FATORAÇÃO

Fatoração significa escrever uma expressão na forma de um produto.

O interesse na fatoração é que ela nos auxilia na simplificação de expressões. Existem 5 casos de fatoração, que serão vistos a seguir:

FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA

É usado quando temos um fator que se repete em todos os termos da expressão. Como o próprio nome já diz, este fator será colocado em **evidência**, ou seja, será separado do restante da expressão:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Exemplos:

1. $4\,xy + 12\,x$

Colocando o fator comum em evidência escrevemos:

$$4xy + 12x = 4x \cdot (y + 3)$$

E como a expressão ficou assim? Primeiro perceba que:

$$12\,x = 3 \cdot 4x$$

e podemos reescrever a expressão como:

$$4x \cdot y + 3 \cdot 4x$$

Depois note que ambos os termos possuem $4x$ em comum. Sendo assim, $4x$ é o fator comum que será colocado em evidência (fica do lado de fora dos parênteses).

Para sabermos o que será colocado dentro dos parênteses, dividimos cada termo da expressão original pelo fator comum, da seguinte forma:

$$4xy \div 4x = \frac{4xy}{4x} = y \text{ e } 12x \div 4x = \frac{12x}{4x} = 3$$

Mantendo os sinais dos termos da expressão original, chegamos no resultado visto acima:

$$4xy + 12x = 4x \cdot (y + 3)$$

Observação: você pode verificar se sua fatoração está correta, basta fazer a multiplicação entre $4x$ e $(y + 3)$.

2. $x^2y + x$

Seguindo a mesma ideia do exemplo anterior, temos que:

$$x^2y + x = x(xy + 1)$$

Observe que aqui não tinha número para colocar em evidência, mas como o x se repete, então ele é o fator comum.

3. $18ab^6c - 15b^4c = 3b^4c(6ab^2 - 5)$

Note que quando temos letras iguais, mas com expoentes diferentes, o fator comum possui o **menor expoente**.

AGRUPAMENTO

É utilizado quando a expressão não tem um fator em comum em todos os termos, mas podemos colocar em evidência por grupos:

$$a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y =$$

$$a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$$

$$(a + b) \cdot (x + y)$$

Exemplo: $2xy - 6x + 3by - 9b$

Note que não temos um fator comum em todos os termos, mas podemos agrupar eles de dois em dois e colocar os termos em evidência:

$$2x \cdot (y - 3) + 3b \cdot (y - 3)$$

Observe que agora temos 2 termos e que possuem um fator comum $(y - 3)$, então podemos colocar novamente em evidência e, assim, finalizar a fatoração:

$$(y - 3) \cdot (2x + 3b)$$

DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Agora iremos fazer o caminho inverso do produto notável: o produto da soma pela diferença de dois termos. Neste caso, começamos com uma diferença de dois quadrados e queremos encontrar um produto:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Exemplos:

1. $(100x^2 - 64)$

Primeiro vamos tirar as raízes dos dois termos que estão ao quadrado:

$$\sqrt{100x^2} = 10x \text{ e } \sqrt{64} = 8$$

Em seguida, escrevemos o produto da soma pela diferença dessas raízes:

$$(10x + 8) \cdot (10x - 8)$$

Temos então que:

$$(100x^2 - 64) = (10x + 8) \cdot (10x - 8)$$

2. $(144x^4 - 81)$

Seguindo a mesma ideia do exemplo anterior, temos que:

$$\sqrt{144x^4} = 12x^2 \; e \; \sqrt{81} = 9$$

$$(144x^4 - 81) = (12x^2 + 9) \cdot (12x^2 - 9)$$

TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Neste caso iremos fazer o caminho inverso do quadrado da soma de dois termos e do quadrado da diferença de dois termos, visto nos produtos notáveis. Os trinômios do quadrado perfeito são:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) \text{ e}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

Para saber quando um trinômio é um trinômio quadrado perfeito, primeiro tiramos as raízes do primeiro e do último termo, esses valores das raízes devem ser multiplicados entre eles e em seguida multiplicado por 2. Para o trinômio ser um trinômio quadrado perfeito, este produto tem que ser igual ao termo do meio do trinômio, caso contrário, não será um trinômio quadro perfeito.

Feito estas etapas, podemos escrever o quadrado da soma ou o quadrado da diferença de dois termos. Será quadrado da soma quando o sinal do termo do meio do trinômio for positivo e quando o sinal for negativo então será quadrado da diferença. Os dois termos serão formados a partir das raízes que foram tiradas do primeiro e último termo do trinômio. Veja os exemplos abaixo:

Exemplos:

1. $x^2 + 6x + 9$

Tirando as raízes do primeiro e último termo temos: $\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{9} = 3$

Multiplicando os resultados entre si e multiplicando por 2 temos: $x \cdot 3 \cdot 2 = 6x$

Desta forma, comparando com o trinômio do exemplo, percebe-se que o trinômio é do tipo quadrado perfeito. Sendo assim, temos que:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

2. $4x^2 - 20x + 25$

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior temos:

Tirando as raízes do primeiro e último termo temos: $\sqrt{4x^2} = 2x$ e $\sqrt{25} = 5$

Multiplicando os resultados entre si e multiplicando por 2 temos: $2x \cdot 5 \cdot 2 = 20x$

Desta forma, percebe-se que o trinômio é do tipo quadrado perfeito. Sendo assim, temos que:

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$$

3. $9x^2 - 5x + 9$

Tirando as raízes do primeiro e último termo temos: $\sqrt{9x^2} = 3x$ e $\sqrt{9} = 3$

Multiplicando os resultados entre si e multiplicando por 2 temos: $3 \cdot x \cdot 2 = 6x$

Como o termo do meio não satisfaz a condição do trinômio quadrado perfeito, o trinômio não consegue ser fatorado.

SOMA E DIFERENÇA DE DOIS CUBOS

Esse caso de fatoração resulta de outro tipo de produto notável: o cubo da soma de dois termos ou cubo da diferença de dois termos. A soma e diferença de dois cubos são:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) \text{ e}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$$

Exemplos:

1. $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - x \cdot y + y^2)$

2. $8x^3 - 27 = (2x - 3) \cdot (4x^2 + 6x + 9)$