriados nacionais do ano de 2012.

Dia do trabalho: 220 acidentes, 2 mortos, 78 feridos

Dia de finados: 186 acidentes, 2 mortos, 54 feridos

Dia do trabalho: 219 acidentes, 1 morto, 51 feridos

O valor que melhor representa a média do número de feridos, de acordo com a tabela acima, é:

a) 57
b) 59
c) 61
d) 63
e) 65

Resolução

Calculando a média aritmética simples, obtemos:

$$\overline{x} = \frac{78 + 54 + 51}{3} = \frac{183}{3} = 61$$

2. USCS-SP (adaptado) – João tem 5 filhos, sendo que dois deles são gêmeos. A média das idades deles é 8,6 anos. Porém, se não forem contadas as idades dos gêmeos, a média dos demais passa a ser de 9 anos. Pode-se concluir que a idade dos gêmeos, em anos, é:

a) 6,5.
b) 7,0.
c) 7,5.
d) 8,0.
e) 8,5.

Resolução

Seja x a idade de cada gêmeo.

Como a média das idades dos três filhos que não são gêmeos é 9, a soma das idades dos três é 27 anos.

Sabendo que a média dos cinco filhos é 8,6 e sendo x a idade de um dos gêmeos:

$$\overline{x} = \frac{27 + 2x}{5} = 8{,}6$$

$$27 + 2x = 5 \cdot 8{,}6$$

$$2x = 43 - 27$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8 \text{ anos}$$

ROTEIRO DE AULA

ESTATÍSTICA – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL I

Média aritmética

Média aritmética simples

$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

Média aritmética ponderada

$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEL-PR – Um professor de Matemática combinou com os alunos que a nota final de cada bimestre seria calculada pela média ponderada das notas de três avaliações, como esquematizado no quadro a seguir.

Avaliações	Peso
A	5
B	3
C	2

A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Qual é a média ponderada a ser atribuída a uma aluna que obteve notas: quatro, na Avaliação A; seis, na Avaliação B; e nove, na Avaliação C?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Considere que um aluno obteve as três seguintes notas: sete, na Avaliação A; três, na Avaliação B; e oito, na Avaliação C. A partir destas notas, ele efetuou o cálculo de uma média aritmética simples.

A média aritmética simples obtida pelo aluno é igual, menor ou maior que a média ponderada calculada corretamente pelo professor na nota desse aluno?

Justifique sua resposta, apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

a) Calculando, obtemos:

$$\text{Média} = \frac{5\cdot4+3\cdot6+2\cdot9}{5+3+2} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

b) A média aritmética simples obtida pelo aluno é idêntica à média moderada calculada corretamente pelo professor. Calculando, temos:

$$\text{Média}_{\text{aritmética simples}} = \frac{7+3+8}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\text{Média}_{\text{aritmética ponderada}} = \frac{5\cdot7+3\cdot3+2\cdot8}{5+3+2} = \frac{60}{10} = 6$$

2. Enem C7-H29

Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª prova	2ª prova	3ª prova	4ª prova	5ª prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

a) apenas o aluno Y.
b) apenas o aluno Z.
c) apenas os alunos X e Y.
d) apenas os alunos X e Z.
e) os alunos X, Y e Z.

Calculando, temos:

$$X \rightarrow \frac{5+5+5+10+6}{5} = 6{,}2$$

$$Y \rightarrow \frac{4+9+3+9+5}{5} = 6$$

$$Z \rightarrow \frac{5+5+8+5+6}{5} = 5{,}8 \text{ (ou seja, reprovado)}$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

3. UEG-GO – Um artesão fabrica certo tipo de peças a um custo de R$ 10,00 cada e as vende no mercado de artesanato com preço variável que depende da negociação com o freguês. Num certo dia, ele vendeu 2 peças por R$ 25,00 cada, 4 peças por R$ 22,50 cada e mais 4 peças por R$ 20,00 cada.

O lucro médio do artesão nesse dia foi de

a) R$ 22,50
b) R$ 22,00
c) R$ 19,20
d) R$ 12,50
e) R$ 12,00

O lucro médio do artesão é demonstrado pela média aritmética ponderada:

$$\frac{2\cdot15 + 4\cdot12{,}50 + 4\cdot10}{2+4+4} = \text{R\$ } 12{,}00$$

4. Enem C7-H29

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26
b) 29
c) 30
d) 31
e) 35

Sendo ℓ o lucro, em milhares de reais, no período de junho:

$$\frac{21+35+21+30+38+\ell}{6} \geq 30 \rightarrow 145+\ell \geq 180 \;\therefore\; \ell \geq 35$$

Logo, a resposta é 35.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construçãode argumentação.

5. Uema – Em um seletivo para contratação de estagiários, foram aplicadas duas provas: uma de Conhecimentos Gerais e outra de Conhecimentos Específicos, valendo de 0 a 10 pontos cada prova. A média foi calculada, utilizando-se peso 2 para a primeira prova e peso 3 para a segunda prova. Essa média é denominada Ponderada e é calculada, segundo a expressão:

$$\frac{\text{Nota}(1)\times\text{Peso}(1)+\text{Nota}(2)\times\text{Peso}(2)+\ldots+\text{Nota}(n)\times\text{Peso}(n)}{\text{Peso}(1)+\text{Peso}(2)+\ldots+\text{Peso}(n)}$$

Um candidato, que obteve média 5,2 (cinco vírgula dois), solicitou o valor de suas notas em cada prova. Recebeu a seguinte resposta: A nota na prova de Conhecimentos Específicos foi 50% maior que a nota da prova de Conhecimentos Gerais.

Considerando a fórmula citada e as informações fornecidas ao candidato,

a) indique a expressão matemática utilizada para calcular as notas.

b) calcule as notas que o candidato obteve em cada prova.

a) Sejam n_1 e n_2, nesta ordem, as notas na primeira e na segunda prova. A equação para encontrar as notas dos candidatos é:

$$\text{Nota} = \frac{n_1\cdot 2+n_2\cdot 3}{2+3} = \frac{n_1\cdot 2+n_2\cdot 3}{5}$$

b) Compreendendo que $n_2 = 1{,}5 \cdot n_1$, temos:

$$\frac{n_1\cdot 2+n_2\cdot 3}{5} = 5{,}2$$

$$\frac{n_1\cdot 2+1{,}5\cdot n_1\cdot 3}{5} = 5{,}2 \rightarrow 6{,}5\cdot n_1 = 26 \;\therefore\; n_1 = 4$$

Então, $n_2 = 1{,}5\cdot 4 \;\therefore\; n_2 = 6$.

6. Enem C7-H27

Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

a) 18.
b) 19.
c) 22.
d) 25.
e) 26.

Teremos $M_I = \frac{4\cdot 20 + 6\cdot 23}{4+6} = 21{,}8$ e $M_{III} = \frac{4\cdot 21 + 6\cdot 18}{4+6} = 19{,}2$.

Assim, $M_{II} > 21{,}8 \rightarrow \frac{4\cdot x + 6\cdot 25}{4+6} > 21{,}8 \leftrightarrow 4x > 218 - 150 \leftrightarrow x > 17$.

Portanto, a menor nota que o candidato II precisa obter na prova de Química é 18.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou emgráficos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UEG-GO – A tabela a seguir apresenta a distribuição dos pontos de uma avaliação realizada com 100 alunos.

Pontos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alunos	2	5	8	10	15	17	15	12	8	4	4

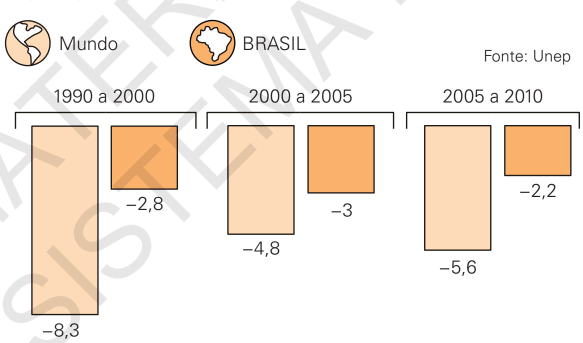
Analisando-se os dados dessa tabela, a média do número de pontos desses alunos é igual a

a) 5,0
b) 5,1
c) 5,2
d) 5,4
e) 5,5

8. UFRN – O gráfico abaixo, publicado na revista *Veja* de 13/06/2012, a partir dos dados da Unep, revela uma desaceleração no ritmo de desmatamento das florestas.

Um ritmo menor de desmatamento
Hoje, perdem-se menos matas virgens do que nos anos 90

Variação das florestas (em milhões de hectares por ano – 1 hectare corresponde a 10 000 metros quadrados, o que equivale a um campo de futebol)



Veja, São Paulo, nº. 2273, p. 99, 13 jun. 2012. (Adaptado.)

Com base nesse gráfico, é correto afirmar:

a) No Brasil, de 2000 a 2010, o ritmo do desmatamento caiu na ordem de 5,2 milhões de hectares por ano.
b) No Brasil, de 2000 a 2010, o ritmo do desmatamento caiu na ordem de 2,6 milhões de hectares por ano.
c) Durante o período apresentado no gráfico, a desaceleração do ritmo do desmatamento no mundo foi três vezes maior que a desaceleração no Brasil.
d) Na década de noventa, a desaceleração do ritmo do desmatamento das florestas no mundo foi aproximadamente quatro vezes maior que a desaceleração no Brasil.

9. Unifesp – Um estudo médico recrutou 160 pacientes homens com histórico de alterações no antígeno prostático específico (PSA). Os pacientes foram submetidos aos exames laboratoriais de PSA total e de PSA livre e, em seguida, a uma biópsia da próstata. A biópsia apontou, em cada caso, se a patologia era maligna ou benigna. A tabela apresenta os resultados das médias dos exames laboratoriais do grupo de pacientes com patologia maligna e do grupo de pacientes com patologia benigna.

PSA (média)	Biópsia com indicação de patologia maligna	Biópsia com indicação de patologia benigna
PSA total (ng/mL)	10	8
PSA livre (ng/mL)	1,9	2
PSA livre ÷ PSA total	0,19	0,25

Pedro foi um dos pacientes que participou do estudo e seus exames indicaram PSA total = 9,5 ng/mL e PSA livre = 2,28 ng/mL.

a) Calcule o quociente entre o PSA livre e o PSA total de Pedro. Usando esse indicador como referência na comparação com os dados da tabela, indique se o resultado do exame de Pedro está numericamente mais próximo ao resultado médio do exame de quem tem a patologia maligna ou de quem tem a patologia benigna.
b) Sabendo que 40% dos pacientes foram diagnosticados com patologia maligna, calcule a média do PSA total dos 160 pacientes que participaram do estudo.

10. IFSC – A tabela abaixo apresenta dados sobre a quantidade de lixo produzida por 25 apartamentos de um condomínio.

Lixo produzido em kg	
kg	**Apartamentos**
1 ⊢ 3	1
3 ⊢ 5	3
5 ⊢ 7	?
7 ⊢ 9	7
9 ⊢ 11	9

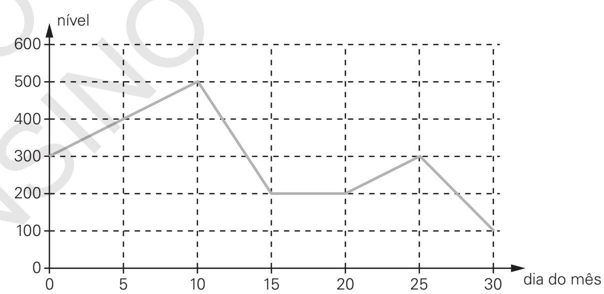
É CORRETO afirmar que a produção média de lixo por apartamento nesse condomínio é:

a) entre 9 e 10 kg.
b) menor que 5 kg.
c) entre 8 e 9 kg.
d) entre 7 e 8 kg.
e) maior que 10 kg.

11. ESPM-SP – A nota final de um concurso é dada pela média aritmética das notas de todas as provas realizadas. Se um candidato conseguiu x notas 8, x+1, notas 6 e x – 1 notas 5 e sua nota final foi 6,5, o número de provas que ele realizou foi:

a) 6
b) 9
c) 7
d) 5
e) 12

12. Insper-SP – O gráfico abaixo mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



Considerando o mês inteiro, o nível médio de água no reservatório é igual a

a) 225 centímetros.
b) 250 centímetros.
c) 275 centímetros.
d) 300 centímetros.
e) 325 centímetros.

13. Fac. Albert Einstein-SP – Pedro e Luiza estão jogando cartas, sendo que, em cada carta está escrito algum número inteiro e positivo. Cada um inicia o jogo com 5 cartas e informa ao adversário a média dos números de suas cartas. No início do jogo, Pedro avisou que a média de suas cartas era 6 e Luiza avisou que a média de suas cartas era 4. Na primeira rodada Pedro passou uma carta para Luiza e ela passou uma carta para Pedro que estava escrito o número 1.

Se a média das cartas que Pedro passou a ter ficou igual a 4,8, o número da carta que Pedro passou para Luiza era

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.

14. Insper-SP (adaptado) – Para fazer parte do time de basquete de uma escola, é necessário ter, no mínimo, 11 anos. A média das idades dos cinco jogadores titulares desse time é 13 anos, sendo que o mais velho deles tem 17 anos. Dessa forma, o segundo mais velho do time titular pode ter, no máximo, quantos anos?

15. Fuvest – Em uma classe com 14 alunos, 8 são mulheres e 6 são homens. A média das notas das mulheres no final do semestre ficou 1 ponto acima da média da classe. A soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres. Então, a média das notas dos homens ficou mais próxima de

a) 4,3
b) 4,5
c) 4,7
d) 4,9
e) 5,1

16. FGV-RJ (adaptado) – Considere quatro números inteiros positivos. A cada um desses quatro números soma-se a média aritmética dos outros três, obtendo-se como resultados os números 48, 42, 32 e 34.

Quais são esses quatro números?

17. UFRN – Considere, a seguir, uma tabela com as notas de quatro alunos em três avaliações e a matriz M formada pelos dados dessa tabela.

	Avaliação 1	Avaliação 2	Avaliação 3
Thiago	8	9	6
Maria	6	8	7
Sônia	9	6	6
André	7	8	9

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

O produto $\frac{1}{3}M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde à média

a) de todos os alunos na Avaliação 3.
b) de cada avaliação.
c) de cada aluno nas três avaliações.
d) de todos os alunos na Avaliação 2.

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C7-H28

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

a) I.
b) II.
c) IV.
d) V.
e) VII.

19. Enem C7-H27

Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

20. Enem C7-H27

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M < 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a) 7,00.
b) 7,38.
c) 7,50.
d) 8,25.
e) 9,00.

44 ESTATÍSTICA – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL II

- Medidas de tendência central II
- Medidas de dispersão

HABILIDADES

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursos para a construção de argumentos.

PHONLAMAIPHOTO/ISTOCKPHOTO

As linhas de produção de alta escala devem sempre acompanhar as tendências da época.

Introdução

Com o surgimento das linhas de produção, a discussão sobre a qualidade dos produtos estava direcionada à procura de defeitos e possíveis falhas na fabricação de produtos. Posteriormente, a qualidade no processo de produção passou a ser avaliada por meio de modelos estatísticos, sendo inspecionadas pequenas amostras produzidas do montante e com o uso dos modelos estatísticos adequados, sendo feitas as possíveis correções de rotas na fabricação dos produtos.

Por fim, chegamos ao conceito de controle de qualidade ou qualidade total, em que o foco deixou de ser apenas a produção de determinado material e passou a abranger o todo, desde o operador de uma máquina até o cliente final.

MEDIANA

Refere-se ao valor central que divide um conjunto de dados em duas partes com o mesmo número de elementos. Para determinar a **mediana (M_e)**, primeiramente se ordenam os dados do menor para o maior. Se o número de observações é ímpar, a mediana corresponde à observação central. Se é par, a mediana refere-se à média aritmética das duas observações centrais.

Vamos analisar os casos a seguir.

Exemplo 1

Consideremos a série de valores 1, 8, 7, 5, 4, 6, 10, 3, 6.

De acordo com a definição de mediana, o primeiro passo é ordenarmos os valores (de forma crescente ou decrescente):

1, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 10.

Neste caso, como o número de termos é ímpar, a mediana é 6, já que existem 4 elementos abaixo e outros 4 acima dele. Ou seja, a mediana (M_e) divide o conjunto de dados em duas partes iguais, cada uma com 4 elementos.

Exemplo 2

Vamos considerar a série de valores de quantidade par 3, 4, 2, 7, 5, 9, 8, 1, 9, 10.

De acordo com a definição de mediana, o primeiro passo é ordenarmos os valores (de modo crescente ou decrescente):

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 9, 10.

$$M_e = \frac{5+7}{2} = 6$$

Neste caso, como o número de termos é par, a mediana é dada pela média aritmética dos termos centrais 5 e 7. De modo geral, para dados não agrupados em intervalos, temos:

- Se n for ímpar, a mediana será o elemento central posicionado em $\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Ou seja, será o elemento central da série em ordem.
- Se n for par, a mediana será a média entre os dois elementos mais centrais da série em ordem.
- Assim a mediana será a média entre os elementos de posição $\left(\frac{n}{2}\right)$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$

Exemplo 3

Vamos considerar a massa (em kg) de 8 objetos em análise em um laboratório. São eles: 7,8; 8,2; 8,6; 5,8; 6,9; 8,0; 7,5; 6,3.

Ordenando os valores, temos 5,8; 6,3; 6,9; 7,5; 7,8; 8,0; 8,2; 8,6.

O número de observações é par, então a mediana é dada pela média dos dois valores centrais. Nesse caso, 7,5 e 7,8, pois ocupam as posições 4 e 5 da série.

Assim:

$$M_e = \frac{7{,}5 + 7{,}8}{2} = 7{,}65 \text{ kg}$$

Podemos obter a mediana na tabela de frequência absoluta por meio de um processo relativamente simples.

FREQUÊNCIA ACUMULADA

Trata-se do número de vezes em que uma variável assume valor inferior ou igual ao valor considerado na situação em pauta. A coluna de valores obtidos com a frequência acumulada é útil para determinarmos a mediana.

Por exemplo:

Nº de filhos	Nº de pessoas (fi)	Frequência acumulada (Fac)
0	3	3
1	10	13
2	7	20
3	2	22
4	1	23
	$\sum = 23$	

Nesse caso, a mediana (M_e) é igual a 1 filho, pois a posição em que se encontra a mediana x_{12} linha que corresponde aos elementos da posição x_4 até x_{12}.

Considerando que o conjunto tem 23 elementos, então a mediana é dada pelo termo central da série. No caso, o elemento x_{12}, ou seja, o 12º elemento. Observando a tabela, percebemos que a mediana é 1.

MODA

Refere-se ao conjunto de valores que apresenta a maior frequência, ou seja, o que ocorre mais vezes na relação.

Ao determinarmos a moda (M_o) do conjunto de elementos, encontramos três situações:

- existência de apenas uma moda;
- existência de mais de uma moda;
- ausência de moda.

Vamos analisar os casos a seguir.

Exemplo 1

Encontre a moda dos conjuntos de valores.

a) 2, 3, 4, 3, 5, 4, 3

Há uma moda, isto é, $M_o = 3$, pois o elemento 3 é o que mais se repete.

b) 4, 3, 7, 5, 7, 6, 5

Há duas modas: 5 e 7. Caso de distribuição bimodal.

c) 8, 7, 5, 4, 3, 2, 9

Não há moda. Os valores aparecem apenas uma vez. Trata-se de distribuição amodal.

Exemplo 2

Um profissional revisor de livros analisa a quantidade de defeitos encontrados em 55 livros vistoriados.

Nº de defeitos	Quantidade de livros
0	35
1	15
2	3
3	2
4	1
	55

A quantidade "zero" defeitos é a variável que mais vezes se repete. Portanto, a moda é 0 defeitos (frequência = 35 livros).

Encontrarmos a moda da distribuição visualizada na tabela significa determinar a maior frequência da série. No caso, observamos que o número de caixas com zero defeito é o de maior frequência.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Dispersão é sinônimo de variação ou variabilidade. Para medirmos a dispersão, usamos mais frequentemente duas medidas: **amplitude** e **desvio-padrão**.

AMPLITUDE

Denotada por **A**, refere-se à diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados. A amplitude também é chamada **amplitude total** ou **range** (R).

Vamos analisar o caso a seguir.

Exemplo

Uma auditoria em uma grande empresa observou os maiores custos em 10 de seus produtos (em reais):

250 350 300 280 290
400 450 420 390 400

Determinarmos a amplitude do conjunto de dados significa encontrar a diferença entre o maior e o menor valor da série.

Assim: A = 450 − 250 ∴ A = 200 reais.

A definição de desvio-padrão exige sabermos o que seja variância.

As notações mais comuns são:

- σ^2: variância (populacional);
- σ: desvio-padrão (populacional) – corresponde à raiz quadrada da variância.

VARIÂNCIA

Variância da população $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ de n elementos é a medida de dispersão definida como a média do quadrado dos desvios dos elementos em relação à média aritmética. Ou seja, a variância populacional é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Usando o símbolo de somatório, podemos escrever:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Vamos observar o caso na sequência.

Exemplo

Consideremos o conjunto formado pelo elementos 80, 93, 86, 98, 89.

Antes da variância, calculamos a média x. Em seguida, aplicamos os valores obtidos na fórmula:

$$\bar{x} = \frac{80 + 93 + 86 + 98 + 89}{5} = \frac{446}{5} = 89{,}2$$

Aplicando os valores na fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{(80 - 89{,}2)^2 + (93 - 89{,}2)^2 + (86 - 89{,}2)^2 + (98 - 89{,}2)^2 + (89 - 89{,}2)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-9{,}2)^2 + (3{,}8)^2 + (-3{,}2)^2 + (8{,}8)^2 + (-0{,}2)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{84{,}64 + 14{,}44 + 10{,}24 + 77{,}44 + 0{,}04}{5} = \frac{186{,}8}{5} = 37{,}36$$

Portanto, a variância do conjunto desses elementos é 37,36.

DESVIO-PADRÃO

Refere-se à raiz quadrada da variância. Dessa forma, o desvio-padrão populacional é dado por:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ou seja:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})}{n}}$$

Vamos acompanhar o caso a seguir.

Exemplo

Consideremos o conjunto de elementos 80, 93, 86, 74, 92, 85, 98, 89.

$$\bar{x} = \frac{80+93+86+74+92+85+98+89}{8} = \frac{697}{8} = 87{,}125$$

Subtraímos x de cada valor, elevamos os resultados ao quadrado e os somamos. Dividimos o total dos quadrados pelo número de valores (n = 8) e extraímos a raiz quadrada:

$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
80 – 87,125 = –7,125	$(-7{,}125)^2$ = 50,765625
93 – 87,125 = 5,875	$(5{,}875)^2$ = 34,515625
86 – 87,125 = –1,125	$(-1{,}125)^2$ = 1,265625
74 – 87,125 = –13,125	$(-13{,}125)^2$ = 172,265625
92 – 87,125 = 4,875	$(4{,}875)^2$ = 23,765625
85 – 87,125 = –2,125	$(-2{,}125)^2$ = 4,515625
98 – 87,125 = 10,875	$(10{,}875)^2$ = 118,265625
89 – 87,125 = 1,875	$(1{,}875)^2$ = 3,515625
	Total = 408,875

$$\sigma = \sqrt{\frac{408{,}88}{8}} = \sqrt{51{,}11} = 7{,}15$$

Portanto, o desvio-padrão é de aproximadamente 7,15.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UFPR (adaptado) – Segundo a Prefeitura Municipal de Matinhos-PR, em 2010 foram destinados para o aterro sanitário 12 689 645 kg de resíduos sólidos, coletados mensalmente, conforme os dados abaixo. Então é correto afirmar que, nos meses de alta temporada (dezembro, janeiro e fevereiro), a média e a mediana de resíduos sólidos coletados em 2010 foram, respectivamente, de:

Mês	Quantidade (kg)
Janeiro	2 813 190
Fevereiro	1 778 870
Março	798 150
Abril	691 140
Maio	607 440
Junho	625 010
Julho	647 135
Agosto	597 730
Setembro	786 210
Outubro	714 880
Novembro	851 740
Dezembro	1 778 150
Total	12 689 645

Fonte: Plano de Gerenciamento Integrado dos Resíduos Sólidos (02/2012)

a) 3 185 105 e 1 778 870 kg.
b) 2 123 403,33 e 2 813 190 kg.
c) 1 778 870 e 1 778 150 kg.
d) 2 123 403,33 e 1 778 870 kg.
e) 530 850,83 e 1 778 150 kg.

Resolução

Inicialmente calculamos a média. Assim:

$$\text{Média} = \frac{1\,778\,150 + 2\,813\,190 + 1\,778\,870}{3} =$$

$$= \frac{6\,370\,210}{3} = 2\,123\,403{,}33 \text{ kg}$$

Depois, organizamos os três valores (correspondentes a dezembro, janeiro e fevereiro): 1 778 150, 1 778 870 e 2 813 190. Assim, obtemos a mediana = termo central da tabela = 1 778 870 kg

2. UEG-GO – A professora Maria Paula registrou as notas de sete alunos, obtendo os seguintes valores: 2, 7, 5, 3, 4, 7 e 8. A mediana e a moda das notas desses alunos são, respectivamente:

a) 3 e 7
b) 3 e 8
c) 5 e 7
d) 5 e 8
e) 3 e 5

Resolução

Ordenando a sequência de forma crescente, obtemos 2, 3, 4, 5, 7, 7 e 8. Então, como a série tem sete valores, a mediana é M_e = 5. Como o valor mais frequente é 7, a moda é M_o = 7.

3. Unicamp (adaptado) – Os dados a seguir foram obtidos em indivíduos contaminados pelo veneno de certo tipo de inseto e submetidos a tratamento. A variável de interesse RECUP é definida como o tempo (em horas) entre a administração do tratamento e a recuperação do indivíduo. Os valores de RECUP são:

{3, 20, 20, 10, 4, 10, 10, 3, 12, 8, 5, 1, 3, 3, 8}

Determinando a média, a variância e o desvio-padrão populacional, e dispersão em % (coeficiente de variação dado pela razão entre o desvio-padrão e a média aritmética) ou pontos percentuais, obtemos uma série de valores de referência. Qual das alternativas a seguir é considerada incorreta ao analisarmos os cálculos e seus resultados?

a) A média é igual a 8 horas
b) A variância vale 32,67 horas

c) O desvio-padrão é 5,71 horas

d) A dispersão em %, ou coeficiente de variação, vale 71,38%

e) Se considerarmos a dispersão (%) máxima admissível igual a 20%, pode-se informar que a dispersão não é elevada, ou seja, a variação dos tempos de recuperação (em horas) está abaixo do admissível.

Resolução

Organizando os dados na tabela de frequência, calculamos a média aritmética, a variância e o desvio-padrão.

Tempo (x_i)	(Frequência)	$(x - \bar{x})$
1	1	$(8 - 1)^2 = 49$
3	4	$(8 - 3)^2 = 25$
4	1	$(8 - 4)^2 = 16$
5	1	$(8 - 5)^2 = 9$
8	2	$(8 - 8)^2 = 0$
10	3	$(8 - 10)^2 = 4$
12	1	$(8 - 12)^2 = 16$
20	2	$(8 - 20)^2 = 144$
Total	15	

Inicialmente temos a média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{1(1)+4(3)+1(4)+1(5)+2(8)+3(10)+1(12)+2(20)}{1+4+1+1+2+3+1+2}$$

$$\overline{x_A} = \frac{1+12+4+5+16+30+12+40}{15}$$

$$\overline{x_A} = \frac{120}{15} = 8 \text{ horas}$$

Depois calculamos a variância (var):

$$\sigma^2 = \frac{1(49)+4(25)+1(16)+1(9)+2(0)+3(4)+1(16)+2(144)}{1+4+1+1+2+3+1+2}$$

$$\sigma^2 = \frac{49+100+16+9+0+12+16+288}{15}$$

$$\sigma^2 = \frac{490}{15} = 32,67 \text{ horas}$$

Na sequência, calculamos o desvio-padrão, que é a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{32,67} = 5,71 \text{ horas}$$

Finalmente calculamos a dispersão (em %) ou o coeficiente de variação (CV), dado pela razão entre o desvio-padrão e a média aritmética. Multiplicamos, assim, o resultado por 100:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = 5,718 \cdot 100 = 71,38\% \text{ de dispersão}$$

Ou seja, muito acima do admissível, que nesse caso é 20%.

ROTEIRO DE AULA

ESTATÍSTICA

Medidas de tendência central II

MEDIANA (M_e) é o valor central que divide um conjunto de dados em duas partes com o mesmo número de elementos.

MODA (M_o) do conjunto de valores é o valor que apresenta a maior frequência, ou seja, o que ocorre mais vezes na relação.

Medidas de dispersão

AMPLITUDE é a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados. Também chamada amplitude total ou range (R).

VARIÂNCIA

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

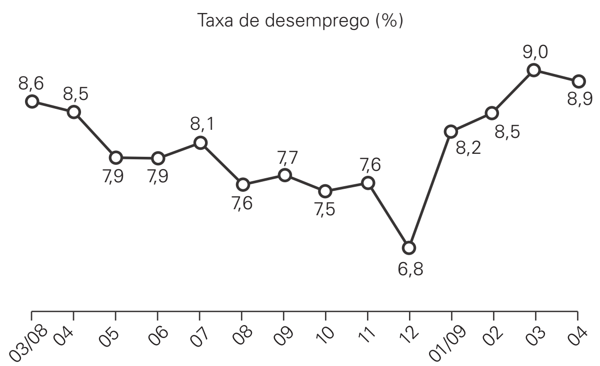
Desvio-padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C7-H27

O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.



IBGE. *Pesquisa mensal de emprego.* <Disponível em: www.ibge.gov.br>. Acesso em: 30 jul. 2012. (Adaptado.)

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

a) 8,1%
b) 8,0%
c) 7,9%
d) 7,7%
e) 7,6%

Organizando os dados, teremos:
6,8 – 7,5 – 7,6 – 7,6 – 7,7 – 7,9 – 7,9 – 8,1 – 8,2 – 8,5 – 8,5 – 8,6 – 8,9 – 9,0
Logo, o cálculo da mediana será:

$$\left.\begin{matrix}7{,}9\\8{,}1\end{matrix}\right\} \to \frac{7{,}9+8{,}1}{2}=8$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

2. UPE – As idades dos atletas que participaram da Seleção Brasileira Masculina de Basquete, convocados para a preparação dos Jogos Olímpicos 2016, variaram de 24 a 36 anos, como se pode observar na tabela a seguir:

Idade (anos)	24	26	28	30	32	33	35	36
Número de atletas	3	1	1	1	1	4	1	2

De acordo com a tabela, a *média*, a *mediana* e a *moda* dessas idades são, respectivamente:

a) 30,5; 32,5; e 33
b) 31; 32; e 33
c) 31,5; 31; e 33
d) 30,5; 31; e 24
e) 31; 24; e 33

Calculando, obtemos:

$$\text{Média} = \frac{3\cdot 24 + 26 + 28 + 30 + 32 + 4\cdot 33 + 35 + 2\cdot 36}{3+1+1+1+1+4+1+2} = 30{,}5$$

A mediana é a média entre o sétimo e o oitavo termo. Consequentemente:

$$\text{Mediana} = \frac{32+33}{2} = 32{,}5$$

A moda é o termo que mais vezes aparece. Logo, 33 anos.

3. Famerp-SP (adaptado) – Sendo x um número inteiro, a mediana do conjunto {3, 7, 2, −3, 13, 9, −1, x} de oito números é igual a $\frac{7}{2}$. Dessa forma, qual o valor de x?

Calculando, obtemos:
–3 –1 2 3 7 9 13
Termo central = 3

$$\text{Mediana} = \frac{3+x}{2} = \frac{7}{2} \to x = 4$$

4. UFJF-MG – Um nutricionista indicou três dietas diferentes para grupos de pacientes que gostariam de perder peso (em quilogramas). A tabela a seguir indica a perda de peso (em quilogramas) por paciente de cada grupo.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
2	2	3
3	2	4
4	2	4
4	3	4
5	3	5
6	5	6
8	8	6
10	9	5

A partir desses dados, a média de perda de peso do grupo 1, a mediana de perda de peso do grupo 3 e a moda da perda de peso do grupo 2 é dado, respectivamente, por:

a) 5,25; 4,5; 2,0.
b) 4,25; 4,5; 3,0.
c) 4,75; 2,0; 4,0.
d) 5,25; 3,0; 4,5.
e) 4,75; 4,0; 4,5.

A eliminação de peso médio do grupo 1 é obtida por:

$$\frac{2+3+4+4+5+6+8+10}{8} = \frac{42}{8} = 5{,}25$$

A moda do grupo 2 é 2.

Organizando as perdas de peso do grupo 3, teremos 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6. Então, a perda de peso mediana desse grupo é $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

5. Enem C7-H29

O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio-padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

a) I e III.
b) I e IV.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

O que menos aparece regularmente é o que mostra maior desvio-padrão. O mais regular é o que apresenta menor desvio-padrão. Logo, a luta acontecerá entre os atletas II e III.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

6. UFPR – Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

Lanchonete	Preço
A	R$ 10,75
B	R$ 6,00
C	R$ 9,50
D	R$ 11,00
E	R$ 5,25
F	R$ 7,00
G	R$ 10,50
H	R$ 8,00

a) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela.

b) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa. Ao considerar todos os 10 estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$ 8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor.

a) Calculando a média, temos:

$$\text{Média} = \frac{10,75+6+9,5+11+5,25+7\ 10,5+8}{8} = 8,5$$

Calculando a mediana, obtemos:

Preço	Lanchonete
R$ 5,25	E
R$ 6,00	B
R$ 7,00	F
R$ 8,00	H
R$ 9,50	C
R$ 10,50	G
R$ 10,75	A
R$ 11,00	D

Os valores medianos são os das lanchonetes H e C. Sendo assim:

$$\text{Mediana} = \frac{8+9,5}{2} = 8,75$$

b) Temos x como o preço cobrado por cada lanchonete complementar. Assim:

$$8,45 = \frac{2x+10,75+6+9,5+11+5,25+7+10,5+8}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow 84,5 = 68 + 2x \rightarrow 2x = 16,5 \rightarrow x = 8,25$$

Logo, as lanchonetes cobrarão R$ 8,25 na jarra de suco.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Enem C7-H28

Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

8. Enem C7-H27

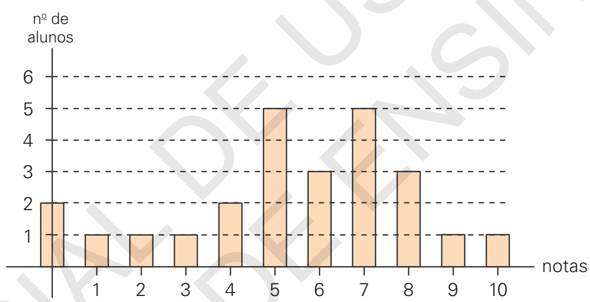
Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70 **b)** 20,77 **c)** 20,80 **d)** 20,85 **e)** 20,90

9. PUC-Rio – O gráfico de barras abaixo mostra a distribuição das notas de uma turma de alunos em uma prova de matemática. A nota é sempre um número inteiro de 0 a 10.



Assim, por exemplo, 2 alunos tiraram zero, e 1 aluno tirou dez.

a) Quantos alunos tiraram nota maior ou igual a 7?

b) Se a nota mínima para aprovação é 5, qual é a porcentagem de alunos aprovados?

c) Qual é a mediana das notas dos alunos desta turma? Lembre que a mediana é a nota N tal que pelo menos a metade dos alunos tira nota menor ou igual a N, e que pelo menos a metade dos alunos tira nota maior ou igual a N.

10. Enem C7-H27

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

a) 17°C,17°C e 13,5°C
b) 17°C,18°C e 13,5°C
c) 17°C,13,5°C e 18°C
d) 17°C,18°C e 21,5°C
e) 17°C, 13,5°C e 21,5°C

11. EPCAr-SP – As notas de oito alunos numa prova de matemática foram escritas pelo professor numa tabela como a que segue:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H
Nota	6,5	10	8	9,4	8	6,4	X	7,4

Sabe-se que a média aritmética dessas notas é 8,2.

Considerando as notas dos oito alunos, é correto afirmar que a nota do aluno G é

a) igual à moda.
b) inferior a 9,8.
c) superior à mediana.
d) inferior à média aritmética das outras sete notas.

12. UPE – A nutricionista de uma escola fez a medição da massa (peso) de alguns alunos para analisar o cardápio escolar e montou a tabela a seguir. Com base nessa tabela, determine a moda e a média das massas (pesos) desses estudantes.

Número de alunos	Pesos (kg)
1	50
2	40
3	80
4	60
5	65
6	55
7	75
8	45

a) moda = 80 kg e média = 58,75 kg
b) moda = 80 kg e média = 59,72 kg
c) moda = 45 kg e média = 59,72 kg
d) moda = 45 kg e média = 58,72 kg
e) moda = 80 kg e média = 59,75 kg

13. FGV (adaptado) – Removendo um número do conjunto {11, 12, 17, 18, 23, 29 e 30} formamos um novo conjunto com média aritmética dos elementos igual a 18,5. Qual a mediana dos elementos desse novo conjunto?

14. UPE – Trezentos candidatos se submeteram ao teste de seleção para vaga de emprego em uma grande empresa sediada em Pernambuco. Os resultados estão agrupados na tabela a seguir:

DESEMPENHO DOS CANDIDATOS NO TESTE DE SELEÇÃO	
Pontuação no teste de seleção	Número de candidatos
80 ⊢ 90	20
90 ⊢ 100	100
100 ⊢ 110	120
110 ⊢ 120	50
120 ⊢ 130	10

Com base nessas informações, os valores aproximados da variância e do desvio-padrão são respectivamente:

a) 103 e 10,15
b) 102,5 e 10,09
c) 94,6 e 9,72
d) 84,9 e 9,21
e) 76 e 8,71

15. Udesc – Sejam a e b ∈ R. O valor do desvio-padrão, de modo que o conjunto de dados ordenados {14, 17, 22, a, b, 37} tenha média e mediana iguais a 24, é:

a) $\sqrt{59}$
b) $\sqrt{62}$
c) $\sqrt{58}$
d) $\sqrt{57}$
e) $\sqrt{\dfrac{19}{3}}$

16. FGV – A tabela mostra a série de um indicador econômico de um país, em bilhões de US$, nos 12 meses de 2013.

Jan	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
21	24	20	23	22	22	18	17	16	17	16	18

a) Calcule a média, a(s) moda(s), a mediana e a maior taxa mensal de crescimento (em porcentagem) dessa série.

b) Sabe-se que, em janeiro de 2014, esse indicador econômico atingiu um valor positivo para o qual a nova série (de janeiro de 2013 até janeiro de 2014) passou a ter mediana de 18 bilhões US$, e um número inteiro de bilhões de US$ como média mensal. Calcule o desvio médio (DM) dessa nova série.

Dado:

Desvio médio = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$, sendo $\overline{x}$ a média aritmética.

17. Fuvest – Cada uma das cinco listas dadas é a relação de notas obtidas por seis alunos de uma turma em uma certa prova.

Assinale a única lista na qual a média das notas é maior do que a mediana.

a) 5, 5, 7, 8, 9, 10
b) 4, 5, 6, 7, 8, 8
c) 4, 5, 6, 7, 8, 9
d) 5, 5, 5, 7, 7, 9
e) 5, 5, 10, 10, 10

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C7-H29

Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será

a) K **b)** L **c)** M **d)** N **e)** P

19. Enem C7-H29

Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito

	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

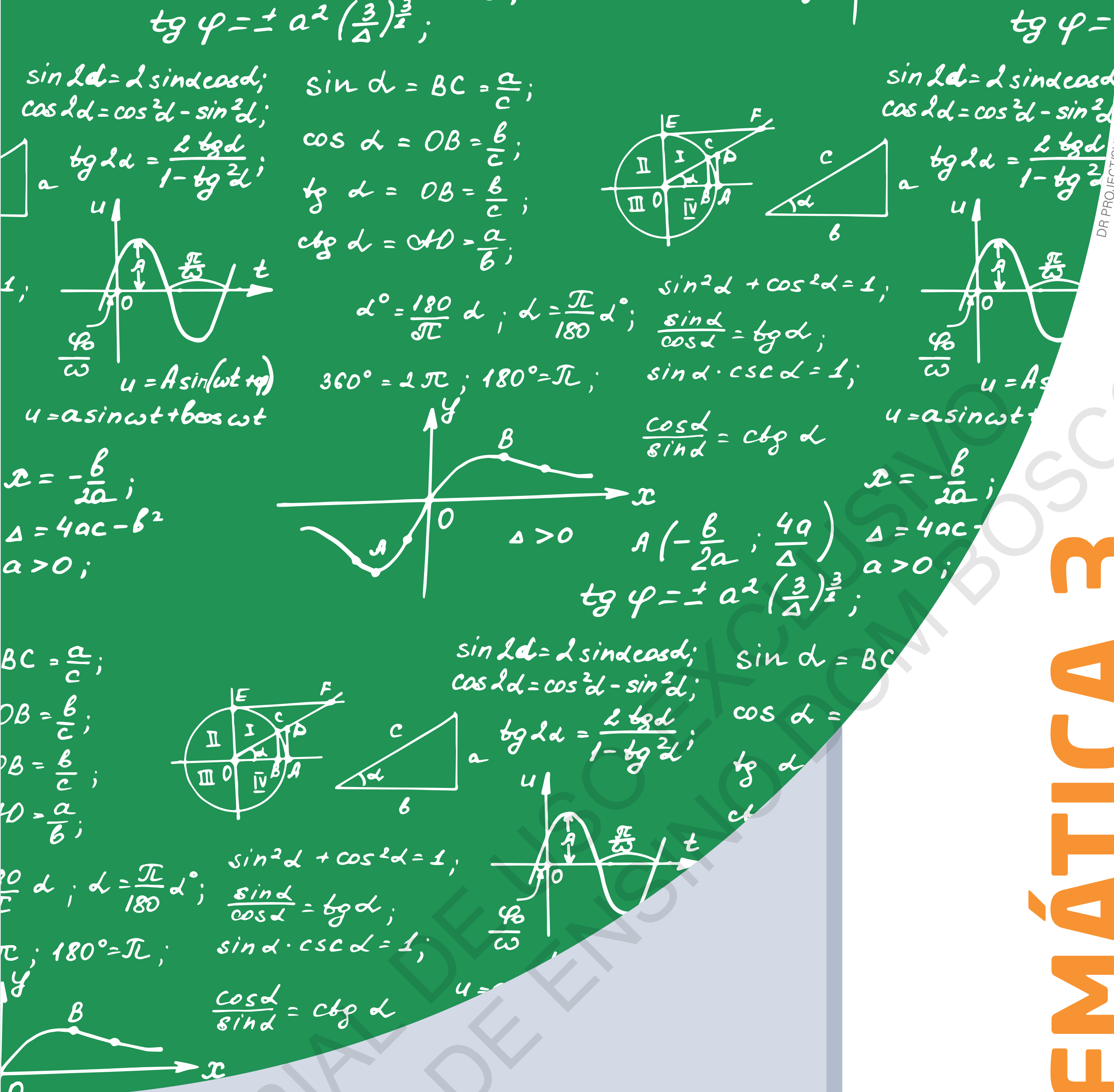
a) branca e os de número 38
b) branca e os de número 37
c) branca e os de número 36
d) preta e os de número 38
e) preta e os de número 37

20. Enem C7-H29

Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m^2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m^2).

A variância das produções dos talhões expressa em $(\text{sacas/hectare})^2$ é

a) 20,25
b) 4,50
c) 0,71
d) 0,50
e) 0,25



MATEMÁTICA 3

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

17 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM I

- Análise combinatória
- Fatorial de um número
- Princípio da contagem

HABILIDADES

- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Calcular o fatorial de número natural.
- Determinar o total de possibilidades de ocorrência de um evento usando o princípio fundamental da contagem (PFC) e o princípio da preferência (PP).


AZMANL

Variados tipos do Cubo de Rubik.

Introdução

O Cubo de Rubik (também conhecido como Cubo Mágico) é um dos brinquedos mais populares do mundo. Sem considerarmos as diversas imitações, são quase 1 bilhão de unidades vendidas até hoje. Foi criado em 1974 pelo húngaro Erno Rubik, professor do Departamento de Desenho de Interiores da Academia de Artes e Trabalhos Manuais de Budapeste. Trata-se de um cubo geralmente confeccionado de plástico com 6 faces de 6 cores diferentes. A versão mais comum é a de $3 \cdot 3 \cdot 3$, mas existem as de $2 \cdot 2 \cdot 2$, $4 \cdot 4 \cdot 4$ ou $5 \cdot 5 \cdot 5$. Esse brinquedo conta com a gigantesca quantidade de 43 252 003 274 489 856 000 combinações possíveis – ou seja, mais de 43 quintilhões delas.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é mais uma área da Matemática cujas aplicações podemos observar no cotidiano. Neste módulo, iniciaremos com os estudos sobre a quantidade de possibilidades de determinados eventos ocorrerem, para podermos, enfim, abordar as probabilidades de eles acontecerem. Sejam em pesquisas eleitorais, na análise de combinações possíveis em competições esportivas ou no cálculo das possibilidades de ganhos em jogos de azar, serão frequentes os cálculos de produtos que tenham como fatores todos os números inteiros positivos de 1 até um fator n. Para representar tal produto, usaremos o chamado **fatorial de um número**.

FATORIAL DE UM NÚMERO

Sendo **n** um número natural maior que 1, o fatorial de **n**, representado por **n!**, é o produto de todos os números naturais de **n** até 1, reduzindo uma unidade por vez.

n!: lê-se “n fatorial”.
Definição em particular: $0! = 1$ e $1! = 1$.
Exemplos:
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$
$(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!$

Um recurso muito utilizado para simplificar expressões com fatoriais é desenvolver o fatorial organizando os fatores (produto dos números naturais de n até 1) em ordem decrescente. Observe o exemplo:

$$\frac{50!}{48!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48!}{48!} = 50 \cdot 49 = 2\,450$$

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A regra para determinar o número de possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de escrita de todos os eventos possíveis, é denominada **princípio fundamental da contagem (PFC)** ou **princípio multiplicativo.**

Por exemplo, um professor licenciado em Geografia (G) e História (H) envia seu currículo para três colégios distintos (A, B e C). Supondo que ele só ministrará aula de uma única disciplina, quantas seriam as possibilidades de trabalho para o professor?

Na ilustração a seguir, estão representadas todas as situações possíveis.

G - A	G - B	G - C
H -A	H - B	H - C

Concluímos que o professor tem 6 possibilidades distintas de trabalho.

Pelo princípio multiplicativo, podemos obter as possibilidades de trabalho do professor da seguinte maneira:

1º Graduado em Geografia e História: **m** diplomas ($m = 2$).
2º Envio de currículo para os colégios: **n** colégios ($n = 3$).
3º Possibilidades: $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 2 \cdot 3 = 6$.
4º Portanto, há 6 possibilidades distintas de emprego para o professor.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Fuvest – Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente do algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

a) 551
b) 552
c) 553
d) 554
e) 555

Resolução

Pelo princípio multiplicativo, calculamos todas as senhas possíveis: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ senhas.

Ao posicionar os algarismos 1 e 3, formando o número 13, temos as seguintes situações:

1	3	5 Algarismos	5 Algarismos	$5 \times 5 = 25$	75 possibilidades
5 Algarismos	1	3	5 Algarismos	$5 \times 5 = 25$	
5 Algarismos	5 Algarismos	1	3	$5 \times 5 = 25$	

Como a sequência a seguir foi contada duas vezes, temos:

1	3	1	3

$75 - 1 = 74$ possibilidades.

Logo, o número total de senhas possíveis será: $625 - 74 = 551$.

2. Sistema Dom Bosco – Se simplificarmos

$\dfrac{(n+2)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n-1)!}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, obteremos:

a) 1
b) 2
c) n
d) $n + 1$
e) $n - 1$

Resolução

$$\frac{(n+2)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n-1)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n-1)!} = n$$

ROTEIRO DE AULA

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM I

Fatorial de um número

Sendo n um número natural maior que 1, o fatorial de n, representado por n!, é o produto de todos os números naturais menores ou iguais a n.

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 1!$

Princípio fundamental da contagem

A regra que permite determinar o número de possibilidades de ocorrência de um evento, sem a necessidade de escrita de todos os eventos possíveis, é denominada princípio fundamental da contagem (PFC) ou princípio multiplicativo.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. ESPM – Para $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$, a expressão $\dfrac{(x-1)! \cdot x!}{(x^2-2)! \cdot (x+1)!}$ é equivalente a:

a) $x - 2$

b) $(x - 2)!$

c) $(x - 1)!$

d) x

e) $x - 1$

$$\frac{(x^2-1)! \cdot x!}{(x^2-2)! \cdot (x+1)!} = \frac{(x^2-1) \cdot (x^2-2)! \cdot x!}{(x^2-2)! \cdot (x+1)!} = \frac{(x^2-1) \cdot x!}{(x+1)!} =$$

$$= \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot x!}{(x+1) \cdot x!} = x - 1$$

2. Enem C7-H30

Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

a) 100

b) 90

c) 80

d) 25

e) 20

Deduzindo que serão empregadas apenas as vogais A, E, I, O e U, pelo princípio multiplicativo, a resposta será: $10 \cdot 10 = 100$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

3. UFRGS-RS (adaptado) – Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, qual a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter?

Como os números precisam ser divisíveis por 5, o último algarismo deve ser 5.

Portanto, vamos formar números com 3 algarismos principais escolhidos dentre os números do conjunto {1, 3, 7, 9}.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Logo, são 24 números possíveis.

4. EsPCEx – Duas instituições financeiras fornecem senhas para seus clientes, construídas segundo os seguintes métodos:

1ª instituição: **5** caracteres distintos formados por elementos do conjunto **{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**;

2ª instituição: **6** caracteres distintos formados por duas letras, dentre as vogais, na primeira e na segunda posições da senha, seguidas por **4** algarismos dentre os elementos do conjunto **{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**.

Para comparar a eficiência entre os métodos de construção das senhas, medindo sua maior ou menor vulnerabilidade, foi definida a grandeza "força da senha", de forma que, quanto mais senhas puderem ser criadas pelo método, mais "forte" será a senha.

Com base nessas informações, pode-se dizer que, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é:

a) 10% mais fraca.

b) 10% mais forte.

c) De mesma força.

d) 20% mais fraca.

e) 20% mais forte.

Total de senhas da 1ª instituição: n.

Para definirmos n, precisamos escolher 5 números principais do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Então, $n = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Total de senhas da 2ª instituição: m.

Para indicarmos, precisamos escolher 2 vogais principais do conjunto {A, E, I, O, U} e 4 números principais do conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Logo, $m = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Elaborando $\frac{n}{m}$:

$$\frac{n}{m} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{n}{m} = 0{,}9$$

$n = 0{,}9m$

$n = (1 - 0{,}1)m$

Portanto, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é 10% mais fraca.

5. FGV – O total de números de cinco algarismos que possuem pelo menos dois dígitos consecutivos iguais em sua composição é igual a:

a) 6 581 **c)** 18 621 **e)** 30 951
b) 9 590 **d)** 27 930

Há $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números de 5 algarismos. Entre eles, temos $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59\,049$ números que não demonstram quaisquer dígitos subsequentes. Sendo assim, o resultado é $90\,000 - 59\,049 = 30\,951$.

6. UPF (adaptado) – As portas de acesso de todos os quartos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados com 3 elementos do conjunto S = {3, 4, 5, 6, 7, 8}. Nessas condições, qual o número máximo de quartos desse hotel?

$6 \cdot 6 \cdot 3 \rightarrow$ número ímpar.

Final 3, 5 ou 7.

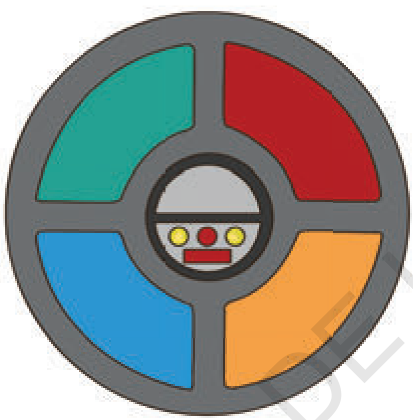
Total $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ opções.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEMG

"Genius era um brinquedo muito popular na década de 1980 (...). O brinquedo buscava estimular a memorização de cores e sons. Com formato semelhante a um OVNI, possuía 4 botões de cores distintas que emitiam sons harmônicos e se iluminavam em sequência. Cabia aos jogadores repetir o processo sem errar".

Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre. (Adaptado).



Considerando uma fase do jogo em que 3 luzes irão acender, de forma aleatória e em sequência, podendo cada cor acender mais de uma vez.

O número máximo de formas que essa sequência de 3 luzes poderá acender é:

a) 12
b) 24
c) 36
d) 64

8. IFPE – Um pixel é o menor elemento de uma imagem digital e, em casos de imagens coloridas, é composto por um conjunto de **3** pontos: vermelho, verde e azul. Cada um desses pontos é capaz de exibir **256** tonalidades distintas. Combinando tonalidades desses três pontos, quantas cores diferentes podem ser exibidas?

a) 3^{256}
b) $3 \cdot 256$
c) 256^3
d) 256
e) $27 \cdot 256$

9. UEG-GO – Érika resolve passear com a cachorrinha Kika e, antes de sair do apartamento, escolhe colocar uma roupa e uma coleira na cachorrinha. Se Kika tem **7** roupas e **3** coleiras, todas distintas, de quantas maneiras Érika pode escolher uma roupa e uma coleira para passear com a Kika?

a) 10
b) 21
c) 35
d) 42

10. Sistema Dom Bosco – Qual o valor de $\frac{10!}{8!}$?

11. Fatec-SP – Dispondo de cinco cores distintas, uma pessoa pretende pintar as letras da palavra FATEC de acordo com os seguintes critérios:

- na palavra, letras que são equidistantes da letra T terão a mesma cor;
- letras adjacentes serão pintadas de cores distintas, e
- cada letra será pintada com uma única cor.

O número de modos distintos de se realizar essa pintura é:

a) 120
b) 90
c) 80
d) 50
e) 40

12. UFJF-MG (adaptado) – Quantos são os números de 7 algarismos distintos divisíveis por 5, começando com um número ímpar, e tal que dois algarismos adjacentes não tenham a mesma paridade, isto é, não sejam simultaneamente pares ou simultaneamente ímpares?

13. Unicamp-SP – Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

ABC 1234	ABCD 123

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria:

a) inferior ao dobro.
b) superior ao dobro e inferior ao triplo.
c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
d) mais que o quádruplo.

14. EsPCEx – A solução da equação

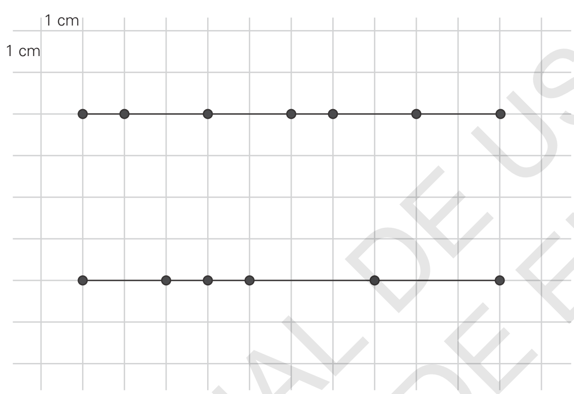
$$\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!} = \frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!}$$ é um número natural:

a) maior que 9.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por 5.
e) múltiplo de 3.

15. Escola Naval – A é um conjunto com **n** elementos e **B** é seu subconjunto com **p** elementos, com $n > p$ e $n, p \in \mathbb{N}$. Determine o número de conjuntos **X**, tais que $\mathbf{B} \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{A}$, e assinale a opção correta.

a) 2^{n-p}
b) 2^{n-p+1}
c) 2^{n+p}
d) 2^{n+p-1}
e) 2^{n-p-1}

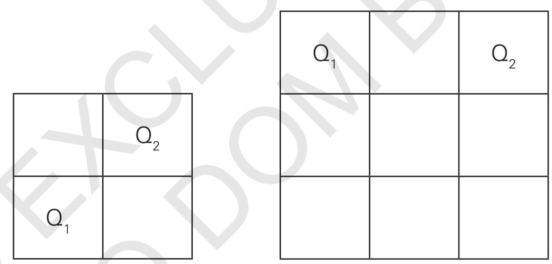
16. Insper-SP – Em uma malha, formada por quadrados de lado medindo **1 cm**, foram traçados dois segmentos paralelos, tendo um deles **7** pontos em destaque, e o outro **6**, conforme indica a figura.



Um quadrilátero deve ser desenhado sobre essa malha, de maneira que tenha os quatro vértices entre os **13** pontos destacados dos segmentos. O quadrilátero deverá ter apenas um par de lados paralelos e área igual a **12 cm²**. O total de quadriláteros diferentes que podem ser desenhados atendendo às condições estabelecidas é igual a:

a) 19
b) 22
c) 29
d) 32
e) 33

17. Fuvest-SP – Um quadriculado é formado por $n \times n$ quadrados iguais, conforme ilustrado para $n = \mathbf{2}$ e $n = \mathbf{3}$. Cada um desses quadrados será pintado de azul ou de branco. Dizemos que dois quadrados $\mathbf{Q_1}$ e $\mathbf{Q_2}$ do quadriculado estão conectados se ambos estiverem pintados de azul e se for possível, por meio de movimentos horizontais e verticais entre quadrados adjacentes, sair de $\mathbf{Q_1}$ e chegar a $\mathbf{Q_2}$ passando apenas por quadrados pintados de azul.



$n = 2$ $n = 3$

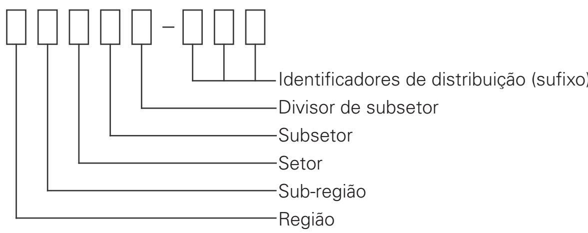
a) Se $n = 2$, de quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto inferior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

b) Suponha que $n = 3$ e que o quadrado central esteja pintado de branco. De quantas maneiras distintas será possível pintar o restante do quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

c) Suponha que $n = 3$. De quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

18. Enem C7-H28

O Código de Endereçamento Postal (CEP) é um código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios.

A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: <www.correios.com.br>. Acesso em: 22 ago. 2017. (Adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

a) $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$
b) $10^5 + 9 \cdot 10^2$
c) $2 \cdot 9 \cdot 10^7$
d) $9 \cdot 10^2$
e) $9 \cdot 10^7$

19. Enem C7-H29

Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

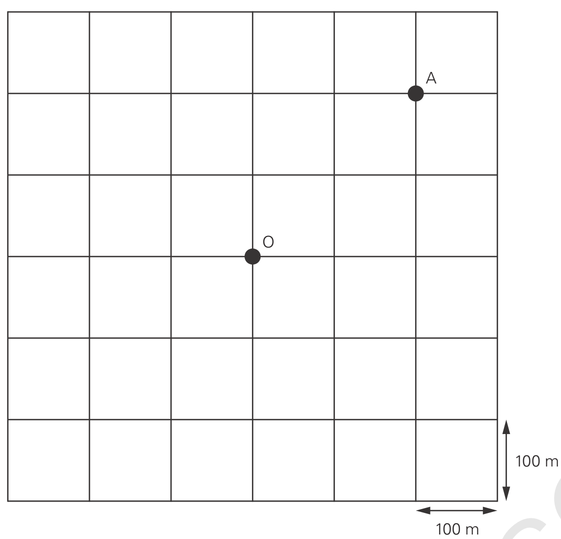
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

20. Enem C7-H30

As ruas de uma cidade estão representadas por linhas horizontais e verticais na ilustração. Para um motorista trafegando nessa cidade, a menor distância entre dois pontos não pode ser calculada usando o segmento ligando esses pontos, mas sim pela contagem do menor número de quadras horizontais e verticais necessárias para sair de um ponto e chegar ao outro. Por exemplo, a menor distância entre o ponto de táxi localizado no ponto O e o cruzamento das ruas no ponto A, ambos ilustrados na figura, é de 400 metros.



Um indivíduo solicita um táxi e informa ao taxista que está a 300 metros do ponto O, segundo a regra de deslocamentos citada, em uma determinada esquina. Entretanto, o motorista ouviu apenas a informação da distância do cliente, pois a bateria de seu celular descarregou antes de ouvir a informação de qual era a esquina.

Quantas são as possíveis localizações desse cliente?

a) 4
b) 8
c) 12
d) 16
e) 20

18

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM II

- Diagrama de árvore
- Princípio da preferência (PP)

HABILIDADES

- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Calcular o fatorial de número natural.
- Determinar o total de possibilidades de ocorrência de um evento usando o princípio fundamental da contagem (PFC) e o princípio da preferência (PP).

STYLE-PHOTOGRAPHY

Para abrir um cofre, é necessário usar uma senha de segurança.

Introdução

No Antigo Egito, era comum guardar riquezas em grandes baús, reforçados e escondidos em locais seguros. O primeiro registro da existência de um cofre, um baú de cedro, data de mais de 2 700 anos, na cidade grega de Corinto. Na Roma Antiga, os cofres eram de ferro e tinham cadeados, sendo protegidos por escravos dia e noite. Já em 1844, o francês Alexandre Fichet criou os cofres como conhecemos, resistentes a água e fogo e com dispositivo de abertura de alta segurança. Atualmente, eles contam com combinações numéricas sofisticadas, leituras biométricas e aberturas programadas. Assim, os cofres continuam sendo utilizados com a mesma finalidade desde sua invenção na Antiguidade.

DIAGRAMA DE ÁRVORE

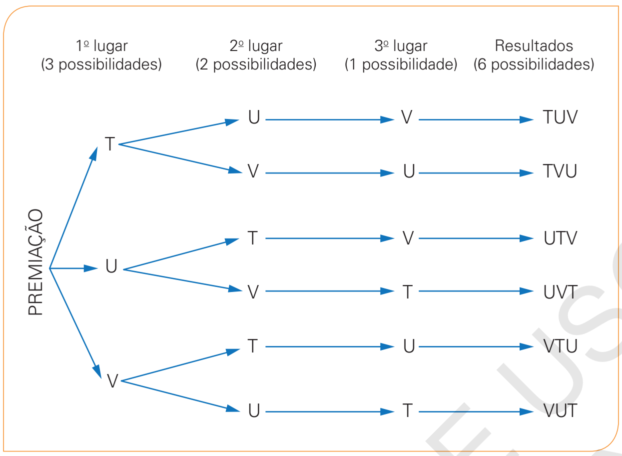
Também conhecida como **árvore de possibilidades**, esta é uma ferramenta usada em análise combinatória para auxiliar na descrição de todas as possibilidades de ocorrência de um evento.

No início dos estudos sobre o princípio fundamental da contagem, nosso foco era o número de eventos possíveis, sem a necessidade de visualizarmos quais eram todos esses eventos. Com o diagrama de árvore, analisamos cada evento possível e, por conta disso, esta é uma importante ferramenta no cálculo de probabilidades. Vamos considerar a situação descrita na sequência.

Anualmente, jornalistas, treinadores, esportistas e público em geral elegem o melhor atleta considerando as principais modalidades esportivas de determinada cidade. Neste ano, os três finalistas são os seguintes atletas:

1. Tadeu (natação): representado pela letra T.
2. Ulisses (futebol): representado pela letra U.
3. Vitor (vôlei): representado pela letra V.

Por meio da árvore de possibilidades, vamos analisar as possíveis situações de premiação desses atletas.



Pelo diagrama, notamos que há 6 maneiras distintas de premiação dos atletas.

O mesmo número seria obtido se aplicássemos o princípio fundamental da contagem. Para o primeiro lugar, há três possibilidades; para o segundo, apenas duas possibilidades (já que o atleta que ficou em primeiro não poderá ficar em segundo lugar). Por fim, para o terceiro lugar, há uma possibilidade (já que, em nossa análise, apenas três atletas estão concorrendo ao prêmio).

Assim, as possibilidades de premiação são: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Atenção!

Se um acontecimento pode ser analisado em etapas sucessivas e independentes, de modo que:

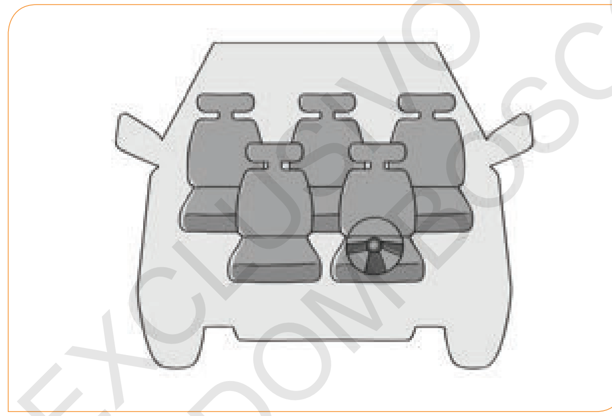
- n_1 seja o número de possibilidades na primeira etapa;
- n_2 seja o número de possibilidades na segunda etapa;
- n_k seja o número de possibilidades na k-ésima etapa.

Então, o número de possibilidades de ocorrência do evento será $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

PRINCÍPIO DA PREFERÊNCIA

Em combinatória, podemos nos deparar com situações em que existem condições específicas que influenciam diretamente o número de possibilidades de um evento ocorrer.

Por exemplo: vamos analisar de quantas maneiras distintas 5 pessoas podem se posicionar nos 5 bancos de um veículo, supondo que apenas 2 pessoas dirigem. Em uma situação como essa, o banco do motorista terá "privilégio" de análise em relação aos demais bancos. Passamos, então, a utilizar o princípio da preferência.



Pelo princípio da preferência, o estudo do número de possibilidades deve começar sempre pelas etapas em que haja restrição, dando-se preferência às que tenham maior restrição.

Sejam **a**, **b**, **c**, **d** e **e** os lugares do carro, conforme a representação acima. Sabendo que o local **a** apresenta restrição (já que só pode ser ocupado pelas duas pessoas que dirigem), para sabermos de quantas maneiras distintas as pessoas podem se posicionar dentro do carro, realizamos as seguintes etapas:

a	b	c	d	e
2	4	3	2	1
1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa	5ª etapa

Na 1ª etapa, por haver restrição, apenas as duas pessoas que dirigem podem ocupar o lugar **a**.

Na 2ª etapa, como há uma pessoa dirigindo, restam quatro pessoas que podem ocupar o lugar **b**. O mesmo ocorre nas próximas etapas em relação à análise dos lugares **c**, **d** e **e**, havendo sempre uma possibilidade a menos por lugar, já que os outros lugares já foram ocupados por alguém.

Assim, aplicando o princípio da preferência (PP), obtemos:

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

Portanto, os cinco passageiros podem se posicionar de 48 maneiras distintas dentro do carro.

Nos casos em que, mesmo com o uso do princípio da preferência, ocorrem impasses, usa-se o **princípio aditivo** da contagem, pelo qual é realizada a união de dois ou mais conjuntos que são gerados em virtude das restrições em cada situação. Vamos observar esse procedimento nos exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Quantos números pares de quatro algarismos distintos maiores que 2 999 existem no nosso sistema de numeração?

milhar	centena	dezena	unidade
restrições (0, 1 e 2)			restrições (1, 3, 5, 7 e 9)

Resolução

Utilizando o princípio da preferência, a 1ª etapa deve ser a de maior restrição, que, nesse caso, é a do algarismo das unidades. Nele observamos se o número é par ou ímpar, sendo possível utilizar 5 algarismos (0, 2, 4, 6 e 8). Já a 2ª etapa se refere ao algarismo do milhar, que também apresenta restrições. Como o número par deve ser maior que 2 999, restam apenas 7 algarismos a serem utilizados (3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), caso seja escolhido o zero como unidade. Ou podem restar 6 algarismos distintos, caso a escolha não seja o zero.

Logo, para a solução do problema, nós o dividiremos em dois casos:

- Caso 1: números que terminam em zero.

milhar	centena	dezena	unidade
7	8	7	1
1ª etapa restrições (0, 1 e 2)			1ª etapa condição (apenas o zero)

Possibilidades do caso 1: $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 392$.

- Caso 2: números que terminam em 2, 4, 6 ou 8.

milhar	centena	dezena	unidade
6	8	7	4
2ª etapa restrições (0, 1, 2 ou o algarismo da unidade)			1ª etapa condição (2, 4, 6 ou 8)

Possibilidades do caso 2: $6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1\,344$.

Assim, pelo princípio aditivo, o total de números pares possíveis é $392 + 1\,344 = 1\,736$.

Logo, há 1 736 números pares maiores que 2 999 com quatro algarismos distintos.

2. Sistema Dom Bosco – Usando as letras da palavra BRASIL, é possível formar quantos anagramas (transposição de letras da palavra para formar outra palavra diferente, mesmo não pronunciável) iniciados por vogais sem repetição de letras?

Resolução

Nesse caso, também aplicamos o princípio da preferência, pois há restrição na primeira letra, que deve ser uma vogal (A ou I) – sendo esta a 1ª etapa para a resolução do problema.

1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa	5ª etapa	6ª etapa
2	5	4	3	2	1
restrição (A ou I)					

Possibilidades: $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$.

Portanto, é possível formar 240 anagramas iniciados pelas vogais da palavra BRASIL sem que haja repetição de letras.

ROTEIRO DE AULA

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM II

A árvore de possibilidades é uma ferramenta usada em análise combinatória que auxilia na descrição de todas as possibilidades de ocorrência de um evento.

Pelo princípio da preferência, o estudo do número de possibilidades deve começar sempre pelas etapas em que haja restrição, dando-se preferência às que tenham maior restrição.

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. UPE (adaptado) – A prova final de Geografia de uma escola é composta de 5 itens com 4 alternativas do tipo a, b, c e d. De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?

Como existem 4 formas de responder a cada um dos 5 itens, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $4^5 = 1\,204$.

2. Enem C7-H28

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

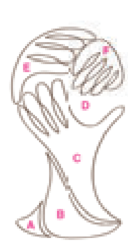
JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: <www.pt.fifal.com>. Acesso em: 19 nov. 2013. (Adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15
b) 30
c) 108
d) 360
e) 972

Considerando as regiões a serem pintadas:



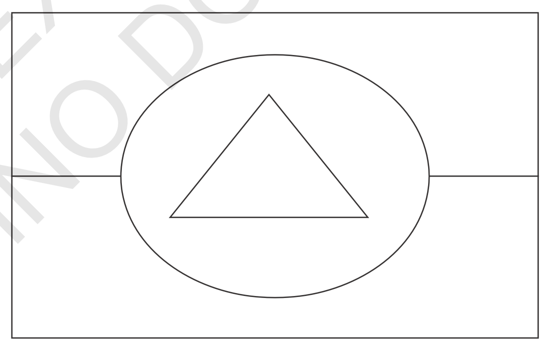
Levando em conta que existe chance de as cores se repetirem e que não há obrigação de se usarem as 4 cores, pode-se calcular:

$D \cdot E \cdot F \cdot C \cdot B \cdot A \rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 972$ diferentes opções.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

3. Unisinos – A bandeira a seguir está dividida em 4 regiões. Cada região deverá ser pintada com uma cor, e regiões que fazem fronteira devem ser pintadas com cores diferentes.



Sabendo que dispomos de 6 cores, de quantas maneiras distintas podemos pintar essa bandeira?

a) 20
b) 24
c) 120
d) 600
e) 720

Existem 6 opções para a cor do triângulo; 5 para a circunferência que envolve o triângulo; 5 para uma das regiões externas à circunferência e 4 para a outra região.

Sendo assim, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 600$.

4. UERJ – Com o objetivo de melhorar o tráfego de veículos, a prefeitura de uma grande cidade propôs a construção de quatro terminais de ônibus. Para estabelecer conexão entre os terminais, foram estipuladas as seguintes quantidades de linhas de ônibus:

- do terminal A para o B, 4 linhas distintas;
- do terminal B para o C, 3 linhas distintas;
- do terminal A para o D, 5 linhas distintas;
- do terminal D para o C, 2 linhas distintas.

Não há linhas diretas entre os terminais A e C.

Supondo que um passageiro utilize exatamente duas linhas de ônibus para ir do terminal A para o terminal C, calcule a quantidade possível de trajetos distintos que ele poderá fazer.

Utilizando o princípio multiplicativo, há $4 \cdot 3 = 12$ formas de ir de A para C, transitando por B. Também há $5 \cdot 2 = 10$ formas de ir de A para C, transitando por D. Contudo, pelo princípio aditivo, a resposta é $12 + 10 = 22$.

5. Unicamp-SP – O número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana é igual a:

a) 21
b) 20
c) 15
d) 14

Como a semana tem 7 dias, para nos certificarmos de que haverá pelo menos 3 pessoas nascidas no mesmo dia da semana, é importante que haja pelo menos $2 \cdot 7 + 1 = 15$ pessoas no grupo.

6. EPCAR-MG – Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A).

Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a:

a) 612
b) 613
c) 614
d) 615

Calculando, obtemos:
I. Recebe um ás de ouros e não retira um ás: $1 \cdot 48 = 48$.
II. Recebe uma carta de ouros (exceto ás), e a segunda não é um ás: $12 \cdot 47 = 564$.
Então, $48 + 564 = 612$ possibilidades.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. EEAr-SP – Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. A partir deles, podem ser criados _____ números pares de quatro algarismos distintos.

a) 60
b) 120
c) 180
d) 360

8. UPE – Um palíndromo ou capicua é um número que se lê da mesma maneira nos dois sentidos, ou seja, da esquerda para a direita ou ao contrário, como 333, 1 661 e 28 482.

Assinale a alternativa correspondente à quantidade de palíndromos que são números pares de cinco algarismos do nosso sistema de numeração.

a) 300
b) 400
c) 500
d) 600
e) 800

9. PUC-SP – Uma pessoa dispõe das seguintes cores de tinta: amarela, azul, verde, vermelha e branca, e irá utilizá-las para pintar um pote. Nesse pote serão pintadas a tampa, a lateral e uma lista na lateral, de modo que a tampa e a lateral poderão ter a mesma cor ou cores diferentes. O número de maneiras distintas de pintar esse pote é:

a) 100
b) 80
c) 60
d) 40

10. UFES – Uma associação de moradores arrecadou 2 160 camisas, 1 800 calças e 1 200 pares de sapatos, que serão todos doados. As doações serão dispostas em pacotes. Dentro de cada pacote, um item poderá ter quantidade diferente da dos demais itens (por exemplo, a quantidade de camisas não precisará ser igual à de calças ou à de pares de sapatos); porém, a quantidade de camisas, em todos os pacotes, deverá ser a mesma, assim como a quantidade de calças e a de pares de sapatos.

a) Determine o maior número possível de pacotes que podem ser preparados e qual a quantidade de camisas, calças e pares de sapatos que, nesse caso, haverá em cada pacote. Justifique.

b) Pedro recebeu um pacote de doações com L camisas diferentes, m calças diferentes e n pares de sapatos diferentes. Calcule a quantidade de escolhas que ele pode fazer de um conjunto contendo apenas 1 camisa, 1 calça e 1 par de sapatos do pacote.

Texto para as próximas duas questões:

Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.

LOTOGOL é um jogo de loteria em que o apostador marca seu palpite de placar em 5 jogos de futebol de uma rodada. Ganha premiação aquele que acertar 3, 4 ou 5 dos palpites. Estas são as instruções do jogo:

Como jogar:

Acerte a quantidade de gols feitos pelos times de futebol na rodada e concorra a uma bolada. Para apostar, basta marcar no volante o número de gols de cada time de futebol participante dos 5 jogos do concurso. Você pode assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (esta opção está representada pelo sinal +). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

Jogo		Placar				
1	VITÓRIA/BA	**0**	1	2	3	+
	X					
	AVAÍ/SC	0	**1**	2	3	+
2	ATLÉTICO/MG	0	1	**2**	3	+
	X					
	FLAMENGO/RJ	**0**	1	2	3	+
3	INTERNACIONAL/RS	0	1	2	3	**+**
	X					
	LONDRINA/PR	0	**1**	2	3	+
4	CEARÁ/CE	0	**1**	2	3	+
	X					
	CRB/AL	**0**	1	2	3	+
5	CSA/ALE	0	1	**2**	3	+
	X					
	REMO/PA	**0**	1	2	3	+

<http://loterias.caixa.gov.br>. (Adaptado).

11. Insper-SP – Laura acredita que, nos 5 jogos da rodada, serão marcados um total de 4 gols. Além disso, ela também acredita que em apenas um dos jogos o placar será zero a zero. O número de apostas diferentes que Laura poderá fazer, seguindo sua crença, é:

a) 64
b) 96
c) 80
d) 84
e) 75

12. Insper-SP – O número total de diferentes apostas que podem ser feitas no LOTOGOL é igual a:

a) 5^6
b) $5^{10} - 5$
c) 5^5
d) 5^{10}
e) $5^5 - 5$

13. UEMG – Os números 258 e 179 têm seus algarismos escritos em ordem crescente. Os números 558 e 496 não têm seus algarismos escritos em ordem crescente. Quantos são os números de três algarismos no qual esses algarismos aparecem em ordem crescente?

14. UECE – A quantidade de números inteiros positivos com quatro algarismos distintos que são múltiplos de quatro é:

a) 1 136
b) 1 114
c) 1 126
d) 1 120

15. Enem C7-H30

Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\dfrac{62^6}{10^6}$
b) $\dfrac{62!}{10!}$
c) $\dfrac{62!\,4!}{10!\,56!}$
d) $62! - 10!$
e) $62^6 - 10^6$

16. UFU-MG – Para realizar uma venda, uma loja virtual solicita de seus clientes o cadastramento de uma senha pessoal que permitirá acompanhar a entrega de sua compra. Essa senha anteriormente era composta por quatro algarismos e uma letra (minúscula), sem quaisquer restrições de posicionamentos entre letra e algarismos. Com o grande aumento no número de vendas, houve a necessidade de ampliação no número de senhas, as quais passaram a ser compostas por cinco algarismos e uma letra (minúscula). Sabe-se que existem 26 letras no alfabeto e 10 algarismos disponíveis.

Se denotarmos por N e M, respectivamente, o número total de senhas possíveis, antes e após a mudança, então, a relação entre N e M é dada por:

a) $M = 10 \cdot N$
b) $M = 5!N$
c) $M = 6!N$
d) $M = 12 \cdot N$

17. PUC-Rio – Mônica tem uma blusa de cada uma das seguintes cores: branca, vermelha, amarela, preta e verde. Ela também tem uma calça de cada uma das seguintes cores: preta, azul, cinza e branca.

a) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça para sair?

b) De quantas maneiras Mônica pode escolher uma blusa e uma calça de cores diferentes uma da outra?

c) Na segunda-feira, Mônica usou calça azul e camisa preta. Na terça-feira, ela quer escolher uma calça e uma camisa de cores diferentes uma da outra. Sabendo que as roupas que ela usou na segunda-feira estão lavando (e apenas estas), de quantas maneiras ela pode escolher suas roupas?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C6-H25

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21
b) 90
c) 750
d) 1 250
e) 3 125

19. Enem C7-H30

Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9) Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

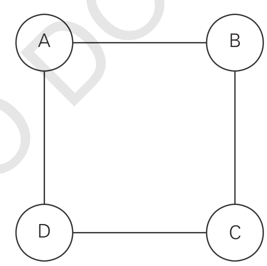
Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 14 jan. 2012. (Adaptado.)

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a:

a) $26^3 + 9^4$
b) $26^3 \cdot 9^4$
c) $26^3(10^4 - 1)$
d) $(26^3 + 10^4) - 1$
e) $(26^3 \cdot 10^4) - 1$

20. Enem C6-H25

Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.



De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 72

19

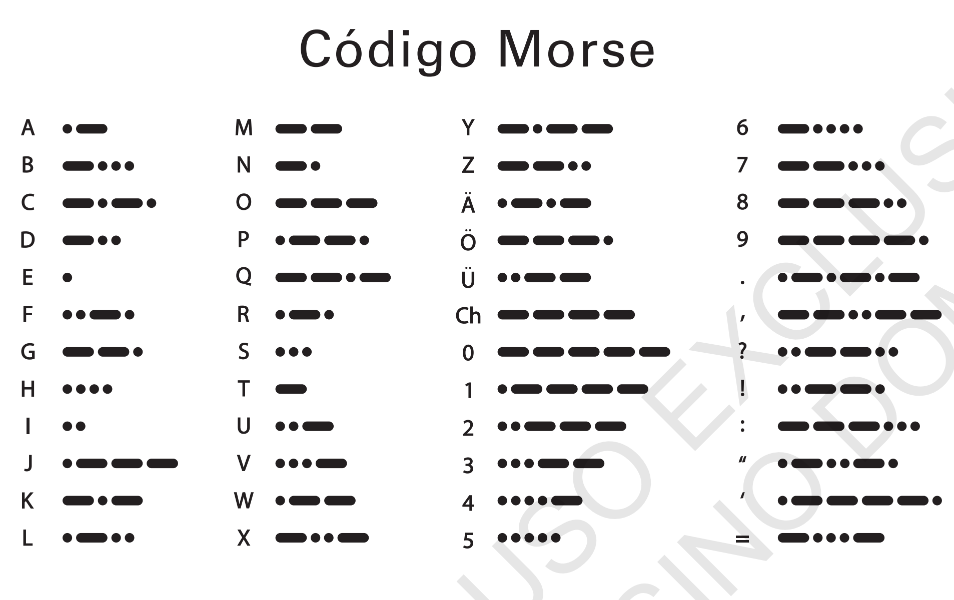
PERMUTAÇÃO SIMPLES E COM REPETIÇÃO

- Permutação
- Permutação com repetição

HABILIDADES

- Resolver problemas de contagem envolvendo permutações simples e com repetições.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

AURIELAKI. SHUTTERSTOCK



Introdução

Criado por Samuel Morse em 1835, o Código Morse é um sistema de comunicação binária que representa letras, números e sinais de pontuação por meio de pontos e traços. Com mensagens emitidas por ondas de rádio via telégrafos elétricos, o Código Morse foi muito utilizado da Primeira Guerra Mundial até 1999, quando ainda era usado como padrão internacional de comunicações marítimas. Por sua simplicidade, o Código Morse também pode ser transmitido pelo som (com sinais mais longos ou mais curtos para representar os traços e pontos) ou, ainda, por sinais visuais (por meio de luzes piscando).


EVERETT HISTORICAL. SHUTTERSTOCK

Samuel F. B. Morse (1791-1872).

PERMUTAÇÕES

Dado um conjunto com **n** elementos distintos, denomina-se **permutação** desses **n** elementos todo agrupamento ordenado formado pelos **n** elementos.

Permutar consiste em realizar trocas de objetos sem o uso de dinheiro. Em Matemática, a permutação significa trocar os elementos de posição, de modo a obter um novo resultado. Assim, em análise combinatória, esse processo remete à noção de embaralhar ou trocar a posição dos objetos.

Vamos analisar a seguinte situação: em uma gôndola de supermercado, há tangerina, limão, maçã e kiwi. Supondo que as frutas não devem ser misturadas, de quantas maneiras distintas podemos organizá-las?

Observe que existem:

- 4 tipos de frutas para ocupar a primeira posição da prateleira;
- 3 tipos para a segunda posição;
- 2 tipos para a terceira posição;
- 1 tipo para a quarta e última posição.

Logo, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades de organização da prateleira.

Problemas de contagem envolvendo permutações podem ser resolvidos com o uso da fórmula:

$$P_n = n!$$

No caso da organização da gôndola do supermercado, $n = 4$. Logo:

$P_4 = 4! \rightarrow P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$\therefore$ 24 maneiras distintas

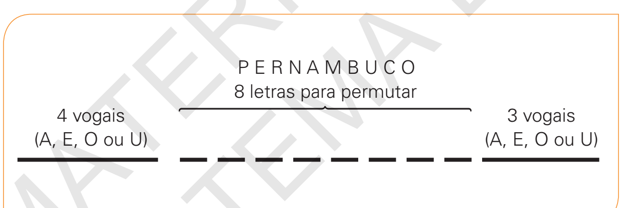
ANAGRAMA

A palavra **anagrama** tem origem no grego. *Ana* significa "repetir" ou "regressar", e *gramma* quer dizer "palavra". Assim, a permutação das letras de uma palavra, tendo ou não significado em nossa língua, constitui um anagrama.

Por exemplo, considerando todas as letras da palavra PATO, obtemos alguns anagramas, como APTO, TAPO, TOPA, PTOA, OAPT...

Como PATO tem quatro letras distintas, o número total de anagramas é dado por $P_4 = 4! = 24$. Portanto, é possível obter 24 anagramas.

No entanto, algumas restrições podem ser impostas no cálculo dos anagramas de uma palavra. Exemplo: quantos anagramas que iniciam e terminam com vogais é possível obter com a palavra PERNAMBUCO? Observe.



A primeira letra deve ser uma vogal, então há 4 opções (A, E, O ou U). Escolhida a primeira vogal, temos 3 vogais para finalizar o anagrama. Com isso, as outras 8 letras restantes (vogais e consoantes) vão permutar entre si.

Dessa forma:

$$\underline{4} \cdot \underline{P_8} \cdot \underline{3}$$

A quantidade de anagramas nessa condição é $4 \cdot P_8 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 8! = 483\,840$.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Com o conhecimento sobre permutação, estudamos os anagramas e verificamos as possibilidades de escritas de uma palavra, com ou sem significado em nossa língua. Permutação e anagramas foram estudados de forma simples, sem que houvesse elementos ou letras repetidas. Agora, vamos analisar situações em que há repetição de elementos ou letras.

Por exemplo, quantos anagramas podemos formar com a palavra LEITE?

Nesse caso, a letra E aparece duas vezes, sem alterar o resultado final. Assim, LEIET, LEEIT e EITLE são alguns dos 20 anagramas possíveis. Já a palavra BANANA tem ainda mais restrições à formação dos anagramas, já que as letras A e N aparecem, respectivamente, três e duas vezes. Dessa forma, enquanto é possível formar 720 anagramas com uma palavra de 6 letras distintas, com a palavra BANANA esse número só chega a 60.

De maneira geral, para determinarmos as permutações com elementos repetidos, aplicamos a seguinte fórmula:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

Também é importante ter em mente que $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r$ corresponde ao número de repetições de cada elemento, com $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Quantos anagramas é possível obter com a palavra BRASIL nos seguintes casos:

a) anagramas que iniciam com vogal;

b) anagramas que têm a sílaba BRA.

Resolução

a) Há 2 vogais (A e I) que podem iniciar os anagramas. Escolhida a vogal, restarão 5 letras para permutar. Assim:

$2 \cdot P_5 = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$

Logo, há 240 anagramas possíveis.

b) A sílaba BRA representa uma posição, enquanto as outras letras representam as demais posições.

$\underline{\text{BRA}}$ ___ ___ ___

Resolvendo a permuta (P_4), temos:

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas possíveis com a sílaba BRA.

2. Sistema Dom Bosco – Quantas permutações podemos obter com a palavra BANANA?

Resolução

Na palavra BANANA, há 3 vezes a letra A e 2 vezes a letra N. Assim, o total de anagramas será:

$n = 6$

$n_1 = 3$

$n_2 = 2$

$$P_6^{3,\,2} = \frac{6!}{3!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 1} = \frac{120}{2} = 60$$

Portanto, há 60 anagramas possíveis.

3. Sistema Dom Bosco – O número de anagramas possíveis com a palavra PASSAR que não apresentam as vogais juntas é:

a) 180
b) 24
c) 156
d) 240
e) 50

Resolução

Primeiro, calculamos todos os anagramas possíveis:

$$P_6^{2,\,2} = \frac{6!}{2!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2\cdot 1} = 180$$

Depois calculamos o número de anagramas possíveis com as vogais juntas:

AAP R SS

$P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

Assim, obtemos o número de anagramas que não têm as vogais juntas:

$180 - 24 = 156$

Portanto, 156 anagramas.

ROTEIRO DE AULA

PERMUTAÇÃO SIMPLES E COM REPETIÇÃO

Permutação

$P_n = n!$

Permutação com repetição

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPE – Na comemoração de suas Bodas de Ouro, Sr. Manuel e D. Joaquina resolveram registrar o encontro com seus familiares através de fotos. Uma delas sugerida pela família foi dos avós com seus 8 netos. Por sugestão do fotógrafo, na organização para a foto, todos os netos deveriam ficar entre os seus avós.

De quantos modos distintos Sr. Manuel e D. Joaquina podem posar para essa foto com os seus netos?

a) 100
b) 800
c) 40 320
d) 80 640
e) 3 628 800

Acreditando que todos vão aparecer na foto lado a lado, teremos 2 opções para os avós e $P_8 = 8! = 40\,320$ opções para os netos. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, existem $2 \cdot 40\,320 = 80\,640$ formas distintas de se fazer a foto.

2. Unigranrio-RJ (adaptado) – Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR, em que as consoantes aparecem juntas, mas em qualquer ordem?

VESTIBULAR → Há 6 consoantes

$P_6 \cdot P_5 = 6! \cdot 5! = 86\,400$

3. UEFS-BA C1-H2

Uma estudante ainda tem dúvidas quanto aos quatro últimos dígitos do número do celular de seu novo colega, pois não anotou quando ele lhe informou, apesar de saber quais são não se lembra da ordem em que eles aparecem.

Nessas condições, pode-se afirmar que o número de possibilidades para a ordem desses quatro dígitos é:

a) 240
b) 160
c) 96
d) 24
e) 16

Tendo em vista que esses 4 algarismos são conhecidos, o número de variáveis para a ordem deles é:

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

4. UERJ – Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras B, M e C. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B, B, M, C, M, C) ou (B, M, M, C, B, C) ou (C, M, M, B, B, C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

a) 6
b) 90
c) 180
d) 720

Considerando que a criança ganhou 2 picolés de cada sabor, o resultado é obtido por:

$P_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$

5. IMED-RS

Desenvolvido em 1835, pelo pintor e inventor Samuel Finley Breese Morse, o Código Morse é um sistema binário de representação a distância de números, letras e sinais gráficos, utilizando-se de sons curtos e longos, além de pontos e traços para transmitir mensagens. Esse sistema é composto por todas as letras do alfabeto e todos os números. Os caracteres são representados por uma combinação específica de pontos e traços [...]

Fonte: FRANCISCO, Wagner de Cerqueria e. Código Morse. *Brasil Escola*. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/codigo-morse.htm>. Acesso em: 3 out. 2017.

Considerando o exposto no texto e um conjunto de sinais composto de 2 traços e 3 pontos, quantas mensagens podem ser representadas usando todos os elementos do conjunto?

a) 120 mensagens
b) 10 mensagens
c) 20 mensagens
d) 200 mensagens
e) 30 mensagens

Uma solução é verificar quantas montagens gráficas seriam possíveis com 2 traços e 3 pontos. Assim, isso se refere a um problema de permutação com repetição. Logo:

$P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$

6. EPCAr-MG (adaptado) – Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo: 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco.

Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra tão somente pela cor dos carros, qual o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as dez vagas?

As 4 vagas disponíveis são objetos iguais. Assim, o resultado é dado por: $P_{10}^{3,2,4} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 12\,600$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Fac. Albert Einstein-SP – Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado e o bebê sentará no colo de um dos adultos. O número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto é:

a) $8 \cdot 8!$
b) $9!$
c) $9 \cdot 8^8$
d) 8^9

8. Unisc – Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 de Álgebra, 2 de Cálculo e 2 de Geometria. O número de maneiras diferentes com que Newton pode organizar esses livros em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 24
b) 36
c) 56
d) 72
e) 144

9. IFPE – Os alunos do curso de Computação Gráfica do *campus* Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL. Se cada anagrama é mostrado durante 0,5 s na tela, a animação completa dura:

a) menos de 1 minuto.
b) menos de 1 hora.
c) menos de meia hora.
d) menos de 10 minutos.
e) mais de 1 hora.

10. IFPE (adaptado) – Uma urna contém 10 bolas, sendo 3 bolas pretas iguais, 3 bolas brancas iguais, 2 bolas verdes iguais e 2 bolas azuis iguais. Quantas são as maneiras diferentes de se extrair, uma a uma, as 10 bolas da urna, sem reposição?

11. IMED-RS – O total de anagramas da palavra LÓGICA é exatamente igual à medida, em graus, da soma dos ângulos internos de um polígono regular. Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S = (n - 2) \cdot 180°$, onde n corresponde ao número de lados, pode-se afirmar que esse polígono é um:

a) Triângulo
b) Quadrado
c) Pentágono
d) Hexágono
e) Heptágono

12. FGV – Uma senha de internet é constituída de seis letras e quatro algarismos em que a ordem é levada em consideração. Eis uma senha possível: (a, a, b, 7, 7, b, a, 7, a, 7).

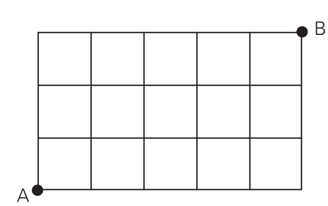
Quantas senhas diferentes podem ser formadas com quatro letras "a", duas letras "b" e quatro algarismos iguais a 7?

a) 10!
b) 2 520
c) 3 150
d) 6 300
e) $\dfrac{10!}{4!6!}$

13. EFOMM – Quantos anagramas é possível formar com a palavra CARAVELAS, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?

a) 24
b) 120
c) 480
d) 1 920
e) 3 840

14. UPF-RS – Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:



a) 40 320
b) 6 720
c) 256
d) 120
e) 56

15. EsPCEx – Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e, escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a:

a) 1 000 000
b) 1 111 100
c) 6 000 000
d) 6 666 000
e) 6 666 600

16. Mackenzie-SP – Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é:

a) $9 \cdot (9!)$
b) $8 \cdot (9!)$
c) $8 \cdot (8!)$
d) $\frac{10!}{2}$
e) $\frac{10!}{4}$

17. Imed-RS – O número de candidatos inscritos para a realização do último vestibular deverão, em um determinado curso, corresponder ao número de anagramas da palavra VESTIBULAR que começam por VE e terminam por AR. Esse número é igual a:

a) 120
b) 240
c) 360
d) 540
e) 720

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C1-H2

Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \cdot 8! + (3!)^2$
b) $8! \cdot 5! \cdot 3!$
c) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$
d) $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$
e) $\frac{16!}{2^8}$

19. Enem C1-H2

Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: <www.infowester.com>. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

a) $10^2 \cdot 26^2$

b) $10^2 \cdot 52^2$

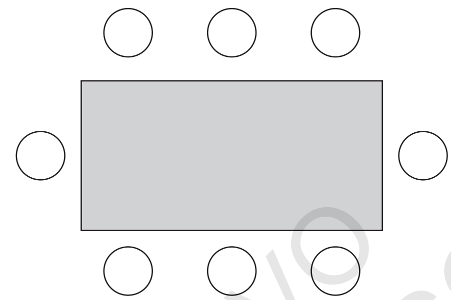
c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

20. UPE C1-H2

Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se a uma mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados um em frente do outro?

a) 1 440

b) 1 920

c) 2 016

d) 4 032

e) 5 760

20 ARRANJO SIMPLES

- Arranjo simples

HABILIDADES

- Resolver problemas de contagem envolvendo arranjos simples.
- Resolver problemas de contagem envolvendo permutações simples e com repetições.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

AURIELAKI. SHUTTERSTOCK

A quantidade de formas distintas de organizar um pódio varia pela quantidade de participantes da competição.

Introdução

Em competições esportivas, é comum os atletas serem premiados com medalhas de ouro, prata ou bronze, dependendo de sua classificação. Também se tornou hábito eles morderem as medalhas, como um gesto simbólico que remete ao passado, pois os mercadores realizavam tal gesto com moedas de ouro. Pelo fato de o ouro ser maciço e maleável, é facilmente marcado. Assim, os comerciantes podiam descobrir se as peças eram falsificadas ou não.

Analisando competições esportivas, sabemos que há muitas maneiras de se constituir um pódio. Neste módulo, entenderemos um pouco mais sobre o conceito de combinatória que remete a isso: o **arranjo simples**.

ARRANJO SIMPLES

Dado um conjunto de n elementos distintos, denomina-se **arranjo de n elementos**, escolhidos **p** a **p** (com $p \leq n$), qualquer agrupamento ordenado de **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

Para tornar mais clara a definição teórica de arranjo, vamos imaginar a situação a seguir.

Quatro equipes (A, B, C e D) participarão de um torneio interescolar de handebol. Serão premiadas com medalhas apenas as duas primeiras colocadas do torneio. O resultado pode ocorrer de quantas maneiras distintas?

Como há um número pequeno de equipes participando do torneio, podemos agrupar todas as possibilidades de premiação. Obtemos, assim, a seguinte tabela:

1º lugar	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
2º lugar	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

Notamos que há 12 maneiras diferentes de premiação. Observe que a equipe A pode ser a primeira colocada do torneio, enquanto a equipe B pode ser a segunda colocada (A – B), o que configura uma possibilidade de resultado. Também pode acontecer de a equipe B ser a primeira colocada e a equipe A ficar em segundo lugar (B – A), o que constitui outro resultado.

Ou seja, a ordem em que a equipe aparece na tabela influencia no número de possibilidades de premiação. Com isso, concluímos que cada resultado da premiação se relaciona a um arranjo das quatro equipes participantes (**n**), posicionadas em primeiro ou segundo lugares (**p** a **p**).

Assim, os problemas de contagem envolvendo arranjos podem ser resolvidos por meio da fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Observação!

As permutas constituem um caso particular de arranjos. Assim, dados **n** elementos distintos, todo arranjo formado exatamente por esses **n** elementos corresponde a uma permutação desses elementos.

Fazendo p = n na fórmula do arranjo, temos:

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = n! = P_n$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. UFC-CE – Assinale a alternativa que consta a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9, e que são maiores que 200 e menores que 800.

a) 30
b) 36
c) 42
d) 48
e) 54

Resolução

Os números maiores que 200 e menores que 800 começam por 3, 5 ou 7. Como os algarismos são distintos, a posição de cada um deles altera o resultado (357 ≠ 753).

Começando por 3, restam os algarismos 1, 5, 7 e 9.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Iniciando por 5, sobram os algarismos 1, 3, 7 e 9.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Começando por 7, restam os algarismos 1, 3, 5 e 9.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Assim, temos: 12 + 12 + 12 = 36.

Portanto, há 36 números maiores que 200 e menores que 800 que podem ser formados com os algarismos distintos citados no enunciado.

2. Sistema Dom Bosco – Um campeonato de futebol amador conta com 10 equipes, porém apenas as 3 primeiras colocadas receberão medalhas. De quantas maneiras distintas pode ocorrer a premiação desse torneio?

Resolução

$n = 10$; $p = 3$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \rightarrow A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Portanto, há 720 maneiras distintas de a premiação desse torneio acontecer.

Observação: como há um grande número de equipes participantes, é viável usar a fórmula do arranjo, em vez de se construir a árvore de possibilidades ou a tabela para agrupar todos os arranjos possíveis.

3. UFSM – Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por 6 algarismos distintos e outra composta por 3 letras, escolhida a partir de um alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos e que as letras são todas vogais distintas, sendo E a primeira delas, o número máximo de tentativas necessárias para acessar sua conta será:

a) 210
b) 230
c) 2 520
d) 3 360
e) 15 120

Resolução

Analisando inicialmente os números e sabendo que as três primeiras posições são ocupadas por 8, 6 e 4, temos:

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

Como 3 algarismos já foram utilizados, haverá o arranjo dos outros 7 algarismos nas 3 posições restantes:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210.$$

Na outra parte da senha, só serão utilizadas vogais (A, E, I, O e U), porém na primeira posição já está fixada a vogal E. Então, pelo princípio fundamental da contagem:

$1 \cdot 4 \cdot 3 = 12.$

Por fim, calculamos o número máximo de tentativas para acessar a conta:

$P_3 \cdot A_{7,3} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \cdot 210 \cdot 4 \cdot 3 = 15\,120.$

Logo, o número máximo de tentativas é de 15 120.

ARRANJO SIMPLES

Arranjo simples

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

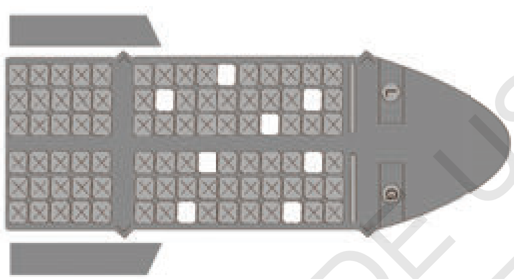
1. UFJF-MG (adaptado) – Para concorrer à eleição a diretor e a vice-diretor de uma escola, há 8 candidatos. O mais votado assumirá o cargo de diretor e o segundo mais votado, o de vice-diretor. Quantas são as possibilidades de ocupação dos cargos de diretor e vice-diretor dessa escola?

Como a ordem (diretor e vice) influencia no resultado, usa-se o arranjo simples.

$A_{8,2} = \frac{8}{(8-2)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

2. Enem C1-H2

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X, e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: <gebh.net>. Acesso em 30 out. 2013. (Adaptado.)

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

A solução pedida se refere ao número de arranjos simples de 9 objetos ocupados 7 a 7.

Ou seja, $A_{9,7} = \frac{9!}{2!}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

3. UFES (adaptado) – Três casais devem sentar-se em 8 poltronas de uma fileira de cinema. A quantidade de maneiras em que eles podem se sentar nas poltronas de modo arbitrário e sem restrições é:

a) 64

b) 384

c) 2 160

d) 2 304

e) 20 160

Usando a fórmula do arranjo, calculamos da seguinte forma:

$A_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!} = 20\,160$

4. CFTMG – Em um campeonato de tênis de mesa, com dez participantes, em que todos jogam contra todos, um dos participantes vence todas as partidas, as classificações possíveis para os três primeiros colocados é:

a) 72

b) 78

c) 82

d) 90

Como um dos participantes já está classificado, usamos arranjo da seguinte forma:

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Em que:

n = 9 jogadores

p: 2 de 3 concorrendo = 2

Portanto:

$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$

Logo, há 72 maneiras de classificar os três primeiros colocados.

5. Unesp – O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

a) 40
b) 7 920
c) 10 890
d) 11!
e) 12!

Como são 12 cargos para o conselho, e o presidente do conselho não pode ser do conselho, temos para o presidente da diretoria somente $A_{11,1}$ possibilidades.

Então, sobram 3 cargos, dos quais o presidente do conselho faz parte.

Então: $A_{11,1} \cdot A_{11,3} = \frac{11!}{(11-1)!} \cdot \frac{11!}{(11-3)!} = 11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 10\,890.$

6. PUC-Minas (adaptado) – Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem x maneiras diferentes de organizar esse serviço. Calcule o valor de x.

Para o bufê, teremos de calcular quantos salgados e doces poderão ser servidos.

Salgados: $A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120.$

Doces: $A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$

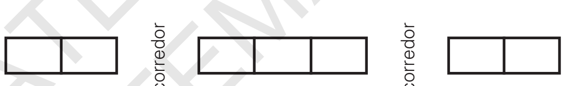
Logo, o total é dado por $120 \cdot 6 = 720$ maneiras.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEG-GO (adaptado) – Uma comissão será composta pelo presidente, pelo tesoureiro e pelo secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado, o tesoureiro, e o menos votado, o secretário.

Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

8. Mackenzie-SP – Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura abaixo.



Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 10
e) 12

9. UEG-GO – Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é:

a) 64
b) 24
c) 12
d) 4

10. PUC-SP – No vestiário de uma academia de ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

a) 14
b) 28
c) 48
d) 56
e) 112

11. UFES – Quantos são os números naturais de cinco algarismos, na base 10, que têm todos os algarismos distintos e nenhum deles igual a 8, 9 ou 0? Quantos deles são pares?

12. PUC-SP – A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, A, B, C e D, para um mesmo dia. Os pacientes A e B não podem ser agendados no período da manhã e o paciente C não pode ser agendado no período da tarde.

Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é:

a) 72
b) 126
c) 138
d) 144

13. UECE – Se os conjuntos X e Y possuem, respectivamente, cinco e oito elementos, quantas funções, $f : X \to Y$, injetivas e distintas, podem ser construídas?

14. Cesgranrio-RJ – Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas da Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda).

Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69
b) 2 024
c) 9 562
d) 12 144
e) 13 824

15. UEPB (adaptado) – Qual a solução da equação $A_{n,3} = 4 \cdot A_{n,2}$?

16. Mackenzie-SP – Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que pelo menos um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:

a) 426
b) 444
c) 468
d) 480
e) 504

17. UFMG – Duas das cinquenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinquenta cadeiras para ocupá-las, é:

a) 1 225
b) 2 450
c) 2^{50}
d) 49!
e) 50!

ESTUDO PARA O ENEM

18. Unioeste-PR (adaptado) C7-H28

Quatro amigos vão ao cinema e escolhem, para sentar-se, uma fila em que há seis lugares disponíveis. Sendo n o número de maneiras como poderão sentar-se, o valor de $\frac{n}{5}$ é igual a:

a) 36
b) 72
c) 108
d) 360
e) 720

19. Fuvest-SP C7-H28

Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é:

a) menor que 7%.
b) maior que 7%, mas menor que 10%.
c) maior que 10%, mas menor que 13%.
d) maior que 13%, mas menor que 16%.
e) maior que 16%.

20. UFU-MG C7-H28

A senha de acesso ao cofre de um carro-forte é formada por d algarismos, em que esses algarismos pertencem ao conjunto de inteiros {0, 1, 2, ..., 9}. Um dos guardas observa o colega digitar o último algarismo da senha, concluindo que esta corresponde a um número ímpar. Assuma que esse guarda demore 1,8 segundo para realizar cada tentativa de validação da senha, sem realizar repetições, de maneira que, assim procedendo, no máximo em duas horas e meia terá sucesso na obtenção da senha.

Segundo as condições apresentadas, conclui-se que o valor de d é um número:

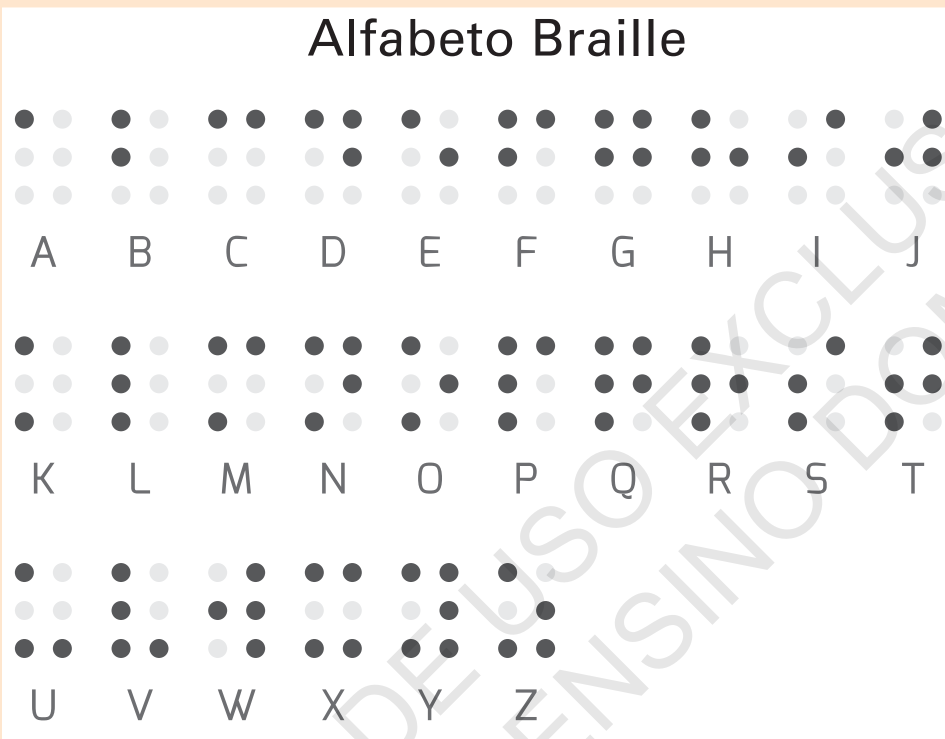
a) quadrado perfeito.
b) primo.
c) divisível por 3.
d) múltiplo de 5.

21 COMBINAÇÃO I

- Combinação

HABILIDADES

- Resolver problemas de contagem envolvendo combinações.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.



CRISTI180884. SHUTTERSTOCK

Introdução

No início do século XIX, Napoleão Bonaparte queria que seus soldados pudessem se comunicar no escuro sem a necessidade de luz. Charles Barbier criou, então, um sistema de 12 pontos em relevo que codificavam 36 sons diferentes, mas que se mostrou ineficaz. Louis Braille, que perdera a visão na infância, conheceu o sistema de Barbier e identificou suas falhas. Aperfeiçoou o modelo antigo e criou, em 1824, um código para o alfabeto francês que servia à escrita e à leitura noturnas. Ao longo dos anos, o sistema de Braille foi aprimorado e hoje é utilizado por pessoas com dificuldade em enxergar ou que são totalmente cegas.

COMBINAÇÃO I

Dados **n** elementos distintos, denomina-se **combinação dos n elementos**, escolhidos **p** a **p** (com $p \leq n$), qualquer agrupamento não ordenado ou subconjunto formado por **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** existentes.

Para entendermos melhor a definição teórica de combinação, vamos imaginar a situação a seguir.

Um casal vai organizar a festa de aniversário do filho. Entre tantas coisas para se preocuparem, a escolha do cardápio é algo relevante. Na festa serão servidos coxinha (C), kibe (K), risole (R) e esfiha (E). Por uma questão de organização de trabalho na cozinha de onde ocorrerá o evento, serão servidas pequenas porções com três variedades de salgados. Nesse contexto, quantas porções diferentes podem ser obtidas?

Na tabela a seguir, estão as combinações de todos os pratos possíveis com três salgados.

CKR	KCR	RCK	ECK
CKE	KCE	RCE	ECR
CRK	KRC	RKC	EKC
CRE	KRE	RKE	EKR
CEK	KEC	REK	ERC
CER	KER	REC	ERK

Podemos observar que há 24 maneiras de arranjar os pratos com três salgados. Porém, ao colocarmos em um prato coxinha, kibe e risole (CKR) e em outro kibe, risole e coxinha (KRC), temos a mesma combinação de salgados. Nesse caso, a ordem em que aparecem os produtos não influencia no resultado final, já que o convidado irá saborear os mesmos salgados do prato, independentemente de sua disposição.

Observe na tabela que os pratos que têm a mesma variedade estão pintados de cor igual. Concluímos que é possível obter pratos com coxinha, kibe e risole (CKR); coxinha, kibe e esfiha (CKE); coxinha, risole e esfiha (CRE); e kibe, risole e esfiha (KRE). Logo, podemos obter quatro combinações distintas de três salgados com os quatro salgados disponíveis.

Problemas de combinação de elementos que envolvem uma quantidade maior de variáveis são mais complicados de serem interpretados por meio de tabelas ou figuras. Então, para resolvermos problemas de contagem envolvendo combinações, utilizamos a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. PUC-Rio – O número de maneiras de escolher 5 dos números 1, 2, 3, ... , 52 sem repetição é:

a) Entre 1 e 2 milhões.
b) Entre 2 e 3 milhões.
c) Entre 3 e 4 milhões.
d) Menos de 1 milhão.
e) Mais de 10 milhões.

Resolução

Como os elementos não se repetem, há combinação de 52 elementos para escolha de 5 em 5.

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!} =$$

$= 2\,598\,960$

2. UFABC-SP – Admita que, dos 20 jogadores convocados pelo técnico da seleção brasileira de futebol para as 10 posições de linha, 4 sejam canhotos, 14, destros e 2, ambidestros.

Nessas condições, se o técnico quiser escalar todos os jogadores que sabem chutar com a perna esquerda, o número de formas distintas com que ele poderá preencher as demais vagas da linha, não importando a ordem das posições, é igual a:

a) 660
b) 909
c) 784
d) 1 001
e) 880

Resolução

Há apenas 10 vagas para os 20 jogadores. Dessas, 6 vagas já foram preenchidas pelos jogadores canhotos (4) ou ambidestros (2). Restam, dessa forma, apenas 4 vagas no time ($p = 4$). Como ainda há 14 jogadores destros, então existirá a combinação de 14 jogadores nas 4 vagas restantes ($C_{14,4}$).

$$C_{14,4} = \frac{14!}{(14-4)! \cdot 4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 4!} = 1\,001$$

3. Sistema Dom Bosco – O novo conselho diretivo de uma empresa será composto de 4 homens e 3 mulheres. Foram inicialmente selecionados para as vagas 7 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras diferentes o conselho diretivo pode ser formado?

Resolução

Para a escolha dos homens, há combinação de 7 homens, tomados de 4 em 4, ($C_{7,4}$).

$$C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Para a escolha das mulheres, há combinação de 5 mulheres, tomadas de 3 em 3, ($C_{5,3}$).

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de combinações possíveis é:

$C_{7,4} \cdot C_{5,3} = 35 \cdot 10 = 350$

Portanto, há 350 maneiras de compor o novo corpo diretivo da empresa.

4. Fuvest-SP – Na primeira fase do campeonato de xadrez, cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução

Houve 78 combinações entre os jogadores, o que corresponde ao número de jogos. Como no xadrez o jogo é de duplas, $p = 2$ e n corresponde ao número de jogadores.

$$C_{n,2} = 78 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 78 \rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2 \cdot 1} =$$

$= 78$

$n^2 - n = 156 \rightarrow n^2 - n - 156 = 0$

$n' = -12$ e $n'' = 13$

Como não é possível existir um número de jogadores negativo no torneio, havia 13 participantes.

ROTEIRO DE AULA

COMBINAÇÃO I

Combinação

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EEAr-SP (adaptado) – Em um campeonato de tênis estão inscritos 10 amigos. Para disputar o campeonato, esses amigos podem formar _____ duplas diferentes.

a) 34
b) 35
c) 44
d) 45

O resultado indica o número de combinações simples de 10 amigos agrupados 2 a 2.

$C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

2. Enem C1-H2

Como não são adepto da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28

Como não há repetição e a ordem não influencia no resultado, trata-se de um problema de combinação simples de 8 jogadores agrupados de 2 em 2.

$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2} = 28$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

3. Famerp-SP (adaptado) – Lucas possui 6 livros diferentes, e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. Qual o total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita?

Calculando a quantidade de possibilidades, obtemos:

Total $= C_{6,3} \cdot C_{8,3}$

$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

Portanto, o total de possibilidades é $20 \cdot 56 = 1120$.

4. UECE – O número de cordas determinadas por 12 pontos distintos colocados sobre uma circunferência é:

a) 54
b) 66
c) 72
d) 78

A resposta é dada por:

$C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 66$

5. UECE – A turma K do Curso de Administração da UECE é formada por 36 alunos, sendo 22 mulheres e 14 homens. O número de comissões que podem ser formadas com alunos desta turma, tendo cada comissão três componentes e sendo assegurada a participação de representantes dos dois sexos em cada comissão, é:

a) 5 236
b) 6 532
c) 3 562
d) 2 635

Primeiro, calculamos o número total de comissões possíveis, independente do sexo dos participantes.

$C_{36,3} = \frac{36!}{(36-3)! \cdot 3!} = \frac{36!}{33! \cdot 3!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33!}{33! \cdot 3!} = 7\,140$

Depois, calculamos quantas comissões são formadas por

- apenas homens:

$C_{14,3} = \frac{14!}{(14-3)! \cdot 3!} = \frac{14!}{11! \cdot 3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 3!} = 364$

- apenas mulheres:

$C_{22,3} = \frac{22!}{(22-3)! \cdot 3!} = \frac{22!}{19! \cdot 3!} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19!}{19! \cdot 3!} = 1\,540$

Por fim, para obter o resultado pedido, subtraímos do total as comissões formadas apenas por homens e apenas por mulheres.

$7140 - 364 - 1540 = 5236$

Portanto, pode haver 5 236 comissões.

6. UPF-RS (adaptado) – Uma equipe esportiva composta por 5 jogadoras está disputando uma partida de dois tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo, podem ser feitas até 3 substituições, e, para isso, o técnico dispõe de 4 jogadoras na reserva. Qual o número de formações distintas que podem iniciar o segundo tempo?

Podendo-se realizar de 0 a 3 substituições, o resultado é obtido por:

$C_{5,0} = 1$

$C_{5,1} \cdot C_{4,1} = 5 \cdot 4 = 20$

$C_{5,2} \cdot C_{4,2} = 10 \cdot 6 = 60$

$C_{5,3} \cdot C_{4,3} = 10 \cdot 4 = 40$

Total: $1 + 20 + 60 + 40 = 121$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. PUC-RS – Uma família mudou-se da zona rural para uma cidade grande, onde os pais e seus 10 filhos deverão morar numa casa de três quartos. Os dez filhos deverão ocupar dois quartos, sendo 6 filhos num quarto e 4 filhos em outro quarto.

De quantos modos os filhos poderão ser separados dessa forma?

a) $6! + 4!$

b) $6!4!$

c) $\dfrac{10!}{6!4!}$

d) $\dfrac{10!}{6!}$

8. IFPE (adaptado) – Oito amigos decidiram brincar de telefone. Para isso, dispuseram-se em um terreno, de modo que cada um estivesse no vértice de um octógono regular de lado medindo 20 metros, conforme a figura 1.

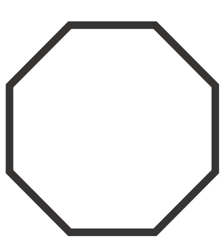


Figura 1

Decidiram montar os telefones utilizando barbante e copos descartáveis, conforme a figura 2.

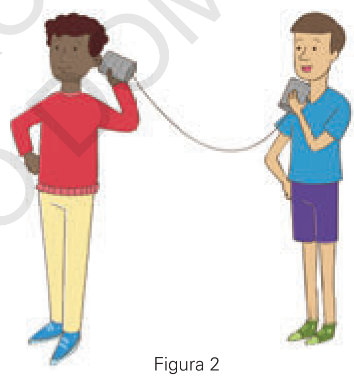


Figura 2

Cada telefone, que é intransferível, liga apenas dois dos amigos e é formado por dois copos, que não podem estar em dois telefones simultaneamente, e um barbante. Para que todos possam falar com todos através de um telefone desses, incluindo os amigos em vértices consecutivos, quantos telefones eles precisarão confeccionar?

9. PUC-Campinas – Admita que certa cidade brasileira tenha oito canais de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste os canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste os canais. Sendo assim, y – x é igual a:

a) 112
b) 280
c) 224
d) 56
e) 140

10. UPE – A turma de espanhol de uma escola é composta por 20 estudantes. Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem pertencer a um mesmo grupo?

a) 6 840
b) 6 732
c) 4 896
d) 1 836
e) 1 122

11. EBMSP-BA – Cada uma das 12 pessoas inscritas para participar de um trabalho voluntário recebeu um crachá com um número de identificação distinto – de 1 a 12 – de acordo com a ordem de inscrição.

Desejando-se organizar grupos formados por três pessoas que não estejam identificadas por três números consecutivos, o número máximo possível de grupos distintos que se pode formar é:

a) 230
b) 225
c) 220
d) 215
e) 210

12. Ifal (adaptado) – Certa lanchonete possui 5 funcionários para atender os clientes durante os dias da semana. Em cada dia, pode trabalhar, no mínimo, 1 funcionário ou podem trabalhar até mesmo todos os funcionários. Nesse princípio, quantos grupos de trabalho diário podem ser formados?

13. UEM-PR – No jogo tradicional de bingo, cada jogador compra cartelas com 24 números entre 1 e 75 (inclusive): cinco números entre 1 e 15 (coluna B), cinco números entre 16 e 30 (coluna I), quatro números entre 31 e 45 (coluna N), cinco números entre 46 e 60 (coluna G) e cinco números entre 61 e 75 (coluna O). Durante o jogo, os números vão sendo sorteados, até que um jogador preencha sua cartela. Dizemos que duas cartelas são disjuntas se não há um número que pertença simultaneamente às duas.

Assinale o que for correto.

01) Há mais possibilidades para uma cartela de bingo do que pessoas vivendo na Terra.

02) É impossível alguém vencer o jogo logo após o sorteio do vigésimo número.

04) O maior número possível de cartelas em um jogo no qual quaisquer duas cartelas são disjuntas é cinco.

08) É possível haver uma cartela cuja soma de todos os números dela seja igual a 200.

16) Dentre todas as cartelas possíveis, há mais cartelas contendo o número 44 do que cartelas contendo o número 23.

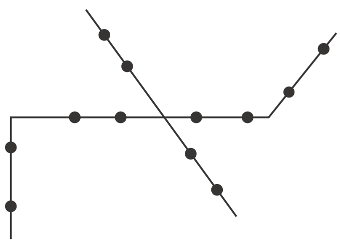
14. Unigranrio-RJ – Considere 5 pontos distintos sobre uma reta r e 4 pontos distintos sobre uma reta s, de forma que r seja paralela a s. O número de triângulos com vértices nesses pontos é igual a:

a) 10
b) 12
c) 20
d) 50
e) 70

15. Udesc – Uma loja de material para pintura fabrica tintas de cores personalizadas, usando uma máquina que mistura até 3 cores iniciais em proporções que podem ser ajustadas de 20% em 20%. Sabendo que há 4 cores iniciais para se escolher, o número de cores que podem ser oferecidas, incluindo as iniciais puras, é:

a) 48
b) 52
c) 28
d) 44
e) 76

16. Fuvest-SP – Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta, de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura:



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é:

a) 200
b) 204
c) 208
d) 212
e) 220

17. UFJF-MG – Considere no plano cartesiano o seguinte conjunto de 13 pontos:

A = {(−3, 0), (−2, 0), (−1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, −3), (0, −2), (0, −1), (0, 1), (0, 2), (0, 3)}.

a) Quantos são os triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto A?
b) Quantos são os triângulos com vértices em A e dois de seus vértices sobre o eixo das ordenadas?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C1-H2

Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp — São Paulo	Louvre — Paris
MAM — São Paulo	Prado — Madri
Ipiranga — São Paulo	British Museum — Londres
Imperial — Petrópolis	Metropolitan — Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

a) 6
b) 8
c) 20
d) 24
e) 36

19. UPF-RS C1-H3

Um jogo consiste em um prisma triangular reto com uma lâmpada em cada vértice e um quadro de interruptores para acender essas lâmpadas. Sabendo que quaisquer três lâmpadas podem ser acesas por um único interruptor e que cada interruptor acende precisamente três lâmpadas, o número de interruptores que existem no quadro é:

a) 4
b) 20
c) 24
d) 120
e) 720

20. PUC-Rio C1-H2

O técnico da seleção brasileira de futebol precisa convocar mais 4 jogadores, dentre os quais exatamente um deve ser goleiro.

Sabendo que na sua lista de possibilidades para essa convocação existem 15 nomes, dos quais 3 são goleiros, qual é o número de maneiras possíveis de ele escolher os 4 jogadores?

a) 220
b) 660
c) 1 980
d) 3 960
e) 7 920

22 COMBINAÇÃO II

- Números binomiais
- Triângulo de Pascal

HABILIDADES

- Resolver problemas de contagem envolvendo combinações.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

PAGADESIGN

Introdução

Ao longo de todo o ano, milhares de pessoas ao redor do mundo apostam em loterias ou "jogos de azar". Alguns dos jogos mais conhecidos no Brasil são Mega-Sena, Dupla-Sena, Quina, Lotofácil e Lotomania. Eles consistem no sorteio aleatório de números que podem premiar, desde com um baixo valor até com uma grande fortuna, o apostador que acertar o número mínimo de combinações. Desses jogos, o mais popular (e também o de maior dificuldade de acerto) é a Mega-Sena. São 50 063 860 combinações distintas de 6 números entre os 60 disponíveis para se apostar.

NÚMEROS BINOMIAIS

Os números binomiais são representados por $\binom{n}{p}$, em que **n** $\in \mathbb{N}$ e **p** $\in \mathbb{N}$, sendo o binomial de **n** sobre **p** definido por:

$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}, \text{ se } n \geq p \\ \binom{n}{p} = 0, \text{ se } n < p \end{cases}$$

TRIÂNGULO DE PASCAL

Estudado pelo matemático chinês Yang Hui (1238-1298), pelo matemático italiano Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557) e aprofundado pelo matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), o triângulo de Pascal é uma construção de números infinitos formada por números binomiais $\binom{n}{p}$, em que **n** representa o número da linha e **p**, o número da coluna e o primeiro elemento $\binom{0}{0} = 1$.

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4		
linha 0	$\binom{0}{0}$						
linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
⋮							
linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	…	$\binom{n}{p}$

Calculando os números binomiais, resulta em:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

PROPRIEDADES

1º) Relação de Stifel – A soma de dois números binominais consecutivos da mesma linha corresponde ao binomial que aparece na linha seguinte, sob o segundo número da soma efetuada.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

2º) A soma de todos os binomiais na linha n é 2n.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

linha 0	1				$1 = 2^0$
linha 1	1	1			$2 = 2^1$
linha 2	1	2	1		$4 = 2^2$
linha 3	1	3	3	1	$8 = 2^3$

3º) A soma dos binomiais da coluna p é igual ao binomial que ocupa a próxima linha e a próxima coluna.

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{p+1}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

4º) A soma dos números binomiais de uma diagonal, a partir do primeiro, é igual ao número binomial que está abaixo do último binomial analisado.

$$\binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\binom{p+2}{2}+\ldots+\binom{n}{n-p}=\binom{n+1}{n-p}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

5º) A partir da segunda linha, dois binominais equidistantes dos extremos são complementares. Logo, são iguais.

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Tanto o número binomial quanto o triângulo de Pascal podem ser úteis para calcular as combinações de um evento.

A combinação de um evento é dada por:

$$C_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}$$

Logo, passaremos a usar neste módulo o número binomial $\binom{n}{p}=\frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}$ para representar as combinações que pretendemos encontrar.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Calcule os binominais a seguir:

a) $\binom{5}{2}$

b) $\binom{2}{6}$

Resolução

a) $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{(5-2)!2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 10$

b) $\binom{2}{6} = 0$, pois $n < p$

2. Sistema Dom Bosco – Com o auxílio do triângulo de Pascal, determine os seguintes binomiais:

$$\begin{array}{lccccc} & p=0 & & & & \\ n=0 & 1 & p=1 & & & \\ n=1 & 1 & 1 & p=2 & & \\ n=2 & 1 & 2 & 1 & p=3 & \\ n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \end{array}$$

a) $\binom{4}{3}$

b) $\binom{5}{2}$

Resolução

Continuando o triângulo de Pascal até $n = 5$, obtemos:

$$\begin{array}{lccccccc} & p=0 & & & & & & \\ n=0 & 1 & p=1 & & & & & \\ n=1 & 1 & 1 & p=2 & & & & \\ n=2 & 1 & 2 & 1 & p=3 & & & \\ n=3 & 1 & 3 & 3 & 1 & p=4 & & \\ n=4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & p=5 & \\ n=5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

a) Observando o triângulo, para $n = 4$ e $p = 3$, obtemos $\binom{4}{3} = 4$.

b) Observando o triângulo, para $n = 5$ e $p = 2$, obtemos $\binom{5}{2} = 10$.

3. Epcar-MG – Um colecionador deixou sua casa provido de R$ 5,00, disposto a gastar tudo na loja de miniaturas da esquina. O vendedor lhe mostrou três opções que havia na loja, conforme a seguir.

- 5 diferentes miniaturas de carros, custando R$ 4,00 cada miniatura;
- 3 diferentes miniaturas de livros, custando R$ 1,00 cada miniatura;
- 2 diferentes miniaturas de bichos, custando R$ 3,00 cada miniatura.

O número de diferentes maneiras desse colecionador efetuar a compra das miniaturas, gastando todo o seu dinheiro, é:

a) 15
b) 21
c) 42
d) 90

Resolução

O colecionador poderá comprar:

- 1 carro e 1 livro: $C_{5,1} \times C_{3,1} = \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} = 5 \times 3 =$ $= 15$ combinações;
- 2 livros e 1 bicho: $C_{3,2} \times C_{2,1} = \binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 3 \times 2 =$ $= 6$ combinações.

Somando ambas as combinações, obtemos $15 + 6 = 21$ combinações.

4. UFU-MG – Uma fábrica de tintas necessita contratar uma equipe para desenvolver e produzir um novo tipo de produto. A equipe deve ser formada por 4 químicos, 1 engenheiro ambiental e 2 engenheiros de produção. Se no processo final de seleção compareceram 6 químicos, 3 engenheiros ambientais e 4 engenheiros de produção, o número de maneiras pelas quais a equipe poderá ser formada é igual a:

a) $6! \cdot 3$
b) $6! \cdot 18$
c) $6! \cdot \dfrac{3}{8}$
d) $6! \cdot \dfrac{3}{4}$

Resolução

Químicos: $\binom{6}{4} = \dfrac{6!}{(6-4)!2!} = \dfrac{6!}{4!2!}$

Engenheiros ambientais: $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{(3-1)!1!} = 3$

Engenheiros de produção: $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{4!}{2!2!}$

Logo, pelo princípio fundamental da dinâmica, obtemos:

$\dfrac{6!}{4!2!} \cdot 3 \cdot \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{6! \cdot 3}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 6! \cdot \dfrac{3}{8}$

ROTEIRO DE AULA

COMBINAÇÃO II

Números binomiais

$$\begin{cases} \dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\cdot p!}, \text{ se } n \geq p \\ \dbinom{n}{p} = 0, \text{ se } n < p \end{cases}$$

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \text{coluna 0} & & & & & \\
\text{linha 0} & \dbinom{0}{0} & \text{coluna 1} & & & & \\
\text{linha 1} & \dbinom{1}{0} & \dbinom{1}{1} & \text{coluna 2} & & & \\
\text{linha 2} & \dbinom{2}{0} & \dbinom{2}{1} & \dbinom{2}{2} & \text{coluna 3} & & \\
\text{linha 3} & \dbinom{3}{0} & \dbinom{3}{1} & \dbinom{3}{2} & \dbinom{3}{3} & \text{coluna 4} & \\
\text{linha 4} & \dbinom{4}{0} & \dbinom{4}{1} & \dbinom{4}{2} & \dbinom{4}{3} & \dbinom{4}{4} & \\
\vdots & & & & & & \\
\text{linha n} & \dbinom{n}{0} & \dbinom{n}{1} & \dbinom{n}{2} & \dbinom{n}{3} & \dbinom{n}{4} & \cdots \dbinom{n}{p}
\end{array}$$

	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5
n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEMG – O jogo da Mega-Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido.

Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos.

Quantos reais ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa R$ 2,00?

a) R$ 540,00
b) R$ 302.400,00
c) R$ 420,00
d) R$ 5.040,00

Por meio do binômio de 10 sobre 4, obtemos as combinações possíveis:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

O valor dos jogos é 210 · 2 = R$ 420,00.

2. Feevale-RS C1-H2

Em certo bairro, houve um "troca-troca" de livros usados. João levou 10 livros de romance, Pedro levou 15 de poesia, e Marcelo, 7 de ficção. Marcelo quer levar para casa, em troca de seus livros, 4 de romance e 3 de poesia. Assinale a alternativa que representa o número de formas diferentes com que essa escolha pode ser feita.

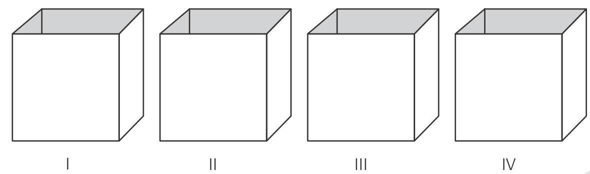
a) $C_{10,4} \cdot C_{15,3}$
b) $C_{10,4} + C_{15,3}$
c) $A_{10,4} \cdot A_{15,3}$
d) $A_{10,3} \cdot A_{15,4}$
e) $A_{10,4} + A_{15,3}$

Como os grupos de livros mudam apenas pela natureza de elementos (a ordem dos livros selecionados não importa), trata-se de combinação. Como Marcelo quer levar 4 livros de romance e 3 de poesia, devemos fazer uma multiplicação em ambas as combinações, a fim de achar o número total de maneiras diferentes de escolha. Portanto, a alternativa correta é a A.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

3. Epcar (adaptado) – O Sr. José deseja guardar 4 bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em 4 caixas numeradas:



Qual o número de maneiras de Sr. José guardar todas as 4 bolas, de forma que uma mesma caixa NÃO contenha mais do que 2 bolas?

Se não fossem as restrições de número de bolas por caixa, o total de formas praticáveis de guardar as 4 bolas seria de 4 · 4 · 4 · 4 = 256. Assim, de acordo com as restrições mencionadas no enunciado, precisamos descontar do total as formas que atendem a mais de duas bolas por caixa. Ou seja:

I) Uma caixa com 3 bolas, outra com 1 e as outras 2 com nenhuma:

$$4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 3 \cdot \binom{1}{1} = 4 \cdot \frac{4!}{3!} \cdot 3 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \text{ formas}$$

II) Com uma caixa com 4 bolas e as outras com nenhuma, há apenas 4 opções, visto que só há 4 caixas e todas as bolas serão guardadas na mesma caixa.

Portanto, o total de formas do Sr. José guardar todas as 4 bolas de maneira que uma mesma caixa não tenha mais que 2 bolas é 256 – 48 – 4 = 204.

Assim, José conseguirá guardá-las de 204 maneiras distintas.

4. FGV – Em um departamento de uma universidade, trabalham 4 professoras e 4 professores, e, entre eles, estão Astreia e Gastão, que são casados. Um grupo de 3 desses professores(as) deverá ir a um congresso, sendo, pelo menos, um homem. Obrigatoriamente, um dos elementos do casal deverá estar no grupo, mas não ambos.

De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá ser organizado?

• Grupos com Gastão:

Observando que um dos lugares é de Gastão, restam 2 lugares para acomodarmos 6 pessoas, já que Astreia não pode participar.

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

• Grupos com Astreia:

Como Astreia faz parte do grupo, Gastão não vai participar. Assim serão 6 pessoas para 2 lugares, mas não vamos esquecer que o grupo não deverá ser formado apenas por mulheres. Para isso, vamos retirar a quantidade de grupos formados apenas por mulheres.

$$C_{6,2} - C_{3,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} - \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 15 - 3 = 12$$

Portanto, o total de grupos é 15 + 12 = 27.

5. Sistema Dom Bosco – Lucas levou sua namorada à sorveteria. Os dois decidiram dividir uma casquinha provando o máximo de sabores possíveis. Se o número máximo de bolas de sorvete por casquinha é 3, e a sorveteria vende 6 sabores diferentes, qual o número de formas diferentes de sabores que eles poderão pedir para uma casquinha?

a) 20
b) 41
c) 120
d) 35

Uma casquinha vai ter, no máximo, 3 bolas com sabores diferentes. Portanto, o resultado solicitado é dado por:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 6 + \frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 6 + 15 + 20 = 41$$

6. PUC-PR – Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, quantos subconjuntos com 3 elementos podem ser formados de maneira que a soma dos três elementos seja um número par?

a) 60
b) 120
c) 10
d) 40
e) 125

Os subconjuntos apontados no enunciado podem ser elaborados de duas formas diferentes:

- Primeira forma (3 elementos pares):

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10.$$

- Segunda forma (2 elementos ímpares e um par):

$$\binom{4}{2} \cdot 5 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 5 = 30.$$

Assim, a quantidade de subconjuntos com 3 elementos com soma par será obtida por 10 + 30 = 40.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV – Em uma sala estão presentes n pessoas, com $n > 3$. Pelo menos uma pessoa da sala não trocou aperto de mão com todos os presentes na sala, e os demais presentes trocaram apertos de mão entre si, e um único aperto por dupla de pessoas. Nessas condições, o número máximo de apertos trocados pelas n pessoas é igual a:

a) $\frac{n^2+3n-2}{2}$

b) $\frac{n^2-n+2}{2}$

c) $\frac{n^2+2n-2}{2}$

d) $\frac{n^2-3n+2}{2}$

e) $\frac{n^2-n-2}{2}$

8. Unesp – Está previsto que, a partir de 1º de janeiro de 2017, entrará em vigor um sistema único de emplacamento de veículos para todo o Mercosul, o que inclui o Brasil. As novas placas serão compostas por 4 letras e 3 algarismos.

Admita que no novo sistema possam ser usadas todas as 26 letras do alfabeto, incluindo repetições, e os 10 algarismos, também incluindo repetições. Admita ainda que, no novo sistema, cada carro do Mercosul tenha uma sequência diferente de letras e algarismos em qualquer ordem. Veja alguns exemplos das novas placas.

No novo sistema descrito, calcule o total de placas possíveis com o formato "Letra-Letra-Algarismo-Algarismo-Algarismo-Letra-Letra", nessa ordem. Em seguida, calcule o total geral de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa. Deixe suas respostas finais em notação de produto ou de fatorial.

9. UERN – Em uma sorveteria, há x sabores de sorvete e y sabores de cobertura. Combinando um sabor de sorvete com dois ou três sabores de cobertura, tem-se, respectivamente, 150 ou 200 diferentes opções de escolha.

Assim, conclui-se que o número de sabores de cobertura disponível é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

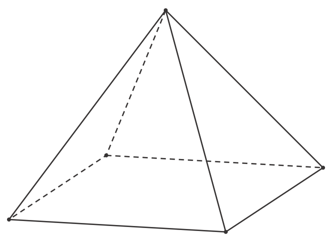
10. Epcar – Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:

I. Obrigatoriamente, conhecer o Estádio do Maracanã.
II. Se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em 12 estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação I e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação II, nessa ordem, é:

a) $\frac{11}{26}$
b) $\frac{13}{25}$
c) $\frac{13}{24}$
d) $\frac{11}{24}$

11. FGV – As cinco faces de uma pirâmide quadrangular regular serão pintadas e cada face terá uma só cor. Tintas de 5 cores diferentes estão disponíveis e duas faces vizinhas da pirâmide não poderão ter a mesma cor.



De quantas maneiras diferentes a pirâmide poderá ser pintada?

Obs.: pinturas que coincidem por rotação da pirâmide são consideradas iguais.

12. UECE – Uma urna contém 50 cartelas das quais 20 são azuis, numeradas de 1 a 20, e 30 são vermelhas, numeradas de 21 a 50. De quantas formas diferentes é possível retirar três cartelas (por exemplo, duas vermelhas e uma azul, três azuis,...) dessa urna?

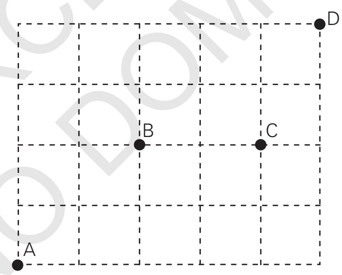
a) 19 600

b) 19 060

c) 16 900

d) 16 090

13. UEM-PR – Quatro pontos estão representados na malha quadriculada abaixo. Deseja-se criar um caminho de um ponto a outro apenas com segmentos sobre as linhas tracejadas e com o menor comprimento possível. Sobre o exposto, assinale o que for correto.



01) Existem exatamente 30 caminhos de A até D.

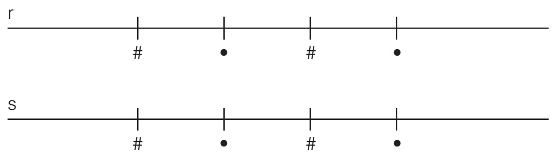
02) Existem exatamente 10 caminhos de A até D que passam por C.

04) Existem exatamente 9 caminhos de A até C que não passam por B.

08) Existem exatamente 6 caminhos de A até D que passam por B e por C.

16) Existem mais de 20 caminhos de A até D que passam por B ou por C.

14. PUC-RS – Em cada uma das retas paralelas r e s, são marcados 4 pontos representados pelos sinais # e •, como na figura. Na escolha de 3 desses pontos como vértices de um triângulo, sendo um deles representado por um sinal diferente, o número de triângulos que podem ser determinados é:



a) 48
b) 46
c) 44
d) 42
e) 40

15. Udesc – A Câmara de Vereadores de uma cidade é composta por 13 vereadores, e 6 deles são de partidos políticos da situação (aliados ao governo municipal), com os 7 restantes de partidos da oposição (contrários ao governo municipal). É necessário compor uma comissão especial a ser formada por exatamente 5 vereadores, de forma que haja pelo menos dois representantes de cada um desses blocos políticos. Além disso, foi definido que o líder da situação e o líder da oposição não poderão fazer parte da mesma comissão. Sob essas condições, a quantidade de comissões distintas que podem ser constituídas é igual a:

a) 945
b) 500
c) 620
d) 810
e) 310

16. UEL-PR – Leia o texto a seguir.

O movimento Free Hugs começou em 2001 com um único indivíduo, em Sidney, Austrália, conhecido pelo pseudônimo de Juan Mann. Ao se ver em situação desconfortável, com vários problemas pessoais e familiares, Mann decidiu sair sozinho, caminhando pelas ruas e oferecendo abraços às pessoas em lugares públicos como um gesto hipoteticamente neutro e sem interesses. Ele usava um cartaz de papelão nas mãos com a mensagem "Free Hugs" para oferecer abraços a desconhecidos. Nos dias de hoje, várias vezes ao ano e em diferentes cidades no mundo, agentes voluntários saem, sozinhos ou em grupos organizados, pelas ruas, repetindo a ação inicial de Mann para propor a troca de abraços com desconhecidos.

Fonte: MARTINS, F. G. P.; GUSHIKEN, Y. Free Hugs: dinâmicas de troca, dádiva e estranhamento na intervenção urbana. *Comunicação, mídia e consumo*. Ano 9, v. 9, n. 24, p. 179-198, maio 2012. (Adaptado.)

Em um determinado dia, uma apresentadora de um programa de TV, após exibir reportagem sobre o movimento "Free Hugs", propôs aos espectadores da plateia que saudassem a todos os demais (uns aos outros) com um abraço. Considere que:

- todos aceitaram o abraço;
- os abraços ocorreram apenas entre pessoas da plateia;
- cada abraço envolveu apenas duas pessoas;
- duas pessoas se abraçaram apenas uma vez;
- quando terminaram as saudações, o total de abraços foi de 496.

Quantas pessoas formavam a plateia do programa naquele dia?

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução desta questão.

17. UERN – Considere a seguinte equação:

$$\binom{x+2}{2} = \binom{3x+1}{1}$$

A partir dessa equação, conclui-se que o número binomial $\binom{2x-1}{2}$ equivale a:

a) 3
b) 10
c) 21
d) 60

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C1-H2

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre 2 desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2! \cdot 8!} - \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2! \cdot 8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} + 4 \cdot 4$

e) $\frac{6!}{4!} + 6 \cdot 4$

19. Insper-SP C1-H2

Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é:

a) 140
b) 120
c) 70
d) 60
e) 40

20. Unesp C1-H2

Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada um e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

Nessas condições, a quantidade de folhas de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será:

a) 302 400
b) 113 400
c) 226 800
d) 181 440
e) 604 800

EXERCÍCIOS **INTERDISCIPLINARES**

21. UEM-PR (adaptado) – O ser humano é multicelular, diploide com 46 cromossomos, e formado a partir de uma única célula (célula-ovo ou zigoto).

Considere o desenvolvimento embrionário inicial de uma fêmea humana, no qual não há morte ou perda de células, nem erros durante o ciclo celular, e no qual todas as células tenham ciclo celular sincronizado. Com base no exposto, assinale o que for correto.

I. O organismo em formação, a partir da célula-ovo, terá mais de 1 000 células geneticamente idênticas após completar 10 vezes o ciclo celular.
II. A mitose se caracteriza pela duplicação e pela divisão equacional do material genético.
III. O aumento do número de células, no desenvolvimento embrionário inicial, obedece a uma progressão aritmética.
IV. O gráfico que demonstra o aumento do número de células, nas etapas do ciclo celular no desenvolvimento embrionário inicial, é uma reta.
V. A cada ciclo, o número de cromossomos sexuais dobrará, enquanto o número de autossomos aumentará 22 vezes.

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas III é verdadeira.
c) Apenas I e II são verdadeiras.
d) Apenas I e IV são verdadeiras.
e) Apenas II, III e V são verdadeiras.

22. UEM-PR – Considerando os conceitos de geometria molecular e que todas as figuras geométricas apresentadas nas alternativas são regulares, assinale o que for correto.

01) A soma das áreas das faces da figura geométrica formada pela molécula de metano, de aresta a, é igual a $a^2\sqrt{3}$.

02) O volume da figura geométrica formada pela molécula de SF_6 – considerando que a distância entre dois átomos de flúor adjacentes é b e a distância entre o átomo de enxofre e qualquer um dos átomos de flúor é B – é igual a $\frac{b^2B}{3}$.

04) O comprimento do apótema da pirâmide que representa a figura geométrica do íon sulfito é igual à distância de ligação entre o átomo de enxofre e um átomo de oxigênio.

08) A figura geométrica formada pela molécula de pentacloreto de fósforo possui 6 faces.

16) O ângulo entre as ligações B—F na figura geométrica formada pela molécula de BF_3 é aproximadamente de 107 graus.

23. UFG-GO – A lista a seguir apresenta características relativas a duas das partes do livro *Lira dos vinte anos*, do poeta Álvares de Azevedo, segundo uma determinada edição:

- *Compõe-se de 15 poemas.*
- *Compõe-se de 40 poemas.*
- *Uso do lirismo romântico convencional: eu lírico terno; mulher angelical; sentimentos espiritualizados.*
- *Uso do lirismo romântico grotesco: eu lírico sarcástico; mulher acessível; sentimentos carnais.*
- *Uso de recursos humorísticos: ironia, sátira, caricatura.*
- *Aspectos de um intimismo adolescente: desdém pela rotina; ênfase no idealismo.*

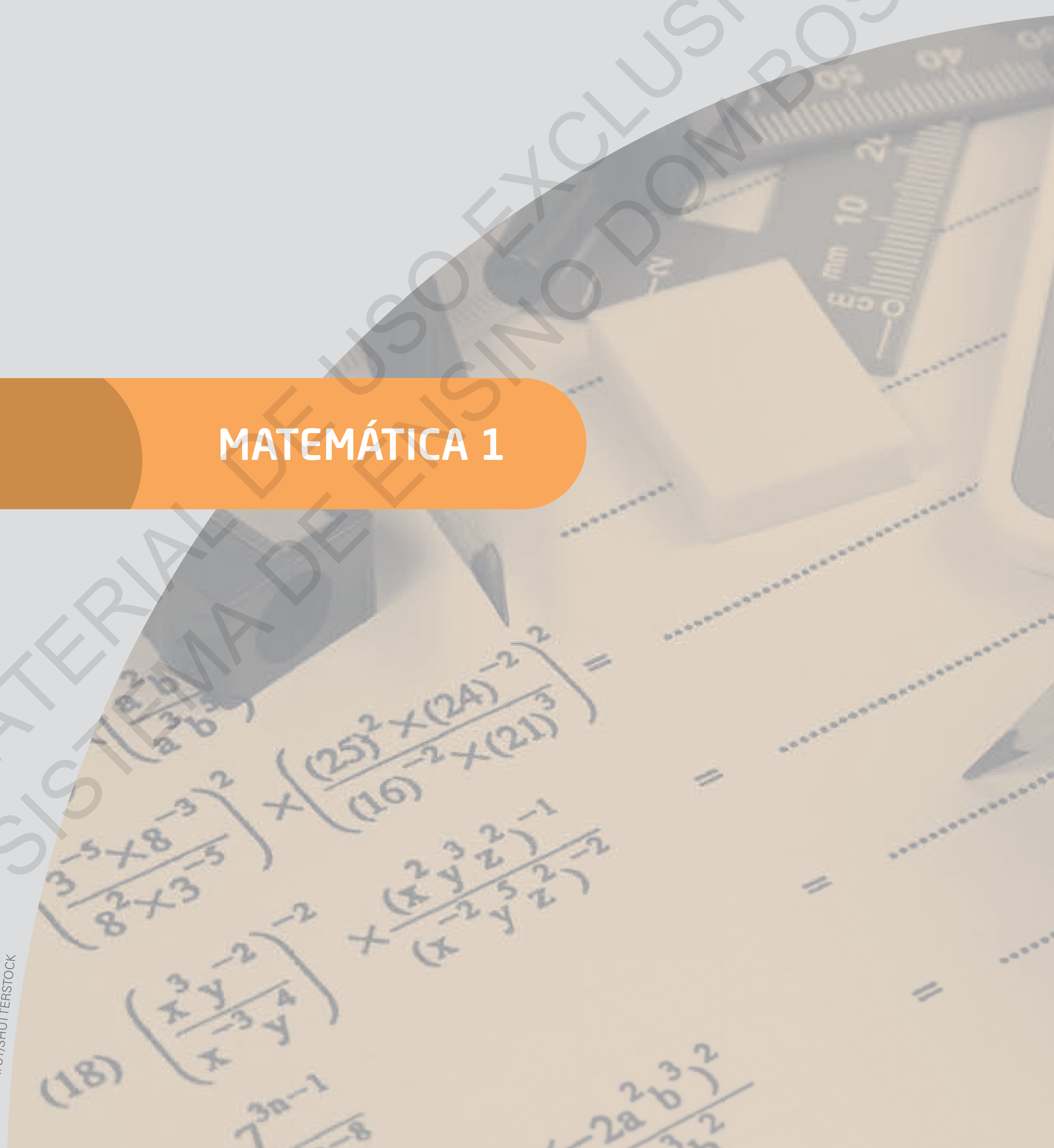
Um professor de literatura pretende ordenar a lista apresentada de modo que características de uma mesma parte do livro fiquem juntas. O número de maneiras pelo qual ele poderá fazer isso é:

a) 24
b) 48
c) 72
d) 90
e) 96

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 1



WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

APRESENTAÇÃO

A disciplina de Matemática é uma ciência de características específicas, que se organiza por **meio de definições**, **teoremas** e **demonstrações**. Os alunos do ensino pré-vestibular devem demonstrar teoremas, justificar definições e, principalmente, usar a Matemática para **resolver problemas do cotidiano** e compreender fenômenos de outras áreas do conhecimento. Para tanto, precisam valorizar o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, indagar a existência de solução, estabelecer hipóteses e conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar de maneira lógico-dedutiva.

Esse material respalda-se na qualidade dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as áreas de conhecimento do Ensino Médio, cujos conteúdos conceituais são exigidos nos principais vestibulares do Brasil e no novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), e contempla uma **ampla coletânea de questões** extraídas de tais provas, com respectivos gabaritos e resoluções comentadas.

Por critério de organização didática, os conteúdos conceituais estão separados da sequência de exercícios e distribuídos para atender à demanda das diversas formatações de cursos, considerando as prioridades dos principais vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com base nisso, o material didático produzido para essa etapa de ensino contempla e destaca inúmeras competências da nova Matriz de Referências para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e, consequentemente, habilidades a elas relacionadas.

CONTEÚDO

MATEMÁTICA 1

Volume	Módulo	Conteúdo
3	33	Sequências e progressão aritmética
	34	Progressão geométrica
	35	Operações entre termos de progressões
	36	Números complexos e sua forma Algébrica I
	37	Números complexos e sua forma Algébrica II
	38	Números complexos e sua forma Trigonométrica I
	39	Números complexos e sua forma Trigonométrica II
	40	Polinômios I
	41	Polinômios II
	42	Polinômios III
	43	Equações algébricas I
	44	Equações algébricas II

MATEMÁTICA 2

Volume	Módulo	Conteúdo
3	33	Geometria espacial de posição I
	34	Geometria espacial de posição II
	35	Primas I
	36	Prismas II
	37	Pirâmides
	38	Cilindros
	39	Cones
	40	Esferas
	41	Estatística – Análise de dados I
	42	Estatística – Análise de dados II
	43	Estatística – Medidas de tendência central I
	44	Estatística – Medidas de tendência central II

MATEMÁTICA 3

Volume	Módulo	Conteúdo
3	17	Principio fundamental da contagem I
	18	Princípio fundamenta da contagem II
	19	Permutação simples e com repetição
	20	Arranjo simples
	21	Combinação I
	22	Combinação II

33 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Comentários sobre o módulo

Instigue os alunos a reconhecerem sequências numéricas em seu dia a dia. Além disso, fomente a busca de representação matemática de tais sequências.

Com base em exemplos trazidos pelos alunos, ajude-os a determinar quando uma sequência numérica é crescente, decrescente ou constante.

Quando possível, traga o conceito de progressão aritmética usando exemplos práticos e de aplicação cotidiana.

Para ir além

Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano da Idade Média. Sua principal obra foi *Liber Abaci*, responsável por introduzir os números indo-arábicos na Europa. Ficou famoso pela **sequência de Fibonacci**, que inicia com os termos 0 e 1, em que os próximos termos correspondem à soma dos dois anteriores.

Depois de muito tempo, pode-se perceber que a sequência de Fibonacci tem aplicação em diversos campos no nosso cotidiano. Pesquise mais sobre a sequência de Fibonacci e em quais contextos ela pode ser aplicada na atualidade.

Exercícios propostos

7. D

Da relação dada, temos:

$a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$

$a_4 = a_3 - a_2 = 1 - 3 = -2$

$a_5 = a_4 - a_3 = -2 - 1 = -3$

$a_6 = a_5 - a_4 = -3 - (-2) = -1$

$a_7 = a_6 - a_5 = -1 - (-3) = 2$

$a_8 = a_7 - a_6 = 2 - (-1) = 3$

$a_9 = a_3$

$a_{10} = a_4$

Assim, o ciclo se repete a cada 6 números. Logo, o último termo será:

$70 : 6 = 11$, resto $4 \rightarrow a_{70} = a_4 = -2$.

8. B

Do enunciado, temos que a primeira cadeira tem $h_1 = 48 + 44 = 92$ cm.

A segunda cadeira tem a mesma altura, acrescida de 3 cm. Logo, $h_2 = 92 + 3 = 95$ cm.

Para as demais alturas, teremos sempre um acréscimo de 3 cm.

Logo, temos uma PA (92, 95, 98, ...) de razão 3.

Sabemos que a altura para **n** cadeiras é de 1,4 m = 140 cm

Para calcularmos **n**, utilizaremos a relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, em que $a_n = 140$ cm e $a_1 = 92$ cm.

Assim: $140 = 92 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow 140 - 92 = 3n - 3 \rightarrow$
$\rightarrow 3n = 51 \rightarrow n = \dfrac{51}{3} = 17.$

9. A

$a_1 = a - 2r$

$a_2 = a - r$

$a_3 = a$

$a_4 = a + r$

$a_5 = a + 2r$

$S = 5a = 125$

$a = \dfrac{125}{5} = 25$

10. Do enunciado, temos $a_1 = 1\,000$, $a_2 = 1\,400$, $a_3 = 1\,800$.

Como $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 400$, trata-se de uma PA de razão $r = 400$.

Para calcularmos o dia em que o atleta atingirá a distância de 21 km, temos:

$a_n = 21\,000 = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow 21\,000 = 1\,000 + (n - 1) \cdot 400 \rightarrow n = 51$

Ou seja, no 51º dia.

11. C

Do enunciado, concluímos que se trata de uma PA, sendo $a_1 = 4$, razão r e $a_n = 25$.

Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$25 = 4 + (n - 1) \cdot r$

$(n - 1) \cdot r = 21$

Logo:

$n - 1 = 3$ e $r = 7$ ou

$n - 1 = 7$ e $r = 3$ ou

$n - 1 = 1$ e $r = 21$ ou

$n - 1 = 21$ e $r = 1$

Portanto, a soma dos possíveis valores de **r** será dada por $7 + 3 + 21 + 1 = 32$.

12. B

$$a_9 = \frac{82}{3} - \frac{9}{3} = \frac{73}{3}$$

$$a_8 = \frac{73}{3} - \frac{9}{3} = \frac{64}{3}$$

$$a_7 = \frac{64}{3} - \frac{9}{3} = \frac{55}{3}$$

Portanto, a média aritmética dos 4 últimos termos será dada por:

$$M = \frac{\frac{82}{3} + \frac{73}{3} + \frac{64}{3} + \frac{55}{3}}{4} = \frac{274}{12} = \frac{137}{6}$$

13. D

Como se trata de uma PA, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sec x = \frac{\text{tg } x + 2}{2} \to 2\sec x = \text{tg } x + 2$$

Substituindo-se sec x por $\frac{1}{\cos x}$ e tg x por $\frac{\text{sen} x}{\cos x}$, temos:

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + 2 \to 2 = \text{sen } x + 2\cos x$$

Elevando os termos ao quadrado, temos:

$2^2 = (\text{sen } x + 2\cos x)^2 \to 4 = \text{sen}^2 x + 4\text{sen } x \cos x + 4\cos^2 x$

Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, temos:

$4 = \text{sen}^2 x + 4\text{sen } x \cos x + 4(1 - \text{sen}^2 x) \to$

$\to 4 = \text{sen}^2 x + 4\text{sen } x \cos x + 4 - 4\text{sen}^2 x$

$3\text{sen}^2 x - 4\text{sen } x \cos x = 0 \to$

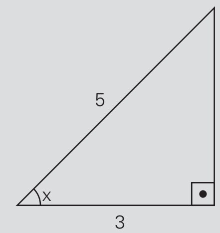
$\to \text{sen } x(3\text{sen } x - 4\cos x) = 0$

Assim, temos $\text{sen } x = 0$ ou $3\text{sen } x - 4\cos x = 0$.

$\text{sen } x = 0$ (não convém)

Portanto, $3\text{sen } x = 4\cos x \to \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \frac{4}{3} = \text{tg} x$.

Assim, podemos escrever o triângulo abaixo para encontrar sen x e cos x:



Portanto, $\text{sen} x = \frac{4}{5}$ e $\cos x = \frac{3}{5}$.

Logo, a PA $(\tan x, \sec x, 2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$. A razão será $r = a_2 - a_1 \to r = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$.

14. Do enunciado, temos que a PA $= (2x, x + 1, 3x)$. Da relação $a_n - a_{n-1} = r$, temos:

$x + 1 - 2x = r = 3x - (x + 1) \to x + 1 + (x + 1) =$

$= 3x + 2x \to 2x + 2 = 5x \to x = \frac{2}{3}$

Assim, $a_1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

$a_2 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

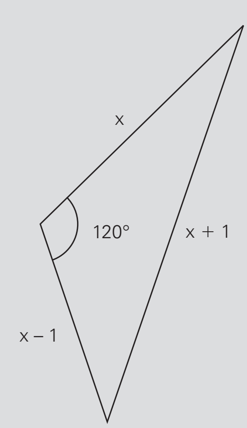
$a_3 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{3}$

O perímetro será, portanto, $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{6}{3} = \frac{15}{3} = 5$.

15. C

Os lados do triângulo formam uma PA de razão 1. Logo, $(x - 1, x, x + 1)$.

Sabemos que o maior lado de um triângulo é oposto ao seu maior ângulo. Podemos então aplicar o teorema dos cossenos no triângulo considerado no enunciado:



$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot \cos 120°$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot$
$\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - x \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x' = 0$ ou $x'' = \frac{5}{2}$

$x = 0$ (não convém)

Portanto, o perímetro P do triângulo será dado por:

$P = x + x - 1 + x + 1 \rightarrow P = 3x = 3 \cdot \frac{5}{2} = 7{,}5$

16. B

MMC (3, 4) = 12

Múltiplos de 12 são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo.

Múltiplos de 12 entre 50 e 100 (60, 72, ..., 84, 96).

Temos, assim, uma PA de razão 12.

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, temos:

$96 = 60 + (n - 1) \cdot 12$, em que **n** é o número de múltiplos de 12 entre 50 e 100.

$36 = (n - 1) \cdot 12$

$n - 1 = 3$

$n = 4$

17. Temos, para todo **i** natural, $n_1 = 3$, $n_2 = \frac{2}{5}$, $n_3 = -\frac{1}{4}$,

$n_4 = -\frac{5}{7}$, $n_5 = -\frac{4}{3}$, $n_6 = -\frac{7}{2}$, $n_7 = 3$ e $n_8 = \frac{2}{5}$

Assim, para $n_{2013} = n_{2010+3} = n_{6 \cdot 335 + 3} = -\frac{1}{4}$.

Estudo para o Enem

18. A

No início do ciclo, os anos formam uma PA (1 755, 1 766, 1 777, ...).

Como $a_1 = 1\,755$, da relação $a_n - a_{n-1} = r$, obtemos a razão da PA:

$a_2 - a_1 = r = 1\,766 - 1\,755 = 11$

Para determinar em que ciclo de atividade magnética o sol estará em 2 101, calculamos o **n**:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$2\,101 = 1\,755 + (n - 1) \cdot 11$

$2\,101 = 1\,755 + 11n - 11$

$11n = 357$

$n = 32{,}45$

Logo, o ano de 2 101 está compreendido no 32º ciclo.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. A

Podemos verificar que a sequência de quadrados tem sua medida aumentada em 1 unidade a cada novo termo. Temos assim uma progressão aritmética de razão 1.

Para um quadrado de medida **n**, a área será $A_n = n^2$.

Dessa forma, $A_{n-1} = (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$.

Logo, para $A_n - A_{n-1} = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. D

Para descobrirmos o tempo em que os 3 grupos batem palma simultaneamente, fazemos o MMC de (2, 3, 4) = 12.

Como as palmas iniciam em 1 s, com repetição em um intervalo de 12 s, encontramos uma PA cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 12. Assim, temos a PA (1, 13, 25, 37, 49), sendo **n** máximo igual 5, pois, para n = 6, teríamos um valor superior a 60s.

Logo, para determinarmos o termo geral dessa sequência, utilizamos a relação: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 12$ para **n** entre 1 e 5.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

34 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Comentários sobre o módulo

Traga exemplos práticos de aplicações de progressões geométricas a fim de contextualizar e mostrar aos alunos o uso desse conhecimento matemático na realidade.

Instigue os alunos a identificar tais aplicações em seus cotidianos e estimule-os no sentido de representarem matematicamente tais sequências.

Para ir além

O economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) disse que, “enquanto a população humana cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos cresce em progressão aritmética”.

Busque mais informações a respeito dos estudos de Thomas Malthus e de como ele usou a Matemática para representar fenômenos ligados à população.

Exercícios propostos

7. D

Do enunciado, podemos concluir que se trata de uma PG, na qual $a_1 = 1$ e cuja razão é 3. Portanto, (1, 3, 9, ...).

Para o enésimo termo, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_n = 3^{n-1}$

8. A

Os valores irão compor uma PG de razão q, a qual será a taxa de decrescimento.

Assim, temos:

- Valor há 2 anos = a_1 = 50 000;
- Valor hoje = a_3 = 32 000, pois o valor que o carro valia há 1 ano não foi informado.

Assim, a PG será (50 000, a_2, 32 000,...)

Da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

A taxa de decrescimento será $a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow$ $\rightarrow 32\,000 = 50\,000 \cdot q^2$.

Assim, $q^2 = \dfrac{32\,000}{50\,000} = \dfrac{16}{25} \rightarrow q = \dfrac{4}{5}$.

Assim, daqui a 1 ano o valor será o 4º termo da PG.

Portanto, $a_4 = 50\,000 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = 50\,000 \cdot \dfrac{64}{125} =$

= R\$ 25.600,00

Ou seja, valor menor que o do ano atual.

9. C

Do enunciado, temos que:

$141 - 103 = A - 40 \rightarrow A = 78$

Da tabela, verifica-se que:

$B = 217 - 70 - A = 217 - 70 - 78 = 69$

$C = 141 - 40 - 41 = 60$

Assim, A = 78, B = 69 e C = 60.

Da PA $\rightarrow B - A = C - B = r$

$69 - 78 = -9$

$60 - 69 = -9$

Da PG $\rightarrow \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{B} = q$, o que não é verdade.

Portanto, trata-se de uma PA com razão –9, como $r < 0$.

Ou seja, é uma PA decrescente.

10.

1) Sabemos que (1, B, C) e (1, C, E) estão em PA, em que a_1 para ambas sequências é 1.

Assim, $r = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \rightarrow C - B = B - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2B = C + 1 \rightarrow B = \dfrac{C + 1}{2}$

O mesmo raciocínio vale para a sequência 2:

$E - C = C - 1 \rightarrow 2C = E + 1 \rightarrow C = \dfrac{E + 1}{2}$ ou

$E = 2C - 1$

2) Sabemos que (B, C, D, E) estão em PG e, da relação $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, temos:

$$q = \frac{C}{B} = \frac{C}{\frac{C+1}{2}} = \frac{2C}{C+1}$$

Da relação: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$E = B \cdot q^3 \rightarrow E = \dfrac{C}{q} \cdot q^3 \rightarrow E = C \cdot q^2 \rightarrow E =$

$= C \cdot \left(\dfrac{2C}{C+1}\right)^2 \rightarrow 2C - 1 = C \cdot \left(\dfrac{2C}{C+1}\right)^2$

$2C^3 - 3C^2 + 1 = 0 \rightarrow (C - 1) \cdot (2C^2 - C - 1) = 0.$

Logo, $C = 1$ ou $C = -\dfrac{1}{2}$.

Para $C = 1$, $B = \frac{1+1}{2} = 1$ (o que não convém, já que B e C são distintos)

Portanto, $C = -\frac{1}{2}$. Assim:

$$B = \frac{C+1}{2} \rightarrow B = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$E = 2C - 1 \rightarrow E = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -2$$

$$D = C \cdot q \rightarrow C \cdot \frac{2C}{C+1} = \frac{2C^2}{C+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow D = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Assim, B, C, D e E são respectivamente: $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, 1 e –2.

11. E

Para calcularmos C_8, temos que calcular primeiro A_8 e B_8.

Do enunciado, temos que A é uma PA e que $A_5 = 10$ e $r = 3$. Assim:

$A_n = A_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow 10 = A_1 + (5 - 1) \cdot 3 \rightarrow$
$\rightarrow A_1 = 10 - 12 = -2$

Calculando: $A_8 \rightarrow A_8 = (-2) + (8 - 1) \cdot 3 =$
$= -2 + 21 = 19.$

Por outro lado, B é uma PG em que $B_5 = 10$ e $q = 3$.

Assim, $B_n = B_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow B_5 = B_1 \cdot q^{5-1} \rightarrow B_1 = \frac{B_5}{q^4}$.

$B_8 = B_1 \cdot q^{8-1} \rightarrow B_8 = \frac{B_5}{q^4} \cdot q^7 \rightarrow B_8 = B_5 \cdot q^3 \rightarrow$
$\rightarrow B_8 = 10 \cdot 3^3 = 270.$

Assim, $C_8 = A_8 \cdot B_8 \rightarrow C_8 = 19 \cdot 270 = 5\,130.$

12. A

Do enunciado, temos que $a_2 = b_3$, $a_{10} = b_5$ e $a_{42} = b_7$.

Como a sequência de a é uma PA e a sequência de b é uma PG, temos:

$a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot 3 = b_3 = b_1 \cdot q^2 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 + 1 \cdot 3 = b_1 \cdot q^2$ (I)

$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 3 = b_5 = b_1 \cdot q^4 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 + 9 \cdot 3 = b_1 \cdot q^4$ (II)

$a_{42} = a_1 + (42 - 1) \cdot 3 = b_7 = b_1 \cdot q^6 \rightarrow$
$\rightarrow a_1 + 41 \cdot 3 = b_1 \cdot q^6$ (III)

Fazendo II – I e III – II, temos respectivamente:

$24 = b_1 \cdot (q^4 - q^2)$ e $96 = b_1 \cdot (q^6 - q^4)$

$96 = b_1 \cdot (q^6 - q^4) = [b_1 \cdot (q^4 - q^2)] \cdot q^2 \rightarrow$

$\rightarrow 96 = 24 \cdot q^2 \rightarrow q^2 = \frac{96}{24} = 4$

Portanto: $q = \sqrt{4} = 2.$

Logo, $24 = b_1 \cdot (q^4 - q^2) \rightarrow b_1 = \frac{24}{(2^4 - 2^2)} = 2.$

Substituindo os valores em $a_1 + 1 \cdot 3 = b_1 \cdot q^2$, temos $a_1 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$.

Encontrando a_4 e b_4, temos:

$a_4 = a_1 + 3r \rightarrow a_4 = 5 + 3 \cdot 3 = 14$

$b_4 = b_1 \cdot q^3 \rightarrow b_4 = 2 \cdot 2^3 = 16$

Logo, $b_4 - a_4 = 16 - 14 = 2.$

13. A

Do enunciado, temos PG $\rightarrow \left(\frac{1}{8}, b_2, b_3, b_4, 2, \ldots\right)$.

Assim, $b_1 = \frac{1}{8}$ e $b_5 = 2$.

PA $\rightarrow (2, a_2, a_3, \ldots)$. Assim, $a_1 = 2$.

Da relação $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow b_5 = b_1 \cdot q^4 \rightarrow$
$\rightarrow 2 = \frac{1}{8} \cdot q^4 \rightarrow q = 2$

Logo, $b_7 = b_1 \cdot q^6 \rightarrow b_7 = (18) \cdot 2^6 \rightarrow b_7 = 8$

Como $a_5 = b_7$, da relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:

$8 = 2 + 4 \cdot r \rightarrow 4 \cdot r = 6 \rightarrow r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Para $a_n = 50$, temos:

$50 = 2 + (n - 1) \cdot \frac{3}{2} \rightarrow n - 1 = 48 \cdot \frac{2}{3} = 32 \rightarrow$
$\rightarrow n = 33$

14.

Do enunciado, temos que $a_7 = 20$ e $a_{13} = 11$.

Para uma PG, temos $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$20 = a_1 \cdot q^6 \rightarrow a_1 = \dfrac{20}{q^6} \rightarrow a_1 = \dfrac{a_7}{q^6}$ e $11 = a_1 \cdot q^{12}$

$\rightarrow a_1 = \dfrac{a_{13}}{q^{12}}$

$a_{10} = \dfrac{20}{q^6} \cdot q^9 \rightarrow a_{10} = a_7 \cdot q^3$ (I)

$a_{10} = \dfrac{a_{13}}{q^{12}} \cdot q^9 \rightarrow a_{10} = a_{13} \cdot q^{-3} = \dfrac{a_{13}}{q^3}$ (II)

Multiplicando I e II, temos:

$a_{10} \cdot a_{10} = a_7 \cdot q^3 \cdot \dfrac{a_{13}}{q^3} \rightarrow a_{10}{}^2 = 20 \cdot 11 \rightarrow$

Assim, $a_{10} = \sqrt{20 \cdot 11} = 2\sqrt{55}$.

15. E

I) $a_1 = 1^2 + (4 \cdot 1) + 4 \rightarrow a_1 = 9$

$a_2 = 2^2 + (4 \cdot 2) + 4 \rightarrow a_2 = 16$

$a_3 = 3^2 + (4 \cdot 3) + 4 \rightarrow a_1 = 23$

Da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos que a razão

$\dfrac{a_3}{a_2} \neq \dfrac{a_2}{a_1}$ (portanto, é falso).

II) $b_1 = 2^{1^2} = 2$

$b_2 = 2^{2^2} = 16$

$b_3 = 2^{3^2} = 512$ (seguindo o mesmo raciocínio do item I, é falso)

Portanto, os itens III e IV são verdadeiros.

16. A

Do enunciado $a_n = \dfrac{1}{4} - n$. Assim:

$a_1 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$; $a_2 = \dfrac{1}{4} - 2 = -\dfrac{7}{4}$; $a_3 = $
$= \dfrac{1}{4} - 3 = -\dfrac{11}{4}$

Verificando se a_n é uma PA ou PG, temos:

$PA \rightarrow a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = r$

$PG \rightarrow q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

Calculando para os valores encontrados:

$PA \rightarrow a_3 - a_2 = -\dfrac{11}{4} - \left(-\dfrac{7}{4}\right) = \left(-\dfrac{4}{4}\right) = -1$

$a_2 - a_1 = \left(-\dfrac{7}{4}\right) - \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\left(-\dfrac{4}{4}\right) = -1$

$PG \rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\left(-\dfrac{7}{4}\right)}{\left(-\dfrac{3}{4}\right)} = \dfrac{7}{3}$

$\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{\left(-\dfrac{11}{4}\right)}{\left(-\dfrac{7}{4}\right)} = \dfrac{11}{7}$

Assim, trata-se de uma PA de razão –1.

17.

Do enunciado, temos que (a_1, a_2, a_3) é uma PG e (a_3, a_4, a_5) é uma PA, em que $q = r = w$.

a) Para $a_3 = 3$ e $w = 2$

$PA \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$PG \rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Para a_3, temos:

Da $PG \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow a_1 - 3 = \dfrac{3}{4}$.

Portanto, $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow a_2 = \dfrac{3}{4} \cdot 2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Assim, a PG é $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}, 3\right)$.

Da PA, o primeiro termo é a_3. Portanto, o segundo termo $a_4 = a_3 + (2 - 1) \cdot 2 \rightarrow a_4 = 3 + 2 = 5$

Já o terceiro termo $a_5 = a_3 + (3 - 1) \cdot 2 \rightarrow a_5 =$
$= 3 + 4 = 7$.

Assim, a PA é (3, 5, 7).

A sequência é dada por $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}, 3, 5, 7\right)$.

b) Dado $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$. Sabendo que $q = r = w$, temos:

Da $PG \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \rightarrow a_3 = 1 \cdot q^2$ (I)

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \rightarrow a_2 = 1 \cdot q$ (II)

Da $PA \rightarrow a_5 = a_3 + (3 - 1) \cdot r \rightarrow 8 = a_3 + 2r \rightarrow$
$\rightarrow a_3 = 8 - 2r$ (III)

$a_4 = a_3 + (2 - 1) \cdot r \rightarrow a_4 = 8 - 2r + r = 8 - r$ (IV)

Relacionando I e III, já que $q = r = w$, temos:

$8 - 2w = 1 \cdot w^2 \rightarrow w^2 + 2w - 8 = 0 \rightarrow w =$
$= -4$ ou $w = 2$

Para $w = -4$, temos:

$a_2 = -4$

$a_3 = (-4)^2 = 16$

$a_4 = 8 - r = 8 - (-4) = 12$

Assim, a sequência seria (1, –4, 16, 12, 8).

Para $w = 2$, temos:

$a_2 = 2$

$a_3 = (2)^2 = 4$

$a_4 = 8 - 2 = 6$

Assim, a sequência seria (1, 2, 4, 6, 8).

Estudo para o Enem

18. E

Do enunciado, temos que, no primeiro ano, foram produzidas 8 000 peças. No segundo, $8\,000 + 8\,000 \cdot 0{,}5$.

Colocando o 8 000 em evidência, temos: $8\,000 (1 + 0{,}5) = 8\,000 \cdot 1{,}5 = 12\,000$. No terceiro $12\,000 \cdot 1{,}5 = 18\,000$.

Com isso, podemos descrever a produção como uma PG de razão 1,5:

Ano 1 $\rightarrow 8\,000 \rightarrow 8\,000 \cdot 1{,}5^0 = 8\,000 \cdot 1 = 8\,000$

Ano 2 $\rightarrow 12\,000 \rightarrow 8\,000 \cdot 1{,}5^1 = 8\,000 \cdot 1{,}5 = 12\,000$

Ano 3 $\rightarrow 18\,000 \rightarrow 8\,000 \cdot 1{,}5^2 = 8\,000 \cdot 2{,}25 = 18\,000$

Assim, da relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos que, para $t \geq 1$, o número de unidades produzidas P será dado por $P = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. C

Para solucionar esse problema, devemos notar que as medidas das folhas são obtidas com base na folha anterior, seguindo uma progressão geométrica de razão $q = 12$.

Considerando a sequência de dobras, observamos a relação das folhas e dos termos da progressão:

A0 → A1 → A2 → A3 → A4

Então, A0 é o 1º termo, A1 é o 2º termo e assim sucessivamente, de modo que A4 é o 5º termo.

Chamando de L a medida da largura da folha, temos:

$$L_5 = L_1 \cdot q^{5-1} = L_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

Do enunciado:

$L_5 = 21$

Assim, obtemos o comprimento da folha A0:

$$L_1 = L_5 \cdot \sqrt{2^4} = L_4 \cdot 4 = 21 \cdot 4 = 84$$

Do modo semelhante, chamando de C a medida do comprimento da folha:

$$C_1 = C_5 \cdot \sqrt{2^4} = 29{,}7 \cdot 4 = 118{,}8$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. B

Do enunciado, temos que da PA $\rightarrow b_1 = 1$ e $r = 1$ e $t = n = 10$.

Para calcularmos b_t, utilizando a relação $b_n = b_1 + (n - 1) \cdot r$

$b_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 1 = 10$ toneladas $= 10\,000$ kg

Do enunciado, temos que da PG $\rightarrow a_1 = 2$ e $q = 2$ e $t = n = 10$.

Para calcularmos a_t, utilizando a relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{10} = 2 \cdot 2^9 = 1\,024$

Assim, para $t = 10$ anos, temos que a razão entre a quantidade de alimentos, em kg, e o número de habitantes será $\frac{10\,000}{1024} = \frac{10^4}{2^{10}} = \frac{5^4 \cdot 2^4}{2^{10}} = \frac{5^4}{2^6}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

35 OPERAÇÕES ENTRE TERMOS DE PROGRESSÕES

Comentários sobre o módulo

Traga situações concretas de aplicação da soma dos termos de uma PA e de uma PG, além do produto dos termos de uma PG. Isso fará com que os alunos percebam que a Matemática está bem próxima da realidade deles.

Se possível, mencione a ideia de limite. Para isso, use progressões geométricas crescentes e decrescentes. Discuta em quais situações uma PG infinita pode apresentar limite.

Utilize a soma dos termos de uma PG para concluir que, quando $0 < |q| < 1$, a sequência apresenta um limite, mesmo ela sendo infinita. Por fim, busque obter a fórmula:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},\ 0<|q|<1$$

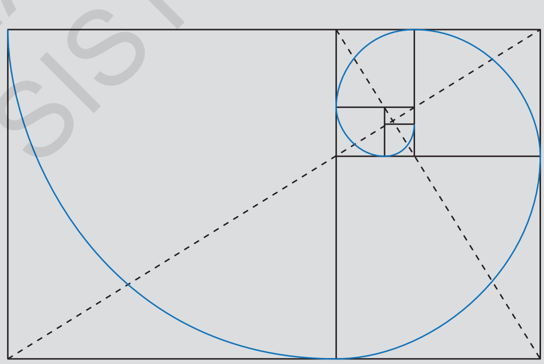
Para ir além

O **número de ouro** (ou razão áurea) é uma constante matemática denotada pela letra grega Φ (phi). Embora não se conheça exatamente em que época os estudiosos passaram a percebê-la, sabe-se que o número de ouro está presente em grandes construções, como as pirâmides de Gizé (Egito) e o Parthenon (Grécia). Sua beleza está presente ao retratar algumas proporções do corpo humano, por isso também é chamado de número belo.

Por conta disso, diversos artistas renascentistas utilizaram esse número em suas obras de arte. Leonardo da Vinci foi o que mais contribuiu para tal, já que, além de artista, era matemático, engenheiro e tinha diversos estudos acerca do corpo humano.

Em Geometria, no **retângulo de ouro** também é possível obter o número Φ. Em cada quadrado está contido parte de uma espiral, sendo que o comprimento dessas partes constitui uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{\phi}$.

Pesquise mais sobre o número de ouro e discuta com seus colegas se o comprimento dessa espiral é finito ou infinito.



Exercícios propostos

7. C

Com base no enunciado, podemos concluir que o programa de treinos corresponde a uma PA, em que $a_1 = 6$ km, com razão $r = 2$ km e sendo que a última distância percorrida é $a_n = 42$ km. Para calcularmos o total percorrido pelo atleta, devemos utilizar a soma dos termos $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Porém, ainda é preciso determinar o valor de n, que no problema se refere à quantidade de dias de treinamento. Assim:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \rightarrow 42 = 6 + (n-1)\cdot 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow n-1 = \frac{36}{2} = 18 \rightarrow n = 18+1 = 19$$

Assim, foram 19 dias de treino ao todo.

O total percorrido pelo atleta é:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} \rightarrow S_n = \frac{(6+42)19}{2} = \frac{48\cdot 19}{2} = 24\cdot 19 \rightarrow$$
$$\rightarrow S_n = 456 \text{ km.}$$

8. A

Temos uma PG. Como se trata de um triângulo equilátero, o perímetro de cada triângulo será 3 vezes o lado.

Assim, da soma das progressões geométricas infinitas, a soma dos perímetros será:

$$3\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 9.$$

9. E

Com base no enunciado, as parcelas crescem segundo uma progressão geométrica de razão 1,1 – sendo o primeiro termo igual a 2 000.

Dessa forma, o montante pago será a soma da PG finita, já que número de parcelas é 5. Assim:

$$S = 2000\cdot\frac{(1{,}1)^5-1}{1{,}1-1} = 2000\cdot 6{,}1051 = \text{R\$ } 12.210{,}20$$

Assim, os juros cobrados correspondem a 12.210,20 – 10.000 = R$ 2.210,20.

Portanto, a taxa de juros na transação é:

$$\frac{2.210{,}2}{10.000\cdot 5}\cdot 100\% = 0{,}044204 \cong 4{,}42\%.$$

10.

a) Para cada escolha, há duas possibilidades. Assim, o número de palavras com comprimento menor que 6 será:

$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

Logo, S = 62 palavras.

b) $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^N \geq 1.000.000$

Da soma de PG, temos:

$$2\cdot\left(\frac{2^N-1}{2-1}\right)\geq 1\,000\,000 \to 2^{N+1}-2\geq 1\,000\,000\to$$

$$\to 2^{N+1}\geq 1\,000\,000+2$$

Assim, $2^{N+1} \geq 1.000.002$.

Temos que:

- $2^{20} = 1\,024 \cdot 1\,024 > 1\,000\,002$
- $2^{19} = 512 \cdot 1\,024 < 1\,000\,002$

Assim, $N + 1 = 20 \to N = 19$.

11. C

Sabemos pelo enunciado que a quantidade de visitantes descreve uma PA, com $a_1 = 4\,200$. Como há uma diminuição de visitantes a cada mês, a razão dessa PA é < 0.

Sabemos também que soma para o 2º ano é 35 700.

Assim, $V_1 = (4\,200,\ 4\,200 - x,\ 4\,200 - 2x,\ 4\,200 - 3x, \ldots,\ 4\,200 - 11x)$.

No segundo ano, temos $V_2 = (4\,200 - 12x,\ 4\,200 - 13x, \ldots,\ 4\,200 - 23x)$.

Logo, a soma dos termos da PA será:

$$S_2=\frac{[4\,200-12x+4\,200-12x+(12-1)(-x)]\cdot 12}{2}=$$

$$=35\,700\to\frac{[8\,400-24x-11x]\cdot 12}{2}=35\,700\to$$

$$\to[8\,400-35x]\cdot 6=35\,700\to$$

$$8\,400-35x=5\,950\to 35x=2\,450\to x=70$$

Portanto, o número de visitantes no 24º mês foi $4\,200 - 23 \cdot 70 = 2\,590$.

O número de visitantes no mês 1 do terceiro ano foi $2\,590 - 70 = 2\,520$.

Já no 12º foi de $2\,520 - 70 \cdot 11 = 1\,750$.

Assim, o total de visitantes no terceiro ano foi de:

$$\frac{(2520+1750)\cdot 12}{2}=4\,270\cdot 6=25\,620.$$

12. D

Verificamos que a sequência é decrescente, na qual $a_1 = 131$ e $a_n = -2$.

Podemos constatar que a sequência é uma PA.

A razão pode ser obtida pela relação $a_n - a_{n-1} = r$:

$a_2 - a_1 = r = 124 - 131 = -7$

$a_3 - a_2 = r = 117 - 124 = -7$

Logo, $r = -7$.

A quantidade de termos n será obtida por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.

Assim, $-2 = 131 + (n - 1) \cdot (-7) \to$

$$\to n - 1 = \frac{-133}{-7} \to n = 19 + 1 = 20.$$

Calculando-se a soma dos termos, temos:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}\to S_n=\frac{(131+(-2))20}{2}=$$

$$=129\cdot 10\to S_n=1\,290.$$

13. A

Pelo enunciado, observamos que S_n é a soma dos n primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é $\frac{1}{3}$ e cuja razão é também $\frac{1}{3}$.

Assim, temos:

$$S_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}>\frac{4}{9}\to\frac{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\frac{2}{3}}>\frac{12}{9}\to$$

$$\to 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n>\frac{24}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n-1<-\frac{24}{27}\to\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{3}{27}\to\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{9}\to$$

$$\to\left(\frac{1}{3}\right)^n<\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Portanto, $n > 2$, ou seja, o menor valor natural de n para o qual $S_n > \frac{4}{9}$ é $n = 3$.

14.

Como o número de chegadas em 2014 é uma PA, temos:

(Jan, Fev, Mar, Abr, Mai, Jun, Jul, Ago, Set, Out, Nov, Dez) = $(3\,300,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ 45\,375)$

Para calcular a razão da PA, utilizamos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.

Assim:

$$a_{12}=a_1+(12-1)\cdot r\to 45\,375=3\,300+11r\to$$

$$11r=42\,075\ \to r=\frac{42\,075}{11}=3\,825$$

a) Sabendo que $a_1 = 3\,300$ e $r = 3\,825$, calculamos a_5, que representa as chegadas em maio.

Logo:

$a_5 = 3\,300 + (5 - 1) \cdot 3\,825 = 3\,300 + 15\,300 \to$
$\to a_5 = 18\,600$

b) Para calcular o total de chegadas em 2014, basta utilizarmos a equação da soma dos termos da PA $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Assim:

$$S=\frac{(3\,300+45\,375)12}{2}=48\,675\cdot 6\to S=292\,050$$

15. C

Pelo enunciado, sabemos que a fila mais alta tem uma lata e a última, dez. Assim, temos uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 1$ e último termo $a_{10} = 10$.

Para determinar a razão, utilizamos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow 10 = 1 + (10 - 1) \cdot r \rightarrow$

$r = \frac{9}{9} = 1$

Para obter a quantidade de latas que ele juntou, utilizamos a soma da progressão:

$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1+10) \cdot 10}{2} = 55$ latas de leite.

16. C

O primeiro candidato leu o livro seguindo uma progressão aritmética de razão 2. Então, $r = 2$.

Logo, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$.

O segundo candidato leu o livro seguindo uma progressão geométrica de razão 2. Então,

$q = 2$.

Logo, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Como sabemos o total de páginas, podemos calcular a quantidade de dias que o primeiro candidato levou para ler o livro com base na soma dos termos da PA:

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2 + 2n)}{2} = 182$

Isso resulta em $n = 13$. Ou seja, se d é o dia de início da leitura, então:

$26 - d + 1 = 13 \rightarrow d = 14$

Assim, os candidatos iniciaram a leitura no dia 14 de outubro.

Para o segundo candidato, com base na soma dos termos da PG, temos:

$S_n = 182 = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \rightarrow 2^n = 183$

$\log 2^n = \log 183 \rightarrow n \cdot \log 2 = \log 183$

$n = \log_2 183 = 7{,}6$

Então, o segundo candidato levou 8 dias para ler o livro (aproximando o valor 7,6).

Portanto, o segundo candidato terminou a leitura no dia 21 de outubro.

17.

Os elementos da primeira coluna formam uma PA de primeiro termo $a_1 = 1$, com razão = 2.

Da relação $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos para $n = 41$
$\rightarrow \rightarrow a_{41} = 1 + (41 - 1) \cdot 2 = 81$

$a_n = 101 = 1 + (n - 1) \cdot 2 \rightarrow 100 = 2n - 2 \rightarrow$
$\rightarrow n = 51$

Logo, há 51 colunas.

Da coluna 41 até a 51, sobram 10 colunas, que vão de 83, 85, 87 até 101.

Como $1 \leqslant n \leqslant 51$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que a soma será:

$S = 41 \cdot 81 + \frac{(83 + 101) \cdot 10}{2} = 4\,241$

Estudo para o Enem

18. C

A razão da progressão aritmética é dada por:

$r = h_2 - h_1 = 0{,}75 - 0{,}70 = 0{,}05$

A altura será dada pela soma dos 50 termos:

$a_{50} = 0{,}70 + (50 - 1) \cdot 0{,}05 = 0{,}70 + 49 \cdot 0{,}05$

$S_{50} = \frac{50(0{,}70 + 0{,}70 + 49 \cdot 0{,}05)}{2} = 96{,}25$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. C

Como a cada dia o número de visitantes é triplicado, temos:

Dia 1 = 345
Dia 2 = $3 \cdot 345$
Dia 3 = $3 \cdot 3 \cdot 345$
Dia 4 = $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 345$

Assim, o número de visitantes descreve uma sequência cujo quarto termo se refere ao último dia de evento. Então, o número de visitantes será $3^3 \cdot 345$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. C

A relação é uma PA. A distância r a ser calculada será a razão dela.

Segundo o enunciado, a soma dos percursos é 1 560. O primeiro termo da PA é 60, e enésimo termo é 180. Da relação $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:

$1\,560 = \frac{(60 + 180) \cdot n}{2} \rightarrow n = \frac{1\,560}{120} = 13$

Para calcularmos a razão, temos
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow 180 = 60 + (13 - 1) \cdot r$.
Então, $120 = 12r \rightarrow r = 10$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

36 NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA I

Comentários sobre o módulo

Enfatize a importância dos números complexos na história da ciência e como eles contribuíram para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, como a meteorologia.

Busque trazer situações do dia a dia do aluno para que possam compreender a utilidade dos números complexos e sua aplicação.

Exercícios propostos

7. C

Substituindo z_1 e z_2 em $z_1 \cdot z_2 = -4 + 7i$, temos:

$(-3 + pi) \cdot (p - i) = -4 + 7i$

$-3p + 3i + p^2i - pi^2 = -4 + 7i$

$-3p + 3i + p^2i + p = -4 + 7i$

$-2p + (3 + p^2)i = -4 + 7i$

Então: $-2p = -4$ e $3 + p^2 = 7$.

Portanto, $p = 2$.

Utilizando o valor de $p = 2$ em z_1 e z_2 e fazendo a adição, obtemos:

$z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (2 - i) = -1 + i$

8. E

Calculando o produto de z_1 e z_2, obtemos o resultado:

$z_1 \cdot z_2 = (9 + 3i) \cdot (-2 + i) = -18 + 9i - 6i + 3i^2 =$
$= -18 + 3i + 3(-1) = -21 + 3i$

9. B

Do enunciado, temos que $z^2 + z + 2 - (a + bi) =$
$= 0 \rightarrow z^2 + z + 2 = a + bi$

Supondo $z = \alpha i$, obtemos:

$(\alpha i)^2 + \alpha i + 2 = a + bi \rightarrow \alpha^2 \cdot (-1) + \alpha i + 2 =$
$= a + bi$

Igualando-se as partes reais e imaginárias, temos:

$a = 2 - \alpha^2$ e $b = \alpha$

Assim, $a = 2 - b^2 \rightarrow b^2 = 2 - a \rightarrow (b - 0)^2 = \dfrac{a-2}{-1}$.

Isso resulta em uma parábola de vértice (2, 0).

10. Do enunciado, temos que z_1 e z_2 são conjugados do tipo $a + bi$. Substituindo os valores de a e b dados, chegamos a $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = 2 - (-1)i = 2 + i$.

a) $z_1 \cdot z_2 = (2 - i) \cdot (2 + i) = 4 + 2i - 2i - i^2$

$z_1 \cdot z_2 = 4 + 1 = 5$

b) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)^2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-2i-2i+i^2}{4-2i+2i-i^2} = \frac{4-4i-1}{4+1} = \frac{3-4i}{5}$$

Logo,

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{3-4i}{5}\right)^2 = \frac{(3-4i)^2}{5^2} = \frac{9-24i+16i^2}{25} =$$

$$= \frac{9-24i-16}{25} \rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \frac{(-7-24i)}{25} = -\frac{7}{25} - \frac{24i}{25}$$

11. C

Do enunciado, temos:

$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 = -6 - 3i$ (I)

$z^8 = 16$ (II)

Fazendo I + II, temos:

$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 + z^8 = 16 - 6 - 3i$

$z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 + z^8 = 9 - 3i \rightarrow z(1 + z +$
$z^2 + z^3 + \ldots + z^7) = 9 - 3i$

Como $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^7 = -6 - 3i$, temos:

$z \cdot (-6 - 3i) = 9 - 3i$

$$z = \frac{9-3i}{-6-3i} \cdot \frac{-6+3i}{-6+3i} = \frac{-54+27i+18i-9i^2}{36-18i+18i-9i^2} = -\frac{45+45i}{45}$$

$z = -1 + 1i$

12. A

$$\frac{2+i}{\beta+2i} = \frac{2+i}{\beta+2i} \cdot \frac{\beta-2i}{\beta-2i} = \frac{2\beta-4i+\beta i-2i2}{\beta^2-2i\beta+2i\beta-4i^2} =$$

$$= \frac{2\beta-4i+\beta i+2}{\beta^2+4} = \frac{2\beta+2}{\beta^2+4} + \frac{\beta-4}{\beta^2+4} \cdot i$$

Do enunciado, temos que a parte imaginária é zero. Assim:

$$\frac{\beta-4}{\beta^2+4} = 0 \rightarrow \beta - 4 = 0 \rightarrow \beta = 4$$

13. D

Dado $x + yi =$, elevando ambos os lados da equação ao quadrado, temos:

$(x + yi)^2 = \left(\sqrt{3+4i}\right)^2 \rightarrow x^2 + 2xyi + (yi)^2 = 3 + 4i$

Como $i^2 = -1$, temos então:

$x^2 + 2xyi - y^2 = 3 + 4i$

Separando a parte real da parte imaginária, temos:

$x^2 - y^2 = 3$

$2xy = 4$

Da equação $2xy = 4$, temos que $xy = \frac{4}{2} = 2$.

14. Dado $z = \frac{1+(3i)^2}{1-i}$, temos:

$z = \frac{1+(3i)^2}{1-i} \rightarrow z = \frac{(1+9i^2)}{1-i}$, como $i^2 = -1$

$z = \frac{1-9}{1-i}$

$z = -\frac{8}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$z = \frac{-8-8i}{1^2 - i^2} \rightarrow z = \frac{-8-8i}{2}$

Logo, $z = -4 - 4i$. Assim, a parte real é -4.

15. B

Do enunciado, temos que $z = a + bi$ e seu conjugado $= a - bi$.

Para $z \cdot \overline{z} - 4 = 0 \rightarrow (a+bi)\cdot(a-bi) - 4 = 0$.

$a^2 - abi + abi - b^2i^2 - 4 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 - 4 = 0$
$\rightarrow a^2 + b^2 = 4 \rightarrow a^2 + b^2 = 2^2$

Esta equação se assemelha à equação da circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0) = r^2$, na qual temos uma circunferência de raio **r**, com centro (x_0, y_0).

Dessa forma, na equação temos raio igual a 2 e centro (0, 0).

16. A

Do enunciado, temos $z^2 - 2z + 4 = 0 \rightarrow a=1$, $b = -2$ e $c = 4$.

Portanto, $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot4 \rightarrow = 4 - 16 = -12$.

Fatorando, temos $-2\sqrt{3}$. Logo, $\Delta = 2\sqrt{3}i$.

Assim, $z_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2i} = 1+\sqrt{3}i$ e $z_2 = 1-\sqrt{3}i$.

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} + \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} + \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3i^2}{1-\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-3i^2} + \frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3i^2}{1-\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-3i^2} =$$

$$= \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{1+3} + \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{1+3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}i-2-2-2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

17. $Z_0 = 4i + \frac{13}{2+3i} \rightarrow Z_0 = \frac{4i(2+3i)+13}{2+3i} \rightarrow$

$\rightarrow Z_0 = \frac{8i + 12i^2 + 13}{2+3i} = \frac{1+8i}{2+3i}$

Sabemos que um número complexo segue o formato $z = a + bi$, sendo **a** a parte real e **b**, a parte imaginária.

a) Para determinarmos a parte real, multiplicamos Z_0 pelo seu conjugado.

Como o conjugado é dado por $\overline{z} = (a, -b) \rightarrow$
$\rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Assim,

$\frac{1+8i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = 2+i$

Portanto, Re = 2 e Im = 1.

b) Do enunciado, temos que $Z = 1 - i$ é a solução $Z^2 + aZ + b = 0$. Assim:

$(1 - i)^2 + a\cdot(1 - i) + b = 0 \rightarrow 1 - 2i + i^2 + a - ai + b = 0$, como $i^2 = -1$

$1 - 2i + (-1) + a - ai + b = 0 \rightarrow a + b - 2i - ai = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a + b - (2 + a)i = 0$

Como $1 - i$ é solução, tanto a parte real quanto a imaginária devem ser zero.

Logo:

$2 + a = 0 \rightarrow a = -2$

$a + b = 0 \rightarrow -2 + b = 0 \rightarrow b = 2$

Assim, $a = -2$ e $b = 2$.

Estudo para o Enem

18. C

O valor de U e Z são:

$U = 110(\cos 0° + i\,\text{sen}0°) = 110(1 + i\cdot 0) = 110$

$Z = 5 + 5i = 5\cdot(1+i)$

Da relação para a tensão, obtemos o valor j:

$$U = Zj \rightarrow j = \frac{U}{Z} = \frac{110}{5(1+i)}$$

Multiplicando e dividindo essa expressão por (1 − i):

$$j = \frac{110}{5(1+i)} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{22(1-i)}{1^2 - i^2} = \frac{22(1-i)}{1+1} =$$

$$= \frac{22(1-i)}{2} = 11(1-i)$$

Do enunciado, $j = a + bi$, então $a = 11$ e $b = -11$.

Portanto, $2a + b = 2 \cdot 11 - 11 = 11$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. E

Fazendo a equivalência mencionada no enunciado:

$k_1 \cdot z_1 + k_2 \cdot z_2 = z_3$

$k_1 \cdot (2 + 2i) + k_2 \cdot (5 - 6i) = -4 + 18i$

$(2k_1 + 5k_2) + (2k_1 - 6k_2)i = -4 + 18i$

Assim, resulta o sistema:

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_2 = -4 \\ 2k_1 - 6k_2 = 18 \end{cases}$$

Os valores de k_1 e k_2 são: $k_1 = 3$ e $k_2 = -2$.

Portanto, $k_1^{k_2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. D

Do enunciado, temos que $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = c + di$.

Para que a impedância do ferro seja o dobro do chuveiro, temos:

$z_2 = 2 \cdot z_1$

Assim:

$c + di = 2(2+i)$

$c + di = 4 + 2i$

Da igualdade temos:

$c = 4$ e $d = 2$

Competência: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

37 NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA ALGÉBRICA II

Comentários sobre o módulo

Apresente situações reais de aplicabilidade de números complexos. Além disso, instigue os alunos a buscarem informações de tal aplicação em seu dia a dia.

Busque desmistificar a relação números complexos = números difíceis. Por meio da aplicação de situações reais em seu cotidiano, os alunos entenderão a utilidade dos números complexos, o que torna a aprendizagem mais prazerosa e significativa.

Para ir além

Rafael Bombelli foi o mais importante matemático italiano. Também foi contemporâneo de diversos outros estudiosos da área, como Del Ferro, Fior, Tartaglia, Cardano e Lodovico Ferrari, os quais vivenciaram todos os esforços voltados para a solução das equações cúbicas e quadráticas.

Porém, Rafael Bombelli contribuiu com outras realizações para a história da Matemática. Em virtude disso, busque mais informações sobre esse grande personagem.

Exercícios propostos

7. A

Desenvolvendo $z = x(2x - i) \cdot (3+2i)$, temos:

$z = 6x^2 + 4x^2i - 3xi - 2xi^2 \rightarrow 6x^2 + 4x^2i - 3xi - 2x(-1) \rightarrow z = x(6x + 2) + (4x^2 - 3x)i$

Para que z seja imaginário puro, $x(6x + 2) = 0$.

Como x não pode ser zero, pois isso zeraria também a parte imaginária, temos que:

$$6x+2=0 \rightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Substituindo x, temos:

$$z=-\frac{1}{3}\cdot\left(6\left(-\frac{1}{3}\right)+2\right)+\left(4\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(-\frac{1}{3}\right)\right)i\rightarrow$$

$$\rightarrow z=0+\frac{13}{9}i$$

8. Chamando de v o vértice do quadrado a ser determinado $Z=\frac{w+v}{2}$.

Então, $v = 2z - w$.

Segue que $v = 2 \cdot (3 - 2i) - (4 - 3i) = 6 - 4i - 4 + 3i = 2 - i$.

O vértice não consecutivo a w é o número $2 - i$.

9. B

Considerando que o centro do quadrado ABCD seja o ponto P, temos que:

$$P=\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

O número $Z_n = a + bi$, que será multiplicado por $Z_0 = -1+i$, corresponde aos afixos do ponto P. Então:

$$Z_0\cdot Z_n=(-1+i)\cdot(a+bi)=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\rightarrow$$

$$\rightarrow -a-b+(a-b)i=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

Resolvendo o sistema, temos:

$a = 0$ e $b=\frac{3}{2}$,

Portanto, o número Z_n é o número Z_2.

10. Do enunciado, temos $z_1 = a + bi$, $z_2 = -b + ai$, $z_3 = -b - 3i$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Assim, temos:

$(a + bi) + (-b + ai) + (-b - 3i) = 0$

$(a - 2b) + (a + b - 3)i = 0$

$a - 2b = 0$ (I)

$a + b - 3 = 0$ (II)

Fazendo II – I:

$3b - 3 = 0$. Logo, $b = 1$.

Portanto, $a = 2$.

Dessa forma, temos que $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = -1 - 3i$.

Assim, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{-1+2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=i$.

Portanto, $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3=i^3=-i$.

11. D

Verificando os itens, temos:

I) $(2 + i)(2 - i)(1 + i)(1 - i) = (2^2 - i^2) \cdot (1^2 - i^2) = (4 - (-1)) \cdot (1 - (-1)) = 5 \cdot 2 = 10$

Portanto, verdadeira.

II) $\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{3}\cdot i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\cdot i\right)=\frac{21+2i}{6}+\frac{9+4i}{6}=$

$=\left(\frac{30}{6}+\frac{6i}{6}\right)=5+i$

Ou seja, falsa.

III) $|z| = 5$

$|2z| = |2| \cdot |z| = 2 \cdot |z|$

Como $|z| = 5 \rightarrow |2z| = 2 \cdot 5 = 10$.

12. B

Da imagem, temos que o afixo é (1, –1), assim o número complexo corresponde a $Z = 1 - i$.

Então:

$(1-i)^{2015} = (1-i)^{2014} \cdot (1-i) = [(1-i)^2]^{1007} \cdot (1-i) =$

$= (1 - 2i^2 + i^2)^{1007} \cdot (1-i) = (-2i)^{1007} \cdot (1-i) =$

$= (-2)^{1007} \cdot i^{1007} \cdot (1-i) = -(1-i) \cdot 2^{1007} \cdot i^{1007}$

Como 1007 deixa resto 3 na divisão por 4, temos: $i^{1007} = i^3 = -i$.

Portanto:

$(1-i)^{2015} = -(1-i) \cdot 2^{1007} \cdot (-i) =$

$= (i+1) \cdot 2^{1007} =$

$= 2^{1007} + 2^{1007} \cdot i$

Assim, o afixo de $(1-i)^{2015}$ tem ambas as coordenadas iguais a 2^{1007}.

13. A

Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{(1+i)^p}{(1-i)^{p-2}}=\frac{\left((1+i)^p\cdot(1-i)^2\right)}{(1-i)^p}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^p\cdot(1-i)^2 =$$

$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^p\cdot(1-2i+i^2)=\left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^p\cdot(-2i)=$$

$$=\left(\frac{2i}{2}\right)^p\cdot(-2i)$$

Substituindo o valor de p, temos:

$i^p \cdot (-2i) = i^{4n} \cdot (-2i) = (i^4)^n \cdot (-2i) = 1^n \cdot (-2i) = -2i$, já que n é um número inteiro e diferente de zero.

14. Do enunciado, temos que $z = a + bi$ e que $4z - zi + 5 = -1 + 10i$.

Assim:

$4z - zi + 5 = 4(a + bi) - (a + bi) \cdot i + 5 =$

$= 4a + 4bi - ai - bi^2 + 5 = 4a + 4bi - ai + b + 5 =$

$= (4a + b + 5) + (4b - a)i$

Da igualdade, temos:

$(4a + b + 5) + (4b - a)i = -1 + 10i$

Logo:

$4a + b + 5 = -1$ e $4b - a = 10$

Assim:

$4a + b + 5 = -1 \rightarrow 4a + b = -6$ (I)

$4b - a = 10$ (multiplicando ambos os lados por 4)

$16b - 4a = 40$ (II)

Fazendo I + II:

$17b = 34 \rightarrow b = 2$

Substituindo b em I:

$4a + 2 = -6 \rightarrow 4a = -8 \rightarrow a = -2$

Dessa forma, temos que $z = -2 + 2i$.

Sabemos que o módulo é $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Assim:

$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$

$|z|=2\sqrt{2}$

15. D

Temos que $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \ldots = 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + \ldots = 0 + 0 + \ldots$

Ou seja, a partir da potência i^4, as demais se repetem de 4 em 4. O resultado da soma de cada 4 parcelas é zero.

Como a soma $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2013}$ tem 2014 parcelas, dividindo 2014 por 4, encontramos $2014 = 503 \cdot 4 + 2$.

O resto 2 significa que temos 503 parcelas que somam zero e mais 2 que não somam zero.

Assim:

$i^{2012} = (i^2)^{1006} = (-1)^{1006} = 1$

$i^{2013} = i(i)^{2012} = i(i^2)^{1006} = i(-1)^{1006} = i$

Dessa forma, as duas parcelas que não somam zero são $1 + i$.

Portanto, a soma $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2013} = 0 + 1 + i = 1 + i$.

16. B

Verificando cada item, temos:

I) $z \cdot \overline{w} = 2 - 3i$

$(1 - i) \cdot (2 - i) = 2 - i - 2i + i^2 = 2 - 3i - 1 = 1 - 3i$ (portanto, incorreta)

II) $\frac{w}{z} = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$

$\frac{w}{z} = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \rightarrow$

$\frac{w}{z} = \frac{2+2i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{1+3i}{1-(-1)} = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$, (portanto, correta)

III) $z + w$ é um número imaginário.

$z + w = 1 - i + 2 + i = 3$ (portanto, incorreta)

17. $i^{200} \cdot i^{201} \cdot i^{202} \cdot i^{203} \dots i^{247} \cdot i^{248} = i^{200+201+202+203+\dots+247+248}$

Temos que os expoentes formam uma PA de razão 1, sendo 49 termos.

Assim, $S_{49} = \frac{(200+248)\,49}{2} \rightarrow S_{49} = 10\,976$.

Logo, temos i^{10976}.

Para calcular potências de i, dividimos o expoente de i por 4 e consideramos apenas i elevado ao resto dessa divisão. Assim:

$i^{10\,976} \rightarrow \frac{10\,976}{4}$, cujo resto é $0 \rightarrow i^0 = 1$

Estudo para o Enem

18. D

$z_1 = 20 + 40i = (20, 40)$

$z_2 = -15 + 50i = (-15, 50)$

$z_3 = -15 - 10i = (-15, -10)$

Calculando z_4, temos:

$z_4 = \frac{z_1}{16} - \frac{5\overline{z_3}}{4}$

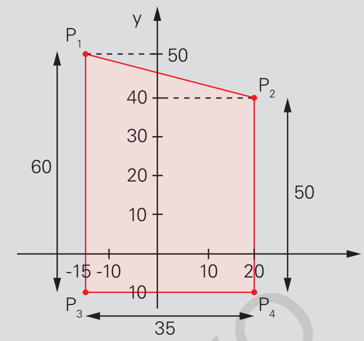
$z_4 = \frac{20+40i}{16} - \frac{5\overline{z_3}}{4}$

Como $\overline{z_3} = -15 + 10i$:

$z_4 = \frac{20+40i}{16} - \frac{5(-15+10i)}{4} = \frac{20}{16} + \frac{40i}{16} + \frac{75}{4} - \frac{50i}{4}$

$z_4 = \frac{5+10i+75-50i}{4} = \frac{80-40i}{4} = 20 - 10i = (20, -10)$

Representando as imagens no plano Argand-Gauss, temos:



Logo, a área do terreno é um trapézio retângulo, assim:

$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(60+50)\cdot 35}{2} = 1925\ m^2$.

Competência: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. C

Do enunciado, temos que $z_1 = 2 - 4i$ e $z_2 = 3 - 6i$. Assim:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{3-6i} = \frac{2(1-2i)}{3(1-2i)} = \frac{2}{3}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

A composição de rotação entre pontos, como mencionado no texto, é dada pelo produto entre eles.

Calculando o produto de $z = -3 + 4i$ por $w = 2 - 3i$, obtemos:

$z \cdot w = (-3 + 4i)(2 - 3i)$

$z \cdot w = -6 + 9i + 8i + 12$

$z \cdot w = 6 + 17i$

Portanto, a composição de rotação é igual a $6 + 17i$.

Competência: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

38 NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA I

Comentários sobre o módulo

Ressalte a importância do uso da forma trigonométrica dos números complexos no desenvolvimento da ciência e como isso contribuiu para a evolução da tecnologia de ponta.

Além disso, mostre aos alunos como converter os números complexos na forma trigonométrica utilizando uma calculadora científica.

Exercícios propostos

7. C

Para que as raízes sejam complexas, o discriminante deve ser negativo. Assim:

$b^2 - 4c < 0 \rightarrow b^2 < 4c$

Quando os coeficientes da equação são reais, as raízes complexas vêm sempre aos pares, ou seja, são conjugadas.

Pelas relações de Girard:

$x' \cdot x'' = c \rightarrow (a + bi) \cdot (a - bi) = c \rightarrow a^2 + b^2 = c$

O raio da circunferência é o módulo dessas raízes, ou seja, $\sqrt{a^2+b^2}$. Então, $a^2+b^2=2^a=4=c$.

Assim, temos no discriminante que:

$b^2 < 4 \cdot 4 \rightarrow b^2 < 16 \rightarrow -4 < b < 4$

8. D

Sabemos que um número complexo é da forma $z = a + bi$.

Também sabemos que o módulo é dado por: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Assim, do enunciado, temos que $|Z - 5i| = 2$.

Chamando $w = Z - 5i$, temos $w = a + bi - 5i \rightarrow$ $\rightarrow w = a + (b - 5)i$.

Portanto, $|a + (b - 5)| = 2 \rightarrow |w| = 2 = \sqrt{a^2+(b-5)^2}$.

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $2^2 = a^2 + (b - 5)^2$.

Note que essa expressão é representada por uma circunferência de raio 2, centrada em (0, 5). Portanto, a distância até a origem será de $5 - 2 = 3$.

9. A

Do enunciado, temos $z+\bar{z}=4$ e $z-\bar{z}=-4i$. Assim:

$(a + bi) + (a - bi) = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$

$(a + bi) - (a - bi) = -4i \rightarrow 2bi = 4i \rightarrow b = 2$

Assim, temos que $z = 2 + 2i$.

A forma trigonométrica é dada por $\rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$.

Assim, $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Já o argumento será:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Então, a forma trigonométrica será $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

10.

Os números complexos de módulo igual a 4, com **a** e **b** reais, são tais que:

$\sqrt{a^2+b^2} = 4$

Do enunciado, temos:

$f(z) = \bar{z}$

$iz = \bar{z}$

$i(a + bi) = a - bi$

$-b + ai = a - bi$

Portanto, $a = -b$.

Assim, utilizando a condição acima para o módulo ser igual a 4:

$\sqrt{a^2+b^2} = 4$

$a^2 + b^2 = 16$

$(-b)^2 + b^2 = 2b^2 = 16$

$b^2 = 8$

$b = \pm 2\sqrt{2}$

Então, os números complexos que satisfazem as condições impostas são $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ e $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$.

11. A

Temos que o módulo é dado por $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Assim, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)i.$

O módulo será $\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{a^2+b^2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Para 1 − z, temos:

$1 - (a + bi) = (1 - a) - bi \rightarrow |1 - z| =$

$= \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{(1-a)^2+b^2}$

Do enunciado, os 3 módulos são iguais. Então:

$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{(1-a)^2+b^2} \rightarrow$

$\rightarrow a^2 + b^2 = 1$ (I)

$a^2 + b^2 = (1 - a)^2 + b^2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

Substituindo **a** na equação I, temos $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ assim, $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

12. B

Do enunciado, temos que $z = a + bi$ é raiz de $x^2 + bx + a = 0$. Portanto:

$(a + bi)^2 + b(a + bi) + a = 0 \rightarrow a^2 + 2abi - b^2 + ab + b^2i + a = 0$

$(a^2 - b^2 + ab + a) + b(2a + b)i = 0$

Temos então:

$a^2 - b^2 + ab + a = 0$

$b(2a + b)i = 0 \rightarrow 2a + b = 0$ (já que **b** deve ser não nulo)

$b = -2a$

Substituindo o valor de **b** na primeira equação, temos:

$a^2 - (-2a)^2 + a(-2a) + a = 0 \rightarrow a^2 - 4a^2 - 2a^2 + a = 0$

$-5a^2 + a = 0 \rightarrow a(1 - 5a) = 0$ (como **a** deve ser não nulo)

$1 - 5a = 0 \rightarrow a = 15$

Com isso, temos que $b = -2(15) = -25$. Então:

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

13. A

$u = 4(\cos 120° + i\,\text{sen}\ 120°) = 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$

Assim, $u = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Como $v = \frac{u}{i} \rightarrow v = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 2\sqrt{3}+2i.$

Então, $|u+v| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+2\right)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

14.

Supondo $w = a + bi$ com **a** e **b** reais e $a > 0$, temos $\overline{w} = a - bi$.

Assim:

$(a + bi + i)^2 + |a - bi + i|^2 = 6 \rightarrow [a + (b + 1)i]^2 + |a + (1 - b)i|^2 = 6 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 + 2a(b+1)\cdot i + (b+1)^2 \cdot i^2 + \left(\sqrt{a^2+(1-b)^2}\right)^2 = 6 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 + 2a(b+1)\cdot i - b^2 - 2b - 1 + a^2 + 1 - 2b + b^2 = 6 \rightarrow$

$\rightarrow 2a^2 - 4b + 2a(b+1)\cdot i = 6$

Igualando as partes reais e imaginárias, temos:

$2a(b+1) = 0 \rightarrow 2ab + 2a = 0 \rightarrow ab = -a \rightarrow b = -\frac{a}{a} = -1$

$2a^2 - 4b = 6 \rightarrow a^2 - 2(-1) = 3 \rightarrow a^2 = 3 - 2 = 1 \rightarrow a = 1$

Assim, $w = a + bi \rightarrow w = 1 - i.$

15. D

Do enunciado, temos $z = i^{87} \cdot \left(i^{105} + \sqrt{3}\right).$

Dividindo 87 e 105 por 4, obtemos 3 e 1 como restos, respectivamente.

Assim, $z = i^3 \cdot \left(i + \sqrt{3}\right) \rightarrow z = 1 - \sqrt{3}i.$

Como $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $v = \frac{1}{2}z$. Concluímos então que

z e **v** têm o mesmo argumento.

16. B

O afixo de z_1 é (1,2) e de z_2 é (−1, −2). Como esses são vértices não consecutivos, trata-se da diagonal do quadrado.

Como o módulo do número complexo representa a distância do ponto à origem, temos

que $|z_1| + |z_2|$ = diagonal do quadrado.

Portanto, $d = \sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} \rightarrow d = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Como $d = L \cdot \sqrt{2}$, em que L = x (que é o lado do quadrado), temos:

$$2\sqrt{5} = x \cdot \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{2} \rightarrow x = \sqrt{10}.$$

17.

a) $z = \left(1, \ \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \rightarrow z = \left(1, \ \sqrt{3}\right)$

Na forma algébrica, $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Da forma algébrica, chegamos à forma trigonométrica. Para isso, temos que $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \rightarrow |z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Calculando o argumento, temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, a forma trigonométrica será

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right).$$

b) Pede-se $z \cdot \bar{z}$.

Como $z = 1 + \sqrt{3}i, \bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$.

Assim:

$$z \cdot \bar{z} = \left(1 + \sqrt{3}i\right) \cdot \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - \left(\sqrt{3}i\right)^2 =$$

$$= 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot i^2$$

$$z \cdot \underline{z} = 1 + 3 \cdot (-1) = -2$$

Estudo para o Enem

18. D

Do enunciado, temos que U = 110(cos0° + isen0°).
Como cos0° = 1 e sen0° = 0, temos:
U = 110(1 + 0) = 110
Z = 5 + 5i

Logo:

$U = Z \cdot j \rightarrow 110 = (5 + 5i) \cdot (a + bi) \rightarrow 5(a - b) + 5(a + b)i = 110$

$(a - b) + (a + b)i = 22 + 0i \rightarrow a - b = 22$ e $a + b = 0 \rightarrow a = 11$ e $b = -11$

Portanto, $2a + b = 2 \cdot 11 + (-11) = 11$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. A

Do enunciado, temos que $x + yi = z$ representa o alcance máximo.

Do gráfico, sabemos que $z_0 = 10 + 5i$. Assim:

$| z - z_0 | = 30 \rightarrow | (x - 10) + (y - 5i) | = 30 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x-10)^2 + (y-5i)^2} = 30 \rightarrow (x-10)^2 + (y-5i)^2 =$

$= 900 \rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 - 900 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 20x - 10y - 775 = 0$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. B

Dado $z = \frac{2i}{i^{26} - i^3}$.

Temos que:

$i^{26} = i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i,$

Assim:

$$z = \frac{2i}{i^{26} - i^3} = \frac{2i}{(-1) - (-i)} = \frac{2i}{-1+i}$$

$$z = \frac{2i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-2i - 2i^2}{1 + i - i - i^2} = \frac{-2i+2}{2} = -i + 1$$

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

39 NÚMEROS COMPLEXOS E SUA FORMA TRIGONOMÉTRICA II

Comentários sobre o módulo

Embora os temas abordados sejam mais técnicos, encaminhe tais assuntos para o lado mais lúdico possível. Para isso, mostre os resultados das operações no plano de Argand-Gauss e instigue os alunos a buscarem relações geométricas, mesmo se tratando de relações algébricas.

Para ir além

A palavra **fractal** tem origem no latin *fractus*, que significa irregular. O matemático francês Benoît Mandelbrot (1924-2010) apresentou a ideia de fractal e foi o principal estudioso desse campo da Matemática.

Fractais são formas geométricas abstratas com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo sendo limitadas a uma área finita.

Elas apresentam relações com diversos objetos da natureza e têm sido utilizadas em diversos campos de estudo por auxiliar na modelagem matemática.

Pesquise mais sobre os fractais e como eles podem auxiliar na representação de fenômenos naturais.

Exercícios propostos

7. C

Sendo $z = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, da figura temos que $\rho > 1$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Assim, para

Como $\rho > 1$, temos que $\rho^{-1} < 1$. Portanto, o afixo de z^{-1} é interior à circunferência.

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, temos que $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$. Portanto, o afixo de z^{-1} pertence ao 4º quadrante, sendo este representado por III.

8. D

Com base no gráfico, sabemos que w_0 é:

$w_0 = 2(\cos 12° + i\operatorname{sen} 12°)$.

Uma vez que w_0 é raiz da equação, $w^5 = z$.

Calculamos z pela fórmula de Moivre e pela igualdade:

$$z = w_0^5 = 2^5\left(\cos(5.12°) + i\operatorname{sen}(5.12°)\right)$$

$$z = 32\left(\cos(60°) + i\operatorname{sen}(60°)\right)$$

$$z = 32\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z = 16 + 16\sqrt{3}i$$

9. B

Sendo $|z|$ e θ, respectivamente, o módulo e o argumento principal de z, temos:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$$

Portanto, $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1$.

Logo, $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad.

Assim, temos $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

Pela primeira fórmula de Moivre, encontramos:

$$z^n = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Assim, $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^n$ é um número real sempre que $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$, ou seja, sempre que $n = 4 \cdot (2k)$ ou $n = 4 \cdot (2k + 1)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, z^n é um número real sempre que n for um múltiplo de 4.

10. Precisamos calcular uma das raízes cúbicas de i.

Como $i = (0,1) = \cos 90° + i \cdot \operatorname{sen} 90°$, as raízes cúbicas de i são números z tais que $z^3 = i$. Logo, temos:

$Z = \cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou

$Z = \cos 150° + i \cdot \operatorname{sen} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou ainda

$Z = \cos 270° + i \cdot \operatorname{sen} 270° = 0 + i \cdot (-1) = -i$

Portanto, os valores são $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-i$.

11. E

Inicialmente vamos determinar as 3 raízes do número $z = -1$.

A parte imaginária do número é zero $z = -1 = -1 + 0i$.

Logo, o módulo é $|z| = \sqrt{1^2 + 0} = 1$.

Então:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{1} = -1$$

Portanto, $\theta = \pi$.

Calculando as raízes pela segunda fórmula de Moivre, obtemos:

n = 3 (raiz cúbica)

$$z_k = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Para k = 0:

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot 0\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para k = 1:

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = (\cos(\pi)+i\,\mathrm{sen}(\pi))$$

$$z_1 = -1$$

Para k = 2:

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fazendo a multiplicação das raízes, obtemos:

$$z_0\cdot z_1\cdot z_2 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow z_0\cdot z_1\cdot z_2 = (-1)\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i^2\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow z_0\cdot z_1\cdot z_2 = (-1)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = -1$$

12. E

Se tomarmos $\theta = 0 \rightarrow z = 1$ e $w = 1$.
O que resulta em $|z|+|w| = 2$ e $z - wi = 1 - i$ (o que exclui a alternativa B).

Se considerarmos $\theta = \frac{\pi}{4}\mathrm{rad}$, temos $z = \frac{i\sqrt{2}}{2}$ e $w = \frac{\sqrt{2}}{2}+i$. Assim, $z^2 + w^2 = i\sqrt{2}$ e $z \neq \overline{w}$.

Sendo $|z| = \sqrt{\cos^2 2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}$ e

$|w| = \sqrt{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2 2\theta}$.

Temos então

$$|z|^2 + |w|^2 = \cos^2 2\theta + \mathrm{sen}\,2\theta + \cos 2\theta + \mathrm{sen}^2\,2\theta = 2.$$

13. D

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+3}\right)^{10} =$$

$$= \left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{10} =$$

$$\left[1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\mathrm{arcsen}(\mathrm{Re}(z)) + 5\mathrm{arctg}(2\mathrm{Im}(z)) =$$

$$= 2\mathrm{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)+5\mathrm{arctg}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2\mathrm{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)+5\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{-\pi}{6}\right)+5\cdot\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

14. Do enunciado $\frac{a}{3}-\frac{bi}{5} = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4$, temos pela fórmula de Moivre:

$$\frac{a}{3}-\frac{bi}{5} = 1^4\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\cdot\mathrm{sen}\frac{4\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$ e $-\frac{b}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Assim, $\frac{a}{b} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

15. D

Com base nos dados, os números complexos são as raízes n-ésimas de um número real positivo k (pois, se z_1 é real e z_1 elevado a n é igual a z, então z será real sempre).

Assim:

$$z_m = \left|\sqrt[n]{k}\right| \rightarrow z^n - k = 0$$

$z_m = \left|\sqrt[n]{k}\right| \cdot \left(\cos\dfrac{(m-1)\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\dfrac{(m-1)\pi}{n}\right)$, (sendo $m = 1, 2, \ldots, n$)

Analisando a equação I pelas relações de Girard, podemos calcular o sinal do produto das raízes r.

Sabe-se que:

$r_1 \cdot r_2 \cdot (\ldots) \cdot r_n = -k \rightarrow$ se k é par

$r_1 \cdot r_2 \cdot (\ldots) \cdot r_n = k \rightarrow$ se k é ímpar

Como $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são raízes da equação, podemos aplicar essa regra para realizar a multiplicação entre elas.

16. E

Seja $z = \cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)$, com $0 < \alpha < 2\pi$.

Para que as imagens dos números complexos **z**, **w** e **zw** correspondam aos vértices de um triângulo equilátero, devemos ter $w = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ e $zw = \cos\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Por outro lado, sabemos que

$$zw = \cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right),$$

Logo, α deve ser $\dfrac{2\pi}{3}$. Assim, $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$, $w = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$ e $zw = 1$.

Portanto, z e w são complexos conjugados.

17. Para determinar z_1, utilizamos a primeira afirmação. Calculando as raízes de 8i:

$$z^3 = 8i \rightarrow z^3 - 8i = 0 \rightarrow z^3 + (2i)^3 \rightarrow (z + 2i)(z^2 - 2iz - 4) = 0$$

$$z = -2i \text{ ou } z = -\sqrt{3} + i \text{ ou } z = \sqrt{3} + i.$$

Como o afixo deve estar no segundo quadrante, $z_1 = -\sqrt{3} + i$.

Resolvendo a equação da segunda afirmação, obtemos:

$$z = \pm\sqrt{3} \text{ ou } z = \pm 2i$$

Como a $\text{Im}(z_2) > 0$, então $z_2 = 2i$.

Agora, calculando o módulo:

$$|z_1 + z_2| = |-\sqrt{3} + i + 2i| = |-\sqrt{3} + 3i| =$$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Estudo para o Enem

18. B

Do enunciado, temos $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$ e $w = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$. Para calcularmos as horas e minutos, temos:

$$\text{Horas: } \frac{z}{w} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)}{1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)}$$

Das fórmulas de Moivre, temos:

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$\dfrac{z}{w} = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, como $\text{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ temos:

$$\frac{z}{w} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i,$$

Os afixos, portanto, são $(\sqrt{3}, 1)$.

Já $z \cdot w = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right).1\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z \cdot w = 2 \cdot 1\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)\right) =$, sendo os

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$ afixos (0,2).

Assim, se projetarmos no relógio os pontos dos afixos, concluímos que o horário da reunião é 14h.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. B

Devemos encontrar o produto $Z_2 \overline{Z}_6$.

Sendo $Z_6 = a - bi$, o conjugado será $\overline{Z}_6 = a + bi = Z_4$.

Como as lâmpadas são igualmente distribuídas, podemos escrever Z_2 e Z_4:

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

$$Z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$$

Fazendo o produto, obtemos o resultado:

$$Z_2\bar{Z}_6 = Z_2Z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) =$$

$$= \frac{1}{2}(-1+i-i-1) = -1$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. D

Com base na figura, |z| = 2, |w| = 4. Como foram dados os ângulos, podemos escrever **z** e **w** na forma trigonométrica:

$z = 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot \text{sen}30°)$
$w = 4.(\cos 240° + i \cdot \text{sen}240°)$

Para encontrarmos t, temos $t = \frac{w}{z}$.

Assim, $t = \dfrac{4(\cos 240° + i\cdot \text{sen}240°)}{2(\cos 30° + i\cdot \text{sen}30°)}$.

Pela fórmula de Moivre, temos:

$$t = \frac{4}{2}\cdot(\cos(240° - 30°) + i\cdot \text{sen}(240° - 30°))$$

$$t = 2\cdot(\cos 210° + i\cdot \text{sen}210°)$$

Como $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}210° = -\frac{1}{2}$:

$$t = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3} - i.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

40 POLINÔMIOS I

Comentários sobre o módulo

Mostre aos alunos situações nas quais os polinômios são utilizados. Se possível, traga casos de modelagem matemática e sua aplicação nas diversas áreas do conhecimento.

Mencione fatos históricos que embasem os estudos para que os alunos possam compreender a evolução e a importância desse tema.

Exercícios propostos

7. D

Do enunciado, temos que $P(1) = -2 \rightarrow 2 \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 = -2 \rightarrow b + c = -4$ (I)

$P(2) = 6 \rightarrow 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 6 \rightarrow 2b + c = -5$ (II)

Fazendo II – I, temos $b = -1$.

Logo, $c = -3$.

8. A

Do enunciado, temos que $P(2) = 0$. Então:

$2^4 - 8 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

$2a + b = 16$ (I)

Sendo $P(1) = 9$:

$1^4 - 8 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 9$

$a + b = 16$ (II)

Fazendo I – II, temos $a = 0$.

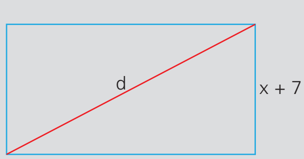
Logo, $b = 16$. Portanto, $a^5 - 4b = 0^5 - 4 \cdot 16 = -64$.

9. E

Do enunciado, o polinômio $3x^2 + 19x - 14$ representa a área do triângulo. Fatorando-o, temos:

$3x^2 + 19x - 14 = 3x^2 + 21x - 2x - 14 = 3x(x+7) - 2(x+7) = (x + 7)(3x - 2)$

Assim:



Sendo d a diagonal desse retângulo:

$d^2 = (x + 7)^2 + (3x - 2)^2 = x^2 + 14x + 49 + 9x^2 - 12x + 4 \rightarrow$

$\rightarrow d^2 = 10x^2 + 2x + 53$

10. Como **a**, **b**, **c** e **d** é uma PG de razão $q \neq 0$:

$b = a \cdot q \rightarrow a = \dfrac{b}{q}$

$c = a \cdot q^2 \rightarrow a = \dfrac{c}{q^2}$

$d = a \cdot q^3 \rightarrow a = \dfrac{d}{q^3}$

Assim, $p\left(-\dfrac{1}{q}\right) = a + a \cdot q\left(-\dfrac{1}{q}\right) + a \cdot q^2\left(-\dfrac{1}{q^2}\right)^2 + a \cdot q^3\left(-\dfrac{1}{q^3}\right)^3 =$

$= a - a + a - a = 0$

Logo, $x = -\dfrac{1}{q}$ é raiz do polinômio.

11. E

$g(x) \cdot A(x) = h(x)$

Como h(x) é um polinômio de grau 6, então A(x) deve ser do tipo $(ax^3 + bx^2 + cx)$.

Portanto:

$(3x^3 + 2x^2 + 5x - 4) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$

$3ax^6 + 3bx^5 + 3cx^4 + 2ax^5 + 2bx^4 + 2cx^3 + 5ax^4 + 5bx^3 + 5cx^2 - 4ax^3 - 4bx^2 - 4cx$

Separando os termos iguais, temos:

$3ax^6 + (3bx^5 + 2ax^5) + (3cx^4 + 2bx^4 + 5ax^4) + (2cx^3 + 5bx^3 - 4ax^3) + (5cx^2 - 4bx^2) - 4cx$

Para que o resultado dessa multiplicação seja h(x), os termos de mesmo grau devem ser iguais. Logo:

$3ax^6 = 3x^6 \rightarrow a = 1$

$3bx^5 + 2ax^5 = 3bx^5 + 2x^5 = 11x^5 \rightarrow 3bx^5 = 9x^5 \rightarrow b = 3$

$3cx^4 + 2bx^4 + 5ax^4 = 3cx^4 + 6x^4 + 5x^4 = 8x^4 \rightarrow 3cx^4 = -3x^4 \rightarrow c = -1$

Dessa forma, $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx = x^3 + 3x^2 - x$.

12. E

Do enunciado, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Reescrevendo, temos:

$P(x) = x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 \rightarrow$

$\rightarrow P(x) = x^2(x + 3) - x(x + 3) - 2(x + 3) \rightarrow P(x) = (x + 3)(x^2 - x - 2) \rightarrow$

$P(x) = (x + 3)(x - 2)(x + 1)$

13. C

As raízes de $P(x) = x^4 - 1$ são dadas pela equação:

$X^4 - 1 = 0 \rightarrow (x^2)^2 - 1^2 = 0 \rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow X^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i$

Ou:

$X^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$S = \{1; -1; i; i\}$

14. a) Se r é uma raiz de p(x), então $r^3 + ar^2 + br + 1$. Como r não pode ser zero:

$$q\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{1}{r}\right)^3+b\left(\frac{1}{r}\right)^2+a\left(\frac{1}{r}\right)+1=\frac{1}{r^3}+\frac{b}{r^2}+\frac{a}{r}+1=$$

$$=\frac{1+br+ar^2+r^3}{r^3}=\frac{0}{r^3}=0.$$

Logo, $\frac{1}{r}$ é raiz de q(x).

b) Calculando p(–1), p(0), p(1) e p(2), temos:

$p(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = a - b$

$p(0) = (0)^3 + a(0)^2 + b(0) + 1 = 1$

$p(1) = (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + 1 = a + b + 2$

$p(2) = (2)^3 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 8 + 4a + 2b + 1 = 4a + 2b + 9$

Assim, temos a PA de sequência (a – b, 1, a + b + 2). A razão é dada por (4a + 2b + 9). Calculando a e b, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Para $n = 2 \rightarrow 1 = (a - b) + (2 - 1) \cdot (4a + 2b + 9) \rightarrow 5a + b = -8$ (I)

Para $n = 3 \rightarrow a + b + 2 = (a - b) + (3 - 1) \cdot (4a + 2b + 9)$

$\rightarrow a + b + 2 = (a - b) + (8a + 4b + 18)$

$a + b + 2 = 9a + 3b + 18 \rightarrow 8a + 2b = -16$ (II)

Isolando b na equação I e substituindo na II, temos:

$5a + b = -8 \rightarrow b = -8 - 5a$

$8a + 2(-8 - 5a) = -16 \rightarrow 8a - 16 - 10a = -16 \rightarrow -2a = 0$. Logo, $a = 0$.

Substituindo a na equação I, temos $5(0) + b = -8 \rightarrow b = -8$.

Portanto, para que a sequência (p(–1), p(0), p(1)) seja uma PA de razão igual a p(2), a = 0 e b = –8.

15. D

Analisando as alternativas, temos:

a) Se b = 0, $P(x) = x^2 + 3$. Portanto, P(x) não tem nenhuma raiz real para b = 0. Assim, a alternativa é incorreta.

b) Se b = 12, $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 > 0$. Portanto, nesse caso P(x) possuirá 2 raízes reais distintas. Ou seja, a alternativa é incorreta.

c) Como visto no item a, essa alternativa é incorreta.

d) Se $b=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$, como $1+\frac{1}{\sqrt{3}}<2 \rightarrow \Delta<0$. Logo, não haverá raiz real. Dessa forma, a alternativa é correta.

e) Se o polinômio é de grau 2, ele só terá 2 raízes. Portanto, não poderá ter 3 raízes independentemente do valor de b.

16. B

Para o polinômio p(x), temos que o grau deste é dado pela soma dos expoentes i de $(x - i)^i$. Podemos perceber que esses expoentes estão em uma P.A. de razão 1, sendo $a_1 = 1$, em que a soma da P.A. é 210.

Dessa forma:

$$S_n=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}\rightarrow 210=$$

$$=\left[a_1+a_1+(n-1)\cdot r\right]\cdot\frac{n}{2}\rightarrow 420=$$

$$=\left[1+1+(n-1)\cdot 1\right]\cdot n\rightarrow 420=$$

$$=2n+n^2-n\rightarrow n^2+n-420=0$$

Da equação de 2º grau, obtemos as raízes n = –21 e n = 20.

Como a raiz negativa não convém, ficamos com n = 20, como 20 é divisível por 5.

17. a) $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2) \rightarrow$

$\rightarrow p(x) = x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax^3 + abx^2 + 2ax + x^2 + bx + 2 =$

$= x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 3)x^2 + (2a + b)x + 2$

Assim:

$a + b = -1 - 2\sqrt{3}$

$ab + 3 = 3 + 2\sqrt{3}$

$2a + b = -1 - 4\sqrt{3}$

Resolvendo, temos $b = -1$ e $a = -2\sqrt{3}$.

b) Para encontrarmos as raízes, fazemos $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + 2 = 0$

Para $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$:

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \rightarrow \Delta = 12 - 4 = 8$$

$$x_1 = \frac{-\left(-2\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

Para $x^2 - x + 2 = 0$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7$$

$$x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{7i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2}$$

Estudo para o Enem

18. A

Para que a bactéria seja eliminada, temos que $Q(t) = t^2 - 8t - 84 = 0$.

Assim:

$t^2 - 8t - 84 = 0 \rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1\,(-84) = 64 + 336 = 400$

Portanto, $t = \frac{-(-8) \pm 20}{2 \cdot 1} \rightarrow$

$$t_1 = \frac{8 + 20}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ e } t_2 = \frac{8 - 20}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

Como $t = -6$ não convém, temos que o total de aplicações será 14. Assim como só poderão haver 2 aplicações ao dia, $\frac{14}{2} = 7$. Dessa forma, o medicamento deverá ser utilizado por 7 dias.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. D

Sabendo que as colônias A e B são respectivamente $-2 - 24t - t^2 + t^3$ e $70 - 3t - 2t^2 + t^3$, para que tenham a mesma quantidade de massa, devem ser iguais. Assim:

$$-2 - 24t - t^2 + t^3 = 70 - 3t - 2t^2 + t^3$$

$$-2 - 24t - t^2 + t^3 - 70 + 3t + 2t^2 - t^3 = 0$$

$$t^2 - 21t - 72 = 0$$

$$\Delta = (-21)^2 - 4 \cdot 1\,(-72) = 441 + 228 = 729$$

$$t = \frac{-(-21) \pm \sqrt{72}}{2 \cdot 1} = \frac{21 \pm 27}{2}$$

$$t_1 = \frac{48}{2} = 24$$

$$t_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

Como -3 não convém, as colônias voltam a ter a mesma quantidade de massa após 24h.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. E

Queremos calcular o seguinte:

$d^2 = b^2 + h^2$, em que:

d é a diagonal do retângulo;

$b = x + 7$ é a base do retângulo;

h é a altura do retângulo.

Logo, $3x^2 + 19x - 14 = (x + 7)\,h \leftrightarrow h = 3x - 2$.

Portanto, podemos então dizer que o quadrado da diagonal será:

$$d^2 = (x + 7)^2 + (3x - 2)^2 = 10x^2 + 2x + 53$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

41 POLINÔMIOS II

Comentários sobre o módulo

Por se tratar de uma aula mais técnica, comente sobre Paolo Ruffini ao explorar o método tema deste módulo. Além disso, dê exemplos de contextos em que se utiliza esse tipo de operação, como no cálculo do índice de massa corpórea (IMC).

Exercícios propostos

7. B

Sabendo que p(x) é divisível por $x^2 + 1$, usamos o método das chaves:

$$\begin{array}{l|l} ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -ax^2 - ax & ax + b \\ \hline 0 + bx^2 + (c - a)x + d & \\ -bx^2 - b & \\ \hline \quad 0 + (c - a)x + (d - b) & \end{array}$$

Então, o quociente é $ax + b$, e o resto é $(c – a)x + (d – b)$.

Como o polinômio é divisível por $x^2 + 1$, o resto deve ser zero. Assim:

$(c – a)x + (d – b) = 0 \rightarrow (c – a) = 0$ e $(d – b) = 0$ (independente do valor de x).

Logo, $c = a$ e $d = b$.

8. A

Pelo método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - x^3 + x^2 + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} -x^5 + 3x^3 - 2x^2 & x^2 + 2 \\ \hline \quad 2x^3 - x^2 + 1 & \\ \quad -2x^3 + 6x - 3 & \end{array}$$

Dessa forma, $r(x) = –x^2 + 6x – 3$ e $r(–1) =$
$= – (–1)^2 + 6 \cdot (–1) – 3 = –10.$

9. C

Utilizando o método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0x^2 + ax + b & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 \quad - x^2 - 2x & x - 1 \\ \hline 0 - x^2 + (a - 2)x + b & \\ \quad x^2 \qquad + x \quad + 2 & \\ \hline \quad (a - 1)x + (b + 2) & \end{array}$$

Como o resto da divisão é igual a 4, (a – 1) deve ser zero.

Logo, a = 1. Consequentemente, b + 2 = 4. Então, b = 2.

Dessa forma, a + b = 1 + 2 = 3.

10.

Sabemos que dividendo = divisor · quociente + resto. Portanto, como o resto tem grau menor que o divisor e será do tipo (ax + b):

$P(x) = (x^2 – 1) \cdot Q(x) + (ax + b)$

De acordo com o gráfico de P, P(–1) = 0 e P(1) = 2.

Então:

$P(–1) = [(–1)2 – 1] \cdot Q(–1) + (a \cdot (–1) + b) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow –a + b = 0$ (I)

$P(–1) = (12 –1) \cdot Q(1) + (a \cdot 1 + b) = 2 \rightarrow a + b = 2$ (II)

Fazendo II – I:

$–2a = –2 \rightarrow a = 1$

Substituindo o valor de a na equação I, temos a = b = 1.

Assim, o resto da divisão será ax + b. Portanto, x + 1.

11. B

Temos que $\dfrac{x^5 + ax^3 + x}{x^3 + bx} = \dfrac{x(x^4 + ax^2 + 1)}{x(x^2 + b)}$.

Utilizando o método das chaves:

$$\begin{array}{l|l} \quad x^4 + ax^2 - 1 & x^2 + b \\ \cline{2-2} -x^4 - bx^2 & x^2 + a - b \\ \hline \qquad (a - b)x^2 + 1 & \\ \quad -(a - b)x^2 - b^2 - ab & \\ \hline \qquad\quad b^2 - ab + 1 & \end{array}$$

12. C

Pelo método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 10x - 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2} \quad -6x^4 - 18x^3 + 12x^2 & 6x^2 - 20x + 64 \\ \hline \quad -20x^3 + 4x^2 + 10x & \\ \quad\; 20x^3 + 60x^2 - 40x & \\ \hline \qquad\quad 64x^2 - 30x - 2 & \\ \qquad -64x^2 - 192x + 128 & \\ \hline \qquad\qquad -222x + 126 & \end{array}$$

Assim, multiplicando o resto por 2, temos:

$2 \cdot (–222x + 126) = –444x + 252$

13. B

Como o polinômio é divisível por $(x + 1) \cdot (x – 2)$, temos que R(x) = 0.

Nesse caso, podemos aplicar a divisão de $(x – a)(x – b)$. Assim:

$P(x) = (x + 1) . (x – 2) \cdot Q(x) + 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^3 + 2x^2 – 5x – 6 = (x + 1) \cdot (x – 2) \cdot Q(x)$

Como $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 2)$
$(x + 1) \cdot (x - 2)(x + 3) \rightarrow$
$\rightarrow (x + 1)(x - 2)(x + 3) = (x + 1)(x - 2) \cdot Q(x) \rightarrow$

$$\rightarrow Q(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$$

Logo, $Q(x) = (x + 3)$.

14.

Utilizando o método das chaves:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 2^k + 2 & x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 3x^2 \quad\quad\quad & x^2 + 2x + 6 \\ \cline{1-1} 2x^2 + 0x + 2^k + 2 & \\ -2x^2 + 6x \quad\quad\quad & \\ \cline{1-1} +6x + 2^k + 2 & \\ -6x + 18 \quad & \\ \cline{1-1} 2^k + 20 & \end{array}$$

Assim, o resto é $2^k + 20 = 4^k - 220 \rightarrow 2^{2k} - 2^k = 240$.
Chamando $2^k = y$, temos $y^2 - y - 240 = 0$. Então:
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 1 + 960$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+960}}{2} \rightarrow y = \frac{1 \pm 31}{2}, \; 2k = y, \; y > 0, \text{ temos:}$$

$$y = \frac{1 \pm 31}{2} = 16 \rightarrow 2k = 16 \rightarrow 2k = 24 \rightarrow k = 4$$

15. B

Analisando cada alternativa, temos:

a) Incorreto. O grau do polinômio é 3 (indicado pelo maior valor do expoente).

b) Correto, pois, desenvolvendo $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot$ $\cdot (x - 3)$, temos:

$(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = (x^2 - 2x - x + 2) \cdot (x - 3) =$
$= x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x - x^2 + 3x + 2x - 6 =$
$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

c) Incorreto, pois, utilizando o método de Briot-Ruffini:

3	1	−6	11	−6
	1	−3	2	0

Logo, o quociente é $x^2 - 3x + 2$.

d) Idem ao item A.

e) Incorreto, pois o polinômio divisor deve ter grau igual ou menor que o dividendo.

16. C

Do enunciado, temos que:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} x^2 + 1 & x^2 + 1 \end{array}$$

Assim, $p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 1) + (x^2 + 1)$

Fatorando p(x), tem-se:
$P(x) = (x^2 + 1) \,.\, [q(x) + 1]$

As raízes de p(x) serão:
$(x^2 + 1) = 0$ ou $q(x) + 1 = 0$

De $x^2 + 1 = 0$, temos $x^2 = -1 \rightarrow x = i$ ou $x = -i$ (que são raízes imaginárias).
Assim, independentemente das raízes de p(x) serem reais ou imaginárias, elas certamente são complexas.

17.

$x^2 + ax + b = (x + 2) \cdot (x - 1) = x^2 + x - 2$

Da identidade de polinômios, temos $a = 1$ e $b = -2$.
Logo, $a - b = 1 - (-2) = 3$.

Estudo para o Enem

18. C

Dados os polinômios, podemos fazer a divisão pelo método das chaves:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 7 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -6x^4 - 3x^3 - 3x^2 \quad\quad\quad\quad & 3x^2 - 2x - 5 \\ \cline{1-1} -4x^3 - 12x^2 - 3x + 7 & \\ 4x^3 + 2x^2 + 2x \quad\quad & \\ \cline{1-1} -10x^2 - x + 7 & \\ 10x^2 + 5x + 5 & \\ \cline{1-1} 4x + 12 & \end{array}$$

Assim, o resto é $4x + 12$. Logo:

Filho mais velho: $4 \cdot 17 + 12 = 80$.

Filho mais novo: $4 \cdot 15 + 12 = 72$.

Dessa forma, os aumentos do filho mais velho e do mais novo são, respectivamente, 80 e 72.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. D

Como a operação obtida foi de divisão, pelo método das chaves, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 1 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 - 2x \quad & x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 - 2x - 1 & \\ -x^2 - x - 2 & \\ \cline{1-1} -3x - 3 & \end{array}$$

Assim, o quociente obtido foi $x + 1$, e o resto é $-3x - 3$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. C

Do enunciado, temos que x = 2 é raiz de P. Logo, pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

2	4	−28	61	−42
	4	−20	21	0

Logo, $(x-2)(4x^2-20x+21) = 4(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)$.

Assim, podemos afirmar que a altura vale $\frac{3}{2}$ m, já que é a menor raiz e a outra dimensão vale $\frac{7}{2}$ m.

A soma das medidas de todas as arestas do paralelepípedo é:

$$4 \cdot \left(2+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right) = 28 \text{ m}$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

42 POLINÔMIOS III

Comentários sobre o módulo

Traga para a aula situações reais de uso de polinômios. Cite casos de modelagem matemática na Engenharia, construção civil e Eletrônica. Assim, os alunos compreenderão a utilidade real dos polinômios.

Para ir além

Os estudos da Álgebra foram iniciados no Egito Antigo e na Babilônia. Esses povos chegaram a resolver equações do tipo $ax + b = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando as técnicas que conhecemos atualmente.

Os matemáticos árabes foram capazes de desenvolver a Álgebra fundamental dos polinômios e usaram símbolos modernos.

Pesquise sobre a contribuição dos egípcios e babilônios para o avanço da Matemática.

Exercícios propostos

7. C

Como $x = 1$ é raiz de P(x), aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, reduzimos a ordem para um polinômio de grau 2. Assim:

1	1	–1	a	–a
	1	0	a	0

Logo, $Q(x) = x^2 + a$.

Como $x = 1$ é a única raiz real, as outras duas serão complexas. Portanto, o Δ de Q(x) será menor que 0:

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Delta = 0 - 4(1)(a) < 0$

$\Delta = -4a < 0$

$a > 0$

8. A

Como a soma dos coeficientes de P(x) é zero, então $x = 1$ é raiz. Dessa forma, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	–3	7	–5
	1	–2	5	0

Logo, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$. Assim, as outras duas raízes de P(x) são raízes da equação $x^2 - 2x + 5 = 0 \to x = 1 \pm 2i$.

Como a parte imaginária de ξ é positiva, então $\xi = 1 + 2i$ e $\xi^3 = (1 + 2i)^3 = -11 - 2i$, cuja parte real é -11.

9. A

Do enunciado, temos que 2 é raiz. Assim, por Briot-Ruffini:

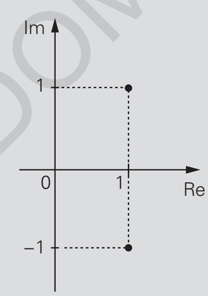
2	1	–4	6	4
	1	–2	2	0

Podemos obter as demais raízes fazendo $x^2 - 2x + 2 = 0$. Logo:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \to \Delta = 4 - 8 = -4$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4i^2}}{2 \cdot 1} \to x = \frac{2 \pm 2i}{2} \to x_1 = 1 + i \text{ e } x_2 = 1 - i$$

No plano complexo, temos:



Assim, as imagens pertencem ao primeiro e ao quarto quadrantes.

10. Para que os polinômios p(x) e h(x) sejam divisíveis por $x - 4$, a raiz deve ser 4. Assim:

$p(4) = h(4) = 0 \to p(4) = 4^3 + 2a + b = 0 \to$
$\to 2a + b = -64$ (I)

$h(4) = 4^4 + a - 2b = 0 \to a - 2b = -256 \to$
$\to a = 2b - 256$ (II)

Substituindo II em I, temos: $2(2b - 256) + b = -64 \to 4b - 512 + b = -64$

$$5b = 512 - 64 \to 5b = 448 \to b = \frac{448}{5} \to a = -\frac{384}{5}$$

Portanto, os valores de **a** e **b** que tornam p(x) e h(x) divisíveis por $x - 4$ são, respectivamente, $-\frac{384}{5}$ e $\frac{448}{5}$.

11. B

Do enunciado, P(x) admite 1 como raiz. Assim, P(x) é divisível por $(x - 1)$.

Fazendo essa divisão, temos:

1	1	–3	4	–2
	1	–2	5	0

Assim, $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2)$.

Para $P(x) = 0$, temos:

$x - 1 = 0$ ou $\rightarrow x = 1$ (que vem do enunciado)

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = 1 \pm i\,.$$

12. E

Como um dos fatores de P(x) é $x + 3 \rightarrow x = -3$ é uma raiz de P(x).

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

–3	1	2	–5	–6
	1	–1	–2	0

Assim, $P(x) = (x + 3) \cdot (x^2 - x - 2)$.

Calculando as raízes de $x^2 - x - 2 = 0$, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -1$$

Dessa forma, $x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x - (-1)) =$
$= (x - 2) \cdot (x + 1)$.

Podemos então escrever o polinômio como $(x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$, sendo então esses os fatores de P(x).

13. E

Sabendo que i e –i são raízes, p(z) é divisível por $(x - i)$ e por $(x + i)$, como podemos verificar por:

i	1	2 + i	2 + i	2 + i	2 + i
–i	1	2 + 2i	3i	1 – i	0
	1	2 + i	1 + i	0	

Logo, $p(z) = z^2 + (2 + i) \cdot z + 1 + i = 0$

Encontrando as outras raízes, temos:

$$z = \frac{-(2+i) \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1+i)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-(2+i) \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{-(2+i) \pm i}{2} \rightarrow$$

Assim, as raízes são

$z_1 = i \rightarrow |z_1| = 1$

$z_2 = -i \rightarrow |z_2| = 1$

$z_3 = -1 \rightarrow |z_3| = 1$

$z_4 = -1 - i \rightarrow |z_4| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

14. Como $x = 2$ é raiz, pelo método de Briot-Ruffini, temos:

2	1	–3	6	–8
	1	–1	4	0

Assim, $P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - x + 4)$.

Com base no enunciado, as duas outras raízes são complexas. Assim, $z_1 = ax + bi$ e $z_2 = ax - bi$. Calculando as raízes de $x^2 - x + 4 = 0$, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4) = 1 - 16 = -15 = 15i^2$.

$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{15i^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2} \rightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2} \text{ e } z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}$$

Desse modo, $z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}$.

Somando as partes reais e imaginárias, temos:

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2} \rightarrow z_1 + z_2 = 1$$

15. A

Do enunciado, sabemos que –2 é raiz com multiplicidade 2. Assim, utilizando o método de Briot-Ruffini duas vezes, temos:

–2	1	4	8	16	16
–2	1	2	4	8	0
	1	0	4	0	

Ficamos então com $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm 2i$

16. C

Com base no teorema do resto, $p(-1) = 16$, $p(1) = 12$ e $p(0) = 1$.

Sabemos também que $p(x) = (x + 1)(x - 1)x \cdot q(x) + ax^2 + bx + c$, em que q(x) é o quociente da divisão de p(x) por $(x + 1)(x - 1)x$.

Desse modo, temos:

$p(-1) = a - b + c \rightarrow a - b + c = 16$

$p(1) = a + b + c = 12$

$p(0) = c \rightarrow c = -1$

Substituindo c, temos:

$a - b + (-1) = 16 \rightarrow a - b = 17$ (I)

$a + b + (-1) = 12 \rightarrow a + b = 13$ (II)

Fazendo I – II, temos:

$-2b = 4 \rightarrow b = -2$

Logo, $a + b = 13 \rightarrow a + (-2) = 13 \rightarrow a = 15$.

Então, $ax^2 + bx + c = 15x^2 - 2x - 1$. Assim, as raízes são:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-1) = 4 + 60 = 64$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 15} \rightarrow x = \frac{2 \pm 8}{30} \rightarrow x_1 = \frac{2+8}{30} = \frac{10}{30} \text{ e}$$

$$x_2 = \frac{2-8}{30} = \frac{-6}{30}$$

Logo, a soma das raízes é $\frac{10}{30} + \left(\frac{-6}{30}\right) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

17. O número 2 é raiz, pois $p(2) = 0$. Assim, dividindo $p(x)$ por $(x - 2)$, temos:

2	2	–6	3	2
	2	–2	–1	0

Dessa forma, $P(x) = (x - 2) \cdot (2x^2 - 2x - 1)$.

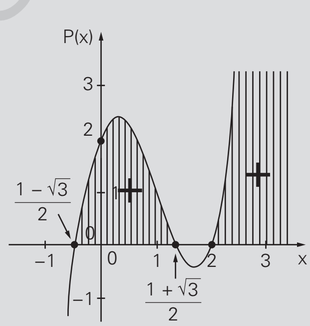
Assim, as outras raízes são obtidas por $2x^2 - 2x - 1 =$ $= 0$. Então:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 4 + 8 = 12$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Concluímos que as raízes são $x = 2$ e $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Resolvendo agora a inequação $P(x) > 0$ por meio do gráfico do polinômio $P(x)$:



Portanto, a solução da inequação será dada por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x \geq 2\right\}.$$

Estudo para o Enem

18. E

Com base no enunciado, cada participante recebeu $\frac{1}{4}$ kg do ingrediente A. Assim, supondo que essa seja a quantidade máxima desse ingrediente, esse valor é uma das raízes do polinômio.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini para baixar o grau do polinômio, temos:

$\frac{1}{4}$	8	–14	7	–1
	8	–12	4	0

$$8x - 14x^2 + 7x - 1 = \left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot (8x - 12x + 4)$$

Para achar as massas máximas de B e C, devemos encontrar as raízes de $8x^2 - 12x + 4$. Logo $8x^2 - 12x + 4 = 0$ (dividindo ambos os lados por 4)

$$x = \frac{-(-3) \pm 1}{4} \rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = \frac{1}{2}$$

Assim, x_1 e x_2 representam as massas B e C. Logo, para obtermos a diferença entre as quantidades máximas que podem ser utilizadas dos ingredientes B e C, $x_1 - x_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5 \text{ kg} = 500 \text{ g}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. D

Para $t = 3$, temos $t^3 - 30t^2 + 243t + 24 = 510 \rightarrow$

$\rightarrow t^3 - 30t^2 + 243t - 486 = 0$. Logo:

3	1	–30	243	–486
	1	–27	162	0

Assim, $t^3 - 30t^2 + 243t - 486 = (t - 3)(t^2 - 27t +$ $+ 162)$.

De $t^2 - 27t + 162$, temos que $t = 9$ ou $t = 18$.

Portanto, 9 min e 18 min.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. B

Para $t^3 - 21t^2 + 126t + 304 = 480$, temos:

$t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = 0$

Sabendo que $t = 2$ é raiz da equação:

2	1	–21	126	–176
	1	–19	88	0

Assim, $t^3 - 21t^2 + 126t - 176 = (x - 12)(x^2 - 19x + 88) = 0$.

Podemos então concluir que as raízes da equação $(x - 12)(x - 19x + 88) = 0$ são 2, 8 e 11, correspondendo a fevereiro, agosto e novembro.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

43 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS I

Comentários sobre o módulo

Use temas transversais para embasar o estudo sobre equações algébricas. Traga exemplos de aplicações nos campos da Engenharia, Arquitetura e Biotecnologia para que os alunos possam ter uma visão mais contextualizada e histórica do tema.

Relacione os estudos dos módulos sobre polinômios com as equações algébricas e enfatize suas diferenças.

Exercícios propostos

7. B

Para calcular o volume do paralelepípedo, basta multiplicar comprimento, largura e altura. Assim:

$x \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) = 12$

$(x^2 + 4x) \cdot (x - 1) = 12 \rightarrow x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x =$
$= 12 \rightarrow x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow$

$x^2 \cdot (x + 3) - 4(x + 3) = 0$

Se dividirmos o polinômio por (x + 3), obtemos uma equação do 2º grau:

$$\frac{x^2(x+3)-4(x+3)}{x+3} = 0$$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4} \rightarrow x = 2$

Portanto, as dimensões da caixa são 2, 6 e 1.

8. B

Do enunciado, temos que as raízes são −1 e 4.

Assim, como se trata de um polinômio do 2º grau:

$$P(x) = a(x-(-1))(x-4)$$

Como P(5) = −12, temos:

$$P(5) = a(5-(-1))(5-4) = -12$$

$$a \cdot (6) \cdot (1) = -12 \rightarrow a = -\frac{12}{6} = -2$$

Assim, temos $P(x) = -2(x-(-1))(x-4)$.

Para P(x) = 8, temos:

$$-2(x-(-1))(x-4) = 8 \rightarrow (x-(-1))(x-4) = -4 \rightarrow$$

$$(x+1)(x-4) = -4 \rightarrow x - 4x + x - 4 = -4 \rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Logo, o maior valor é 3.

9. B

Colocando x em evidência no primeiro termo do numerador, temos:

$$\frac{x(x^2-14x+49)(ax-bx+7a-7b)}{(x^2-49)(2a-2b)(7x-49)}$$

Repete-se essa operação no primeiro termo do numerador:

$$x - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

O termo $(ax - bx + 7a - 7b)$ pode ser agrupado por a e b:

$(ax - bx + 7a - 7b) = a\,(x + 7) - b\,(x + 7) =$
$= (a - b)\,(x + 7)$

Para o primeiro termo do denominador, temos:

$$(x^2 - 49) = (x + 7)\,(x - 7)$$

Simplificam-se também os últimos dois termos:

$$(2a - 2b) = 2\,(a-b)$$
$$(7x - 49) = 7(x-7)$$

Substituindo as expressões simplificadas, temos:

$$\frac{x(x-7)^2(a-b)(x+7)}{(x+7)(x-7)\cdot 2(a-b)\cdot 7(x-7)} = \frac{x}{14}$$

Para o valor de x = 966, o valor da expressão é $\frac{966}{14} = 69$.

10. Do enunciado, temos que 1 é raiz de multiplicidade 2. Assim, utilizaremos o método de Briot-Ruffini duas vezes, reduzindo a equação de grau 4 para grau 2.

1	0	−2	−3	a	b
1	1	−1	−4	a − 4	a + b − 4
	1	0	−4	a − 8	

Assim, temos a + b − 4 = 0 e a − 8 = 0.

Resolvendo o sistema, temos:

$a = 8$

$b = -4$

Dessa forma, o produto $a \cdot b$ será:

$a \cdot b = 8 \cdot (-4) = -32$

11. C

Do enunciado, temos que $x^4 + x^2 - 6 = 0$. Se considerarmos $x^2 = y$, teremos: $y^2 + y - 6 = 0$

Então:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

$$y = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{25}\right)}{2 \cdot 1} \to y = \frac{-1 \pm 5}{2} \to$$

$y_1 = 2$ e $y_2 = -3$.

Como $x^2 = y$, então $x = \pm\sqrt{y}$. Logo:

$x = \pm\sqrt{2}$ ou $x = \pm\sqrt{-3}$ (não convém, já que se pede a solução apenas no conjunto dos reais).

12. D

Para $p(x) = q(x) \to x^3 = x^2 + x \to x^3 - x^2 - x = 0$
$x\,(x^2 - x - 1) = 0$
Assim, temos que $x_1 = 0$ e que

$x^2 - x - 1 = 0 \to$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \to x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e}$$

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

As raízes são $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Portanto, o número de soluções da equação é 3.

13. B

Por Briot-Ruffini, temos:

1	1	0	−3	2
1	1	1	−2	0
1	1	2	0	
	1	$3 \neq 0$		

Portanto, 1 é raiz de multiplicidade 2.

14. Dado o polinômio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos que:

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 2i)(x + 2i)[x - (2 + i)][x - (2 - i)] \to$

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 1.(x - 2i)(x + 2i)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 16x + 20$

Como são polinômios idênticos, temos:

$a = -4$, $b = 9$, $c = -16$ e $d = 20$

Assim, $a + b + c + d = -4 + 9 - 16 + 20 = 9$.

15. C

Se q é a razão da progressão geométrica, os graus são $(16, 16q, 16q^2, 2)$.

Então, $16q^3 = 2 \to q = \frac{1}{2}$.

Em consequência, os graus de q e de f são, respectivamente, iguais a 8 e 4.

Portanto, $8 + 4 = 12$.

16. D

Do enunciado, temos

$$2 \cdot (x^3 + 1) = 3 \cdot (x^2 + x) \to 2 \cdot (x^3 + 1) - 3 \cdot (x^2 + x) = 0$$

$$2 \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 1x + 1) - 3 \cdot x \cdot (x+1) = 0 \to$$

$$\to (x+1) \cdot (2x^2 - 2x + 2 - 3x) = 0 \to$$

$$\to (x+1) \cdot (2x^2 - 5x + 2) = 0 \to$$

$x + 1 = 0 \to x = -1$ ou $2x^2 - 5x + 2 = 0 \to x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Dessa forma, o conjunto S será dado por $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 2\right\}$. Logo, $\{-1, 2\} \subset S$.

17. Para $p(x) = 0$, temos que $\{-1, 1 + \alpha i, 1 - \alpha i\}$ é o conjunto verdade. Assim:

$$p(x) = 1 \cdot (x+1) \cdot (x - 1 - \alpha i) \cdot (x - 1 + \alpha i) \to .$$
$$\to p(x) = (x+1) \cdot \left[(x-1)^2 + \alpha^2\right]$$

a) Do enunciado, dividindo $p(x)$ por $x - 1$, temos que o resto é 8, ou seja, $p(1) = 8$.

Portanto,

$$p(1) = (1+1) \cdot \left[(1-1)^2 + \alpha^2\right] = 8 \to 2 \cdot \alpha^2 = 8 \to$$

$\to \alpha^2 = \frac{8}{2} = 4$. Assim, $\alpha = 2$.

b) Sabendo o valor de α, temos

$$p(x)=(x+1)\cdot\left[(x-1)^2+4\right]\rightarrow$$

$$p(x)=(x+1)\cdot(x-2x+5)\ \rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x+1 \\ \hline 0 & x^2-2x+5 \end{array}$$

Logo, $q(x) = x^2 - 2x + 5$.

Estudo para o Enem

18. E

Para obtermos as dimensões do cercado, devemos encontrar as raízes da equação. Assim: $x^2 - 45x = 500 = 0$

$$\rightarrow x=\frac{45\pm\sqrt{45^2-4\cdot1\cdot500}}{2}\rightarrow x_1=25 \text{ e } x_2=20$$

Sabendo as dimensões do cercado, obtemos o perímetro 2p do retângulo de dimensões 20 por 25. Logo, $2p = 20 + 25 + 20 + 25 = 90$ m.

Como Pedro irá utilizar cinco voltas de arame, multiplicamos o perímetro por cinco para obter a quantidade total de arame. Logo, $90 \cdot 5 = 450$ m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. A

Considerando **n** o número de caminhões e **c** a capacidade máxima de cada caminhão:

$n \cdot c = 90$ (I)

$$(n+6)\cdot\left(c-\frac{1}{2}\right)=90\ \text{(II)}$$

De (I), temos $c=\frac{90}{n}$.

Substituindo c em (II), temos:

$$90-\frac{n}{2}+\frac{540}{n}-3=90\rightarrow -n^2+1\,080-6n=0\rightarrow$$

$$-n^2-6n+1\,080=0$$

Encontrando as raízes, temos:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1\,080 = 36 + 4\,320 = 4\,356$$

$$n=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4356}}{2\cdot(-1)}\rightarrow n=\frac{6\pm 666}{-2}\rightarrow n_1=-36$$

(não convém) e $n_2 = 30$

Portanto, o número de caminhões será $30 + 6 = 36$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. A

Quantidade de calculadoras: x.

Preço de cada calculadora: $\frac{300}{x}$.

Do enunciado, podemos escrever:

$$\left(\frac{300}{x}+20\right)\cdot(x-4)=300\rightarrow$$

$$\rightarrow 300+20x-\left(\frac{1200}{x}\right)-80=300$$

$$20x-\left(\frac{1200}{x}\right)-80=0\rightarrow x-\left(\frac{60}{x}\right)-4=0\rightarrow$$

$$x^2-4x-60=0$$

Encontrando as raízes, temos:

$x = 10$ ou $x = -6$ (não convém)

Portanto, em março ele compraria mais de 8 calculadoras.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

44 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS II

Comentários sobre o módulo

Mencione situações cotidianas para contextualizar a aplicabilidade de equações algébricas. Simular uma empresa em sala de aula e usar funções polinomiais para representar seu crescimento ou sua produção pode ser útil para compreender equações algébricas.

Para ir além

Nicolo Tartaglia e Girolamo Cardano foram matemáticos do século XVI e são os principais desenvolvedores da fórmula geral para solução de equações de 3º grau. Busque informações a respeito da fórmula de Cardano-Tartaglia e sobre sua aplicação em nosso cotidiano.

Exercícios propostos

7. A

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes do polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$, pelas relações de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Logo, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 \cdot x_2 + x \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} =$

$$= \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}} = -\frac{c}{d}.$$

Como queremos $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^{-1} \to \left(-\frac{c}{d}\right)^{-1} = -\frac{d}{c}$.

8. B

Dada a equação $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, como a equação é do 3º grau, há 3 raízes, sendo x_1, x_2 e x_3.

Do enunciado, temos $x_1 = x_2 + x_3$ (I).

Das relações de Girard, temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \to x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{4}{1} = -4 \quad \text{(II)}$$

Substituindo I em II, temos:

$$x_1 + x_1 = -4 \to 2x_1 = -4 \to x_1 = -2$$

Assim:

−2	1	4	1	−6
	1	2	−3	0

Dessa forma, podemos obter as demais raízes por meio da seguinte operação:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \to 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \to x = \frac{-2 \pm 4}{2} \to x_2 = 1 \text{ e } x_3 = -3$$

Assim, o conjunto-solução da equação é $S = \{-3, -2, 1\}$.

9. C

Como 1 é uma raiz de multiplicidade 3, se $\{1, 1, 1, x_1, x_2\}$ for o conjunto-verdade da equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$, pelas relações de Girard, temos:

$$1 + 1 + 1 + x_1 + x_2 = \frac{3}{1} \to x_1 + x_2 = 0 \to x_2 = -x_1 \quad \text{(I)}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} \to x_1 \cdot x_2 = 1 \text{ (II)}$$

Substituindo I em II:

$$-(x_1)^2 = 1 \to = \pm i$$

Assim, $x_1 = i$ e $x_2 = -i$ ou $x_1 = -i$ e $x_2 = i$.

10. Das relações de Girard, podemos encontrar a área e o volume do paralelepípedo. Para isso:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{34}{2} \to$$

$$\text{Área} = 2(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = 2 \cdot \frac{34}{2} = 34 \text{ cm}^2.$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{24}{2} \to \text{Volume} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 12 \text{ cm}^3.$$

11. D

$P(r) = r^3 + r^2 - ar - 3 = 0$, (já que **r** é raiz)

$p(-r) = (-r)^3 + (-r)^2 - a(-r) - 3 = -r^3 + r^2 + ar - 3 = 0$, (já que **−r** é raiz)

Fazendo $p(r) + p(-r)$, temos:

$$r^3 + r^2 - ar - 3 + (-r^3 + r^2 + ar - 3) \to 2r - 6 = 0$$

$$r^2 = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, $r = \sqrt{3}$ e $-r = -\sqrt{3}$.

Assim:

$$p(r)=\left(\sqrt{3}\right)^3+\left(\sqrt{3}\right)^2-a\left(\sqrt{3}\right)-3=0\rightarrow$$

$$\rightarrow 3\sqrt{3}+3-\sqrt{3}a-3=0$$

$$\sqrt{3}a=3\sqrt{3}\rightarrow a=3$$

Portanto, $p(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = 2 - 6 = -4$.

12. A

Sabemos que, se $z = 3 + ai$ é raiz, então $z = 3 - ai$ também é uma raiz.

Consideraremos ainda que a raiz real desconhecida é **r**.

Utilizando as relações de Girard, temos:

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a}\rightarrow(3+ai)+(3-ai)+r=-\frac{0}{1}\rightarrow$$

$$\rightarrow 6+r=0\rightarrow r=-6$$

Sabemos que $P(-6) = 0$, já que -6 é raiz. Assim:

$(-6)^3 - k(-6) + 150 = 0 \rightarrow 6k = 66 \rightarrow k = 11$

Utilizando novamente as relações de Girard:

$$r_1\cdot r_2\cdot r_3=-\frac{d}{a}\rightarrow(3+ai)\cdot(3-ai)\cdot(-6)=-\frac{150}{1}\rightarrow$$

$$\rightarrow(9-3ai+3ai-a^2i^2)\cdot(-6)=-150\rightarrow$$

$$\rightarrow a^2+9=\frac{-150}{-6}\rightarrow a^2=25-9\rightarrow a^2=16\rightarrow$$

$\rightarrow a = 4$

Logo, $k \cdot a = 11 \cdot 4 = 44$.

13. E

Se $\{-1, a, b\}$ é o conjunto-solução da equação, das relações de Girard, temos:

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a}\rightarrow -1+a+b=\frac{3}{2}\rightarrow a+b=\frac{5}{2}$$

$$r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3=\frac{c}{a}\rightarrow(-1)\cdot a+(-1)\cdot b+a\cdot b=\frac{3}{2}$$

$$r_1\cdot r_2\cdot r_3=-\frac{d}{a}\rightarrow(-1)\cdot a\cdot b=-\frac{2}{2}=-1\rightarrow a\cdot b=1$$

Então:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^2=a^2+b^2+2\cdot 1$$

$$\frac{25}{4}-2=a^2+b^2\rightarrow a^2+b^2=\frac{17}{4}.$$

14. O polinômio de 5º grau é escrito como $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$,

sendo **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** constantes e $a \neq 0$.

Com base no enunciado, também temos as seguintes relações entre os coeficientes:

$$\frac{b}{a}=-7 \text{ e } \frac{f}{a}=96$$

Chamando de x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as raízes do polinômio e sendo a multiplicidade 3 de uma das raízes, então $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

Aplicando as relações de Girard, obtemos:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-\frac{b}{a}\rightarrow 2+2+2+x_4+x_5=7$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=-\frac{f}{a}\rightarrow 2\cdot 2\cdot 2\cdot x_4\cdot x_5=96$$

Então, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_4+x_5=1 \\ x_4\cdot x_5=-12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, os valores das raízes x_4 e x_5 são -3 e 4. Assim, o valor da menor raiz é -3.

15. D

Do enunciado, temos que $1 + i$ é raíz de $P(x)$. Logo, $1 - i$ também é raiz.

Assim, das relações de Girard, temos que $P(x)$ é divisível por $x^2 - Sx + P$, em que:

$S = (1 + i) + (1 - i) = 2$

$P = (1 + i) \cdot (1 - i) = 1 - i^2 = 2$

Então, $x^2 - 2x + 2$ é divisor de $P(x)$.

16. E

Considerando que a circunferência unitária está centrada na origem, as n raízes complexas de $P(x)$ têm módulo igual a 1.

Chamando as n raízes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, temos, pelas relações de Girard, que seu produto será:

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = (-1)^n \cdot a_0$

Aplicando o módulo a ambos os membros e sabendo que o módulo do produto é igual ao produto dos módulos, temos:

$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |(-1)^n| \cdot |a_0| \rightarrow$

$\rightarrow |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| = 1 \cdot |a_0| \rightarrow$

$\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = |a_0|$

Como $a_0 = 1$ não convém, $a_0 = -1$.

Assim, o produto das raízes é igual a $(-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$.

17. C

Primeiro aplicamos o dispositivo de Briot-Ruffini no polinômio. Logo:

1	1	0	1	a	b
1	1	1	2	a + 2	a + 2 + b
	1	2	4	a + 6	

Podemos montar agora o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+2+b=0 \\ a+6=0 \end{cases}$$, (resolvendo o sistema temos a = –6 e b = 4)

Logo, $a^2 - b^3 = (-6)^2 - 4^3 = -28$.

Estudo para o Enem

18. E

Analisando as alternativas, temos:

a) Para P(2), temos $2^3 - 13 \cdot 2^2 + 52 \cdot 2 - 60 = 0$.

Portanto, T = 0 para t = 2. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	1	–13	52	–60
	1	–11	30	0

Obtemos, assim, $P(t) = (t - 2) \cdot (t^2 - 11t + 30)$. Dessa forma, como as raízes de $t^2 - 11t + 30$ são t = 5 e t = 6, concluímos que T = 0 para $t \in \{2, 5, 6\}$. Portanto, alternativa incorreta.

b) Há diversos fatores que limitam o crescimento de uma população, sendo a predação apenas um deles. Logo, alternativa incorreta.

c) Do teorema de D'Alembert e de acordo com o item **a**, P(2) = 0. Ou seja, alternativa incorreta.

d) Do item **a**, já sabemos que T = 0 para t = 5 e t = 6. Sendo P uma função polinomial, é possível afirmar que o gráfico é decrescente em ao menos algum intervalo entre 2 e 9. Portanto, alternativa incorreta.

e) Conforme o item **a**, alternativa correta.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. B

O montante de um capital C aplicado a uma taxa anual x por um período de n anos é $M = C \cdot (1+x)^n$. Assim, $172\,800 = 100\,000(1 + x)^3 \rightarrow$

$\rightarrow 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1{,}728 \rightarrow$

$\rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 0{,}728 = 0$

Assim, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

0,2	1	3	3	–0,728
	1	3,2	3,64	0

Dessa forma, $f(x) = (x - 0{,}2) \cdot (x^2 + 3{,}2x + 3{,}64)$.

Como $x^2 + 3{,}2x + 3{,}64$ não têm raízes reais. Temos que 0,2 é raiz real da equação; assim, a taxa de juros será de 20%.

A soma das raízes que não são números reais de $x^2 + 3{,}2x + 3{,}64$ pode ser obtida utilizando as relações de Girard. Assim, $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3{,}2}{1} = -3{,}2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

20. C

Do enunciado, temos que cada raiz representa uma medida do paralelepípedo.

Sabemos que o volume de um paralelepípedo retângulo é largura x altura x comprimento. A área é dada por 2 · (soma das áreas de cada par de faces opostas). Assim, das relações de Girard, temos:

Volume $\rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{-30}{3} = 10 \text{ cm}^3$

$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \rightarrow$

$\rightarrow \text{Área} = 2 \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot \frac{36}{3} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm}^2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 2

33 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO I

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo abordamos os conceitos relativos à Geometria espacial de posição. Para tanto, o ponto, a reta e o plano são trabalhados por meio dos muitos postulados da Geometria euclidiana. Também são analisadas as posições relativas de pontos, retas e planos e as respectivas classificações, inclusive as projeções ortogonais de objetos.

Para ir além

A dissertação *Geometria espacial de posição: do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia* é um excelente material sobre o tema do módulo, com abordagem completa sobre Geometria espacial de posição. Disponível em:

<https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10953/OLIVEIRA%2c%20RAFAEL%20GOMES%20DE.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Aplicação da geometria espacial em ambientes diversos" aborda as aplicações dos conhecimentos relativos a essa área, tornando-a mais palpável ao entendimento do aluno. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2455-8.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

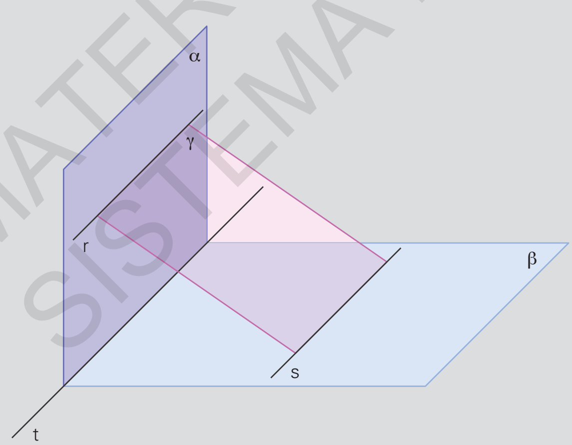
Exercícios propostos

7. A

Como CDEF é um paralelogramo, segue-se que CD II EF.

8. B

Do enunciado, temos:



Façamos r // s.

Dessa forma, é possível construir o plano γ paralelo à reta t.

9. Os itens A, B, C e D são verdadeiros.

a) O item é verdadeiro. De fato, se t é uma reta contida em um dos planos e t $\perp$ r, então não existe um plano que contenha t e s.

b) O item é verdadeiro, pois a reta r é perpendicular a todas as retas contidas em π. Como P pertence a π, qualquer reta perpendicular a r passando por P está contida em π.

c) O item é verdadeiro. Como uma aresta qualquer é comum a duas faces do tetraedro, segue que essa aresta e as outras duas arestas de cada uma das faces a que ela pertence são coplanares. Portanto, segue o resultado.

d) O item é verdadeiro. Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos. Logo, tomando uma reta que tenha a propriedade anterior, basta considerar um plano com todas as retas paralelas a essa reta. A região definida pela interseção do plano com as faces do poliedro é, portanto, convexa.

10. Soma: 04 + 08 = 12.

1. Falso. Tais retas podem ser reversas (não coplanares).

2. Falso. Existe plano que contém os três pontos, porém é necessário ao menos mais um ponto não colinear aos outros para determinação do plano.

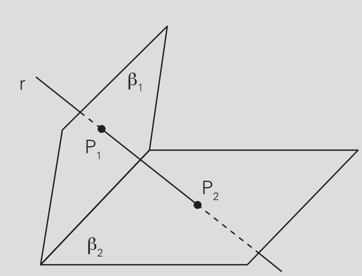
4. Verdadeiro. A interseção de planos pode resultar em reta, plano ou conjunto vazio.

8. Verdadeiro. Existe um plano que contém a reta s e é paralelo à reta r.

16. Falso. A distância medida se dá pelo fato de o comprimento ser uma reta que contenha o ponto P e o ponto Q e ser perpendicular ao plano, onde Q pertença ao plano.

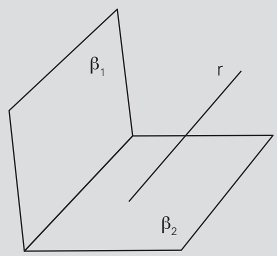
11. I. Falsa. II. Falsa. III. Verdadeira.

I. Considere a figura.



Logo, β_1 e β_2 são secantes.

II. Considere a figura.



Tem-se que β_1 e β_2 são secantes e r é paralela a β_1 e β_2.

III. De fato, se $r \cap \beta_1 \supset \{P_1, P_2\}$, então $r = \overline{P_1P_2}$.

Portanto, $r \cap \beta_1 = r$.

12. Soma: 01 + 04 = 05.

1. Correto, se t é perpendicular a r e paralela a s, então s também é perpendicular a r.

2. Incorretas, pois podem existir retas reversas a r.

4. Correta, porque é possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos (ex.: retas paralelas em faces de planos secantes em um cubo).

8. Incorreta, pois os planos β e γ podem ser secantes entre si.

16. Incorreta, porque as retas podem ser concorrentes.

13. D

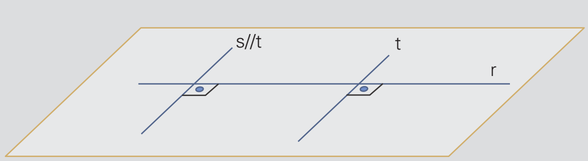
I. Falsa, pois r_1 e r_2 podem ser reversas.

II. Verdadeira, pois dada uma reta $r_1 \subset \alpha$, podemos determinar $r_2 \subset \beta$, com $r_1 // r_2$ por meio da projeção ortogonal de r_1 sobre β.

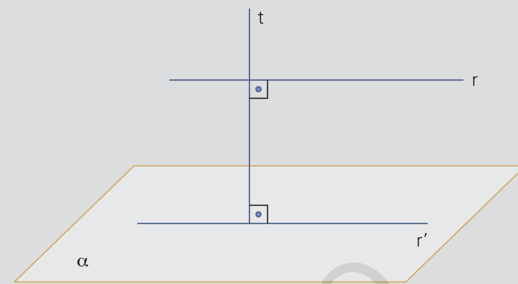
III. Verdadeira.

14. D

A. Falsa. Ela poderá ser perpendicular a duas retas concorrentes desse plano e, neste caso, estar contida no plano.



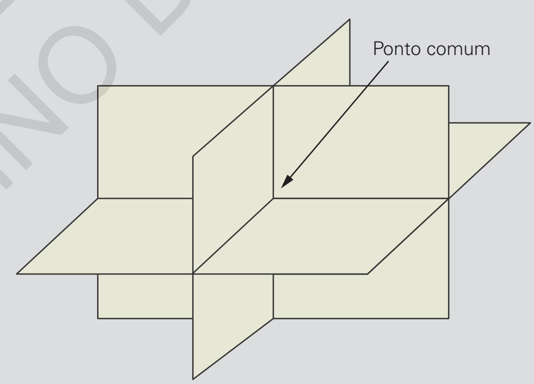
B. Verdadeira. Toda reta é paralela à sua projeção ortogonal em um plano qualquer.



C. Verdadeira, pois formam o mesmo ângulo com o plano.

D. Verdadeira. Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos entre si, pois formam o mesmo ângulo com esse terceiro plano.

E. Verdadeiro. Os três planos dividem o espaço em oito octantes, com apenas um ponto em comum. Cada dois planos tem em comum um única reta, as quais se encontram num único ponto.



15. E

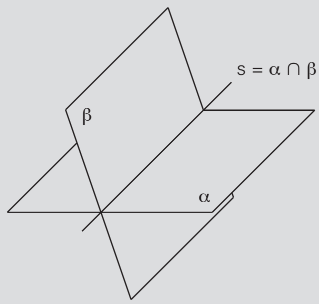
Analisando π_1 e π_3, podemos escrever:

$-4x + 6x - 2z + 2 = -2 \cdot (2x - 3y + z - 1) \rightarrow$
$\rightarrow \pi_1 = \pi_3$

Logo, os planos serão coincidentes. O plano π_2 será concorrente aos outros planos (não há proporcionalidade entre seus coeficientes a, b e c). Logo, não serão nem coincidentes nem paralelos, podendo apenas ser concorrentes.

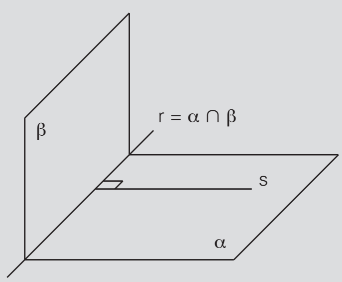
16. Soma: 01 + 02 + 08 = 11.

01) Verdadeira. Considere a figura:

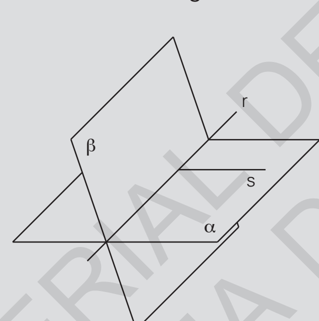


Qualquer reta paralela à reta s que não esteja contida nem em α nem em β será paralela a esses planos.

02) Verdadeira. Considere a figura, em que a reta **s** é perpendicular ao plano β.



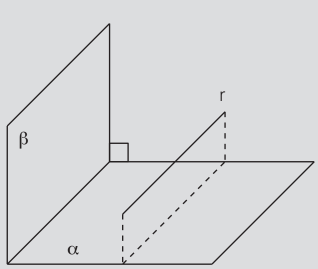
04) Falsa. Considere a figura:



Basta que o ângulo entre os planos α e β não seja reto.

08) Verdadeira. De fato, o resultado é imediato.

16. Falsa. Considere a figura, em que α e β são perpendiculares:



17. As retas $\overleftrightarrow{LB}$ e $\overleftrightarrow{GE}$ são concorrentes. As retas $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{HI}$ são concorrentes. As retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{GK}$ são reversas.

As retas $\overleftrightarrow{LB}$ e $\overleftrightarrow{GE}$ são as retas suporte das diagonais GE e LB. Logo, as retas $\overleftrightarrow{LB}$ e $\overleftrightarrow{GE}$ são concorrentes no ponto de interseção das diagonais do bloco.

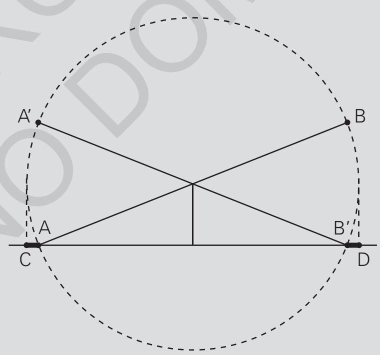
Como as retas $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{HI}$ são coplanares e não paralelas, segue que $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{HI}$ são concorrentes.

Como $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{GK}$ são distintas, não há ponto em comum e não são coplanares, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{GK}$ são reversas.

Estudo para o Enem

18. B

Considere a figura:



De acordo com a figura, a projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B sobre o plano do chão da gangorra corresponde aos segmentos AC e B'D.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. B

Ao final da escada, a pessoa deverá virar para o leste, seguir em frente e, a seguir, deslocar-se rumo ao sul. Ao fim do corredor, tomará a direção oeste. Logo, é uma possível projeção vertical dessa trajetória no plano da base do prédio.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

20. C

A projeção ortogonal sobre o piso da casa, do caminho percorrido pela mão da pessoa, do ponto A até o ponto E, será uma circunferência. Como a projeção desejada é a do ponto A ao ponto D, teremos então aproximadamente $\frac{3}{4}$ da circunferência.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

34 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO II

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo estudamos os poliedros. Abordamos as relações de Euler para superfícies poliédricas aberta e fechada e estudamos os cinco poliedros de Platão.

Para ir além

O material *Descobrindo os poliedros de Platão* aborda desde o contexto histórico até o desenvolvimento matemático dos poliedros de Platão. Disponível em:

<http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/descobrindoospoliedros.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

A dissertação *Teorema de Euler e algumas aplicações* é um bom material com abordagem completa sobre os poliedros. Disponível em:

<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/8607/1/PDF%20-%20Ataiz%20Souza%20Silva.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

No *link* a seguir, é possível acessar um texto sobre o mito da caverna de Platão. Disponível em:

<https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/mito-caverna-platao.htm>

Acesso em: fev. 2019.

Para enriquecer ainda mais as aulas do tema, podem ser sugeridos os vídeos sobre poliedros e relações de Euler. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=n4RtMz5_5bY>

<https://www.youtube.com/watch?v=v_PQnBk-8Mc>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7.

F: número de faces

A: número de arestas

V: número de vértices

$$A = \frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90$$

$F = 32$

$V = 2 + A - F$

$V = 2 + 90 - 32$

$V = 60$

8. C

Sabendo que o poliedro tem 32 vértices, concluímos que $V = 32$. Por conseguinte, sendo F e A, respectivamente, o número de faces e o número de arestas, pelo teorema de Euler temos:

$V + F = A + 2$

$32 + F = A + 2$

$F = A - 30$

Então, como o poliedro tem apenas faces triangulares, $3F = 2A$. Portanto:

$3 \cdot (A - 30) = 2A$

$A = 90$

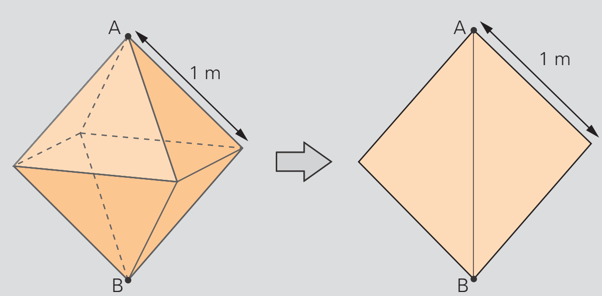
9. B

O prisma hexagonal regular tem 12 vértices e 8 faces. Acrescentando-se uma nova face em cada vértice, teremos um total de $8 + 12 = 20$ faces.

10. A

A alternativa A é a única que apresenta a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica. As alternativas C e D apresentam assertivas corretas, porém não justificam esse fato.

11. Se o poliedro dado é regular e suas arestas medem 1 metro, então a distância entre o ponto A e B é igual à diagonal do quadrado imaginário interno ao octaedro de lado igual a 1 formado na divisão vertical deste ao meio. Assim, se tal quadrado tem lado igual a 1, sua diagonal será igual a $\sqrt{2}$.



12. Soma: $02 + 08 = 10$

01. Incorreto. Pela relação de Euler, temos:

$V + F = A + 2$

$12 + 15 = A + 2$

$A = 25$

02. Correto. Sendo F_3 e F_4, respectivamente, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares, temos $3F_3 + 4F_4 = 2A$ e $F_3 + F_4 = 15$. Portanto, como $A = 25$, segue que $F_3 = 10$ e $F_4 = 5$, o que implica em $F_4 = \frac{F}{2}$.

04. Incorreto. Sabendo que em cada ângulo tetraédrico concorrem 4 arestas e que em cada ângulo pentaédrico concorrem 5 arestas, temos $4T + 5P = 2A$ e $T + P = 12$ (sendo T e P, respectivamente, o número de ângulos tetraédricos e o número de ângulos pentaédricos). Desse modo, obtemos:

$T = 10$ e $P = 2$. Agora é fácil ver que $T = 5P$.

08. Correto. Lembrando que a soma dos ângulos internos das faces é igual a $(v - 2) \cdot 4r$, com v sendo o número de vértices do poliedro e $r = 90°$, temos $(12 - 2) \cdot 4r = 40r$.

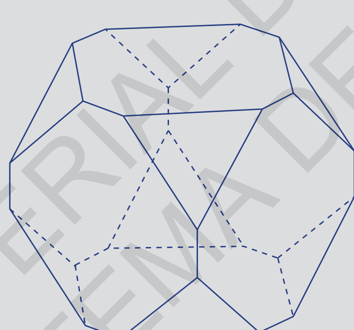
16. Incorreto. Do item 04, sabemos que o número de ângulos tetraédricos é igual a 10.

13. C

O octaedro tem 6 vértices. Ao retirarmos uma pirâmide regular de base quadrangular de cada vértice do octaedro, obtemos um octaedro truncado com $6 \cdot 4 = 24$ vértices. Portanto, a resposta será $360° \cdot (24 - 2) = 7920°$.

14. Soma: 01 + 02 + 04 = 07

01. Correto. Considere a figura.



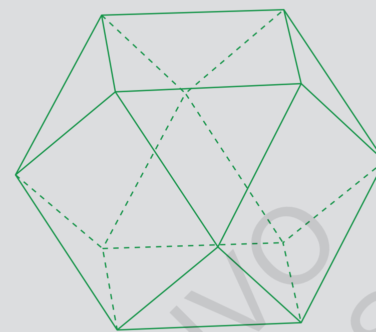
Retirando-se uma pirâmide de base triangular de cada um dos vértices do cubo, de tal modo que $a < 5$ cm, obtemos um poliedro com 6 faces octogonais e 8 faces triangulares. Portanto, o poliedro obtido apresenta 6 + 8 = 14 faces.

02. Correto. Se A é o número de arestas do poliedro, então $2A = 6 \cdot 8 + 8 \cdot 3$. Logo, $A = 36$.

04. Correto. De (1) e (2), sabemos que $F = 14$ e $A = 36$. Logo, da relação de Euler, temos $V + F = A + 2$.

Logo, $V = 36 + 2 - 14 = 24$, sendo V o número de vértices do poliedro.

08. Incorreto. Considere a figura.



Retirando-se uma pirâmide de base triangular de cada um dos vértices do cubo, de tal modo que $a = 5$ cm, obtemos um poliedro com 6 faces quadrangulares e 8 faces triangulares. Portanto, o poliedro obtido apresenta 6 + 8 = 14 faces. Além disso, se A é o número de arestas do poliedro:

$2A = 6 \cdot 4 + 8 \cdot 3$

$A = 24 \neq 30$

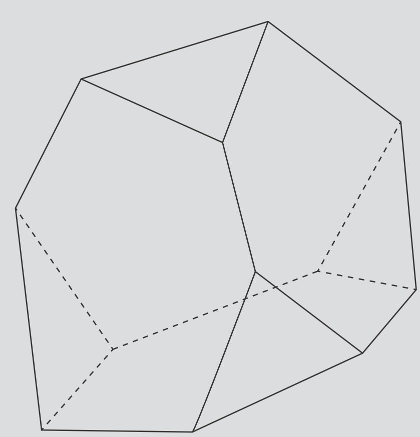
16. Incorreto. De (08) e da relação de Euler, temos:

$V + F = A + 2$

$V = 24 + 2 - 14$

$12 \neq 16$

15. D

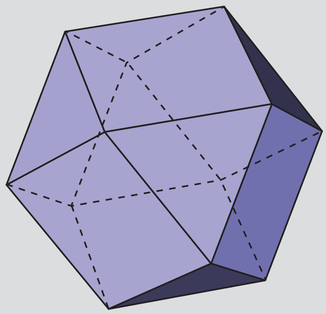


O sólido resultante da divisão proposta pelo problema será formado por 4 faces hexagonais e 4 faces triangulares. Sabendo que cada aresta mede 2 cm, o número de arestas será dado por:

$$A = \frac{4 \cdot 6 + 4 \cdot 3}{2} = 18$$

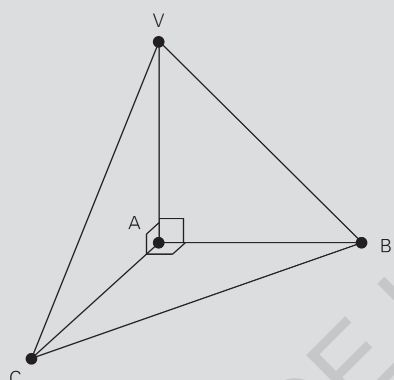
A soma das medidas de todas as arestas será $18 \cdot 2 = 36$ cm.

16. a) Após os cortes, o poliedro obtido será este:



Ele apresenta 6 faces quadrangulares e 8 faces triangulares, totalizando 14 faces.

b) Considere um dos tetraedros retirados do cubo.



Sendo **a** a medida da aresta do cubo, temos $\overline{VA} = \overline{AB} = \overline{AC} = \frac{a}{2}$. Logo, o volume do tetraedro é dado por:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} \cdot \overline{VA}$$

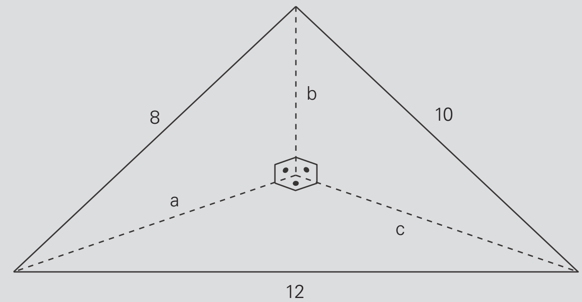
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

$$\frac{a^3}{48}$$

Portanto, como o volume do cubo é a^3, o volume de cada tetraedro corresponde a $\frac{1}{48}$ do volume do cubo.

17. A

Pode-se desenhar o tetraedro do enunciado conforme a figura:



Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ c^2 + b^2 = 10^2 \\ a^2 + c^2 = 12^2 \end{cases}$$

Isolando **a** na primeira equação, temos $a^2 = 64 - b^2$. Substituindo essa expressão na terceira equação e fazendo um sistema com a segunda equação:

$144 = 64 - b^2 + c^2$

$80 = c^2 - b^2$

$$\begin{cases} 80 = c^2 - b^2 \\ 100 = c^2 + b^2 \end{cases}$$

$2c^2 = 180$

$c^2 = 90$

$c = \sqrt{90}$

$c = 3\sqrt{10}$

Substituindo o valor de c^2 na equação $80 = c^2 - b^2$, podemos encontrar o valor de **b**:

$80 = c^2 - b^2$

$80 = 90 - b^2$

$b^2 = 10$

$b = \sqrt{10}$

Analogamente, substituindo o valor de a^2 na equação $a^2 = 64 - b^2$, encontramos o valor de b:

$a^2 = 64 - b^2$

$a^2 = 64 - 10$

$a^2 = 54$

$a = \sqrt{54}$

$a = 3\sqrt{6}$

Assim, os valores das arestas que chegam em V serão $3\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

Estudo para o Enem

18. B

Sendo $V = 20$ e $A = 30$, pelo teorema de Euler:

$V - A + F = 2$

$20 - 30 + F = 2$

$F = 12$

Portanto, a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é 12.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. C

Poliedro de faces triangulares:

$\frac{3F}{2} = A$

$V - A + F = 2$

$V - \frac{3F}{2} + F = 2$

$V - \frac{F}{2} = 2$

$2V - F = 4$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. A

Uma pirâmide quadrangular tem 5 faces, 8 arestas e 5 vértices. Após os cortes, tais quantidades serão acrescidas em 4, 12 e 8 unidades, respectivamente.

Portanto, a joia ficará com 9 faces, 20 arestas e 13 vértices.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

35 PRISMAS I

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo continuamos os estudos sobre os sólidos geométricos. Desta vez abordamos os prismas e as respectivas nomenclaturas e classificações. Calculamos a medida da diagonal, da área e do volume de um paralelepípedo e finalizamos o módulo com a análise de um tipo específico de prisma: o cubo.

Para ir além

Este é um bom material que apresenta de maneira dinâmica os sólidos geométricos, citando vários exemplos de como construí-los. Disponível em:

<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/16565/solidosgeometricos%20-%20home.htm?sequence=33>

Acesso em: fev. 2019.

Este material aborda o ensino de Geometria espacial de maneira lúdica, usando jogos como ferramenta para o estudo do tema. Disponível em:

<http://porteiras.s.unipampa.edu.br/pibid/files/2016/11/Jogos-como-ferramentas-no-ensino-da-geometria-espacial-1.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. O volume que será escoado é de:

$V = 7 \cdot 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}8\ m^3 = 2\,800\ dm^3 = 2\,800$ litros.

Logo, a vazão pelo ralo será $\frac{2800}{20} = 140$ min $=$ $= 2h20min$.

8. C

Volume da embalagem:

$V = a \cdot b \cdot c = 10 \cdot 20 \cdot 10 = 2\,000\ cm^3$

O volume da mistura sabor morango (v) que será acondicionada na embalagem será:

$1{,}25 \cdot (1\,000 + v) \leq 2\,000$

$1\,250 + 1{,}25v \leq 2\,000$

$1{,}25v \leq 750$

$v \leq 600\ cm^3$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos

9. A

Do proposto, $a^3 = 24$.

Sendo V o volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$, obtemos:

$$V = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$$

Como $a^3 = 24$ e $V = \frac{a^3}{27}$, obtemos:

$$V = \frac{24}{27} \rightarrow V = \frac{8}{9}$$

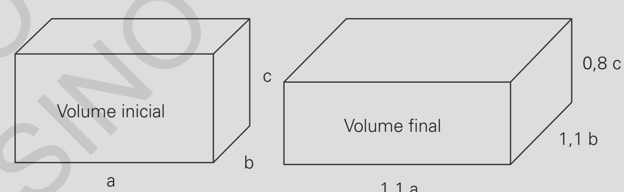
10. E

Volume individual de cada cubo em $m^3 = V =$ $= (0{,}3)^3 = 0{,}027\ m^3$.

Número total de cubos existentes na figura $4 \cdot 4 +$ $+ 9 + 4 + 3 = 32$.

Volume total: $32 \cdot 0{,}027 = 0{,}864\ m^3$.

11. C



$V_{(inicial)} = a \cdot b \cdot c$

$V_{(final)} = 1{,}1a \cdot 1{,}1b \cdot 0{,}8c = 0{,}968 \cdot abc$

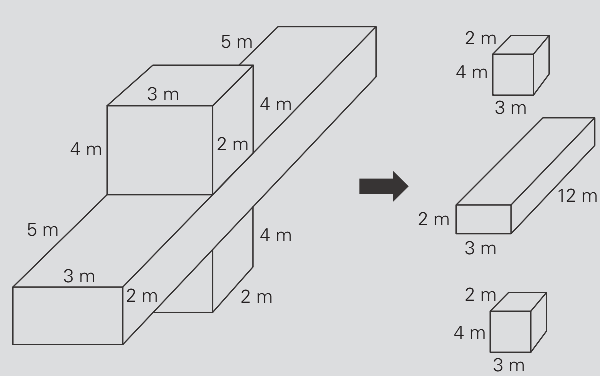
$V_{(final)} = 0{,}968 \cdot V_{(inicial)}$

$V_{(final)} - V_{(inicial)} = -\,0{,}032 \cdot V_{(inicial)}$.

Sendo assim, haverá uma redução de aproximadamente 3%.

12.

Sólido que será retirado.



O volume V do sólido excedente será fornecido pelos volumes do sólido inicial $V_{(i)}$ e do sólido retirado $V_{(r)}$:

$V = V_{(i)} - V_{(r)}$

$V = 8 \cdot 10 \cdot 12 - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 12 - 2 \cdot 3 \cdot 4$

$V = 960 - 24 - 72 - 24$

$V = 960 - 120$

$V = 840 \text{ m}^3$

Para calcular a área total, consideramos algumas etapas:

- Extensão das faces externas paralelas à face A: $A_1 = 2 \cdot (8 \cdot 10 - 2 \cdot 3) = 148 \text{ m}^2$.
- Extensão das faces internas paralelas à face A: $A_2 = 4 \cdot (4 \cdot 3) = 48 \text{ m}^2$.
- Extensão das faces externas paralelas à face B: $A_3 = 2 \cdot (12 \cdot 8 - 2 \cdot 3) = 180 \text{ m}^2$.
- Extensão das faces internas paralelas à face B: $A_4 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ m}^2$.
- Extensão das faces externas paralelas à face C: $A_5 = 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240 \text{ m}^2$.
- Extensão das faces internas paralelas à face C: $A_6 = 2 \cdot (2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 5) = 80 \text{ m}^2$.

Assim, a área total será obtida por:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 148 + 48 +$
$+ 180 + 60 + 240 + 80$

$\therefore A = 756 \text{ m}^2$.

13. C

A dimensão da aresta de cada cubinho, em centímetros, equivale ao máximo divisor comum das dimensões do bloco.

Portanto, MDC (18; 24; 30) = MDC $(2 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 3; 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2 \cdot 3 = 6$.

Logo, $6^3 = 216 \text{ cm}^3$.

14. B

$V = a \cdot b \cdot c$

$ab = 2$

$bc = 3$

$ac = 4$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow (a \cdot b \cdot c)^2 =$
$= 24$

$V = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}^3$

15. B

Dimensão da aresta do cubo maior: $x + 4$.

Dimensão da aresta do cubo menor: x.

Sendo que a diferença entre os volumes é de 208 cm^3, obtemos:

$(x + 4)^3 - x^3 = 208$

$x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - x^3 = 208$

$12x^2 + 48x - 144 = 0$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

Solucionando a equação, obtemos:

$x = -6$ ou $x = 2$

Portanto, a aresta do cubo maior é 6 cm.

Analisando a área lateral do cubo, temos:

$A_L = 4 \cdot 6^2 = 144 \text{ cm}^2$.

16. B

O nível da água está em 60% = 0,60.

O nível da água, com o objeto imerso, subiu para $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Logo, podemos calcular ao volume de água deslocado:

$V = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (0{,}75 - 0{,}60) = 1{,}5 \text{ m}^3$

$\therefore V = 1\,500$ litros.

17. a) Pelos dados do enunciado, obtemos:

$S_1 = S_2 + S_3$

$a^3 = a^2 \cdot b + a \cdot b^2$

Desenvolvendo essa equação, temos:

$a^3 - a^2b - ab^2 = 0 \rightarrow a \cdot (a^2 - ab - b^2) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$

Dividindo a equação por b, obtemos:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{a^2}{b} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Como $r = \frac{a}{b}$:

$\frac{a^2}{b} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \rightarrow r^2 - r - 1 = 0$

Resolvendo a equação:

$r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (não convém, $r > 0$)

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) \rightarrow \Delta = 5 \rightarrow r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Como a soma das medidas de todas as arestas dos três sólidos é igual a 60, temos:

$12a + 8a + 4b + 8b + 4a = 60 \rightarrow 24a + 12b = = 60 \rightarrow 2a + b = 5$

A soma das áreas dos três sólidos pode ser representada por:

$A_T = 6a^2 + 2a^2 + 4ab + 2b^2 + 4ab = 8a^2 + 8ab + + 2b^2 = 2 \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) \rightarrow A_T = 2 \cdot (2a + b)^2$

Porém, $2a + b = 5$. Assim, $A_T = 2 \cdot (5)^2 \rightarrow A_T = 50$ cm^2.

Estudo para o Enem

18. C

Somadas as diferenças de cada uma das dimensões das caixas, temos:

Caixa 1 $\rightarrow (86 - 80) + (86 - 80) + (86 - 80) = 18$

Caixa 2 $\rightarrow$ não cabe $\rightarrow 75 < 80$

Caixa 3 $\rightarrow (85 - 80) + (82 - 80) + (90 - 80) = 17$

Caixa 4 $\rightarrow (82 - 80) + (95 - 80) + (82 - 80) = 19$

Caixa 5 $\rightarrow (80 - 80) + (95 - 80) + (85 - 80) = 20$

Logo, concluímos que a caixa selecionada será a de número 3.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. B

Calculando:

$V = 3 \cdot 5 \cdot (1{,}7 - 0{,}5) = 18$ m^3 = 18 000 litros

Para cada 1 000 litros de água de piscina, deve ser colocado 1,5 mL do produto. Logo, para 18 000 litros:

$V_{produto} = 18 \cdot 1{,}5 = 27$ mL.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

Se L for a medida da aresta da parte cúbica do topo, a medida da aresta da parte cúbica inferior é 2L. Podemos, então, calcular o volume total do depósito:

$V = (2L)^3 + (L)^3 = 8L^3 + L^3 = 9L^3$

A parte inferior mede $8L^3$. Levam 8 min para que metade desse volume ($4L^3$) seja preenchido.

O volume que falta ser preenchido corresponde a $9L^3 - 4L^3 = 5L^3$.

Logo, fazendo a proporção, temos:

Tempo $= 8 \cdot \frac{5L^3}{4L^3} = 10 \therefore$ Levará 10 min.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

36 PRISMAS II

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo continuamos a estudar os sólidos geométricos, abordando os prismas e o princípio de Cavalieri.

Para ir além

A proposta a seguir é um interessante material que aborda a construção de sólidos diversos com base em prismas regulares.

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_utfpr_mat_pdp_jaime_nunes.pdf>
Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Trabalhando com prismas e suas diferentes esferas de prática: uma proposta para o ensino médio" apresenta conteúdo teórico de experiências envolvendo a construção de sólidos.

<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1372/421>
Acesso em: fev. 2019.

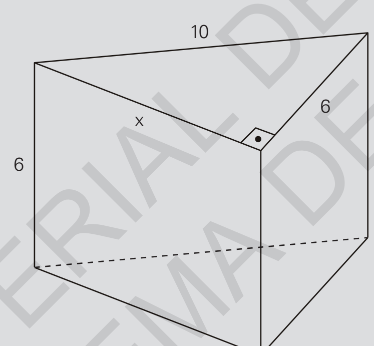
Exercícios propostos

7. E

Sabendo que $(12 - 2x) \cdot x = 18\ m^2$, temos:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3\ m$

8. A



O sólido formado será um prisma de base triangular.

Indicando o valor de x, temos:

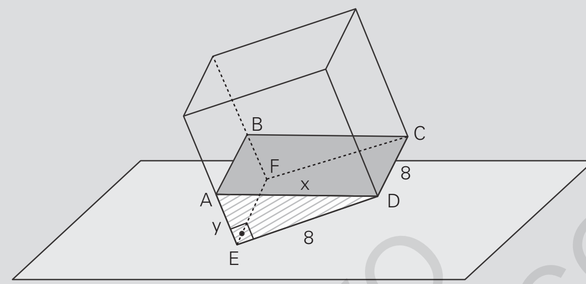
$x^2 + 62 = 102$

$x = 8$

Portanto, o volume V do sólido será dado por:

$$V = B \cdot h = \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 144$$

9.



No retângulo ABCD:

$8x = 32\sqrt{5}$

$x = 4\sqrt{5}$ dm

No triângulo AED:

$\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 82 + y^2$

$y^2 = 16$

$y = 4$

Sendo assim, o volume do prisma (líquido) será obtido por:

$$V = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{2} = 128\ dm^3$$

10. D

Obteremos o volume total da peça por:

$V_{peça} = B \cdot h$

A área da base B corresponde a:

$B = B_{hex.maior} - B_{hex.menor}$

Podemos calcular a área de cada hexágono regular, maior e menor:

$$B_{hex.reg} = \frac{6 \cdot L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$B_{hex.maior} = \frac{6 \cdot 8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow B_{hex.maior} = \frac{6 \cdot 64 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow$$
$$\rightarrow B_{hex.maior} = 96\sqrt{3}$$

$$B_{hex.menor} = \frac{6 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow B_{hex.menor} = \frac{6 \cdot 36 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow$$
$$\rightarrow B_{hex.menor} = 54\sqrt{3}$$

Portanto, a área B da base se apresenta:

$B_{base} = B_{hex.menor} - B_{hex.maior}$

$B_{base} = 96\sqrt{3} - 54\sqrt{3}$

$B_{base} = 42\sqrt{3}$

Assim, podemos calcular o volume total da peça, em cm^3:

$V_{peça} = B_{base} \cdot h$

$V_{peça} = 42\sqrt{3} \cdot 35$

$V_{peça} = 2\,499\ cm^3$

11. Soma: 01 + 02 = 03

01. Verdadeira, pois $\dfrac{\dfrac{a_A^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{3a_B^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2a_B}{a_B}\right) = \dfrac{2}{3}$.

02. Verdadeira, pois

$V_B = \dfrac{3a_B^2\sqrt{3}}{2} \cdot h_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\dfrac{a_A}{2}\right) \cdot 2 \cdot 2h_A =$

$= 3 \cdot \dfrac{\ell_A^2\sqrt{3}}{2} \cdot h_A = 3 \cdot V_A$.

04. Falsa. De acordo com 02.

08. Falsa, pois $Aa_B = 6\ell_B \cdot h_B = 6 \cdot \dfrac{a_a}{2} \cdot h_A =$
$= 3a_A \cdot h_a = Aa_A$.

Assim, verificamos que as áreas laterais são iguais.

12. a) Seja l a dimensão da aresta de todos os 24 cubos. AB é diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões l, 2l e 3l. Então:
$l^2 + l(2l)^2 + (3l)^2 = (2\sqrt{7})^2 \leftrightarrow 14l^2 = 4 \cdot 7 \rightarrow l = \sqrt{2}$ cm

Portanto, o volume do sólido corresponde a $24 \cdot (\sqrt{2})^3 = 48\sqrt{2}\ cm^3$.

b) Similar ao item (a), CD é a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de medidas 8 cm, 10 cm e 14 cm. Logo:

$\overline{CD}^2 = 8^2 + 10^2 + 14^2 \rightarrow \overline{CD} = \sqrt{360} \rightarrow \overline{CD} = 6\sqrt{10}$ cm

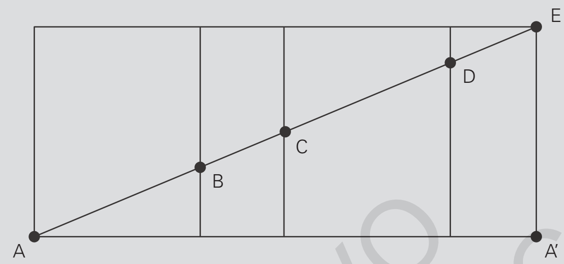
13. D
A área total do paralelepípedo é obtida por:

$2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 38\ m^2$

Após o reparte, foram inseridas duas faces retangulares de dimensões 5 m e 1 m. Assim, a adição na área externa foi de $2 \cdot 5 \cdot 1 = 10\ m^2$.

Logo, temos: $\dfrac{10}{38} \cdot 100\% \cong 26\%$.

14. B
Analisando a planificação da superfície lateral do paralelepípedo, em que está indicado o comprimento mínimo AE da corda, temos:



$\overline{AA'} = 12$ e $\overline{A'E} = 5$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AE}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'E}^2 \rightarrow \overline{AE}^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow \overline{AE} = 13$

15. D
O volume V da piscina em metros cúbicos, com $0 < k < \dfrac{15}{2}$, será obtido por:
$V = (18 - 2k) \cdot (15 - 2k) \cdot 0{,}4 + \dfrac{1}{2} \cdot (18 - 2k) \cdot 1{,}2 \cdot$
$\cdot (15 - 2k) = 4k^2 - 66k + 270$

Assim, o valor de k para o qual $v = 18\ m^3$ é:
$4k^2 - 66k + 270 = 18 \leftrightarrow 2k^2 - 33k + 126 = 0 \rightarrow k = 6$ m

16. a) Pelo teorema de Pitágoras:
$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 \rightarrow \overline{AE}^2 = 5^2 + 15^2 \rightarrow \overline{AE}^2 = 5\sqrt{10}$ m

Sendo G' a projeção ortogonal de G sobre a face ABCD, temos:

$\text{tg } G'AG = \dfrac{\overline{G'G}}{\overline{AG'}} \leftrightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{\overline{AG'}} \leftrightarrow \overline{AG'} = 20$ m.

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, encontramos:

$\overline{DG}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AD}^2 \rightarrow \overline{DG}^2 = 20^2 - 15^2 \rightarrow \overline{DG}^2 =$
$= 5\sqrt{7}$ m

Assim, $\overline{EG} = \overline{DG'} = 5\sqrt{7}$ m.

b) Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 20^2 + 15^2 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC} = 25$ m.

Assim, a tangente do ângulo de inclinação de AF é $\dfrac{5}{25} = 0{,}2$, a qual, pela tabela, resulta em um ângulo próximo de 11,3°. No entanto, a tangente do ângulo de inclinação de AE é $\frac{5}{15} = 0{,}3$. Isso vai resultar em um ângulo de aproximadamente 18,4°.

Portanto, a resposta é 18,4° − 11,3° = 7,1°.

17. C

Relacionando o novo volume com o volume antigo, obtemos:

$V_{antigo} = a \cdot b \cdot h$

$V_{novo} = (h + k) \cdot ak \cdot bk = habk^2 + abk^3 = ab \cdot (hk^2 + k^3)$

$V_{novo} = \frac{V_{antigo}}{h} \cdot (hk^2 + k^3) \rightarrow V_{novo} = V_{antigo} \cdot \left(k^2 + \frac{k^3}{h}\right)$

Estudo para o Enem

18. E

A figura tem faces em forma de paralelogramos e duas faces triangulares paralelas. Logo, trata-se de um prisma triangular reto.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. A

Como h = 2 m, segue-se que b = 6 − 2 · 0,5 = 5 m.

Logo, o volume total do silo é de $2 \cdot \left(\frac{6+5}{2}\right) \cdot 20 = 220$ m³.

Assim, sabendo que 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³, concluímos que o valor solicitado será $\frac{220}{2} = 110$ toneladas.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. E

Dando início à planificação pela face ABFE e analisando as coincidências entre as arestas, a planificação correta é a da alternativa E.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

37 PIRÂMIDES

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo estudamos um novo poliedro: a pirâmide, com os respectivos elementos, nomenclatura e classificação. Além disso, estudamos de que forma calcular a área total, a área lateral e o volume. Também abordamos alguns sólidos especiais como o tetraedro regular, o octaedro regular e o tetraedro trirretangular.

Para ir além

O artigo "Estudo de sólidos geométricos com o uso de recursos digitais e concretos" é um bom material que aborda maneiras diversificadas de ensinar Geometria espacial e mostra um trabalho de pesquisa aplicado sobre o tema. Disponível em:

<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134158/000984802.pdf?sequence=1>
Acesso em: fev. 2019.

O artigo "A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos" apresenta a Geometria espacial com base na investigação, construção e análise dos sólidos propostos. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/832-4.pdf>
Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Desde que a medida da altura de um triângulo retângulo isósceles corresponda à metade da medida da hipotenusa, o resultado é:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot 10 = 30\ m^3$$

8. B

Sendo h a medida da altura do tetraedro regular, temos:

$$h = \frac{3\sqrt{6}}{3}\ m$$

$$h = \sqrt{6}\ m$$

9. Precisamos calcular o perímetro. Ele é obtido somando todos os lados. Assim:

Perímetro: AB + BC + CD + AD + AE + BE + + CE + DE +BF +AF + DF + CF

Portanto, 10 + 11 + 12 + 11 + 12 + 12 + 11+ + 12 + 11 + 10 + 12 +10 = 134 cm.

Será necessário um comprimento mínimo de 134 cm de arame.

10. B

Desde que as faces laterais sejam triângulos equiláteros de lado q, o apótema da pirâmide mede $\frac{q\sqrt{3}}{2}$.

Logo, a medida do apótema da base é igual a $\frac{q}{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, a altura da pirâmide mede $\frac{q\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $\frac{1}{3}\cdot q^2\cdot\frac{q\sqrt{2}}{2} = \frac{q^3\sqrt{2}}{6}$.

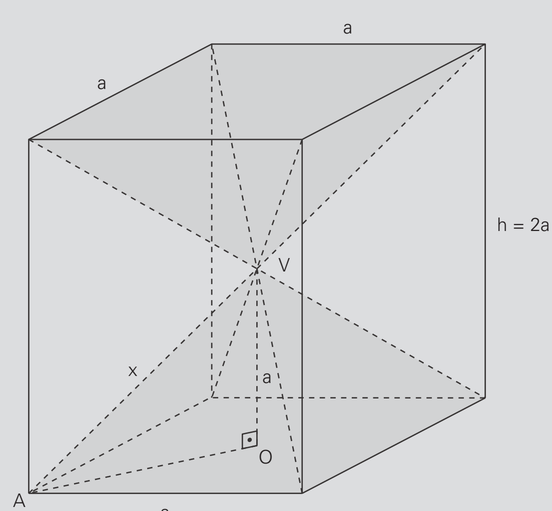
11. C

Sejam r, l_3 e l_6, respectivamente, o raio do círculo circunscrito à base do prisma, a medida da aresta da base da pirâmide e a medida da aresta da base do prisma. Portanto, sabendo que $r = l_6 = \frac{l_3\sqrt{3}}{3}$ e os que volumes são iguais:

$$\frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}\cdot l_6 = \frac{1}{3}\cdot\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}\cdot 12 \leftrightarrow \frac{3l_6^3}{2} = \left(l_6\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow l_6 = 2\ cm$$

12. Soma: 04 + 16 = 20

De acordo com as informações do problema, temos a seguinte figura:



01) Falsa. As faces laterais do prisma e da pirâmide se encontram em uma das arestas da base da figura.

02) Falsa. Admitindo x a medida da aresta lateral da pirâmide e o triângulo AOV na figura acima, temos:

$x^2 = AO^2 + VO^2$

$$x^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 6}{4}}$$

$$x = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{2} \text{ e } \frac{a \cdot \sqrt{6}}{2} < 2a$$

04) Verdadeira, pois $h = 2a$.

08) Falsa. A soma dos volumes das pirâmides será dada por:

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a \text{ (um terço do volume do prisma)}$$

16) Verdadeira. Retirando-se as pirâmides citadas no problema, obtemos quatro pirâmides cujas bases são as faces laterais do prisma.

13. Sendo x a medida de uma das arestas do tetraedro regular, temos:

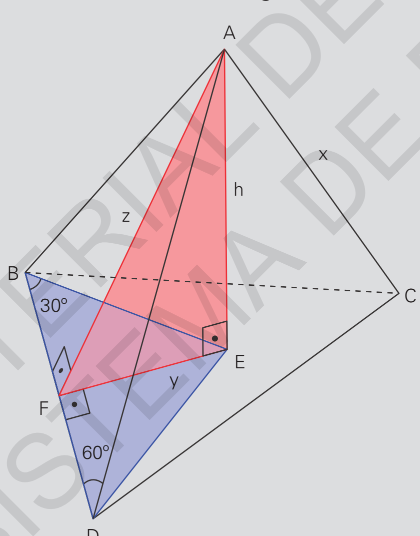
$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \operatorname{sen} 60° = 48\sqrt{3}$$

$$2x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$$

$x^2 = 48$

Como $x > 0$, $x = 4\sqrt{3}$ cm.

Observe este tetraedro regular:



No triângulo EBF:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{y}{BF}$$

Mas $BF = 2\sqrt{3}$. Logo:

$$y = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$y = 2$

No triângulo AFD:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{z}{AD}$$

Mas $AD = 4\sqrt{3}$. Logo:

$$z = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$z = 6$

No triângulo AFE:

$z^2 = y^2 + h^2$

$6^2 = 2^2 + h^2$

$h^2 = 32$

Como $h > 0$:

$h = 4\sqrt{2}$ cm

14. B

Seja ℓ a medida da aresta do tetraedro. Como faces do tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, $\overline{DM} = \overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Portanto, aplicando a lei dos cossenos no triângulo AMD:

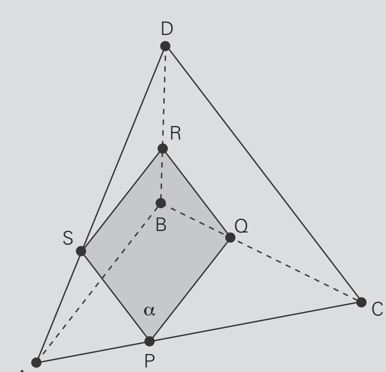
$$\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{DM} \cdot \cos A\hat{M}D$$

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \cos A\hat{M}D$$

$$\frac{3\ell^2}{2} \cdot \cos A\hat{M}D = \frac{\ell^2}{2}$$

$$\cos A\hat{M}D = \frac{1}{3}$$

15. A



Sejam Q, R e S, respectivamente, as interseções de α com as arestas BC, BD e AD. Desde que α seja paralelo à aresta AB, temos SR e PQ paralelos a AB. Analogamente, concluímos que PS e QR são paralelos a CD. Ademais, sabendo que arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais, o quadrilátero PQRS é um retângulo.

Sendo ABCD regular, os triângulos APS e CQP são equiláteros. Portanto, a área pedida é igual a $3 \cdot 7 = 21\ m^2$.

16. E

Sabendo que ABCDEFGH é paralelepípedo reto, $\overline{EF} = \overline{AB}$ e $\overline{EH} = \overline{AD}$.

Portanto, o resultado pedido é dado por:

$$[SABCD] + [ABCDHEFG] = \frac{4}{3} \cdot [SEFGHI] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \overline{SA} + \overline{AE} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\overline{AE} + \overline{SA}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 3 \cdot \overline{SA} + 9 \cdot 2 = 4 \cdot \left(2 + \overline{SA}\right) \leftrightarrow \overline{SA} = 10\ \text{cm}.$$

17. Temos que HE, HI, GI e EG são, respectivamente, as bases médias dos triângulos ABD, BCD, ACD e ABC. Logo, $\overline{HE} = \overline{HI} = \overline{GI} = \overline{EG} = 3\ \text{cm}$.

Ademais, como DIFH e AEFG são losangos congruentes:

$$\overline{HF} = \overline{FI} = \overline{EF} = \overline{FG} = 3\ \text{cm}.$$

Portanto, sendo AD e BC ortogonais, podemos concluir que as faces laterais da pirâmide FEHIG são triângulos equiláteros e que sua base é um quadrado.

a) É imediato que:

$$(EFH) = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$$

b) Conforme mostramos acima, EGIH é um quadrado. Portanto:

$(EGIH) = 3^2 = 9\ \text{cm}^2$

c) Se O é a projeção ortogonal de F sobre o plano que contém a base EGIH, o raio do círculo circunscrito é $\overline{OE} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{FO}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{FE}^2 \leftrightarrow \overline{FO}^2 = 3^2 - \frac{2\sqrt{2}}{2} \rightarrow \overline{FO} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}.$$

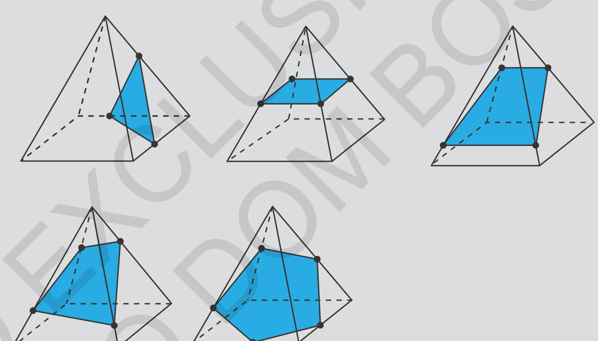
A resposta é:

$$\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}^3.$$

Estudo para o Enem

18. E

Supondo que quadriláteros irregulares e trapézios sejam polígonos distintos, as possibilidades são: triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, conforme as figuras.

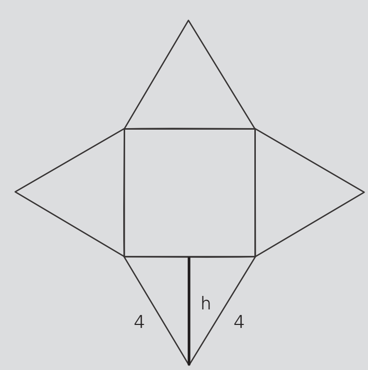


Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

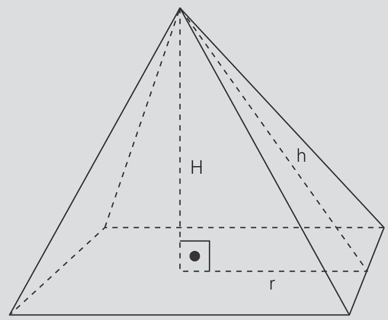
19. D

Observe a figura:



$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Observe a figura:



$$h^2 = H^2 + r^2 \rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = H^2 + (2)^2 \rightarrow H = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Portanto:

$$V = \frac{l^2 \cdot H}{3} \rightarrow V = \frac{(4)^2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{32}{3}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

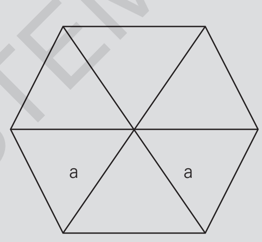
Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. A

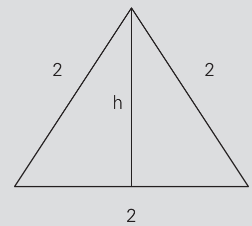
Devemos resolver esse problema em duas partes. Na primeira vamos calcular a área da base. Na segunda, vamos calcular o volume da pirâmide.

Parte 1

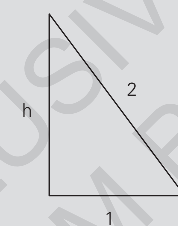
Sendo que a base da pirâmide é um hexágono regular, este hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros de lado a. Sua área (área da base) será a soma das áreas desses triângulos (ver figura abaixo). Para obtermos a área da base, basta calcular a área de um dos triângulos e multiplicá-la por seis.



Sendo assim, analisando apenas um triângulo, temos:



Sendo a área do triângulo $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$, em que b é base e h é altura do triângulo equilátero, podemos obter a altura aplicando o teorema de Pitágoras em metade do triângulo:



$hip^2 = cat^2 + cat^2$

$2^2 = h^2 + 1^2$

$h^2 = 4 - 1$

$h = \sqrt{3}\ \text{m}$

Dessa forma, a área do triângulo será dada por:

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{m}^2$$

A área da base da pirâmide será dada por: $A_b = 6 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}^2$.

Parte 2

Sendo que o volume é dado pelo produto da área da base pela altura da pirâmide $\left(h_p\right)$,temos:

$$\text{Volume}: \frac{A_b \cdot h_p}{3} = \frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{3} = 6 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}^3$$

Logo, área da base = $6 \cdot \sqrt{3}\text{m}^2$ e volume = $6 \cdot \sqrt{3}\ \text{m}^2$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

38 CILINDROS

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo estudamos os cilindros. Além de abordar os elementos desses sólidos, vimos as classificações e os procedimentos para calcular a área lateral, a área total e o volume de cilindros. O cilindro equilátero e suas particularidades também são analisados, em seção à parte.

Para ir além

O artigo *Arquimedes, a esfera e o cilindro* é um excelente material que aborda os conceitos históricos e os feitos geométricos do matemático grego. Disponível em:

<https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

A dissertação "Um estudo sobre a interseção de cilindros e outros sólidos relacionados" aborda desde o contexto histórico do estudo dos cilindros até as definições teóricas de área e volume no sólido de revolução. Disponível em:

<http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306526/1/Abreu_FabioAugustode_M.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. E

A resposta é obtida por:

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 \cong 3{,}14 \cdot 63 \cong 198 \text{ cm}^3$

8. D

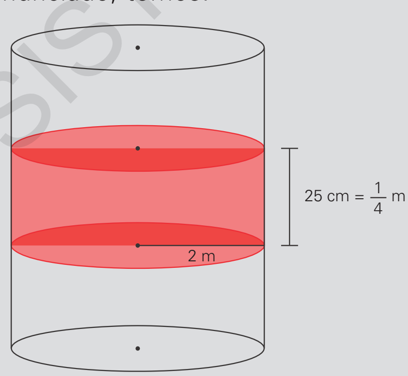
O volume do tanque é obtido por:

$V = \pi \cdot \left(\frac{0{,}6}{2}\right)^2 \cdot 1{,}5 \cong 0{,}405 \text{ m}^3 = 405 \text{ L}.$

Consequentemente, como o caminhão consumiu $\frac{3}{5} \cdot 405 = 243$ L, ele percorreu $243 \cdot 3 = 729$ km.

9. C

Do enunciado, temos:



V = volume total de água possível no tanque:

$\frac{5}{100}V = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{4}$

$V = 20\pi \text{ m}^3$

$V \cong 63 \text{ m}^3$

10. Considerando que h é a altura do cilindro e que R seja o raio da base do cilindro, obtemos:

a) $b = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}6 = 3{,}768$ m

b) Por meio do volume do cilindro, obtemos o valor de h:

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h \rightarrow 1{,}5 = 3{,}14 \cdot (0{,}6)^2 \cdot h \rightarrow$

$\rightarrow h = \frac{1{,}5}{3{,}14 \cdot (0{,}6)^2} \quad \therefore \quad h = 1{,}33$ m

11. a) Calculando:

Efetivo → 100 000 litros → 15 000 etanol + 85 000 gasolina

$\frac{85\,000}{x} = \frac{80\,\%}{100\,\%} \rightarrow x = 106\,250$ litros → 85 000 de gasolina + 21 250 de etanol

Considerando os 15 000 litros já existentes no tanque:

21 250 – 15 000 = 6 250 litros

É necessário adicionar 6 250 litros de etanol.

b) Calculando, temos:

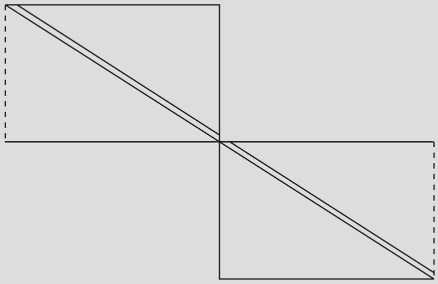
$1 \text{ m}^3 = 1\,000$ litros → $6\,250 = 6{,}25 \text{ m}^3$

$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

$6{,}25 = 3{,}125 \cdot 2^2 \cdot h \rightarrow h = 0{,}5$ m

12. A

Analise a seguinte planificação da superfície lateral do cilindro:



A área da faixa equivale, aproximadamente, à área de um paralelogramo de base 3,14 cm e altura 80 cm. Obtemos assim:

$$\frac{3{,}14 \cdot 80}{20\pi \cdot 80} \cdot 100\% \cong 5\%$$

13. C

O volume do tonel será obtido por:

$V = \frac{30}{100} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$ (sendo r a medida do raio do tonel e h, a medida de sua altura)

$$V = \frac{30}{100} \cdot \pi \cdot 30^2 \cdot \frac{600}{\pi} = 162\,000 \text{ cm}^3 = 162 \text{ L}$$

14. A

Sejam V, r e h, respectivamente, o volume, o raio da base e a altura do cilindro. Assim, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Portanto, a variação percentual pedida é dada por:

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right) \cdot 2h - \pi \cdot r^2 \cdot h}{\pi \cdot r^2 \cdot h} \cdot 100\% = -50\%$$

Logo, houve redução de 50% no volume do cilindro.

15. C

$\overline{AC} = R$

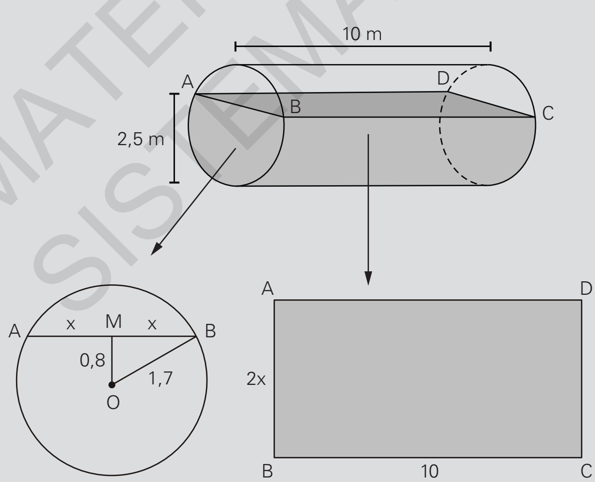
Avaliando o triângulo retângulo ABC, por meio do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \leftrightarrow R^2 =$$
$$= \left(\frac{2}{3} \cdot R\right)^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot R$$

Assim, o volume do cilindro produzido é obtido por:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot R\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot R = \frac{4\sqrt{5}\pi \cdot R^3}{27}$$

16. a) r = 1,7 m e h = 10 m



$V = \pi \cdot (1{,}7)^2 \cdot 10 = 28{,}9\pi$

b) Analisando o triângulo OMB, por meio do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$x^2 + (0{,}8)^2 = (1{,}7)^2 \therefore x = 1{,}5$$

Portanto, a área do retângulo ABCD é dada por:

$$A = 2x \cdot 10 = 2 \cdot (1{,}5) \cdot 10 = 30 \text{ m}^2.$$

17. C

Vamos obter o volume de grafite por:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h \cong 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}2}{2}\right)^2 \cdot 15 \cong 0{,}47 \text{ cm}^3$$

Assim, sabendo que a densidade do grafite é de 2,2 g/cm³, obtemos sua massa:

$$m = 2{,}2 \cdot 0{,}47 \cong 1{,}03 \text{ g}$$

Ciente de que n é o número de átomos de carbono presentes nesse grafite, temos:

$$n \cdot \frac{12}{6 \cdot 10^{23}} = 1{,}03 \rightarrow n \cong 5 \cdot 10^{22}$$

Estudo para o Enem

18. D

A face da folha de papel condiz ao quíntuplo do comprimento da base do cilindro, ou seja, $5\pi d$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. A

Calcularemos r de forma que $12 - \pi \cdot r^2 \cdot 1 \geqslant 4$. Assim, temos 3 como o valor aproximado de π.

$$12 - 3r^2 \geqslant 4 \leftrightarrow r^2 \leqslant \frac{8}{3} \rightarrow 0 < r \leqslant \sqrt{\frac{8}{3}} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 < r \leqslant 1{,}63$$

Portanto, o diâmetro do raio máximo da ilha de lazer, em metros, é aproximadamente 1,6.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. C

Imaginando que o volume de açúcar e o volume de água se misturam ao volume do copo e de acordo com o texto, temos:

- Volume de água = 5x.
- Volume de açúcar = x.
- Volume do copo $= \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = 3 \cdot 2^2 \cdot 10 = 120\ cm^3$.

Então, $x + 5x = 120 \leftrightarrow 6x = 120 \leftrightarrow x = 20\ cm^3$.

Assim, o volume de água deverá ser $5 \cdot 20 = 100\ cm^3 = 100$ mL.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

39 CONES

Para ir além

O artigo “Usando o Geogebra para o ensino dos sólidos de revolução” é um interessante material, com explicações pertinentes sobre o uso desse conhecido *software*. Disponível em:

<http://www.redalyc.org/pdf/4675/467553545016.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo “Criando, vendo e entendendo sólidos de revolução” aborda a construção dos sólidos de revolução. Disponível em:

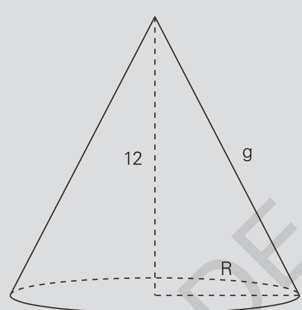
<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011903.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. C

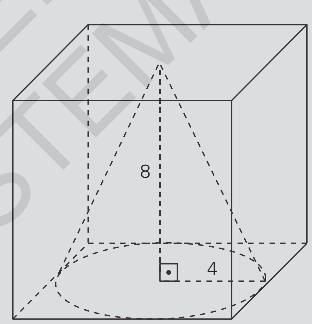
Sendo R a medida do raio da base do cone e g, a medida de sua geratriz, obtemos:



$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot 12 = 64\cdot\pi \to R^2 = 16 \to R = 4\text{ cm}$$

$$g^2 = 12^2 + 4^2 \to g = \sqrt{160} \to g = 4\sqrt{10}\text{ cm}$$

8.



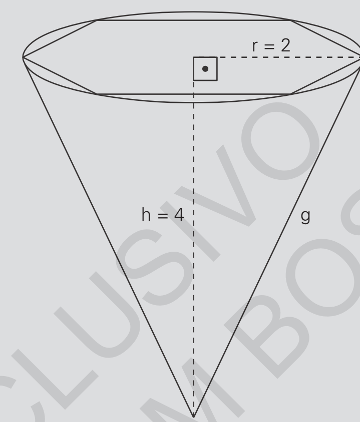
A diferença entre os volumes é dada por:

$$V_{cubo} - V_{cone} = 8^3 - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 8 =$$

$$= 512 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 128 = 384\text{ cm}^3$$

9. B

Considerando que a medida do raio da circunferência, circunscrita em um hexágono regular, tem a mesma medida de seu lado, temos:



$$g^2 = 2^2 + 4^2 \to g = \sqrt{20} \to g = 2\sqrt{5}$$

Logo, a área lateral é dada por:

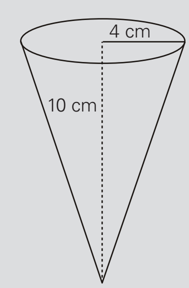
$$A_L = \pi\cdot r\cdot g$$

$$A_L = \pi\cdot 2\cdot 2\sqrt{5}$$

$$A_L = 4\cdot\pi\cdot\sqrt{5}$$

10. D

O volume do cone (recheio) é dado por:



Tomando $\pi = 3$, o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 10 = 160\text{ cm}^3$$

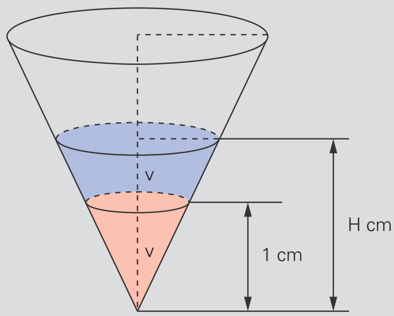
Considerando que o peixe representa 90% do volume do recheio, temos:

$0{,}9 \cdot 60 = 144\text{ cm}^3$ (volume do salmão)

Portanto, a massa do salmão é dada por $0{,}35 \cdot 144 = 50{,}4$ g.

11. A

Do enunciado e da figura, temos:



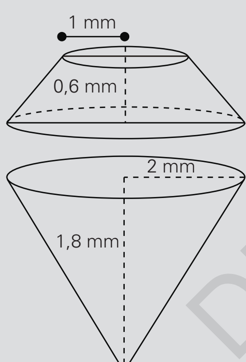
$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{H}{1}\right)^3$$

$2 = H^3$

$H = \sqrt[3]{2}$

12. a) $V = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{3{,}5} = 0{,}04$

b)



Volume do tronco: $V_T = \dfrac{\pi}{3} \cdot 0{,}6 \cdot (1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2) = 1{,}4\pi.$

Volume do cone: $V_c = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 1{,}8}{3} = 2{,}4\pi$.

Volume total: $1{,}4\pi + 2{,}4\pi = 3{,}8\pi.$

13. A

Se g é a geratriz do cone, então:

$2\pi \cdot g = 2 \cdot 2\pi \cdot 6 \leftrightarrow g = 12$ cm

Logo, sendo h a altura do cone:

$h^2 = 12^2 - 6^2 \to h = 6\sqrt{3}$ cm

A resposta é dada por:

$$\frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$$

14. E

V_1 = volume do sólido 1

V_2 = volume do sólido 2

$$V_1 = \pi R^2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 \cdot \frac{a}{2}$$

$$V_1 = \frac{3}{4}\pi R^2 a$$

$$V_2 = \pi R^2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{a}{2}$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 a$$

Sendo h a medida da altura do cilindro reto de raio R e volume $V_1 + V_2$, temos:

$$\pi R^2 h = \frac{3}{4}\pi R^2 a + \frac{2}{3}\pi R^2 a$$

$$\pi R^2 h = \frac{17}{12} \cdot \pi R^2 a$$

$$h = \frac{17}{12}a$$

15. Sendo r o raio da base do cilindro, h a altura do cilindro e considerando que a área lateral do cilindro é 64 π, temos:

$2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 64p \to p \cdot h = 32$ (equação 1)

Levando em conta que 2r é o raio da base do cone, h – 2 é sua altura e que o volume é 128 π cm³, podemos escrever:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot (h-2) = 128 \cdot \pi \to r^2 \cdot (h-2) = 96$$

(equação 2)

Das equações 1 e 2, temos:

$r^2 \cdot (h - 2) = 96$

$r \cdot r \cdot h - 2 \cdot r^2 = 96$

$32r - 2r^2 = 96$

$r^2 - 16r + 48 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos r = 12 ou r = 4.

$r = 12 \to h = \dfrac{32}{12}$ (não inteiro)

$r = 4 \to h = \frac{32}{4} = 8$ (inteiro)

Calculando a geratriz do cone, temos:

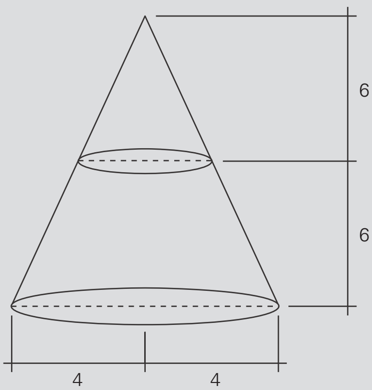
$g^2 = (2r)^2 + (h-2)^2 \to g^2 = 8^2 + 6^2 \to g = 10$ cm.

Logo, a área lateral é dada por:

$A_L = \pi \cdot 2r \cdot g = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi\ cm^3$

16. C

De acordo com o enunciado:



Vamos considerar:

- V = volume total do cone
- V' = volume cheio (tronco)
- V'' = volume vazio (topo)
- H = 12 = altura total
- h = 6 = altura topo/altura tronco

Podemos calcular:

$$\frac{V}{V''} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \to \left(\frac{12}{6}\right)^3 = \frac{V}{V''} \to V = 8V''$$

$$V' + V'' = V \to V' + \frac{V}{8} = V \to V' = \frac{7}{8}V$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot H = \frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot 4^2\cdot 12 \to V = 200{,}96$$

$$V' = \frac{7}{8}V = \frac{7}{8}\cdot 200{,}96 \to V' = 175{,}85\ m^3$$

Tempo: 500 L / min = 0,5 m³ / min

1 min ____________ 0,5 m³

T ____________ 175,85 m³

t = 35,17 min ≈ 5h50 min

17. A

$$V_{cone} - V_{pirâmide} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\frac{l^{2\sqrt{3}}}{4}\cdot h}{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}$$

$$\pi R^2 h - \frac{l\cdot 2\sqrt{3}}{4}\cdot h = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

Porém:

$$R = \frac{2}{3}h_\Delta \to R = \frac{2}{3}\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2} \to l = R\sqrt{3}$$

Portanto:

$$\pi R^2 h - \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{3}}}{4}\cdot h = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\pi R^2 h - \frac{3\sqrt{3}R^2 h}{4}\cdot h = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{4\pi R^2 h - 3\sqrt{3}R^2 h}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{R^2 h\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}$$

$R^2 h = 1$

Estudo para o Enem

18. E

A expressão **superfície de revolução** garante que a figura represente a superfície lateral de um cone.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. B

Sendo r e h as dimensões do cone e R e H as dimensões do poço, calculando o volume do poço e do cone, temos:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(3R)^2\cdot 2{,}4 \to V_{cone} = 7{,}2\pi R^2$$

$$V_{poço} = \pi\cdot R^2\cdot H$$

Pelo enunciado, sabemos que o volume do cone é 20% maior que o volume do poço cilíndrico. Logo:

$$1{,}2 \cdot V_{poço} = V_{cone}$$

$$1{,}2\pi R^2 \cdot H = 7{,}2\pi R^2$$

H = 6 m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. D

O volume do silo é dado por:

$$\pi \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 \cong 324 + 27 \cong 351 \text{ m}^3$$

Portanto, se n é o número de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo, então:

$$n \geq \frac{351}{20} = 17{,}55$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

40 ESFERAS

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo continuamos os estudos de Geometria espacial. Vimos mais um sólido de revolução: a esfera. Também demonstramos como calcular o volume de uma esfera por meio da relação com a anticlepsidra e indicamos a área da superfície esférica, a área do fuso esférico e o volume da cunha esférica.

Para ir além

O artigo "Formas de revolução e cálculo de volume" aborda o cálculo do volume de sólidos de revolução sem utilizar o conceito de cálculo diferencial e integral. Disponível em:

<https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/24428/pdf>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais" é um ótimo material que aborda o cálculo do volume da esfera por meio do princípio de Cavalieri. Disponível em:

<http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/viewFile/8513/6132>

Acesso em: fev. 2019.

A reportagem "A caneta esferográfica" trata do surgimento da caneta esferográfica. Disponível em:

<https://super.abril.com.br/comportamento/a-caneta-esferografica/>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. C

Área a ser pintada: $4\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 108 \text{ m}^2$.

Como a tinta rende 3 m² por litro, temos:

$\frac{108}{3} = 36$ litros

8. E

Para que o novo frasco tenha a mesma capacidade do primeiro, devemos igualar as equações dos volumes da esfera (V_E) e do cilindro (V_C).

$$\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \rightarrow \frac{h}{9} = \frac{4}{3} \cdot R \;\therefore\; h = 12R$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

9. B

$$R = \frac{D}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 2 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$A \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \;\therefore\; A \cong 57 \text{ cm}^2$$

10. $R = \frac{D}{2} = \frac{2}{2} = 1$ cm

Seja r a medida do raio da esfera obtida pela fundição de três esferas idênticas e maciças de diâmetro 2 cm. Então:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3$$

$$R^3 = 3 \rightarrow R = \sqrt[3]{3} \text{ cm}$$

11. D

A altura do líquido deslocado é: $2 \cdot 3 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$ cm.

O volume de solvente deslocado no cilindro de raio r corresponde ao volume da esfera.

$$V'_{cilindro} = V_{esfera}$$

$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$$

$$2 \cdot r^2 = 108 \rightarrow r^2 = 54$$

$$r = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

12. C

$$V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h = 8 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V_e = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3} \cdot \pi$$

Como o volume do cilindro corresponde a 75% do volume da esfera, obtemos:

$$V_c = 0{,}75 \cdot V_e \rightarrow 8 \cdot \pi \cdot r^2 = 0{,}75 \cdot \frac{256}{3} \cdot \pi \rightarrow$$
$$\rightarrow r^2 = 8 \;\therefore\; r = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A_L = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8 = 32\sqrt{2}\pi \;\therefore\; A_L =$$
$$= 32\sqrt{2}\,\pi \text{ cm}^2$$

13. a) Para encontrarmos o volume do boneco, primeiro calculamos o volume do cilindro.

$$V_c = B \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot 20 \cong 960 \text{ cm}^3.$$

$V_{Boneco} = 960 - 712 = 248 \quad \therefore \quad V_{Boneco} \cong 248 \text{ cm}^3$

b) Se a razão entre as áreas das esferas é $\frac{4}{9}$, então:

$$\frac{A_{menor}}{A_{maior}} = \frac{4\pi \cdot r^2}{4\pi \cdot R^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \frac{4}{9} \rightarrow r = \frac{2R}{3}$$

Como o boneco é composto de uma esfera menor (V_{menor}) e duas esferas maiores (V_{maior}) e tem volume total de 248 cm³:

$$V_{menor} + 2V_{maior} = 248$$

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{2R}{3}\right)^3 + 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = 248$$

$$\frac{31 \cdot R^3}{27} = 27$$

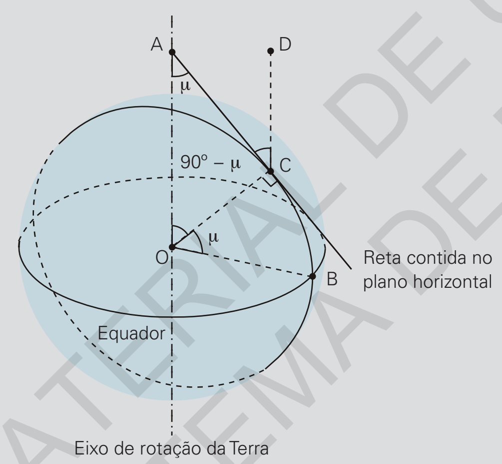
$R = 3$ cm

Já que $r = 2$ cm, temos:

$2r + 2 \cdot 2R = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16$ cm.

14. B

Na figura a seguir, **O** é o centro da Terra, $B\hat{O}C = \mu$ é a latitude do ponto **C**, e **CD** é a linha inclinada do relógio solar.



$A\hat{O}B = A\hat{C}O = 90°$

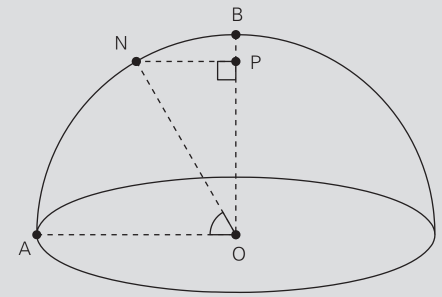
Então: $A\hat{O}C = 90° - \mu$

Logo, $A\hat{O}C = \mu$

Como CD || OA, temos que $A\hat{C}D = \mu$.

15. B

Observe na figura que **O** é o centro da Terra e **P** é a projeção ortogonal de **N** sobre o segmento **OB**.



Sabendo que $A\hat{O}N = 60°$, o ângulo $N\hat{O}P$ é igual a 30°. Portanto:

$$\text{sen } N\hat{O}P = \frac{\overline{NP}}{\overline{ON}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{NP}}{6400} \rightarrow \overline{NP} = 3\,200 \text{ km}$$

Como $M\hat{P}N = 2 \cdot 15° = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad, obtemos:

$$\widehat{MN} = M\hat{P}N \cdot \overline{NP} = \frac{\pi}{6} \cdot 3\,200 \cong 1\,600 \text{ km}.$$

16. O segmento **AC** corresponde ao raio do cilindro **r**, sendo obtido pela seguinte relação:

$r^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow r^2 = 169 - 25 = 144 \rightarrow r = 12$ cm

$$V_{bola} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 13^3 \cong 2\,929\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot 20 = 2\,880\pi \text{ cm}^3$$

Logo, $V_{bola} > V_{cilindro}$.

17. C

Aresta da base: l

Altura do prisma: h

Diagonal do prisma: $l\sqrt{2}$

Logo, tg 60° é dada por:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{l\sqrt{2}} \rightarrow h = l\sqrt{6}$$

$$A_L = 36\sqrt{6}$$

Então:

$$4l \cdot h = 36\sqrt{6}$$

$$4l \cdot l\sqrt{6} = 36\sqrt{6}$$

$l = 3$

$$V_{prisma} = B \cdot h$$

$$V_{prisma} = l^2 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(24^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 24^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{6}$$

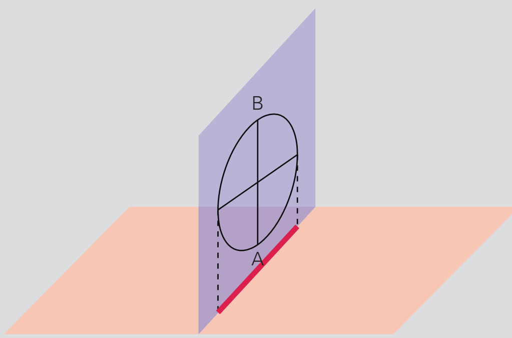
Logo, a razão pedida é:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{8}{3}\pi\sqrt{6}}{27\sqrt{6}} = \frac{8\pi}{81}$$

Estudo para o Enem

18. E

A projeção ortogonal do trajeto do motociclista no plano do chão é um segmento de reta, pois o plano que contém o trajeto do motociclista é perpendicular ao plano do chão.



Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. E

Quantidade de madeira descartada: $V_{desc} = V_{cilindro} - (V_{semiesfera} + V_{cone})$.

Logo, substituindo as fórmulas e os valores dados no exercícios:

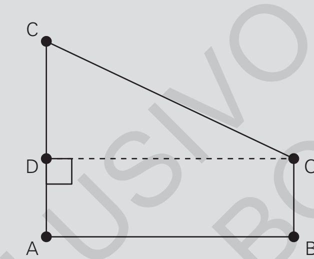
$$V_{dest} = \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 7 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (7-4)^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^2 \cdot 4\right]$$

$V_{dest} = 189 - [54 + 36] \cong 99 \therefore V_{dest} \cong 99\ cm^3$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. E



Seja D a projeção ortogonal do ponto C:

$CD = 3$ cm

$CO = 7$ cm

$7^2 = d^2 + 3^2 \rightarrow d^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40 \therefore$
$\therefore d = 2\sqrt{10}$ cm

Como o raio do bolim é de 2 cm, a razão pedida é:
$\frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

41 ESTATÍSTICA - ANÁLISE DE DADOS I

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo estudamos a análise de dados estatísticos. Abordamos primeiro o conceito de variáveis para o aprofundamento sobre tabelas de frequência. Em seguida, analisamos os tipos de representação gráficas.

Para ir além

O artigo "Estatística no ensino médio: uma abordagem por meio de uma sequência didática a respeito da dengue" demonstra a importância da Estatística para analisar situações cotidianas referentes à saúde pública. Disponível em:

<http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/viewFile/8335/6092>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Presença da estatística no ensino fundamental e médio" aborda de maneira objetiva a presença da Estatística nos ensino Fundamental e Médio, com análises de dados e gráficos. Disponível em:

<https://www.ime.usp.br/arquivos/4congresso/33%20Bruno%20Henrique%20dos%20Santos_N.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "Contribuições do ensino de estatística na formação cidadã do aluno da educação básica" trata da importância da aprendizagem dessa área da Matemática nas séries iniciais. Disponível em:

<http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp content/uploads/2014/04/juliana_schneider.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Indique o *site* do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), que contém informações diversas sobre o Brasil. Disponível em:

<https://www.ibge.gov.br/institucional/o-ibge.html>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Internet e correios, respectivamente, por terem o maior percentual em cada classe.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

8. D

Por regra de três simples, obtemos:

100% ----- 360°

20% ----- x

$100x = 7\,200 \quad \therefore \quad x = 72°$

9. D

Total de notificações: $135\,335 + 171\,523 + 154\,866 + 249\,743 = 711\,467$

O percentual correspondente ao quarto trimestre é:

$$\frac{135\,335}{711\,467} \cdot 100 \cong 19\%$$

Logo, o gráfico da alternativa D representa os dados da tabela.

10. a) Excluindo o estado de São Paulo, obtemos:

$100\% - 53\% = 47\%$

$$\frac{47}{100} \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 = 705\,000 \text{ pizzas}$$

b) Pizza de mozarela: 35% das pizzas em São Paulo.

Pizza de calabresa: 25% das pizzas de São Paulo.

Logo, 35% + 25% = 60% do total de pizzas consumidas em São Paulo.

$$\frac{53}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 = 477\,000 \text{ pizzas}$$

11. Por regra de três simples, obtemos:

220,7 ----- 1 000 000

x ----- 320 137

$\therefore x = 70{,}65$

Em relação ao continente europeu, obtemos:

$$\frac{70{,}65}{15\,469} \cong 0{,}00457 \cong 0{,}457\%$$

12. A

Organizando as informações, segundo a tabela abaixo, a alternativa A é a correta.

Órgãos	Transplantes realizados	Pessoas na fila de espera
Rim	33%	75%
Fígado	9%	15%
Pulmão	3%	6%
Coração	1%	1%
Rim/pâncreas	1%	1%
Córnea	53%	2%
Total	100%	100%

13. C

Porcentagem do total de PET reciclado para uso final têxtil: 37,8%.

Tecidos e malhas entre os de uso final têxtil: 30%.

Logo:

$$30\% \text{ de } 37{,}8\% = \frac{30}{100} \cdot \frac{37{,}8}{100} = \frac{1134}{10\,000} =$$

$$= 0{,}1134 = 11{,}34\%$$

Como 282 kton correspondem a 100%, obtemos:

$$\frac{11{,}34}{100} \cdot 282 \cong 32 \text{ kton}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

14. D

I. Verdadeira, pois $4{,}54 > 4{,}25 > 4{,}1 > 3{,}56$.

II. Falsa. Observamos no gráfico que, de 2015 a 2016, a previsão de aumento de 2016 foi de $\frac{33-19}{19} \cdot 100\% = 73{,}7\%$.

III. Verdadeira. As diferenças entre as notas são iguais a $3{,}61 - 3{,}56 = 0{,}05$; $4{,}22 - 4{,}1 = 0{,}12$ e $4{,}31 - 4{,}25 = 0{,}06$. Fazendo a diferença média, obtemos: $\frac{0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}06}{3} \cong 0{,}077$, sendo $0{,}070 <$ $< 0{,}077$.

IV. Falsa, pois $\frac{1}{4} \cdot 8\,472 = 2\,118$ e $1\,568 < 2\,118$.

15. B

Apresentaram problemas cardíacos:

Homens (H) = 42% $\rightarrow$ 0,42H

Mulheres (M) = 32% $\rightarrow$ 0,32M

Total (H + M) = 37% $\rightarrow$ 0,37(H + M)

Equacionando, obtemos:

$0{,}37\,(H + M) = 0{,}42H + 0{,}32M$

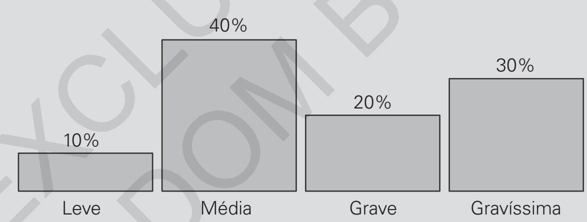
$0{,}37H + 0{,}37M = 0{,}42H + 0{,}32M$

$0{,}37M - 0{,}32M = 0{,}42H - 0{,}37H$

$0{,}5M = 0{,}5H$

$\therefore M = H$

16.



a) Para que os condutores atinjam 13 pontos, consideramos a, b, c e d, respectivamente, como o número de multas leves, médias, graves e gravíssimas. Considerando as soluções inteiras não negativas, obtemos:

$3a + 4b + 5c + 7d = 13$

Observando que $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, obtemos:

$(a, b, c, d) \in \{(0, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 0), (2, 0, 0, 1), (3, 1, 0, 0)\}$

b) O valor obtido com a soma das multas aplicadas é:

Leves: $0{,}1 \cdot 1\,000 \cdot 53 = 5\,300$

Média: $0{,}4 \cdot 1\,000 \cdot 86 = 34\,400$

Grave: $0{,}2 \cdot 1\,000 \cdot 128 = 25\,600$

Gravíssima: $0{,}3 \cdot 1\,000 \cdot 192 = 57\,600$

Total: R$ 122 900,00

17. A

I. Verdadeira. Monte Formoso foi a que apresentou o maior crescimento do IDHM.

II. Verdadeira. De 2000 para 2010, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia. A diferença entre o IDHM das duas diminuiu entre 2000 e 2010, com Barbacena se aproximando do IDHM de Uberlândia.

III. Falsa. De acordo com a escala, em 2000 o IDHM de Barbacena atingiu o nível médio.

Estudo para o Enem

18. B

Analisando o gráfico entre os anos de 2007 e 2011, obtemos:

$$\frac{224,02-120,98}{120,98}\cdot 100\% \cong 85,17\%$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

19. C

Músicas (10%) e espaço livre (30%) correspondem a 40% do espaço total do cartão de 16 GB. Logo, 60% do espaço utilizado será transferido para o novo cartão.

$$\frac{60}{100}\cdot 16 = 9,6\ \text{GB}$$

Com isso, o cartão de 32 GB tem disponível:

$$32\text{GB} - 9,6\text{GB} = 22,4\ \text{GB}$$

$$\frac{22,4}{32}\cdot 100\% = 70\%$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

20. D

A característica do produto usado pela diretoria para incentivar a produção deve ser o **sabor**, pois a diferença entre a nota do produto proposto e as notas dos produtos A e B é a maior comparada às outras características.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

42 ESTATÍSTICA – ANÁLISE DE DADOS II

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo damos continuidade aos estudos sobre análise de dados estatísticos. Desta vez nos aprofundamos nos tipos diferentes de representação gráfica que possibilitam compor dois ou mais gráficos em um só.

Para ir além

A pesquisa do *link* a seguir analisou os níveis de apreensão de gráficos e tabelas contidos na prova de Matemática e suas tecnologias no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5458_3588_ID.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

O material presente no *link* a seguir aborda as diferentes maneiras de interpretação de gráficos e tabelas. Disponível em:

<https://cursoenemgratuito.com.br/interpretacao-de-graficos-e-tabelas/>

Acesso em: fev. 2019.

Para enriquecer ainda mais a aula, é possível sugerir os seguintes vídeos sobre estatística e análise de dados. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=4NvMgFwhioc>

<https://www.youtube.com/watch?v=wqEIpnxk9NE>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. C

Do gráfico, obtemos:

Recordes quebrados em Atenas: 8.

Recordes quebrados em Londres: 7.

Total: 15.

Esse valor é o número de recordes quebrados nas Olimpíadas de Sydney.

8. D

O valor mais alto entre os itens analisados entre as 214 cidades pesquisadas é representado pela figura totalmente colorida. Em Tóquio, a figura que representa o cafezinho não está totalmente preenchida, logo não corresponde ao café mais caro do mundo.

9. D

A afirmação D é falsa. O número de casos de dengue em 2015 foi superior ao de 2016.

10. a) Conforme dados do gráfico, em 2009 27,4% dos 500 domicílios tinham acesso à internet.

Logo, $\frac{27,4}{100} \cdot 500 = 137$ domicílios.

b) Foram entrevistadas 2 000 pessoas em 2009. Dessas 41,7% disseram usar a internet. Ou seja,

$\frac{41,7}{100} \cdot 2\,000 = 834$ pessoas.

c) Supondo que seja uma reta, a taxa de variação do percentual de domicílios entre 2008 e 2010 é dada por:

$\frac{27,4 - 23,8}{2009 - 2008} = 3,6\,\%$.

Logo, de 2009 para 2010, temos:

27,4% + 3,6% = 31,0%.

11. A

A variação de preço entre duas linhas horizontais é de 0,02. Com isso, analisando cada intervalo do gráfico, temos:

- entre 1 e 2: −0,02.
- entre 2 e 3: +0,04.
- entre 3 e 4: +0,02.
- entre 4 e 5: +0,02.
- entre 5 e 6: entre −0,02 e −0,04.

Portanto, a maior variação ocorreu entre as semanas 2 e 3.

12. E

a) Falsa. Houve decrescimento entre 2008 e 2009.

b) Falsa, pois 22,3 − 19,3 não representa 30% de 19,3.

c) Falsa. A maior emissão ocorreu em 2013.

d) Falsa, pois 36,3 − 24,6 = 11,7 (aproximadamente 50%).

e) Verdadeira, pois 36,3 − 24,6 = 11,7 (aproximadamente 50% de 24,6).

13. D

a) Falsa, pois 50% de 56 = 0,50 · 56 = 28.

b) Falsa.

Taxa de crescimento dos homens $= \frac{58-52}{52} =$
$= 0{,}12 = 12\%$.

Taxa de crescimento das mulheres: $\frac{47-37}{37} =$
$= 0{,}27 = 27\%$.

c) Falsa. A população economicamente ativa de mulheres cresceu: $\frac{45-40}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

d) Verdadeira.

e) Falsa. A população economicamente ativa de homens cresceu: $\frac{58-54}{54} = 0{,}08 = 8\%$.

14. a) Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, com x (ano) e y (índice de perdas), em porcentagem. A taxa de variação de f será:

$$\frac{1{,}76-1{,}75}{1-0} = 0{,}01$$

Como $f(0) = 1{,}75$, temos que $f(x) =$
$= 0{,}01 \cdot x + 1{,}75$.

Analogamente, sendo $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a função para os EUA, temos:

$$\frac{1{,}4-1{,}49}{1-0} = -0{,}09$$

Como $g(0) = 1{,}49$, temos que $g(x) =$
$= -0{,}09 \cdot x + 1{,}49$.

b) Temos que:
$f(x) - g(x) = 1$
$0{,}01 \cdot x - 1{,}75 - (-\ 0{,}09\ x \cdot x + 1{,}49) = 1$
$0{,}1 \cdot x = 0{,}74$
$x = 7{,}4$

Então, 2010 + 7,4 = 2017,4. Logo, 2017 e 2018 são os dois anos que mais se aproximam.

15. D

a) Falsa. O aumento de 100% corresponde a $600 \cdot (1 + 1) = 1\,200$, maior que 1 000.

b) Falsa. O aumento de 600% corresponde a $600 \cdot (1 + 6) = 4\,200$, maior que 4 000.

c) Falsa. O aumento de 66,6% corresponde a $4\,000 \cdot (1 + 0{,}666) = 6\,665$, maior que 6 000.

d) Verdadeira. O aumento de 900% corresponde a $600 \cdot (1 + 9) = 6\,000$, o valor indicado no gráfico.

e) Falsa. O aumento de 1 000% corresponde a $600 \cdot (1 + 10) = 6\,600$, maior que 6 000.

16. B

Primeiro calculamos os custos com cada funcionário em 2013:

- Ensino fundamental:

$$\frac{\left(\frac{12{,}5}{100} \cdot 400\,000\right)}{50} = \text{R\$ } 1.000{,}00$$

- Ensino médio:

$$\frac{\left(\frac{75}{100} \cdot 400\,000\right)}{150} = \text{R\$ } 2.000{,}00$$

- Ensino superior:

$$\frac{\left(\frac{12{,}5}{100} \cdot 400\,000\right)}{10} = \text{R\$ } 5.000{,}00$$

Com o aumento no número de funcionários e a manutenção do salário, os custos serão:

- Ensino fundamental: $70 \cdot 1\,000 =$ R$ 70.000,00
- Ensino médio: $180 \cdot 2\,000 =$ R$ 360.000,00
- Ensino fundamental: $20 \cdot 5\,000 =$ R$ 100.000,00
- Custo total 2014: R$ 530.000,00
- Custo total 2013: R$ 400.000,00

Logo, para que o lucro seja o mesmo, a empresa deve aumentar sua receita em:

R$ 530.000,00 − R$ 400.000,00 = R$ 130.000,00

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

17. a) Analisando o gráfico, a população de bactérias C superou a população de bactérias A no quarto dia, com 10^4 indivíduos.

b) A variação percentual pedida é dada por:

$$\frac{2^{10}-2^6}{2^6} \cdot 100\% = \frac{2^6(2^4-1)}{2^6} \cdot 100\% = 15 \cdot 100\% =$$
$$= 1\,500\%$$

c) O resultado é igual a:

$$\frac{(2500+2^9+10^5)-(1\,200+2^6+10^2)}{1\,200+2^6+10^2} \cdot 100\% =$$
$$= \frac{103012-1\,364}{1\,364} \cdot 100\% = 7\,452{,}20\%$$

Estudo para o Enem

18. A

A máxima quantidade de bactérias no ambiente corresponde à soma das quantidades de bactérias das espécies I e II. Logo, na terça-feira a soma tem o maior valor: $1\,100 + 800 = 1\,900$ bactérias.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. E

Conforme as condições estabelecidas, a cada 24 h há dois pontos de intersecção dos gráficos. Ou seja, os níveis A e B são iguais. Logo, em uma semana o valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista será igual a $2 \cdot 7 = 14$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. A

Como de fevereiro para março e de novembro para dezembro a temperatura máxima reduziu e como de agosto para setembro e de dezembro para janeiro a variação da pluviosidade foi maior que 50 mm, o mês que satisfaz todas as condições é janeiro.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

43 ESTATÍSTICA – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL I

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo damos continuidade ao estudo sobre os conceitos da Estatística, com o conhecimento das medidas de tendência central. Nesta primeira etapa, abordamos a média aritmética simples e a média aritmética ponderada.

Para ir além

O artigo "O uso do jogo digital educativo na aprendizagem da Média Aritmética" aborda um modo lúdico de ensinar o tema. Disponível em:

<http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd6_patricia_boletini.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

A dissertação *Uma abordagem sobre média e suas aplicações no ensino médio* é um bom material com abordagem mais completa sobre o conceito de média. Disponível em:

<http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/UMA-ABORDAGEM-SOBRE-M%C3%89DIAS-E-SUAS-APLICA%C3%87%C3%95ES-NO-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Calculando a média aritmética ponderada, obtemos:

$$\overline{x} = \frac{2\cdot 0+5\cdot 1+8\cdot 2+10\cdot 3+15\cdot 4+17\cdot 5+15\cdot 6+12\cdot 7+8\cdot 8+4\cdot 9+4\cdot 10}{100}$$

$$\overline{x} = \frac{510}{100}$$

$$\overline{x} = 5{,}1$$

8. B

Entre 2000 e 2010, o índice de desmatamento no Brasil caiu na ordem de $\frac{3\cdot 5 + 2{,}2\cdot 5}{5+5} = 2{,}6$ milhões de hectares por ano.

9. a) Calculando, obtemos:

$$\frac{PSA_{total}}{PSA_{livre}} = \frac{2{,}28}{9{,}5} = 0{,}24$$

Como 0,24 está mais próximo de 0,25, Pedro está numericamente mais próximo do resultado médio do exame do portador da patologia benigna.

b) Calculando, temos:

$$\text{Média} = \frac{10\cdot(160\cdot 0{,}4) + 8\cdot(160\cdot 0{,}6)}{160} = 8{,}8$$

10. D

Considerando o número médio entre as duas extremidades de cada intervalo e multiplicando pelo número de apartamentos, temos:

$$2\cdot(1) + 4\cdot(3) + 6\cdot(5) + 8\cdot(7) + 10\cdot(9) = 190$$

Dividindo por 25 apartamentos para conseguir a média, teremos:

$$\frac{190}{25} = 7{,}6 \text{ kg/apartamento.}$$

11. A

A nota final do candidato é de tal forma que:

$$\frac{8x+6(x+1)+5(x-1)}{x+x+1+x-1}=6{,}5 \rightarrow 19x+1=19{,}5x \rightarrow$$
$$\rightarrow 1=0{,}5x \quad \therefore \quad x=2$$

Em decorrência, o número de provas que o candidato executou foi:

$x + (x + 1) + (x - 1) = 3x = 3 \cdot 2 = 6.$

12. D

O nível médio nos 10 primeiros dias é obtido por $\frac{300+500}{2}$ = 400 cm.

O nível médio entre os dias 10 e 15 foi $\frac{500+200}{2}$ = = 350 cm.

Assim, o nível médio entre os dias 15 e 20 foi 200 cm.

O nível médio entre os dias 20 e 25 foi $\frac{200+300}{2}$ = = 250 cm.

O nível médio entre os dias 25 e 30 foi $\frac{300+100}{2}$ = = 200 cm.

Sendo assim, o nível médio no período de 30 dias é obtido por:

$$\frac{10\cdot 400 + 5\cdot 350 + 5\cdot 200 + 5\cdot 250 + 5\cdot 200}{30} =$$
$$= 300 \text{ cm}$$

13. D

x: cartas de Pedro

y: cartas de Luiza

z: cartas que Luiza passou para Pedro

Sendo z o número de cartas que Luiza passou para Pedro, podemos equacionar:

$$\text{Média de Pedro} = \frac{x}{5} = 6 \rightarrow x = 30$$

$$\text{Média de Luiza} = \frac{y}{5} = 4 \rightarrow y = 20$$

Após a troca de cartas:

$$\frac{x + 1 - z}{5} = 4{,}8 \rightarrow \frac{30 + 1 - z}{5} = 4{,}8 \rightarrow z = 7$$

14. Sendo x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as idades dos cinco jogadores titulares do time, com

$11 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$.

Compreendendo que a média das idades é de 13 anos e que o mais velho tem 17 anos, obtemos:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+17}{5}=13 \leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=48$$

Determinando que $x_1 = x_2 = x_3 = 11$, então o segundo jogador mais velho do time terá com exatidão:

$11 + 11 + 11 + x_4 = 48 \leftrightarrow x_4 = 15$ anos (portanto, a idade máxima que ele poderá ter)

15. C

Sejam S_h e S_m, devidamente nesta ordem, a soma das notas dos homens e a soma das notas das mulheres. Compreendendo que $S_m = 2 \cdot S_h$, obtemos:

$$\frac{S_m}{8} = \frac{S_h + S_m}{14} + 1 \leftrightarrow \frac{S_h}{4} = \frac{3\cdot S_h}{14} + 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow S_h = 28$$

Assim, a resposta solicitada é:

$$\text{Média homens} = \frac{28}{6} \cong 4{,}7$$

16. Calculando, obtemos:

$$a+\frac{b+c+d}{3}=48 \rightarrow \frac{3a+b+c+d}{3}=48 \rightarrow$$
$$\rightarrow 3a+b+c+d=144$$

$$b+\frac{a+c+d}{3}=42 \rightarrow \frac{a+3b+c+d}{3}=42 \rightarrow$$
$$\rightarrow a+3b+c+d=126$$

$$c+\frac{a+b+d}{3}=32 \rightarrow \frac{a+b+3c+d}{3}=32 \rightarrow$$
$$\rightarrow a+b+3c+d=96$$

$$d+\frac{a+b+c}{3}=34 \rightarrow \frac{a+b+c+3d}{3}=34 \rightarrow$$
$$\rightarrow a+b+c+3d=103$$

$$\begin{cases} 3a+b+c+d=144 \\ a+3b+c+d=126 \\ a+b+3c+d=96 \\ a+b+c+3d=102 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=33 \\ b=24 \\ c=9 \\ d=12 \end{cases}$$

17. C

Realizando o produto, obtemos:

$$\frac{1}{3}M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&\frac{9}{3}&\frac{6}{3}\\\frac{6}{3}&\frac{8}{3}&\frac{7}{3}\\\frac{9}{3}&\frac{6}{3}&\frac{6}{3}\\\frac{7}{3}&\frac{8}{3}&\frac{9}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8+9+6}{3}\\\frac{6+8+7}{3}\\\frac{9+6+6}{3}\\\frac{7+8+9}{3}\end{pmatrix}$$

Isso equivale à média de cada aluno nas três avaliações.

Estudo para o Enem

18. D

Analisando os valores, obtemos a média:

$$\frac{37+33+35+22+30+35+25}{7}=3,1$$

Deve comprar a mesma quantidade de matéria-prima do mês V.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. B

Analisando a tabela, em que $\bar{x}_4$, S_4, x_5, S_5 e $\bar{x}_5$ apontam, nesta ordem, a média nas quatro primeiras etapas, a soma dos pontos nas quatro primeiras etapas, a pontuação na quinta etapa, a soma dos pontos nas cinco etapas e a média nas cinco etapas, temos:

Candidato	$\bar{x}_4$	S_4	x_5	S_5	$\bar{x}_5$
A	90	360	60	420	84
B	85	340	85	425	85
C	80	320	95	415	83
D	60	240	90	330	66
E	60	240	100	340	68

Assim, a disposição de classificação ao final deste concurso é B, A, C, E, D.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

20. D

Calculando, obtemos:

Bom ou excelente $\rightarrow 7 \le M \le 10 \rightarrow M_{mín} = 7$

$$7=\frac{12x+8\cdot4+6\cdot8+5\cdot8+7,5\cdot10}{12+4+8+8+10}\rightarrow$$

$$\rightarrow\ 7=\frac{12x+195}{42}\quad\therefore\quad x=8,25$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

44 ESTATÍSTICA – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL II

Comentários sobre o módulo

Professor, neste módulo damos continuidade aos estudos sobre os conceitos da Estatística, como medidas de dispersão, amplitude, variância e desvio-padrão de uma série de medidas realizadas.

Para ir além

O texto "Projeto medidas estatísticas" é um bom material que aborda o ensino sobre as medidas de dispersão com atividades práticas. Disponível em:

<http://www.sec.pb.gov.br/revista/index.php/compartilhandosaberes/article/download/13/10>

Acesso em: fev. 2019.

O artigo "O uso de um jogo de treinamento no ensino dos conceitos de média e variância" aborda o ensino sobre as medidas de dispersão por meio do jogo lúdico com dados. Disponível em:

<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/download/775/342>

Acesso em: fev. 2019.

Exercícios propostos

7. D

Analisando as entradas e saídas de usuários do elevador, teremos os seguintes resultados: 4, 5, 5, 5, 7 e 3. Portanto, a moda é 5.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

8. D

Transcrevendo os tempos em ordem crescente, obtemos:

20,50; 20,60; 20,60; 20,80; 20,90; 20,90; 20,90; 20,96

Assim, o tempo mediano é dado por:

$$\frac{20,8+20,9}{2}=20,85$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

9. a) $5+3+1+1=10$

b) $\frac{5+3+5+3+1+1}{25}=\frac{18}{25}=0,72=72\%$

c) Classificando as notas de forma crescente, a mediana é a nota que ocupa a 13ª posição.

0 – 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 4 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 6 – 6 – 6 – 7 – 7 – 7 – 7 – 7 – 8 – 8 – 8 – 9 – 10

Assim, a mediana será a nota de número 6.

10. B

Classificando em ordem crescente os dados:

13,5 / 13,5 / 13,5 / 13,5 / 14 / 15,5 / 16 / 18 / 18 / 18,5 / 19,5 / 20 / 20 / 20 / 21,5

A média é 17 °C, pois as alternativas mostram esse valor como resposta.

A mediana é o termo central de distribuição em ordem crescente. Assim, a mediana é o oitavo termo, ou seja, 18.

A moda é 13,5, pois é o termo que aparece com maior frequência (4 vezes).

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

11. C

Calculando, obtemos:

$$\frac{6,5+10+8+9,4+8+6,4+x+7,4}{8}=8,2$$

$6,5+10+8+9,4+8+6,4+x+7,4=65,6$

$55{,}8 + x = 65{,}6 \rightarrow x = 65{,}6 - 55{,}8 \therefore x = 9{,}9$

Moda = 8

Escrevendo as notas em ordem, obtemos:

6,4; 6,5; 7,4; 8,0; 8,0; 9,4; 9,9; 10.

Mediana = 8

Média das outras 7 notas:

$$\frac{6{,}5+10+8+9{,}4+8+6{,}4+7{,}4}{7}=7{,}97$$

Portanto, a resposta correta é a C.

12. C

O peso mais frequente é o de 45 kg. E a moda é 45 kg.

Vamos considerar a tabela:

Número de alunos	Pesos (kg)	$X_i \cdot f_i$
1	50	50
2	40	80
3	80	240
4	60	240
5	65	325
6	55	330
7	75	525
8	45	360
$\sum f_i = 36$		$\sum x_i \cdot f_i = 2150$

A média é obtida por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{2150}{36} = 59{,}72 \text{ kg}$$

13. Seja (n) o número isolado. Assim, a soma dos elementos do conjunto {11, 12, 17, 18, 23, 30} é 140.

Logo: $18{,}5 = \frac{140-n}{6} \leftrightarrow n = 29$

Em decorrência, o conjunto novo será {11, 12, 17, 18, 23, 30}.

Assim, a mediana dos elementos será $\frac{17+18}{2} = 17{,}5$.

14. D

Vamos considerar a tabela:

Pontos	f_i	x_i	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$	$x_i \cdot f_i$
80 ⊢ 90	20	85	7 225	144 500	1 700
90 ⊢ 100	100	95	9 025	902 500	9 500
100 ⊢ 110	120	105	11 025	1 323 000	12 600
110 ⊢ 120	50	115	13 225	661 250	5 750
120 ⊢ 130	10	125	15 625	156 250	1 250
	n = 300			Σ3 187 500	Σ30 800

Assim, a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i\right)^2}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{300} \cdot \left[3\,187\,500 - \frac{30\,800^2}{300}\right] \cong 84{,}6$$

Em decorrência, o desvio-padrão será:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{84{,}6} \cong 9{,}20$$

Então, a perda de peso modal do grupo 2 é igual a 2.

15. D

Se a mediana é 24, então:

$$\frac{22+a}{2} = 24 \rightarrow a = 26$$

Portanto, sabendo que a média também é idêntica a 24, temos:

$$\frac{14+17+22+26+b+37}{6} = 24 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{116 + b}{6} = 24 \rightarrow b = 144 - 116 \rightarrow b = 28$$

Vamos considerar a tabela:

x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
14	100
17	49
22	4
26	4
28	16
37	169
	$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = 342$

A resposta será:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{342}{6}} = \sqrt{57}$$

16. a) A média é dada por:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{21+24+20+23+22+22+18+16+17+16+18}{12} = = \frac{234}{12} = 19,5$$

A moda são os valores 16, 17, 18 e 22, que surgem duas vezes cada na série demonstrada anteriormente.

Obtemos a mediana ordenando os números de forma crescente:

(16, 16, 17, 17, 18, 18, 20, 21, 22, 22, 23, 24)

Assim:

$$M_e = \frac{18+20}{2} = 19$$

Aconteceram aumentos entre:

$$\text{JAN e FEV} \rightarrow \frac{24-21}{21} \cdot 100 \cong 14,28\%$$

$$\text{MAR e ABR} \rightarrow \frac{23-20}{20} \cdot 100 = 15\%$$

Portanto, entre os meses de março e abril ocorreu a maior taxa de crescimento.

b) A média é dada por:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{13} x_i =$$

$$\frac{21+24+20+23+22+22+18+17+16+17+16+18+x}{13} = \frac{234+x}{13} \text{ (número inteiro)}$$

Crescentemente, e compreendendo que a mediana é 18, em janeiro de 2014 o valor é menor ou igual a 18. Logo, entendendo os fatos, x vale 13, pois haverá um número divisível por 13. Observe:

(13, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 21, 22, 22, 23, 24)

Assim, a mediana é 18.

A média mensal é dada por:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{13} x_i = \frac{21+24+20+23+22+22+18+17+16+17+16+18+13}{13} = \frac{247}{13} = 19$$

O cálculo do desvio médio é dado por:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|}{n} \text{ (sendo } \overline{x} \text{ a média aritmética)}$$

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|}{n} =$$

$$= \frac{|13-19| + 2\,|16-19| + 2\,|17-19| + 2\,|18-19| + |20-19| + |21-19| + 2\,|22-19| + |23-19| + |24-19|}{13}$$

$$= \frac{6+6+4+2+1+2+6+4+5}{13} = \frac{36}{13}$$

17. D

Na alternativa A:

$\overline{x}_1 = \dfrac{5+5+7+8+9+10}{6} \cong 7{,}3 < 7{,}5 = \dfrac{7+8}{2} = M_{d1}$

Na alternativa B:

$\overline{x}_2 = \dfrac{4+5+6+7+8+8}{6} \cong 6{,}3 < 6{,}5 = \dfrac{6+7}{2} = M_{d2}$

Na alternativa C:

$\overline{x}_3 = \dfrac{4+5+6+7+8+9}{6} = 6{,}5 = \dfrac{6+7}{2} = M_{d3}$

Na alternativa D:

$\overline{x}_4 = \dfrac{5+5+5+7+7+9}{6} \cong 6{,}3 > 6 = \dfrac{5+7}{2} = M_{d4}$

Na alternativa E:

$\overline{x}_5 = \dfrac{5+5+10+10+10+10}{6} \cong 8{,}3 < 10 = \dfrac{10+10}{2} = M_{d5}$

Concluímos que a única lista na qual a média das notas é maior que a mediana é a da alternativa D.

Estudo para o Enem

18. D

Classificando as notas em ordem crescente, temos as medianas alcançadas por cada um, de forma que:

$$M_{e_K} = \frac{33+33}{2} = 33$$

$$M_{e_L} = \frac{33+34}{2} = 33{,}5$$

$$M_{e_M} = \frac{35+35}{2} = 35$$

$$M_{e_N} = \frac{35+37}{2} = 36$$

$$M_{e_P} = \frac{26+36}{2} = 31$$

Assim, percebemos que N será o candidato aprovado.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

19. A

Compreendendo que a média da repartição dos 0 e dos 1 é igual a $0{,}45 < 0{,}50$, notamos que há mais sapatos na cor branca que na cor preta. Contudo, como a moda da numeração dos sapatos com defeito é 38, os sapatos na cor branca de número 38 não serão mais encomendados.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

20. E

Desvio-padrão $= \sigma$

$$\sigma = \frac{90\text{Kg}}{30\,000\ \text{m}^2} = \frac{30\ \text{Kg}}{10\,000\ \text{m}^2} = \frac{0{,}5\ \text{saca}}{\text{hectare}}$$

Assim, a variância (σ^2) solicitada será obtida por:

$\sigma^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25\ (\text{saca/hect})^2$

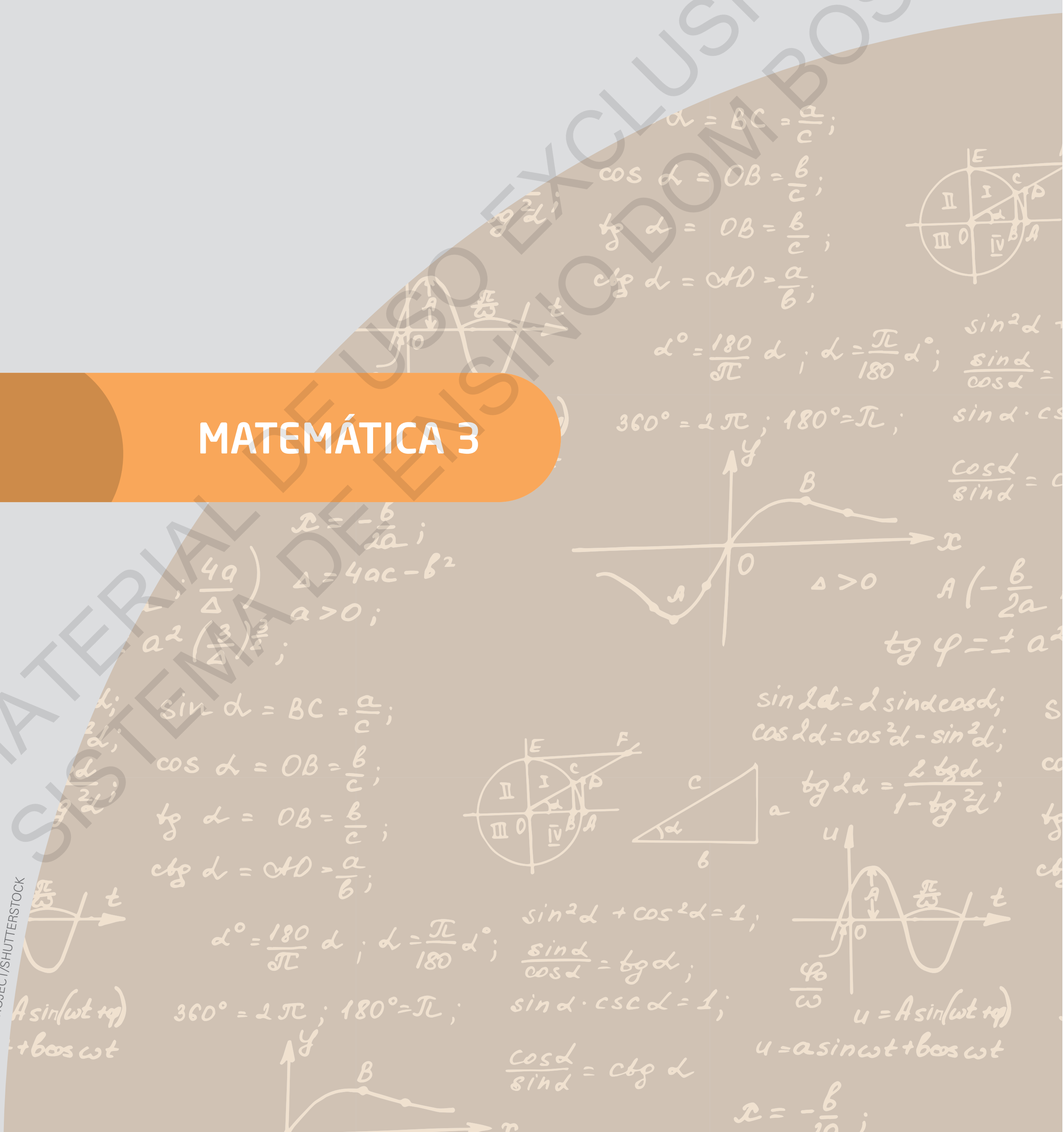
Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 3



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

17 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM I

Comentário sobre o módulo

Neste módulo abordamos os conceitos de análise combinatória. No primeiro momento, estudamos o número fatorial e sua forma prática de simplificação. Depois apresentamos o princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo).

Para ir além

O trabalho "Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática" é um bom material para abordar o ensino da análise combinatória de forma bem completa. Disponível em:

<https://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/livreto_Adriana_Luzie.pdf>

Acesso em: 15 nov. 2018.

O artigo "Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica" trata das origens da análise combinatória. Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>

Acesso em: 15 nov. 2018.

Exercícios propostos

7 . D

Pelo princípio multiplicativo, o resultado será $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

8. C

Por serem três pontos e tendo cada ponto 256 tonalidades, obtemos $256 \cdot 256 \cdot 256 = 256^3$ cores.

9. B

Para cada uma das 3 coleiras, há 7 roupas. Logo, o número de opções diferentes de se passear com Kika é $3 \cdot 7 = 21$.

10. $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

11. C

Haverá 5 formas para escolher a cor da letra T e 4 modos de selecionar a cor das letras A e E. Também existem 4 jeitos de escolher a cor das letras F e C. Pelo princípio multiplicativo, temos $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$.

12. Se (i) representa algarismo ímpar e (p), algarismo par, os números que atendem às exigências são da forma ipipipi. Logo, como o número deve ser divisível por 5, conclui-se que o algarismo das unidades só pode ser 5. Sendo assim, existirão 4 opções para o primeiro algarismo, 5 para o segundo, 3 para o terceiro, 4 para o quarto, 2 para o quinto e 3 para o sexto. Pelo princípio multiplicativo, a resposta é $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 1\,440$.

13. A

Montante de placas executáveis no modelo em estudo: $26^4 \cdot 10^3$.

Montante de placas executáveis no modelo atual: $26^3 \cdot 10^4$.

Razão entre os dois valores: $\dfrac{24^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = 2{,}6$.

Sendo assim, o aumento será de $2{,}6 - 1 = 1{,}6$ (160%). Ou seja, inferior ao dobro.

14. C

$$\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!} = \frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3!(x-1)\,(x-2)\,(x-3)!}{4(x-3)!} = \frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3!(x-1)(x-2)}{4} = \frac{182-x(x-1)}{2}$$

$6(x - 1)(x - 2) = -2x^2 + 2x + 364 \rightarrow$
$\rightarrow 8x^2 - 5x - 88 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x_1 = 8$ e $x_2 = -5{,}5$ (não convém)

Portanto, o número 8 é um cubo perfeito.

15. A

Da questão, obtemos:

$A = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_{p-1}, X_p, ..., X_n\}$

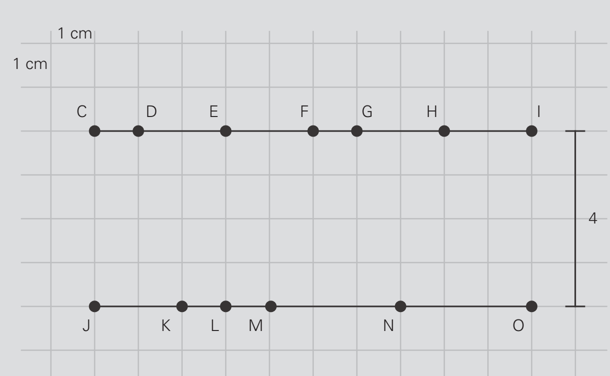
$B = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_p\}$

$X = X_1, X_2, X_3, ..., (-, -, -, ..., -) =$

$= (n - p)$ elementos.

Portanto, cada um dos $(n - p)$ elementos pode fazer parte ou não do conjunto X. Sendo assim, pelo princípio da multiplicação, haverá 2^{n-p} opções para construir o conjunto X.

16. B



O quadrilátero que vai ser desenhado é um trapézio.

B e b são as medidas da base maior e da menor do trapézio.

Percebe-se que B ≠ b, pois há um único par de lados paralelos.

Portanto, do enunciado e da figura, temos:

$$A = \frac{(B + b) \cdot 4}{2} = 12$$

B + b = 6

Percebe-se que B e b são inteiros, o que nos fornece B = 5 e b = 1 ou B = 4 e b = 2.

Nos dois casos (B = 5 e b = 1 ou B = 4 e b = 2), conseguiremos B e b como os pontos da parte superior ou inferior.

Dessa forma, temos:

1) B = 5 (obtido com base nos pontos da parte superior: CF ou DG ou EH ou FI, resultando 4 possibilidades).

2) b = 1 (obtido com base nos pontos da parte inferior: KL ou LM, resultando 2 possibilidades).

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o total de trapézios com B = 5 (obtido com os pontos da parte superior) e b = 1 (obtido com os pontos da parte inferior) será $4 \cdot 2 = 8$.

3) B = 4 (obtido com base nos pontos da parte superior: DF ou GI, resultando 2 possibilidades).

4) b = 2 (obtido com base nos pontos da parte inferior: JK ou KM, resultando 2 possibilidades).

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o total de trapézios com B = 4 (obtido com os pontos da parte superior) e b = 2 (obtido com os pontos da parte inferior) será $2 \cdot 2 = 4$.

5) B = 5 (obtido com base nos pontos da parte inferior: KN, resultando 1 possibilidade).

6) b = 1 (obtido com base nos pontos da parte superior: CD ou FG, resultando 2 possibilidades).

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o total de trapézios com B = 5 (obtido com os pontos da parte inferior) e b = 1 (obtido com os pontos da parte superior) será $1 \cdot 2 = 2$.

7) B = 4 (obtido com base nos pontos da parte inferior: JM ou LM, resultando 2 possibilidades).

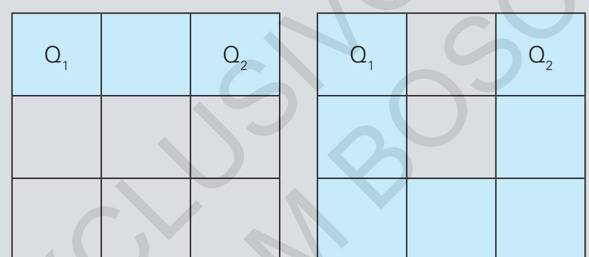
8) b = 2 (obtido com base nos pontos da parte superior: DE ou EF ou GH ou HI, resultando 4 possibilidades).

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o total de trapézios com B = 4 (obtido com os pontos da parte inferior) e b = 2 (obtido com os pontos da parte superior) será $2 \cdot 4 = 8$.

Com base nesses dados, a quantidade de trapézios que podem ser formados é 8 + 4 + 2 + + 8 = 22.

17. a) Ficando Q_1 e Q_2 preenchidos de azul, há $2 \cdot 2 = 4$ maneiras de colorir os outros dois quadrados do quadriculado. Assim, Q_1 e Q_2 só não estarão conectados quando os outros dois quadrados estiverem pintados de branco. Sendo assim, a resposta é 4 – 1 = 3.

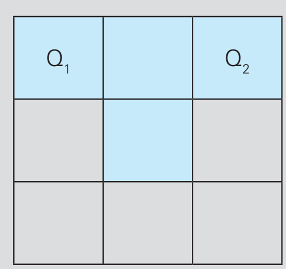
b) Pintando de branco o quadrado central, há apenas duas formas de conectar Q_1 e Q_2, conforme as figuras.



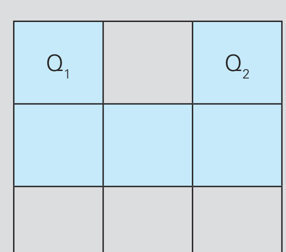
Na primeira, temos $2^5 = 32$ formas de pintar os 5 quadrados que sobram. Já na segunda, há apenas 1 forma de pintar o quadrado restante. Se pintarmos o quadrado entre Q_1 e Q_2 de azul, cairemos na figura da esquerda.

Então, a resposta é 32 + 1 = 33.

c) Pintando de azul os quadrados apresentados, temos $2^5 = 32$ formas de pintar os 5 quadrados restantes.



Além do mais, pintando de azul os quadrados apresentados e de branco o quadrado entre Q_1 e Q_2, temos $2^3 = 8$ formas de pintar os 3 quadrados da última linha.



Desse modo, o resultado encontrado em (b) é 33 + 32 + 8 = 73.

Estudo para o Enem

18. E

Pelo princípio multiplicativo, o resultado será $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 900 = 9 \cdot 10^7$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. E

Calculando, obtemos:

$| \rightarrow 26 \cdot 10^5 = 2\,600\,000$ opções

$|| \rightarrow 10^6 = 1\,000\,000$ opções

$||| \rightarrow 26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000$ opções

$IV \rightarrow 10^5 = 100\,000$ opções

$V \rightarrow 26^3 \cdot 10^2 = 1\,757\,600$ opções

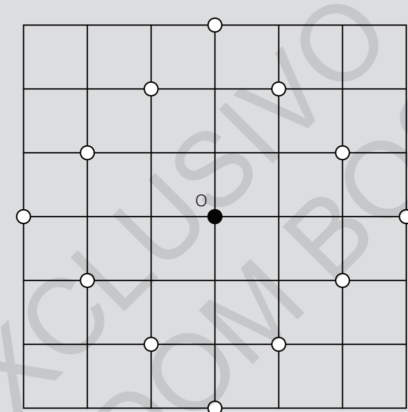
Como o número aguardado de clientes é igual a 1 milhão, o formato que resulta num número de senhas prováveis superior a 1 milhão (mas não superior a 2 milhões) é dado na opção V.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

20. C

Avaliando a figura, em que estão as possíveis localizações do cliente, concluímos que a resposta é 12.



Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

18 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM II

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos os estudos sobre o princípio fundamental da contagem. Construímos a árvore de possibilidades e estudamos os casos de contagens com restrições, aplicando-se o princípio da preferência.

Para ir além

O artigo "O uso de árvore de possibilidades – com ou sem recurso tecnológico – no ensino da combinatória com alunos dos anos iniciais de escolarização" é um material interessante que aborda a possibilidade do ensino de combinatória em diferentes anos escolares. Disponível em:

<https://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/d183de8301c94c7d1531f02335a98f13.pdf>

Acesso em: 15 nov. 2018.

A dissertação de mestrado *Uma abordagem alternativa para o ensino da análise combinatória no ensino médio* aborda a utilização do princípio multiplicativo como ferramenta didática. Disponível em:

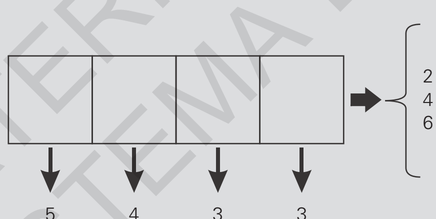
<https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/rafaela_goncalves.pdf>

Acesso em: 15 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. C

Anotando todas as opções dos algarismos em cada casa decimal e concretizando o produto desses resultados, obtemos a quantidade de números pares de quatro algarismos principais, gerando 1, 2, 3, 4, 5 e 6.



$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ números pares de algarismos distintos.

8. B

Uma vez que o algarismo das unidades deve ser par e diferente de zero, existem 4 formas de selecioná-lo. Sendo assim, como há 10 possibilidades para o algarismo das dezenas e 10 formas de selecionar o algarismo das centenas, pelo princípio multiplicativo, obtemos $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

9. A

Pelo enunciado, entende-se que as cores da listra e da lateral precisam ser diferentes para que a listra seja visível. Assim, a listra só precisa ser de uma cor específica, diferente da cor da lateral. Logo, as alternativas são: 5 possibilidades de cor na tampa; 5 possibilidades de cor na lateral e 4 possibilidades de cor na listra. Pelo princípio fundamental da contagem, obtemos $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ alternativas.

10. a) A maior quantidade executável de pacotes equivale ao máximo divisor comum dos números de camisas, calças e pares de sapatos. Logo, equivale ao MDC $(2\,160, 1\,800, 1\,200) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Consequentemente, em cada pacote vai haver $\frac{2160}{120} = 18$ camisas, $\frac{1800}{120} = 15$ calças e $\frac{1200}{120} = 10$ pares de sapatos.

b) Pelo princípio multiplicativo, Pedro poderá escolher um conjunto com 1 camisa, 1 calça e 1 par de sapatos de $(L \cdot m \cdot n)$ formas.

11. C

Existem 5 modos de escolher o jogo com placar de 0×0. Sendo assim, vão ser marcados apenas 4 gols nos quatro jogos que sobram, e nenhum poderá terminar em 0×0. Impreterivelmente todos terão placar de 1×0. Logo, há 2 maneiras de escolher o time vencedor em cada jogo.

Pelo princípio multiplicativo, a resposta é $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 80$.

12. D

São 5 as escolhas existentes para cada um dos 10 times. Pelo princípio multiplicativo, a resposta é 5^{10}.

13. Há $7 + 6 + ... + 1 = 28$ números que iniciam por 1, $6 + 5 + ... + 1 = 21$ números que iniciam com 2, e assim ininterruptamente, até o número 789, que é o último que apresenta os algarismos em ordem crescente.

Sendo assim, a resposta é $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$.

14. D

Primeiro, temos os números que são múltiplos de 4 e que têm o algarismo 0 na ordem das dezenas ou na das unidades. Esses números terminam em 04, 08, 20, 40, 60 e 80. Assim, como existem 8 escolhas possíveis para a ordem dos milhares e 7 possibilidades para a ordem das centenas, pelo princípio multiplicativo, temos $6 \cdot 8 \cdot 7 = 336$ números.

De outra forma, os números múltiplos de 4 e que não expressam o algarismo 0 na ordem das dezenas nem na ordem das unidades terminam em 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92 e 96. Desse modo, como há 7 escolhas possíveis para a ordem dos milhares e 7 possibilidades para a ordem das centenas, pelo princípio multiplicativo, temos $16 \cdot 7 \cdot 7 = 784$ números.

Em decorrência, pelo princípio aditivo, a resposta é $336 + 784 = 1\,120$.

15. A

Sabendo-se que cada letra maiúscula é diferente da sua correspondente minúscula, há $2 \cdot 26 + 10 = 62$ opções para cada dígito da senha. Sendo assim, pelo princípio fundamental da contagem, existem 62^6 senhas elegíveis de 6 dígitos.

Igualmente, no sistema anterior existiam 10^6 senhas elegíveis de 6 dígitos.

Portanto, a razão solicitada é $\frac{62^6}{10^6}$.

16. D

Do enunciado, antes da mudança, temos:

___ A ___ A ___ A ___ A ___

(A) indica um algarismo aleatório.

Há 5 possibilidades para se colocar a letra minúscula. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, $N = 5 \cdot 26 \cdot 10^4$.

Similarmente:

$M = 6 \cdot 26 \cdot 10^5$

Então:

$M = 6 \cdot 26 \cdot 10^5$

$\frac{M}{N} = \frac{6 \cdot 26 \cdot 10^5}{5 \cdot 26 \cdot 10^4}$

$\frac{M}{N} = 12$

$M = 12 \cdot N$

17. a) Como Mônica tem 5 blusas e 4 calças distintas, o total de formas de escolher uma blusa e uma calça para sair é dado pelo princípio fundamental da contagem.

Seja x o total de formas, temos:

$x = 5 \cdot 4$

$x = 20$

b) Se Mônica:

- escolher a blusa branca, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa vermelha, há 4 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa amarela, há 4 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa preta, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa verde, há 4 opções para a seleção da calça.

Então, há $3 + 4 + 4 + 3 + 4 = 18$ formas de Mônica escolher suas roupas.

c) Se Mônica:

- escolher a blusa branca, há 2 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa vermelha, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa amarela, há 3 opções para a seleção da calça;
- escolher a blusa verde, há 3 opções para a seleção da calça;

Então, há $2 + 3 + 3 + 3 = 11$ formas de Mônica escolher suas roupas.

Estudo para o Enem

18. C

Analisando a diferença de pontuação total entre a Escola II e as outras escolas, observa-se que a Escola II será campeã, independentemente das notas das escolas I, III e V. Sendo assim, com referência a essas escolas, há 5 notas favoráveis para cada uma.

De outra forma, como a Escola II vence a Escola IV em caso de empate, e tendo a Escola IV um benefício de dois pontos em relação à Escola II, a última será campeã nos seguintes casos:

- 6 para a Escola IV e 8, 9 ou 10 para a Escola II;

- 7 para a Escola IV e 9 ou 10 para a Escola II;
- 8 para a Escola IV e 10 para a Escola II.

Como resultado a resposta será:

$3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. C

Como $26^3 \cdot 10^4$ é o número total de placas, e 26^3 é o número de placas em que os números são todos iguais a zero, podemos utilizar $26^3 \cdot 10^4 - 26^3 = 26^3 (10^4 - 1)$ placas.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. C

Fundamentando o caso em que os círculos A e C têm cores distintas, temos:

- 3 formas de escolher a cor do círculo A;
- 2 formas de escolher a cor do círculo C;
- 1 forma de escolher a cor do círculo B;
- 1 forma de escolher a cor do círculo D.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, há $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ opções.

De outra maneira, se A e C apresentam a mesma cor, temos:

- 3 formas de escolher a cor comum;
- 2 formas de escolher a cor do círculo B;
- 2 formas de escolher a cor do círculo D.

Logo, pelo princípio multiplicativo, há $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ opções.

Assim, pelo princípio aditivo, a resposta será $6 + 12 = 18$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19 PERMUTAÇÃO SIMPLES E COM REPETIÇÃO

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos o trabalho com os conceitos de análise combinatória. No primeiro momento, foram abordados a permutação simples e o estudo de anagramas. Depois nos aprofundamos na análise sobre permutação em casos com repetições de objetos, letras ou números.

Para ir além

O texto "Mas afinal para que serve o Código Morse?" desvenda os mistérios dessa ferramenta de comunicação. Disponível em:

<https://www.hipercultura.com/codigo-morse/>

Acesso em: 16 nov. 2018.

O artigo "Atividades experimentais de análise combinatória no ensino médio em uma escola estadual" mostra as diferentes maneiras de ensinar análise combinatória nessa fase escolar. Disponível em:

<http://www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E5_Vazquez_TA.pdf>

Acesso em: 16 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. A

Acham-se $P_8 = 8!$ formas de alojar os adultos e 8 formas de selecionar o colo em que sentará o bebê. Assim, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $8 \cdot 8!$.

8. E

Temos:

- $P_3 = 3!$ formas de arrumar os três blocos de livros;
- $P_3 = 3!$ maneiras de organizar os livros de Álgebra;
- $P_2 = 2!$ formas de arrumar os livros de Cálculo;
- $P_2 = 2!$ maneiras de dispor os livros de Geometria.

Logo, pelo princípio multiplicativo, a resposta é:

$3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! = 144$.

9. B

O número de anagramas da palavra CARNAVAL é calculado por: $P_8^3 = \frac{8!}{3!} = 6\,720$ anagramas.

Para cada anagrama, vamos levar 0,5 s.

O tempo total será $6\,720 \cdot 0{,}5 = 3\,360$ s.

Ou seja, pouco menos de 1 hora, o que equivale a 3 600 s.

Portanto, a resposta é menos de 1 hora.

10. Temos de executar uma permutação de 10 com repetições de 3, 3, 2 e 2:

$$P_{10}^{3,3,2,2} = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = 25\,200.$$

11. D

O número de anagramas possíveis com a palavra LÓGICA é:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

A soma dos ângulos internos de um polígono regular é obtida pela fórmula $S = (n - 2) \cdot 180$, em que n é o número de lados do polígono.

Assim, se $S = 720$, teremos:

$S = 720 \rightarrow 720 = (n - 2) \cdot 180 \rightarrow n = 6$.

O polígono regular de 6 lados que se procura é o hexágono.

12. C

O resultado será conseguido por:

$$P_{10}^{4,2,4} = \frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 4!} = 3\,150.$$

13. C

A palavra CARAVELAS contém 5 consoantes e 4 vogais. Existe uma única configuração possível dos anagramas que apresentam vogais e consoantes alternadas, em que CO é uma consoante e VO, uma vogal.

CO	VO	CO	VO	CO	VO	CO	VO	CO

Obtemos então 5 consoantes diferentes e 4 vogais, com 3 repetidas. Sendo assim, o número N de anagramas solicitado é dado por:

$$N = P_5 \cdot P_4^3 = 5! \cdot \frac{4!}{3!} = 480.$$

14. E

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

15. E

Escrevendo os números, teremos $4! = 24$ vezes em cada ordem decimal.

O somatório dos números é 25.

Assim, a soma dos algarismos em cada ordem decimal é:

$24 \cdot 25 = 600.$

Podemos verificar então que a soma S é dada por:

$S = 24 \cdot 25 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 600 \cdot$
$\cdot 11\,111 = 6\,666\,600.$

16. B

As 10 pessoas podem se sentar de $P_{10} = 10!$ maneiras. De outra forma, o casal que está brigado pode se sentar lado a lado de $P_9 \cdot P_2 = 2 \cdot 9!$ maneiras.

Concluímos que o resultado solicitado é:

$10! - 2 \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!.$

17. E

Permutando as letras S, T, I, B, U, L, obtemos uma permutação simples:

$VE\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}\ AR$

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Estudo para o Enem

18. B

Há 16 posições seguidas de uma fila, em que as de mando ímpar serão preenchidas pelos 8 filmes de ação, as 5 primeiras de mando par serão preenchidas pelos filmes de comédia e as 3 últimas de mando par serão preenchidas pelos filmes de drama.

Então, os filmes:

- de ação serão colocados de $P_8 = 8!$ maneiras;
- de comédia, de $P_5 = 5!$ maneiras;
- de drama, de $P_3 = 3!$ maneiras.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o resultado é $8! \cdot 5! \cdot 3!$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. E

Há $10 \cdot 10 = 10^2$ formas de escolher os dois algarismos e $52 \cdot 52 = 52^2$ formas de selecionar as letras. Definidos os caracteres da senha, podemos dispô-los de $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, a resposta é $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. E

Há 4 escolhas para os lugares em que sentarão Amaro e Danilo. Selecionados os assentos em que eles vão sentar, ainda podemos permutá-los de 2 maneiras. Ainda, as outras seis pessoas podem ser distribuídas de 6! maneiras.

Sendo assim, pelo princípio fundamental da contagem, o resultado pedido é:

$4 \cdot 2 \cdot 6! = 5\,760.$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20 ARRANJO SIMPLES

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos com a abordagem dos conceitos de análise combinatória. Após o estudo de permutação simples e com repetição, estudamos o arranjo simples, demonstrando que a disposição das variáveis altera o resultado final.

Para ir além

O material "Análise combinatória e probabilidade" aborda os principais conceitos de análise combinatória com a apresentação de outras situações-problemas. Disponível em:

<http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_medio/8_permutacao_arranjo_p.pdf>

Acesso em: 16 nov. 2018.

O artigo "Conhecimento de professores que ensinam Matemática sobre problemas de arranjo e combinação" discute as formas de trabalhar os conceitos de arranjo e combinação. Disponível em:

<http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1657.pdf>

Acesso em: 16 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. O resultado condiz com o número de métodos simples de 5 objetos preenchidos 3 a 3. Ou seja:

$A_{5,3} = \dfrac{5!}{2!} = 60.$

8. D

Eles sentarão com as seguintes combinações:

- Nas primeiras duas fileiras: $2! = 2$.
- Nas do meio: $A_{3,2} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$.
- Nas duas últimas: $2! = 2$.

Portanto, o total é de $2 + 6 + 2 = 10$ possibilidades.

9. B

O número de formas com que esse aluno pode escrever a palavra é similar ao arranjo de 4, 3 a 3. Assim:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$A_{4,3} = 24$$

10. D

O total de opções que eles terão para apontar seus armários será igual ao arranjo de 8 armários 2 a 2. Assim:

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

11. Para a primeira parte, temos, de acordo com as restrições do exercício, que $n = 7$ algarismos e $p = 5$ espaços.

Logo: $A_{7,5} = \dfrac{7!}{(7-5)!} = \dfrac{7!}{2!} = 2\,520$ números diferentes.

Para os números pares, o final deverá ser {2, 4, 6}.

Basta, então, calcularmos $A_{6,4} \cdot 3$.

Logo, teremos: $\dfrac{6!}{(6-4)!} \cdot 3 = \dfrac{720}{2} \cdot 3 = 1\,080$ números pares possíveis.

12. D

- Cuidando do paciente D pela manhã: $A_{3,2} \cdot A_{4,2} = 6 \cdot 12 = 72$.
- Cuidando do paciente D pela tarde: $A_{3,1} \cdot A_{4,3} = 3 \cdot 24 = 72$.

Portanto, a quantidade de maneiras diferentes de a secretária conseguir agendar esses pacientes é $72 + 72 = 144$.

13. O produto solicitado é dado pelo número de arranjos simples dos 8 elementos do conjunto Y ocupados 5 a 5.

Ou seja, $A_{8,5} = \dfrac{8!}{3!} = 6\,720$.

14. D

Utilizando a fórmula de arranjo simples, obtemos:

$$A_{24,3} = \frac{24!}{(24-3)!} = 24 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,144.$$

Logo, há no total 12 144 tampinhas possíveis.

15. Calculando, obtemos:

$$A_{n,3} = 4 \cdot A_{n,2}$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 4 \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$4 \cdot (n-3)! = (n-2) \cdot (n-3)!$$

$$n - 2 = 4$$

$$\therefore\ n = 6$$

A solução da equação é $n = 6$.

16. B

Para que haja pelo menos um brasileiro entre as três primeiras colocações, basta calcularmos o total de possibilidades e subtrairmos as possibilidades de não haver nenhum brasileiro.

Logo: $A_{9,3} - A_{5,3} = \frac{9!}{(9-3)!} - \frac{5!}{(5-3)!} = 504 - 60 =$

$= 444$ possibilidades.

17. B

Pela fórmula de arranjo, obtemos:

p = total de cadeiras

n = quantidade de alunos

Logo: $A_{50,2} = \frac{50!}{(50-2)!} = 50 \cdot 49 = 2\,450$ possibilidades.

Estudo para o Enem

18. B

Utilizando a fórmula de arranjo simples, obtemos:

$n = A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$

Logo, o valor de $\frac{n}{5} = \frac{360}{5} = 72$ maneiras.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. B

A quantidade de jogos disputados será:

$A_{20,2} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$

Sendo os oponentes paulistas, o número total de jogos será:

$A_{6,2} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30.$

Sendo assim, a porcentagem solicitada será igual a:

$\frac{30}{380} \cdot 100\% \cong 7{,}9\%.$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. A

2,5 h = 9000 s

Sabendo que **d** é o número da senha ímpar, sendo **n** o número de senhas, temos:

$n = 10^{d-1} \cdot 5$ ou, ainda, $n = 9\,000 \div 1{,}8 = 5\,000.$

Sendo assim:

$10^{d-1} \cdot 5 = 5\,000$

$d - 1 = 3$

$d = 4.$

Observa-se que **d** é um quadrado perfeito.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

21 COMBINAÇÃO I

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos o estudo da análise combinatória. Foram estudadas as combinações e as mais diversas maneiras de se observar o agrupamento de números, objetos ou pessoas por meio de combinações simples.

Para ir além

A dissertação *O ensino da análise combinatória através de situações-problema* é um ótimo material que aborda de modo completo a análise combinatória. Disponível em:

<http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/325395/1/Garcia_HeitorAmaral_M.pdf>

Acesso em: 17 nov. 2018.

O artigo "Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica" trata da importância da análise combinatória no ensino. Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>

Acesso em: 17 nov. 2018.

O texto "Como funciona o sistema Braille" mostra o funcionamento desse método de comunicação. Disponível em:

<https://novaescola.org.br/conteudo/397/como-funciona-sistema-braille>

Acesso em: 17 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. C

Vamos considerar o número de formas de se colocarem 6 filhos no primeiro quarto. Para isso, precisamos combinar 10 elementos tomados 6 a 6.

$C_{10,6} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$

8. Temos de obter associações de 8 amigos, 2 a 2. Logo, temos:

$C_{8,2} = \dfrac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = 28.$

9. B

Calculando, obtemos:

$C_{8,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

$A_{8,3} = \dfrac{8!}{5!} = 336$

Logo, $y - x = 336 - 56 = 280$.

10. E

A e B são os estudantes que não podem se vincular a um mesmo grupo.

Supondo que queiramos calcular quantas são as possibilidades para formar precisamente um grupo teremos $C_{20,3} = \dfrac{20!}{3! \cdot 17!} = 1\,140$ opções (entre essas, A e B estão presentes em 18).

Portanto, a solução é $1\,140 - 18 = 1\,122$.

11. E

De 1 até 12 temos 10 algarismos decorrentes, pois o primeiro deles não pode ser o 11 nem o 12.

Calcula-se a quantidade de grupos formados por 3 pessoas:

$C_{12,3} = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = 220.$

Assim, a quantidade máxima de grupos que se podem elaborar de modo que os crachás não sejam identificados por 3 números consecutivos é:

$220 - 10 = 210.$

12. A lanchonete tem 5 funcionários e, no mínimo, 1 trabalha. Teremos 5 combinações alternando de 1 a 5 funcionários. Assim:

$$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} + \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} + \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} + \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} + \frac{5!}{1! \cdot (5-5)!} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31.$$

13. Soma: 01 + 02 = 03.

(04) Incorreta. Concebendo que todas as cartelas são separadas, então os números não se repetem. Assim, o número máximo é 3 cartelas.

(08) Incorreta. Considerando uma cartela em que a coluna 0 tem os menores números possíveis: $61 + 62 + 63 + 64 + 65 = 315 > 200$.

(16) Incorreta. Os dois números têm a idêntica chance de ocorrência.

14. E

Calculando, obtemos:

1) 2 pontos em r, 1 ponto em s. $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10.$

Então, triângulos $= 10 \cdot 4 = 40$.

2) 1 ponto em r, 2 pontos em s. $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6.$

Então, triângulos $= 6 \cdot 5 = 30$.

$\therefore$ Total de triângulos: $40 + 30 = 70$.

15. B

Calculando, obtemos:

$100\% \rightarrow C_{4,1} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} 80\% + 20\% \\ 20\% + 80\% \\ 40\% + 60\% \\ 60\% + 40\% \end{array}\right\} \rightarrow 4 \text{ opções de mistura} \rightarrow 4 \cdot C_{4,2} = 4 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 \cdot 6 = 24$$

$$\left.\begin{array}{l} 60\% + 20\% + 20\% \\ 20\% + 60\% + 20\% \\ 20\% + 20\% + 60\% \\ 20\% + 40\% + 40\% \\ 40\% + 20\% + 40\% \\ 40\% + 40\% + 20\% \end{array}\right\} \rightarrow 6 \text{ opções de mistura} \rightarrow 6 \cdot C_{4,3} = 6 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 6 \cdot 4 = 24$$

No total, há $4 + 24 + 24 = 52$ opções de cores.

16. D

Existem $C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$ maneiras de selecionar 3 pontos aleatórios. Entre as possibilidades, temos de descontar aquelas em que não se pode formar um triângulo. Há 2 segmentos de reta que evidenciam 4 pontos cada um, resultando $2 \cdot C_{4,3} = 2 \cdot 4 = 8$ possibilidades.

Portanto, a resposta é $220 - 8 = 212$.

17. a) O total de triângulos será obtido por meio do número total de combinações possíveis de pontos 3 a 3, menos o número de combinações de pontos colineares.

Assim, podemos escrever:

número total $\rightarrow C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$.

Pontos colineares sobre o eixo y:

$y = \{(0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 0)\} \rightarrow C_{7,3}$

Pontos colineares sobre o eixo x:

$x = \{(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 0)\} \rightarrow C_{7,3}$

Pontos colineares $\rightarrow 2 \cdot C_{7,3} = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 70$

Portanto, o total de triângulos é $286 - 70 = 216$.

b) Observamos que os pontos reunidos estão sobre um dos eixos do plano cartesiano. Assim, se 2 vértices se encontram sobre o eixo y, o terceiro vértice está obrigatoriamente sobre o eixo x (considerando os pontos reunidos). O total de opções de 2 pontos sobre o eixo y é:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Para o terceiro vértice, há 6 opções de seleções (pontos sobre o eixo x). Sendo assim, o número de triângulos que possivelmente vamos encontrar é $21 \cdot 6 = 126$.

Estudo para o Enem

18. D

O professor pode ir a 3 museus dos 4 disponíveis no Brasil ($C_{4,3}$).

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! - 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

Também pode ir em 2 dos 4 museus disponíveis no exterior ($C_{4,2}$).

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! - 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Pelo princípio fundamental da contagem, obtemos:

$4 \cdot 6 = 24$ maneiras diferentes de visitar os museus.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. B

A quantidade de interruptores é idêntica ao número de combinações de 6 elementos (lâmpadas) tomados de 3 em 3.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20. B

Do enunciado, temos que existem 3 opções para a escolha do goleiro.

O total de formas de selecionar os outros 3 jogadores, após a escolha do goleiro, é dado por:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot (12 - 3)!}$$

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!}$$

$$C_{12,3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!}$$

$$C_{12,3} = 220$$

Dessa forma, pelo princípio fundamental da contagem, o total de maneiras de selecionar os 4 jogadores é $3 \cdot 220 = 660$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

22 COMBINAÇÃO II

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos o estudo da análise combinatória. Foram estudadas as combinações e as mais diversas maneiras de se observar o agrupamento de números, objetos ou pessoas por meio de combinações simples.

Para ir além

A monografia *Teorema do binômio de Newton* tem uma abordagem completa sobre o número binomial. Disponível em:

<https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Louraine_BN_2014.pdf>

Acesso em: 18 nov. 2018.

O artigo "O uso das propriedades do triângulo de Pascal como atividades investigativas no ensino de análise combinatória" trata do uso do triângulo de Pascal na resolução de problemas de análise combinatória. Disponível em:

<http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/O-USO-DAS-PROPRIEDADES-DO-TRI%C3%82NGULO-DE-PASCAL-COMO-ATIVIDADES-INVESTIGATIVAS-NO-ENSINO-DE-AN%C3%81LISE-COMBINAT%C3%93RIA.pdf>

Acesso em: 18 nov. 2018.

Exercícios propostos

7. E

A resposta solicitada ocorre quando uma das pessoas não cumprimenta com aperto de mão exatamente uma das outras n – 1 pessoas no recinto.

Portanto, a resposta é: $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} - 1 =$

$$= \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - 1 = \frac{n \cdot (n-1) - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}.$$

8. Adotando L como letra e A como algarismo, pelas possibilidades de emplacamento, obtemos:

L – L – A – A – A – L – L

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 \cdot 10^3$.

Para calcular o total de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) em qualquer ordem na placa, devemos primeiro considerar a posição das letras.

Ou seja, $C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = 35$.

Assim, há 35 possíveis combinações de 4 letras e 3 algarismos. Logo, o total de possibilidades de placas com 4 letras (incluindo repetição) e 3 algarismos (incluindo repetição) pode ser obtido pelo princípio fundamental da contagem:

$35 \cdot 26^4 \cdot 10^3$

9. C

Fazendo a associação entre as combinações de 2 e 3 sabores de cobertura, pode-se equacionar:

$$\frac{C_{y,3}}{C_{y,2}} = \frac{200}{150} \rightarrow \frac{\frac{y!}{(y-3)! \cdot 3!}}{\frac{y!}{(y-2)! \cdot 2!}} = \frac{y!}{(y-3)! \cdot 3!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(y-2)! \cdot 2!}{y} = \frac{(y-2) \cdot (y-3)! \cdot 2!}{(y-3)! \cdot 3 \cdot 2!} =$$

$$= \frac{(y-2)}{3} = \frac{200}{150}$$

$$\frac{y-2}{3} = \frac{200}{150} \rightarrow 150y - 300 = 600 \rightarrow$$

$$\rightarrow 150y = 900 \rightarrow y = 6$$

10. A

Para a situação I, há $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$ opções prováveis.

Para a situação II, o número de escolhas é dado por $10 + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 130$.

Com isso, a resposta é $\frac{55}{130} = \frac{11}{26}$.

11.

- Utilizando 3 cores:

Base = 5 opções

Faces laterais opostas = $C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ opções

Total = $5 \cdot 6 = 30$

- Utilizando 4 cores:

Base = 5 opções

2 faces laterais opostas = 4 opções

2 faces laterais opostas = 3 opções

Total = $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

- Utilizando 5 cores:

Base = 5 opções

Faces laterais = 3! = 6 opções

Base = 5 · 6 = 30

Total de opções = 30 + 60 + 30 = 120

12. A

Considerando (a) cartela azul e (v) cartela vermelha, as possibilidades são: {a, a, a}, {a, a, v}, {a, v, v} e {v, v, v}.

Portanto, é provável retirar:

- 3 cartelas azuis de $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1\,140$ maneiras;
- 2 cartelas azuis e 1 vermelha de $\binom{20}{2} \cdot \binom{30}{1} =$ $= \frac{20!}{2! \cdot 18!} \cdot 30 = 5\,700$ maneiras;
- 1 cartela azul e 2 vermelhas de $\binom{20}{1} \cdot \binom{30}{2} =$ $= 20 \cdot \frac{30!}{2! \cdot 28!} = 8\,700$ maneiras;
- 3 cartelas vermelhas de $\binom{30}{3} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = 4\,060$ maneiras.

Logo, pelo princípio aditivo, a resposta é: 1 140 + + 5 700 + 8 700 + 4 060 = 19 600

13. Soma: 04 + 16 = 20.

Observando a legenda L (leste) e N (norte), temos:

- A até B (LLNN): $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$
- A até C (LLLLNN): $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$
- A até D (LLLLLNNNN): $\frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$
- B até C (LL): 1
- B até D (LLLNN): $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$
- C até D (LNN): $\frac{3!}{2!} = 3$

(01) Falsa, pois há 126 caminhos de A até D.

(02) Falsa, pois 15 · 3 = 45.

(08) Falsa, pois 6 · 1 · 3 = 18.

14. E

- Número de opções possíveis de 3 pontos: $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$
- Número de opções com 3 pontos alinhados: $2 \cdot C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 8.$
- Número de opções com 3 símbolos iguais: $2 \cdot C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 8.$

Assim, a quantidade de triângulos criados com símbolos únicos é dada por: 56 – 8 – 8 = 40.

15. D

Aparecem $\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 525.$

Há 525 maneiras de formar uma comissão com 2 vereadores da situação e 3 da oposição.

Dessas, as que têm os dois líderes são $\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2} =$ $= 5 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 75.$

Há 75 maneiras de os agrupamentos exibirem os dois líderes.

Assim, há 525 – 75 = 450 maneiras para esse caso.

De outra forma: $\binom{6}{3} \cdot \binom{7}{2} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} =$ $= 420.$

Logo, há 420 maneiras de formar uma comissão com 3 vereadores da situação e 2 da oposição. No entanto, nessas comissões estão inseridos:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 6 = 60.$$

Há 60 possibilidades em que os dois líderes atuam. Em decorrência, existem 420 – 60 = 360 comissões prováveis.

Assim, pelo princípio aditivo, a resposta será 450 + + 360 = 810.

Logo, há 810 comissões possíveis.

16. Se n (n ∈ $\mathbb{N}^*$) é o número de pessoas que fazem parte da plateia, temos:

$$\binom{n}{2} = 496 \rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 496 \rightarrow$$

$\rightarrow n \cdot (n - 1) = 992 \rightarrow n^2 - n - 992 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow n' = -31$ e $n'' = 32 \therefore n = 32$

17. B

Calculando a equação solicitada, obtemos:

$$\binom{x+2}{2} = \binom{3x+1}{1}$$

$$\frac{(x+2)!}{2! \cdot ((x+2)-2)!} = \frac{(3x+1)!}{1! \cdot ((3x+1)-1)!}$$

$$\frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot x!}{2! \cdot x!} = \frac{(3x+1) \cdot (3x)!}{1! \cdot (3x)!}$$

$(x + 2) \cdot (x + 1) = 2 \cdot (3x + 1)$

$x^2 + 3x + 2 = 6x + 2$

$x^2 - 3x = 0$

$x \cdot (x - 3) = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = 0$

Calculando o número binomial fornecido, obtemos:

$$\binom{2x-1}{2} = \frac{(2x-1)!}{2! \cdot ((2x-1)-2)!} =$$

$$= \frac{(2x-1) \cdot (2x-2) \cdot (2x-3)!}{2! \cdot (2x-3)!} =$$

$$= \frac{(2x-1) \cdot (2x-2)}{2}$$

Portanto, se $x = 0$, o número dado também é igual a zero, o que não é abrangido pelas alternativas.

Se $x = 3$, vamos ter: $\frac{(2 \cdot 3 - 1) \cdot (2 \cdot 3 - 2)}{2} =$

$= \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10.$

Estudo para o Enem

18. A

A quantidade de maneiras de selecionar dois tenistas quaisquer é $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!}$.

O número de formas de selecionar dois tenistas canhotos é $\frac{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Assim, o resultado é dado por $\frac{10!}{2! \cdot 8!} - \frac{4!}{2! \cdot 2!}$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. D

Existem:

- 2 formas de selecionar o grupo que terá duas seleções sul-americanas;
- $\binom{3}{2} = 3$ opções de escolher essas duas seleções;
- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ formas de escolher as duas seleções europeias que vão compor o grupo com as duas seleções sul-americanas.

Como o segundo grupo é definido unicamente pelas escolhas do primeiro, pelo princípio fundamental da contagem, o resultado pedido é $2 \cdot 3 \cdot 10 = 60$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. B

$C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 =$
$= 113\,400$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Exercícios interdisciplinares

21. A

Analisando os itens, temos:

I) O número de células geneticamente idênticas dobra a cada ciclo. Logo, após 10 ciclos, o organismo terá 210 = 1 024 células, portanto, é verdadeira.

II) Não há duplicação do material genético, mas há divisão do material duplicado anteriormente, logo, é falsa.

III) A sequência será 2, 4, 8,..., logo, o aumento do número obedece a uma progressão geométrica de razão 2, e não a uma progressão aritmética, portanto, é falsa.

IV) O gráfico é uma curva exponencial, então, é falsa.

V) A cada ciclo serão formadas duas células-filhas idênticas à célula-mãe, com a mesma quantidade de cromossomos, tanto sexuais quanto autossomos, portanto, é falsa.

22. Soma: 01 + 08 = 09

Resposta por Química

01) Aresta = a

Área da face $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

Como há 4 faces, temos: $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3}a^2 = a^2\sqrt{3}$.

02) O volume da figura geométrica formada pela molécula de SF_6 (octaedro regular) – considerando que a distância entre dois átomos de flúor adjacentes (aresta) é b – é igual a:

Volume do octaedro regular $= \frac{1}{3} \cdot \text{aresta}^3 \cdot \sqrt{2}$

Aresta = b

Volume do octaedro regular $= \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot \sqrt{2}$

04) O comprimento do apótema da pirâmide que representa a figura geométrica do íon sulfito não é igual à distância de ligação entre o átomo de enxofre e um átomo de oxigênio ("aresta").

08) A figura geométrica formada pela molécula de pentacloreto de fósforo, ou seja, a bipirâmide de base triangular, possui 6 faces.

16) O ângulo entre as ligações B—F na figura geométrica formada pela molécula de BF_3 é aproximadamente de 120 graus.

Resposta por Matemática

01) Verdadeira, pois, sabendo que a molécula de metano é um tetraedro regular de aresta a, pode-se concluir que a soma da área de todas as suas faces será $a^2\sqrt{3}$.

02) Falsa, pois, sabendo que a molécula de SF_6 é um octaedro regular de aresta b, pode-se concluir que seu volume será $\frac{\sqrt{2}}{3}b^3$. Sendo S igual à área e H igual à altura de cada uma das pirâmides que formam o octaedro, tem-se: $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot$ $\cdot H = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot b \cdot \sqrt{\left(b - \frac{b}{2}\right)} = \frac{2}{3} b^2 \cdot \sqrt{\frac{b}{2}} = \frac{2b}{3\sqrt{2}}$.

Portanto, $V = \frac{\sqrt{2}}{3}b^3$.

23. C

Resposta por Matemática

É possível resolver através da permutação, pois três características são apresentadas para cada parte do livro. Portanto, teremos dois grupos com três características cada um.

$P_2 \cdot 3! \cdot 3! = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$

Resposta por Português

O livro *Lira dos vinte anos*, do poeta Álvares de Azevedo, é dividido em três partes. Duas delas apresentam características parecidas: uso do lirismo romântico convencional e aspectos de um intimismo adolescente. A outra diverge dessas duas por apresentar um lirismo romântico grotesco, repleto de ironia e sarcasmo. Nessa parte, a mulher não é idealizada como nas demais, é acessível e descrita sob aspectos carnais.

Para responder a esta questão, é preciso unir os conhecimentos literários ao raciocínio lógico: o enunciado aponta que as características listadas pertencem a duas partes. Desse modo, dividiríamos:

Uma parte

- Uso do lirismo romântico convencional: eu lírico terno; mulher angelical; sentimentos espiritualizados.
- Aspectos de um intimismo adolescente: desdém pela rotina; ênfase no idealismo.

Outra parte

- Uso do lirismo romântico grotesco: eu lírico sarcástico; mulher acessível; sentimentos carnais.
- Uso de recursos humorísticos: ironia, sátira, caricatura.

Não é mencionado de que edição de *Lira dos vinte anos* se trata, e, como as edições divergem, não temos como saber o número de poemas contidos em cada uma. Por isso, é preciso novamente fazer uso da lógica: se as características listadas dizem respeito a duas partes do livro, e se a mesma parte não pode conter números diferentes de poemas, concluímos então que uma possui 15 poemas e a outra, 40. Desse modo, temos três características para cada parte da obra.

PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO
3

Pearson

www.dombosco.com.br
701625341