Combinações

INTRODUÇÃO

Nos estudos anteriores, vimos os agrupamentos que diferem entre si pela ordem ou pela natureza dos seus elementos. Neste módulo, estudaremos agrupamentos que diferem entre si somente pela natureza dos seus elementos. Tais agrupamentos são conhecidos como combinações simples.

Como exemplo, consideremos o seguinte problema:

De quantos modos podemos formar uma comissão de 3 pessoas a partir de um grupo de 6 pessoas?

Seja {Antônio, Pedro, João, Thiago, Nelson, Patrícia} o grupo de 6 pessoas. Notamos que as comissões {Antônio, Pedro, João} e {João, Antônio, Pedro} são idênticas, pois a mudança de ordem dos nomes não determina uma nova comissão. Já as comissões {João, Thiago, Patrícia} e {Nelson, Patrícia, Antônio} são diferentes, pois seus integrantes são diferentes.

Cada uma das comissões de três elementos gera 3! sequências, obtidas pela mudança da ordem dos seus elementos (permutações simples). Porém, como vimos anteriormente, cada uma dessas sequências se refere à mesma comissão. Ao calcular o total de grupos, considerando que a ordem é importante, temos $A_{6,\,3}$ grupos. A seguir, "descontamos" as permutações dos três elementos, dividindo o resultado obtido por 3!. As comissões obtidas são chamadas combinações simples, e são representadas por $C_{6,\,3}$.

Assim, temos $C_{6,\,3} = \dfrac{A_{6,\,3}}{3!} = 20$ comissões.

COMBINAÇÕES SIMPLES

Definição

Considere um conjunto com **n** elementos. Chamamos de combinações simples de **n** elementos, tomados **p** a **p**, os agrupamentos com **p** elementos de um conjunto **A** nos quais a ordem dos elementos não é importante. Os agrupamentos diferem entre si somente pela natureza dos seus elementos.

Assim, temos:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$$

Portanto:

$$\boxed{C_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!},\ n \geq p}$$

OBSERVAÇÃO

As combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, em que n ≥ p, podem ser representadas também nas formas $C_{n,\,p}$ ou $\dbinom{n}{p}$.

Exemplos:

1º) De quantos modos é possível formar uma comissão de 4 alunos a partir de um grupo de 7 alunos?

Trata-se de um problema de combinações simples de 7 elementos, tomados 4 a 4. Temos, portanto:

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{(7-4)!\,.\,4!} = \frac{7!}{3!\,.\,4!} = 35 \text{ modos}$$

2º) Quantos triângulos podem ser construídos a partir dos vértices de um hexágono convexo?

Sejam **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** os vértices do hexágono. Observe que os triângulos ABC e CBA são idênticos, ou seja, a ordem dos vértices não é importante. Trata-se, portanto, de um problema de combinações simples. Assim, temos:

$$C_{6,\,3} = \frac{6!}{3!\,.\,3!} = 20 \text{ triângulos}$$

3º) Uma escola possui 7 professores de Matemática, 5 professores de Português e 4 professores de Geografia. De quantos modos é possível formar uma comissão de 5 professores contendo 2 professores de Matemática, 2 professores de Português e 1 professor de Geografia?

Devemos escolher 2 entre 7 professores de Matemática ($C_{7,\,2}$), 2 entre 5 professores de Português ($C_{5,\,2}$) e 1 entre 4 professores de Geografia ($C_{4,\,1}$). Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$C_{7,\,2}\,.\,C_{5,\,2}\,.\,C_{4,\,1} = 21\,.\,10\,.\,4 = 840 \text{ modos}$$

4º) No início de uma festa, foram trocados 66 apertos de mão. Sabendo que cada pessoa cumprimentou uma única vez todas as outras, quantas pessoas havia na festa?

Seja **n** o número de pessoas na festa. Cada aperto de mão equivale a um grupo de 2 pessoas. Portanto, o total de apertos de mão é igual ao total de grupos de 2 pessoas obtidos a partir das **n** pessoas da festa, ou seja, $C_{n,\,2}$.

$$C_{n,\,2} = 66 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!.2!} = 66 \Rightarrow$$

$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = 132 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0$$

Resolvendo a equação anterior, temos n = –11 (não convém) e n = 12 (convém).

Portanto, havia 12 pessoas na festa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (Cefet-MG) Num plano, existem vinte pontos dos quais três nunca são colineares, exceto seis, que estão sobre uma mesma reta. O número de retas determinadas pelos vinte pontos é:

A) 150
B) 176
C) 185
D) 205
E) 212

Resolução:

Inicialmente, consideremos o total de grupos de dois pontos formado a partir dos vinte pontos. Depois, verificamos que, desse total de grupos, devemos subtrair os grupos formados a partir dos 6 pontos colineares. Em seguida, acrescentamos a própria reta, que contém os seis pontos. Assim, temos:

$$C_{20,\,2} - C_{6,\,2} + 1 = \frac{20!}{18!\,.\,2!} - \frac{6!}{4!\,.\,2!} + 1 = 176 \text{ retas}$$

02. (UFV-MG) Uma equipe de futebol de salão de cinco membros é formada escolhendo-se os jogadores de um grupo **V**, com 7 jogadores, e de um grupo **W**, com 6 jogadores. O número de equipes diferentes que é possível formar de modo que entre seus membros haja, no mínimo, um jogador do grupo **W** é:

A) 1 266
B) 1 356
C) 1 246
D) 1 376

Resolução:

Do total de equipes que podem ser formadas com os 13 jogadores (7 de **V** e 6 de **W**), subtraímos as equipes formadas apenas com jogadores do grupo **V**. Com isso, garantimos a presença de pelo menos um jogador do grupo **W**. Assim, temos:

$$C_{13,\,5} - C_{7,\,5} = \frac{13!}{8!\,.\,5!} - \frac{7!}{2!\,.\,5!} = 1\,266$$

03. (UFVJM-MG) Considere a situação-problema em que, dos 12 funcionários de uma microempresa, 5 são mulheres, os trabalhos são realizados por comissões de três funcionários cada uma e, em nenhuma delas, os 3 componentes são do mesmo sexo. Com base nessas informações, é correto afirmar que o número de maneiras de se compor essas comissões, com tais características, é igual a:

A) 125
B) 155
C) 175
D) 165

Resolução:

Do total de comissões possíveis, subtraímos as comissões formadas apenas por homens e apenas por mulheres. Assim, temos:

$$C_{12,\,3} - C_{5,\,3} - C_{7,\,3} = \frac{12!}{9!\,.\,3!} - \frac{5!}{2!\,.\,3!} - \frac{7!}{4!\,.\,3!} = 175$$

04. (UFMG) Uma urna contém 12 bolas: 5 pretas, 4 brancas e 3 vermelhas. O número de maneiras possíveis de se retirar simultaneamente dessa urna um grupo de 6 bolas que contém pelo menos uma de cada cor é:

A) 84

B) 252

C) 805

D) 924

Resolução:

Do total de grupos possíveis, retiramos os grupos formados apenas por duas cores, já que não é possível formar grupos com bolas de uma só cor. Portanto, temos:

Total de grupos: $C_{12,\,6} = \dfrac{12!}{6!\,.\,6!} = 924$

Apenas bolas pretas e brancas: $C_{9,\,6} = \dfrac{9!}{3!\,.\,6!} = 84$

Apenas bolas pretas e vermelhas: $C_{8,\,6} = \dfrac{8!}{2!\,.\,6!} = 28$

Apenas bolas brancas e vermelhas: $C_{7,\,6} = \dfrac{7!}{1!\,.\,6!} = 7$

Logo, o número de grupos é 924 – 84 – 28 – 7 = 805.

05. (UFG-GO) Uma caixa contém doze presentes diferentes. Quatro crianças, uma de cada vez, deverão escolher aleatoriamente três presentes da caixa de uma só vez. Nessas condições, encontre a quantidade possível de maneiras diferentes que esses presentes poderão ser distribuídos para essas quatro crianças.

Resolução:

A caixa dispõe de 12 presentes diferentes, de modo que a primeira criança cria um subconjunto de 3 presentes ($C_{12,\,3}$), a segunda criança, com 12 – 3 = 9 presentes disponíveis, também cria um subconjunto de 3 presentes ($C_{9,\,3}$); na sequência, a terceira criança, com 9 – 3 = 6 presentes, pega 3 presentes ($C_{6,\,3}$), e, por fim, a última criança, com 6 – 3 = 3 presentes na caixa, pega os últimos 3 presentes ($C_{3,\,3}$). Logo:

$$C_{12,3}\,.\,C_{9,3}\,.\,C_{6,3}\,.\,C_{3,3} = \frac{12!}{3!.9!}\cdot\frac{9!}{3!.6!}\cdot\frac{6!}{3!.3!}\cdot\frac{3!}{3!.0!} =$$

220 . 84 . 20 . 1 = 369 600

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. PTAK (PUC-GO–2023) Um político pretende visitar dez cidades em sua campanha para as próximas eleições. Devido à distância entre elas, um cálculo inicial mostrou que o ideal seria visitar três cidades por dia.

Assinale a única alternativa que aponta corretamente de quantos modos distintos ele pode escolher a primeira visita:

A) 110

B) 115

C) 120

D) 105

02. (IFCE–2020) Cada banca de um determinado concurso é constituída de 3 examinadores, dos quais 1 é o presidente. Duas bancas são iguais somente se tiverem os mesmos membros e o mesmo presidente. Dispondo de 20 examinadores, a quantidade de bancas diferentes que podem ser formadas é:

A) 800

B) 1 140

C) 6 840

D) 600

E) 3 420

03. BXRD (PUC Rio) Uma escola quer fazer um sorteio com as crianças. Então, distribui cartelas que têm cada uma 3 números distintos de 1 a 20. No dia da festa, trarão uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20 e serão retiradas (simultaneamente) três bolas. A criança que tiver a cartela com os três números ganhará uma viagem.

Quantas cartelas diferentes são possíveis?

A) 1 140

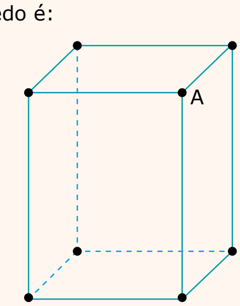
B) 2 000

C) 6 840

D) 8 000

E) 4 400

04. NØZA (PUC RS) O número de triângulos que podem ser formados unindo o vértice **A** a dois dos demais vértices do paralelepípedo é:



A) 15

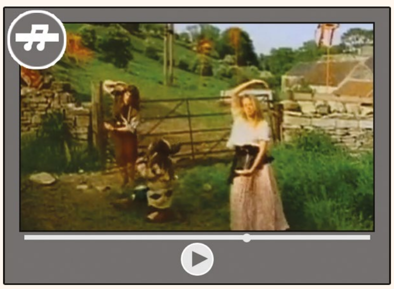
B) 18

C) 21

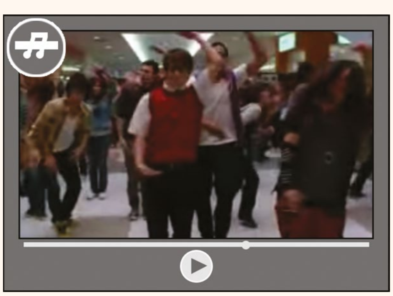
D) 24

E) 27

05. LKWZ (UFSM-RS) O início da década de oitenta foi marcado por um estilo que ficou conhecido como *new wave*. Um grande sucesso dessa época foi a música "Safety Dance" do grupo canadense Men Without Hats. No videoclipe da música, ambientado num cenário medieval, um casal dança ao som da música e, no refrão "Oh Well the safety dance, ah yes the safety dance", forma com os braços a letra S, inicial de Safety. Essa representação ficou sendo a marca registrada do sucesso alcançado. Alguns programas e séries da TV atual apresentaram a sua versão para o "Safety Dance". Nas figuras a seguir, estão representadas a versão original, a versão da série animada *Uma família da pesada* e a versão da série *Glee*.


youtube.com


youtube.com


youtube.com

Na versão da série *Glee* do "*Safety Dance*", um grupo de atores dança no *hall* de um *shopping center*, enquanto os demais apenas observam. Suponha que, para a execução da cena, foi necessário escolher, dentre 6 atores e 8 atrizes, um grupo formado por 5 atores e 5 atrizes. Quantos grupos de dançarinos podem ser escolhidos dessa forma?

A) 336
B) 168
C) 70
D) 48
E) 25

06. (UDESC) Uma turma de 25 alunos precisa escolher 6 representantes. Sabe-se que 28% dos alunos desta turma são mulheres, e que os representantes escolhidos devem ser 3 homens e 3 mulheres. Assim, o número de possibilidades para esta escolha é

A) 28 560.
B) 851.
C) 13 800.
D) 1 028 160.
E) 5 106.

07. E7IM (UEMG) Na Copa das Confederações de 2013, no Brasil, onde a seleção brasileira foi campeã, o técnico Luiz Felipe Scolari tinha à sua disposição 23 jogadores de várias posições, sendo: 3 goleiros, 8 defensores, 6 meio-campistas e 6 atacantes. Para formar seu time, com 11 jogadores, o técnico utiliza 1 goleiro, 4 defensores, 3 meio-campistas e 3 atacantes. Tendo sempre Júlio César como goleiro e Fred como atacante, o número de times distintos que o técnico poderá formar é:

A) 14 000
B) 480
C) 8! + 4!
D) 72 000

08. RMVI (UERJ) A tabela a seguir apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	Um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país **X** igual a **n** e, no país **Y**, igual a **p**. A razão $\frac{n}{p}$ corresponde a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unichristus-CE–2023) O Conselho Fiscal da Petrobras é composto por cinco membros, com mandato de um ano, permitida reeleição, sendo um indicado pelos acionistas minoritários, um indicado pelos acionistas titulares de ações preferenciais e três indicados pela União.

Disponível em: https://www.investidorpetrobras.com.br/. Acesso em: 23 set. 2022 (Adaptação).

Considerando-se que os acionistas minoritários dispõem de 3 pessoas para indicar, os acionistas titulares de ações dispõem de outras 4 pessoas para serem indicadas e a União dispõe de mais outras 6 pessoas para indicação, depreende-se que a quantidade de maneiras distintas de que pode ser feita a escolha para a composição do Conselho Fiscal é

A) 240.
B) 20.
C) 60.
D) 1 400.
E) 80.

02. (UPF-RS–2023) Uma clínica médica ortopédica conta com equipe interdisciplinar para atendimento com 3 fisioterapeutas, 5 traumatologistas e 4 enfermeiros. Nos finais de semana, são organizados plantões de atendimento. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 fisioterapeuta, 2 traumatologistas e 2 enfermeiros. O número de equipes de plantão que podem ser formadas é:

A) 5
B) 180
C) 12
D) 60
E) 19

03. LY30 (UPE) A Turma de espanhol de uma escola é composta por 20 estudantes. Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem pertencer a um mesmo grupo?

A) 6 840
B) 6 732
C) 4 896
D) 1 836
E) 1 122

04. (UFMG) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas pode-se formar essa comissão?

A) 70
B) 35
C) 45
D) 55

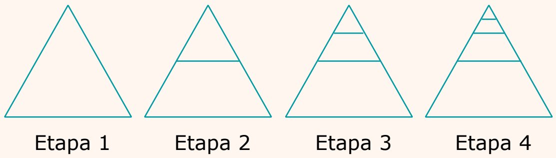
05. RM5F (UnB-DF) Toda vez que uma pessoa usa o caixa eletrônico do banco ou efetua uma transação comercial pela Internet, a segurança da transação depende da teoria matemática dos números primos. A partir do momento em que as pessoas começaram a mandar mensagens umas para as outras, surgiu o seguinte problema: como evitar que alguém não autorizado, que venha a se apoderar da mensagem, compreenda o que ela diz? A resposta é um processo sofisticado em que se criptografa a mensagem, usando uma "chave" para codificá-la – multiplicação de dois números primos grandes, por exemplo de 100 dígitos cada, escolhidos com o auxílio de um computador – e outra para decodificá-la – decomposição de um número em fatores primos.

DEVLIN, Keith J. *Os problemas do milênio*. Rio de Janeiro: Record, 2004. p. 69-73 (Adaptação).

Suponha que a "chave" de codificação de uma mensagem seja o produto de dois números primos distintos, maiores que 10 e menores que 30. Nesse caso, a quantidade de "chaves" diferentes que o receptor da mensagem, conhecedor apenas dessa regra de formação, deve testar é igual a

A) 15.
B) 21.
C) 30.
D) 42.

06. L3CR (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos a seguir:



Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.

O número de trapézios na 6ª etapa de construção é

A) 14.
B) 15.
C) 16.
D) 17.
E) 18.

07. 97YQ (Unesp) Em um jogo lotérico, com 40 dezenas distintas e possíveis de serem escolhidas para aposta, são sorteadas 4 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve acertar todas elas. Se a aposta mínima, em 4 dezenas, custa R$ 2,00, uma aposta em 6 dezenas deve custar

A) R$ 15,00.
B) R$ 30,00.
C) R$ 35,00.
D) R$ 70,00.
E) R$ 140,00.

MATEMÁTICA

08. NNM1

(UDESC) As frutas são alimentos que não podem faltar na nossa alimentação, pelas suas vitaminas e pela energia que nos fornecem. Vera consultou um nutricionista que lhe sugeriu uma dieta que incluísse a ingestão de três frutas diariamente, entre as seguintes opções: abacaxi, banana, caqui, laranja, maçã, pera e uva. Suponha que Vera siga rigorosamente a sugestão do nutricionista, ingerindo três frutas por dia, sendo pelo menos duas diferentes. Então, ela pode montar sua dieta diária, com as opções diferentes de frutas recomendadas, de

A) 57 maneiras.
B) 50 maneiras.
C) 56 maneiras.
D) 77 maneiras.
E) 98 maneiras.

09. 6G7Z

(FGV) As saladas de frutas de um restaurante são feitas misturando pelo menos duas frutas escolhidas entre: banana, laranja, maçã, abacaxi e melão.

Quantos tipos diferentes de saladas de frutas podem ser feitos considerando apenas os tipos de frutas e não as quantidades?

A) 26
B) 24
C) 22
D) 30
E) 28

10. CU77

(EsPCEx-SP) Considere o conjunto de números naturais {1, 2, ..., 15}. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é

A) 168.
B) 196.
C) 224.
D) 227.
E) 231.

11. 4NWT

(UECE) A turma **K** do Curso de Administração da UECE é formada por 36 alunos, sendo 22 mulheres e 14 homens. O número de comissões que podem ser formadas com alunos desta turma, tendo cada comissão três componentes e sendo assegurada a participação de representantes dos dois sexos em cada comissão, é

A) 5 236.
B) 6 532.
C) 3 562.
D) 2 635.

12. (UFSCar-SP) Um artista dispõe de 7 potes de tinta nas cores azul, vermelho, amarelo, verde, laranja, lilás e marrom e irá utilizar 5 delas para pintar uma aquarela. Sabendo que ele nunca utiliza as cores lilás e marrom juntas, então é correto concluir que o número de maneiras diferentes de ele escolher as 5 cores é

A) 13.
B) 12.
C) 11.
D) 10.
E) 9.

13. 73GN

(UFJF-MG) De quantas maneiras podemos escolher 3 números naturais distintos entre os inteiros de 1 a 20, de modo que a soma dos números escolhidos seja ímpar?

A) 100
B) 360
C) 570
D) 720
E) 1 140

14. CBYM

(UECE) Um conjunto **X** é formado por exatamente seis números reais positivos e seis números reais negativos. De quantas formas diferentes podemos escolher quatro elementos de **X**, de modo que o produto destes elementos seja um número positivo?

A) 245
B) 225
C) 235
D) 255

15. C9V4

(PUCPR) Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10}, quantos subconjuntos com 3 elementos podem ser formados de maneira que a soma dos três elementos seja um número par?

A) 60
B) 120
C) 10
D) 40
E) 125

16. (Mackenzie–2019) Diz-se que um inteiro positivo com 2 ou mais algarismos é "crescente", se cada um desses algarismos, a partir do segundo, for maior que o algarismo que o precede. Por exemplo, o número 134789 é "crescente" enquanto que o número 2435 não é "crescente". Portanto, o número de inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é igual a:

A) 122
B) 124
C) 126
D) 128
E) 130

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2022) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

A) $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)!}$

B) $9 \cdot \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!}$

C) $9 \cdot \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}$

D) $9 \cdot \frac{2!}{(2-2)! \cdot 2!}$

E) $9 \cdot \left(\frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} - 1\right)$

02. (Enem–2022) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

A) 8.

B) 9.

C) 11.

D) 18.

E) 24.

03. (Enem) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia.

Disponível em: http://g1.globo.com.
Acesso em: 4 fev. 2015 (Adaptação).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete.

Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

A) A^4_{10}

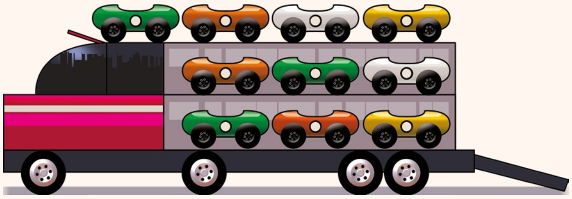
B) C^4_{10}

C) $C^2_4 \cdot C^2_6 \cdot 2 \cdot 2$

D) $A^2_4 \cdot A^2_6 \cdot 2 \cdot 2$

E) $C^2_4 \cdot C^2_6$

04. BN9X (Enem) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A) $C_{6,\,4}$

B) $C_{9,\,3}$

C) $C_{10,\,4}$

D) 6^4

E) 4^6

05. (Enem) Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Entre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

- Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;
- Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;
- Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;
- Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;
- Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

A) Caio e Eduardo.
B) Arthur e Eduardo.
C) Bruno e Caio.
D) Arthur e Bruno.
E) Douglas e Eduardo.

06. (Enem) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir:

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp — São Paulo	Louvre — Paris
MAM — São Paulo	Prado — Madrid
Ipiranga — São Paulo	British Museum — Londres
Imperial — Petrópolis	Metropolitan — Nova Iorque

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

A) 6
B) 8
C) 20
D) 24
E) 36

07. 03TØ (Enem) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

A) $\frac{10!}{2!8!} - \frac{4!}{2!2!}$

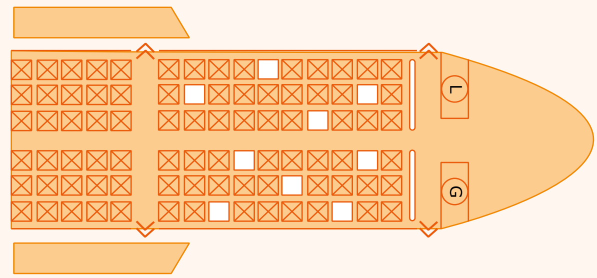
B) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

C) $\frac{10!}{2!8!} - 2$

D) $\frac{6!}{4!} + 4 . 4$

E) $\frac{6!}{4!} + 6 . 4$

08. (Enem) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site,* as poltronas ocupadas estão marcadas com "**X**" e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

A) $\frac{9!}{2!}$

B) $\frac{9!}{7! . 2!}$

C) $7!$

D) $\frac{5!}{2!} . 4!$

E) $\frac{5!}{4!} . \frac{4!}{3!}$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. E
03. A
04. C
05. A
06. A
07. A
08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. B
03. E
04. D
05. A
06. B
07. B
08. D
09. A
10. C
11. A
12. C
13. C
14. D
15. D
16. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. C
04. B
05. A
06. D
07. A
08. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Probabilidades I

INTRODUÇÃO

Há dois tipos de fenômenos que são objeto de estudo científico: os fenômenos **determinísticos** e os fenômenos **aleatórios**.

Em um fenômeno determinístico, os resultados dos experimentos correspondentes podem ser determinados de antemão. Conhecemos as leis que os governam a ponto de afirmarmos que tais experimentos, repetidos nas mesmas condições, vão produzir resultados idênticos. Podemos, por exemplo, descrever o movimento de um corpo em queda livre, determinando o tempo gasto para atingir o solo.

Já em um fenômeno aleatório, os experimentos correspondentes, repetidos nas mesmas condições, não necessariamente produzem os mesmos resultados. Apesar de não sabermos com exatidão qual resultado será obtido, geralmente somos capazes de descrever o conjunto de todos os resultados possíveis para esses experimentos. A seguir, dizemos que um desses possíveis resultados apresenta uma determinada "chance" de ocorrer. Essa "chance" é denominada **probabilidade de ocorrência de um evento**. Como exemplo, temos o experimento "lançar uma moeda e observar a face superior". A probabilidade de obtermos "cara" na face superior é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, 50%.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É todo experimento que pode ser feito nas mesmas condições sem previsão de resultado finalístico.

Exemplos:

1º) Lançar um dado e observar o número obtido na face superior.

2º) Sortear uma das bolas numeradas de uma urna.

3º) Retirar duas cartas de um baralho e observar os seus naipes.

ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, que será indicado por **E**. Denotamos por n(E) o número de elementos do espaço amostral.

Exemplos:

1º) Experimento: lançar uma moeda e observar a face superior.

$$E = \{\text{cara, coroa}\} \text{ e } n(E) = 2$$

2º) Experimento: lançar simultaneamente duas moedas e observar as faces superiores obtidas.
Indicamos cara por **C** e coroa por **K**.

Assim, temos $E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ e $n(E) = 4$.

Podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem na obtenção de n(E), como segue:

$$\begin{array}{lcccl} & \text{Moeda 1} & \text{e} & \text{Moeda 2} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ n(E) = & 2 \text{ possibilidades} & . & 2 \text{ possibilidades} & \Rightarrow \end{array}$$

$n(E) = 4$ resultados possíveis

3º) Experimento: lançar simultaneamente dois dados e observar as faces superiores obtidas.

Seja cada parênteses um experimento, no qual o primeiro valor foi obtido no primeiro dado, e o segundo valor, obtido no segundo dado. Assim, temos:

$$E = \left\{\begin{array}{llllll} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6) \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6) \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6) \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6) \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6) \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array}\right\}$$

$n(E) = 36$

Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$\begin{array}{lcccl} & \text{Dado 1} & \text{e} & \text{Dado 2} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ n(E) = & 6 \text{ possibilidades} & . & 6 \text{ possibilidades} & \Rightarrow \end{array}$$

$n(E) = 36$ resultados possíveis

4º) Experimento: sortear uma comissão de 3 alunos entre 10 alunos de uma turma.
Descrever tal espaço amostral é trabalhoso. Portanto, vamos determinar apenas n(E). Temos que o total de comissões de 3 alunos é dado por:

$$n(E) = C_{10,\,3} = \frac{10!}{7!\,.\,3!} = 120 \text{ comissões}$$

EVENTO

Chama-se de evento qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplos:

1º) Evento **A**: No lançamento de um dado, obter um número ímpar.

$A = \{1; 3; 5\}$

$n(A) = 3$

2º) Evento **B**: No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis, obter soma das faces igual a 7.

$B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

$n(B) = 6$

EVENTO COMPLEMENTAR

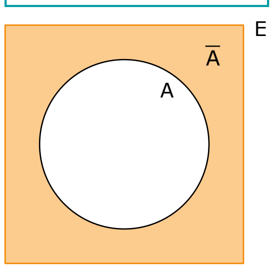
Sejam **E** um espaço amostral finito e não vazio e **A** um evento de **E**. Chama-se de evento complementar do evento **A** aquele formado pelos resultados que não fazem parte do evento **A** (indicamos por $\overline{A}$).

Como exemplo, sendo $A = \{1; 3; 5\}$ o evento "sair um número ímpar no lançamento de um dado", temos:

$$\overline{A} = \{2; 4; 6\}$$

Esquematicamente:

$$\boxed{n(A) + n(\overline{A}) = n(E)}$$



ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Chamamos de espaço amostral equiprovável aquele cujos resultados apresentam a mesma chance de ocorrerem. Em termos de frequências relativas, supomos que, ao aumentarmos indefinidamente o número de experimentos, os diferentes resultados tendem a aparecer na mesma frequência.

PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DE UM EVENTO

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral equiprovável **E**, com n(E) elementos. Seja **A** um determinado evento de **E** com n(A) elementos. A probabilidade de ocorrência do evento **A** é dada por:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}}$$

Exemplo:

No lançamento simultâneo de dois dados distinguíveis, qual é a probabilidade de obtermos uma soma das faces igual a 10?

Temos $n(E) = 6 . 6 = 36$.

Seja **A** o evento de **E** "obter uma soma igual a 10".

$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$ e $n(A) = 3$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ ou, aproximadamente, 8,3%.

Propriedades

i) $P(U) = 1$

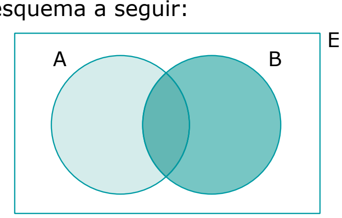
ii) $P(\varnothing) = 0$

iii) $0 \le P(A) \le 1$

iv) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Sejam **A** e **B** dois eventos de um espaço amostral **E**, conforme o esquema a seguir:



Sabemos que o número de elementos da união de dois conjuntos **A** e **B** é dado por:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Dividindo os dois membros por n(E), temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

Ou seja:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

OBSERVAÇÃO

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que **A** e **B** são **mutuamente exclusivos.**

Assim, $P(A \cap B) = 0$.

Logo, para eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

CONTEÚDO NO **Bernoulli Play**

Calculadora de Probabilidades

Use seu *smartphone* ou *tablet* para acessar esse fascinante simulador, que permite testar a sua sorte e calcular a probabilidade associada a algumas combinações de cartas de um baralho.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. L5FA

(PUCPR–2023) Dez fichas idênticas e indistinguíveis pelo tato foram numeradas, conforme indicado na figura, e depositadas em uma urna que estava vazia. Após numeradas, as faces de uma mesma ficha permanecem idênticas.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Escolhe-se ao acaso apenas uma dessas fichas e verifica-se que o número nas suas faces é par. Qual a probabilidade de esse número ser divisor de ao menos um dos outros nove números registrados nas faces das demais fichas?

A) 10%
B) 20%
C) 40%
D) 50%
E) 80%

02. 1KFQ

(UFRGS-RS–2020) Um jogador, ao marcar números em um cartão de aposta, como o representado na figura a seguir, decidiu utilizar apenas seis números primos.

[01] [02] [03] [04] [05] [06] [07] [08] [09] [10]
[11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20]
[21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30]
[31] [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40]
[41] [42] [43] [44] [45] [46] [47] [48] [49] [50]
[51] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [58] [59] [60]

A probabilidade de que os seis números sorteados no cartão premiado sejam todos números primos é:

A) $\frac{C_{17,\,6}}{C_{60,\,6}}$
B) $\frac{1}{C_{60,\,6}}$
C) $\frac{C_{60,\,6}}{C_{17,\,6}}$
D) $\frac{A_{17,\,6}}{A_{60,\,6}}$
E) $\frac{A_{60,\,6}}{A_{17,\,6}}$

03. U1VM

(FMP-RJ) Um grupo é formado por três homens e duas mulheres. Foram escolhidas, ao acaso, três pessoas desse grupo. Qual é a probabilidade de as duas mulheres do grupo estarem entre as três pessoas escolhidas?

A) $\frac{3}{10}$
B) $\frac{1}{10}$
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{1}{3}$

04. 76CX

(UNISC-RS) Dentre um grupo formado por 2 engenheiros e 4 matemáticos, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um engenheiro e dois matemáticos é de

A) 25%.
B) 35%.
C) 39%.
D) 50%.
E) 60%.

05. PVFH

(PUC Rio) Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {8, 9, 10}. Escolhendo-se ao acaso um elemento de **A** e um elemento de **B**, a probabilidade de que a soma dos dois números escolhidos seja um número ímpar é

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{3}{5}$.
C) $\frac{12}{25}$.
D) $\frac{6}{25}$.
E) $\frac{7}{10}$.

06. MHE1

(UEPA) Uma empresa realizou uma pesquisa com 300 candidatos sobre os fatores de risco de um infarto agudo do miocárdio (IAM) ou enfarte agudo do miocárdio (EAM). Foi observado que 20% dessas pessoas possuíam esses fatores de risco. A probabilidade de essa empresa contratar ao acaso dois candidatos do grupo pesquisado e eles apresentarem esses fatores de risco é

A) $\frac{60}{1\,597}$.
B) $\frac{59}{1\,495}$.
C) $\frac{69}{1\,695}$.
D) $\frac{74}{1\,797}$.
E) $\frac{77}{1\,898}$.

07. KXTJ

(Unisinos-RS) Em uma gaveta, há 12 meias brancas e 8 meias cinzas. Retiram-se duas meias, sem reposição. Qual a probabilidade de as duas meias que foram retiradas serem de cores diferentes?

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{24}{95}$
C) $\frac{10}{17}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{48}{95}$

08. 3LGN

(UPE) Um cadeado está protegido pela combinação dos números em três cilindros numerados de 0 a 9 cada um, conforme a figura a seguir. Qual é a probabilidade de, numa única tentativa, se acertar uma senha formada apenas por números primos?

A) 6,0%
B) 6,4%
C) 7,2%
D) 7,8%
E) 8,0%

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (ESA–2023) Para avançar ao Rancho, 8 (oito) soldados, entre eles o Sd Alfa e o Sd Bravo, são colocados em fila. Pode-se afirmar que a probabilidade desses dois militares ficarem juntos é de:

A) 50%
B) 40%
C) 25%
D) 20%
E) 12,5%

02. 6DRZ (IFCE–2020) Foi feita uma pesquisa entre 500 alunos do IFPE campus Barreiros sobre a preferência por um novo curso Superior. Os votos foram agrupados no quadro a seguir:

Curso de preferência	Número de votos
Zootecnia	137
Medicina Veterinária	192
Engenharia Agrícola	152
Zootecnia e Medicina Veterinária	80
Medicina Veterinária e Engenharia Agrícola	88
Engenharia Agrícola e Zootecnia	62
Os três cursos	28
Nenhum dos três cursos	19

Considerando que os estudantes poderiam votar em uma ou mais opções, se escolhermos, ao acaso, uma das pessoas que participou dessa pesquisa, qual a probabilidade de ela ter votado em somente um curso?

A) 43%
B) 96,2%
C) 10,5%
D) 21%
E) 15%

03. SEON (ESPM-SP) Num programa de televisão, cada um dos dois competidores retira um cartão de uma urna contendo 50 cartões numerados de 1 a 50. Em seguida, o apresentador retira um dos 48 cartões restantes. O prêmio será dado ao competidor cujo número mais se aproxima do número do apresentador. Se Ana tirou o número 8 e Pedro tirou o 31, a probabilidade de Ana ganhar o prêmio é

A) 22,5%.
B) 27%.
C) 33,5%.
D) 37,5%.
E) 42%.

04. (UFRGS-RS) No jogo de xadrez, cada jogador movimenta as peças de uma cor: brancas ou pretas. Cada jogador dispõe de oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, um rei e uma rainha. Escolhendo ao acaso duas peças pretas, a probabilidade de escolher dois peões é de

A) $\frac{7}{30}$.
B) $\frac{7}{20}$.
C) $\frac{7}{15}$.
D) $\frac{14}{15}$.
E) $\frac{14}{9}$.

05. 185A (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra COVEST, qual a probabilidade de suas primeira e última letras serem consoantes?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{7}$
E) $\frac{5}{7}$

06. 61IK (ESPM-SP) Apenas 40% dos hóspedes de um hotel de São Paulo são estrangeiros, sendo que 70% deles são ingleses e os demais franceses. Sabe-se que 25% dos franceses e 50% dos ingleses falam português. Escolhendo-se, ao acaso, um dos hóspedes desse hotel, a probabilidade de que ele fale português é

A) 65%.
B) 72%.
C) 68%.
D) 77%.
E) 82%.

07. K56H (PUC Rio) Em uma urna, existem 10 bolinhas de cores diferentes, das quais sete têm massa de 300 gramas e as outras três têm massa de 200 gramas cada. Serão retiradas 3 bolinhas, sem reposição. A probabilidade de que as 3 bolinhas retiradas sejam as mais leves é de

A) $\frac{1}{120}$.
B) $\frac{3}{10}$.
C) $\frac{3}{5}$.
D) $\frac{1}{30}$.
E) $\frac{3}{50}$.

08. JEOK (Albert Einstein) Em uma urna vazia foram colocadas fichas iguais, em cada uma das quais foi escrito apenas um dos anagramas da palavra HOSPITAL. A probabilidade de que, ao sortear-se uma única ficha dessa urna, no anagrama nela marcado as letras inicial e final sejam ambas consoantes é

A) $\frac{5}{14}$.
B) $\frac{3}{7}$.
C) $\frac{4}{7}$.
D) $\frac{9}{14}$.

09. ZS4M

(Unesp) Um dado convencional e uma moeda, ambos não viciados, serão lançados simultaneamente. Uma das faces da moeda está marcada com o número 3, e a outra com o número 6. A probabilidade de que a média aritmética entre o número obtido da face do dado e o da face da moeda esteja entre 2 e 4 é igual a

A) $\frac{1}{3}$.

B) $\frac{2}{3}$.

C) $\frac{1}{2}$.

D) $\frac{3}{4}$.

E) $\frac{1}{4}$.

10. (UNISC-RS) O pelotão de elite da prova final de uma maratona é composto por corredores que representam 3 equipes. As equipes **A**, **B** e **C** possuem, respectivamente, 9, 5 e 6 atletas classificados. Se todos os participantes têm a mesma chance de vencer a corrida, então a probabilidade (expressa percentualmente) de as medalhas de ouro, prata e bronze serem entregues a uma mesma equipe está no intervalo:

A) [0, 10[

B) [10, 12[

C) [12, 14[

D) [14, 20[

E) [20, 100[

11. 2DM9

(UFTM-MG) Em certo jogo de perguntas e respostas, o jogador ganha 3 pontos a cada resposta correta e perde 5 pontos a cada resposta errada. Paulo respondeu 30 perguntas e obteve um total de 50 pontos. Selecionando-se aleatoriamente uma das perguntas feitas a Paulo, a probabilidade de que ela seja uma das que tiveram resposta incorreta é de

A) $\frac{2}{5}$.

B) $\frac{1}{3}$.

C) $\frac{2}{7}$.

D) $\frac{1}{6}$.

E) $\frac{1}{8}$.

12. DZ07

(UNIFESP) Em uma classe de 16 alunos, todos são fluentes em português. Com relação à fluência em línguas estrangeiras, 2 são fluentes em francês e inglês, 6 são fluentes apenas em inglês e 3 são fluentes apenas em francês.

A) Dessa classe, quantos grupos compostos por 2 alunos podem ser formados sem alunos fluentes em francês?

B) Sorteando ao acaso 2 alunos dessa classe, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja fluente em inglês?

13. (UEL–2020) Um estudante decide pôr à prova a frase "vida é código e combinação". Sabendo que os indivíduos de uma determinada espécie apresentam um DNA com exatos 150 milhões de bases nitrogenadas em cada cadeia, o estudante cria um programa para gerar, aleatoriamente, uma sequência de 150 milhões de letras que serão sorteadas honestamente dentre A, C, G e T. Fixada uma cadeia do DNA de um determinado indivíduo desta espécie, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de esse programa gerar uma sequência que represente essa cadeia do DNA.

A) $2^{-3 \,.\, 10^7}$

B) $2^{-3 \,.\, 10^8}$

C) $4^{-3 \,.\, 10^8}$

D) $60^{-1} \,.\, 10^{-7}$

E) $60^{-1} \,.\, 10^{-8}$

14. 7JJQ

(Mackenzie-SP) Antônio, José, Pedro, Maria e Renata foram comemorar o aniversário de Antônio em uma churrascaria da cidade. O garçom que os recebeu acomodou-os prontamente em uma mesa redonda para 5 pessoas e, assim que todos se sentaram, Antônio percebeu que, sem querer, haviam sentado em volta da mesa por ordem de idade, isto é, a partir do segundo mais novo até o mais velho, cada um tinha como vizinho do mesmo lado, o colega imediatamente mais novo. A probabilidade de isso ocorrer se os cinco amigos sentassem aleatoriamente é

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{1}{6}$.

D) $\frac{1}{12}$.

E) $\frac{1}{24}$.

15. IOTT

(FUVEST-SP) Considere todos os pares ordenados de números naturais (a, b), em que $11 \leq a \leq 22$ e $43 \leq b \leq 51$. Cada um desses pares ordenados está escrito em um cartão diferente. Sorteando-se um desses cartões ao acaso, qual é a probabilidade de que se obtenha um par ordenado (a, b) de tal forma que a fração $\frac{a}{b}$ seja irredutível e com denominador par?

A) $\frac{7}{27}$

B) $\frac{13}{54}$

C) $\frac{6}{27}$

D) $\frac{11}{54}$

E) $\frac{5}{27}$

16. F78N

(Unicamp-SP) Uma urna contém 50 bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

I. **x** delas são brancas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a **x**.

II. x + 1 delas são azuis e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 1.

III. x + 2 delas são amarelas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 2.

IV. x + 3 delas são verdes e numeradas sequencialmente de 1 a x + 3.

A) Qual é o valor numérico de **x**?

B) Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma bola azul ou uma bola com o número 12?

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2020) O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

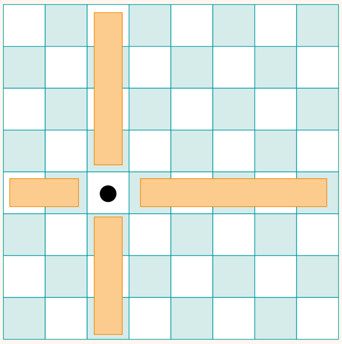
Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloisa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a:

A) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{5}{6}$

02. (Enem) Um *designer* de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão $n \times n$, com $n \geq 2$, no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8×8.



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o *designer* deve adotar para esse tabuleiro é

A) 4×4.

B) 6×6.

C) 9×9.

D) 10×10.

E) 11×11.

03. (Enem) Um projeto para incentivar a reciclagem de lixo de um condomínio conta com a participação de um grupo de moradores, entre crianças, adolescentes e adultos, conforme dados do quadro.

Participantes	Número de pessoas
Crianças	x
Adolescentes	5
Adultos	10

Uma pessoa desse grupo foi escolhida aleatoriamente para falar do projeto. Sabe-se que a probabilidade de a pessoa escolhida ser uma criança é igual a dois terços.

Diante disso, o número de crianças que participa desse projeto é

A) 6.

B) 9.

C) 10.

D) 30.

E) 45.

04. (Enem) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

A) $\frac{1}{100}$ C) $\frac{20}{100}$ E) $\frac{80}{100}$

B) $\frac{19}{100}$ D) $\frac{21}{100}$

05. (Enem) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que iriam realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de que o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtêm-se:

A) $P(I) < P(III) < P(II)$

B) $P(II) < P(I) < P(III)$

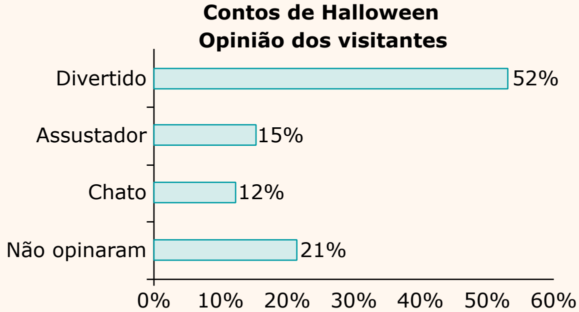
C) $P(I) < P(II) = P(III)$

D) $P(I) = P(II) < P(III)$

E) $P(I) = P(II) = P(III)$

06. (Enem) Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* vai sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween". Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

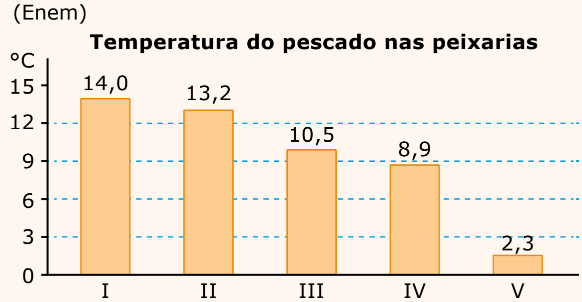
A) 0,09.
B) 0,12.
C) 0,14.
D) 0,15.
E) 0,18.

07. (Enem) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
D) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

08. (Enem)



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (Adaptação).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) $\frac{1}{4}$.
D) $\frac{1}{5}$.
E) $\frac{1}{6}$.

09. (Enem) A tabela a seguir indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo • significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo * significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

	A	B	C	D
A				*
B	• *		•	• *
C	• *	*		*
D	•		•	

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a

A) 0,00.
B) 0,25.
C) 0,50.
D) 0,75.
E) 1,00.

10. (Enem) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: – Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça. Tadeu, camisa 2: – Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta... Ricardo, camisa 12: – Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Desse diálogo, conclui-se que

A) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.

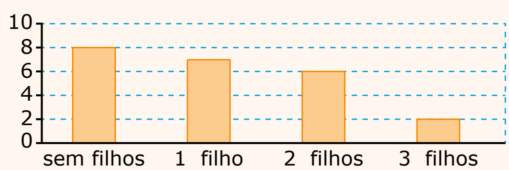
B) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

C) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.

D) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

E) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

11. (Enem) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir:



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é

A) $\frac{1}{3}$.

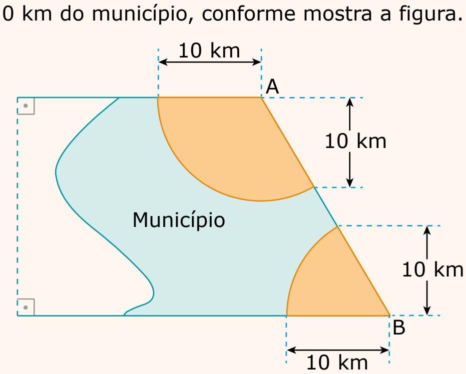
B) $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{7}{15}$.

D) $\frac{7}{23}$.

E) $\frac{7}{25}$.

12. (Enem) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas **A** e **B** alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura.



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente,

A) 20%.

B) 25%.

C) 30%.

D) 35%.

E) 40%.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. A
- 04. E
- 05. A
- 06. B
- 07. E
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. D
- 03. D
- 04. A
- 05. B
- 06. D
- 07. A
- 08. A
- 09. A
- 10. B
- 11. D
- 12.
  - A) 55 grupos
  - B) $\frac{23}{30}$
- 13. B
- 14. D
- 15. E
- 16.
  - A) $x = 11$
  - B) $\frac{7}{25}$

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. D
- 03. D
- 04. C
- 05. E
- 06. D
- 07. D
- 08. D
- 09. A
- 10. D
- 11. E
- 12. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Probabilidades II

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Considere a seguinte situação:

Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma pessoa sorteia uma bola e, em vez de divulgar de imediato o resultado, ela declara: "O número sorteado é múltiplo de 6".

Com base nesses dados, pergunta-se: Qual é a probabilidade de o número sorteado ser um número maior do que 30?

Observe que a probabilidade de o número ser maior do que 30 está condicionada ao fato de já sabermos de antemão que o número sorteado é múltiplo de 6. Portanto, tal informação altera o espaço amostral que normalmente seria considerado.

Assim, temos:

i) Números múltiplos de 6 entre 1 e 50:
{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

ii) Observe que, no conjunto anterior, os números 36, 42 e 48 são maiores do que 30.

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{3}{8}$.

O problema anterior poderia também ser resolvido de outra forma. Consideremos os seguintes eventos:

1º) A: Sortear um número múltiplo de 6.

$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$

$n(A) = 8$

2º) B: Sortear um número maior do que 30.

$B = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50\}$

$n(B) = 20$

3º) Como devemos considerar a ocorrência do evento B, uma vez que o evento A já ocorreu, estamos interessados nos elementos de B que pertencem também a A, ou seja, $A \cap B$.

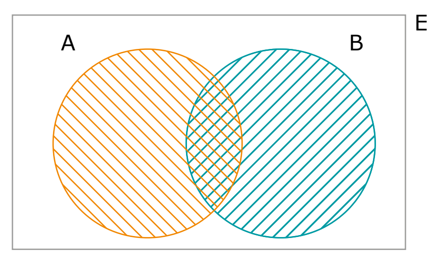
$A \cap B = \{36, 42, 48\}$

$n(A \cap B) = 3$

Observe que o conjunto A é o espaço amostral reduzido a ser considerado e que a probabilidade pedida é equivalente a:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{8}$$

Generalizando esse conceito, consideremos os eventos A e B de um espaço amostral E, conforme o diagrama a seguir:



Denotamos por P(B|A) a probabilidade condicional de B em relação a A, ou seja, a probabilidade de ocorrer B dado que A já ocorreu.

Assim, temos:

$$P(B|A) = P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração por n(E), temos:

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

OBSERVAÇÃO

Se a ocorrência do evento B não está condicionada à ocorrência do evento A, dizemos que os eventos A e B são independentes. Dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(B|A) = P(B)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Considerar o experimento: "lançar simultaneamente dois dados e observar as faces superiores obtidas". Sabendo que, ao realizar o experimento, a soma dos números obtidos foi igual a um número primo, calcular a probabilidade de essa soma ser menor do que 5.

Resolução:

Sejam os seguintes eventos:

i) Obter soma igual a um número primo.

$$A = \{\underbrace{(1, 1)}_{\text{Soma} = 2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{\text{Soma} = 3}, \underbrace{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}_{\text{Soma} = 5},$$

$$\underbrace{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}_{\text{Soma} = 7}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{Soma} = 11}\}$$

$n(A) = 15$

ii) Obter soma menor do que 5.

$$A = \{\underbrace{(1, 1)}_{\text{Soma} = 2}, \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{\text{Soma} = 3}, \underbrace{(1, 3), (3, 1), (2, 2)}_{\text{Soma} = 4}\}$$

$n(B) = 6$

Assim, temos que:

$A \cap B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$n(A \cap B) = 3$

Sabemos, também, que $n(E) = 36$.

Portanto: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{\cancel{36}}}{\frac{15}{\cancel{36}}} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

Na prática, basta considerarmos, no espaço amostral reduzido A**,** os pares cuja soma é menor do que 5. Desse modo, temos 3 pares em 15, e a probabilidade procurada é igual a $\dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

02. (UEL-PR) Considerar como verdadeiras as seguintes informações:

i) O Londrina Esporte Clube está com um time que ganha jogos com probabilidade de 0,40 em dias de chuva e de 0,70 em dias sem chuva.

ii) A probabilidade de um dia de chuva em Londrina, no mês de março, é de 0,30.

Se o time ganhou um jogo em um dia de março, em Londrina, então a probabilidade de que, nessa cidade, tenha chovido naquele dia é de

A) 30%.
B) 87,652%.
C) 19,672%.
D) 12,348%.
E) 80,328%.

Resolução:

Sejam:

$P(C)$ = probabilidade de chover no dia.

$P(V)$ = probabilidade de o time vencer.

$P(C|V)$ = probabilidade de chover no dia, uma vez que o time venceu.

Sabemos que $P(C|V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(V)}$ e temos que a probabilidade de chover e de o time vencer é dada por:

$P(C \cap V) = 0,3 . 0,4 = 0,12$

A probabilidade de o time vencer é dada por:

$P(V) =$

$$\underbrace{0,4 . 0,3}_{\substack{\text{Vencer e}\\ \text{chover}}} + \underbrace{0,7 . 0,7}_{\substack{\text{Vencer e}\\ \text{não chover}}} = 0,12 + 0,49 = 0,61$$

Então, $P(C|V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,12}{0,61} = 0,19672 = 19,672\%$.

TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Uma importante consequência da definição de probabilidade condicional é vista a seguir:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A|B)}$$

Do mesmo modo, temos:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

Ou seja:

> A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos (interseção) é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, em relação ao primeiro.

OBSERVAÇÃO

Se os eventos A e B são independentes, temos:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B).P(A)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Um recipiente R_1 contém 3 bolinhas pretas e 4 bolinhas brancas. Um segundo recipiente R_2 possui 8 bolinhas pretas e 2 bolinhas brancas. Ao escolhermos um recipiente ao acaso e dele retirarmos uma bolinha, qual é a probabilidade de se observar o recipiente R_2 e uma bolinha branca?

Resolução:

Sejam:

$P(R_2)$ = probabilidade de se escolher o recipiente R_2.

$P(B|R_2)$ = probabilidade de se escolher uma bolinha branca, dado que já escolhemos R_2.

$P(R_2 \cap B)$ = probabilidade de se escolher R_2 e uma bolinha branca.

Temos:

$P(R_2 \cap B) = P(R_2).P(B|R_2) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{10} = 10\%$

LEI BINOMIAL DA PROBABILIDADE

Consideremos uma sequência de ensaios nos quais a probabilidade de ocorrência de determinado resultado não dependa dos resultados obtidos em ensaios anteriores e tampouco interfira nos próximos resultados. Esses ensaios são chamados *Ensaios de Bernoulli*.

Como exemplo, imaginemos o seguinte experimento: "Lançar um dado e observar a face superior obtida". Ao repetir esse ensaio 5 vezes, qual é a probabilidade de obtermos o número 3 exatamente duas vezes?

A probabilidade de obtermos o número 3 em um lançamento é igual a $\frac{1}{6}$. Obviamente, a probabilidade de isso não ocorrer nesse lançamento é igual a $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Como a ordem de obtenção do número 3 na sequência de ensaios não é importante, devemos inicialmente escolher 2 dos 5 ensaios efetuados. Isso pode ser feito de $C_{5,2}$ modos distintos.

Denotemos por P(A) a probabilidade de obter o número 3 exatamente duas vezes.

Assim, temos:

$$P(A) = C_{5,2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5!}{3!\,.\,2!} \cdot \frac{125}{7\,776} = 0{,}160751 \Rightarrow$$

$$P(A) = 16{,}0751\%$$

De maneira geral, se desejamos calcular a probabilidade P de obtermos exatamente **k** resultados favoráveis em **n** ensaios, temos que:

$$\boxed{P = C_{n,\,k} \cdot (P_f)^k \cdot (1 - P_f)^{n-k}}$$

Em que P_f é a probabilidade de obtermos o resultado favorável em um ensaio.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

04. Um baralho contém 8 cartas, das quais apenas uma é um ás. Uma carta é retirada ao acaso e depois devolvida ao baralho. Ao repetir o experimento quatro vezes, qual é a probabilidade de obtermos um ás exatamente duas vezes?

Resolução:

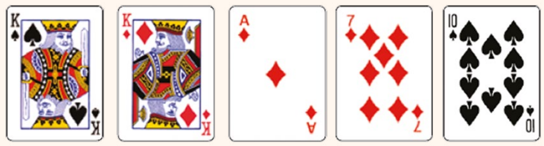
$$P = C_{4,\,2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,.\,2!} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{49}{64} = \frac{147}{2\,048}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. UHT4

(UERJ) Cinco cartas de um baralho estão sobre uma mesa; duas delas são Reis, como indicam as imagens.



Após serem viradas para baixo e embaralhadas, uma pessoa retira uma dessas cartas ao acaso e, em seguida, retira outra.

A probabilidade de sair Rei apenas na segunda retirada equivale a

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{3}$.

C) $\frac{2}{5}$.

D) $\frac{3}{10}$.

02. 7BFH

(FCMSC-SP–2023) Uma urna contém cartões com as 26 letras do alfabeto. Retirando-se aleatoriamente 4 cartões de uma única vez dessa urna, a probabilidade de que com eles seja possível, em alguma ordem das letras, formar a palavra VIDA é igual a

A) $\frac{2}{7\,475}$.

B) $\frac{1}{7\,475}$.

C) $\frac{3}{1\,495}$.

D) $\frac{1}{14\,950}$.

E) $\frac{6}{7\,475}$.

03. 2ØYF

(UERJ) Um instituto de pesquisa colheu informações para saber as intenções de voto no segundo turno das eleições para governador de determinado estado. Os dados estão indicados no quadro a seguir:

Intenção dos votos	Percentual
Candidato A	26%
Candidato B	40%
Votos nulos	14%
Votos brancos	20%

Escolhendo aleatoriamente um dos entrevistados, verificou-se que ele não vota no candidato B. A probabilidade de que esse eleitor vote em branco é

A) $\frac{1}{6}$.

B) $\frac{1}{5}$.

C) $\frac{1}{4}$.

D) $\frac{1}{3}$.

E) $\frac{2}{5}$.

04. (UFJF-MG) Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. A probabilidade de que pelo menos uma criança seja menino é de

A) 25%.

B) 42%.

C) 43,7%.

D) 87,5%.

E) 64,6%.

05. 1YTA

(UFPR) Durante um surto de gripe, 25% dos funcionários de uma empresa contraíram essa doença. Dentre os que tiveram gripe, 80% apresentaram febre. Constatou-se também que 8% dos funcionários apresentaram febre por outros motivos naquele período. Qual a probabilidade de que um funcionário dessa empresa, selecionado ao acaso, tenha apresentado febre durante o surto de gripe?

A) 20% C) 28% E) 35%

B) 26% D) 33%

06. F40P

(UEG-GO) A tabela a seguir apresenta a preferência de homens e mulheres em relação a um prato, que pode ser doce ou salgado, típico de certa região do Estado de Goiás.

Sexo	Preferências	
	Doce	Salgado
Masculino	80	20
Feminino	60	40

Considerando-se os dados apresentados na tabela, a probabilidade de um desses indivíduos preferir o prato típico doce, sabendo-se que ele é do sexo feminino, é de

A) 0,43. C) 0,60.

B) 0,50. D) 0,70.

07. BUF2

(UPE) Dentre os esportes oferecidos aos estudantes de uma escola com 3 000 alunos, temos o futebol como preferência, sendo praticado por 600 estudantes. 300 estudantes dessa mesma escola praticam natação, e 100 praticam ambos os esportes. Selecionando-se um estudante praticante de futebol para uma entrevista, qual a probabilidade de ele também praticar natação?

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

B) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

08. 6QSH

(UEG-GO) Pedro jogou dois dados comuns numerados de 1 a 6. Sabendo-se que o produto dos números sorteados nos dois dados é múltiplo de 3, a probabilidade de terem sido sorteados os números 3 e 4 é uma em

A) 18. C) 10.

B) 12. D) 9.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEG-GO–2020) Em uma caixa mágica temos 3 lenços azuis e 4 lenços brancos. O mágico, ao realizar o seu número, deseja retirar aleatoriamente e sem reposição 2 lenços da mesma cor. A probabilidade de que ele tenha sucesso nesse número é de:

A) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{1}{147}$

B) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{1}{6}$

02. LPL7

(Albert Einstein–2023) Estudantes de uma classe composta por homens e mulheres tiveram o direito de escolher uma de duas opções para a data de uma prova. A tabela mostra alguns dados da apuração, em que os dados correspondentes às células pintadas foram omitidos.

Estudantes	Opção 1	Opção 2	Total
Mulheres	4		
Homens		10	
Total		19	30

Sorteando-se ao acaso um estudante dessa classe, a probabilidade de que seja uma mulher ou que tenha votado na opção 1 é igual a

A) $\frac{6}{5}$. C) $\frac{8}{15}$. E) $\frac{2}{5}$.

B) $\frac{2}{3}$. D) $\frac{1}{2}$.

03. (Unifor-CE–2023) Um atleta comprou barras de proteína para fazer seus lanches entre as refeições. Ele comprou barras de quatro sabores: doce de coco, pasta de amendoim, Romeu e Julieta, e trufa de maracujá. Ele colocou essas barras em quatro potes, cada pote contendo as barras de um mesmo sabor. No pote 1, colocou as com sabor de doce de coco; no pote 2, as com sabor de pasta de amendoim; no pote 3, as com sabor Romeu e Julieta; e, no pote 4, as com sabor de trufa de maracujá. Num certo dia, ele verificou que o pote 1 continha 12 barras das quais 3 haviam passado do prazo de validade; o pote 2 continha 8 barras das quais 2 haviam passado do prazo de validade; o pote 3 continha 9 barras das quais 3 haviam passado do prazo de validade; e o pote 4 continha 15 barras das quais 5 haviam passado do prazo de validade. Escolhendo aleatoriamente um dos potes e retirando-se ao acaso uma barra de proteína desse pote, a probabilidade de que essa barra esteja com prazo de validade vencido é de

A) $\frac{1}{4}$. C) $\frac{7}{24}$. E) $\frac{13}{88}$.

B) $\frac{7}{6}$. D) $\frac{7}{44}$.

04. (PUC Minas) Em uma população humana, a probabilidade de um indivíduo ser mudo é estimada em $\frac{50}{10\,000}$, a probabilidade de ser cego é $\frac{85}{10\,000}$, e a probabilidade de ser mudo e cego é $\frac{6}{10\,000}$. Nesse caso, "ser mudo" não exclui a possibilidade de "ser cego". Com base nessas informações, a probabilidade de um indivíduo, escolhido ao acaso, ser mudo ou cego é igual a

A) 0,0129. C) 0,0156.

B) 0,0135. D) 0,0174.

05. 0J40

(FGV) Dois eventos **A** e **B** de um espaço amostral são independentes. A probabilidade do evento **A** é P(A) = 0,4 e a probabilidade da união de **A** com **B** é $P(A \cup B) = 0{,}8$.

Pode-se concluir que a probabilidade do evento **B** é

A) $\frac{5}{6}$.
B) $\frac{4}{5}$.
C) $\frac{3}{4}$.
D) $\frac{2}{3}$.
E) $\frac{1}{2}$.

06. TW1D

(UCS-RS) Numa cidade com 60 000 domicílios, 35 000 deles têm acesso à Internet, 25 000 têm assinatura de TV a cabo, e um terço do número de domicílios não tem acesso a nenhum dos dois recursos. Qual é a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, ter acesso à Internet e não ter assinatura de TV a cabo?

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{12}$
C) $\frac{7}{12}$
D) $\frac{3}{8}$
E) $\frac{7}{8}$

07. (UEG-GO) Um nadador vai disputar duas provas nas Olimpíadas, primeiro os 100 metros borboleta e depois os 100 metros nado livre. A probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros borboleta é de 70%, ao passo que a de ele vencer ambas é de 60%. Se ele vencer a prova dos 100 metros borboleta, a probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros nado livre é de aproximadamente

A) 0,42.
B) 0,86.
C) 0,50.
D) 0,70.
E) 0,60.

08. (UESB-BA–2019) Lançando-se em sequência 3 dados honestos de 6 lados, a probabilidade de se obterem resultados iguais em 2 consecutivos, mas não nos 3, é de:

A) $\frac{25}{108}$
B) $\frac{55}{216}$
C) $\frac{5}{18}$
D) $\frac{11}{36}$
E) $\frac{10}{27}$

09. (PUC Minas–2019) Um casal que pretende ter cinco filhos descobre, ao fazer certos exames, que determinada característica genética tem a probabilidade de um terço de ser transmitida a cada um de seus futuros filhos. Nessas condições, a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica é mais próxima de:

A) 14%
B) 12%
C) 18%
D) 16%

10. 144Q

(FEI-SP) Uma moeda viciada apresenta probabilidade de ocorrer face cara quatro vezes maior que a probabilidade de ocorrer face coroa. Em 2 lançamentos consecutivos dessa moeda, qual a probabilidade de ocorrer 2 vezes a face coroa?

A) 0,2
B) 0,1
C) 0,01
D) 0,02
E) 0,04

11. IKFU

(ACAFE-SC) Uma prova consta de 7 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma, e apenas uma correta. Se um aluno escolher como correta uma alternativa ao acaso em cada questão, a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente,

A) 87%.
B) 85%.
C) 90%.
D) 47%.

12. (Fatec–SP) Em um supermercado, a probabilidade de que um produto da marca A e um produto da marca B estejam a dez dias, ou mais, do vencimento do prazo de validade é de 95% e 98%, respectivamente. Um consumidor escolhe, aleatoriamente, dois produtos, um produto da marca A e outro da marca B. Admitindo eventos independentes, a probabilidade de que ambos os produtos escolhidos estejam a menos de dez dias do vencimento do prazo de validade é

A) 0,001%.
B) 0,01%.
C) 0,1%.
D) 1%.
E) 10%.

13. F40P

(UERJ) Em uma escola, 20% dos alunos de uma turma marcaram a opção correta de uma questão de múltipla escolha que possui quatro alternativas de resposta. Os demais marcaram uma das quatro opções ao acaso.

Verificando-se as respostas de dois alunos quaisquer dessa turma, a probabilidade de que exatamente um tenha marcado a opção correta equivale a

A) 0,48.
B) 0,40.
C) 0,36.
D) 0,25.

14. 6FX4

(UERJ) Uma urna contém uma bola branca, quatro bolas pretas e **x** bolas vermelhas, sendo $x > 2$. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, é observada e recolocada na urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Se $\frac{1}{2}$ é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor, o valor de **x** é

A) 9.
B) 8.
C) 7.
D) 6.

15. ICME

(FUVEST-SP) Em um experimento probabilístico, Joana retirará aleatoriamente 2 bolas de uma caixa contendo bolas azuis e bolas vermelhas. Ao montar-se o experimento, colocam-se 6 bolas azuis na caixa. Quantas bolas vermelhas devem ser acrescentadas para que a probabilidade de Joana obter 2 azuis seja $\frac{1}{3}$?

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

16. (UEG-GO) Renata está grávida e realizará um exame que detecta o sexo do bebê. Se o exame detectar que é um menino, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de azul é de 70%, ao passo que de branco é de 30%. Mas, se o exame detectar que é uma menina, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de rosa é de 60% contra 40% de pintar de branco. Sabendo-se que a probabilidade de o exame detectar um menino é de 50%, a probabilidade da Renata pintar o quarto do bebê de branco é de

A) 70%.
B) 50%.
C) 35%.
D) 30%.
E) 20%.

17. (FUVEST-SP)
PT4I

A) Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\frac{2}{3}$?

B) Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e **x** bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente ao acaso uma bola dessa urna. Para que valores de **x** a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2022) Em um jogo de bingo, as cartelas contêm 16 quadrículas dispostas em linhas e colunas. Cada quadrícula tem impresso um número, dentre os inteiros de 1 a 50, sem repetição de número. Na primeira rodada, um número é sorteado, aleatoriamente, dentre os 50 possíveis. Em todas as rodadas, o número sorteado é descartado e não participa dos sorteios das rodadas seguintes. Caso o jogador tenha em sua cartela o número sorteado, ele o assinala na cartela. Ganha o jogador que primeiro conseguir preencher quatro quadrículas que formam uma linha, uma coluna ou uma diagonal conforme os tipos de situações ilustradas na Figura 1.

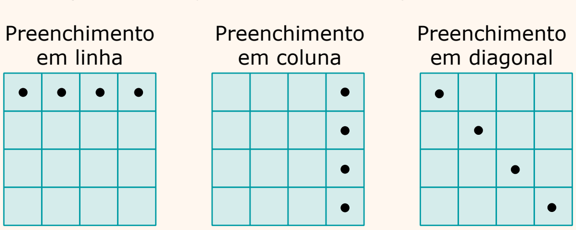


Figura 1

O jogo inicia e, nas quatro primeiras rodadas, foram sorteados os seguintes números: 03, 27, 07 e 48. Ao final da quarta rodada, somente Pedro possuía uma cartela que continha esses quatro números sorteados, sendo que todos os demais jogadores conseguiram assinalar, no máximo, um desses números em suas cartelas.

Observe na Figura 2 o cartão de Pedro após as quatro primeiras rodadas.

03	48	12	27
49	11	22	05
29	50	19	45
33	23	38	07

Figura 2

A probabilidade de Pedro ganhar o jogo em uma das duas próximas rodadas é

A) $\frac{1}{46} + \frac{1}{45}$

B) $\frac{1}{46} + \frac{2}{46 \cdot 45}$

C) $\frac{1}{46} + \frac{8}{46 \cdot 45}$

D) $\frac{1}{46} + \frac{43}{46 \cdot 45}$

E) $\frac{1}{46} + \frac{49}{46 \cdot 45}$

02. (Enem–2022) A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão.

Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

A) $\frac{35}{64}$.

B) $\frac{40}{64}$.

C) $\frac{42}{64}$.

D) $\frac{44}{64}$.

E) $\frac{52}{64}$.

03. (Enem–2020) Suponha que uma equipe de corrida de automóveis disponha de cinco tipos de pneu (I, II, III, IV, V), em que o fator de eficiência climática EC (índice que fornece o comportamento do pneu em uso, dependendo do clima) é apresentado:

- EC do pneu I: com chuva 6, sem chuva 3;
- EC do pneu II: com chuva 7, sem chuva −4;
- EC do pneu III: com chuva −2, sem chuva 10;
- EC do pneu IV: com chuva 2, sem chuva 8;
- EC do pneu V: com chuva −6, sem chuva 7.

O coeficiente de rendimento climático (CRC) de um pneu é calculado como a soma dos produtos dos fatores de EC, com ou sem chuva, pelas correspondentes probabilidades de se ter tais condições climáticas: ele é utilizado para determinar qual pneu deve ser selecionado para uma dada corrida, escolhendo-se o pneu que apresentar o maior CRC naquele dia. No dia de certa corrida, a probabilidade de chover era de 70% e o chefe da equipe calculou o CRC de cada um dos cinco tipos de pneu.

O pneu escolhido foi

A) I.

B) II.

C) III.

D) IV.

E) V.

04. (Enem–2020) Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-la sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda. Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

- duas delas têm "cara" nas duas faces;
- uma delas tem "coroa" nas duas faces;
- duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face "cara" no lado superior da moeda lançada por ele?

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{4}{5}$

05. (Enem) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

06. UØL2

(Enem) Numa avenida, existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

A) $\frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

B) $\frac{10 \cdot 2^{9}}{3^{10}}$

C) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

D) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

E) $\frac{2}{3^{10}}$

07. Y9DU

(Enem) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

A) 0,075

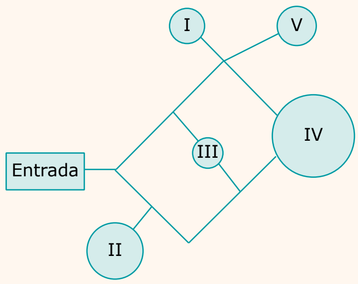
B) 0,150

C) 0,325

D) 0,600

E) 0,800

08. (Enem) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que, relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

A) $\frac{1}{96}$.

B) $\frac{1}{64}$.

C) $\frac{5}{24}$.

D) $\frac{1}{4}$.

E) $\frac{5}{12}$.

09. (Enem) Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos.

Qual é essa probabilidade?

A) 50%

B) 44%

C) 38%

D) 25%

E) 6%

10. (Enem) Uma caixa contém uma cédula de R$ 5,00, uma de R$ 20,00 e duas de R$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R$ 55,00 é

A) $\frac{1}{2}$.

B) $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{3}{4}$.

D) $\frac{2}{9}$.

E) $\frac{5}{9}$.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. D
- 03. D
- 04. D
- 05. B
- 06. C
- 07. D
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. C
- 04. A
- 05. D
- 06. A
- 07. B
- 08. C
- 09. D
- 10. E
- 11. A
- 12. C
- 13. A
- 14. A
- 15. B
- 16. C
- 17.
  - A) 16 bolas
  - B) x = 1 ou x = 9

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. C
- 03. A
- 04. C
- 05. E
- 06. A
- 07. C
- 08. C
- 09. B
- 10. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Progressão Aritmética

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência numérica é um grupo de números dispostos em uma ordem definida. Por exemplo, podemos considerar a sequência dos números naturais ímpares, dada por (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...). Observe que o exemplo citado refere-se a uma **sequência infinita**. Já o conjunto dos números primos naturais menores do que 10 é dado por (2, 3, 5, 7), ou seja, é um exemplo de uma **sequência finita**.

Uma sequência infinita pode ser representada da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$$

Em que:

- a_1 indica o elemento da posição 1,
- a_2 indica o elemento da posição 2,
- a_3 indica o elemento da posição 3,

  ⋮
- a_n indica o elemento da posição **n**.

Lei de formação

Uma sequência numérica pode ser definida por uma fórmula ou lei de formação. Considere os seguintes exemplos:

1º) Escrever os 4 primeiros termos da sequência definida por $a_n = 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = 4 . 1 + 1 = 5$

Para $n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 . 2 + 1 = 9$

Para $n = 3 \Rightarrow a_3 = 4 . 3 + 1 = 13$

Para $n = 4 \Rightarrow a_4 = 4 . 4 + 1 = 17$

Logo, a sequência é (5, 9, 13, 17).

2º) Escrever a sequência numérica definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n > 2 \end{cases}$$

Nesse caso, observe que os dois termos iniciais são dados. Os seguintes são obtidos por meio de uma regra, a chamada Fórmula de Recorrência, que utiliza os valores anteriores.

Assim, temos:

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

⋮

A sequência é dada por (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...). Essa sequência é conhecida como **Sequência de Fibonacci**.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Chamamos de progressão aritmética (P.A.) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior com uma constante dada, denominada **razão da P.A.**, e indicada por **r**.

Exemplos:

1º) (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...) é uma P.A. **crescente**, em que r = 3.

2º) (10, 8, 6, 4, 2, 0, ...) é uma P.A. **decrescente**, em que r = –2.

3º) (5, 5, 5, 5, ...) é uma P.A. **constante**, em que r = 0.

Termo geral da P.A.

Considere a P.A. de razão **r** representada a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$$

Sabemos que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando-se essas igualdades membro a membro, obtemos:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = (a_1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + \underbrace{r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ vezes}}$$

Após efetuarmos as simplificações, obtemos a expressão:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

Essa expressão é a fórmula do termo geral da P.A.

Exemplo:

Calcular o trigésimo segundo termo da P.A. (1, 4, 7, 10, ...).

Temos que $a_1 = 1$ e $r = 3$. Logo:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{32} = 1 + (32 - 1)3 \Rightarrow$

$a_{32} = 1 + 31 \cdot 3 \Rightarrow a_{32} = 94$

Propriedades da P.A.

i) Cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética dos termos antecessor e sucessor. Em outras palavras, sendo uma P.A. (a, b, c, ...), temos:

$$\boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

Por exemplo, na P.A. (7, 12, 17, 22, ...), podemos observar que $12 = \frac{7 + 17}{2}$, $17 = \frac{12 + 22}{2}$, etc.

ii) A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos.

OBSERVAÇÃO

Dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos que precede um deles for igual ao número de termos que sucede o outro.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Por exemplo, considere a P.A. (5, 10, 15, 20, 25, 30).

Temos que $\underbrace{5 + 30}_{\text{Soma dos extremos}} = \underbrace{10 + 25}_{\text{Equidistantes dos extremos}} = \underbrace{15 + 20}_{\text{Equidistantes dos extremos}} = 35$

Notação Especial:

Em vários problemas, a adoção de uma notação facilita bastante a determinação de uma P.A. Assim, temos as seguintes notações:

i) P.A. com 3 termos: $\boxed{(a - r, a, a + r)}$

ii) P.A. com 4 termos: $\boxed{(a - 3b, a - b, a + b, a + 3b)}$

Nesse caso, observe que a razão **r** é dada por:

$r = (a - b) - (a - 3b) \Rightarrow r = a - b - a + 3b \Rightarrow r = 2b$

Reescrevendo a sequência anterior, temos:

$$\boxed{\left(a - \frac{3r}{2}, a - \frac{r}{2}, a + \frac{r}{2}, a + \frac{3r}{2}\right)}$$

iii) P.A. com 5 termos: $\boxed{(a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r)}$

Exemplo:

A soma dos três primeiros termos de uma P.A. crescente é igual a 30. Sabendo que o produto desses termos é igual a 990, determinar a razão da P.A.

Vamos representar a P.A. do seguinte modo:

$(a - r, a, a + r, \ldots)$

Sabemos que:

$a - r + a + a + r = 30 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10$

Logo, a P.A. é dada por $(10 - r, 10, 10 + r)$.

Assim, temos:

$(10 - r).10.(10 + r) = 990 \Rightarrow 10^2 - r^2 = 99 \Rightarrow$

$r^2 = 100 - 99 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$

Como a P.A. é crescente, r = 1.

Soma dos termos da P.A.

Considere a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$.

Seja S_n o valor da soma dos seus **n** primeiros termos. Assim, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Escrevendo S_n em ordem inversa, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando-se membro a membro as duas expressões, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

Sabemos que a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja, podemos substituir $(a_2 + a_{n-1})$, $(a_3 + a_{n-2})$, ... por $(a_1 + a_n)$.

Logo:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{\text{(n) vezes}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos **n** termos de uma P.A.

OBSERVAÇÃO

Se o número de termos de uma P.A. for ímpar, observe que teremos o seguinte:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{(n-1)\text{ vezes}} + 2.\underbrace{a_{\frac{n+1}{2}}}_{\substack{\text{Termo}\\\text{central}}} \Rightarrow$$

$$2S_n = (n-1)(a_1 + a_n) + 2.a_{\frac{n+1}{2}} \quad \text{(I)}$$

Porém, o termo $a_{\frac{n+1}{2}}$ é igual à média aritmética dos termos antecessor e sucessor. Como a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, temos:

$$a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{\overbrace{a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+3}{2}}}^{\substack{\text{Equidistantes}\\\text{dos extremos}}}}{2} = \frac{\overbrace{a_1 + a_n}^{\substack{\text{Soma dos}\\\text{extremos}}}}{2}$$

Portanto, de (I), temos:

$$2S_n = (n-1)(a_1 + a_n) + 2.\frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow$$

$$2S_n = (n-1)(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \Rightarrow$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)(n - 1 + 1) \Rightarrow$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da P.A. (1, 5, 9, 13, ...).

Resolução:

Inicialmente, vamos calcular a_{10}.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{10} = 1 + (10-1)4 \Rightarrow$$

$$a_{10} = 1 + 36 \Rightarrow a_{10} = 37$$

Sabemos que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{(1+37)10}{2} \Rightarrow S_{10} = 190$$

02. (Vunesp) Uma P.A. de 51 termos tem o vigésimo sexto termo igual a –38; então, a soma dos termos dessa progressão é:

A) –900

B) –1 938

C) 969

D) 0

E) –969

Resolução:

Sabemos que o vigésimo sexto termo é o termo central dessa P.A. Portanto, temos:

$$a_{26} = \frac{a_1 + a_{51}}{2} \Rightarrow -38 = \frac{a_1 + a_{51}}{2} \Rightarrow a_1 + a_{51} = -76$$

A soma dos termos dessa progressão é dada por:

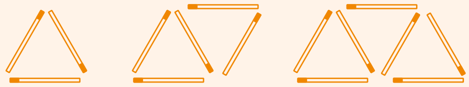
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{51} = \frac{(a_1 + a_{51})51}{2} \Rightarrow$$

$$S_{51} = \frac{(-76)51}{2} \Rightarrow S_{51} = -1\,938$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. DTR2 (UFRGS–2020) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras a seguir:



Na etapa **n**, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, **n** é igual a

A) 120.
B) 121.
C) 122.
D) 123.
E) 124.

02. (ESA–2023) Em um determinado quartel, o comandante determinou que, no primeiro dia de treinamento da nova turma, os recrutas deveriam realizar 20 flexões de braço e aumentar 5 flexões por dia ao longo do curso. Mantida essas condições, em 2 meses, quantas flexões cada recruta terá executado? (*Considere o mês com 30 dias*)

A) 10 500
B) 8 225
C) 2 805
D) 3 350
E) 10 050

03. (PUC Rio) Se a soma dos quatro primeiros termos de uma progressão aritmética é 42, e a razão é 5, então o primeiro termo é

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

04. 24DR (Unesp) A soma dos **n** primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $3n^2 - 2n$, onde **n** é um número natural. Para essa progressão, o primeiro termo e a razão são, respectivamente,

A) 7 e 1.
B) 1 e 6.
C) 6 e 1.
D) 1 e 7.
E) 6 e 7.

05. D1TD (Unesp) Em 05 de junho de 2004, foi inaugurada uma pizzaria que só abre aos sábados. No dia da inauguração, a pizzaria recebeu 40 fregueses. A partir daí, o número de fregueses que passaram a frequentar a pizzaria cresceu em progressão aritmética de razão 6, até que atingiu a cota máxima de 136 pessoas, a qual tem se mantido. O número de sábados que se passaram, excluindo-se o sábado de inauguração, para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez foi

A) 15.
B) 16.
C) 17.
D) 18.
E) 26.

06. YMUX (IFBA) A Meia Maratona Shopping da Bahia Farol a Farol foi criada pela Personal Club e mais uma vez contará com a parceria do Shopping da Bahia.

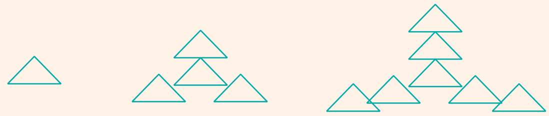
Tradicional no mês de outubro, a maior e mais esperada corrida de rua da Bahia, que já se encontra em sua sexta edição e será realizada nos percursos de 5 km, 10 km e 21 km, com largada no Farol de Itapuã e chegada no Farol da Barra, dois dos principais cartões postais da cidade de Salvador.

Disponível em: http://www.meiamaratonafarolafarol.com.br/. Acesso em: 26 ago. 2016.

Um atleta, planejando percorrer o percurso de 21 km, fez um plano de treinamento, que consistia em correr 1 000 m no primeiro dia e, a cada dia subsequente, percorreria a distância do dia anterior acrescida de 400 m. Sendo assim, esse atleta irá atingir a distância diária de 21 km no

A) 54º dia.
B) 53º dia.
C) 52º dia.
D) 51º dia.
E) 50º dia.

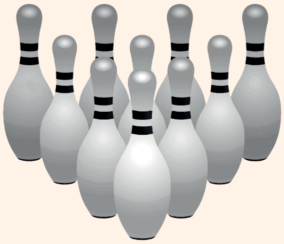
07. FIUG (UPF-RS) Num laboratório, está sendo realizado um estudo sobre a evolução de uma população de vírus. A seguinte sequência de figuras representa os três primeiros minutos da reprodução do vírus (representado por um triângulo).



Supondo que se mantém constante o ritmo de desenvolvimento da população de vírus, qual será o número de vírus após uma hora?

A) 140
B) 180
C) 178
D) 240
E) 537

08. C46V (PUC-Campinas-SP) Um jogo de boliche é jogado com 10 pinos dispostos em quatro linhas, como mostra a figura a seguir:



Se fosse inventado um outro jogo, semelhante ao boliche, no qual houvesse um número maior de pinos, dispostos da mesma forma, e ao todo com 50 linhas, o número de pinos necessários seria igual a

A) 1 125.
B) 2 525.
C) 2 550.
D) 1 625.
E) 1 275.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. ZCF4

(UECE–2020) Para cada número inteiro positivo **n**, as linhas do quadro a seguir são definidas segundo a estrutura lógica que segue:

L_1 1

L_2 1, 2

L_3 1, 2, 3

L_4 1, 2, 3, 4

....

....

L_n 1, 2, 3,..............., n

....

A soma dos números que compõem a linha L_{2020} é igual a

A) 2 041 210.

B) 2 441 120.

C) 2 121 020.

D) 2 241 210.

02. VLM2

(UFTM-MG) Os valores das prestações mensais de certo financiamento constituem uma P.A. crescente de 12 termos. Sabendo que o valor da 1ª prestação é R$ 500,00 e o da 12ª é R$ 2 150,00, pode-se concluir que o valor da 10ª prestação será igual a

A) R$ 1 750,00.

B) R$ 1 800,00.

C) R$ 1 850,00.

D) R$ 1 900,00.

E) R$ 1 950,00.

03. JZØØ

(UEG-GO) No primeiro semestre de 2015, a empresa "Aço Firme" fabricou 28 000 chapas metálicas em janeiro; em fevereiro sua produção começou a cair como uma progressão aritmética decrescente, de forma que em julho a sua produção foi de 8 800 chapas. Nessas condições, a produção da empresa nos meses de maio e junho totalizou

A) 33 600 chapas.

B) 32 400 chapas.

C) 27 200 chapas.

D) 24 400 chapas.

E) 22 600 chapas.

04. YVVE

(UERJ) Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a

A) 414.

B) 438.

C) 456.

D) 484.

05. SEK5

(UERJ) Admita a seguinte sequência numérica para o número natural **n**:

$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ e } a_n = a_{n-1} + 3$$

Sendo $2 \leq n \leq 10$, os dez elementos dessa sequência, em que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_{10} = \frac{82}{3}$, são:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{19}{3}, \frac{28}{3}, \frac{37}{3}, a_6, a_7, a_8, a_9, \frac{82}{3}\right)$$

A média aritmética dos quatro últimos elementos da sequência é igual a

A) $\frac{238}{12}$.

B) $\frac{137}{6}$.

C) $\frac{219}{4}$.

D) $\frac{657}{9}$.

06. (UFPR–2023) Os ângulos internos de um polígono convexo de 20 lados estão em progressão aritmética com razão de 4° (graus). Qual é o produto em graus entre o maior ângulo interno e o menor ângulo interno desse polígono?

A) 20 800.

B) 22 600.

C) 24 800.

D) 26 600.

E) 26 800.

07. MDNV

(UECE) Atente à seguinte disposição de números inteiros positivos:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	.	.	.	.

Ao dispormos os números inteiros positivos nessa forma, chamaremos de linha os números dispostos na horizontal. Por exemplo, a terceira linha é formada pelos números 11, 12, 13, 14 e 15. Nessa condição, a soma dos números que estão na linha que contém o número 374 é

A) 1 840.

B) 1 865.

C) 1 885.

D) 1 890.

08. (Albert Einstein) Suponha que, em certo país, observou-se que o número de exames por imagem, em milhões por ano, havia crescido segundo os termos de uma progressão aritmética de razão 6, chegando a 94 milhões / ano ao final de 10 anos. Nessas condições, o aumento percentual do número de tais exames, desde o ano da observação até ao final do período considerado, foi de

A) 130%.

B) 135%.

C) 136%.

D) 138%.

09. RVU5

(UEL-PR) Uma decoradora usou 210 garrafas plásticas de 33 cm de altura para confeccionar uma árvore de Natal em forma de triângulo. Para isso, usou uma placa triangular na qual colou as garrafas da seguinte forma: uma garrafa na primeira fila, duas na segunda fila, e assim sucessivamente, acrescentando uma garrafa a cada fila. Qual deve ser a altura da placa, sabendo que não há sobreposição de garrafas, não há espaço entre uma fila e outra e que sobram 10 cm no topo e 10 cm na base da árvore?

A) 3,8 m
B) 5,4 m
C) 6,6 m
D) 6,8 m
E) 7,13 m

10. (UESB–2019) Um trabalhador, com salário de R$ 4 000,00, gastou R$ 3 600,00 em janeiro de 2017. Com o aumento do custo de vida, seus gastos cresceram R$ 60,00 a cada mês, mas seu salário não teve reajuste. Toda sobra foi guardada em uma conta sem rendimentos, da qual ele retirou a diferença quando os gastos ultrapassaram o salário.

Ao todo, em 2017, ele economizou:

A) R$ 840,00
B) R$ 900,00
C) R$ 960,00
D) R$ 1 020,00
E) R$ 1 180,00

11. TM4T

(UFRGS-RS) Considere a sequência de números binários 101, 1010101, 10101010101, 101010101010101...

A soma de todos os algarismos dos 20 primeiros termos dessa sequência é

A) 52.
B) 105.
C) 21.
D) 420.
E) 840.

12. I2DI

(UEMA) As equipes A e B de uma gincana escolar devem recolher livros na vizinhança para montar uma biblioteca comunitária. O juiz da competição começou a fazer anotações das quantidades de livros trazidos a cada rodada pelas duas equipes e verificou um padrão de crescimento, conforme a tabela 1. A cada rodada, o juiz também avalia o total de livros colocados nas estantes de cada equipe, como mostrado na tabela 2, a seguir:

	Tabela 1	
	Arrecadação	
Rodada	Equipe A	Equipe B
1	06	16
2	10	18
3	14	20
4		
⋮	⋮	⋮

Tabela 2	
Total na estante	
Equipe A	Equipe B
06	16
16	34
30	54
⋮	⋮

O número de rodadas necessárias para que as duas equipes disponham da mesma quantidade total de livros nas estantes é

A) 05.
B) 06.
C) 09.
D) 10.
E) 11.

13. (PUC-GO–2023) Leia com atenção o problema exposto a seguir:

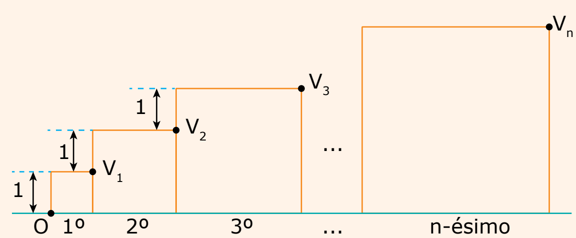
Ao se dividir R$ 200,00 entre cinco pessoas de modo que os valores recebidos individualmente formem uma progressão aritmética, notou-se que um sétimo da soma das três partes maiores correspondia à soma das duas menores. Nessas condições, qual o valor da maior das partes assim divididas?

Marque a única alternativa correta:

A) R$ 66,33.
B) R$ 76,66.
C) R$ 96,33.
D) R$ 56,33.

14. CQA9

(Insper-SP) Na sequência de quadrados representada na figura a seguir, o lado do primeiro quadrado mede 1. A partir do segundo, a medida do lado de cada quadrado supera em 1 unidade a medida do lado do quadrado anterior.



A distância do ponto **O**, vértice do primeiro quadrado, até o ponto V_n vértice do n-ésimo quadrado, ambos indicados na figura, é:

A) $\frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}$
B) $\frac{n}{2}\sqrt{n^2-2n+9}$
C) $\frac{n}{2}\sqrt{n^2+4n+3}$
D) $n\sqrt{n^2+2n-1}$
E) $n\sqrt{n^2+2n+2}$

15. RGLZ

(UECE) O quadro numérico apresentado a seguir é construído segundo uma lógica estrutural.

1	3	5	7	9	------	101
3	3	5	7	9	------	101
5	5	5	7	9	------	101
7	7	7	7	9	------	101
------	------	------	------	------	------	------
------	------	------	------	------	------	------
101	101	101	101	101	------	101

Considerando a lógica estrutural do quadro anterior, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que estão na linha de número 41 é

A) 4 443.
B) 4 241.
C) 4 645.
D) 4 847.

16. RBC7

(UECE) As medidas, em metro, dos comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética cuja razão é igual a 1. Se a medida de um dos ângulos internos deste triângulo é 120°, então, seu perímetro é

A) 5,5.
B) 6,5.
C) 7,5.
D) 8,5.

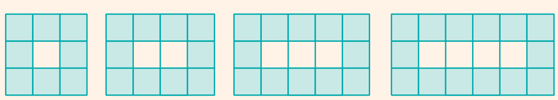
17. FEBP

(UFRGS-RS) A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{12}) forma uma progressão aritmética. Sabendo-se que $a_3 + a_{10} = 32$, o valor da expressão $\log_2 (a_1 + a_{12})^3$ é

A) 10.
B) 15.
C) 21.
D) 26.
E) 32.

18. M24Y

(ESPM-SP) A figura a seguir mostra uma série de painéis formados por uma faixa de ladrilhos claros envoltos em uma moldura de ladrilhos escuros.



Num desses painéis, o número de ladrilhos escuros excede o número de ladrilhos claros em 50 unidades. A quantidade total de ladrilhos desse painel é igual a

A) 126.
B) 172.
C) 156.
D) 224.
E) 138.

SEÇÃO ENEM

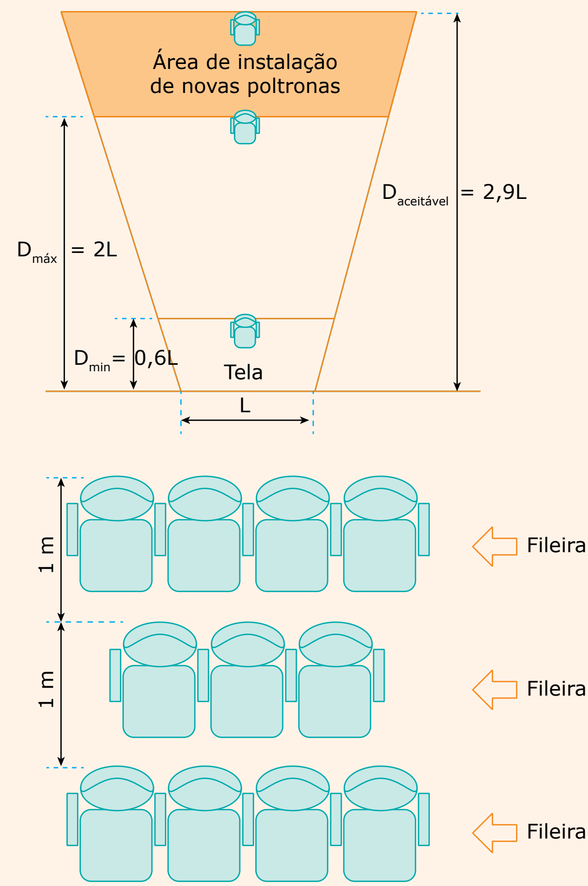
01. (Enem–2022) Em uma sala de cinema, para garantir que os espectadores vejam toda a imagem projetada na tela, a disposição das poltronas deve obedecer à norma técnica da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), que faz as seguintes indicações:

- Distância mínima ($D_{mín}$) entre a tela de projeção e o encosto da poltrona da primeira fileira deve ser de, pelo menos, 60% da largura (L) da tela.
- Distância máxima ($D_{máx}$) entre a tela de projeção e o encosto da poltrona da última fileira deve ser o dobro da largura (L) da tela, sendo aceitável uma distância de até 2,9 vezes a largura (L) da tela.

Para o espaçamento entre as fileiras de poltronas, é considerada a distância de 1 metro entre os encostos e as poltronas em duas fileiras consecutivas.

Disponível em: www.ctav.gov.br. Acesso em: 14 nov. 20

Uma sala de cinema, cuja largura da tela mede 12 m, está montada em conformidade com as normas da ABNT tem suas dimensões especificadas na figura.



Pretende-se ampliar essa sala, mantendo-se na mesma posição a tela e todas as poltronas já instaladas, ampliando-se ao máximo a sala para os fundos (área de instalação de novas poltronas), respeitando-se o limite aceitável da norma da ABNT. A intenção é aumentar, ao máximo, a quantidade de poltronas da sala, instalando-se novas unidades, iguais às já instaladas.

Quantas fileiras de poltronas a sala comportará após essa ampliação?

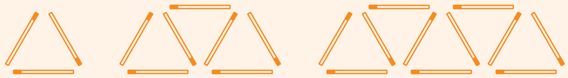
A) 26
B) 27
C) 28
D) 29
E) 35

02. (Enem) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de um estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

A) R$ 512 000,00.
B) R$ 520 000,00.
C) R$ 528 000,00.
D) R$ 552 000,00.
E) R$ 584 000,00.

03. (Enem) A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.



Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?

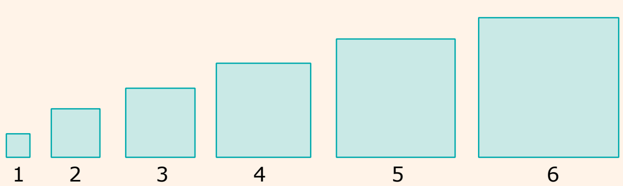
A) 30
B) 39
C) 40
D) 43
E) 57

04. 8CYM (Enem) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

A) 40
B) 60
C) 100
D) 115
E) 120

05. (Enem) Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, da esquerda para a direita, como mostra a figura.



O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro 3 cm e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição **n**, na sequência, foi representada por A_n.

Para $n \geq 2$, o valor da diferença $A_n - A_{n-1}$, em centímetro quadrado, é igual a:

A) $2n - 1$
B) $2n + 1$
C) $-2n + 1$
D) $(n - 1)^2$
E) $n^2 - 1$

06. (Enem) As projeções para a produção de arroz no período de 2012–2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

A) 497,25.
B) 500,85.
C) 502,87.
D) 558,75.
E) 563,25.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. E
03. C
04. B
05. B
06. D
07. C
08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. C
03. C
04. C
05. B
06. C
07. B
08. B
09. D
10. A
11. D
12. E
13. B
14. A
15. B
16. C
17. B
18. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. C
03. B
04. D
05. A
06. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

MATEMÁTICA

FRENTE B | MÓDULO 20

Progressão Geométrica

INTRODUÇÃO

Chamamos de progressão geométrica (P.G.) a toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante dada, denominada razão da P.G., e indicada por **q**.

Exemplos:

1º) (3, 6, 12, 24, 48, ...) é uma P.G. **crescente**, com razão q = 2.

2º) (5, 5, 5, 5, 5, ...) é uma P.G. **constante**, com razão q = 1.

3º) $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. **decrescente**, em que $q = \frac{1}{2}$.

4º) (3, −6, 12, −24, ...) é uma P.G. **oscilante**, em que q = −2.

Termo geral da P.G.

Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro essas n − 1 igualdades, temos:

$$(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-1)\text{ vezes}}$$

Simplificando os termos da expressão, obtemos:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Essa expressão é a fórmula do termo geral da P.G.

Exemplo:

Determinar o sétimo termo da P.G. (1, 3, 9, ...).

Sabemos que $a_1 = 1$ e q = 3. Assim, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_7 = 1 \cdot 3^{7-1} \Rightarrow a_7 = 3^6 \Rightarrow a_7 = 729$

Propriedades da P.G.

i) Cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo antecessor e o sucessor. Ou seja, dada uma P.G. (a, b, c, ...), temos:

$$\boxed{b^2 = ac}$$

Por exemplo, observe a P.G. (2, 6, 18, 54, 162, ...).

Temos: $6^2 = 2 \cdot 18$, $18^2 = 6 \cdot 54$, etc.

ii) O produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Por exemplo, na P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32), temos:

$$\underbrace{1 \cdot 32}_{\text{Produto dos extremos}} = \underbrace{2 \cdot 16}_{\text{Equidistantes dos extremos}} = \underbrace{4 \cdot 8}_{\text{Equidistantes dos extremos}} = 32$$

Notação Especial:

Representações convenientes de uma P.G.

i) P.G. com 3 termos: $\left(\frac{x}{q}; x; xq\right)$, de razão **q**.

ii) P.G. com 4 termos: $\left(\frac{x}{q^3}; \frac{x}{q}; xq; xq^3\right)$, de razão $\mathbf{q^2}$.

iii) P.G. com 5 termos: $\left(\frac{x}{q^2}; \frac{x}{q}; x; xq; xq^2\right)$, de razão **q**.

Soma dos **n** termos de uma P.G.

Considere a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$.

Sendo $\mathbf{S_n}$ a soma dos seus **n** termos, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \Rightarrow$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} \text{ (I)}$$

Multiplicando os dois membros da expressão (I) pela razão **q**, temos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n \text{ (II)}$$

Fazendo (II) – (I), obtemos:

$$\begin{array}{rl} & qS_n = \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \cancel{...} + a_1q^n \\ - & S_n = a_1 + \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{...} + \cancel{a_1q^{n-1}} \\ \hline & qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow \\ & S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow \end{array}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos **n** termos de uma P.G.

Exemplo:

Calcular a soma dos 5 primeiros termos da P.G. (3, 9, 27, ...).

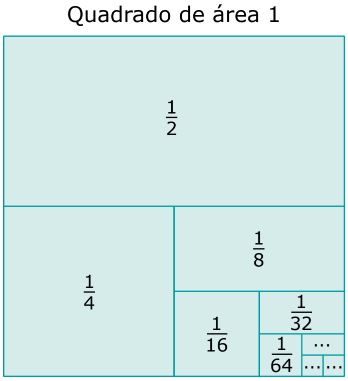
Temos $a_1 = 3$ e $q = 3$. Logo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \cdot 242}{2} = 363$$

Soma dos infinitos termos de uma P.G.

Em determinadas situações, podemos observar que a soma dos infinitos termos de uma P.G. pode convergir para um valor finito. Como exemplo, considere um quadrado de área igual a 1. Vamos dividi-lo em retângulos e quadrados menores, indicando a área de cada parte, conforme a figura a seguir:

Quadrado de área 1



Observe que o quadrado pode ser subdividido em infinitas figuras menores. A soma das áreas dessas figuras é dada por: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + ...$

Logo, dizemos que o limite dessa soma, quando o número de parcelas tende ao infinito, é igual a 1, ou seja, a área do quadrado original.

Assim, de maneira geral, a condição para que a soma dos infinitos termos de uma P.G. acabe convergindo para um valor finito é que a razão **q** seja um número entre –1 e 1.

Logo, aplicando a fórmula da soma, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Como **q** é um número entre –1 e 1, à medida que **n** se aproxima do infinito, o valor de q^n converge para zero.

Portanto, à medida que **n** tende ao infinito, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ para } -1 < q < 1}$$

Essa expressão é a fórmula da soma dos infinitos termos de uma P.G.

Exemplo:

Calcular o valor de $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$

O valor anterior corresponde à soma dos infinitos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$.

Temos $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$. Assim:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (Mackenzie-SP) A soma dos termos da progressão $(3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, ...)$ é:

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 4

Resolução:

Podemos escrever a P.G. anterior do seguinte modo:

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$. Observe que $a_1 = q = \frac{1}{3}$. Assim, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2}$$

Produto dos **n** termos de uma P.G.

Consideremos a P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$. Denotemos por P_n o produto dos **n** primeiros termos dessa P.G. Assim, temos:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n \Rightarrow$$

$$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot ... \cdot (a_1 \cdot q^{n-1}) \Rightarrow$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+...+(n-1)}$$

Observe que o expoente de **q** na expressão anterior é igual à soma dos n − 1 termos da P.A. (1, 2, 3, ..., n − 1). Logo, essa soma é dada por:

$$S_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Substituindo a soma na expressão do produto dos **n** termos, obtemos:

$$\boxed{P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. (UFPE) Supondo-se que, numa progressão geométrica, o 1º termo é 1 e o 6º termo é 32, assinalar a alternativa que corresponde ao produto dos 6 primeiros termos dessa progressão.

A) 4 096
B) 1 024
C) 5 120
D) 32 768
E) 10 000

Resolução:

Sabe-se que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ou seja:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \Rightarrow 32 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{32} = 2$

Portanto, o produto dos 6 primeiros termos da P.G. é dado por:

$$P_n = a_1^n . q^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow P_6 = 1^6 \cdot 2^{\frac{6 \cdot 5}{2}} = 2^{15} = 32768$$

03. (UNIFEI-MG) Considere uma progressão geométrica (P.G.) de 8 termos, em que a soma dos termos de ordem par é 510 e a soma dos termos de ordem ímpar é 255. Então, a razão **q** dessa P.G. vale:

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 2
D) 3

Resolução:

$S_{\text{Ímpar}} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_1 + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^6 \Rightarrow$

$a_1(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 255$

$S_{\text{Par}} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5 + a_1 \cdot q^7 =$

$q\underbrace{(a_1 + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^6)}_{S_{\text{Ímpar}} = 255} = 510 \Rightarrow q = \frac{510}{255} = 2$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) Sabendo que os números da sequência (5, m, n, 10) estão em progressão geométrica, quanto vale o produto m . n?

A) 10
B) 20
C) 50
D) 100
E) 225

02. TB7L (PUC Rio) A sequência 10^x, 10^{x+1}, 10^{x+2}, ... representa

A) uma progressão aritmética de razão 10.
B) uma progressão aritmética de razão 1.
C) uma progressão geométrica de razão 10.
D) uma progressão geométrica de razão 1.
E) nem progressão aritmética nem progressão geométrica.

03. EY91 (UERJ–2023) Considere a seguinte equação:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 18, \ \ x \in \mathbb{R}$$

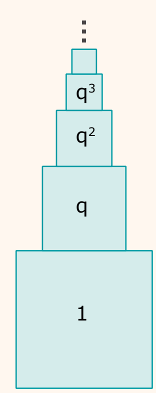
Sabendo que o primeiro membro dessa equação é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o valor de **x** é igual a:

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12

04. 5Ø0E (PUC Minas) Depois de percorrer um comprimento de arco de 12 m, uma criança deixa de empurrar o balanço em que está brincando. Se o atrito diminui a velocidade do balanço de modo que o comprimento de arco percorrido seja sempre igual a 80% do anterior, a distância total percorrida pela criança, em metros, até que o balanço pare completamente, é dada pela expressão $D = 12 + 0{,}80 \cdot 12 + 0{,}80 \cdot (0{,}80 \cdot 12) + \ldots$. Observando-se que o segundo membro dessa igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, pode-se estimar que o valor de **D**, em metros, é igual a

A) 24.
B) 36.
C) 48.
D) 60.

05. 986A (UEFS-BA)



Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão **q**, pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de 1 m², a altura da pilha, em **m**, seria:

A) $\frac{1}{1-q}$
B) $\frac{1-q}{1-\sqrt{q}}$
C) $\frac{1-\sqrt{q}}{1-q}$
D) $\frac{1+\sqrt{q}}{1-q}$
E) infinita

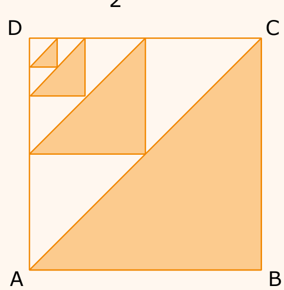
06. (EEAR–2023) Seja a_1 o primeiro termo de uma P.A. de razão 7 e também o primeiro termo de uma P.G. de razão 2. Para que o 8º termo da P.A. seja igual ao 4º termo da P.G., o valor de a_1 deve ser ___________.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

07. 7YEK (UFRGS-RS) Três números formam uma progressão geométrica de razão 3. Subtraindo 8 unidades do terceiro número, obteremos uma progressão aritmética cuja soma dos termos é

A) 16.
B) 18.
C) 22.
D) 24.
E) 26.

08. DVMZ (UFRGS-RS) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado e os triângulos sombreados são triângulos semelhantes tais que as alturas correspondentes formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.



Se o perímetro do triângulo ABC é 1, a soma dos perímetros dos quatro triângulos sombreados é

A) $\frac{9}{8}$.
B) $\frac{11}{8}$.
C) $\frac{13}{8}$.
D) $\frac{15}{8}$.
E) $\frac{17}{8}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

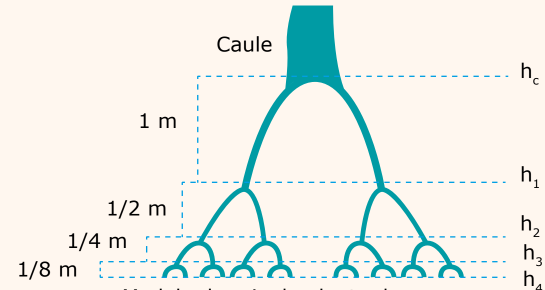
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. DEMX (UECE–2020) Seja **S** a soma dos termos da progressão geométrica $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, cuja razão é o número real **q**, $0 < q < 1$. Se $x_1 = a$, $a > 0$, $a \neq 1$, então, o valor de $\log_a(S)$ é

$\log_a(X) \equiv$ logaritmo de **X** na base **a**

A) $a + \log_a(1 - q)$.
B) $a - \log_a(1 - q)$.
C) $1 + \log_a(1 - q)$.
D) $1 - \log_a(1 - q)$.

02. DPON (UEL-PR) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e, em cada uma delas, surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim desta, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.



Modelo de raiz de planta de mangue

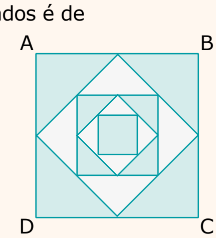
Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de h_1 = 1 m, qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até h_{10}?

A) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$
B) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{9}}\right)$
C) $2\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$
D) $2\left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right)$
E) $2\left(1 - \frac{1}{2^{9}}\right)$

03. (UEG–2020) Sejam $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão aritmética de razão r = 3 e $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ uma progressão geométrica de razão $q = r^2 - 7$ e, ainda, $b_1 = a_1 + 2$, $b_2 = a_2 + 1$ e $b_3 = a_3 + 2$. A soma dos 7 primeiros termos dessa progressão geométrica é:

A) 254
B) 18
C) 128
D) 63
E) 455

04. NI5A (UFSM-RS) No piso do *hall* de entrada de um *shopping*, foi desenhado um quadrado Q_1 de 10 m de lado, no qual está inscrito um segundo quadrado Q_2 obtido da união dos pontos médios dos lados do quadrado anterior, e assim sucessivamente, $Q_3, Q_4, \ldots$, formando uma sequência infinita de quadrados, seguindo a figura. Dessa forma, a soma das áreas dos quadrados é de



A) 25 m².
B) $25\sqrt{2}$ m².
C) 200 m².
D) $50\sqrt{2}$ m².
E) $100(2 + \sqrt{2})$ m².

05. J7Ø7 (Mackenzie-SP) Sejam $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{100}$ os lados dos quadrados $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{100}$, respectivamente.
Se $\ell_1 = 1$ e $\ell_k = 2\ell_{k-1}$, para k = 2, 3, ..., 100, a soma das áreas desses quadrados é igual a:

A) $\frac{3}{4} \cdot 4^{99}$
B) $\frac{1}{4} \cdot 4^{99}$
C) $\frac{1}{3} \cdot (4^{100} - 1)$
D) $\frac{1}{3} \cdot 4^{100}$
E) $\frac{1}{3} \cdot 4^{100} - 1$

06. (AFA-SP–2023) Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma progressão geométrica (P.G.) crescente, com $0 < a_1 \neq 1$, de **n** termos e razão **q**.

A expressão $\dfrac{\log a_n - \log a_1}{\log q} + 1$ corresponde, necessariamente, a

A) q B) n − 1 C) a_1 D) n

07. (UDESC) Os números **a**, **b** e **c** são tais que a progressão geométrica $S_1 = \{5a - b, b, 48, \ldots\}$ e a progressão aritmética $S_2 = \{c, a - b, -6a - c, \ldots\}$ possuem razões opostas. Então, o valor de a + b + c é igual a

A) 3. C) 13. E) 10.
B) 20. D) 15.

08. I9EE (UECE) Se a medida dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo forma uma progressão geométrica crescente, então, a razão dessa progressão é igual a:

A) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$ C) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}}$

B) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ D) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}}$

09. 5L46 (UECE) Considere uma progressão aritmética, não constante, com sete termos, cuja razão é o número **r**. Se o primeiro, o terceiro e o sétimo termo desta progressão formam, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, então, a soma dos termos da progressão aritmética é igual a:

A) 27r B) 30r C) 33r D) 35r

10. S1IU (Unicamp-SP) Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60°, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas figuras 3 e 4.

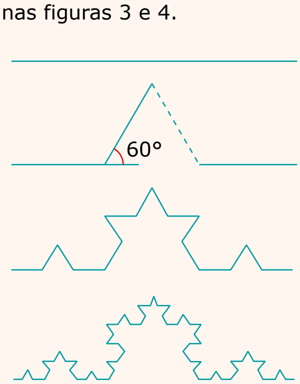


Figura 1
Figura 2
Figura 3
Figura 4

Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

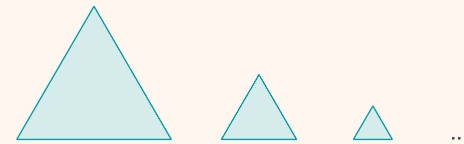
A) $\left(\dfrac{6!}{4!3!}\right)$ cm. C) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^5$ cm.

B) $\left(\dfrac{5!}{4!3!}\right)$ cm. D) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^6$ cm.

11. 40EØ (ESPM-SP) Na progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...), sendo a_n o n-ésimo termo e S_n a soma dos **n** primeiros termos, podemos concluir que:

A) $S_n = 2.a_n$
B) $S_n = a_n + 1$
C) $S_n = a_{n+1} + 1$
D) $S_n = a_{n+1} - 1$
E) $S_n = 2.a_{n+1}$

12. TWK7 (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos triângulos equiláteros a seguir:



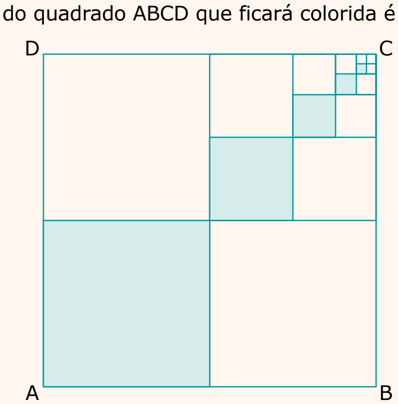
Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 ...

O perímetro do triângulo da etapa 1 é 3 e sua altura é **h**; a altura do triângulo da etapa 2 é metade da altura do triângulo da etapa 1; a altura do triângulo da etapa 3 é metade da altura do triângulo da etapa 2 e, assim, sucessivamente.

Assim, a soma dos perímetros da sequência infinita de triângulos é

A) 2. C) 4. E) 6.
B) 3. D) 5.

13. WEBF (UPF–2023) A região em azul do quadrado ABCD se repete infinitamente de acordo com o padrão representado na figura, originando sempre mais quadrados. Dessa maneira, a parte do quadrado ABCD que ficará colorida é:



A) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{3}$ E) $1\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{5}{4}$

14. YD9Q (UFRGS-RS) Para fazer a aposta mínima na Mega-sena, uma pessoa deve escolher 6 números diferentes em um cartão de apostas que contém os números de 1 a 60. Uma pessoa escolheu os números de sua aposta, formando uma progressão geométrica de razão inteira.

Com esse critério, é correto afirmar que

A) essa pessoa apostou no número 1.
B) a razão da P.G. é maior do que 3.
C) essa pessoa apostou no número 60.
D) a razão da P.G. é 3.
E) essa pessoa apostou somente em números ímpares.

15. (AFA-SP–2023) As raízes da equação $|2x - 3| + |x + 2| = 4$ são o primeiro e segundo termos de uma progressão geométrica (P.G.) decrescente.

O termo geral dessa P.G. é

A) $a_n = \frac{25}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

B) $a_n = \frac{1}{9}\left(\frac{5}{3}\right)^n$

C) $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

D) $a_n = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

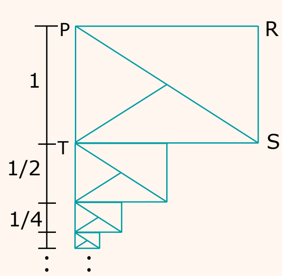
16. G63I (UECE) Seja $x_1, x_2, x_3, \ldots;$ uma progressão geométrica cuja razão é o número real positivo **q**. Se $x_5 = 24q$ e $x_5 + x_6 = 90$, então, o termo x_1 desta progressão é um número

A) inteiro.
B) racional maior do que 7,1.
C) irracional maior do que 7,1.
D) racional menor do que 7,0.

17. BSEØ (UERJ) Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de 12 m. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior. Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$
C) $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$
D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$
E) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

02. (Enem) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com 2n competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente, até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

A) 2 . 128
B) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
C) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
D) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
E) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

03. (Enem) Atualmente, a massa de uma mulher é 100 kg. Ela deseja diminuir, a cada mês, 3% da massa que possuía no mês anterior. Suponha que ela cumpra sua meta.

A sua massa, em quilogramas, daqui a dois meses, será

A) 91,00.
B) 94,00.
C) 94,09.
D) 94,33.
E) 96,91.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. D	05. D	07. B
02. C	04. D	06. C	08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D	07. E	13. C
02. C	08. B	14. A
03. A	09. D	15. A
04. C	10. C	16. B
05. C	11. D	17. 36 m
06. D	12. E	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B	02. E	03. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Matrizes

INTRODUÇÃO

Em várias situações envolvendo diversas áreas da ciência, as informações são apresentadas na forma de uma tabela retangular, formada por linhas e colunas. Tal formatação justifica-se pela notável organização propiciada por essa configuração, aliada à facilidade de se efetuar vários cálculos simultâneos com os dados nesse formato. Essa tabela retangular é chamada de matriz.

A teoria das matrizes encontra aplicação em diversas áreas, tais como Computação, Engenharia, Física, Economia, Administração, entre outras. Na Matemática, as matrizes integram a teoria da chamada Álgebra Linear, da qual fazem parte também os Determinantes e os Sistemas Lineares.

DEFINIÇÃO DE MATRIZ

Vamos considerar a tabela a seguir, que indica o faturamento de três filiais de uma empresa, nos meses de janeiro e fevereiro de um certo ano:

	Faturamento	
	Janeiro	Fevereiro
Filial A	1 850 000	2 014 000
Filial B	765 000	1 023 000
Filial C	2 340 000	1 890 000

Essa tabela é um exemplo de matriz, e pode ser representada nos seguintes formatos:

Colchetes

$$\begin{bmatrix} 1850000 & 2014000 \\ 765000 & 1023000 \\ 2340000 & 1890000 \end{bmatrix}$$

Barras Duplas

$$\begin{Vmatrix} 1850000 & 2014000 \\ 765000 & 1023000 \\ 2340000 & 1890000 \end{Vmatrix}$$

Parênteses

$$\begin{pmatrix} 1850000 & 2014000 \\ 765000 & 1023000 \\ 2340000 & 1890000 \end{pmatrix}$$

OBSERVAÇÃO

Cada matriz anterior é formada por 3 linhas e 2 colunas. Por isso, dizemos que elas são de ordem 3×2.

De maneira geral, podemos definir uma matriz como uma tabela numérica na qual os elementos estão dispostos em linhas e colunas.

REPRESENTAÇÃO GENÉRICA

Consideremos a matriz genérica $A_{m \times n}$, ou seja, com **m** linhas e **n** colunas. Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento da matriz A é indicado por a_{ij}. O índice **i** indica a linha, e o índice **j**, a coluna a que os elementos pertencem. As linhas são numeradas da esquerda para a direita, enquanto as colunas são numeradas de cima para baixo. Por exemplo, a_{23} representa o elemento da linha 2 e coluna 3.

Considerando a matriz $\begin{bmatrix} 1850000 & 2014000 \\ 765000 & 1023000 \\ 2340000 & 1890000 \end{bmatrix}$:

$a_{11} = 1850000$ $\quad a_{12} = 2014000$

$a_{21} = 765000$ $\quad a_{22} = 1023000$

$a_{31} = 2340000$ $\quad a_{32} = 1890000$

OBSERVAÇÃO

Uma matriz pode estar representada de forma abreviada, por meio de uma lei de formação.

Exemplo:

Escrever na forma de tabela a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $a_{ij} = 4i + 3j$.

Nesse caso, a matriz é dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Vamos calcular o valor de cada um dos termos da matriz, utilizando a lei de formação dada:

$a_{11} = 4 . 1 + 3 . 1 = 7$ $\quad a_{12} = 4 . 1 + 3 . 2 = 10$ $\quad a_{13} = 4 . 1 + 3 . 3 = 13$

$a_{21} = 4 . 2 + 3 . 1 = 11$ $\quad a_{22} = 4 . 2 + 3 . 2 = 14$ $\quad a_{23} = 4 . 2 + 3 . 3 = 17$

$a_{31} = 4 . 3 + 3 . 1 = 15$ $\quad a_{32} = 4 . 3 + 3 . 2 = 18$ $\quad a_{33} = 4 . 3 + 3 . 3 = 21$

Portanto, em forma de tabela temos $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 11 & 14 & 17 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$.

MATRIZES ESPECIAIS

Matriz Linha

É toda matriz que possui uma única linha (ordem $1 \times n$).

Exemplo:

$A = [3 \quad 4 \quad -1]$ é uma matriz linha 1×3.

Matriz Coluna

É toda matriz que possui uma única coluna (ordem $m \times 1$).

Exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ \pi \\ 2 \\ -100 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz coluna } 5 \times 1.$$

Matriz Nula

É toda matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é a matriz nula } 3 \times 3.$$

Matriz Quadrada

É toda matriz na qual o número de linhas é igual ao de colunas. A matriz quadrada do tipo $n \times n$ pode ser chamada de matriz de ordem **n**.

Exemplo:

Tomemos uma matriz genérica 3×3. Assim, temos:

Diagonal principal ↓ Diagonal secundária ↓

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observe que a diagonal principal é formada pelos elementos $i = j$. Já a diagonal secundária é formada pelos elementos $i + j = n + 1$.

Matriz Diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são nulos.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade (ou Matriz Unidade)

É toda matriz quadrada em que os elementos situados fora da diagonal principal são nulos, e os elementos da diagonal principal são iguais à unidade. Representamos a matriz unidade de ordem **n** por I_n.

Exemplos:

1º) $I_1 = [\ 1\ ]$ (Matriz identidade de ordem 1)

2º) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Matriz identidade de ordem 2)

3º) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Matriz identidade de ordem 3)

E assim por diante.

Matriz Oposta

Dada a matriz A, sua oposta –A é obtida trocando-se os sinais dos elementos da A.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$. Então, $-A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$.

Matriz Transposta

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A à matriz A^t, do tipo $n \times m$, que possui as linhas ordenadamente iguais às colunas de A e as colunas ordenadamente iguais às linhas de A.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 13 \\ 21 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $A^t = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 0 & -4 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$.

Propriedades da Transposta

Sendo A e B matrizes e α um número real, e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

ii) $(\alpha \,.\, A)^t = \alpha \,.\, A^t$

iii) $(A^t)^t = A$

iv) $(A \,.\, B)^t = B^t \,.\, A^t$

OBSERVAÇÕES

Uma matriz quadrada A é dita **simétrica** se $A = A^t$.

Uma matriz quadrada A é dita **antissimétrica** se $A = -A^t$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFRGS-RS) Uma matriz A é dita simétrica quando $A = A^t$. Sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{bmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de x + y + z?

Resolução:

A matriz transposta da matriz dada é igual a $\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 4 & z \\ y & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Igualando as matrizes, temos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 4 & z \\ y & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Logo, x = 2, y = 3 e z = 5.

Portanto, x + y + z = 2 + 3 + 5 = 10.

OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES

Igualdade de matrizes

Sejam duas matrizes A e B de mesma ordem m × n. As matrizes A e B são iguais se, e somente se, todos os elementos correspondentes de A e B são iguais.

Exemplo:

Determinar os valores de **x**, **y** e **z** na igualdade a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 6 & 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & z \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$

Igualando-se os termos correspondentes, obtemos:

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

$z = 4$

$5y = -15 \Rightarrow y = -3$

Adição de matrizes

Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem m × n. Chamamos de soma das matrizes A e B a uma matriz **C = A + B**, também do tipo m × n, tal que seus elementos sejam obtidos somando-se os elementos correspondentes das matrizes A e B.

Exemplo:

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 0 & -11 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & -13 & 55 & 7 \\ 6 & 1 & -3 & 18 \end{bmatrix},$$

determinar a matriz A + B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 21+8 & 0-13 & -11+55 & 6+7 \\ 8+6 & 1+1 & 1-3 & 5+18 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 29 & -13 & 44 & 13 \\ 14 & 2 & -2 & 23 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem e O a matriz nula, e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

Comutativa	A + B = B + A
Associativa	(A + B) + C = A + (B + C)
Elemento neutro	A + O = O + A = A
Elemento oposto	A + (–A) = (–A) + A = O

Multiplicação de uma matriz por um número

Seja **k** um número real e A uma matriz do tipo m × n. Definimos o produto de **k** por A, representado por k.A, como uma matriz B, também do tipo m × n, tal que seus elementos são obtidos multiplicando-se todos os elementos da matriz A pelo número **k**.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, obter a matriz 5.A.

Resolução:

$$5 . A = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.11 \\ 5.0 & 5.3 \\ 5.4 & 5.4 \\ 5.1 & 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 55 \\ 0 & 15 \\ 20 & 20 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$. Chama-se produto das matrizes A e B, nessa ordem, à matriz $C_{m \times p}$, tal que cada elemento c_{ij} da matriz C é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha **i** de A pelos da coluna **j** de B.

OBSERVAÇÕES

i) Somente é possível a multiplicação de duas matrizes, se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, isto é:

$$A_{m \times n} \; . \; B_{n \times p}$$

$$\exists\, A . B$$

ii) Na matriz produto $C_{m \times p}$, o número de linhas é igual ao número de linhas da primeira matriz, e o número de colunas é igual ao número de colunas da segunda matriz.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observamos que o produto A . B existe, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Podemos utilizar o seguinte algoritmo:

Escrevemos, inicialmente, a matriz A e, em seguida, escrevemos a matriz B. O produto A . B é obtido do seguinte modo:

Multiplicamos cada elemento de uma determinada linha de A pelo elemento correspondente de uma coluna de B. Em seguida, somamos esses produtos, obtendo o elemento correspondente da matriz produto A . B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3+3.2 & 1.4+3.(-1) & 1.1+3.0 \\ 0.3+4.2 & 0.4+4.(-1) & 0.1+4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sendo A, B e C matrizes e α um número real e supondo as operações a seguir possíveis, temos:

i) Associativa	A . (B . C) = (A . B) . C
ii) Distributiva à esquerda	A . (B + C) = A . B + A . C
iii) Distributiva à direita	(A + B) . C = A . C + B . C

Além das anteriores, temos:

$$\left.\begin{matrix} A_{m \times n} . I_n = A_{m \times n} \\ I_m . A_{m \times n} = A_{m \times n} \end{matrix}\right\} \text{Elemento neutro}$$

$$(\alpha . A) . B = A . (\alpha . B) = \alpha . (A . B)$$

OBSERVAÇÃO

Dadas as matrizes A e B, e supondo que o produto A . B exista, há três possibilidades para o produto B . A:

1ª possibilidade: B . A pode não existir.

2ª possibilidade: B . A pode existir e ser diferente de A . B.

3ª possibilidade: B . A pode existir e ser igual a A . B.

No terceiro caso, dizemos que as matrizes A e B comutam na multiplicação.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determinar, caso exista:

A) A^2

Temos que A^2 = A . A. Efetuando o produto, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+0.1 & 2.0+0.3 \\ 1.2+3.1 & 1.0+3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

B) A . B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+0.2 & 2.2+0.0 \\ 1.1+3.2 & 1.2+3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

C) B . A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.0+2.3 \\ 2.2+0.1 & 2.0+0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO

Embora existam A . B e B . A, as matrizes obtidas não são iguais. Portanto, dizemos que A e B não comutam na multiplicação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (Unisa-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, então, calculando-se $(A + B)^2$, obtém-se:

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 121 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 60 \\ 1 & 121 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

Inicialmente, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & -1+1 \\ 2+3 & 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

Logo, $(A + B)^2$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.5 & 1.0+0.11 \\ 5.1+11.5 & 5.0+11.11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 121 \end{bmatrix}$$

MATRIZES INVERSAS

Introdução

O conceito de matriz inversa nasceu da necessidade de se resolver equações matriciais da forma A . X = B. Como não existia um equivalente matricial da divisão, os matemáticos desenvolveram um conjunto de técnicas para efetuar uma operação chamada inversão de matrizes, de maneira similar ao cálculo do inverso multiplicativo de um número real.

Definição

Dada a matriz $A_{n \times n}$, chamamos de sua inversa a matriz $A^{-1}_{n \times n}$, tal que:

$$A_{n \times n} . A^{-1}_{n \times n} = A^{-1}_{n \times n} . A_{n \times n} = I_{n \times n}$$

Na fórmula, $I_{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem **n**.

OBSERVAÇÃO

Convém ressaltar que uma matriz A pode não possuir inversa. Caso possua, **A** é dita **inversível (ou investível)**, e sua inversa é única. Caso contrário, a matriz A é chamada **singular**.

Obtenção da matriz inversa

Exemplo:

Calcular a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Seja a matriz inversa dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$. Assim, temos:

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2x + y & 2z + t \\ 3y & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando termo a termo, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \text{e} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2z + t = 0 \\ 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{6} \\ \text{e} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Unicidade da matriz inversa

Se a matriz A é inversível, então a sua inversa é única.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que exista uma outra matriz B, tal que $A . B = B . A = I$.

Sabemos que $A . A^{-1} = I$.

Multiplicando-se, à esquerda, ambos os membros da equação anterior, temos:

$B . (A . A^{-1}) = B . I \Rightarrow (B . A) . A^{-1} = B . I$

Mas, $B . A = I$.

Logo, $I . A^{-1} = B . I$ e, portanto, $A^{-1} = B$.

Portanto, a matriz inversa de A é única.

Propriedades da matriz inversa

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Assim, temos:

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

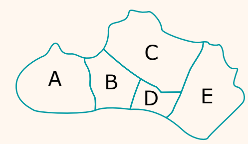
ii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

iii) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. IWYH (ESPM-SP–2020) Certo país é dividido em 5 regiões cujas áreas (em km²) e respectivas densidades demográficas (hab/km²) são representadas pelas matrizes **M** e **N**, nessa ordem:



$$\begin{array}{c} \\ M = \\ N = \end{array} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ [300 & 240 & 450 & 20 & 25] \\ [60 & 40 & 30 & 20 & 25] \end{array}$$

Uma operação matricial que permite o cálculo da população total desse país é:

A) $M . N$
B) $M + N$
C) $M^t . N$
D) $M . N^t$
E) $N^t . M$

02. ØKN5 (UFOP-MG) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, sabe-se que $A.B^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. O valor de $a + b$ é

A) 3.
B) 7.
C) 10.
D) 11.

03. D8FX (ESPM-SP) Duas matrizes quadradas de mesma ordem são inversas se o seu produto é igual à matriz identidade daquela ordem. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ matrizes inversas, o valor de $x + y + z + w$ é

A) 0.
B) 1.
C) −2.
D) 3.
E) −4.

04. LL09 (PUC RS) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a função **f**, definida no conjunto das matrizes 2×2 por $f(x) = x^2 - 2x$, então $f(A)$ é:

A) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

05. (Unicamp-SP) Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

A) 12.
B) 15.
C) 16.
D) 20.

MATEMÁTICA

06. A04C (FGV) Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ uma matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} -j^{ii}, \text{se } i = j \\ (-i)^j, \text{se } i \neq j \end{cases}$.

A inversa da matriz **A**, denotada por A^{-1}, é a matriz:

A) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

07. J693 (UEA-AM) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -b & -4 \\ 2 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, tais que A.B = 2.C.

O valor de b^a é

A) 28.

B) 30.

C) 32.

D) 34.

E) 36.

08. D3RP (Unifor-CE) A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2c-3 & -1 \end{bmatrix}$.

Calcule o valor de a + b + c + d.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFPE–2020) Wagner é um proprietário de uma pequena empresa de confecção de materiais esportivos. Por ser bastante organizado, ele estruturou, em uma matriz $P = (p_{ij})$ fornecida a seguir, os dados de produção de quatro tipos de produtos que sua empresa produz.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando a matriz **P** e que cada p_{ij} representa quanto do material **j** será empregado para fabricar um produto **i**, que total de material 2 será gasto na empresa de Wagner na produção de oito produtos do tipo 1, dois produtos do tipo 2, um produto do tipo 3 e cinco produtos do tipo 4?

A) 20

B) 40

C) 30

D) 50

E) 10

02. (UPF-RS–2023) A criptografia é constituída por conjunto de técnicas para proteger, de forma segura, uma informação de modo que apenas o emissor e o receptor consigam compreendê-la. É utilizada em comunicações digitais, como na troca de mensagens ou em pagamentos online. Uma das técnicas de se criptografar consiste em identificar cada letra do alfabeto com um determinado número e escrever a mensagem na forma de uma matriz. O remetente codifica essa matriz de mensagem usando uma matriz de codificação, enquanto o destinatário consegue ler a mensagem usando uma matriz de decodificação. Esse processo é validado em razão de que as matrizes de codificação e decodificação são inversas uma da outra. Seja **C** a matriz de codificação e **D** a matriz de decodificação, tem-se que D . C = C . D = I, onde **I** é a matriz identidade. Suponha que o remetente codifica uma mensagem com a seguinte matriz de codificação $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. A matriz de decodificação **D** que o destinatário deverá usar para ler a mensagem será:

A) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

03. XJSE (UEL-PR) Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. A matriz **Q** fornece a quantidade de cada componente na fabricação dos modelos de sapatos, enquanto a matriz **C** fornece o custo unitário, em reais, destes componentes.

Dados:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{borracha} & \text{couro} & \text{tecido} \end{array} \\ Q = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{modelo 1} \\ \text{modelo 2} \\ \text{modelo 3} \end{array} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{borracha} \\ \text{couro} \\ \text{tecido} \end{array}$$

A matriz **V** que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos é dada por:

A) $V = \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

B) $V = \begin{pmatrix} 90 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$

C) $V = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

D) $V = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}$

E) $V = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{pmatrix}$

04. OBIN

(Uncisal) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+y & x-y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, os valores de **x** e **y** de modo que $A.A^t = B$ são:

A) $x = y = -1$

B) $x = -2, y = 1$

C) $x = 1, y = -2$

D) $x = y = -2$

E) $x = y = 2$

05. 9DG3

(UEG-GO) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes **A** e **B**, ambas de ordem 2×2, em que cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, a = 1, b = 2, c = 3, ..., z = 26. Por exemplo, se a resolução de A.B for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo, a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então a matriz **A** é:

A) $\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

06. E7H2

(UFG-GO) Uma metalúrgica produz parafusos para móveis de madeira em três tipos, denominados *soft*, escareados e sextavados, que são vendidos em caixas grandes, com 2 000 parafusos, e pequenas, com 900, cada caixa contendo parafusos dos três tipos. A tabela 1, a seguir, fornece a quantidade de parafusos de cada tipo, contida em cada caixa, grande ou pequena. A tabela 2 fornece a quantidade de caixas de cada tipo, produzida em cada mês do primeiro trimestre de um ano.

Tabela 1

Parafusos / caixas	Pequena	Grande
Soft	200	500
Escareado	400	800
Sextavado	300	700

Tabela 2

Caixas / mês	Jan	Fev	Mar
Pequena	1 500	2 200	1 300
Grande	1 200	1 500	1 800

Associando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 500 \\ 400 & 800 \\ 300 & 700 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1\,500 & 2\,200 & 1\,300 \\ 1\,200 & 1\,500 & 1\,800 \end{bmatrix}$$

às tabelas 1 e 2, respectivamente, o produto A.B fornece

A) o número de caixas fabricadas no trimestre.

B) a produção do trimestre de um tipo de parafuso, em cada coluna.

C) a produção mensal de cada tipo de parafuso.

D) a produção total de parafusos por caixa.

E) a produção média de parafusos por caixa.

07. YE18

(UEA-AM) Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = i^j$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, com **a**, **b** e **c** números reais.

Sabendo que A.C = B e que b + c = 0, o valor de a.b.c é igual a

A) −40.

B) −20.

C) −10.

D) 0.

08. Q698

(Mackenzie-SP) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e os inteiros **x** e **y** são tais que $A^2 + x.A + y.B = C$, então:

A) x = 0

B) x = 1

C) x = −2

D) x = −1

E) x = 2

MATEMÁTICA

09. (UFRGS-RS) $A = (a_{ij})$ é uma matriz de ordem 2×2 com $a_{ij} = 2^{-i}$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. A inversa de **A** é:

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{bmatrix}$

10. QA8Z (ESPM-SP) Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2, a soma de todos os elementos da matriz $M = A.A^t$ é dada por:

A) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

B) $(a + b + c + d)^2$

C) $(a + b)^2 + (c + d)^2$

D) $(a + d)^2 + (b + c)^2$

E) $(a + c)^2 + (b + d)^2$

11. (ESA–2023) Os Batalhões de Inteligência Militar desenvolvem formas para o envio de mensagens secretas, sendo uma delas os códigos matemáticos que seguem os passos a seguir:

1. O destinatário e o remetente possuem uma matriz chave **C**;
2. O destinatário recebe do remetente uma matriz **P**, tal que MC = P, onde **M** é a matriz da mensagem a ser codificada;
3. Cada número da matriz **M** corresponde a uma letra do alfabeto: 1 = a, 2 = b, 3 = c, ..., 23 = z;
4. Consideramos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras **k**, **w** e **y**;
5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação;
6. A mensagem é lida, encontrando a matriz **M**, fazendo correspondência número / letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: m_{11} m_{12} m_{13} m_{21} m_{22} m_{23} m_{31} m_{32} m_{33}.

Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nas informações descritas, qual alternativa apresenta a mensagem enviada por meio da matriz **M**?

A) Brasil!

B) Território!

C) Pantanal!

D) Montanha!

E) Guerreiro!

12. CTJX (FUVEST-SP) Sejam α e β números reais com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{tg}\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$, for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a:

A) $-\frac{\pi}{3}$

B) $-\frac{\pi}{6}$

C) 0

D) $\frac{\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{3}$

13. (UFU-MG) Seja **A** uma matriz de terceira ordem com elementos reais. Sabendo-se que $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, conclui-se que −1, 4 e 2 são os elementos da

A) diagonal da transposta de **A**.

B) primeira coluna da transposta de **A**.

C) primeira linha da transposta de **A**.

D) última linha da transposta de **A**.

14. 4ZE6 (UEL-PR) Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de 1 m² de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

Número de samambaias por quadrante

$$A_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Número de quadrantes

$$B_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} da matriz **A** corresponde ao elemento b_{ij} da matriz **B**, por exemplo, 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes **A** e **B**, que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

A) $A^t \times B$

B) $B^t \times A^t$

C) $A \times B$

D) $A^t \times B^t$

E) $A + B$

15. (UESC-BA) O fluxo de veículos que circulam pelas ruas de mão dupla 1, 2 e 3 é controlado por um semáforo, de tal modo que, cada vez que sinaliza a passagem de veículos, é possível que passem até 12 carros, por minuto, de uma rua para outra.

Na matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 36 \\ 90 & 0 & 75 \\ 36 & 75 & 0 \end{pmatrix}$, cada termo S_{ij} indica o tempo, em segundos, que o semáforo fica aberto, num período de 2 minutos, para que haja o fluxo da rua **i** para a rua **j**.

Então, o número máximo de automóveis que podem passar da rua 2 para a rua 3, das 8h às 10h de um mesmo dia, é

A) 432.

B) 576.

C) 900.

D) 1 080.

E) 1 100.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2020) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o

A) T_1.

B) T_2.

C) T_3.

D) T_4.

E) T_5.

MATEMÁTICA

02. (Enem) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco **i** para o banco **j** durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. D
- 03. A
- 04. B
- 05. A
- 06. E
- 07. C
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. E
- 03. E
- 04. C
- 05. B
- 06. C
- 07. B
- 08. C
- 09. C
- 10. E
- 11. C
- 12. B
- 13. C
- 14. A
- 15. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

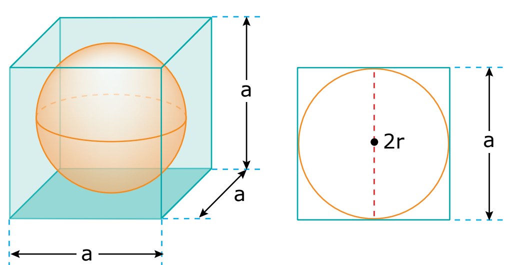
- 01. D
- 02. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Inscrição de Sólidos

ESFERA E CUBO

Vamos calcular o raio **r** da esfera inscrita em um cubo de aresta **a**. Seja a figura:

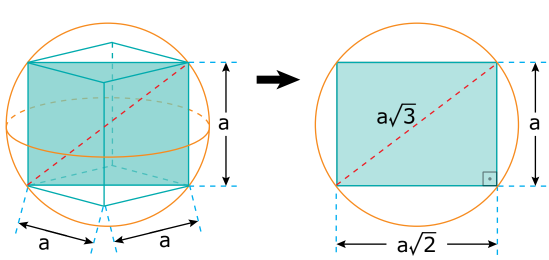


O diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo. Assim:

$$2r = a$$

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

Vamos calcular o raio **R** da esfera circunscrita a um cubo de aresta **a**. Seja a figura:



O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo. Assim:

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

Inicialmente, vejamos uma propriedade dos tetraedros regulares:

> Num tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.

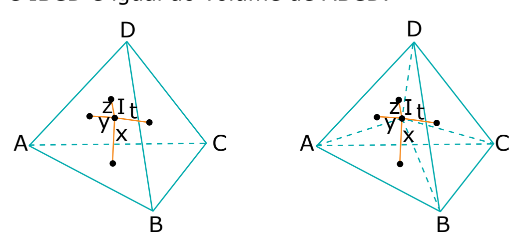
Sendo **I** um ponto interior e **x**, **y**, **z** e **t** as respectivas distâncias às faces ABC, ABD, ACD e BCD, queremos provar que:

$$\boxed{x + y + z + t = h}$$

Consideremos **h** a altura do tetraedro.

Demonstração:

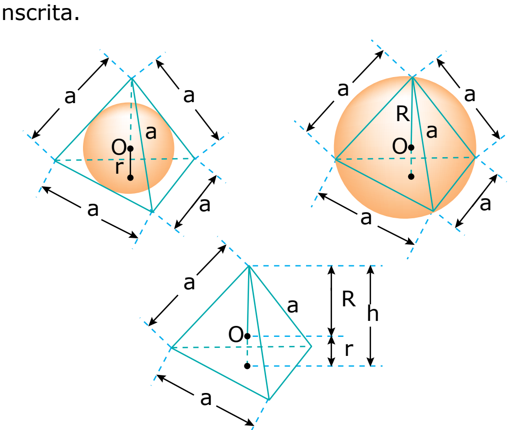
De fato, a soma dos volumes das pirâmides IABC, IABD, IACD e IBCD é igual ao volume de ABCD.



Sendo **S** a área de uma face do tetraedro, temos:

$$\frac{1}{3}S_x + \frac{1}{3}S_y + \frac{1}{3}S_z + \frac{1}{3}S_t = \frac{1}{3}S_h \Rightarrow x + y + z + t = h$$

Seja **a** a medida da aresta do tetraedro regular, vamos calcular o raio **r** da esfera inscrita e o raio **R** da esfera circunscrita.



Sendo o centro **O** um ponto interior do tetraedro regular, vale a propriedade anterior, isto é:

$x + y + z + t = h$ e, com $x = y = z = t = r$, temos:

$$4r = h$$

$$\boxed{r = \frac{1}{4}h}$$

Como $R + r = h$, então:

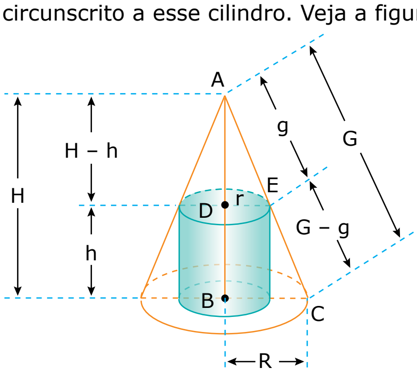
$$\boxed{R = \frac{3}{4}h}$$

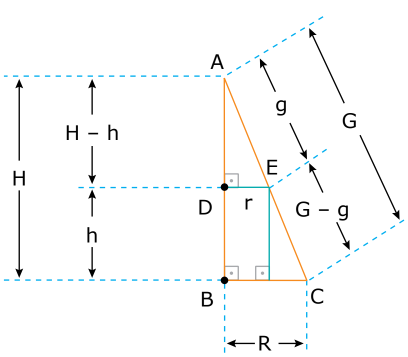
Como a altura do tetraedro regular é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, temos, respectivamente, o raio da circunferência inscrita e circunscrita iguais a:

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}} \quad \text{e} \quad \boxed{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

CILINDRO E CONE

Vamos relacionar as medidas de um cilindro reto às de um cone reto circunscrito a esse cilindro. Veja a figura:



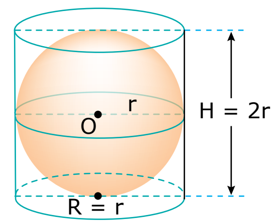


Sabendo que os triângulos ABC e ADE da figura são semelhantes, podemos aplicar:

$$\boxed{\Delta\,ADE \sim \Delta\,ABC \Rightarrow \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}}$$

CILINDRO E ESFERA

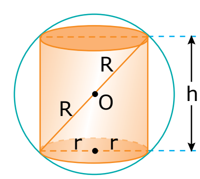
O cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero, cujo raio da base é igual ao raio da esfera. Se **R** é o raio do cilindro e **r** o raio da esfera, então:



$$R = r = \frac{H}{2}$$

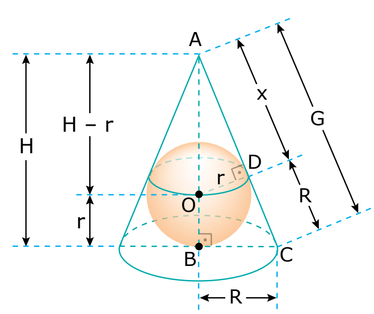
O raio da base **r** e a altura **h** de um cilindro inscrito em uma esfera de raio **R** obedecem à relação:

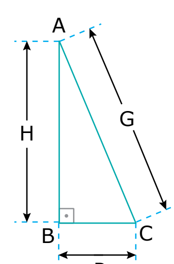
$$\boxed{(2R)^2 = (2r)^2 + h^2}$$

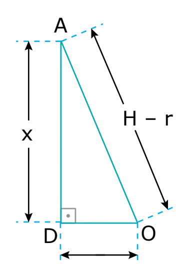


ESFERA E CONE RETO

Veja a figura de uma esfera inscrita em um cone reto, em que **O** é o centro da esfera inscrita no cone, e **D** é o ponto de tangência entre a esfera e o cone.







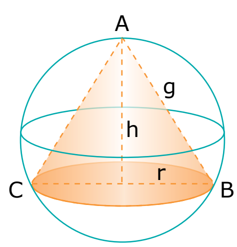
Sabendo que os triângulos ABC e ADO da figura são semelhantes, podemos aplicar:

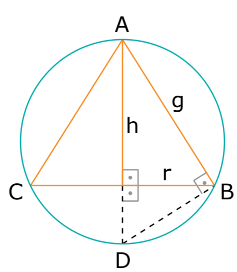
$$\boxed{\Delta\, ADO \sim \Delta\, ABC \Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{r}{R} = \frac{H - r}{G}}$$

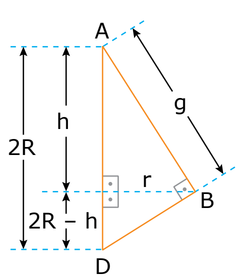
Podemos obter **x** aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADO:

$$x^2 = (H - r)^2 - r^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{H(H - 2r)}}$$

Analisemos, agora, uma esfera circunscrita a um cone reto.





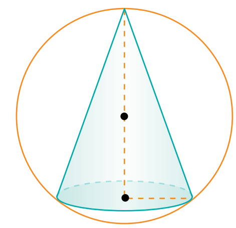


Das relações métricas no triângulo retângulo ABD, temos:

$$\boxed{g^2 = 2Rh} \quad e \quad \boxed{r^2 = h(2R - h)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC-SP) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura a seguir.



O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

A) 26,4%

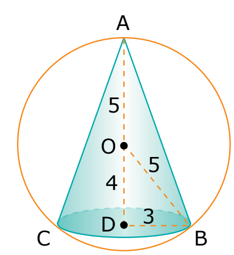
B) 21,4%

C) 19,5%

D) 18,6%

E) 16,2%

Resolução:



Seja **O** o centro da esfera. Trace o raio OB da esfera. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ODB, temos:

$OB^2 = DB^2 + OD^2 \Rightarrow (5)^2 = (3)^2 + OD^2 \Rightarrow$

$OD = 4$ cm, pois $OD > 0$

Assim, a altura **h** do cone é:

$h = 5 + 4 = 9$ cm

Logo, o volume V_C do cone é:

$$V_C = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}.\pi(3)^2 . 9 = 27\pi \text{ cm}^3$$

O volume V_E da esfera é:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Assim, percentualmente, o volume do cone corresponde ao volume da esfera em:

$$\frac{V_C}{V_E} = \frac{27\pi}{\frac{500\pi}{3}} = 27\pi.\frac{3}{500\pi} = \frac{81}{500} = 0{,}162 = 16{,}2\%$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 4MZV (UFMG) A razão entre as áreas totais de um cubo e do cilindro reto nele inscrito, nessa ordem, é:

A) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{4}{\pi}$ E) $\frac{6}{\pi}$

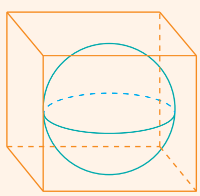
B) $\frac{3}{\pi}$ D) $\frac{5}{\pi}$

02. TWCN (EEAR) Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede 16π cm². O volume da esfera inscrita é:

A) 8 C) $\frac{32}{3}\pi$

B) 16π D) $\frac{256}{3}\pi$

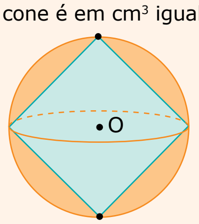
03. Z6JD (UFRR) Calcule a razão entre a área e o volume de uma esfera inscrita no cubo de aresta 3 cm.



A) 2 C) π E) $\frac{1}{2}$

B) 1 D) 2π

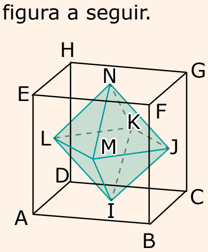
04. PNY9 (UFAM) A figura a seguir mostra um par de cones de mesma base e altura inscritos em uma esfera de raio 1 cm. O volume de cada cone é em cm³ igual a:



A) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

B) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{6}$

05. 2VR0 (UFRGS-RS) Considere um cubo de aresta **a**. Os pontos **I**, **J**, **K**, **L**, **M** e **N** são os centros das faces ABCD, BCGF, DCGH, ADHE, ABFE e EFGH, respectivamente, conforme representado na figura a seguir.



O octaedro regular, cujos vértices são os pontos **I**, **J**, **K**, **L**, **M** e **N**, tem aresta medindo:

A) $a\sqrt{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

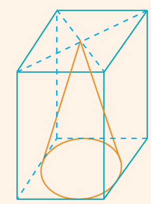
B) $a\sqrt{2}$ D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

06. B6MB (PUC RS) A circunferência de uma bola de voleibol é 66 cm. Para colocá-la em uma caixa cúbica, essa caixa deve ter, no mínimo, uma aresta interna, em centímetros, de:

A) 33 C) 66 E) $\frac{\pi}{66}$

B) $\frac{33}{\pi}$ D) $\frac{66}{\pi}$

07. 0OP6 (PUC RS) Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área 400 cm². Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é:



A) 16 000 C) $\frac{12}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{36}$

B) $\frac{4\,000}{3\pi}$ D) $\frac{\pi}{12}$

08. 73WW (UESB-BA) Se uma esfera rígida for colocada dentro da menor lata, em formato de cilindro circular reto, capaz de contê-la, ela irá ocupar uma fração do volume dessa lata igual a

A) $\frac{1}{2}$. C) $\frac{2}{3}$. E) $\frac{4}{5}$.

B) $\frac{3}{5}$. D) $\frac{3}{4}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE) Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio **R**. A medida de um diâmetro (2R) da esfera é

A) $2\sqrt{3}$ dm. C) $3\sqrt{3}$ dm.

B) $3\sqrt{2}$ dm. D) $4\sqrt{3}$ dm.

02. WC7D (UECE) Uma esfera está circunscrita a um cubo cuja medida da aresta é 2 m. A medida do volume da região exterior ao cubo e interior à esfera é

A) $4(\pi\sqrt{3} - 2)$ m³. C) $4(\pi\sqrt{3} + 2)$ m³.

B) $3(\pi\sqrt{3} + 2)$ m³. D) $3(\pi\sqrt{3} - 2)$ m³.

03. HKJQ (FGV-RJ) O líquido AZ não se mistura com a água. A menos que sofra alguma obstrução, espalha-se de forma homogênea sobre a superfície da água formando uma fina película circular com 0,2 cm de espessura. Uma caixa em forma de paralelepípedo retangular, com dimensões de 7 cm, 10 cm e 6 cm, está completamente cheia do líquido AZ. Seu conteúdo é, então, delicadamente derramado em um grande recipiente com água.

O raio da película circular que o líquido AZ forma na superfície da água, em centímetros, é:

A) $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{21}{\pi}}$

B) $\sqrt{\frac{210}{\pi}}$

C) $10\sqrt{\frac{21}{\pi}}$

D) $\sqrt{\frac{21}{10\pi}}$

E) $\frac{\sqrt{21}}{10\pi}$

04. (UDESC-SC) Algumas caixas de *pizza* para entrega têm o formato de um prisma regular de base hexagonal. Considere uma caixa destas com altura de 4 cm e, com base, um polígono de perímetro 72 cm. Se a *pizza* tem o formato de um cilindro circular, então o volume máximo de *pizza* que pode vir nesta caixa é

A) $216\sqrt{3}$ cm³.

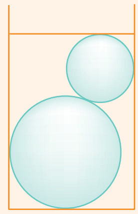
B) 576π cm³.

C) $864\sqrt{3}$ cm³.

D) 108π cm³.

E) 432π cm³.

05. N9L1 (UERJ) Duas esferas metálicas maciças de raios iguais a 8 cm e 5 cm são colocadas, simultaneamente, no interior de um recipiente de vidro com forma cilíndrica e diâmetro da base medindo 18 cm. Nesse recipiente, despeja-se a menor quantidade possível de água para que as esferas fiquem totalmente submersas, como mostra a figura.



Posteriormente, as esferas são retiradas do recipiente. A altura da água, em cm, após a retirada das esferas, corresponde, aproximadamente, a

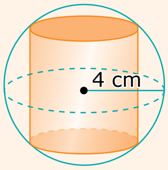
A) 10,6.

B) 12,4.

C) 14,5.

D) 25,0.

06. BQ2P (UECE) Como mostra a figura, o cilindro reto está inscrito na esfera de raio 4 cm.



Sabe-se que o diâmetro da base e a altura do cilindro possuem a mesma medida. O volume do cilindro é

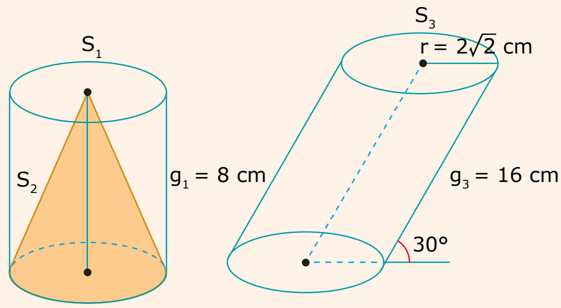
A) $18\pi\sqrt{2}$ cm³.

B) $24\pi\sqrt{2}$ cm³.

C) $32\pi\sqrt{2}$ cm³.

D) $36\pi\sqrt{2}$ cm³.

07. AJU8 (UEMG) Observe as figuras.



Nas figuras anteriores, tem-se um cilindro circular equilátero (S_1), circunscrevendo um cone (S_2), e um cilindro circular oblíquo (S_3). A razão determinada pelo volume de S_3 com a superfície total de S_2 é

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ cm.

B) $\sqrt{5}-1$ cm.

C) $\frac{\sqrt{5}+16}{4}$ cm.

D) $\sqrt{5}+16$ cm.

08. 3AS6 (UDESC-SC) A base de um cone reto está inscrita em uma face de um cubo e seu vértice está no centro da face oposta. Se o volume do cone é $\frac{2\pi}{3}$ metros cúbicos, a área do cubo (em metros quadrados) é igual a

A) 8.

B) 24.

C) 16.

D) 20.

E) 4.

09. (EsPCEx–2019) Uma esfera de raio 10 cm está inscrita em um cone equilátero. O volume desse cone, em cm³, é igual a

A) 1 000π.

B) 1 500π.

C) 2 000π.

D) 2 500π.

E) 3 000π.

10. (UFJF-MG) Uma peça de ornamentação confeccionada com vidro possui a forma de um prisma regular reto cuja base é um triângulo equilátero. Em seu interior, há uma esfera representando o globo terrestre, que tangencia cada face do prisma. Sabendo que o raio da esfera é **r**, qual é o volume do prisma?

A) $r^3\sqrt{3}$

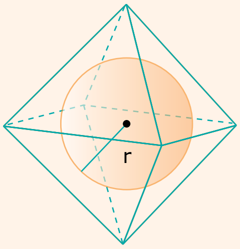
B) $2r^3\sqrt{3}$

C) $3r^3\sqrt{3}$

D) $6r^3\sqrt{3}$

E) $8r^3\sqrt{3}$

11. K508 (UEL-PR) Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma joia exclusiva. Para isso, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio **r**, conforme representado na figura a seguir:



Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm^3, é:

A) $\frac{(\sqrt{2})\pi}{3}$

B) $\frac{8\pi}{3}$

C) $8\frac{(\sqrt{2})\pi}{9}$

D) $4\frac{(\sqrt{6}\pi)}{9}$

E) $8\frac{(\sqrt{6})\pi}{27}$

12. (PUCPR–2023) Em um cone circular reto, que tem 240π cm^2 de área lateral, as medidas do raio da base, da altura e da geratriz são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética. Se uma esfera pode ser inscrita nesse cone, então o raio dessa esfera mede

A) 12 cm.

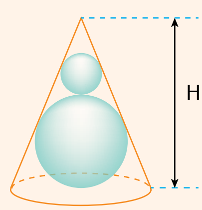
B) 6 cm.

C) $\frac{16}{3}$ cm.

D) $\frac{48}{7}$ cm.

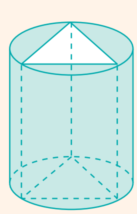
E) 4 cm.

13. IABL (UFRJ) Um cone circular reto de altura **H** circunscreve duas esferas tangentes, como mostra a figura a seguir. A esfera maior tem raio de 10 cm e seu volume é oito vezes o volume da menor.



Determine **H**.

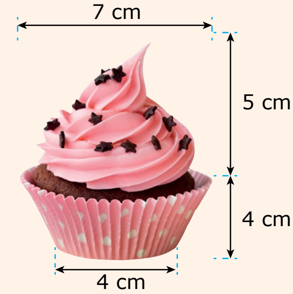
14. FTHQ (Unesp) Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, como ilustrado na figura, onde o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência.



A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável. Determine o volume dessa região. Para os cálculos finais, considere as aproximações $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Em uma confeitaria, um cliente comprou um *cupcake* (pequeno bolo no formato de um tronco de cone regular mais uma cobertura, geralmente composta por um creme), semelhante ao apresentado na figura:



Como o bolinho não seria consumido no estabelecimento, o vendedor verificou que as caixas disponíveis para embalar o doce eram todas em formato de blocos retangulares, cujas medidas estão apresentadas no quadro:

Embalagem	Dimensões (comprimento x largura x altura)
I	8,5 cm x 12,2 cm x 9,0 cm
II	10 cm x 11 cm x 15 cm
III	7,2 cm x 8,2 cm x 16 cm
IV	7,5 cm x 7,8 cm x 9,5 cm
V	15 cm x 8 cm x 9 cm

A embalagem mais apropriada para armazenar o doce, de forma a não o deformar e com menor desperdício de espaço na caixa, é

A) I.

B) II.

C) III.

D) IV.

E) V.

02. (Enem) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é

A) 9.

B) 11.

C) 13.

D) 15.

E) 17.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. C
03. A
04. B
05. E
06. D
07. D
08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. A
03. C
04. E
05. C
06. C
07. B
08. B
09. E
10. D
11. E
12. B
13. 40 cm
14. 517,5 cm^3

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Polinômios

DEFINIÇÃO DE POLINÔMIO

Um polinômio é uma função na variável **x** da forma:
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

É dado que:

i) $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ e a_0 são os coeficientes do polinômio.

ii) Os expoentes são números naturais.

Exemplos:

1º) $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$

2º) $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1$

Um polinômio é dito **nulo** se todos os seus coeficientes são iguais a zero. Portanto, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ é nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$.

GRAU DO POLINÔMIO

Considere o polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Dizemos que o grau de P(x) é igual a **n** se $a_n \neq 0$.

Exemplos:

1º) O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.

2º) O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.

3º) O grau de $P(x) = 13$ é igual a zero.

OBSERVAÇÃO

Não se define o grau de um polinômio nulo.

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Os polinômios $P(x) = a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_nx^n + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ são idênticos se, e somente se, $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$, e escrevemos $P(x) = Q(x)$.

Exemplo:

Determinar os valores de **a**, **b** e **c** para os quais os polinômios $P(x) = ax^2 + 3x + 9$ e $B(x) = (b + 3)x^2 + (c - 1)x + 3b$ são idênticos.

Igualando os coeficientes dos termos correspondentes, obtemos:

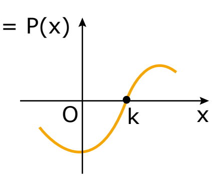
$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 3 = c - 1 \\ 9 = 3b \end{cases}$$

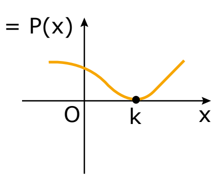
Resolvendo o sistema, obtemos a = 6, b = 3 e c = 4.

RAIZ OU ZERO DE UM POLINÔMIO

Dizemos que um número **k** é raiz de um polinômio P(x) se, e somente se, P(k) = 0.

Do ponto de vista geométrico, a raiz representa o ponto no qual a curva, correspondente ao gráfico de P(x), intercepta o eixo das abscissas no plano cartesiano.





OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Adição e subtração

Dados os polinômios:

$A(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e
$B(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$

i) A **adição** A(x) + B(x) é dada por:
$A(x) + B(x) =$
$(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

ii) A **subtração** A(x) − B(x) é dada por:
$A(x) - B(x) =$
$(a_n - b_n)x^n + ... + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

Portanto, nessas operações, basta adicionarmos ou subtrairmos os termos semelhantes.

Exemplo:

Considerar os polinômios $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 9x + 12$ e $B(x) = x^4 + 23x^3 - 7x^2 + x + 3$. Assim, temos:

$A(x) + B(x) = 6x^4 + 20x^3 + 11x^2 - 8x + 15$

$A(x) - B(x) = 4x^4 - 26x^3 + 25x^2 - 10x + 9$

Multiplicação

O produto dos polinômios A(x) e B(x) é obtido por meio da multiplicação de cada termo de A(x) por todos os termos de B(x), reduzindo os termos semelhantes.

O grau do polinômio A(x) . B(x) é igual à soma dos graus de A(x) e B(x).

Exemplo:

Sejam os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$. Assim, temos:

$A(x) . B(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 1) \Rightarrow$

$A(x) . B(x) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 2 \Rightarrow$

$A(x) . B(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Divisão (método da chave)

Da divisão de dois polinômios A(x) e B(x) não nulos são obtidos os polinômios Q(x) (quociente) e R(x) (resto), tais que:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & \underline{B(x)} \\ \vdots & Q(x) \\ R(x) & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = B(x).Q(x) + R(x) \\ gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Em que:

A(x): Dividendo	gr(R): grau de R(x)
B(x): Divisor	gr(B): grau de B(x)
Q(x): Quociente	
R(x): Resto	

Para esclarecer o método da chave, vamos efetuar a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ pelo polinômio $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Inicialmente, devemos verificar se o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Caso contrário, não é possível efetuar a divisão. No problema, o grau do dividendo é igual a 3 e o grau do divisor é igual a 2. Portanto, podemos efetuar a divisão.

Escrevemos os polinômios no seguinte formato:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & \underline{x^2 + 2x + 3} \end{array}$$

Inicialmente, dividimos o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & \underline{x^2 + 2x + 3} \\ & 4x \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos 4x por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & \underline{x^2 + 2x + 3} \\ \underline{-4x^3 - 8x^2 - 12x} & 4x \\ -6x^2 - 13x + 1 & \end{array}$$

Repetindo o processo, dividimos $-6x^2$ por x^2.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & \underline{x^2 + 2x + 3} \\ \underline{-4x^3 - 8x^2 - 12x} & 4x - 6 \\ -6x^2 - 13x + 1 & \end{array}$$

Multiplicamos −6 por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & \underline{x^2 + 2x + 3} \\ \underline{-4x^3 - 8x^2 - 12x} & 4x - 6 \\ -6x^2 - 13x + 1 & \\ \underline{6x^2 + 12x + 18} & \\ -x + 19 & \end{array}$$

Observe que não podemos continuar a divisão, pois o grau do termo obtido é menor do que 2.

Portanto, temos:

Quociente: $Q(x) = 4x - 6$

Resto: $R(x) = -x + 19$

Método de Descartes

O Método de Descartes, também conhecido como Método dos Coeficientes a Determinar, é outra forma utilizada para efetuar a divisão de polinômios. A sequência de passos é a seguinte:

Consideremos uma divisão de polinômios na qual P(x) é o dividendo, B(x) é o divisor, Q(x) é o quociente e R(x) é o resto.

i) Calculamos o grau do quociente Q(x) e também o grau do resto R(x).

ii) Escrevemos os polinômios correspondentes ao quociente e ao resto, representando seus coeficientes desconhecidos por letras.

iii) Determinamos esses coeficientes, utilizando a identidade polinomial P(x) = Q(x) . B(x) + R(x).

Exemplo:

Dividir $P(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$ por $B(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$.

Inicialmente, vamos determinar o grau do quociente e do resto. Observe que o grau do quociente é dado pela diferença entre o grau do dividendo e o grau do divisor, ou seja, o quociente é de grau 4 − 3 = 1. Portanto, podemos escrever o quociente na forma $Q(x) = ax + b$.

Além disso, o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor, ou seja, o resto encontrado precisa estar na forma $R(x) = cx^2 + dx + e$.

Temos que:

$P(x) = Q(x) . B(x) + R(x)$

$5x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = (x^3 + x^2 - 4x + 6) . (ax + b) + cx^2 + dx + e =$

$ax^4 + ax^3 - 4ax^2 + 6ax + bx^3 + bx^2 - 4bx + 6b + cx^2 + dx + e =$

$ax^4 + (a + b)x^3 + (-4a + b + c)x^2 + (6a - 4b + d)x + (6b + e)$

Igualando termo a termo, temos:

$$\begin{cases} a = 5 \\ a + b = -2 \Rightarrow \ 5 + b = -2 \Rightarrow \ b = -7 \\ -4a + b + c = 1 \Rightarrow \ -4 . 5 - 7 + c = 1 \Rightarrow \ -27 + c = 1 \Rightarrow \ c = 28 \\ 6a - 4b + d = 1 \Rightarrow \ 6 . 5 - 4.(-7) + d = 1 \Rightarrow \ 30 + 28 + d = 1 \Rightarrow \ d = -57 \\ 6b + e = -2 \Rightarrow \ 6.(-7) + e = -2 \Rightarrow \ -42 + e = -2 \Rightarrow \ e = 40 \end{cases}$$

Assim, temos:

$Q(x) = 5x - 7$ e $R(x) = 28x^2 - 57x + 40$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. D39U (UFRGS-RS) As raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 1$ são:

A) {i; –i; 0}
B) {1; –1; 0}
C) {1; –1; i; –i}
D) {i; –i; 1 + i; 1 – i}
E) {i; –i; –1 + i; –1 – i}

02. (UECE–2019) Considerando o polinômio $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 1$, é correto afirmar que o valor da soma $P(-1) + P\left(-\frac{1}{3}\right)$ é um número localizado entre

A) 5,0 e 5,5.
B) 4,0 e 4,5.
C) 4,5 e 5,0.
D) 5,5 e 6,0.

03. U7B1 (UERN)

- Divisor: $x^2 + x$;
- Resto: $1 - 7x$; e
- Quociente: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é:

A) $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$
B) $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3$
C) $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1$
D) $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1$

04. 2961 (UPF-RS) Se o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^2 + mx + p$ é divisível por $D(x) = x^2 + 1$, o valor de $m - p$ é

A) –3.
B) –1.
C) 0.
D) 2.
E) 3.

05. (UECE–2023) Ao dividirmos o polinômio $P(x) = x^6 - 1$ por $x + 2$, obtemos o resto **R** e o quociente $Q(x)$. O resto da divisão de $Q(x)$ por $x - 1$ é igual a

A) –31.
B) –61.
C) –41.
D) –21.

06. IWM3 (UFMG) Sejam $p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \frac{1}{b}$ polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes. Então, é correto afirmar que o valor de $a + b$ é

A) 3.
B) 6.
C) 9.
D) 12.

07. (UECE) Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais, então o valor de $a - b + c$ é

A) 9.
B) 10.
C) 12.
D) 13.

08. NBHW (UFJF-MG) Qual é o polinômio que, ao ser multiplicado por $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$, tem como resultado o polinômio $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$?

A) $x^3 + x^2 + x$
B) $x^3 + x^2 - x$
C) $x^3 + 3x^2 + x$
D) $x^3 + 3x^2 + 2x$
E) $x^3 + 3x^2 - x$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. RQ3R (UEFS-BA) O resto da divisão de um polinômio do terceiro grau p(x) por $(x - 3)$ é igual a 24. Sabendo que as raízes do polinômio p(x) são –3, 1 e 2, o valor de p(0) é

A) 12.
B) 15.
C) 18.
D) 21.
E) 24.

02. W4YJ (UDESC) Sejam q(x) e r(x), respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $f(x) = 6x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 7$ por $g(x) = 2x^2 + x + 1$. O produto entre todas as raízes de q(x) e r(x) é igual a

A) $-\frac{7}{3}$.
B) 3.
C) $\frac{3}{5}$.
D) 5.
E) $\frac{5}{3}$.

03. (UERN) O valor de **n** para que a divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 17$ por $d(x) = 2x^2 + nx + 4$ tenha resto igual a 5 é um número

A) menor que –6.
B) negativo e maior que –4.
C) positivo e menor que 5.
D) par e maior que 11.

04. 3FKX (ESPM-SP) O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x + 3$ são, respectivamente,

A) $x - 2$ e 5.
B) $x + 2$ e 6.
C) $x - 3$ e 2.
D) $x + 1$ e 0.
E) $x - 1$ e –2.

05. (UEL-PR) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 3ax - 4a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - x - 4$. Qual é o valor de **a**?

A) a = –2
B) a = –1
C) a = 0
D) a = 1
E) a = 2

06. (Ibmec) Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ pelo polinômio $Q(x) = x^2 + x + 2$ é igual a 4, então podemos afirmar que $a + b$ vale

A) 2.
B) –2.
C) 3.
D) –3.
E) 4.

MATEMÁTICA

07. 084E (UFPE) Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que $p(x + 1) - p(x) = 6x^2$ e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

08. ONPU (FGV) Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com **m** e **n** inteiros, então, $n + m$ é igual a

A) −2.
B) −1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

09. (UFOP-MG) O resto da divisão do polinômio $p(x)= x^{99} - 2x + 3$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - 1$ é:

A) $-x + 3$
B) 6
C) 8
D) $3x - 1$

10. Q6AW (Mackenzie-SP) Os valores de **R**, **P** e **A** para que a igualdade $\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x} = \frac{R}{x} + \frac{P}{x+1} + \frac{A}{x-1}$ seja uma identidade são, respectivamente,

A) 3, 1 e −2.
B) 1, −2 e 3.
C) 3, −2 e 1.
D) 1, 3 e −2.
E) −2, 1 e 3.

11. 8YB7 (Mackenzie-SP) Na equação $(x^3 - x^2 + x - 1)^{20} = 0$, a multiplicidade da raiz $x = 1$ é

A) 1.
B) 18.
C) 9.
D) 20.
E) 40.

12. (UDESC) Seja r(x) o resto da divisão do polinômio $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ por $q(x) = 2x^2 - x - 1$. Se $f(x) = 2x + k$ e $f(g(x)) = r(x)$. Então o valor da constante **k** para que o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 10$ seja $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ é

A) −12.
B) −2.
C) 12.
D) 2.
E) $-\frac{32}{5}$.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo **t**, em horas, que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções:

$V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3\,000$ e $V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3\,000$.

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo **t** igual a

A) 1,3 h.
B) 1,69 h.
C) 10,0 h.
D) 13,0 h.
E) 16,9 h.

02. Ao estudar a variação entre os valores de duas grandezas **P** e **X**, um pesquisador concluiu que a relação matemática que caracterizava essa variação era dada pelo polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que **x** era o valor da grandeza **X** e P(x) era o valor correspondente da grandeza **P**. Parte dos dados coletados pelo pesquisador encontram-se a seguir:

X	P
0	2
1	5
2	10

Com base nas informações apresentadas, pode-se afirmar que o valor do coeficiente **a** é

A) −3.
B) −2.
C) 0.
D) 2.
E) 3.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. A
- 04. E
- 05. D
- 06. C
- 07. D
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. D
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. C
- 07. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$
  $a^2 + b^2 + c^2 = 14$
- 08. B
- 09. A
- 10. B
- 11. D
- 12. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações Polinomiais

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Chamamos de equação algébrica ou equação polinomial a toda equação na variável **x** que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

em que os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 são números complexos e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1º) $x^2 - 4x + 8 = 0$

2º) $5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

RAÍZES OU ZEROS DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Dizemos que um número complexo **a** é raiz de uma equação polinomial do tipo P(x) = 0 se, e somente se, P(a) = 0. Por exemplo, a equação $2x^3 - x^2 + 4x - 5 = 0$ admite 1 como raiz, pois $2 \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 2 - 1 + 4 - 5 = 0$.

Portanto, para verificar se um determinado número complexo é raiz de uma equação, devemos substituir a variável por esse número e verificar se a igualdade é satisfeita.

CONJUNTO SOLUÇÃO OU VERDADE

Chamamos de conjunto solução de uma equação P(x) = 0, em um determinado conjunto universo **U**, o conjunto formado por todas as raízes dessa equação. Resolver uma equação significa determinar o seu conjunto solução.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$

No conjunto $\mathbb{R}$, a equação não apresenta soluções, ou seja, $S = \varnothing$.

2º) Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$$

Portanto, no conjunto dos números complexos, o conjunto solução é dado por $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{7}\,i}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}\right\}$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Toda equação de grau **n**, $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Esse teorema foi enunciado no fim do século XVIII pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Uma das consequências mais importantes desse teorema é a seguinte:

Um polinômio de grau **n**, $n \geq 1$, possui **n** raízes complexas.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, podemos afirmar que existe pelo menos uma raiz complexa. Sendo k_1 essa raiz, temos $P(k_1) = 0$.

Logo, o polinômio P(x) é divisível pelo polinômio $x - k_1$ (Teorema de D'Alembert).

Portanto, podemos escrever o seguinte:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - k_1 \\ \hline 0 & Q_1(x) \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - k_1) \cdot Q_1(x)$$

Observe que, para P(x) = 0, temos que $x - k_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$. Portanto, podemos concluir que as raízes de $Q_1(x)$ também são raízes de P(x).

Podemos proceder de maneira análoga ao analisar o polinômio $Q_1(x)$.

Sendo k_2 uma raiz de $Q_1(x)$, podemos escrever:

$Q_1(x) = (x - k_2) \cdot Q_2(x)$

Substituindo $Q_1(x)$ na expressão de P(x), obtemos:

$P(x) = (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot Q_2(x)$

Aplicando sucessivamente esse raciocínio, obtemos:

$P(x) = (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot (x - k_3). \ldots .(x - k_n) \cdot Q_n(x)$

Nessa expressão, $Q_n(x)$ é um polinômio de grau zero. Observe que o coeficiente de x_n em P(x) é a_n. Logo, temos $Q_n(x) = a_n$.

Portanto:

$$P(x) = (x - k_1) \,.\, (x - k_2) \,.\, (x - k_3) \,.\, \ldots \,.(x - k_n) \,.\, a_n$$

Essa é a chamada forma fatorada do polinômio P(x).

RELAÇÕES DE GIRARD

São as relações estabelecidas entre as raízes e os coeficientes da equação algébrica P(x) = 0. Vamos estudá-las caso a caso.

1º caso: Equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ suas raízes.

As relações entre essas raízes são as seguintes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

2º caso: Equação do 3º grau

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ suas raízes.

As relações entre essas raízes são as seguintes:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1 \,.\, x_2) + (x_1 \,.\, x_3) + (x_2 \,.\, x_3) = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 = -\frac{d}{a}$$

Generalizando uma equação do grau **n**, $n \geq 1$, temos:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Em que $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, ..., $\mathbf{x_n}$ são as suas raízes.

As relações de Girard são:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x \,.\, x_2) + (x_1 \,.\, x_3) + \ldots + (x_{n-1}.x_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$(x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3) + (x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_4) + \ldots (x_{n-2} \,.\, x_{n-1} \,.\, x_n) = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

....

$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \ldots x_n = (-1)^n \,.\, \frac{a_0}{a_n}$$

Exemplos:

1º) Sejam $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as raízes da equação $x^2 - x + 4 = 0$. Calcule:

A) $x_1 + x_2$

$-\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$

B) $x_1 \,.\, x_2$

$\frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$

C) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

$\frac{x_2 + x_1}{x_1 \,.\, x_2} = \frac{1}{4}$

D) $x_1^2 + x_2^2$

$x_1 + x_2 = 1$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$(x_1 + x_2)^2 = 1^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 \,.\, x_2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow$

$x_1^2 + 2 \,.\, 4 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -7$

2º) Sejam $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ e $\mathbf{x_3}$ as raízes da equação:

$2x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

Calcule:

A) $x_1 + x_2 + x_3$

$-\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

B) $x_1 \,.\, x_2 + x_1 \,.\, x_3 + x_2 \,.\, x_3$

$\frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$

C) $x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3$

$-\frac{d}{a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

$\frac{x_2 \,.\, x_3 + x_1 \,.\, x_3 + x_1 \,.\, x_2}{x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

E) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 3^2 \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\underbrace{(x_1 \,.\, x_2 + x_1 \,.\, x_3 + x_2 \,.\, x_3)}_{1} = 9 \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \,.\, 1 = 9 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 7$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EEAR–2019) Seja a equação polinomial $x^3 + bx^2 + cx + 18 = 0$. Se -2 e 3 são suas raízes, sendo que a raiz 3 tem multiplicidade 2, o valor de "b" é:

A) 8

B) 6

C) -3

D) -4

02. 69ER (UFRGS-RS) Se 2 é raiz dupla do polinômio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$, então a soma das outras raízes é

A) -1.

B) $-0{,}5$.

C) 0.

D) 0,5.

E) 1.

03. XQHM (PUC-Campinas-SP) Se **v** e **w** são as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$, em que **a** e **b** são coeficientes reais, então $v^2 + w^2$ é igual a:

A) $a^2 - 2b$

B) $a^2 + 2b$

C) $a^2 - 2b^2$

D) $a^2 + 2b^2$

E) $a^2 - b^2$

04. RYL1 (UFOP-MG) Considere a equação $7x(x - 1)^2(2x - 2) = 0$. Então, podemos afirmar que

A) 1 é raiz tripla.

B) 1 é raiz dupla.

C) 1 é raiz simples.

D) -1 é raiz dupla.

E) -1 é raiz tripla.

05. ØS2O (UDESC) O módulo da diferença das raízes de $(x - 1).(x + 2) - 2(x + 2) - 4 = x - 2$ é

A) 8.

B) 2.

C) 4.

D) 6.

E) 10.

06. SW8J (PUC Rio) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$ é divisível por $(x - 2)$.

A) Determine **d**.

B) Calcule as raízes de $p(x) = 10$.

07. KU9L (UFRGS-RS) O polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ tem

A) apenas duas raízes reais distintas.

B) apenas duas raízes positivas.

C) todas as raízes positivas.

D) quatro raízes iguais.

E) quatro raízes distintas.

08. 7HR9 (UECE) Os números $-2, -1, 0, 1$ e 2 são as soluções da equação polinomial $p(x) = 0$, as quais são todas simples. Se o polinômio $p(x)$ é tal que $p(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, então o valor de $p(\sqrt{3})$ é igual a:

A) $2\sqrt{3}$

B) $3\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $6\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC PR–2023) Se **k** é um número real e as raízes da equação $x^3 + 3 \,.\, x^2 - k \,.\, x - 15 = 0$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, então **k** vale

A) 13

B) 11

C) -11

D) -13

E) 15

02. 7P5Y (UECE–2019) Considere os polinômios $m(x) = x^2 - 3x + 2$, $n(x) = x^2 - 4x + 3$ e $q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, que têm como fator comum o polinômio $f(x) = x - 1$. Se $P(x) = m(x).n(x).q(x)$, a soma das raízes distintas da equação polinomial $P(x) = 0$ é igual a

A) 16.

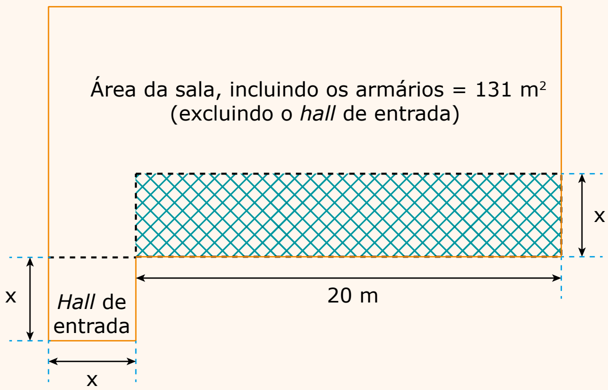
B) 6.

C) 10.

D) 4.

03. 2PP6

(Insper-SP) A figura, feita fora de escala, representa a planta de uma sala de aula que conta com uma área para armários dos alunos (parte hachurada).



A sala está sendo projetada de modo que o teto fique a uma distância de **x** metros do chão e, para que haja uma ventilação adequada, o volume total da sala mais o *hall* de entrada, descontando-se o espaço dos armários (que vão até o teto), deve ser de 280 m^3. O menor valor de **x** que atende a todas essas condições é

A) 5.
B) 6.
C) 7.
D) 8.
E) 9.

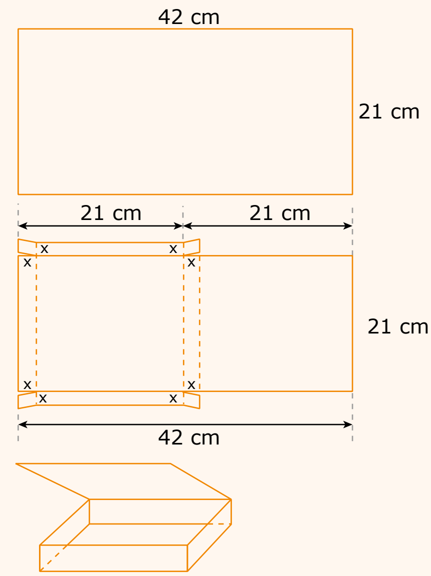
04. T7T0

(FGV-SP) O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ tem o número 1 como raiz dupla. O valor absoluto da diferença entre as outras raízes é igual a

A) 5.
B) 4.
C) 3.
D) 2.
E) 1.

05. UTV1

(UFPB) Uma organização não governamental desenvolveu um projeto de reciclagem de papel em um bairro popular de uma cidade, com o objetivo de contribuir com a política ambiental e gerar renda para as famílias carentes do bairro. A partir da catação do papel e utilizando um processo artesanal, as famílias produzem folhas de papelão em formato retangular medindo 21 cm × 42 cm. Um empresário local propôs comprar toda a produção mensal da comunidade para produzir caixas de papelão, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, com volume igual a 810 cm^3. Cada caixa é construída recortando-se quadrados em dois dos vértices da folha e retângulos nos outros dois vértices. Em seguida, as abas resultantes dos recortes são dobradas nas linhas tracejadas na folha, obtendo-se, dessa forma, a caixa, conforme representação nas figuras a seguir:



Considerando que uma possibilidade para a medida **x** do lado do quadrado a ser recortado é 3 cm, é correto afirmar que outro valor possível, em centímetros, para a medida **x**, pertence ao intervalo

A) (1, 3).
B) (3, 5).
C) (5, 7).
D) (7, 9).
E) (9, 11).

06. (UECE–2019) Quantos são os valores inteiros que o número real **k** pode assumir, de modo que as raízes da equação $x^2 - 3x + k = 0$ sejam reais não nulas e de sinais contrários, e que a equação $x^2 + kx + 1 = 0$ não tenha raízes reais?

A) 3
B) 1
C) 0
D) 2

07. MTV6

(UEFS-BA) Se a média aritmética das raízes do polinômio $p(x) = 2x^2 + rx + 5$ for 7, e a das raízes de $q(x) = 3x^2 + sx - 2$ for 2 (sendo **r** e **s** constantes), então a média aritmética das raízes do polinômio $p(x) + q(x)$ será

A) 4.
B) 4,5.
C) 5.
D) 8,5.
E) 9.

08. AB3A (UFRR) Sejam:
$P_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ e $P_2(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ polinômios tais que α é raiz real de $P_1(x)$. Então, $P_2(\alpha)$ é igual a

A) 10 ou 13.

B) 9 ou 7.

C) 8 ou 0.

D) 11 ou 20.

E) 12 ou 19.

09. YMUK (Mackenzie-SP) A equação $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ tem como raízes $-\frac{1}{2}$, **m** e **n**. Então, m^n é igual a

A) −1 ou 0.

B) $-\frac{1}{2}$ ou 2.

C) −2 ou −1.

D) $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.

E) −2 ou 1.

10. (UDESC) Um polinômio p(x) possui grau 4 e é divisível simultaneamente por $f(x) = x^2 + 5$ e por $g(x) = 2x - 3$. Se **p** satisfizer as condições $p(-1) = 150$ e $p(2) = 63$, então a soma de todos os seus coeficientes é igual a

A) −18.

B) −6.

C) −8.

D) −33.

E) −25.

11. HUSA (Insper) Considere um polinômio P(x) do 4º grau, de coeficientes reais, tal que:

$P(-3) = P(1) = P(5) = 0$;

P(0) e P(2) são, ambos, números positivos.

Nessas condições, os sinais dos números P(−5), P(4) e P(6) são, respectivamente,

A) positivo, negativo e negativo.

B) positivo, negativo e positivo.

C) negativo, negativo e negativo.

D) negativo, positivo e negativo.

E) negativo, positivo e positivo.

12. LUWT (Unicamp-SP) Seja $p(x) = x^3 - 12x + 16$.

A) Verifique que x = 2 é raiz de p(x).

B) Use fatoração para mostrar que, se x > 0 e x ≠ 2, então p(x) > 0.

SEÇÃO ENEM

01. Observe a notícia a seguir:

Desenvolvido primeiro robô brasileiro para combater incêndios

Uma proposta desafiadora que gerou uma grande invenção feita com poucos recursos e muita criatividade. Assim se concebeu o primeiro "robô-bombeiro" do país, desenvolvido na Universidade de Fortaleza (Unifor).

Batizado de Saci – sigla para Sistema de Apoio ao Combate de Incidentes –, o equipamento já é utilizado pelo Corpo de Bombeiros do Ceará. Capaz de lançar jatos de 4,2 mil litros de água por minuto a uma distância de até 180 metros do operador, o robô cumpre a sua missão: "salvaguardar a vida daqueles que nos salvam", segundo seu criador, o engenheiro eletrônico Antônio Roberto Lins de Macedo. [...]

CESAR FILHO, Mário. *Ciência Hoje Online*, edição 344, 14 dez. 2005. Disponível em: http://cienciahoje.org.br/desenvolvido-primeiro-robo-brasileiro-para-combater-incendios/. Acesso em: 10 maio 2019. [Fragmento]

Considere que o robô descrito anteriormente se desloque ao longo do gráfico do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. O sistema cartesiano de eixos foi posicionado de modo que as raízes reais desse polinômio indicam possíveis focos de incêndio, os quais serão combatidos pelo robô. Portanto, pode-se afirmar que o robô bombeiro será utilizado

A) nenhuma vez.

B) uma vez.

C) duas vezes.

D) três vezes.

E) quatro vezes.

02. Os números primos fascinam os matemáticos há séculos. Diversas tentativas já foram feitas para se determinar um polinômio gerador de números primos. Um desses polinômios, conhecido como polinômio de Goetgheluck, é dado por $P(x) = x^3 - 34x^2 + 381x - 1\,511$. Tal polinômio gera números primos para valores inteiros de **x**, variando de 0 até 25. Um dos números primos gerados é −1 163. Sabendo-se que o polinômio admite não somente valores inteiros para **x**, pode-se afirmar que o produto de todos os valores de **x**, para os quais P(x) = −1 163, é

A) 1 511.

B) −1 511.

C) 381.

D) −348.

E) 348.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. A
- 04. A
- 05. D
- 06.
  - A) d = 10
  - B) As raízes são $x = 0$, $x = 1 - \sqrt{6}$ e $x = 1 + \sqrt{6}$.
- 07. D
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. D
- 03. A
- 04. A
- 05. C
- 06. B
- 07. A
- 08. C
- 09. E
- 10. A
- 11. D
- 12.
  - A) Demonstração.
  - B) Demonstração.

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %