Determinação da aceleração centrípeta para o caso do movimento circular uniforme

Na teoria, afirmamos que a aceleração centrípeta $\vec{a}_c$ tem módulo dado por $|\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$. Justificaremos agora essa afirmativa para o caso do movimento circular uniforme.

Consideremos, então, uma partícula em movimento uniforme sobre uma circunferência de raio *R* e centro *C*. Num instante *t* a partícula está no ponto *A* e tem velocidade vetorial $\vec{v}$ (fig. 1). Consideremos, em seguida, um instante t_1 (com $t_1 > t$) no qual a partícula está sobre o ponto A_1 (diferente de *A*) com velocidade v_1. Como o movimento é uniforme, temos $|\vec{v}| = |\vec{v}_1|$.

Façamos $\Delta t = t_1 - t$. A variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$) no intervalo de tempo Δt está representada na figura 2. O triângulo EFG (fig. 2) é semelhante ao triângulo CAA_1 (fig. 3) e assim:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|AA_1|} = \frac{|\vec{v}|}{R} \quad ①$$

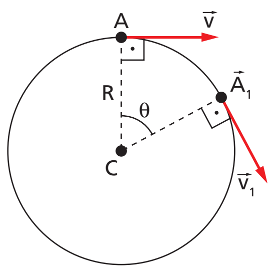

Figura 1.

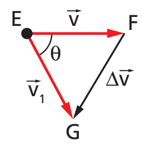

Figura 2.

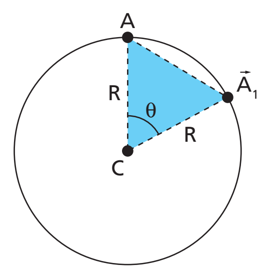

Figura 3.

ILUSTRAÇÕES: SETUP

Para um intervalo de tempo "muito pequeno" (isto é, $\Delta t \to 0$), podemos supor que A_1 esteja muito próximo de *A* e o segmento $\overline{AA_1}$ tenha comprimento aproximadamente igual ao comprimento do arco $\overset{\frown}{AA_1}$:

$$|\overline{AA_1}| \cong |\overset{\frown}{AA_1}| \quad ②$$

Mas, como o movimento é uniforme, temos:

$$|\overset{\frown}{AA_1}| = |\vec{v}| \cdot (\Delta t) \quad ③$$

De ③ e ② concluímos:

$$|\overline{AA_1}| \cong |\vec{v}| \cdot (\Delta t) \quad ④$$

De ④ e ① obtemos:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot (\Delta t)} \cong \frac{|\vec{v}|}{R}$$

donde:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \cong \frac{|\vec{v}|^2}{R} \quad ⑤ \quad \text{(supondo } \Delta t \text{ "pequeno")}$$

A aceleração vetorial instantânea $\vec{a}$ no instante *t* é dada por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

e, portanto: $|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$

À medida que Δt aproxima-se de zero, a aproximação da relação ⑤ torna-se cada vez melhor e, portanto:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Concluímos, então, que a aceleração vetorial instantânea do movimento circular uniforme tem módulo constante e dado por:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Por outro lado, analisando as figuras 1, 2 e 3, percebemos que, à medida que A_1 se aproxima de A, o ângulo θ diminui e $\Delta\vec{v}$ aproxima-se da direção perpendicular a $\vec{v}$, o mesmo ocorrendo com a aceleração vetorial média $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. No limite, a aceleração vetorial instantânea $\vec{a}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e, portanto, tem a direção da reta que passa pelo ponto A e pelo centro da circunferência (fig. 4).

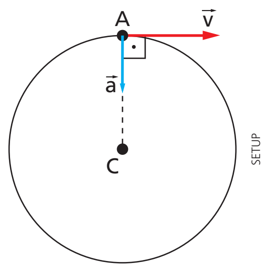

Figura 4.

Atual Editora