X-MAT

Superpoderes Matemáticos
para Concursos Militares
Volume 5D
2ª edição

COLÉGIO NAVAL 1997-2001

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão ao Colégio Naval (CN) dos anos de 1984 a 2016, mais uma "faixa bônus" com 40 questões anteriores a 1984, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte D serão apresentadas as provas de 1997 a 2001, totalizando 100 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 35 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Colégio Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Mademática".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2000/2001

1) Numa prova de vinte questões, valendo meio ponto cada uma, três questões erradas anulam uma certa. Qual é a nota de um aluno que errou nove questões em toda essa prova?
(A) Quatro
(B) Cinco
(C) Quatro e meio
(D) Cinco e meio
(E) Seis e meio

2) A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado $ABCD$. Qual é a medida do ângulo PCB?
(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 75°
(E) 90°

3) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:
(A) 110
(B) 120
(C)150
(D) 200
(E) 300

4) Considere as afirmativas abaixo:
(I) $2^{68}+10^{68}=2^{68}+(2\times 5)^{68}=2^{68}+2^{68}\times 5^{68}=4^{68}\times 5^{68}=20^{68}$
(II) $2^{68}+10^{68}=2^{68}+(2\times 5)^{68}=2^{68}+2^{68}\times 5^{68}=2^{136}\times 5^{68}$
(III) $6^{17}+10^{23}=(2\times 3)^{17}+(2\times 5)^{23}=2^{17}\times 3^{17}+2^{23}\times 5^{23}=\left(2^{17}\times 2^{23}\right)+\left(3^{17}\times 5^{23}\right)$
Pode-se afirmar que:
(A) apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(C) apenas a afirmativa II é verdadeira.
(D) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) as afirmativas I, II e III são falsas.

5) Um bebedouro que usa garrafão de água tem $2,5$ metros de serpentina por onde a água passa para gelar. Sabe-se que tal serpentina gasta 12 segundos para ficar totalmente gelada. Colocando-se um garrafão de 10 litros e ligando-se o bebedouro, leva-se 5 minutos para que toda a água saia gelada. Se nas mesmas condições fosse colocado um garrafão de 20 litros no lugar do de 10 litros, o tempo gasto para que toda a água saísse gelada seria de:
(A) 9 min 36 seg
(B) 9 min 48 seg
(C) 10 min
(D) 10 min 12 seg
(E) 11 min

6) Para se demarcar o estacionamento de todo o lado direito de uma rua reta, foram pintados 20 retângulos de $4,5$ metros de comprimento e $2,5$ metros de largura. Sabendo-se que os carros estacionam no sentido do comprimento dos retângulos e da rua, e à frente e atrás de cada um dos retângulos, tem 50 centímetros de folga, qual é o comprimento, em metros, da rua?
(A) 90
(B) $90,5$
(C) 95
(D) 100
(E) $100,5$

7) (CN 2001) O valor de $\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ é
(A) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$
(B) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$
(C) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$
(D) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$
(E) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

8) Uma massa fermentada, ao ser colocada para descansar, ocupou uma área circular S de raio r. Após um certo tempo t, ela passou a ocupar uma área 21% maior que S. Qual o maior valor possível de r, em centímetros, para que a massa não transborde, quando colocada para descansar durante o tempo t, em um tabuleiro circular de raio 22 centímetros?
(A) $17,38$
(B) $18\frac{2}{11}$

(C) 20
(D) $20,38$
(E) 21

9) Um aluno calculou a média aritmética entre os cem primeiros números inteiros positivos, encontrando $50\frac{1}{2}$. Retirando um desses números encontrou como nova média aritmética $50\frac{27}{99}$. O número retirado está entre:
Dado: A média aritmética de n números é igual à soma desses n números dividida por n.
(A) 30 e 40
(B) 40 e 50
(C) 50 e 60
(D) 60 e 70
(E) 70 e 80

10) Os pontos X, O e Y são vértices de um polígono regular de n lados. Se o ângulo $X\hat{O}Y$ mede $22^\circ 30'$, considere as afirmativas:
(I) n pode ser igual a 8.
(II) n pode ser igual a 12.
(III) n pode ser igual a 24.
Podemos afirmar que:
(A) apenas I e II são verdadeiras.
(B) apenas I e III são verdadeiras.
(C) apenas II e III são verdadeiras.
(D) apenas uma delas é verdadeira
(E) I, II e III são verdadeiras

11) Um comerciante comprou k objetos idênticos por t reais cada, onde t é um número inteiro positivo. Ele contribuiu para um bazar de caridade, vendendo dois objetos pela metade do preço de custo. Os objetos restantes foram vendidos com um lucro de seis reais por unidade. Se o seu lucro total foi de setenta e dois reais, o menor valor possível para k é:
(A) 11
(B) 12
(C) 15
(D) 16
(E) 18

12) Suponha que 1 (um) naval (símbolo n) seja a medida de um ângulo convexo, menor que um ângulo reto, inscrito em um círculo de raio r, cujos lados determinam, nesse círculo, um arco de comprimento r. Assim sendo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a
(A) $\frac{\pi}{4}n$
(B) $\frac{\pi}{2}n$
(C) πn
(D) $2\pi n$
(E) $4\pi n$

13) Dividindo-se o cubo de um número pelos $\frac{2}{3}$ do seu quadrado, acha-se 18 para quociente. A raiz quadrada da terça parte desse número é:
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

14) O valor da expressão $\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot\left(0,333...+1\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\frac{\sqrt{25}}{2}+3}$ é
(A) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$
(B) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$
(C) 0
(D) 1
(E) -1

15) Sejam os conjuntos $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=6n+3, n\in\mathbb{Z}\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=3n, n\in\mathbb{Z}\}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Então $A\cap B$ é igual a:
(A) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ é par e múltiplo de } 3\}$
(B) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 3\}$
(C) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$
(D) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$
(E) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$

16) A ligação entre as cidades A e B pode ser feita por dois caminhos C_1 e C_2. O caminho C_1 é mais curto, porém com mais tráfego e o caminho C_2 é 14% mais longo do que o C_1, mas possui tráfego menor, o que permite um aumento na velocidade de 20%. De quantos porcento diminuirá o tempo de viagem para ir de A até B usando o caminho C_2? (Dados: considere as velocidades sempre constantes e as maiores possíveis.)
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

17) Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer onde os lados opostos NÃO são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremos M (ponto médio do lado AD) e N (ponto médio do lado BC) é:
(A) $12,5$
(B) 14
(C) $14,5$
(D) 16
(E) 17

18) Num gibi, um ser de outro planeta capturou em uma de suas viagens três tipos de animais. O primeiro tinha 4 patas e 2 chifres, o segundo, 2 patas e nenhum chifre e o terceiro 4 patas e 1 chifre. Quantos animais do terceiro tipo ele capturou, sabendo que existiam 227 cabeças, 782 patas e 303 chifres?
(A) 24
(B) 25
(C) 26
(D) 27
(E) 30

19) Seja $N = xyzzyx$ um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então $N_1 + N_2$ é igual a
(A) 1008800
(B) 1108800
(C) 1156650
(D) 1157000
(E) 1209800

20) Considere três quadrados de bases AB, CD e EF, respectivamente. Unindo-se o vértice A com F, B com C e D com E, observa-se que fica formado um triângulo retângulo. Pode-se afirmar que:
I − O perímetro do quadrado de maior lado é igual à soma dos perímetros dos outros dois quadrados.
II − A área do quadrado de maior lado é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados.
III − A diagonal do quadrado maior é igual à soma das diagonais dos outros dois quadrados.
Logo, apenas:
(A) A afirmativa I é verdadeira.
(B) A afirmativa II é verdadeira.
(C) A afirmativa III é verdadeira.
(D) As afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) As afirmativas II e III são verdadeiras.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1999/2000

1) Dado um trapézio qualquer, de bases 6 e 8, traça-se paralelamente às bases um segmento de medida x que o divide em outros dois trapézios equivalentes. Podemos afirmar que:
(A) $x = 6,5$
(B) $x = 4\sqrt{3}$
(C) $x = 7$
(D) $x = 5\sqrt{2}$
(E) $x = 7,5$

2) Dadas as afirmativas abaixo, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso:
( ) Se a altura AH de um triângulo ABC o divide em dois triângulos ABH e ACH semelhantes e não congruentes, então o triângulo ABC é retângulo.
( ) A mediana AM de um triângulo ABC o divide em dois triângulos AMB e AMC equivalentes.
( ) A bissetriz interna AD de um triângulo ABC o divide em dois triângulos ABD e ACD cujas áreas são, respectivamente, proporcionais aos lados AB e AC.
Assinale a alternativa correta.
(A) (V), (V), (V)
(B) (V), (V), (F)
(C) (V), (F), (V)
(D) (F), (V), (F)
(E) (V), (F), (F)

3) Considere um sistema de numeração, que usa os algarismos indo-arábicos e o valor posicional do algarismo do numeral, mas numera as ordens da esquerda para a direita. Por exemplo: no número 3452, tem-se:

1ª Ordem: 3
2ª Ordem: 4
3ª Ordem: 5
4ª Ordem: 2

Além disso, cada 7 unidades de uma ordem forma 1 unidade da ordem registrada imediatamente à direita. Com base nesse sistema, coloque (E) quando a operação for efetuada erradamente e (C) quando efetuada corretamente. Lendo o resultado da esquerda para a direita encontramos.

$$\begin{array}{r} 245 \\ -461 \\ \hline 543 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 620 \\ +555 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 360 \\ \times 4 \\ \hline 543 \end{array}$$

( ) ( ) ( )

(A) E E E
(B) E C C
(C) C E C
(D) C C E
(E) C C C

4) Para dividir a fração $\frac{16}{3}$ por 32, um aluno subtraiu 14 do numerador. Por qual número deverá dividir o denominador para acertar o resultado?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{2}{4}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{6}{4}$

(E) 4

5) Se as grandezas A e B são representadas numericamente por números naturais positivos, tais que a relação matemática entre elas é $A \cdot B^{-1} = 4$, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso, assinalando a seguir, a alternativa que apresenta a sequência correta.

( ) A é diretamente proporcional a B, porque se aumentando o valor de B, o de A também aumenta.

( ) A é inversamente proporcional a B, porque o produto de A pelo inverso de B é constante.

( ) A não é diretamente proporcional a B.

( ) A não é inversamente proporcional a B.

(A) (V), (F), (F), (V)

(B) (F), (V), (V), (F)

(C) (F), (F), (V), (F)

(D) (F), (F), (F), (V)

(E) (F), (F), (V), (V)

6) São dadas as afirmativas abaixo no conjunto dos números reais:

(1) $\sqrt{(-2)^2} = -2$

(2) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}} = \frac{\sqrt{(-1)\cdot(4)}}{\sqrt{(-1)\cdot(9)}} = \frac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

(3) $\left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$

(4) $\sqrt{3+2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Assinale a alternativa correta:

(A) Todas as afirmativas são falsas.

(B) Somente 2 é verdadeira.

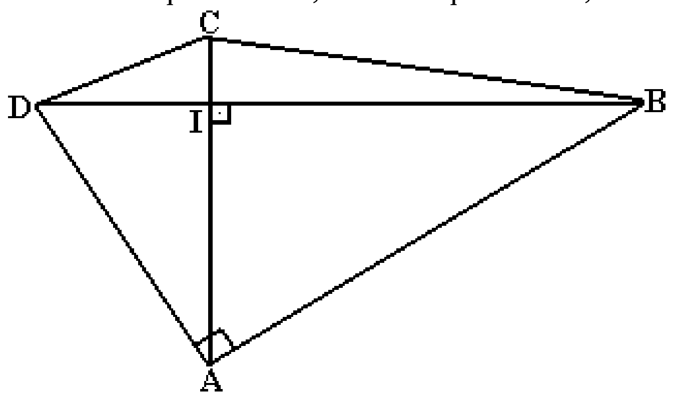
(C) 1 e 2 são verdadeiras.

(D) 1, 2 e 3 são verdadeiras.

(E) Todas as afirmativas são verdadeiras

7) Sejam 30 moedas, algumas de 1 centavo e outras de 5 centavos, onde cada uma tem, respectivamente, $13,5$ e $18,5$ milímetros de raio. Alinhando-se estas moedas, isto é, colocando-se uma do lado da outra, obtém-se o comprimento de 1 metro. O valor total das moedas é:
(A) R\$ 0,92
(B) R\$ 1,06
(C) R\$ 1,34
(D) R\$ 2,00
(E) R\$ 2,08

8) No quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo, o ângulo $B\hat{A}D$ mede $90°$ e as diagonais AC e BD são perpendiculares. Qual é a área desse quadrilátero, sabendo que $BI = 9$, $DI = 4$ e $CI = 2$?



(A) 26
(B) 39
(C) 52
(D) 65
(E) 104

9) Para registrar o resultado da operação $2^{101} \cdot 5^{97}$, o número de dígitos necessários é:
(A) 96
(B) 97
(C) 98
(D) 99
(E) 100

10) Um fazendeiro repartiu seu rebanho de 240 cabeças de boi entre seus três filhos da seguinte forma: o primeiro recebeu $2/3$ do segundo, e o terceiro tanto quanto o primeiro mais o segundo. Qual o número de cabeças de boi que o primeiro recebeu?
(A) 12
(B) 30
(C) 36
(D) 48
(E) 54

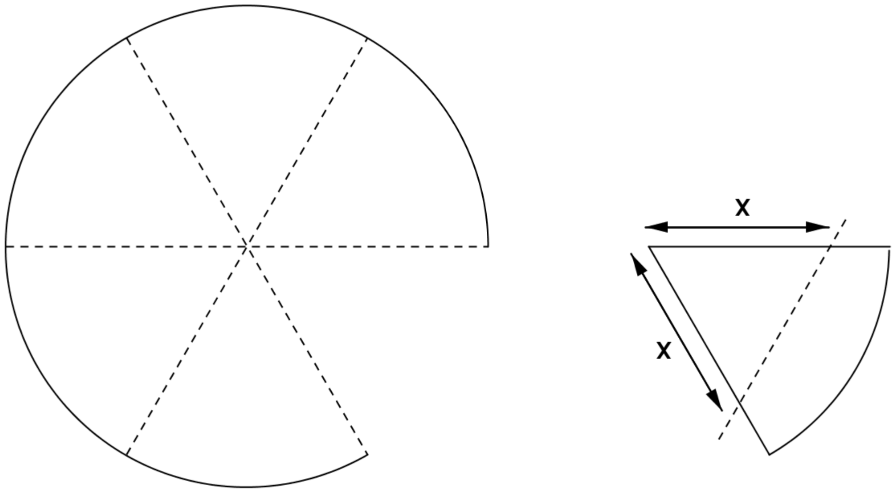
11) Sabendo que $\sqrt[3]{x^2}=1999^6$, $\sqrt{y}=1999^4$ e $\sqrt[5]{z^4}=1999^8$, ($x>0$, $y>0$ e $z>0$), o valor de $(x\cdot y\cdot z)^{-\frac{1}{3}}$ é:

(A) 1999^9
(B) 1999^6
(C) $1999^{\frac{1}{9}}$
(D) 1999^{-6}
(E) 1999^{-9}

12) Dados os casos clássicos de congruência de triângulos A.L.A., L.A.L., L.L.L., L.A.A_o., onde L = Lado, A = Ângulo, A_o = Ângulo oposto ao lado dado, complete corretamente as lacunas das sentenças abaixo e assinale a alternativa correta.
1 − Para se mostrar que os pontos da mediatriz de um segmento AB são equidistantes dos extremos A e B, usa-se o caso _________ de congruência de triângulos.
2 − Para se mostrar que a bissetriz de um ângulo $A\hat{B}C$ tem seus pontos equidistantes dos lados BA e BC desse ângulo, sem usar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, usa-se o caso _______ de congruência de triângulos.
(A) L.A.L. / A.L.A.
(B) L.A.L. / L.A.A_o.
(C) L.L.L. / L.A.A_o.
(D) L.A.A_o. / L.A.L.
(E) A.L.A. / L.L.L.

13) Em uma circunferência de raio R está inscrito um pentadecágono regular P. Coloque (V) verdadeiro ou (F) falso nas afirmativas abaixo.
( ) P tem diagonal que mede $2R$.
( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$.
( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$.
( ) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
Assinale a alternativa correta.
(A) (V) (V) (F) (F)
(B) (F) (V) (V) (F)
(C) (F) (F) (V) (V)
(D) (V) (V) (V) (F)
(E) (V) (V) (V) (V)

14) Uma pizza circular de raio 30 cm foi dividida em 6 partes iguais para seis pessoas. Contudo, uma das pessoas resolveu repartir ao meio o seu pedaço, como mostra a figura acima. O valor de x é:



(A) $10\sqrt{\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(B) $10\sqrt{\dfrac{3\pi}{3}}$

(C) $10\sqrt{\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}}$

(D) $10\sqrt{\dfrac{3\pi}{\sqrt{3}}}$

(E) $10\sqrt{\dfrac{5\pi}{\sqrt{3}}}$

15) Sobre a equação $1999x^2 - 2000x - 2001 = 0$, a afirmação correta é:
(A) tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.
(B) tem duas raízes simétricas.
(C) não tem raízes reais.
(D) tem duas raízes positivas.
(E) Tem duas raízes negativas.

16) Se $2x - 3y - z = 0$ e $x + 3y - 14z = 0$, com $z \neq 0$, o valor da expressão $\dfrac{x^2 + 3xy}{y^2 + z^2}$ é:

(A) 7
(B) 2
(C) 0
(D) $-\dfrac{20}{17}$
(E) -2

17) Uma equação biquadrada de coeficientes inteiros, cuja soma desses coeficientes é zero, tem uma das raízes igual a $\sqrt{3}$. O produto das raízes dessa equação é:
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

18) Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo $D\hat{A}I$ mede 40° e o ângulo $C\hat{B}I$ mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo $A\hat{P}C$ mede:
(A) 10°
(B) 20°
(C) 30°
(D) 40°
(E) 50°

19) As vendas de uma empresa foram, em 1998, 60% superiores às vendas de 1997. Em relação a 1998, as vendas de 1997 foram inferiores em:
(A) $62,5\%$
(B) 60%
(C) $57,5\%$
(D) $44,5\%$
(E) $37,5\%$

20) O número de triângulos que podemos construir com lados medindo 5, 8 e x, onde x é um número inteiro positivo, de tal forma de que o seu ortocentro seja interno ao triângulo é:
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1998/1999

1) Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5 cm, a base medindo 8 cm. A distância entre o seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:
(A) $0,1\text{ cm}$
(B) $0,3\text{ cm}$
(C) $0,5\text{ cm}$
(D) $0,7\text{ cm}$
(E) $0,9\text{ cm}$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é um número que está entre:
(A) 0 e 2.
(B) 2 e 4.
(C) 4 e 6.
(D) 6 e 8.
(E) 8 e 10.

3) Tem-se 500 ml de soro glicosado a 5%. Quando se acrescentam 10 (dez) ampolas de 10 ml cada de glicose a 23%, a concentração do volume final do soro glicosado será:
(A) 6%
(B) $6,3\%$
(C) $7,0\%$
(D) $7,3\%$
(E) $8,0\%$

4) Dados dois conjuntos A e B tais que $n(A\cup B)=10$, $n(A\cap B)=5$ e $n(A)>n(B)$, pode-se afirmar que a soma dos valores possíveis para $n(A-B)$ é:
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

5) Coloque (F) Falso ou (V) Verdadeiro nas afirmativas no conjunto dos números reais e assinale a opção correta.
( ) Se $x^2=4$ então $x^6=64$.
( ) Se $x^6=64$ então $x=2$.
( ) $\left(2^2\right)^3<2^{2^3}$.
( ) Se $10^x=0,2$ então $10^{2x}=0,04$.
( ) $2^{n+2}+2^n=5\cdot 2^n$.

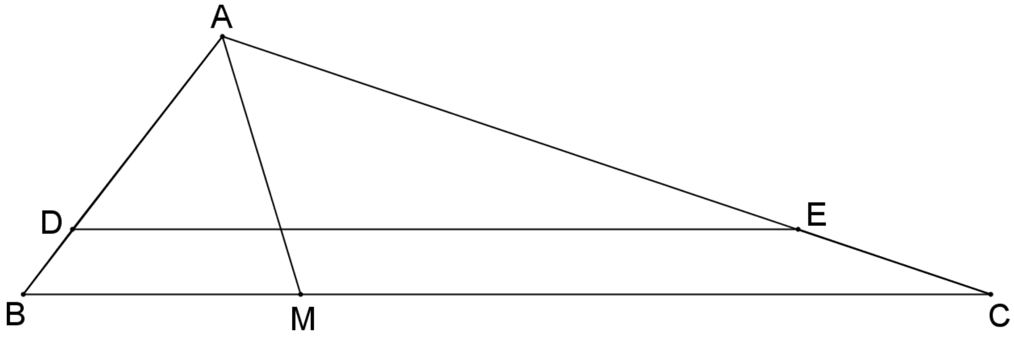
(A) (F) (V) (V) (V) (F)
(B) (V) (F) (V) (V) (V)
(C) (V) (F) (V) (V) (F)
(D) (V) (V) (F) (V) (V)
(E) (V) (F) (V) (F) (V)

6) Quando uma pessoa caminha em linha reta uma distância x, ela gira para a esquerda de um ângulo de 60°; e quando caminha em linha reta uma distância $y = x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ela gira para a esquerda de um ângulo de 45°. Caminhando x ou y a partir de um ponto P, pode-se afirmar, para qualquer que seja o valor de x, é possível chegar ao ponto P descrevendo um:
I) Pentágono convexo
II) Hexágono convexo
III) Heptágono convexo
IV) Octógono convexo
O número de assertivas verdadeiras é:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

7) Considere o quadrado $ABCD$ e o triângulo equilátero ABP, sendo P interior ao quadrado. Nestas condições o triângulo cobre cerca de quantos porcento da área do quadrado?
(A) 40
(B) 43
(C) 45
(D) 50
(E) 53

8) Se uma pessoa aplica somente $\frac{2}{5}$ de seu capital em letras durante 90 dias, à taxa de $2,5\%$ ao mês (juros simples) e recebe R\$ 9.600,00 de juros, então o seu capital é de:
(A) R\$ 128.000,00
(B) R\$ 240.000,00
(C) R\$ 320.000,00
(D) R\$ 400.000,00
(E) R\$ 960.000,00

9) Na figura, DE é paralela a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Sabendo que $AD = 6$, $AE = x$, $DB = 2$, $EC = 5$, $BM = 6$ e $MC = y$. Então $x + y$ é igual a:



(A) 15
(B) 20
(C) 25
(D) 30
(E) 35

10) Observe as afirmativas abaixo sobre os números reais x e y e assinale a opção correta.

(I) $\frac{1}{x} < y$, então $x > \frac{1}{y}$, $xy \neq 0$.

(II) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$.

(III) $x^2 > y$, então $x > \sqrt{y}$.

(A) Apenas I é falsa.
(B) Apenas II é falsa.
(C) Apenas III é falsa.
(D) I, II, III são falsas.
(E) Apenas I e II são falsas.

11) Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando toda solução de um é solução do outro e vice-versa.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

Qual é a soma dos valores de a e b, tais que os sistemas acima sejam equivalentes?
(A) 1
(B) 2
(C) -1
(D) -2
(E) zero

12) Se $m+n+p=6$, $mnp=2$ e $mn+mp+np=11$, podemos dizer que o valor de $\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}$ é:
a) 1
b) 3
c) 7
d) 18
e) 22

13) A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos segmentos tangentes aos dois círculos.
(A) $38,5$
(B) 39
(C) $39,5$
(D) 40
(E) $40,5$

14) Um hexágono regular $ABCDEF$ tem lado 3 cm. Considere os pontos: M, pertencente a AB, tal que MB igual a 1 cm; N, pertencente a CD, tal que ND igual a 1 cm; e P, pertencente a EF, tal que PF igual a 1 cm. O perímetro, em centímetros, do triângulo MNP é igual a:
(A) $3\sqrt{15}$
(B) $3\sqrt{17}$
(C) $3\sqrt{19}$
(D) $3\sqrt{21}$
(E) $3\sqrt{23}$

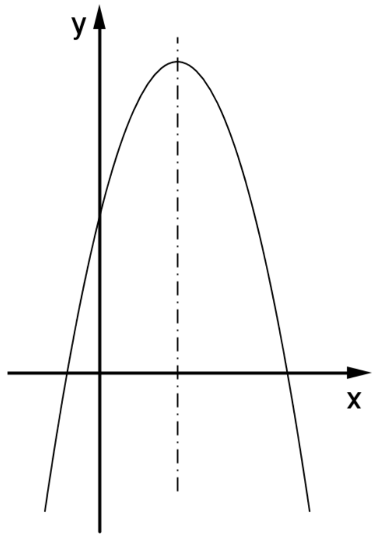
15) Dos números
(I) $0,4333...$
(II) $0,101101110...$
(III) $\sqrt{2}$
(IV) O quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência.
São racionais:
(A) Todos.
(B) Nenhum.
(C) Apenas 1 deles.
(D) Apenas 2 deles.
(E) Apenas 3 deles.

16) Uma cidade $\underline{B}$ encontra-se 600 km a leste de uma cidade $\underline{A}$; e uma cidade $\underline{C}$ encontra-se 500 km ao norte da mesma cidade $\underline{A}$. Um ônibus parte de $\underline{B}$, com velocidade constante, em linha reta e na direção da cidade $\underline{A}$. No mesmo instante e com velocidade constante igual à do ônibus, um carro, também em linha reta, parte de $\underline{C}$ para interceptá-lo. Aproximadamente a quantos quilômetros de $\underline{A}$, o carro alcançará o ônibus?

(A) 92
(B) 94
(C) 96
(D) 98
(E) 100

17) Um grupo de alunos faz prova numa sala. Se saírem do recinto 10 rapazes, o número de rapazes e moças será igual. Se, em seguida, saírem 10 moças o número de rapazes se tornará o dobro do número de moças. Sendo r o número de rapazes e m o número de moças podemos afirmar que $2r+m$ é igual a:
(A) 60
(B) 70
(C) 80
(D) 90
(E) 110

18) Considerando o gráfico abaixo referente ao trinômio do 2° grau, $y = ax^2 + bx + c$, pode-se afirmar que:



(A) $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$
(B) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$
(C) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$
(D) $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$
(E) $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$

19) Um quadrilátero convexo Q tem diagonais respectivamente iguais a 4 e 6. Assinale, dentre as opções, a única possível para o perímetro de Q.
(A) 10
(B) 25
(C) 15
(D) 30
(E) 20

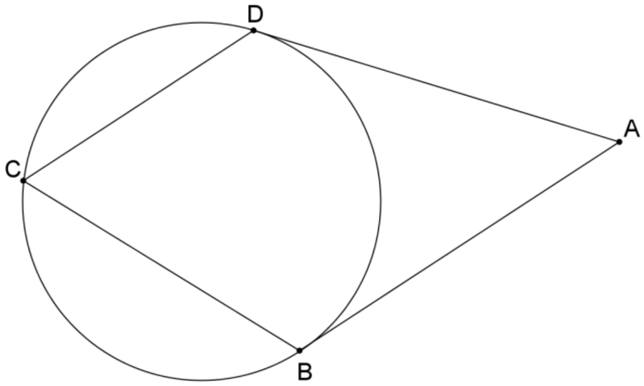
20) Um professor elaborou 3 modelos de prova. No primeiro 1° modelo, colocou uma equação do 2° grau; no 2° modelo, colocou a mesma equação trocando apenas o coeficiente do termo do 2° grau; e no 3° modelo, colocou a mesma equação do 1° modelo trocando apenas o termo independente. Sabendo que as raízes da equação do 2° modelo são 2 e 3 e que as raízes do 3° modelo são 2 e -7, pode-se afirmar sobre a equação do 1° modelo, que:

(A) não tem raízes reais.
(B) a diferença entre a sua maior e a sua menor raiz é 7.
(C) a sua maior raiz é 6.
(D) a sua menor raiz é 1.
(E) A soma dos inversos das suas raízes é $\frac{2}{3}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1997/1998

1) Dois segmentos de uma reta, AB e CD, interceptam-se interiormente no ponto O. Sabe-se que as medidas de AO e OB são respectivamente, 3 cm e 4 cm, e que as medidas de CO e OD são, respectivamente, 2 cm e 6 cm. Qual o número de pontos do plano, determinado por AB e CD, que equidistam dos pontos A, B, C e D?
(A) zero.
(B) um.
(C) dois.
(D) três.
(E) infinito.

2) Na figura abaixo os segmentos AB e DA são tangentes à circunferência determinada pelos pontos B, C e D. Sabendo-se que os segmentos AB e CD são paralelos, pode-se afirmar que o lado BC é:



(A) a média aritmética entre AB e CD.
(B) a média geométrica entre AB e CD.
(C) a média harmônica entre AB e CD.
(D) o inverso da média aritmética de AB e CD.
(E) o inverso da média harmônica entre AB e CD.

3) Duas raízes da equação biquadrada $x^4 + bx^2 + c = 0$ são $0,2333...$ e $\frac{30}{7}$. O valor de c é:
(A) 1
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 11

4) Um baleiro vende dois tipos de balas: b_1 e b_2. Três balas do tipo b_1 custam $R\$\ 0,10$ e a unidade de bala b_2 custa $R\$\ 0,15$. No final de um dia de trabalho, ele vendeu 127 balas e arrecadou $R\$\ 5,75$. O número de balas do tipo b_1 vendidas foi:
(A) 114

(B) 113
(C) 112
(D) 111
(E) 110

5) Define-se potência de um ponto P em relação a um círculo C, de centro O e raio r, como sendo o quadrado da distância de P a O, menos o quadrado de r. Qual é a potência de um dos vértices do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio r, em relação a este círculo?

(A) $\frac{2r^2}{3}$
(B) $\frac{r^2}{2}$
(C) $\frac{r^2}{3}$
(D) $\frac{r^2}{4}$
(E) $\frac{r^2}{6}$

6) Um vendedor comprou 50 camisetas por $R\$ 425,00$. Quantas camisetas, no mínimo, deverá vender a $R\$ 11,00$ cada, para obter lucro?
(A) 37
(B) 38
(C) 39
(D) 40
(E) 41

7) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?
(A) 3 min.
(B) menos de 3 min.
(C) entre 3 min e $3,5$ min.
(D) $3,5$ min.
(E) mais de $3,5$ min.

8) O aluno Mauro, da $8^{\underline{a}}$ série de um certo colégio, para resolver a equação $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$, no conjunto dos números reais, observou-se que $x^4 = x^2 - 2x + 1$ e que o segundo membro da equação é um produto notável. Desse modo, conclui que $(2x+1)^2$ é igual a:
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

9) Dados os conjuntos A, B e C, tais que: $n(B\cup C)=20$, $n(A\cap B)=5$, $n(A\cap C)=4$, $n(A\cap B\cap C)=1$ e $n(A\cup B\cup C)=22$, o valor de $n[A-(B\cap C)]$ é:
(A) 10
(B) 7
(C) 9
(D) 6
(E) 8

10) Sejam $x=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{1997}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{1997}}{2}$ e $y=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{1997}-\left(2-\sqrt{3}\right)^{1997}}{\sqrt{3}}$, o valor de $4x^2-3y^2$ é:
(A) 1
(B) 4
(C) 2
(D) 5
(E) 3

11) Considere as afirmativas abaixo sobre um polígono regular de n lados, onde o número de diagonais é múltiplo de n.
I - O polígono **não** pode ter diagonal que passa pelo seu centro.
II - n pode ser múltiplo de 17.
III - n pode ser um cubo perfeito.
IV - n pode ser primo.
Assinale a alternativa correta.
(A) Todas as afirmativas são falsas.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são verdadeiras.

12) O número de trapézios distintos que se pode obter dispondo de 4, e apenas 4, segmentos de reta medindo, respectivamente, 1 cm, 2 cm, 4 cm e 5 cm é:
(A) nenhum
(B) três
(C) um
(D) quatro
(E) dois

13) Num triângulo ABC, retângulo em A, os lados AB e AC valem, respectivamente c e b. Seja o ponto G o baricentro do triângulo ABC. A área do triângulo AGC é:
(A) $\dfrac{bc}{2}$
(B) $\dfrac{bc}{3}$
(C) $\dfrac{bc}{4}$

(D) $\frac{bc}{6}$

(E) $\frac{bc}{9}$

14) A expressão $\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}$, $x\cdot y\cdot z\neq 0$, é equivalente a:

a) $4x^3$

b) $4yzx^3$

c) $4yx^3$

d) $4xyz$

e) $4xz^3$

15) Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que funcionam em sentidos contrários. Em um minuto, a menor dá três voltas completas enquanto a maior dá uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da maior é:
(A) 54
(B) 36
(C) 24
(D) 18
(E) 9

16) Resolvendo-se a expressão $\frac{\left\{\left[\left(\sqrt[3]{1,331}\right)^{12/5}\right]^0\right\}^{-7,2}-1}{8^{33}+8^{33}+8^{33}+8^{33}+8^{33}}\times\frac{1}{2^{302}}$ encontra-se:
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

17) Considere o conjunto A dos números primos positivos menores do que 20 e o conjunto B dos divisores positivos de 36. O número de subconjuntos do conjunto diferença $B-A$ é:
(A) 32
(B) 64
(C) 128
(D) 256
(E) 512

18) (CN 1998) O número de soluções inteiras da inequação $\frac{x^2-6x+10}{x^2-1}<0$ é:
(A) 0
(B) 3

(C) 1
(D) infinito
(E) 2

19) Um polinômio do 2° grau em x é divisível por $\left(3x-3\sqrt{3}+1\right)$ e $\left(2x+2\sqrt{3}-7\right)$. Sabendo que o coeficiente do termo quadrático é positivo, o valor numérico mínimo do polinômio ocorre para x igual a

(A) $\frac{19}{12}$
(B) $\frac{23}{12}$
(C) $\frac{29}{12}$
(D) $\frac{31}{12}$
(E) $\frac{35}{12}$

20) Um aluno, efetuando a divisão de 13 por 41, foi determinando o quociente até a soma de todos os algarismos por ele escritos, na parte decimal, foi imediatamente maior ou igual a 530. Quantas casas decimais ele escreveu?
(A) 144
(B) 147
(C) 145
(D) 148
(E) 146

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1996/1997

1) Três pessoas resolveram percorrer um trajeto da seguinte maneira: a primeira andaria a metade do percurso mais 1 km, a segunda a metade do que falta mais 2 km e finalmente a terceira que andaria a metade do que resta mais 3 km. O número de quilômetros desse trajeto é:
(A) menor que 20
(B) Maior que 19 e menor que 25
(C) Maior que 24 e menor que 30
(D) Maior que 29 e menor que 35
(E) Maior que 34

2) Numa cidade, 28% das pessoas têm cabelos pretos e 24% possuem olhos azuis. Sabendo que 65% da população de cabelos pretos têm olhos castanhos e que a população de olhos verdes que têm cabelos pretos é 10% do total de pessoas de olhos castanhos e cabelos pretos, qual a porcentagem, do total de pessoas de olhos azuis, que tem os cabelos pretos?
Obs.: Nesta cidade só existem pessoas de olhos azuis, verdes ou castanhos.
a) $30,25\%$
b) $31,25\%$
c) $32,25\%$
d) $33,25\%$
e) $34,25\%$

3) Os números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se os algarismos de M são os mesmos algarismos de N, na ordem inversa, então $M+N$ é necessariamente múltiplo de:
(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 11

4) Uma pessoa comprou uma geladeira para pagamento à vista, obtendo um desconto de 10%. Como a balconista não aceitou o seu cheque, ele pagou com 119.565 moedas de um centavo. O preço da geladeira sem desconto é:
(A) $R\$1.284,20$
(B) $R\$1.284,50$
(C) $R\$1.328,25$
(D) $R\$1.328,50$
(E) $R\$1.385,25$

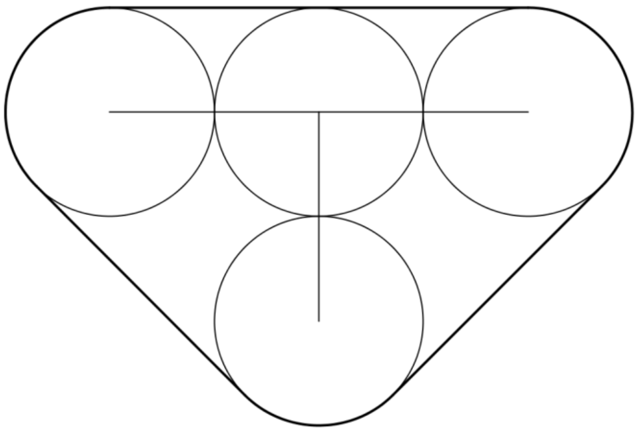
5) Foram usados os números naturais de 26 até 575 inclusive para numerar as casas de uma rua. Convencionou-se colocar uma lixeira na casa que tivesse 7 no seu número. Foram compradas 55 lixeiras, assim sendo, podemos afirmar que:
(A) O número de lixeiras compradas foi igual ao número de lixeiras necessárias.
(B) Sobraram duas lixeiras.
(C) O número de lixeiras compradas deveria ser 100.

(D) Deveriam ser compradas mais 51 lixeiras.
(E) Ficaram faltando 6 lixeiras.

6) Um aluno declarou o seguinte, a respeito de um polígono convexo P de n lados: “Partindo da premissa de que eu posso traçar $(n-3)$ diagonais de cada vértice de P, então, em primeiro lugar, o total de diagonais de P é dado por $n\cdot(n-3)$; e, em segundo lugar, a soma dos ângulos internos de P é dada por $(n-3)\cdot 180^\circ$. Logo o aluno:
(A) Errou na premissa e nas conclusões.
(B) Acertou na premissa e na primeira conclusão, mas errou na segunda conclusão.
(C) Acertou na premissa e na segunda conclusão, mas errou na primeira conclusão.
(D) Acertou na premissa e nas conclusões.
(E) Acertou na premissa e errou nas conclusões.

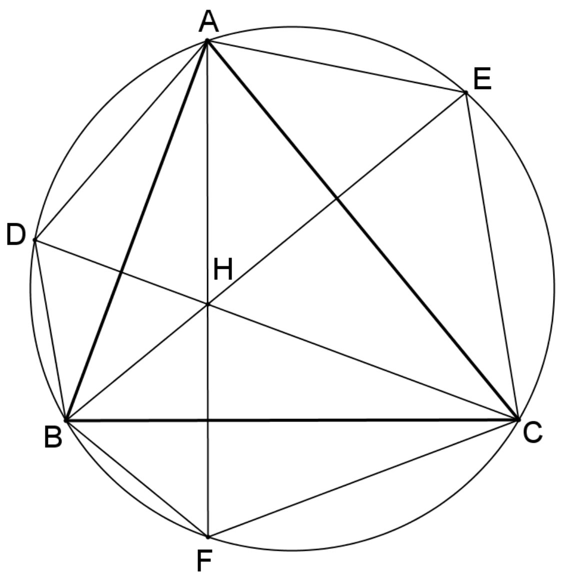
7) A solução da equação $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}$ é:
(A) uma dízima periódica.
(B) um número natural, quadrado perfeito.
(C) um número racional cujo inverso tem 4 divisores positivos.
(D) um número irracional.
(E) inexistente.

8) As quatro circunferências da figura abaixo têm raios $r=0,5$. O comprimento da linha que as envolve é aproximadamente igual a:



(A) $6,96$
(B) $7,96$
(C) $8,96$
(D) $9,96$
(E) $10,96$

9) Considere na figura abaixo o triângulo ABC de lados $AB=8$, $AC=10$ e $BC=12$, e seja H o seu ortocentro. As retas que passam por A e H, B e H, C e H intersectam o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos F, E e D, respectivamente. A área do hexágono de vértices A, D, B, F, C e E é igual a



(A) $30\sqrt{7}$
(B) $18\sqrt{7}$
(C) 80
(D) 70
(E) 65

10) O número de troncos de árvore de 3 m^3 de volume cada, que foram necessários derrubar para fazer os palitos de fósforo, que estão em 1200 contêineres, cada um com 12000 pacotes com 10 caixas de 40 palitos cada, é:
Dado: Considerar cada palito com 200 mm^3 de volume.
(A) 1152
(B) 876
(C) 576
(D) 498
(E) 384

11) Dados os números:
$A = 0,273849\overline{51}$
$B = 0,\overline{27384951}$
$C = 0,2738\overline{4951}$
$D = 0,27\overline{384951}$
$E = 0,27384\overline{951}$
$F = 0,273849512798971288 8...$
Podemos afirmar que:
(A) $A > F > E > C > D > B$
(B) $A > F > B > D > C > E$
(C) $F > C > D > B > A > E$
(D) $B > C > A > F > E > D$
(E) $E > A > C > D > F > B$

12) Considere as seguintes inequações e suas respectivas resoluções, nos reais:

$1^a)$ $1+3x>6x+7$

Solução: $3x-6x>7-1$; $-3x>6$; $3x>-6$; $x>-6/3$; $x>-2$

$2^a)$ $5>3/x+2$

Solução: $5x>3+2x$; $5x-2x>3$; $3x>3$; $x>3/3$; $x>1$

$3^a)$ $x^2-4>0$

Solução: $x^2>4$; $x>\pm\sqrt{4}$; $x>\pm 2$

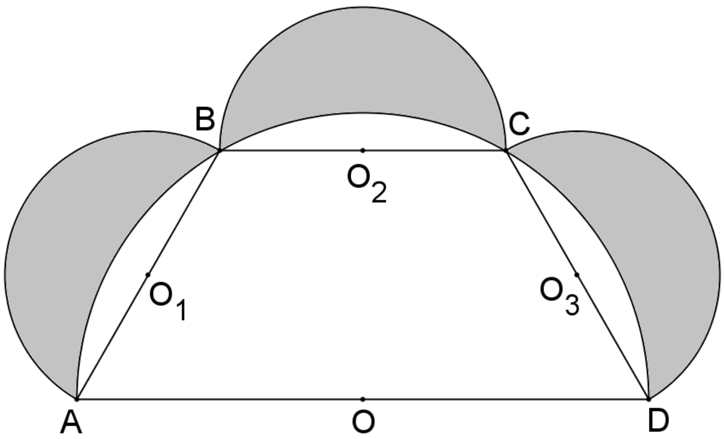
Logo a respeito das soluções, pode-se afirmar que:
(A) As três estão corretas.
(B) As três estão erradas.
(C) Apenas a 1^a e 2^a estão erradas.
(D) Apenas a 1^a e 3^a estão erradas.
(E) Apenas duas estão corretas.

13) O ponto P interno ao triângulo ABC é equidistante de dois de seus lados e dois de seus vértices. Certamente P é a interseção de:
(A) Uma bissetriz interna e uma altura desse triângulo.
(B) Uma bissetriz interna e uma mediatriz dos lados desse triângulo.
(C) Uma mediatriz de um lado e uma mediana desse triângulo.
(D) Uma altura e uma mediana desse triângulo.
(E) Uma mediana e uma bissetriz interna desse triângulo.

14) A soma e o produto das raízes reais da equação $(x^2-5x+6)^2-5(x^2-5x+6)+6=0$, são respectivamente:
(A) 6 e 8.
(B) 7 e 10.
(C) 10 e 12.
(D) 15 e 16.
(E) 15 e 20.

15) O valor da expressão $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{-1}{2}}+2^{9^{0,5}}\div\left[\frac{(12^2-6)+17\div 3}{15}\right]^{\left[(3^2+1)\cdot 0,1\right]-1^{73}}$ é:
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

16) Na figura abaixo, tem-se um semicírculo de centro O e diâmetro AD e os semicírculos de diâmetros AB, BC, CD e os centros O_1, O_2 e O_3, respectivamente. Sabendo-se que $AB=BC=CD$ e que $AO=R$, a área sombreada é igual a:



(A) $\dfrac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{4}$

(B) $\dfrac{\pi R^2}{16}\left(2\sqrt{3}+\pi\right)$

(C) $\dfrac{R^2}{8}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)$

(D) $\dfrac{R^2\left(5\sqrt{3}-2\pi\right)}{24}$

(E) $\dfrac{\pi R^2}{4}$

17) Considere o sistema linear S, de incógnita x e y:

$$S:\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Se os pares ordenados $(x,y)=(3,-5)$ e $(x,y)=(2,-3)$ são soluções de S, então:

(A) $(-3,7)$ também é solução de S.

(B) $(3,-7)$ também é solução de S.

(C) S só tem as duas soluções apresentadas

(D) S só tem mais uma solução além das apresentadas.

(E) Qualquer par ordenado de números reais é solução de S.

18) O valor de $\dfrac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\right)}{2\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+1\right)^2-1\right]}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ é:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$

(B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12}$

(C) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{24}$

(D) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{24}$

(E) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{30}}{24}$

19) Quantos triângulos obtusângulos existem, cujos lados são expressos por números inteiros consecutivos?
(A) um.
(B) dois.
(C) três.
(D) quatro.
(E) cinco.

20) Um quadrilátero de bases paralelas B e b, é dividido em dois outros semelhantes pela sua base média, caso seja, necessariamente, um:
(A) paralelogramo.
(B) trapézio retângulo.
(C) trapézio isósceles.
(D) trapézio qualquer.
(E) losango.

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2000/2001

1) a (Raciocínio lógico)
2) d (Quadriláteros)
3) e (MDC e MMC)
4) e (Potências e raízes)
5) b (Razões e proporções)
6) e (Raciocínio lógico)
7) e (Produtos notáveis e fatoração)
8) c (Áreas)
9) e (Médias)
10) b (Polígonos – ângulos e diagonais)
11) c (Operações com mercadorias)
12) d (Ângulos na circunferência)
13) a (Potências e raízes)
14) c (Potências e raízes)
15) b (Conjuntos)
16) a (Porcentagem)
17) a (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
18) b (Sistemas lineares)
19) c (Divisibilidade e congruência)
20) b (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1999/2000

1) d (Áreas)
2) a (Áreas)
3) e (Sistemas de numeração)
4) a (Números racionais)
5) d (Razões e proporções)
6) a (Potências e raízes)
7) b (Problemas do 1° grau)
8) c (Áreas)
9) d (Potências e raízes)
10) d (Problemas do 1° grau)
11) e (Potências e raízes)
12) b (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
13) c (Polígonos – relações métricas)
14) d (Áreas)
15) a (Equação do 2° grau)
16) a (Sistemas lineares)
17) b (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)

18) b (Ângulos na circunferência)
19) e (Porcentagem)
20) a (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1998/1999

1) b (Triângulos – pontos notáveis)
2) b (Racionalização)
3) e (Misturas)
4) c (Conjuntos)
5) b (Potências e raízes)
6) d (Polígonos – relações métricas)
7) b (Áreas)
8) c (Juros simples)
9) d (Triângulos – semelhança e relações métricas)
10) d (Conjuntos numéricos e números reais)
11) a (Sistemas lineares)
12) c (Produtos notáveis e fatoração)
13) d (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
14) d (Triângulos – semelhança e relações métricas)
15) c (Conjuntos numéricos e números reais)
16) a (Triângulos retângulos)
17) c (Sistemas lineares e problemas relacionados)
18) e (Função quadrática)
19) c (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
20) b (Equação do 2° grau)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1997/1998

1) b (Potência de ponto)
2) b (Triângulos – semelhança e relações métricas)
3) a (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
4) a (Problemas do 1° grau)
5) c (Potência de ponto)
6) c (Operações com mercadorias)
7) d (Razões e proporções)
8) c (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
9) c (Conjuntos)
10) b (Produtos notáveis e fatoração)
11) e (Polígonos – ângulos e diagonais)
12) c (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
13) d (Áreas)
14) a (Produtos notáveis e fatoração)
15) d (Razões e proporções)
16) e (Potências e raízes)
17) c (Conjuntos)
18) c (Inequações produto quociente)

19) a (Função quadrática)
20) d (Números racionais)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 1996/1997

1) d (Problemas do 1º grau)
2) d (Porcentagem)
3) e (Sistemas de numeração)
4) c (Operações com mercadorias)
5) d (Contagem)
6) e (Polígonos – ângulos e diagonais)
7) c (Equações e inequações irracionais)
8) b (Comprimentos na circunferência)
9) a (Áreas)
10) e (Sistema métrico)
11) e (Números racionais)
12) b (Inequações)
13) b (Triângulos – pontos notáveis)
14) c (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
15) c (Potências e raízes)
16) c (Áreas)
17) a (Sistemas lineares)
18) c (Racionalização)
19) a (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
20) a (Quadriláteros)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2016

ASSUNTO	F8	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico									1		1							2	1														1	6	0,9%
Conjuntos		1	2	2	1	1	1		1	1		1			2	1		1					1	1	1			1	1		1		1	22	3,3%
Operações com números naturais e inteiros	1								1	1			1									1				1	1			2				8	1,2%
Números racionais	1				1					1		1	2	1	1		1				1									2	1	2		14	2,1%
Conjuntos numéricos e números reais						2					1					2									1				1					7	1,1%
Sistemas de numeração	1					1		1		1				1			1			1					1		2			1			2	12	1,8%
Múltiplos e divisores	2	1		1				1	1	1			1						2		1	1		2		1	1	1	1	2	3		2	23	3,5%
Divisibilidade e congruência		1			1						1		1					1			1	2					2	1	3	1		1		16	2,4%
Função parte inteira																												1						1	0,2%
MDC/MMC	1				1			1			1							1	2	1	1		2		1	2				1		1		15	2,3%
Razões e proporções		2			1		1		1				2		2		1	1		1	1		1		2		1					1		18	2,7%
Regra de três	3												1																				1	2	0,3%
Porcentagem			1							1		1		1			1	1			1			1		2								10	1,5%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade			1	1																		1		1	1									5	0,8%
Operações com mercadorias				1			1	1			1		1	1	1			1		1			1					1						11	1,7%
Juros simples e compostos						1		1	1		1	1				1							1		1									8	1,2%
Misturas	1				1											1			1								1			1				5	0,8%
Médias		1	1					1				1						1	1					1									1	8	1,2%
Contagem e calendário					1					1				1						2					1						2			8	1,2%
Problemas tipo torneira	1		1								1												1	1	1									5	0,8%
Sistema métrico			1	1			1				1		1	1																				6	0,9%
Potências e raízes	1	3	2	1	2	1	1	1	1			1		1	1	1	3	3			2	1		1		1	1		2	2	1	1	1	35	5,3%
Produtos notáveis e fatoração	2	1	1	1	1	1	1		1	1	1		2		2	1		1				2	1	3	2	1			2	1		2		29	4,4%
Racionalização e radical duplo	2			1	1	1	1	1	1		1			1		1			1	1		1				1			1	1				15	2,3%
Equação do 2º grau	5	1	2	1	1	2	1	1	1			2	1			1	1		1		1	2			1	1	1				1	1		24	3,6%
Função quadrática	1	1	1		1	1	1	1			1				1	1				2		1	1	1		1	1							16	2,4%
Equações fracionárias										1									1							1		1	1	1				6	0,9%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2º grau			1	1						4	1	2		1	2		1		1		1		1		1						1			18	2,7%
Equações e inequações irracionais	3	1					1		1			1		1						1	1			1		1		1	1		1	1		13	2,0%
Polinômios e equações polinomiais		1	1	3	2	1		1				1									1	1						2		1		1	1	17	2,6%
Sequências																													1					1	0,2%
Função do 1º grau				1																1									1					3	0,5%
Equação do 1º grau e problemas do 1º grau	1	1						1			1			1	1		2		1													1		9	1,4%
Sistemas lineares e problemas relacionados		1	2			1	2			1	1	1		1		2	1	1	1	1	2		1	1		1	1					1	1	24	3,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados	1	1		1		1	1	1	1											1				1		1		3			1			13	2,0%
Inequações											1	1		1						1								1						5	0,8%
Inequações produto-quociente	1	1		1	2		1	1	1						1							1	1				1				1		1	13	2,0%
Desigualdades																												1						1	0,2%
Fundamentos e ângulos																									1									1	0,2%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades			1	1					1			1	1	1	1	1	2	2	1				1							1				15	2,3%
Triângulos - pontos notáveis												1	1	1		1					1						1	1			2		1	10	1,5%
Triângulos retângulos							1			1	1		1			1						1	1			1					1		1	10	1,5%
Triângulos - semelhança e relações métricas	2	1	1	2	2	1	1	1		1					1	2					2		1		1		1					2		20	3,0%
Quadriláteros	1		1	2		1	1			1		1		1				1			1	1		1		1	1	1	1	2				18	2,7%
Polígonos - ângulos e diagonais	2		2		1	1		1	1		1	1		1	1			1					2						1					14	2,1%
Polígonos regulares - relações métricas				1				1	1		1		1			1	1				1		2	1										11	1,7%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1			1					1		1		1			1				1	1			1	1	1	1	1						12	1,8%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência		1			1	1			1	1				1			1	1		2					1	1	1		1		2		1	17	2,6%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto	3	2					1	1				1	1		2				1	1		1												11	1,7%
Áreas	3	3	3	1	4	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	4	1	5	2		3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	5	5	69	10,5%
TOTAL POR PROVA	40	25	25	25	25	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	660	100,0%
Aritmética	11	6	7	6	7	5	4	6	6	7	8	5	10	6	6	5	4	9	7	6	6	5	7	7	10	6	8	5	6	10	7	5	8	210	31,82%
Álgebra	17	12	10	11	10	9	10	8	7	7	7	9	3	7	8	7	8	5	6	8	8	9	5	8	4	9	5	9	9	6	6	8	4	242	36,67%
Geometria Plana	12	7	8	8	8	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	8	8	6	7	6	6	6	8	5	6	5	7	6	5	4	7	7	8	208	31,52%

CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO

ARITMÉTICA

RACIOCÍNIO LÓGICO: 2016-10; 2002-14; 2001-1; 2001-6; 1994-20; 1991-2;

CONJUNTOS: 2016-19; 2014-4; 2012-10; 2011-11; 2008-15; 2007-6; 2006-3; 2001-15; 1999-4; 1998-9; 1998-17; 1995-18; 1992-4; 1991-3; 1989-14; 1988-5; 1987-6; 1986-1; 1986-2; 1985-1; 1985-18; 1984-1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: 2013-12; 2013-15; 2010-14; 2009-13; 2005-2; 1996-14; 1992-1; 1991-1; FB-16

NÚMEROS RACIONAIS: 2015-7; 2015-9; 2014-1; 2013-2; 2013-18; 2004-8; 2000-4; 1998-20; 1997-11; 1996-19; 1996-20; 1995-16; 1992-13; 1987-7; FB-12

CONJUNTOS NUMÉRICOS E NÚMEROS REAIS: 2012-11; 2008-20; 1999-10; 1999-15; 1994-11; 1988-1; 1988-2

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: 2016-3; 2016-12; 2013-4; 2010-3; 2010-13; 2008-5; 2003-18; 2000-3; 1997-3; 1992-6; 1990-9; 1988-3; FB-23

MÚLTIPLOS E DIVISORES: 2016-17; 2016-18; 2014-10; 2014-17; 2014-19; 2013-6; 2013-8; 2012-14; 2011-4; 2010-8; 2009-18; 2007-11; 2007-17; 2005-10; 2004-4; 2002-6; 2002-11; 1996-11; 1992-14; 1991-4; 1990-11; 1986-4; 1984-7; FB-7; FB-13

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA: 2015-14; 2013-11; 2012-1; 2012-15; 2012-20; 2011-5; 2010-5; 2010-15; 2005-13; 2005-16; 2004-9; 2001-19; 1996-18; 1994-9; 1987-2; 1984-2

FUNÇÃO PARTE INTEIRA: 2011-8;

MDC E MMC: 2015-8; 2013-7; 2009-4; 2009-14; 2008-11; 2006-2; 2006-9; 2004-5; 2003-4; 2002-2; 2002-4; 2001-3; 1994-5; 1990-8; 1987-4; FB-38

RAZÕES E PROPORÇÕES: 2015-2; 2010-19; 2008-12; 2008-18; 2006-12; 2004-16; 2003-13; 2001-5; 2000-5; 1998-7; 1998-15; 1996-6; 1996-17; 1991-6; 1989-9; 1987-1; 1984-4; 1984-21

REGRA DE TRÊS: 2016-4; 1996-16; FB-9; FB-25; FB-30

PORCENTAGEM: 2009-10; 2009-15; 2007-4; 2004-6; 2001-16; 2000-19; 1997-2; 1995-3; 1992-20; 1985-6

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS E REGRA DE SOCIEDADE: 2008-14; 2007-10; 2005-14; 1986-11; 1985-11

OPERAÇÕES COM MERCADORIAS: 2011-10; 2006-19; 2003-15; 2001-11; 1998-6; 1997-4; 1996-12; 1994-16; 1990-16; 1989-8; 1986-6

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: 2008-4; 2006-15; 1999-8; 1995-8; 1994-3; 1991-7; 1990-6; 1988-4

MISTURAS: 2013-13; 2010-7; 2002-7; 1999-3; 1987-3; FB-39

MÉDIAS: 2016-5; 2007-19; 2002-9; 2001-9; 1995-14; 1990-10; 1985-25; 1984-3

CONTAGEM E CALENDÁRIO: 2014-3; 2014-11; 2008-9; 2003-1; 2003-9; 1997-5; 1992-5; 1987-9

PROBLEMAS TIPO TORNEIRA: 2008-16; 2007-3; 2006-14; 1994-10; 1985-3; FB-37

SISTEMA MÉTRICO: 1997-10; 1996-10; 1994-13; 1989-13; 1986-13; 1985-23

ÁLGEBRA

POTÊNCIAS E RAÍZES: 2016-11; 2015-10; 2014-7; 2013-1; 2013-19; 2012-7; 2012-16; 2010-18; 2009-8; 2007-7; 2005-9; 2004-11; 2004-14; 2001-4; 2001-13; 2001-14; 2000-6; 2000-9; 2000-11; 1999-5; 1998-16; 1997-15; 1995-12; 1991-5; 1990-2; 1989-5; 1988-7; 1987-16; 1987-24; 1986-7; 1985-2; 1985-15; 1984-5; 1984-6; 1984-15; FB-3

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO: 2015-1; 2015-18; 2013-16; 2012-3; 2012-4; 2009-12; 2008-1; 2008-3; 2007-8; 2007-9; 2007-12; 2006-16; 2005-12; 2005-15; 2001-7; 1999-12; 1998-10; 1998-14; 1996-3; 1996-15; 1994-19; 1992-8; 1991-13; 1989-10; 1988-14; 1987-17; 1986-16; 1985-8; 1984-12; FB-8; FB-33

RACIONALIZAÇÃO E RADICAL DUPLO: 2013-17; 2012-13; 2009-19; 2005-11; 2003-3; 2002-5; 1999-2; 1997-18; 1994-8; 1991-10; 1990-14; 1989-11; 1988-6; 1987-5; 1986-9; FB-10; FB-14

EQUAÇÃO DO 2° GRAU: 2015-11; 2014-12; 2010-6; 2009-20; 2008-8; 2005-3; 2005-19; 2004-12; 2002-15; 2000-15; 1999-20; 1996-4; 1995-2; 1995-15; 1991-12; 1990-4; 1989-7; 1988-8; 1988-11; 1987-20; 1986-3; 1985-4; 1985-17; 1984-10; FB-11; FB-17; FB-28; FB-29; FB-32

FUNÇÃO QUADRÁTICA: 2010-12; 2009-16; 2007-14; 2006-6; 2005-17; 2003-10; 2003-14; 1999-18; 1998-19; 1994-2; 1990-18; 1989-17; 1988-13; 1987-21; 1985-13; 1984-8; FB-36

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS: 2013-10; 2012-2; 2011-20; 2009-3; 2002-17; 1992-12;

EQUAÇÕES BIQUADRADAS E REDUTÍVEIS AO 2° GRAU: 2014-5; 2008-10; 2006-20; 2004-15; 2002-19; 2000-17; 1998-3; 1998-8; 1997-14; 1995-17; 1995-20; 1994-15; 1992-10; 1992-11; 1992-16; 1992-18; 1986-15; 1985-10

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS: 2015-3; 2014-9; 2012-5; 2011-12; 2009-7; 2007-13; 2004-2; 2003-16; 1997-7; 1995-7; 1991-8; 1989-12; 1984-11; FB-24; FB-34; FB-40

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: 2016-9; 2015-16; 2013-14; 2011-2; 2011-13; 2005-4; 2004-19; 1995-4; 1990-20; 1988-12; 1987-14; 1987-25; 1986-8; 1986-10; 1986-14; 1985-19; 1984-13

SEQUÊNCIAS: 2012-12;

FUNÇÃO DO 1° GRAU: 2012-17; 2003-19; 1986-12

EQUAÇÃO DO 1° GRAU E PROBLEMAS DO 1º GRAU: 2015-15; 2002-18; 2000-7; 2000-10; 1998-4; 1997-1; 1994-14; 1990-7; 1984-16; FB-15

SISTEMAS LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2016-2; 2015-12; 2010-4; 2009-1; 2007-1; 2006-11; 2004-1; 2004-17; 2003-8; 2002-3; 2001-18; 2000-16; 1999-11; 1999-17; 1997-17; 1995-11; 1994-12; 1992-17; 1989-4; 1989-15; 1988-10; 1985-9; 1985-22; 1984-14

SISTEMAS NÃO LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2014-18; 2011-15; 2011-16; 2011-18; 2009-2; 2007-16; 2003-5; 1991-9; 1990-19; 1989-6; 1988-9; 1986-5; 1984-9; FB-31

INEQUAÇÕES: 2011-17; 2003-2; 1997-12; 1995-9; 1994-18;

INEQUAÇÕES PRODUTO QUOCIENTE: 2016-1; 2014-20; 2010-9; 2006-8; 2005-6; 1998-18; 1991-11; 1990-3; 1989-20; 1987-8; 1987-13; 1986-21; 1984-17; FB-6

DESIGUALDADES: 2011-19;

GEOMETRIA PLANA

FUNDAMENTOS E ÂNGULOS: 2008-2

TRIÂNGULOS – ÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, DESIGUALDADES: 2013-20; 2006-1; 2002-12; 2001-17; 2001-20; 2000-12; 2000-20; 1999-19; 1998-12; 1997-19; 1996-1; 1995-19; 1991-16; 1986-18; 1985-7

TRIÂNGULOS – PONTOS NOTÁVEIS: 2016-13; 2014-13; 2014-14; 2011-14; 2010-11; 2004-3; 1999-1; 1997-13; 1996-7; 1995-5;

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS: 2016-6; 2014-8; 2009-17; 2006-17; 2005-18; 1999-16; 1996-9; 1994-4; 1992-7; 1989-1;

TRIÂNGULOS – SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS: 2015-6; 2015-17; 2010-10; 2008-7; 2006-18; 2004-10; 2004-20; 1999-9; 1999-14; 1998-2; 1992-19; 1990-1; 1989-16; 1988-15; 1987-12; 1987-22; 1986-22; 1986-25; 1985-12; 1984-22; FB-4; FB-19

QUADRILÁTEROS: 2013-3; 2013-5; 2012-8; 2011-9; 2010-17; 2009-6; 2007-5; 2005-5; 2004-13; 2001-2; 1997-20; 1995-1; 1992-9; 1989-3; 1988-20; 1986-19; 1986-20; 1985-21; FB-20

POLÍGONOS – ÂNGULOS E DIAGONAIS: 2012-18; 2006-7; 2006-13; 2001-10; 1998-11; 1997-6; 1995-10; 1994-7; 1991-14; 1990-5; 1988-18; 1987-11; 1985-5; 1985-16; FB-2; FB-18

POLÍGONOS – RELAÇÕES MÉTRICAS: 2007-2; 2006-4; 2006-10; 2004-18; 2000-13; 1999-6; 1996-5; 1994-1; 1991-18; 1990-12; 1986-23

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS E SEGMENTOS TANGENTES: 2011-6; 2010-1; 2009-9; 2008-17; 2007-18; 2004-7; 2003-7; 1999-13; 1996-13; 1994-17; 1991-15; 1986-17; FB-22

ARCO CAPAZ, ÂNGULOS E COMPRIMENTOS NA CIRCUNFERÊNCIA: 2016-7; 2014-6; 2014-15; 2012-9; 2010-16; 2009-5; 2008-6; 2003-6; 2003-17; 2001-12; 2000-18; 1997-8; 1992-3; 1991-19; 1988-17; 1987-18; 1984-20

CIRCUNFERÊNCIA – RELAÇÕES MÉTRICAS E POTÊNCIA DE PONTO: 2005-20; 2003-11; 2002-20; 1998-1; 1998-5; 1996-8; 1995-13; 1990-15; 1989-19; 1984-18; 1984-23; FB-21; FB-26; FB-27

ÁREAS: 2016-8; 2016-14; 2016-15; 2016-16; 2016-20; 2015-4; 2015-5; 2015-13; 2015-19; 2015-20; 2014-2; 2014-16; 2013-9; 2012-6; 2012-19; 2011-1; 2011-3; 2011-7; 2010-2; 2010-20; 2009-11; 2008-13; 2008-19; 2007-15; 2007-20; 2006-5; 2005-1; 2005-7; 2005-8; 2003-12; 2003-20; 2002-1; 2002-8; 2002-10; 2002-13; 2002-16; 2001-8; 2000-1; 2000-2; 2000-8; 2000-14; 1999-7; 1998-13; 1997-9; 1997-16; 1996-2; 1995-6; 1994-6; 1992-2; 1992-5; 1991-17; 1991-20; 1990-13; 1990-17; 1989-2; 1989-18; 1988-16; 1988-19; 1987-10; 1987-15; 1987-19; 1987-23; 1986-24; 1985-14; 1985-20; 1985-24; 1984-19; 1984-24; 1984-25; FB-1; FB-5; FB-35

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2000/2001

1) Numa prova de vinte questões, valendo meio ponto cada uma, três questões erradas anulam uma certa. Qual é a nota de um aluno que errou nove questões em toda essa prova?
(A) Quatro
(B) Cinco
(C) Quatro e meio
(D) Cinco e meio
(E) Seis e meio

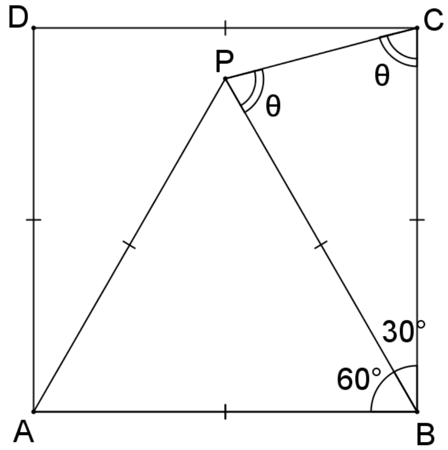
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Se o aluno errou 9 questões, então acertou $20-9=11$.
As 9 questões erradas anulam $\frac{9}{3}=3$ certas, então a nota do aluno corresponde a $11-3=8$ acertos.
Portanto, a sua nota é $8 \cdot 0,5=4$.

2) A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado $ABCD$. Qual é a medida do ângulo PCB?
(A) 30°
(B) 45°
(C) 60°
(D) 75°
(E) 90°

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:



O quadrilátero $ABCD$ é um quadrado e o triângulo PAB é equilátero, então $BC = CD = DA = AB = AP = BP$.

Como $BP = BC$, o triângulo BCP é isósceles de vértice B e, então $B\hat{C}P = B\hat{P}C = \theta$.

Tendo em vista que os ângulos internos do quadrado medem 90° e os do triângulo equilátero 60°, então $C\hat{B}P = A\hat{B}C - A\hat{B}P = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Assim, no ΔBCP, temos $2\theta + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 75^\circ$, ou seja, $P\hat{C}B = 75^\circ$.

3) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

(A) 110
(B) 120
(C)150
(D) 200
(E) 300

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O primeiro sinal fecha em intervalos de $10 + 50 = 60$ segundos e o segundo sinal em intervalos de $10 + 40 = 50$ segundos.
Os sinais voltarão a fechar juntos pela primeira vez no menor múltiplo comum dos dois intervalos, isto é, $\text{mmc}(60, 50) = 300$ segundos.

4) Considere as afirmativas abaixo:

(I) $2^{68} + 10^{68} = 2^{68} + (2 \times 5)^{68} = 2^{68} + 2^{68} \times 5^{68} = 4^{68} \times 5^{68} = 20^{68}$

(II) $2^{68} + 10^{68} = 2^{68} + (2 \times 5)^{68} = 2^{68} + 2^{68} \times 5^{68} = 2^{136} \times 5^{68}$

(III) $6^{17} + 10^{23} = (2 \times 3)^{17} + (2 \times 5)^{23} = 2^{17} \times 3^{17} + 2^{23} \times 5^{23} = \left(2^{17} \times 2^{23}\right) + \left(3^{17} \times 5^{23}\right)$

Pode-se afirmar que:
(A) apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(C) apenas a afirmativa II é verdadeira.
(D) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) as afirmativas I, II e III são falsas.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
(I) FALSA
$$2^{68}+10^{68}=2^{68}+(2\times 5)^{68}=2^{68}+2^{68}\times 5^{68}=2^{68}\times\left(1+5^{68}\right)$$
(II) FALSA
$$2^{68}+10^{68}=2^{68}+(2\times 5)^{68}=2^{68}+2^{68}\times 5^{68}=2^{68}\times\left(1+5^{68}\right)$$
(III) FALSA
$$6^{17}+10^{23}=(2\times 3)^{17}+(2\times 5)^{23}=2^{17}\times 3^{17}+2^{23}\times 5^{23}=2^{17}\times\left(3^{17}+2^{6}\times 5^{23}\right)$$

5) Um bebedouro que usa garrafão de água tem $2,5$ metros de serpentina por onde a água passa para gelar. Sabe-se que tal serpentina gasta 12 segundos para ficar totalmente gelada. Colocando-se um garrafão de 10 litros e ligando-se o bebedouro, leva-se 5 minutos para que toda a água saia gelada. Se nas mesmas condições fosse colocado um garrafão de 20 litros no lugar do de 10 litros, o tempo gasto para que toda a água saísse gelada seria de:
(A) 9 min 36 seg
(B) 9 min 48 seg
(C) 10 min
(D) 10 min 12 seg
(E) 11 min

RESPOSTA: B

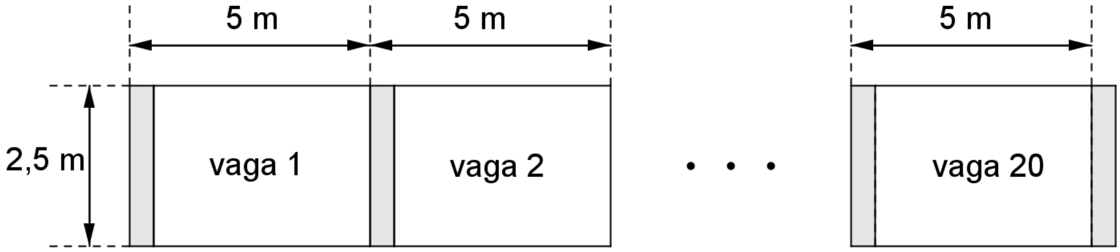
RESOLUÇÃO:
O tempo necessário para gelar os $10\ \ell$ de água, após gelar a serpentina, é $5\text{ min}-12\text{ seg}=4\text{ min }48\text{ seg}$.
Assim, para gelar um garrafão de $20\ \ell$ são necessários 12 seg mais $2\cdot\left(4\text{ min }48\text{ seg}\right)=9\text{ min }36\text{ seg}$, ou seja, o tempo total é $9\text{ min }36\text{ seg}+12\text{ seg}=9\text{ min }48\text{ seg}$.

6) Para se demarcar o estacionamento de todo o lado direito de uma rua reta, foram pintados 20 retângulos de $4,5$ metros de comprimento e $2,5$ metros de largura. Sabendo-se que os carros estacionam no sentido do comprimento dos retângulos e da rua, e à frente e atrás de cada um dos retângulos, tem 50 centímetros de folga, qual é o comprimento, em metros, da rua?
(A) 90
(B) $90,5$
(C) 95
(D) 100

(E) $100,5$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:



Considere cada retângulo de $4,5\text{ m}$ junto com os $50\text{ cm}=0,5\text{ m}$ de folga à sua frete. Isso resulta em um comprimento total de $4,5+0,5=5\text{ m}$, conforme a figura acima onde as vagas são os retângulos brancos e as folgas os sombreados. Assim, os 20 retângulos junto com suas folgas terão um comprimento total de $20\cdot 5=100\text{ m}$. Falta apenas acrescentar a folga depois do último retângulo, dessa forma o comprimento da rua será $100+0,5=100,5\text{ m}$.

7) (CN 2001) O valor de $\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ é

(A) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

(B) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(C) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$

(D) $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(E) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[b^{\frac{4}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

8) Uma massa fermentada, ao ser colocada para descansar, ocupou uma área circular S de raio r. Após um certo tempo t, ela passou a ocupar uma área 21% maior que S. Qual o maior valor possível de r, em centímetros, para que a massa não transborde, quando colocada para descansar durante o tempo t, em um tabuleiro circular de raio 22 centímetros?
(A) $17,38$
(B) $18\frac{2}{11}$
(C) 20
(D) $20,38$
(E) 21

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A área ocupada pela massa originalmente era $S=\pi\cdot r^2$ e, após descansar durante o tempo t, a área ocupada era $(1+21\%)\cdot S=1,21\cdot \pi r^2$.
A área ocupada pela massa, após descansar durante o tempo t, deve ser igual à área de uma circunferência de raio 22 cm. Dessa forma, temos: $1,21\cdot \pi r^2=\pi\cdot 22^2 \Leftrightarrow 1,1\cdot r=22 \Leftrightarrow r=20\text{ cm}$.

9) Um aluno calculou a média aritmética entre os cem primeiros números inteiros positivos, encontrando $50\frac{1}{2}$. Retirando um desses números encontrou como nova média aritmética $50\frac{27}{99}$. O número retirado está entre:
Dado: A média aritmética de n números é igual à soma desses n números dividida por n.
(A) 30 e 40
(B) 40 e 50
(C) 50 e 60
(D) 60 e 70
(E) 70 e 80

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Seja S a soma dos 100 primeiros números inteiros positivos, então
$$\frac{S}{100}=50\frac{1}{2} \Leftrightarrow S=100\cdot\left(50+\frac{1}{2}\right)=5050.$$
Seja x o número retirado, temos
$$\frac{S-x}{99}=50\frac{27}{99} \Leftrightarrow 5050-x=99\cdot\left(50+\frac{27}{99}\right) \Leftrightarrow 5050-x=4977 \Leftrightarrow x=73$$
Portanto, o número retirado está entre 70 e 80.

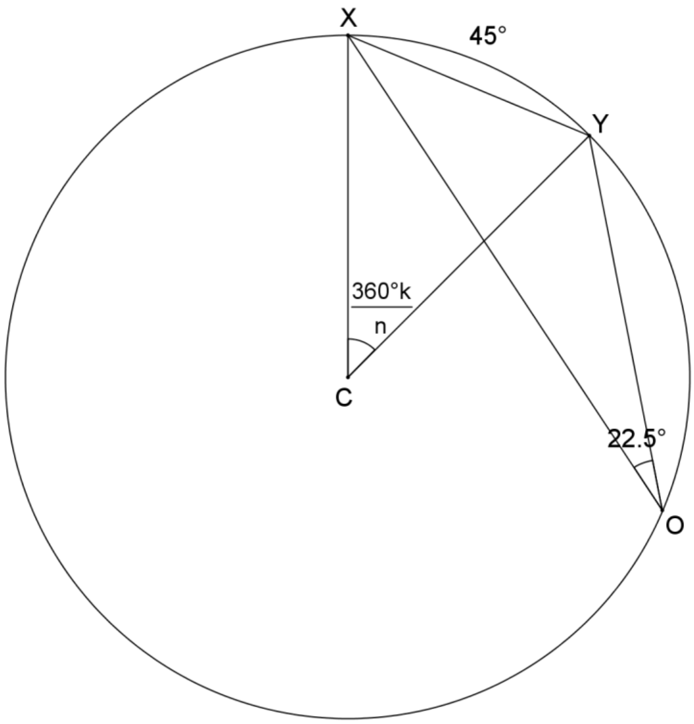
NOTA 1: SOMA DOS n PRIMEIROS INTEIROS POSITIVOS

Note que a soma dos n primeiros números inteiros positivos é dada por $S_n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$. No caso do problema, mesmo sem a informação do valor original da média aritmética, poderíamos ter calculado $S_{100} = \frac{(1+100)\cdot 100}{2} = 5050$.

10) Os pontos X, O e Y são vértices de um polígono regular de n lados. Se o ângulo $X\hat{O}Y$ mede $22^\circ 30'$, considere as afirmativas:
(I) n pode ser igual a 8.
(II) n pode ser igual a 12.
(III) n pode ser igual a 24.
Podemos afirmar que:
(A) apenas I e II são verdadeiras.
(B) apenas I e III são verdadeiras.
(C) apenas II e III são verdadeiras.
(D) apenas uma delas é verdadeira
(E) I, II e III são verdadeiras

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



O ângulo central determinado por um lado de um polígono regular de n lados mede $\frac{360^\circ}{n}$.

O ângulo $X\hat{O}Y$ é um ângulo inscrito que determina um ou mais lados do polígono. Assim, temos:

$\frac{360^\circ}{n} \cdot k = 2 \cdot 22^\circ 30' \Leftrightarrow 360^\circ k = 45^\circ n \Leftrightarrow n = 8k$, onde $k \in \mathbb{Z}^*$.
Logo, n é múltiplo de 8 e as afirmativas (I) e (III) são verdadeiras.

11) Um comerciante comprou k objetos idênticos por t reais cada, onde t é um número inteiro positivo. Ele contribuiu para um bazar de caridade, vendendo dois objetos pela metade do preço de custo. Os objetos restantes foram vendidos com um lucro de seis reais por unidade. Se o seu lucro total foi de setenta e dois reais, o menor valor possível para k é:
(A) 11
(B) 12
(C) 15
(D) 16
(E) 18

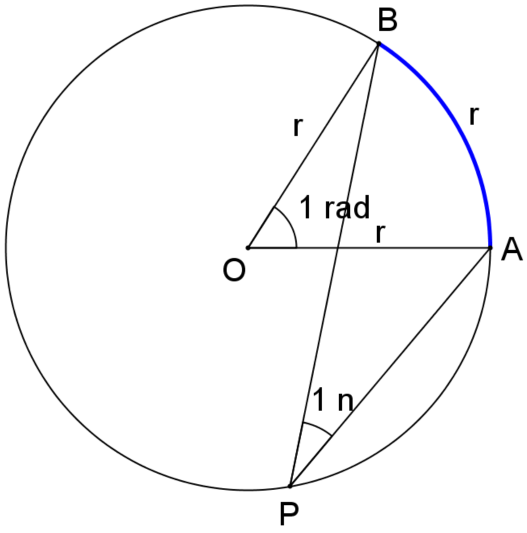
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Dois objetos foram vendidos pela metade do preço a $\frac{t}{2}$ reais cada e houve um prejuízo de $\frac{t}{2}$ reais por unidade; os outros $(k-2)$ objetos foram vendidos com lucro de 6 reais cada. Portanto, o lucro total foi $L = 6 \cdot (k-2) - 2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right) = 72 \Leftrightarrow 6k - t = 84 \Leftrightarrow k = 14 + \frac{t}{6}$.
Como k é inteiro, então t deve ser múltiplo de 6. Assim, o menor valor de k é 15, que ocorre para $t = 6$.

12) Suponha que 1 (um) naval (símbolo n) seja a medida de um ângulo convexo, menor que um ângulo reto, inscrito em um círculo de raio r, cujos lados determinam, nesse círculo, um arco de comprimento r. Assim sendo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a
(A) $\frac{\pi}{4}n$
(B) $\frac{\pi}{2}n$
(C) πn
(D) $2\pi n$
(E) $4\pi n$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:



Como $1\,n$ é o ângulo inscrito em um círculo de raio r, cujos lados determinam, nesse círculo, um arco de comprimento r, então esse arco tem medida angular $2n$.
Mas, sabemos que o arco de comprimento r em uma circunferência de raio r é o arco de medida angular 1 radiano, ou seja, $1\,\text{rad} = 2\,n$.
Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180^\circ = \pi\,\text{rad} = 2\pi\,n$.

13) Dividindo-se o cubo de um número pelos $\frac{2}{3}$ do seu quadrado, acha-se 18 para quociente. A raiz quadrada da terça parte desse número é:
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{n^3}{\left(\frac{2}{3}n^2\right)} = 18 \Leftrightarrow n = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12$$

$$\sqrt{\frac{n}{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

14) O valor da expressão $\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot(0,333...+1)-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\frac{\sqrt{25}}{2}+3}$ é

(A) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$

(B) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

(C) 0

(D) 1

(E) -1

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot(0,333...+1)-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\frac{\sqrt{25}}{2}+3}=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}}\right)^{\frac{5}{2}+3}=$$

$$=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot\frac{4}{3}-\frac{16}{9}}\right)^{\frac{11}{2}}=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{64}{27}-\frac{48}{27}}\right)^{\frac{11}{2}}=0$$

15) Sejam os conjuntos $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=6n+3,\ n\in\mathbb{Z}\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=3n,\ n\in\mathbb{Z}\}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Então $A\cap B$ é igual a:

(A) $\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ é par e múltiplo de } 3\}$

(B) $\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 3\}$

(C) $\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$

(D) $\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$

(E) $\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ é ímpar}\}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

O conjunto $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=3n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ é o conjunto dos múltiplos inteiros de 3.

Todos os elementos do conjunto $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=6n+3,\ n\in\mathbb{Z}\}$ são múltiplos de 3, então $A\subset B\Rightarrow A\cap B=A$.

$x\in A\Rightarrow x=6n+3=3\cdot(2n+1)\Rightarrow 3\mid x\ \wedge\ 2\nmid x$

$\Rightarrow A\cap B=A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 3\}$

16) A ligação entre as cidades A e B pode ser feita por dois caminhos C_1 e C_2. O caminho C_1 é mais curto, porém com mais tráfego e o caminho C_2 é 14% mais longo do que o C_1, mas possui tráfego menor, o que permite um aumento na velocidade de 20%. De quantos porcento diminuirá o tempo de viagem para ir de A até B usando o caminho C_2? (Dados: considere as velocidades sempre constantes e as maiores possíveis.)
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

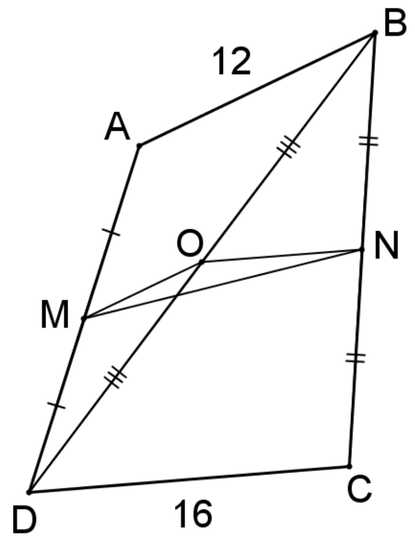
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$$C_1 : v_1 = v\,;\ d_1 = d \Rightarrow d_1 = v_1 \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{d}{v}$$
$$C_2 : v_2 = 1,2 \cdot v\,;\ d_2 = 1,14 \cdot d \Rightarrow d_2 = v_2 \cdot t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{1,14 \cdot d}{1,2 \cdot v} = 0,95 \cdot \frac{d}{v}$$
$$\Rightarrow t_2 = 0,95 \cdot t_1$$
Logo, o tempo de viagem diminui 5% usando o caminho C_2.

17) Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer onde os lados opostos NÃO são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremos M (ponto médio do lado AD) e N (ponto médio do lado BC) é:
(A) $12,5$
(B) 14
(C) $14,5$
(D) 16
(E) 17

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:



Tracemos a diagonal BD e seja O o seu ponto médio.

MO é base média do $\Delta ABD \Rightarrow MO = \dfrac{AB}{2} = 6$

NO é base média do $\Delta BCD \Rightarrow NO = \dfrac{CD}{2} = 8$

Aplicando a desigualdade triangular no ΔMNO, temos: $2 = NO - MO < MN < MO + NO = 14$.
Portanto, a única opção possível é $MN = 12,5$.

Note que o caso $MN = 14 = MO + NO$, ocorre quando O está sobre MN (ΔOMN degenerado). Dessa forma, teríamos $AB \,||\, MO \,||\, NO \,||\, CD$, o que contraria o enunciado.

18) Num gibi, um ser de outro planeta capturou em uma de suas viagens três tipos de animais. O primeiro tinha 4 patas e 2 chifres, o segundo, 2 patas e nenhum chifre e o terceiro 4 patas e 1 chifre. Quantos animais do terceiro tipo ele capturou, sabendo que existiam 227 cabeças, 782 patas e 303 chifres?

(A) 24
(B) 25
(C) 26
(D) 27
(E) 30

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Sejam x, y e z a quantidade de animais do primeiro, segundo e terceiro tipos, respectivamente. Calculando a quantidade de cabeças (supondo que cada animal possua somente uma cabeça), patas e chifres, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 227 \\ 4x + 2y + 4z = 782 \\ 2x + 0y + 1z = 303 \end{cases}$$

$4(x+y+z)-(4x+2y+4z)=4\cdot 227-782 \Leftrightarrow 2y=126 \Leftrightarrow y=63$
$x+y+z=227 \Rightarrow x+63+z=227 \Leftrightarrow x+z=164$
$(2x+z)-(x+z)=303-164 \Leftrightarrow x=139$
$139+z=164 \Leftrightarrow z=25$
Logo, ele capturou 25 animais do terceiro tipo.

19) Seja $N = xyzzyx$ um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então $N_1 + N_2$ é igual a
(A) 1008800
(B) 1108800
(C) 1156650
(D) 1157000
(E) 1209800

RESPOSTA: C

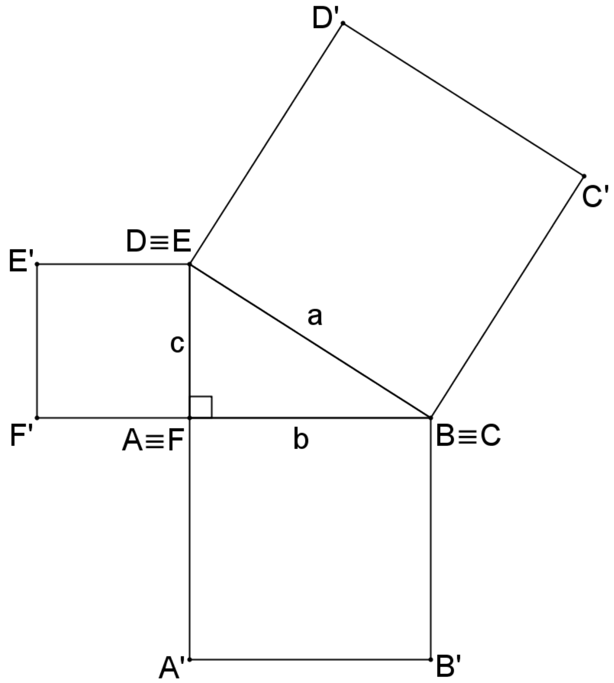
RESOLUÇÃO:
Se N_1 e N_2 são divisíveis por 25, então terminam em 00, 25, 50 ou 75.
Para que eles sejam os dois maiores números possíveis divisíveis por 25, então devem terminar em 75 e serão da forma $57zz75$.
Como N_1 e N_2 são também múltiplos de 3, a soma de seus algarismos $5+7+z+z+7+5=24+2z$ deve ser múltipla de 3, o que implica que z deve ser múltiplo de z. Assim, os dois maiores números com as propriedades pedidas são $N_1 = 579975$ e $N_2 = 576675$, e $N_1 + N_2 = 1156650$.

Observação: A alternativa (C) foi alterada, pois a questão não possuía alternativa correta da maneira como foi proposta originalmente.

20) Considere três quadrados de bases AB, CD e EF, respectivamente. Unindo-se o vértice A com F, B com C e D com E, observa-se que fica formado um triângulo retângulo. Pode-se afirmar que:
I − O perímetro do quadrado de maior lado é igual à soma dos perímetros dos outros dois quadrados.
II − A área do quadrado de maior lado é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados.
III − A diagonal do quadrado maior é igual à soma das diagonais dos outros dois quadrados.
Logo, apenas:
(A) A afirmativa I é verdadeira.
(B) A afirmativa II é verdadeira.
(C) A afirmativa III é verdadeira.
(D) As afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) As afirmativas II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



I – FALSA

Pela desigualdade triangular, temos:

$a < b + c \Leftrightarrow 4a < 4b + 4c \Leftrightarrow 2p(CDD'C') < 2p(ABB'A') + 2p(EFF'E')$

II – VERDADEIRA

Pelo teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow S(CDD'C') = S(ABB'A') + S(EFF'E')$

III – FALSA

Pela desigualdade triangular, temos:

$a < b + c \Leftrightarrow a\sqrt{2} < b\sqrt{2} + c\sqrt{2} \Leftrightarrow d(CDD'C') < d(ABB'A') + d(EFF'E')$,

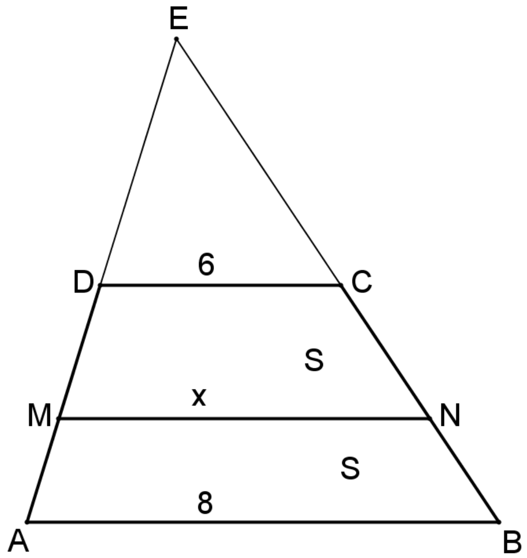
onde $d(\ )$ representa a medida da diagonal do quadrado cujos vértices estão entre parênteses.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1999/2000

1) Dado um trapézio qualquer, de bases 6 e 8, traça-se paralelamente às bases um segmento de medida x que o divide em outros dois trapézios equivalentes. Podemos afirmar que:
(A) $x = 6,5$
(B) $x = 4\sqrt{3}$
(C) $x = 7$
(D) $x = 5\sqrt{2}$
(E) $x = 7,5$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:



Seja o trapézio $ABCD$ da figura, prolongam-se os lados não paralelos do trapézio até o ponto E.
$AB \parallel MN \parallel CD \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta EMN \sim \Delta EDC$
Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos:

$$\frac{S_{EDC}}{6^2} = \frac{S_{EMN}}{x^2} = \frac{S_{EAB}}{8^2} = k$$

$$S_{ABNM} = S_{MNCD} \Leftrightarrow S_{EAB} - S_{EMN} = S_{EMN} - S_{EDC} \Leftrightarrow 2 \cdot S_{EMN} = S_{EAB} + S_{EDC}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot kx^2 = k \cdot 8^2 + k \cdot 6^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6^2 + 8^2}{2}} = 5\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

2) Dadas as afirmativas abaixo, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso:
( ) Se a altura AH de um triângulo ABC o divide em dois triângulos ABH e ACH semelhantes e não congruentes, então o triângulo ABC é retângulo.
( ) A mediana AM de um triângulo ABC o divide em dois triângulos AMB e AMC equivalentes.

( ) A bissetriz interna AD de um triângulo ABC o divide em dois triângulos ABD e ACD cujas áreas são, respectivamente, proporcionais aos lados AB e AC.

Assinale a alternativa correta.

(A) (V), (V), (V)

(B) (V), (V), (F)

(C) (V), (F), (V)

(D) (F), (V), (F)

(E) (V), (F), (F)

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

1ª) VERDADEIRA

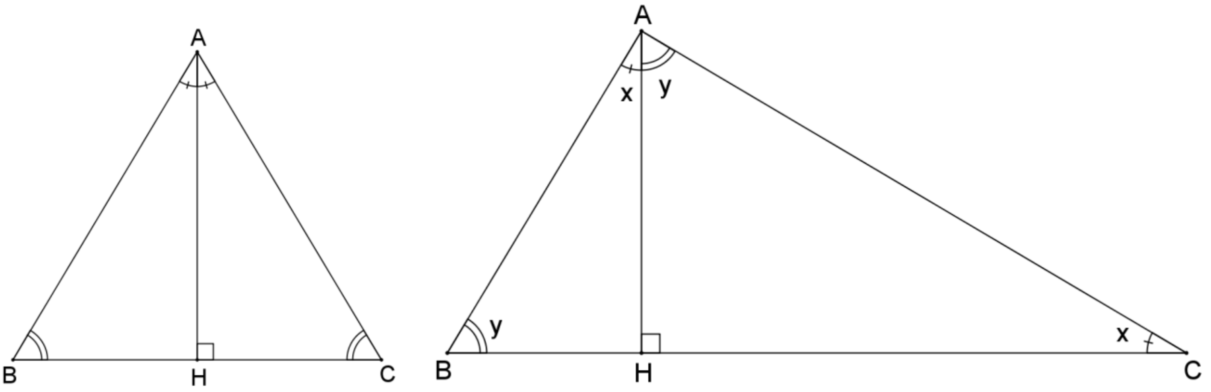
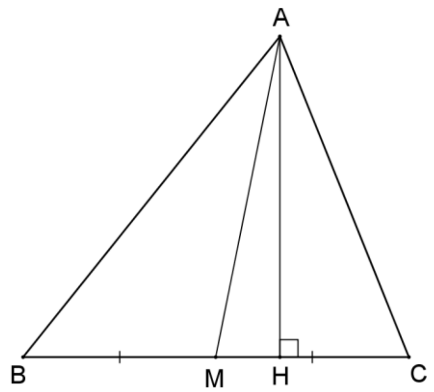


Figura 1 Figura 2

Se $\Delta ABH \sim \Delta ACH$, então os triângulos possuem todos os ângulos iguais. Isso pode acontecer de duas formas representadas nas figuras acima. Entretanto, na configuração da Figura 1, temos $\Delta ABH \equiv \Delta ACH \ (LAA_o)$, o que não satisfaz a hipótese. Logo, a disposição dos ângulos deve ser a da Figura 2. No ΔABC, temos $x + (x + y) + y = 180^\circ \Leftrightarrow x + y = 90^\circ$ e, portanto, $A = 90^\circ$. Portanto, o ΔABC é retângulo.

2ª) VERDADEIRA

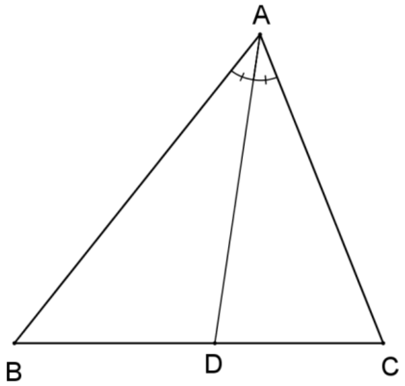


Sejam AM e AH, respectivamente, a mediana e a altura, relativas ao lado BC do ΔABC. Então, $BM = CM$ e AH é a altura relativa à base BM do ΔAMB e relativa à base CM do ΔAMC.

$$S_{AMB}=\frac{BM\cdot AH}{2}\ \wedge\ S_{AMC}=\frac{CM\cdot AH}{2}\Rightarrow\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}=\frac{\frac{BM\cdot AH}{2}}{\frac{CM\cdot AH}{2}}=1\Leftrightarrow S_{AMB}=S_{AMC}$$

Logo, os triângulos AMB e AMC são equivalentes.
Observe que, de modo análogo, demonstra-se que a razão entre áreas de triângulos de altura comum (mesmo vértice e bases sobre a mesma reta) é igual à razão entre suas bases.

3ª) VERDADEIRA



Seja AD a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do ΔABC, então, pelo teorema das bissetrizes, temos: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.
Logo, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$, ou seja, as áreas dos triângulos ABD e ACD são proporcionais aos lados AB e AC.

3) Considere um sistema de numeração, que usa os algarismos indo-arábicos e o valor posicional do algarismo do numeral, mas numera as ordens da esquerda para a direita. Por exemplo: no número 3452, tem-se:

1ª Ordem: 3
2ª Ordem: 4
3ª Ordem: 5
4ª Ordem: 2

Além disso, cada 7 unidades de uma ordem forma 1 unidade da ordem registrada imediatamente à direita. Com base nesse sistema, coloque (E) quando a operação for efetuada erradamente e (C) quando efetuada corretamente. Lendo o resultado da esquerda para a direita encontramos.

$$\begin{array}{r}245\\-461\\\hline 543\end{array}\qquad\begin{array}{r}620\\+555\\\hline 416\end{array}\qquad\begin{array}{r}360\\\times 4\\\hline 543\end{array}$$

( ) ( ) ( )

(A) E E E
(B) E C C
(C) C E C
(D) C C E
(E) C C C

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O sistema de numeração é de base 7, mas com as posições invertidas. Dessa forma, as operações devem ser feitas da esquerda para a direita.

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle +7} & 3{\scriptstyle +7} & 4 \\ & 2 & \cancel{4} & \cancel{5} \\ - & 4 & 6 & 1 \\ \hline & 5 & 4 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +1} \\ & 6 & 2 & 0 \\ + & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 4 & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +3} \\ & 3 & 6 & 0 \\ \times & & & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 3 \end{array}$$

Observe que nas operações de “pedir emprestado” vêm 7 e não 10. Além disso, ocorre “vai um” quando se completam 7 unidades.
Portanto, as três operações estão corretas.

4) Para dividir a fração $\frac{16}{3}$ por 32, um aluno subtraiu 14 do numerador. Por qual número deverá dividir o denominador para acertar o resultado?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{2}{4}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{6}{4}$

(E) 4

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\frac{16}{3}}{32} = \frac{16-14}{\left(\frac{3}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{16}{3\cdot 32} = \frac{2x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

5) Se as grandezas A e B são representadas numericamente por números naturais positivos, tais que a relação matemática entre elas é $A \cdot B^{-1} = 4$, coloque (V) verdadeiro ou (F) falso, assinalando a seguir, a alternativa que apresenta a sequência correta.

( ) A é diretamente proporcional a B, porque se aumentando o valor de B, o de A também aumenta.

( ) A é inversamente proporcional a B, porque o produto de A pelo inverso de B é constante.

( ) A não é diretamente proporcional a B.

( ) A não é inversamente proporcional a B.

(A) $(\text{V}), (\text{F}), (\text{F}), (\text{V})$
(B) $(\text{F}), (\text{V}), (\text{V}), (\text{F})$
(C) $(\text{F}), (\text{F}), (\text{V}), (\text{F})$
(D) $(\text{F}), (\text{F}), (\text{F}), (\text{V})$
(E) $(\text{F}), (\text{F}), (\text{V}), (\text{V})$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$$A \cdot B^{-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 4 \Leftrightarrow A = 4 \cdot B$$
Portanto, A e B são diretamente proporcionais.
1ª) F: A condição apresentada garante apenas que a relação entre A e B é uma função crescente. Para que A e B sejam diretamente proporcionais, é necessário e suficiente que, aumentando-se B, A aumente na mesma proporção, ou seja, multiplicando-se B por um número real, A também fique multiplicado por esse número real.
2ª) F
3ª) F
4ª) V

6) São dadas as afirmativas abaixo no conjunto dos números reais:
(1) $\sqrt{(-2)^2} = -2$
(2) $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}} = \dfrac{\sqrt{(-1)\cdot(4)}}{\sqrt{(-1)\cdot(9)}} = \dfrac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$
(3) $\left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$
(4) $\sqrt{3+2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
Assinale a alternativa correta:
(A) Todas as afirmativas são falsas.
(B) Somente 2 é verdadeira.
(C) 1 e 2 são verdadeiras.
(D) 1, 2 e 3 são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são verdadeiras

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
(1) FALSA: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Observe que $\sqrt{x} \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$ e $\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}_-^*$.
(2) FALSA: $\sqrt{-4}$ e $\sqrt{-9}$ não são números reais.
(3) FALSA: $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$
(4) FALSA:
$$5 \neq 3 + 2\sqrt{6} + 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3+2}\right)^2 \neq \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{3+2} \neq \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

7) Sejam 30 moedas, algumas de 1 centavo e outras de 5 centavos, onde cada uma tem, respectivamente, $13,5$ e $18,5$ milímetros de raio. Alinhando-se estas moedas, isto é, colocando-se uma do lado da outra, obtém-se o comprimento de 1 metro. O valor total das moedas é:

(A) R\$ 0,92
(B) R\$ 1,06
(C) R\$ 1,34
(D) R\$ 2,00
(E) R\$ 2,08

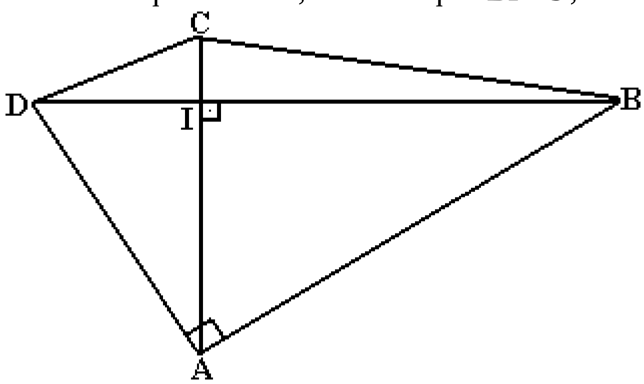
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja x a quantidade de moedas de 1 centavo, então há $(30-x)$ moedas de 5 centavos.
Alinhando-se as moedas, cada uma contribui com um comprimento igual ao seu diâmetro para o comprimento total de $1\text{ m}=1000\text{ mm}$. As moedas de 1 centavo possuem diâmetro $2\cdot 13,5=27\text{ mm}$ e as moedas de 5 centavos possuem diâmetro $2\cdot 18,5=37\text{ mm}$. Assim, temos:

$27\cdot x+37\cdot(30-x)=1000 \Leftrightarrow -10x=-110 \Leftrightarrow x=11.$

Portanto, o valor total das moedas é $0,01\cdot 11+0,05\cdot 19=0,11+0,95=1,06$ reais.

8) No quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo, o ângulo $B\hat{A}D$ mede $90°$ e as diagonais AC e BD são perpendiculares. Qual é a área desse quadrilátero, sabendo que $BI=9$, $DI=4$ e $CI=2$?



(A) 26
(B) 39
(C) 52
(D) 65
(E) 104

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

No triângulo retângulo ABD, temos: $AI^2 = BI \cdot DI = 9 \cdot 4 \Rightarrow AI = 6$.

$$S_{ABCD} = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{CDI} + S_{ADI} = \frac{AI \cdot BI}{2} + \frac{BI \cdot CI}{2} + \frac{CI \cdot DI}{2} + \frac{DI \cdot AI}{2} =$$

$$= \frac{6 \cdot 9}{2} + \frac{9 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2} = 52 \text{ unidades de área}$$

Observe que, no cálculo de da medida de AI, utilizamos uma relação métrica válida para triângulos retângulos que estabelece que “o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa”.

9) Para registrar o resultado da operação $2^{101} \cdot 5^{97}$, o número de dígitos necessários é:
(A) 96
(B) 97
(C) 98
(D) 99
(E) 100

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$2^{101} \cdot 5^{97} = 2^{4+97} \cdot 5^{97} = 2^4 \cdot 2^{97} \cdot 5^{97} = 2^4 \cdot (2 \cdot 5)^{97} = 16 \cdot 10^{97}$$

Esse número é representado pelos algarismos 1 e 6 seguidos por 97 zeros, ou seja, é um número de $2 + 97 = 99$ algarismos.

10) Um fazendeiro repartiu seu rebanho de 240 cabeças de boi entre seus três filhos da seguinte forma: o primeiro recebeu $2/3$ do segundo, e o terceiro tanto quanto o primeiro mais o segundo. Qual o número de cabeças de boi que o primeiro recebeu?
(A) 12
(B) 30
(C) 36
(D) 48
(E) 54

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Supondo que o segundo filho recebeu $3x$ cabeças de boi, o primeiro recebeu $\frac{2}{3} \cdot 3x = 2x$ cabeças de boi e o terceiro, $2x + 3x = 5x$.

Como o rebanho tem 240 cabeças de boi, então $2x + 3x + 5x = 240 \Leftrightarrow x = 24$.

Logo, o primeiro filho recebeu $2x = 2 \cdot 24 = 48$ cabeças de boi.

11) Sabendo que $\sqrt[3]{x^2} = 1999^6$, $\sqrt{y} = 1999^4$ e $\sqrt[5]{z^4} = 1999^8$, ($x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$), o valor de $(x \cdot y \cdot z)^{-\frac{1}{3}}$ é:

(A) 1999^9

(B) 1999^6

(C) $1999^{\frac{1}{9}}$

(D) 1999^{-6}

(E) 1999^{-9}

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$x > 0 \text{ e } \sqrt[3]{x^2} = 1999^6 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 1999^6 \Leftrightarrow x = \left(1999^6\right)^{\frac{3}{2}} = 1999^9$$

$$y > 0 \text{ e } \sqrt{y} = 1999^4 \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = 1999^4 \Leftrightarrow y = \left(1999^4\right)^2 = 1999^8$$

$$z > 0 \text{ e } \sqrt[5]{z^4} = 1999^8 \Rightarrow z^{\frac{4}{5}} = 1999^8 \Leftrightarrow z = \left(1999^8\right)^{\frac{5}{4}} = 1999^{10}$$

$$(x \cdot y \cdot z)^{-\frac{1}{3}} = \left(1999^9 \cdot 1999^8 \cdot 1999^{10}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(1999^{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1999^{-9}$$

12) Dados os casos clássicos de congruência de triângulos A.L.A., L.A.L., L.L.L., L.A.A_o., onde L = Lado, A = Ângulo, A_o = Ângulo oposto ao lado dado, complete corretamente as lacunas das sentenças abaixo e assinale a alternativa correta.

1 − Para se mostrar que os pontos da mediatriz de um segmento AB são equidistantes dos extremos A e B, usa-se o caso _________ de congruência de triângulos.

2 − Para se mostrar que a bissetriz de um ângulo $A\hat{B}C$ tem seus pontos equidistantes dos lados BA e BC desse ângulo, sem usar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, usa-se o caso _______ de congruência de triângulos.

(A) L.A.L. / A.L.A.

(B) L.A.L. / L.A.A_o.

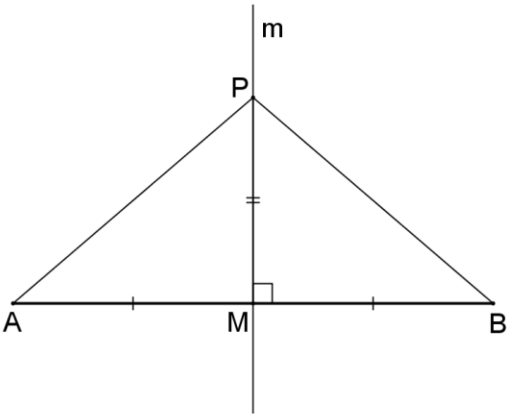
(C) L.L.L. / L.A.A_o.

(D) L.A.A_o. / L.A.L.

(E) A.L.A. / L.L.L.

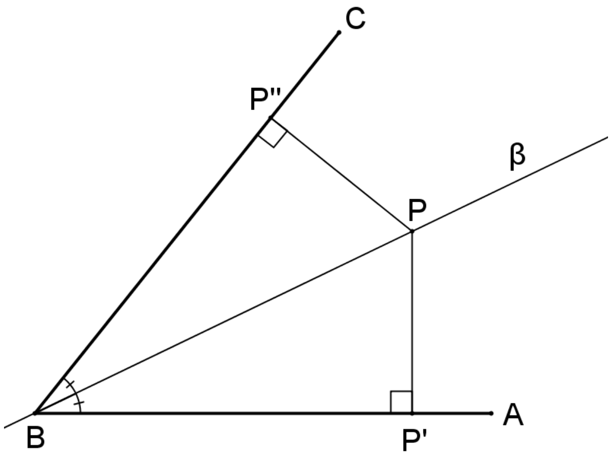
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
1 – L.A.L.



$$P \in m \Rightarrow \begin{cases} PM \text{ lado comum} \\ P\hat{M}A = P\hat{M}B = 90^\circ \\ AM = MB \end{cases} \Rightarrow \Delta PMA \equiv \Delta PMB \ (LAL) \Rightarrow PA = PB$$

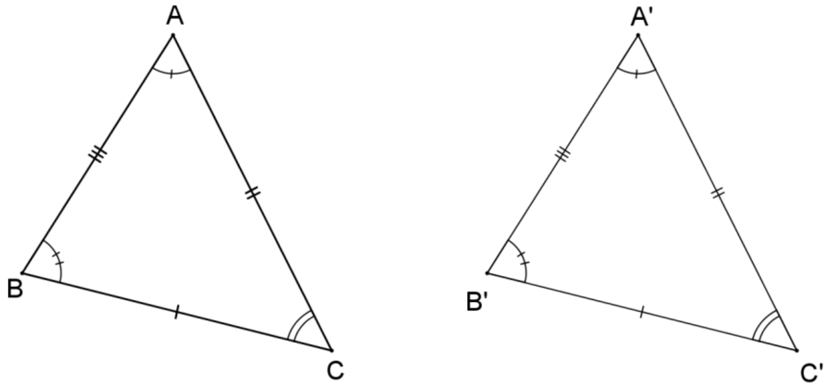
2 – $L.A.A_o$.



$$P \in \beta \Rightarrow \begin{cases} PB \text{ lado comum} \\ P\hat{B}P' = P\hat{B}P'' \\ P\hat{P}'B = P\hat{P}''B = 90^\circ \end{cases} \overset{(LAA_o)}{\Rightarrow} \Delta PBP' \equiv \Delta PBP'' \Rightarrow PP' = PP''$$

NOTA 2: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

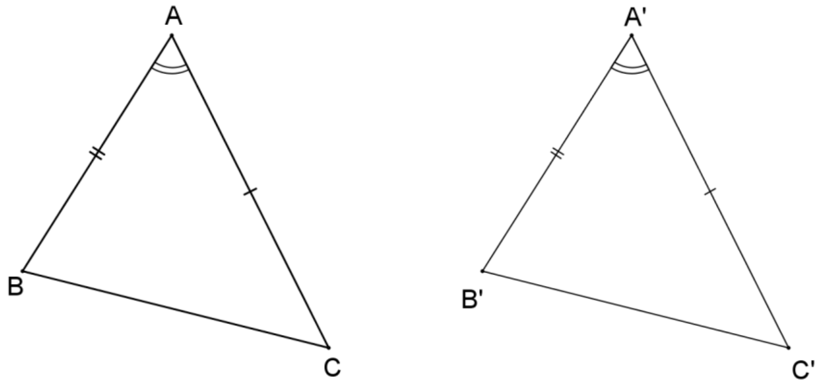
Dois triângulos são ditos congruentes (símbolo $\equiv$) se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que: seus lados são ordenadamente congruentes e seus ângulos são ordenadamente congruentes.



$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

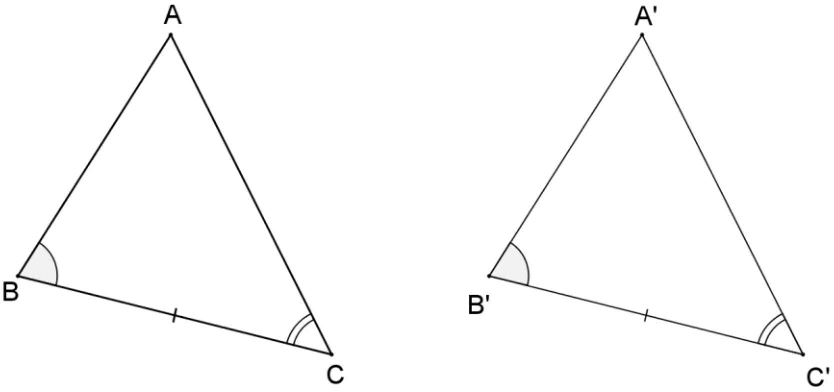
Critérios de congruência de triângulos

Critério Lado – Ângulo – Lado (L.A.L.):
Se dois lados de um triângulo e o ângulo por eles formado forem congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo por eles formados, respectivamente, então esses dois triângulos são congruentes (postulado).



$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{matrix}\right\} \overset{(L.A.L.)}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

Critério Ângulo – Lado – Ângulo (A.L.A.):
Se um dos lados de um triângulo e os ângulos adjacentes a esse lado forem congruentes a um dos lados de outro triângulo e aos ângulos adjacentes a esse lado, respectivamente, então esses dois triângulos são congruentes (teorema).



$$\left.\begin{array}{c}\hat{B}=\hat{B}'\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right\}\overset{(\text{A.L.A.})}{\Rightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right.$$

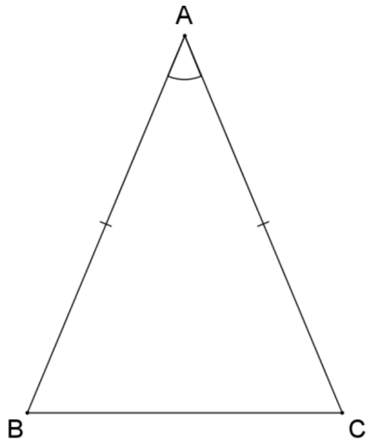
Demonstração:

Se $\overline{AC}=\overline{A'C'}$, então temos: $\left.\begin{array}{c}\overline{AC}=\overline{A'C'}\\ \hat{C}=\hat{C}'\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\end{array}\right\}\overset{(\text{L.A.L.})}{\Rightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$.

Se $\overline{AC}\neq\overline{A'C'}$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{AC}>\overline{A'C'}$. Marca-se sobre $\overline{AC}$ um ponto D tal que $\overline{DC}=\overline{A'C'}$. Por L.A.L., temos $\Delta DBC\equiv\Delta A'B'C'$ e, portanto, $C\hat{B}D=C'\hat{B}'A'=C\hat{B}A$, donde $D\equiv A$ e $\overline{AC}=\overline{DC}=\overline{A'C'}$, o que contradiz a hipótese inicial.
Logo, sempre que $\hat{B}=\hat{B}'$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ e $\hat{C}=\hat{C}'$, temos $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ e, consequentemente, $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$, como queríamos demonstrar.

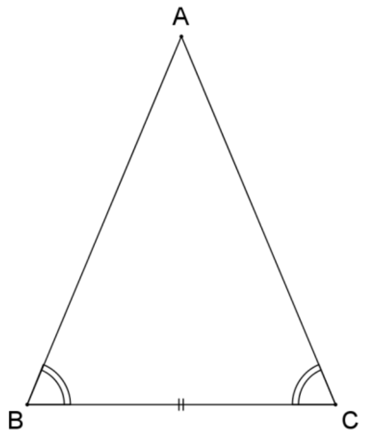
Teorema do triângulo isósceles:
Em um triângulo ABC qualquer, $\overline{AB}=\overline{AC}$ se, e somente se, $\hat{B}=\hat{C}$.

Demonstração:
(Ida) Supondo $\overline{AB}=\overline{AC}$ e associando o ΔABC a ele mesmo somente com a mudança da ordem dos vértices, temos:



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB}=\overline{AC}\\ B\hat{A}C=C\hat{A}B\\ \overline{AC}=\overline{AB}\end{array}\right\}\overset{(L.A.L.)}{\Rightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta ACB\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}$$

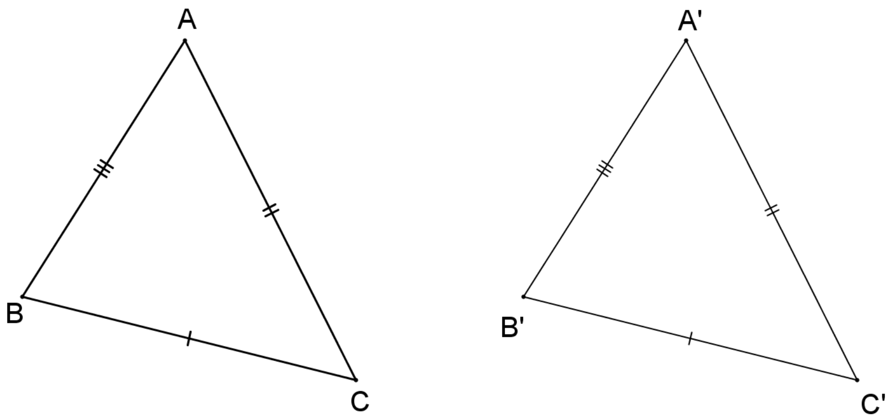
(Volta) Supondo $\hat{B}=\hat{C}$ e associando o ΔABC a ele mesmo somente com a mudança da ordem dos vértices, temos:



$$\left.\begin{array}{r}C\hat{B}A=B\hat{C}A\\ \overline{BC}=\overline{CB}\\ B\hat{C}A=C\hat{B}A\end{array}\right\}\overset{(A.L.A.)}{\Rightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta ACB\Rightarrow\overline{AB}=\overline{AC}$$

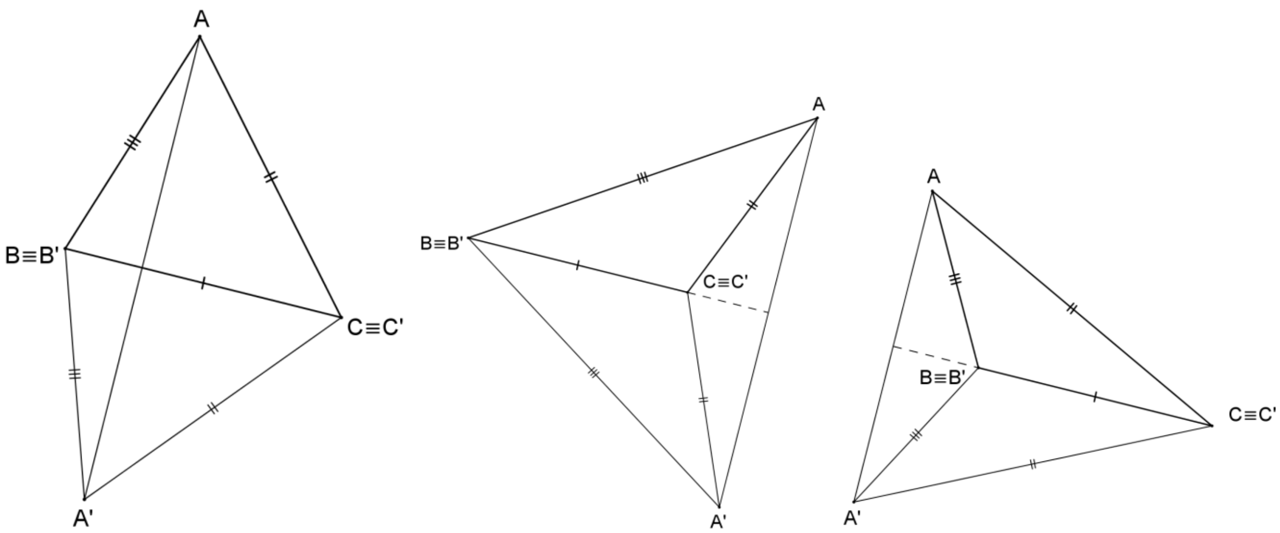
Corolário: Um triângulo é equilátero (isto é, com todos os lados congruentes) se, e somente se, é equiângulo (isto é, seus ângulos são todos congruentes). Portanto, um triângulo equilátero possui três ângulos iguais a 60°.

Critério Lado – Lado – Lado (L.L.L.):
Se os três lados de um triângulo são respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então esses dois triângulos são congruentes (teorema).



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\end{array}\right\}\overset{(L.L.L.)}{\Rightarrow}\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right.$$

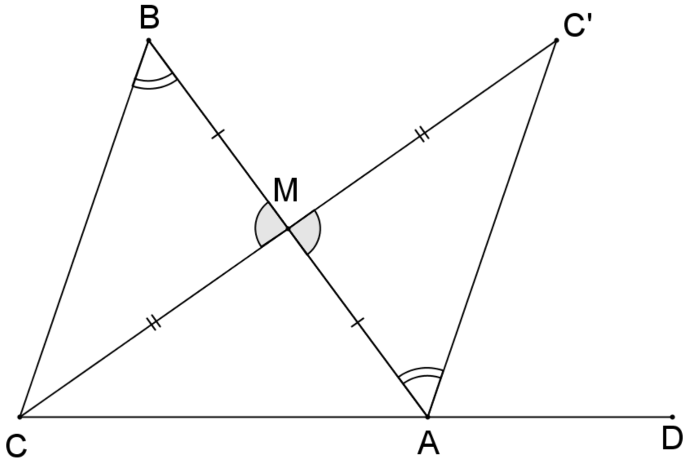
Demonstração:
Como $\overline{BC}=\overline{B'C'}$, vamos fazer coincidir $B\equiv B'$ e $C\equiv C'$ com A e A' em lados opostos de $\overline{BC}=\overline{B'C'}$. Há três casos possíveis, como mostrado nas figuras a seguir.



Vamos analisar o caso representado na primeira figura. Os outros dois casos podem ser abordados de forma análoga.
O $\Delta ABA'$ é isósceles, então $B\hat{A}A'=B\hat{A}'A$, e o $\Delta ACA'$ também é isósceles, então $C\hat{A}A'=C\hat{A}'A$.
Portanto, $B\hat{A}C=B\hat{A}A'+C\hat{A}A'=B\hat{A}'A+C\hat{A}'A=B\hat{A}'C=B'\hat{A}'C'$.
Logo, temos $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\hat{A}=\hat{A}'$ e $\overline{AC}=\overline{A'C'}$, o que, pelo critério L.A.L., implica $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$.

Teorema: Qualquer ângulo externo é maior que os ângulos externos não adjacentes.

Demonstração:



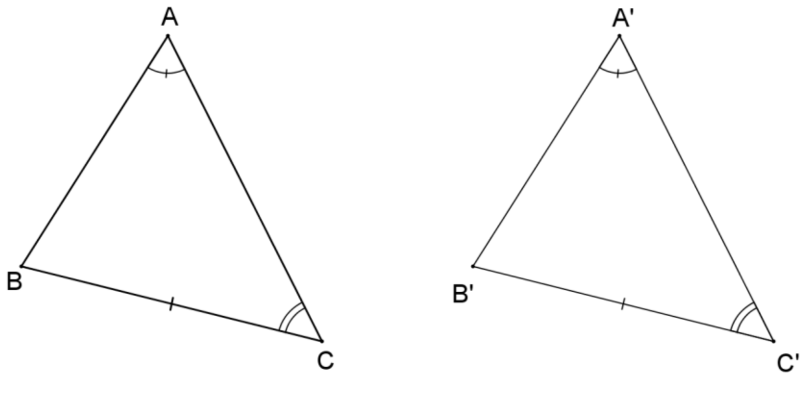
Vamos provar que o ângulo externo $B\hat{A}D$ é maior que $\hat{B}$. A demonstração de que $B\hat{A}D$ é maior que $\hat{C}$ é completamente análoga.

Seja M ponto médio de $\overline{AB}$. Prolonga-se $\overline{CM}$ até C' tal que $\overline{CM} = \overline{MC'}$.

Como $\overline{CM} = \overline{C'M}$, $B\hat{M}C = A\hat{M}C'$ e $\overline{BM} = \overline{AM}$, então, pelo critério $L.A.L.$, $\Delta BMC \equiv \Delta AMC'$, o que implica $M\hat{A}C' = M\hat{B}C$.

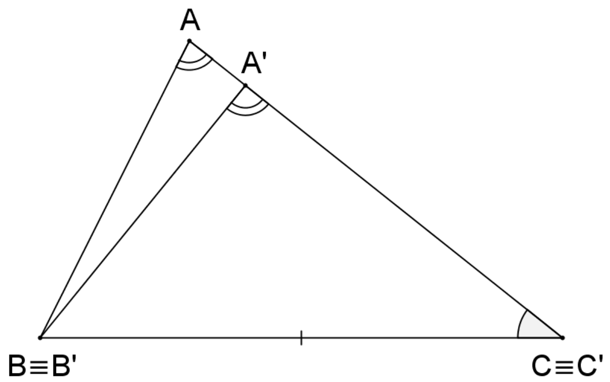
Mas C' é um ponto interior ao ângulo $B\hat{A}D$, então $B\hat{A}D = B\hat{A}C' + C'\hat{A}D > B\hat{A}C' = \hat{B}$, como queríamos demonstrar.

Critério Lado – Ângulo – Ângulo oposto (L.A.A$_o$.):
Se um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, de dois triângulos são ordenadamente congruentes, então esses dois triângulos são congruentes.



$$\left.\begin{array}{c}\overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \hat{A} = \hat{A}'\end{array}\right\} \overset{(L.A.A_o.)}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\hat{B} = \hat{B}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'}\end{array}\right.$$

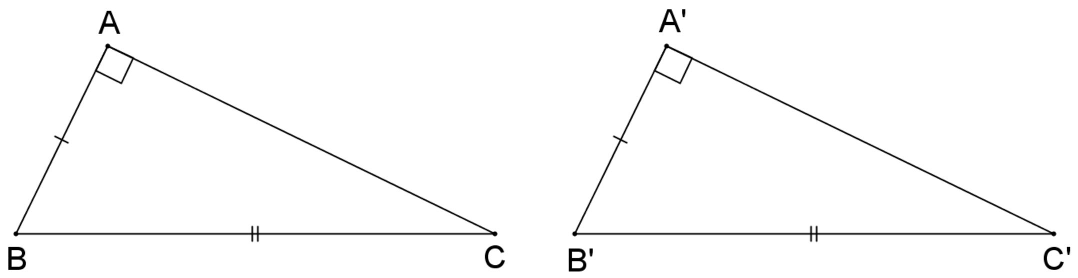
Demonstração:



Supondo por absurdo que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, e que ΔABC e $\Delta A'B'C'$ não são congruentes, o que implica $\overline{AC} \neq \overline{A'C'}$ (pois, se fossem iguais os triângulos seriam congruentes pelo critério L.A.L.).

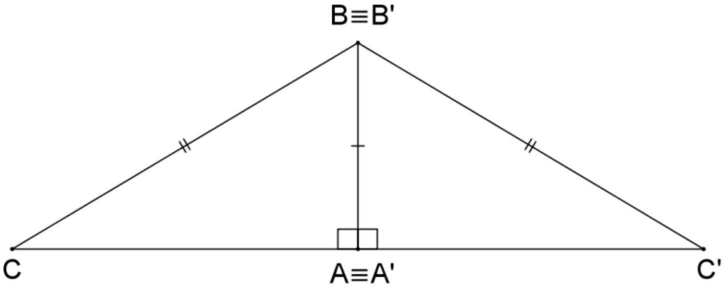
Supondo ainda, sem perda de generalidade, que $\overline{AC} > \overline{A'C'}$. Vamos coincidir $B \equiv B'$ e $C \equiv C'$. Como $\hat{C} = \hat{C}'$, então o ponto A' está sobre o lado $\overline{AC}$. Mas, $B\hat{A}'C$ é um ângulo externo do $\Delta ABA'$, não adjacente ao ângulo $B\hat{A}A'$, então $B\hat{A}'C = \hat{A}' > \hat{A} = B\hat{A}A'$, o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, como queríamos demonstrar.

Critério especial de congruência de triângulos retângulos:
Se dois triângulos retângulos têm um cateto e a hipotenusa, respectivamente, congruentes, então esses dois triângulos são congruentes.



$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}\right.$$

Demonstração:



Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, vamos fazer coincidir $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$ com C e C' em lados opostos de $\overline{AB}$.
Como $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, então o $\Delta CBC'$ é isósceles e $\hat{C} = \hat{C}'$.

$$\left.\begin{array}{c} \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \end{array}\right\} \overset{(LAA_o)}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

****

13) Em uma circunferência de raio R está inscrito um pentadecágono regular P. Coloque (V) verdadeiro ou (F) falso nas afirmativas abaixo.
( ) P tem diagonal que mede $2R$.
( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$.
( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$.
( ) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
Assinale a alternativa correta.
(A) (V) (V) (F) (F)
(B) (F) (V) (V) (F)
(C) (F) (F) (V) (V)
(D) (V) (V) (V) (F)
(E) (V) (V) (V) (V)

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
O ângulo central do pentadecágono regular é $\frac{360^o}{15} = 24^o$. Logo, suas diagonais são cordas que determinam arcos múltiplos de 24^o.
(F) P tem diagonal que mede $2R$.
$2R$ é o diâmetro da circunferência e determina um arco de 180^o. Como $\frac{180^o}{24^o} = 7{,}5 \notin \mathbb{Z}$, o pentadecágono não possui uma diagonal de medida $2R$.
(F) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$.

$R\sqrt{2}$ é o lado do quadrado inscrito na circunferência e determina um arco de 90°. Como $\frac{90^\circ}{24^\circ}=3,75\notin\mathbb{Z}$, o pentadecágono não possui uma diagonal de medida $R\sqrt{2}$.

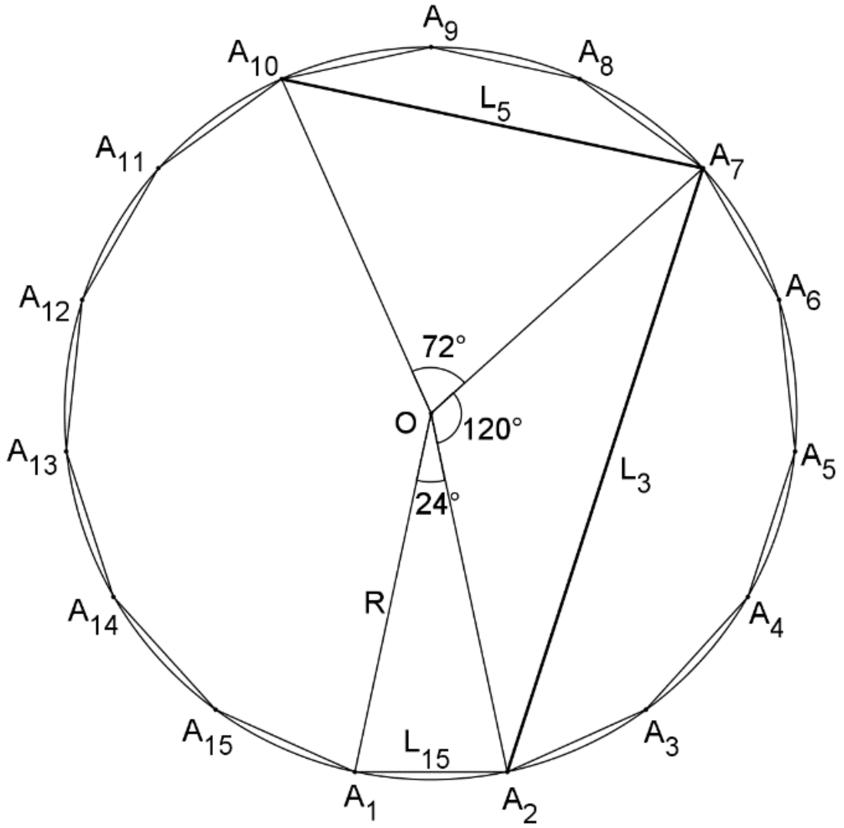
(V) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$.

$R\sqrt{3}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência e determina um arco de 120°. Como $\frac{120^\circ}{24^\circ}=5\in\mathbb{Z}$, o pentadecágono possui uma diagonal de medida $R\sqrt{3}$.

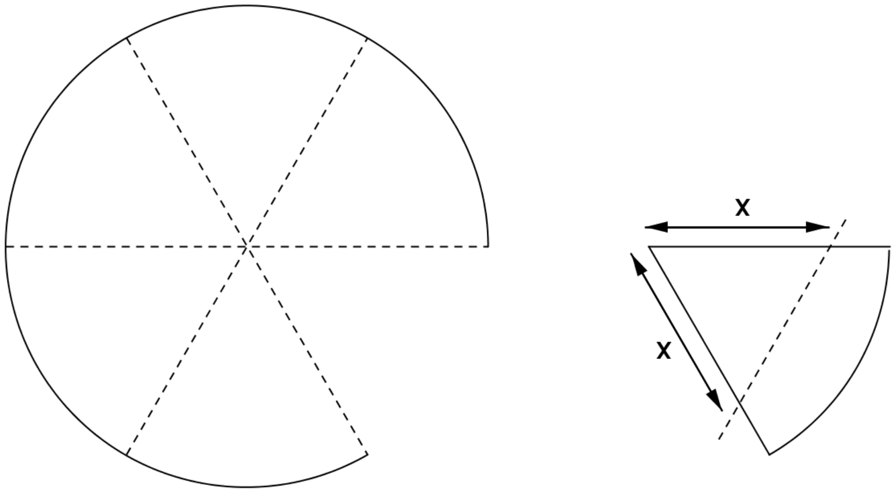
(V) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ é o lado do pentágono regular convexo inscrito na circunferência e determina um arco de 72°. Como $\frac{72^\circ}{24^\circ}=3\in\mathbb{Z}$, o pentadecágono possui uma diagonal de medida $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

A figura a seguir, representa as conclusões obtidas.



14) Uma pizza circular de raio 30 cm foi dividida em 6 partes iguais para seis pessoas. Contudo, uma das pessoas resolveu repartir ao meio o seu pedaço, como mostra a figura acima. O valor de x é:



(A) $10\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(B) $10\sqrt{\frac{3\pi}{3}}$

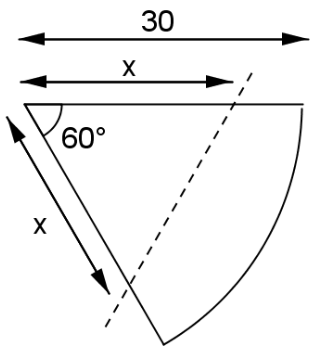
(C) $10\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

(D) $10\sqrt{\frac{3\pi}{\sqrt{3}}}$

(E) $10\sqrt{\frac{5\pi}{\sqrt{3}}}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Cada uma das 6 fatias é um setor circular de 60°. Para dividir o pedaço ao meio, basta observar que o triângulo isósceles formado tem área igual à metade da área do setor circular.



$$S_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} S_{\text{setor circular}} \Leftrightarrow \frac{x \cdot x}{2} \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{6} \Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{900\pi}{6} \Leftrightarrow x^2 = \frac{300\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = 10\sqrt{\frac{3\pi}{\sqrt{3}}} \text{ u.c.}$$

15) Sobre a equação $1999x^2 - 2000x - 2001 = 0$, a afirmação correta é:
(A) tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.
(B) tem duas raízes simétricas.
(C) não tem raízes reais.
(D) tem duas raízes positivas.
(E) Tem duas raízes negativas.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
O discriminante da equação do $2°$ grau é dado por:
$\Delta = (-2000)^2 - 4 \cdot 1999 \cdot (-2001) = 2000^2 + 4 \cdot 1999 \cdot 2001 > 0$.
Logo, a equação possui duas raízes reais distintas.
Como a soma das raízes é $S = \frac{-(-2000)}{1999} = \frac{2000}{1999} > 0$ e o produto é $P = \frac{-2001}{1999} < 0$, a equação possui duas raízes de sinais contrários, sendo a positiva a de maior módulo.
Assim, podemos afirmar que a equação tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.

16) Se $2x - 3y - z = 0$ e $x + 3y - 14z = 0$, com $z \neq 0$, o valor da expressão $\frac{x^2 + 3xy}{y^2 + z^2}$ é:

(A) 7
(B) 2
(C) 0
(D) $-\frac{20}{17}$
(E) -2

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 3y - 14z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = z \\ x + 3y = 14z \end{cases}$$

$$(2x - 3y) + (x + 3y) = z + 14z \Leftrightarrow 3x = 15z \Leftrightarrow x = 5z$$

$$x + 3y = 14z \Rightarrow 5z + 3y = 14z \Leftrightarrow 3y = 9z \Leftrightarrow y = 3z$$

$$\frac{x^2 + 3xy}{y^2 + z^2} = \frac{(5z)^2 + 3 \cdot (5z) \cdot (3z)}{(3z)^2 + z^2} = \frac{70z^2}{10z^2} = 7$$

17) Uma equação biquadrada de coeficientes inteiros, cuja soma desses coeficientes é zero, tem uma das raízes igual a $\sqrt{3}$. O produto das raízes dessa equação é:
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

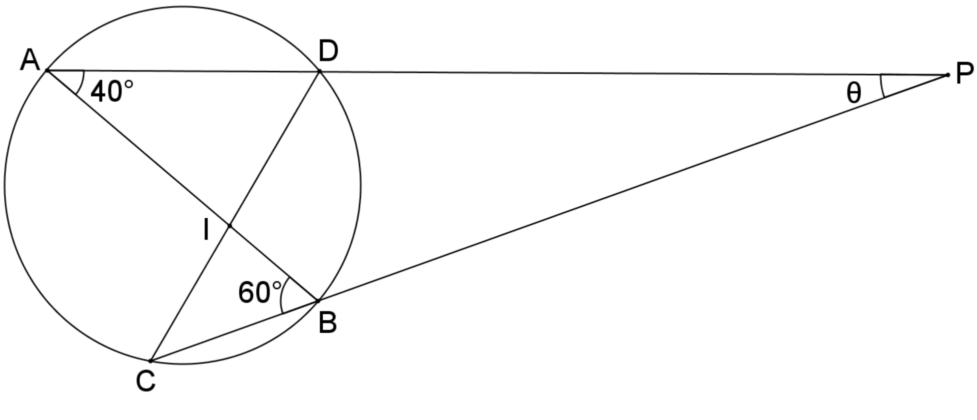
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Como $\sqrt{3}$ é raiz da equação biquadrada, então $-\sqrt{3}$ também é raiz dessa equação.
Como a soma dos coeficientes da equação biquadrada é zero, então 1 é raiz dessa equação.
Como 1 é raiz da equação biquadrada, então -1 também é raiz dessa equação.
Logo, o conjunto solução da equação biquadrada é $S=\{-\sqrt{3},\sqrt{3},-1,1\}$ e o produto das raízes é igual a $(-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3})\cdot(-1)\cdot 1=3$.

18) Num círculo, duas cordas AB e CD se interceptam no ponto I interno ao círculo. O ângulo $D\hat{A}I$ mede 40° e o ângulo $C\hat{B}I$ mede 60°. Os prolongamentos de AD e CB encontram-se num ponto P externo ao círculo. O ângulo $A\hat{P}C$ mede:
(A) 10°
(B) 20°
(C) 30°
(D) 40°
(E) 50°

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



A figura anterior representa a situação descrita no enunciado, onde $\theta = A\hat{P}C$. O ângulo $A\hat{B}C = 60^\circ$ é ângulo externo do ΔABP, então $A\hat{B}C = B\hat{A}P + B\hat{P}A \Leftrightarrow 60^\circ = 40^\circ + \theta \Leftrightarrow \theta = 20^\circ$.

19) As vendas de uma empresa foram, em 1998, 60% superiores às vendas de 1997. Em relação a 1998, as vendas de 1997 foram inferiores em:

(A) $62,5\%$

(B) 60%

(C) $57,5\%$

(D) $44,5\%$

(E) $37,5\%$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Sejam V_1 e V_2 as vendas de 1997 e 1998, respectivamente, então: $V_2 = (1+60\%)\cdot V_1 = 1,6\cdot V_1$.

Para calcular em quanto as vendas de 1997 foram inferiores, em relação a 1998, devemos dividir a variação $V_1 - V_2$ pelas vendas de 1998, V_2. Assim, temos:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_2} = \frac{V_1 - 1,6\cdot V_1}{1,6\cdot V_1} = \frac{-0,6}{1,6} = -0,375 = -37,5\%,$$

onde o sinal de menos indica que o valor de 1997 é inferior ao de 1998.

20) O número de triângulos que podemos construir com lados medindo 5, 8 e x, onde x é um número inteiro positivo, de tal forma de que o seu ortocentro seja interno ao triângulo é:

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 7

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Pela desigualdade triangular, temos: $8-5 < x < 8+5 \Leftrightarrow 3 < x < 13$.

Como o ortocentro é interno ao triângulo, então o triângulo é acutângulo ou retângulo.

Para que o triângulo seja acutângulo ou retângulo, pela síntese de Clairaut, temos:

$x < 8$: $x^2 + 5^2 \geq 8^2 \Leftrightarrow x^2 \geq 49 \Leftrightarrow 7 \leq x < 8 \Rightarrow x = 7$

$x \geq 8$: $5^2 + 8^2 > x^2 \Leftrightarrow x^2 < 89 \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 9 \Rightarrow x = 8 \vee x = 9$

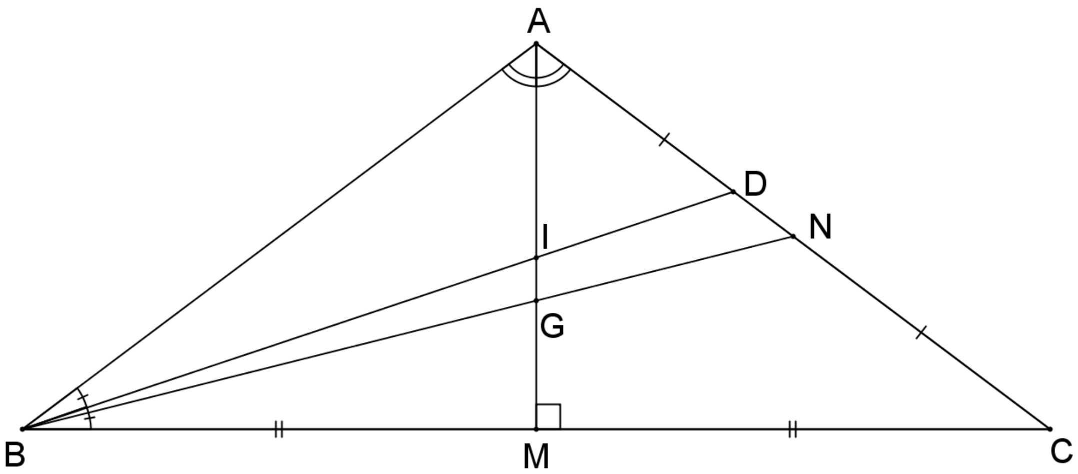
Logo, há 3 triângulos que satisfazem às condições do enunciado.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1998/1999

1) Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5 cm, a base medindo 8 cm. A distância entre o seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:
(A) $0,1\text{ cm}$
(B) $0,3\text{ cm}$
(C) $0,5\text{ cm}$
(D) $0,7\text{ cm}$
(E) $0,9\text{ cm}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



A figura acima representa o triângulo descrito no enunciado, onde $BC = 8\text{ cm}$ e $AB = AC = 5\text{ cm}$.
As cevianas AM e BN são medianas do ΔABC e G é o seu baricentro.
AM e BD são bissetrizes internas do ΔABC e I é o seu incentro.
Aplicando-se o teorema de Pitágoras no ΔABM, temos:
$AB^2 = AM^2 + BM^2 \Leftrightarrow 5^2 = AM^2 + 4^2 \Leftrightarrow AM = 3$.
O baricentro G divide a mediana AM na razão 2 para 1. Assim, temos:
$$\frac{AG}{2} = \frac{GM}{1} = \frac{AG+GM}{2+1} = \frac{AM}{3} = 1 \Leftrightarrow AG = 2 \wedge GM = 1.$$
Aplicando-se o teorema das bissetrizes no ΔABM, temos:
$$\frac{AI}{AB} = \frac{IM}{BM} \Leftrightarrow \frac{AI}{5} = \frac{IM}{4} = \frac{AI+IM}{5+4} = \frac{AM}{9} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AI = \frac{5}{3} \wedge IM = \frac{4}{3}.$$
Logo, a distância entre o incentro e o baricentro do ΔABC é
$$IG = IM - GM = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} = 0,333\ldots \approx 0,3\text{ cm}.$$

2) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é um número que está entre:
(A) 0 e 2.
(B) 2 e 4.
(C) 4 e 6.
(D) 6 e 8.
(E) 8 e 10.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}-\frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}-\frac{2\sqrt[3]{4}}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}<\sqrt{6,25}+\sqrt{4}-\sqrt[3]{3,375}=2,5+2-1,5=3$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}>\sqrt{4,84}+\sqrt{2,56}-\sqrt[3]{4,096}=2,2+1,6-1,6=2,2$$

$$\Rightarrow 2<2,2<\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}<3<4$$

3) Tem-se 500 ml de soro glicosado a 5%. Quando se acrescentam 10 (dez) ampolas de 10 ml cada de glicose a 23%, a concentração do volume final do soro glicosado será:
(A) 6%
(B) $6,3\%$
(C) $7,0\%$
(D) $7,3\%$
(E) $8,0\%$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Em 500 ml de soro glicosado a 5%, há $5\%\cdot 500=\frac{5}{100}\cdot 500=25\text{ ml}$ de glicose.

Em 10 ampolas de 10 ml de glicose a 23%, há $23\%\cdot 100=\frac{23}{100}\cdot 100=23\text{ ml}$ de glicose.

No soro glicosado resultante, o volume total é $500+100=600\text{ ml}$ e o volume de glicose é $25+23=48\text{ ml}$. Assim, a sua concentração é $\frac{48}{600}=8\%$.

Note que a concentração da mistura é a **média aritmética ponderada** das concentrações dos componentes, sendo os volumes dos componentes os pesos. Assim, o problema poderia ser resolvido diretamente como segue: $\frac{500 \cdot 5\% + 100 \cdot 23\%}{500+100} = \frac{25+23}{600} = 8\%$.

NOTA 3: MISTURAS

Problemas de misturas abordam a relação entre as concentrações dos componentes nas misturas originais e, após sua reunião, as concentrações na mistura resultante.
A fim de resolver esses problemas, basta calcular a massa ou volume de cada um dos componentes nas misturas originais e somá-los para obter a quantidade de cada componente na mistura resultante. Com essa informação, pode-se calcular que percentual cada componente representa na mistura resultante.
A seguir, vamos analisar algumas situações exemplificativas.

Misturando-se x gramas da substância A com y gramas da substância B, obtém-se uma mistura com $\frac{x}{x+y} \cdot 100\%$ da substância A e $\frac{y}{x+y} \cdot 100\%$ da substância B.

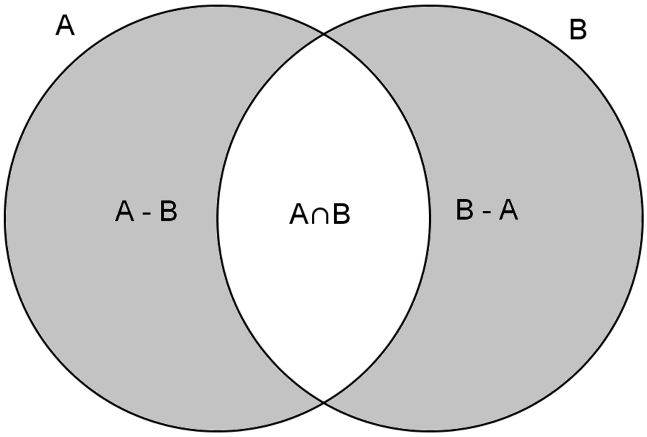
Misturando-se p gramas de uma mistura que contém $x\%$ da substância A com q gramas de uma mistura que contém $y\%$ da substância A, obtém-se uma nova mistura com $\frac{p \cdot x + q \cdot y}{p+q}\%$ da substância A, ou seja, a concentração de A na nova mistura é a média aritmética ponderada das concentrações tendo as massas como pesos.

Isso ocorre porque a primeira mistura contém $p \cdot \frac{x}{100}$ gramas de A e a segunda mistura contém $q \cdot \frac{y}{100}$ gramas de A, portanto a mistura resultante contém $\frac{p \cdot x + q \cdot y}{100}$ gramas de A em uma massa total de $(p+q)$ gramas.
****

4) Dados dois conjuntos A e B tais que $n(A \cup B) = 10$, $n(A \cap B) = 5$ e $n(A) > n(B)$, pode-se afirmar que a soma dos valores possíveis para $n(A - B)$ é:
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:



$n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)=10-5=5\Rightarrow n(A-B)\le 5$

$n(A)>n(B)\Rightarrow n(A-B)+n(A\cap B)>n(B-A)+n(A\cap B)\Leftrightarrow n(A-B)>n(B-A)$

$5=n(A-B)+n(B-A)<n(A-B)+n(A-B)\Leftrightarrow 2,5<n(A-B)\Rightarrow n(A-B)\ge 3$

$\Rightarrow n(A-B)\in\{3,4,5\}$.

Logo, a soma dos valores possíveis de $n(A-B)$ é $3+4+5=12$.

5) Coloque (F) Falso ou (V) Verdadeiro nas afirmativas no conjunto dos números reais e assinale a opção correta.

( ) Se $x^2=4$ então $x^6=64$.

( ) Se $x^6=64$ então $x=2$.

( ) $(2^2)^3<2^{2^3}$.

( ) Se $10^x=0,2$ então $10^{2x}=0,04$.

( ) $2^{n+2}+2^n=5\cdot 2^n$.

(A) (F) (V) (V) (V) (F)
(B) (V) (F) (V) (V) (V)
(C) (V) (F) (V) (V) (F)
(D) (V) (V) (F) (V) (V)
(E) (V) (F) (V) (F) (V)

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

(V) Se $x^2=4$ então $x^6=64$.

$x^2=4\Leftrightarrow (x^2)^3=4^3\Leftrightarrow x^6=64$

(F) Se $x^6=64$ então $x=2$.

$x^6=64\Rightarrow x=\pm 2$

(V) $(2^2)^3<2^{2^3}$.

$\left(2^2\right)^3 = 2^6 < 2^8 = 2^{2^3}$

(V) Se $10^x = 0,2$ então $10^{2x} = 0,04$.

$10^x = 0,2 \Rightarrow \left(10^x\right)^2 = 0,2^2 \Leftrightarrow 10^{2x} = 0,04$

(V) $2^{n+2} + 2^n = 5 \cdot 2^n$

$2^{n+2} + 2^n = 2^n \cdot 2^2 + 2^n = 2^n (4+1) = 5 \cdot 2^n$

6) Quando uma pessoa caminha em linha reta uma distância x, ela gira para a esquerda de um ângulo de 60°; e quando caminha em linha reta uma distância $y = x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ela gira para a esquerda de um ângulo de 45°. Caminhando x ou y a partir de um ponto P, pode-se afirmar, para qualquer que seja o valor de x, é possível chegar ao ponto P descrevendo um:

I) Pentágono convexo
II) Hexágono convexo
III) Heptágono convexo
IV) Octógono convexo

O número de assertivas verdadeiras é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Nessa solução é útil saber que o lado do hexágono regular convexo e do octógono regular convexo inscritos em uma circunferência de raio R são $l_6 = R$ e $l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, respectivamente.

Supondo que a pessoa caminhou a vezes a distância x e b vezes a distância $y = x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, então, se ele parte do ponto P e retorna ao ponto P, forma-se um polígono convexo ou um polígono estrelado. Vamos analisar os casos em que se formam polígonos convexos, pois todas as afirmativas referem-se a polígonos convexos. A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°, logo:

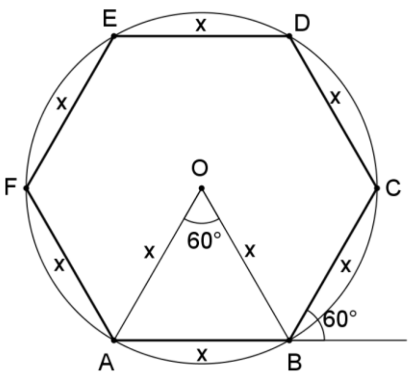
$a \cdot 60^\circ + b \cdot 45^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow 4a + 3b = 24$

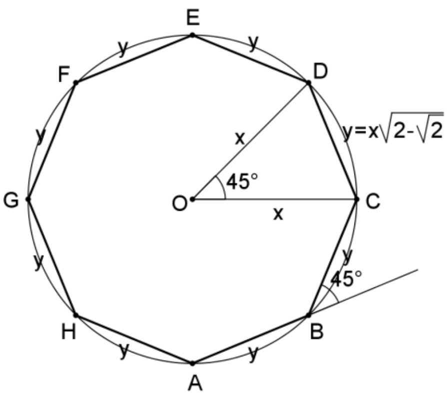
Como a e b são inteiros não negativos, temos $(a,b) \in \{(6,0);(3,4);(0,8)\}$.

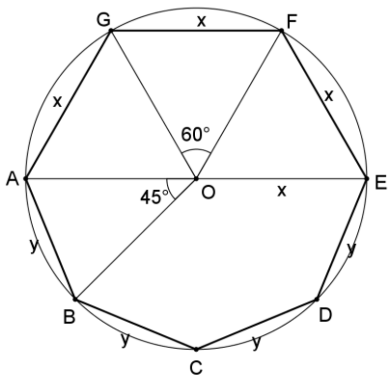
Se $a = 6$ e $b = 0$, forma-se um hexágono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio x.

Se $a = 0$ e $b = 8$, forma-se um octógono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio x.

Se $a = 3$ e $b = 4$, forma-se um heptágono convexo inscrito em uma circunferência de raio x. Os 3 lados de medida x determinam um arco de $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ e os 4 lados de medida $y = x\sqrt{2-\sqrt{2}}$ determinam um arco de $4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$, completando a circunferência. Como esse heptágono está inscrito em uma circunferência, é possível trocar a ordem dos lados e continuaremos formando um heptágono convexo.





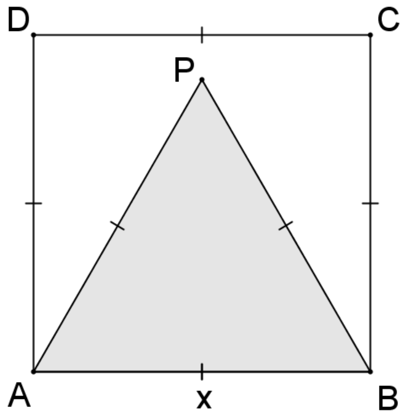


7) Considere o quadrado $ABCD$ e o triângulo equilátero ABP, sendo P interior ao quadrado. Nestas condições o triângulo cobre cerca de quantos porcento da área do quadrado?

(A) 40
(B) 43
(C) 45
(D) 50
(E) 53

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



O quadrado $ABCD$ e o triângulo equilátero ABP possuem o mesmo lado. Seja x a medida do lado dos dois polígonos, então a área do quadrado é igual a $S_Q = x^2$ e a área do triângulo equilátero é igual a $S_T = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Assim, $\frac{S_T}{S_Q} = \frac{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx \frac{1,73}{4} = 0,4325 \approx 43\%$.

Logo, o triângulo cobre cerca de 43% da área do quadrado.

8) Se uma pessoa aplica somente $\frac{2}{5}$ de seu capital em letras durante 90 dias, à taxa de $2,5\%$ ao mês (juros simples) e recebe $R\$\,9.600,00$ de juros, então o seu capital é de:

(A) $R\$\,128.000,00$
(B) $R\$\,240.000,00$
(C) $R\$\,320.000,00$
(D) $R\$\,400.000,00$
(E) $R\$\,960.000,00$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Para o cálculo dos juros, o tempo ter a mesma referência da taxa. Como a taxa está apresentada em percentual ao mês, o tempo deve estar em meses.

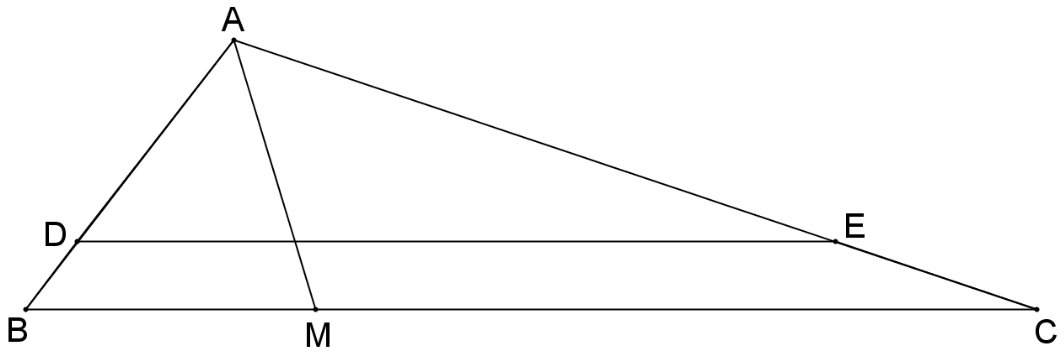
$t = 90 \text{ dias} = 3 \text{ meses}$

$$J = \left(\frac{2}{5}C\right) \cdot \frac{2,5}{100} \cdot 3 = 9600 \Leftrightarrow C = 320000$$

Logo, o capital é de $R\$\,320.000,00$.

Note que para o cálculo dos juros utilizamos a relação $J = C \cdot i \cdot t$, onde J são os juros, C, o capital inicial, i, a taxa e t, o tempo, onde taxa e tempo devem ter a mesma referência.

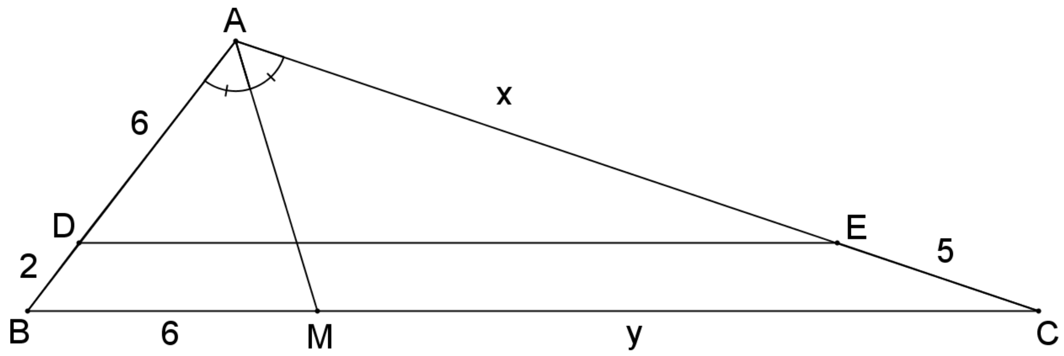
9) Na figura, DE é paralela a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Sabendo que $AD = 6$, $AE = x$, $DB = 2$, $EC = 5$, $BM = 6$ e $MC = y$. Então $x + y$ é igual a:



(A) 15
(B) 20
(C) 25
(D) 30
(E) 35

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:



Como $DE \parallel BC$, então, pelo teorema de Thales, temos: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{6}{2} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 15$.

Como AM é bissetriz interna do ΔABC, então, pelo teorema das bissetrizes, temos:

$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Leftrightarrow \frac{6+2}{6} = \frac{15+5}{y} \Leftrightarrow y = 15$.

$\Rightarrow x + y = 15 + 15 = 30$ u.c.

10) Observe as afirmativas abaixo sobre os números reais x e y e assinale a opção correta.

(I) $\frac{1}{x} < y$, então $x > \frac{1}{y}$, $xy \neq 0$.

(II) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$.

(III) $x^2 > y$, então $x > \sqrt{y}$.

(A) Apenas I é falsa.
(B) Apenas II é falsa.
(C) Apenas III é falsa.
(D) I, II, III são falsas.
(E) Apenas I e II são falsas.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

(I) $\frac{1}{x} < y$, então $x > \frac{1}{y}$, $xy \neq 0$. (F)

Contraexemplo: Se $x = -1$ e $y = 1$, então $\frac{1}{-1} < 1$ e $-1 < \frac{1}{1}$.

Observe que a implicação é verdadeira se x e y possuem o mesmo sinal.

(II) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$. (F)

Contraexemplo: Se $x = y = -1$, então $\sqrt{\frac{-1}{-1}} = 1$ e $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \notin \mathbb{R}$.

Observe que se considerarmos o conjunto dos números complexos, a razão $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{i}{i} = 1 \in \mathbb{R}$.
Entretanto, como o programa nos restringe aos números reais, cada uma das raízes $\sqrt{-1}$ não está definida em $\mathbb{R}$ e, portanto, a razão $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ também não.

(III) $x^2 > y$, então $x > \sqrt{y}$. (F)

Contraexemplo: Se $x = -2$ e $y = 1$, então $(-2)^2 > 1$ e $-2 < 1$.

11) Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando toda solução de um é solução do outro e vice-versa.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

Qual é a soma dos valores de a e b, tais que os sistemas acima sejam equivalentes?
(A) 1
(B) 2
(C) -1
(D) -2
(E) zero

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Da primeira equação, temos: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Substituindo a expressão obtida na segunda equação, vem: $x + y = 2 \Rightarrow x + x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.
Portanto, o sistema é possível e determinado e o seu conjunto solução do sistema é $S = \{(1,1)\}$.
Substituindo os valores de x e y obtido no segundo sistema, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 = 1 \\ b \cdot 1 - a \cdot 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b - a = 1 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos: $(a+b)+(b-a) = 1+1 \Leftrightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1$.
Substituindo $b = 1$ na primeira equação, vem: $a + b = 1 \Rightarrow a + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 0$.
A soma dos valores de a e b que fazem os sistemas serem equivalentes é $a + b = 0 + 1 = 1$.
Observe que, ao montar o sistema em a e b, já conhecíamos o valor de $a + b$, mas ainda assim é necessário resolver o sistema, para garantir que existem valores de a e b que são soluções do sistema.

12) Se $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 11$, podemos dizer que o valor de $\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn}$ é:
a) 1
b) 3

c) 7
d) 18
e) 22

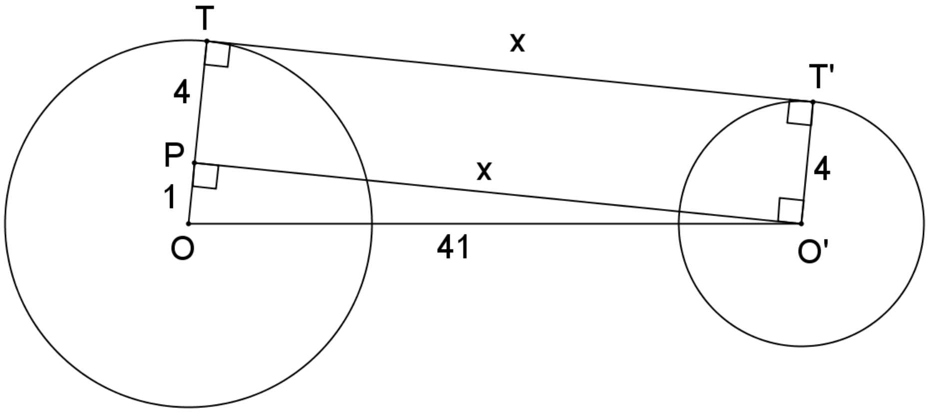
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
$$\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}=\frac{m^2+n^2+p^2}{mnp}=\frac{(m+n+p)^2-2(mn+mp+np)}{mnp}=\frac{6^2-2\cdot 11}{2}=7$$

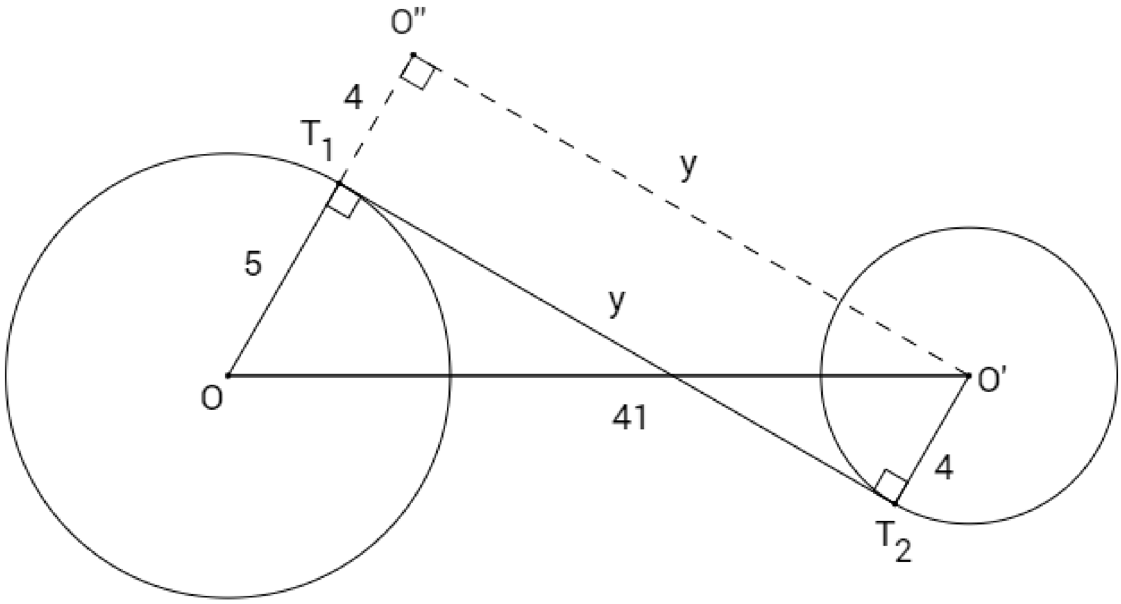
13) A distância entre os centros de dois círculos de raios iguais a 5 e 4 é 41. Assinale a opção que apresenta a medida de um dos segmentos tangentes aos dois círculos.
(A) $38,5$
(B) 39
(C) $39,5$
(D) 40
(E) $40,5$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
As figuras abaixo representam as duas situações possíveis descritas no enunciado e foram feitas fora de escala para facilitar a visualização.



Seja TT' a tangente comum externa às circunferências, então $OT \perp TT'$ e $O'T' \perp TT'$.
Se o ponto P é a projeção do ponto O' sobre o segmento OT, então o quadrilátero $O'PTT'$ obtido é um retângulo.
$OP = OT - PT = OT - O'T' = 5 - 4 = 1$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta OO'P$, temos: $x^2 + 1^2 = 41^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1680} \approx 41$ u.c..



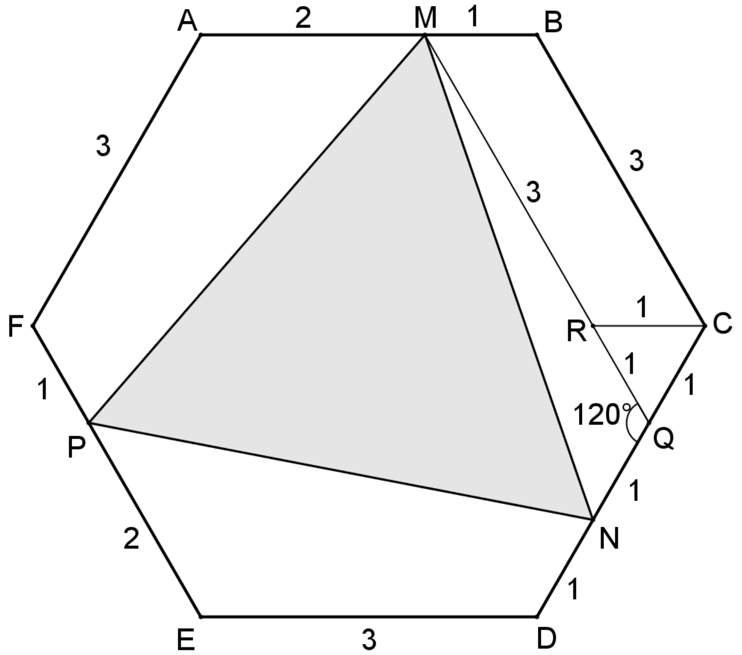
Seja T_1T_2 a tangente comum interna às circunferências, então $OT_1 \perp T_1T_2$ e $O'T_2 \perp T_1T_2$.
Seja O" a projeção de O' sobre o prolongamento de OT_1, então o quadrilátero $O'T_2T_1O"$ é um retângulo, $O"T_1 = 4$ e $O'O" = T_1T_2 = y$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OO'O", temos:
$OO"^2 + O'O"^2 = OO'^2 \Leftrightarrow 9^2 + y^2 = 41^2 \Leftrightarrow y^2 = 1600 \Leftrightarrow y = 40$

Logo, a tangente comum externa mede aproximadamente 41 u.c. e a tangente comum interna mede 40 u.c., portanto, a alternativa correta é D.

14) Um hexágono regular ABCDEF tem lado 3 cm. Considere os pontos: M, pertencente a AB, tal que MB igual a 1 cm; N, pertencente a CD, tal que ND igual a 1 cm; e P, pertencente a EF, tal que PF igual a 1 cm. O perímetro, em centímetros, do triângulo MNP é igual a:
(A) $3\sqrt{15}$
(B) $3\sqrt{17}$
(C) $3\sqrt{19}$
(D) $3\sqrt{21}$
(E) $3\sqrt{23}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:



Os quadriláteros $AMPF$, $BCNM$ e $DEPN$ são congruentes, então se conclui que o triângulo MNP é equilátero.

Traçando MQ paralelo a BC, obtém-se o trapézio isósceles $BCQM$.

Traçando RC paralelo a MB, obtém-se o paralelogramo $MBCR$ e o triângulo equilátero CRQ. Logo, $MQ = MR + RQ = 3 + 1 = 4$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo MQN, temos:

$$MN^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 17 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 21 \Leftrightarrow MN = \sqrt{21}.$$

Assim, o perímetro do triângulo equilátero MNP é $2p = 3\sqrt{21}$ cm.

15) Dos números

(I) $0,4333...$

(II) $0,101101110...$

(III) $\sqrt{2}$

(IV) O quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência.

São racionais:

(A) Todos.

(B) Nenhum.

(C) Apenas 1 deles.

(D) Apenas 2 deles.

(E) Apenas 3 deles.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
(I) $0,4333...$ é uma dízima periódica e, portanto, um número racional. Observe que $0,4333\ldots = \frac{43-4}{90} = \frac{39}{90}$.
(II) 0,101101110... é uma dízima não periódica e, portanto, um número irracional.
(III) $\sqrt{2}$ é um número irracional.
(IV) O quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência é igual a π que é um número irracional.
Portanto, apenas 1 desses números é racional.

É possível demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Sabendo que o conjunto dos números racionais é $Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_+^* \wedge \text{mdc}(p,q) = 1\right\}$. Vamos supor, por absurdo, que existam $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+^*$, com $\text{mdc}(p,q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot q = q \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \Leftrightarrow 2 \mid p^2 \Leftrightarrow 2 \mid p$$

Como $2 \mid p$, então existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2a$.

$$2q^2 = p^2 \Leftrightarrow 2q^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4a^2 \Leftrightarrow q^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 2 \mid q^2 \Leftrightarrow 2 \mid q$$

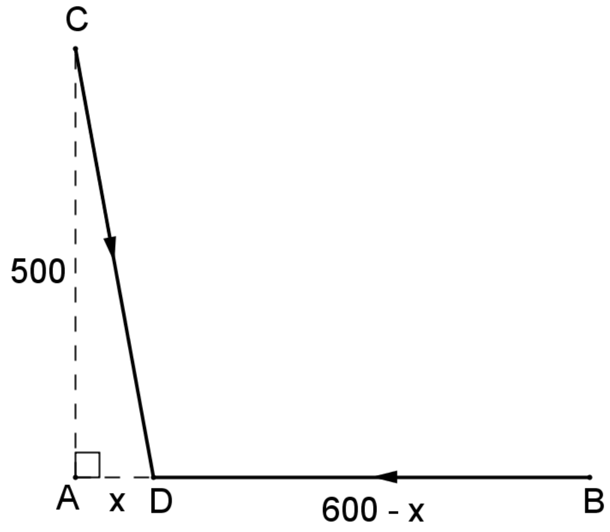
Mas, $2 \mid p$ e $2 \mid q$ implica que $2 \mid \text{mdc}(p,q) \Rightarrow \text{mdc}(p,q) \neq 1$ (ABSURDO).
Logo, conclui-se que a suposição inicial é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional. (C.Q.D.)

Observe ainda que se $n \in \mathbb{Z}_+^*$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}_+$ e $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Z}$, então $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Q}$, ou seja, se a raiz n-ésima de um número inteiro não for inteira, será irracional.

16) Uma cidade $\underline{B}$ encontra-se 600 km a leste de uma cidade $\underline{A}$; e uma cidade $\underline{C}$ encontra-se 500 km ao norte da mesma cidade $\underline{A}$. Um ônibus parte de $\underline{B}$, com velocidade constante, em linha reta e na direção da cidade $\underline{A}$. No mesmo instante e com velocidade constante igual à do ônibus, um carro, também em linha reta, parte de $\underline{C}$ para interceptá-lo. Aproximadamente a quantos quilômetros de $\underline{A}$, o carro alcançará o ônibus?
(A) 92
(B) 94
(C) 96
(D) 98
(E) 100

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:



Seja BD a distância percorrida pelo ônibus e CD a distância percorrida pelo carro. Como ambos têm a mesma velocidade e partem no mesmo instante, então $CD = BD = 600 - x$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔACD, temos:

$$AD^2 + AC^2 = CD^2 \Leftrightarrow x^2 + 500^2 = (600 - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1100}{12} \approx 92 \text{ km}.$$

17) Um grupo de alunos faz prova numa sala. Se saírem do recinto 10 rapazes, o número de rapazes e moças será igual. Se, em seguida, saírem 10 moças o número de rapazes se tornará o dobro do número de moças. Sendo r o número de rapazes e m o número de moças podemos afirmar que $2r + m$ é igual a:

(A) 60
(B) 70
(C) 80
(D) 90
(E) 110

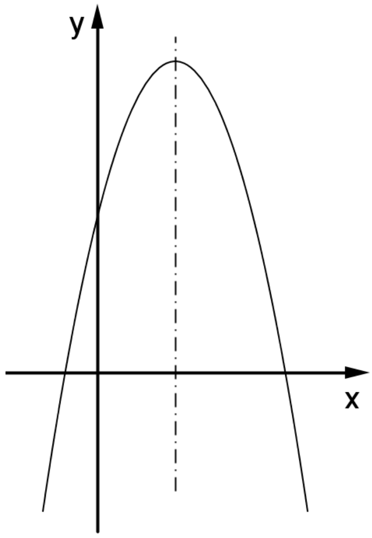
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} r - 10 = m \\ r - 10 = 2 \cdot (m - 10) \end{cases} \sim \begin{cases} r - m = 10 \\ r - 2m = -10 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos: $\Rightarrow (r - m) - (r - 2m) = 10 - (-10) \Leftrightarrow m = 20$.
Substituindo o valor de m na primeira equação, temos: $r - 20 = 10 \Leftrightarrow r = 30$.
Logo, $2r + m = 2 \cdot 30 + 20 = 80$.

18) Considerando o gráfico abaixo referente ao trinômio do 2° grau, $y = ax^2 + bx + c$, pode-se afirmar que:



(A) $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$
(B) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$
(C) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$
(D) $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$
(E) $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Como a parábola que representa a função quadrática possui concavidade voltada para baixo, então o coeficiente do termo do $2°$ grau é negativo, ou seja, $a < 0$.
A função quadrática possui uma raiz negativa e uma positiva, então o produto das raízes é negativo, ou seja, $P = \frac{c}{a} < 0$. Como $a < 0$, então $c > 0$.

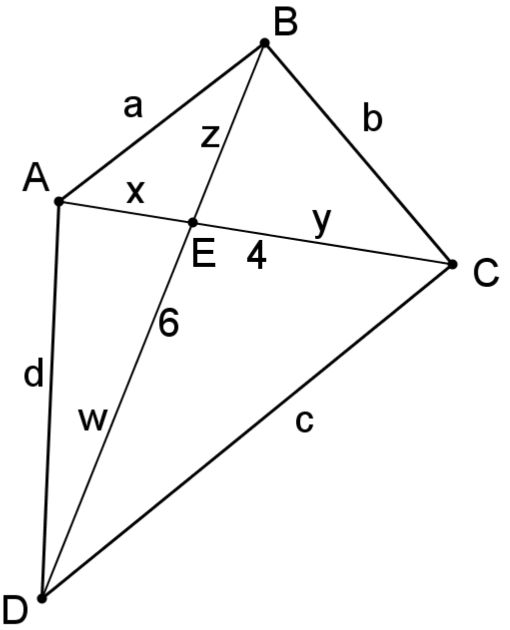
A abscissa do vértice da parábola é positiva, ou seja, $x_V = -\frac{b}{2a} > 0$. Como $a < 0$, então $b > 0$.

Assim, temos: $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

19) Um quadrilátero convexo Q tem diagonais respectivamente iguais a 4 e 6. Assinale, dentre as opções, a única possível para o perímetro de Q.
(A) 10
(B) 25
(C) 15
(D) 30
(E) 20

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:



Aplicando a desigualdade triangular, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABD: a+d>6\\ \Delta BCD: b+c>6\end{array}\right\}\Rightarrow 2p_Q=a+b+c+d>12$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABE: x+z>a\\ \Delta BCE: z+y>b\\ \Delta CDE: y+w>c\\ \Delta DAE: w+x>d\end{array}\right\}\Rightarrow 2(x+y+z+w)>a+b+c+d=2p_Q \Leftrightarrow 2\cdot(4+6)>2p_Q \Leftrightarrow 2p_Q<20$$

$\Rightarrow 12<2p_Q<20$

Logo, a única opção possível é 15.

20) Um professor elaborou 3 modelos de prova. No primeiro 1° modelo, colocou uma equação do 2° grau; no 2° modelo, colocou a mesma equação trocando apenas o coeficiente do termo do 2° grau; e no 3° modelo, colocou a mesma equação do 1° modelo trocando apenas o termo independente. Sabendo que as raízes da equação do 2° modelo são 2 e 3 e que as raízes do 3° modelo são 2 e -7, pode-se afirmar sobre a equação do 1° modelo, que:

(A) não tem raízes reais.

(B) a diferença entre a sua maior e a sua menor raiz é 7.

(C) a sua maior raiz é 6.

(D) a sua menor raiz é 1.

(E) A soma dos inversos das suas raízes é $\frac{2}{3}$.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

1° MODELO: $ax^2+bx+c=0$

2° MODELO: $px^2+bx+c=0$ de raízes 2 e 3

$\Rightarrow -\frac{b}{p}=2+3=5$ e $\frac{c}{p}=2\cdot 3=6 \Rightarrow b=-5p$ e $c=6p \Rightarrow c=6\cdot\left(-\frac{b}{5}\right)=-\frac{6b}{5}$

3° MODELO: $ax^2+bx+q=0$ de raízes 2 e -7

$\Rightarrow -\frac{b}{a}=2+(-7)=-5$ e $\frac{q}{a}=2\cdot(-7)=-14 \Rightarrow b=5a$ e $q=-14a$

$\Rightarrow c=-\frac{6b}{5}=-\frac{6}{5}\cdot 5a=-6a$

A equação do 1° modelo é dada por: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+5ax-6a=0 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+5x-6=0$, cujas raízes são -6 e 1.

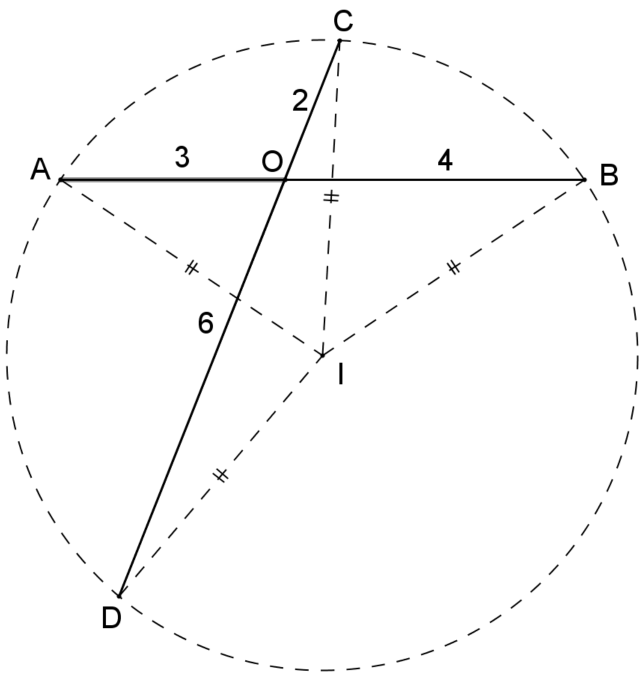
Logo, a diferença entre sua maior e sua menor raiz é $1-(-6)=7$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1997/1998

1) Dois segmentos de uma reta, AB e CD, interceptam-se interiormente no ponto O. Sabe-se que as medidas de AO e OB são respectivamente, 3 cm e 4 cm, e que as medidas de CO e OD são, respectivamente, 2 cm e 6 cm. Qual o número de pontos do plano, determinado por AB e CD, que equidistam dos pontos A, B, C e D?
(A) zero.
(B) um.
(C) dois.
(D) três.
(E) infinito.

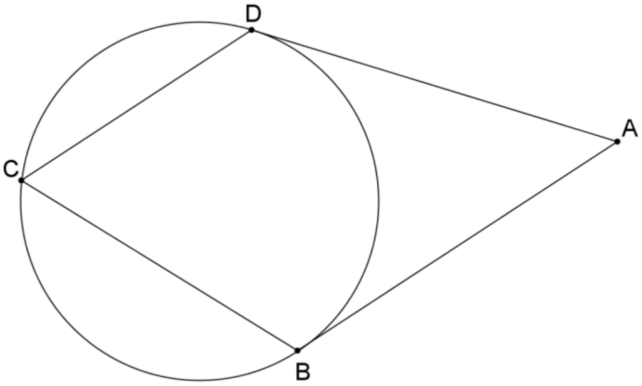
RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Considerando a potência do ponto O em relação a um círculo e, como $AO \cdot OB = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = CO \cdot OD$, então AB e CD são cordas de um mesmo círculo, ou seja, são concíclicos, conforme mostra a figura a seguir.



Logo, existe um único ponto do plano que é equidistante de A, B, C e D, que é o centro I do círculo.

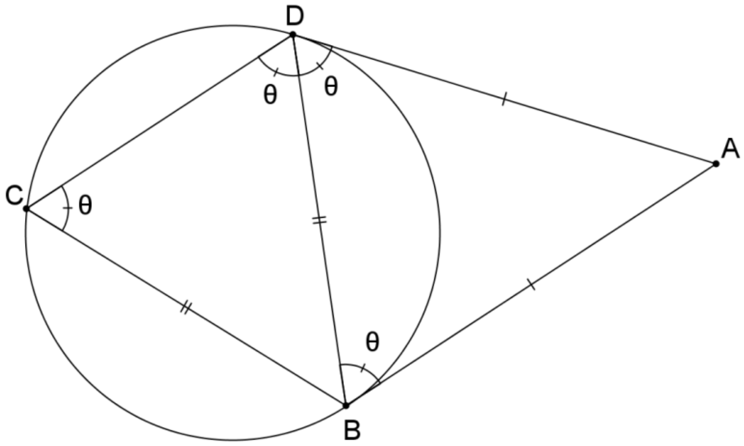
2) Na figura abaixo os segmentos AB e DA são tangentes à circunferência determinada pelos pontos B, C e D. Sabendo-se que os segmentos AB e CD são paralelos, pode-se afirmar que o lado BC é:



(A) a média aritmética entre AB e CD.
(B) a média geométrica entre AB e CD.
(C) a média harmônica entre AB e CD.
(D) o inverso da média aritmética de AB e CD.
(E) o inverso da média harmônica entre AB e CD.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



$AB = AD \Rightarrow A\hat{B}D = A\hat{D}B = \theta$
$CD \parallel AB \Rightarrow B\hat{D}C = A\hat{B}D = \theta$
$$B\hat{C}D = \frac{BD}{2} = A\hat{B}D = \theta$$
$B\hat{C}D = B\hat{D}C = \theta \Rightarrow BC = BD$
$$\Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Leftrightarrow BC^2 = AB \cdot CD \Leftrightarrow BC = \sqrt{AB \cdot CD}$$
Portanto, BC é a média geométrica entre AB e CD.

3) Duas raízes da equação biquadrada $x^4+bx^2+c=0$ são $0,2333...$ e $\frac{30}{7}$. O valor de c é:

(A) 1
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 11

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$0,2333\ldots=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$

Se $\frac{7}{30}$ e $\frac{30}{7}$ são raízes da equação biquadrada, então $\left(\frac{7}{30}\right)^2$ e $\left(\frac{30}{7}\right)^2$ são raízes da equação obtida após a transformação $x^2=y$, que é $y^2+by+c=0$.

Considerando o produto das raízes dessa equação do $2°$ grau, temos: $\frac{c}{1}=\left(\frac{7}{30}\right)^2\cdot\left(\frac{30}{7}\right)^2\Leftrightarrow c=1$.

NOTA 4: EQUAÇÃO BIQUADRADA

Chama-se equação biquadrada a equação incompleta de quarto grau que, feitas as reduções, possui apenas termos de grau par.
A forma geral da equação biquadrada é

$$ax^4+bx^2+c=0$$

Resolução da equação:

Efetuando a substituição $x^2=y\Rightarrow x^4=y^2$, resulta a equação

$$ay^2+by+c=0 \qquad \text{(resolvente)}$$

Supondo que a resolvente tenha raízes $y_1,y_2\geq 0$, temos:

$$x^2=y_1\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}$$
$$x^2=y_2\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}$$

Discussão da equação biquadrada:

A cada raiz real positiva da resolvente corresponderá um par de raízes reais simétricas da biquadrada.

Vamos analisar os diversos casos, supondo $a>0$ e que a resolvente possua raízes reais ($\Delta\geq 0$).

	Raízes da resolvente	**Raízes da biquadrada**
$c<0$	duas raízes reais de sinais contrários	duas raízes reais simétricas e duas complexas conjugadas.
$c>0$ e $b>0$	duas raízes reais negativas	quatro raízes complexas
$c>0$ e $b<0$	duas raízes reais positivas	quatro raízes reais

Obs.: Se $\Delta<0$ a resolvente não possuirá raízes reais e, consequentemente, a biquadrada possuirá quatro raízes complexas.

EXEMPLO 1: Resolva a equação $x^4-10x^2+9=0$.

RESOLUÇÃO:
$x^2=y \Rightarrow y^2-10y+9=0$ (resolvente) $\Leftrightarrow y_1=1 \wedge y_2=9$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}=\pm 1$
$x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm 3$
Como a resolvente possui duas raízes positivas, a biquadrada possuirá quatro raízes reais.

EXEMPLO 2: Resolva a equação $x^4-5x^2-36=0$.

RESOLUÇÃO:
$x^2=y \Rightarrow y^2-5y-36=0$ (resolvente) $\Leftrightarrow y_1=9 \wedge y_2=-4$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}=\pm 3$
$x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}=\pm\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$
Como a resolvente possui uma raiz positiva e uma negativa, a biquadrada possui duas raízes reais simétricas e duas raízes complexas.
****

4) Um baleiro vende dois tipos de balas: b_1 e b_2. Três balas do tipo b_1 custam R\$ 0,10 e a unidade de bala b_2 custa R\$ 0,15. No final de um dia de trabalho, ele vendeu 127 balas e arrecadou R\$ 5,75. O número de balas do tipo b_1 vendidas foi:
(A) 114
(B) 113
(C) 112
(D) 111
(E) 110

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Cada bala do tipo b_1 custa $\frac{0,10}{3}$ reais.

Seja x a quantidade de balas vendidas do tipo b_1, então a quantidade de balas vendidas do tipo b_2 é igual a $(127-x)$.

Considerando o valor arrecadado, temos:

$$\frac{0,10}{3}\cdot x + 0,15\cdot(127-x) = 5,75 \ (\times 300) \Leftrightarrow 10x + 45\cdot(127-x) = 1725 \Leftrightarrow 35x = 3990 \Leftrightarrow x = 114.$$

Logo, foram vendidas 114 balas do tipo b_1.

5) Define-se potência de um ponto P em relação a um círculo C, de centro O e raio r, como sendo o quadrado da distância de P a O, menos o quadrado de r. Qual é a potência de um dos vértices do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio r, em relação a este círculo?

(A) $\frac{2r^2}{3}$

(B) $\frac{r^2}{2}$

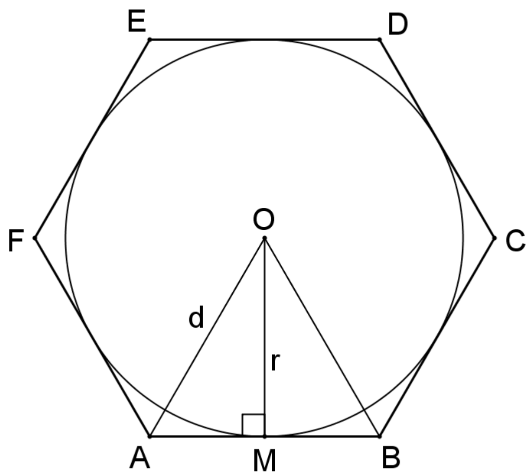
(C) $\frac{r^2}{3}$

(D) $\frac{r^2}{4}$

(E) $\frac{r^2}{6}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:



A figura representa o hexágono regular $ABCDEF$ circunscrito a um círculo de raio r.

A potência do vértice A do hexágono em relação ao círculo é $Pot_O A = d^2 - r^2$.

No triângulo equilátero AOB, temos $OM = AO \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow d = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Assim, $Pot_O A = d^2 - r^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 - r^2 = \frac{4r^2}{3} - r^2 = \frac{r^2}{3}$.

6) Um vendedor comprou 50 camisetas por $R\$\,425,00$. Quantas camisetas, no mínimo, deverá vender a $R\$\,11,00$ cada, para obter lucro?
(A) 37
(B) 38
(C) 39
(D) 40
(E) 41

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
O lucro L é dado pela receita menos a despesa. A despesa foi $R\$\,425,00$ e a receita é dada por $11 \cdot n$, onde n é a quantidade de camisetas vendidas. Assim, para que o vendedor obtenha lucro, devemos ter $L > 0$, ou seja, $L = 11n - 425 > 0 \Leftrightarrow 11n > 425 \Leftrightarrow n \geq 39$.
Logo, o número mínimo de camisetas que devem ser vendidas é 39.

7) Uma cafeteira elétrica tem, no recipiente onde se coloca a água, um mostrador indicando de 1 a 20 cafezinhos. O tempo gasto para fazer 18 cafezinhos é de 10 minutos, dos quais 1 minuto é o tempo gasto para aquecer a resistência. Qual o tempo gasto por essa mesma cafeteira para fazer 5 cafezinhos?
(A) 3 min.
(B) menos de 3 min.
(C) entre 3 min e $3,5$ min.
(D) $3,5$ min.
(E) mais de $3,5$ min.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A cafeteira leva 1 minuto para aquecer a resistência e 9 minutos para fazer 18 cafezinhos. Logo, ela leva $0,5$ minuto para fazer cada cafezinho. Para fazer 5 cafezinhos serão necessários, 1 minuto para aquecer a resistência mais $0,5 \cdot 5 = 2,5$ minutos, totalizando $3,5$ minutos.

8) O aluno Mauro, da 8ª série de um certo colégio, para resolver a equação $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$, no conjunto dos números reais, observou-se que $x^4 = x^2 - 2x + 1$ e que o segundo membro da equação é um produto notável. Desse modo, conclui que $(2x+1)^2$ é igual a:

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^4 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 = \pm(x-1)$

1° caso: $x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R}$

2° caso: $x^2 = -(x-1) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Note que as raízes da equação satisfazem $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 1$.

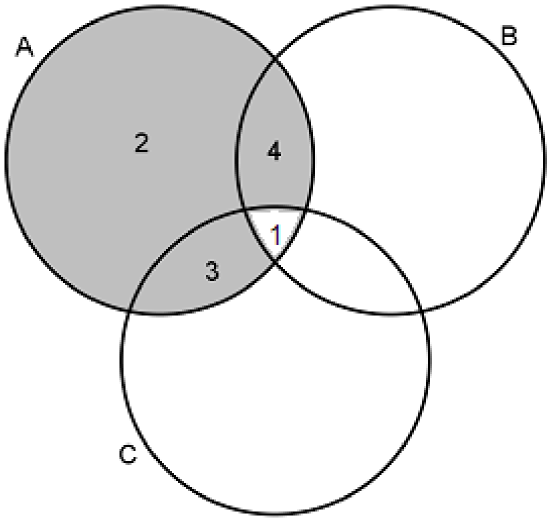
$\Rightarrow (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 4 \cdot (x^2 + x) + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

9) Dados os conjuntos A, B e C, tais que: $n(B \cup C) = 20$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 1$ e $n(A \cup B \cup C) = 22$, o valor de $n[A - (B \cap C)]$ é:

(A) 10
(B) 7
(C) 9
(D) 6
(E) 8

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Esse problema pode ser resolvido facilmente com auxílio de um diagrama de Venn.



Primeiro preenche-se $n(A \cap B \cap C) = 1$, depois $n(A \cap B) = 5$ e $n(A \cap C) = 4$.
Como $(B \cup C) \subset (A \cup B \cup C)$, a quantidade de elementos da região que representa $(A \cup B \cup C) - (B \cup C)$ é igual a $n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C) = 22 - 20 = 2$.
Logo, a quantidade de elementos do conjunto $A - (B \cap C)$, que corresponde à região sombreada, é igual a $n[A - (B \cap C)] = 2 + 3 + 4 = 9$.

10) Sejam $x = \dfrac{(2+\sqrt{3})^{1997} + (2-\sqrt{3})^{1997}}{2}$ e $y = \dfrac{(2+\sqrt{3})^{1997} - (2-\sqrt{3})^{1997}}{\sqrt{3}}$, o valor de $4x^2 - 3y^2$ é:

(A) 1
(B) 4
(C) 2
(D) 5
(E) 3

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{1997}(2-\sqrt{3})^{1997} = 1$

Seja $(2+\sqrt{3})^{1997} = a$, então $(2-\sqrt{3})^{1997} = a^{-1}$.

$$x = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} + (2-\sqrt{3})^{1997}}{2} \Rightarrow 2x = a + a^{-1}$$

$$y = \frac{(2+\sqrt{3})^{1997} - (2-\sqrt{3})^{1997}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}y = a - a^{-1}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = (2x + \sqrt{3}y)(2x - \sqrt{3}y) = (a + a^{-1} + a - a^{-1})(a + a^{-1} - a + a^{-1}) = 2a \cdot 2a^{-1} = 4$$

11) Considere as afirmativas abaixo sobre um polígono regular de n lados, onde o número de diagonais é múltiplo de n.
I - O polígono **não** pode ter diagonal que passa pelo seu centro.
II - n pode ser múltiplo de 17.
III - n pode ser um cubo perfeito.
IV - n pode ser primo.
Assinale a alternativa correta.
(A) Todas as afirmativas são falsas.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.
(E) Todas as afirmativas são verdadeiras.

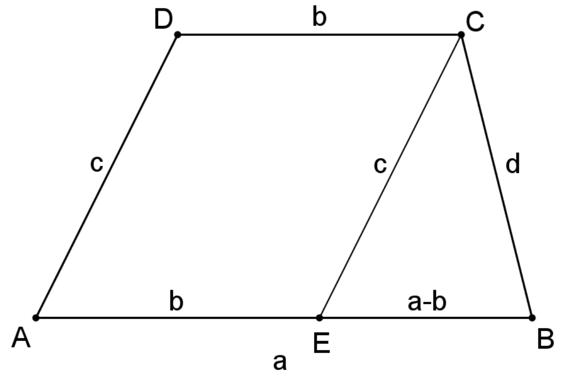
RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Se o número de diagonais de um polígono regular de n lados é múltiplo de n, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que: $D = \frac{n(n-3)}{2} = k \cdot n \Leftrightarrow n = 2k + 3$.
Logo, n assume todos os valores ímpares maiores ou iguais a 3.
I - VERDADEIRA
Como $n = 2k + 3$ é ímpar, o polígono de gênero n não possui diagonais passando pelo centro.
II - VERDADEIRA
$k = 7 \Rightarrow n = 2 \cdot 7 + 3 = 17$
III - VERDADEIRA
$k = 12 \Rightarrow n = 2 \cdot 12 + 3 = 3^3$ que é um cubo perfeito
IV - VERDADEIRA
$k = 1 \Rightarrow n = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ que é primo.

12) O número de trapézios distintos que se pode obter dispondo de 4, e apenas 4, segmentos de reta medindo, respectivamente, 1 cm, 2 cm, 4 cm e 5 cm é:
(A) nenhum
(B) três
(C) um
(D) quatro
(E) dois

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Vamos resolver essa questão com auxílio da desigualdade triangular.



No trapézio da figura, traçamos $CE \parallel DA$, obtendo o paralelogramo $ADCE$.
Para que exista o trapézio é necessário que $a-b$, c e d satisfaçam a desigualdade triangular.
Sendo a a base maior e b a base menor do trapézio, e considerando que a ordem dos lados não paralelos não importa, temos os seguintes casos.

$a=5,\ b=1,\ c=2,\ d=4 \Rightarrow a-b=4,\ c=2,\ d=4$ satisfaz a desigualdade triangular
$a=5,\ b=2,\ c=1,\ d=4 \Rightarrow a-b=3,\ c=1,\ d=4 \Rightarrow 4=3+1$ não satisfaz a desigualdade triangular
$a=5,\ b=4,\ c=1,\ d=2 \Rightarrow a-b=1,\ c=1,\ d=2 \Rightarrow 2=1+1$ não satisfaz a desigualdade triangular
$a=4,\ b=1,\ c=5,\ d=2 \Rightarrow a-b=3,\ c=5,\ d=2 \Rightarrow 5=3+2$ não satisfaz a desigualdade triangular
$a=4,\ b=2,\ c=5,\ d=1 \Rightarrow a-b=2,\ c=5,\ d=1 \Rightarrow 5>1+2$ não satisfaz a desigualdade triangular
$a=2,\ b=1,\ c=5,\ d=4 \Rightarrow a-b=1,\ c=5,\ d=4 \Rightarrow 5=1+4$ não satisfaz a desigualdade triangular

Logo, só é possível obter um trapézio.

13) Num triângulo ABC, retângulo em A, os lados AB e AC valem, respectivamente c e b. Seja o ponto G o baricentro do triângulo ABC. A área do triângulo AGC é:

(A) $\frac{bc}{2}$

(B) $\frac{bc}{3}$

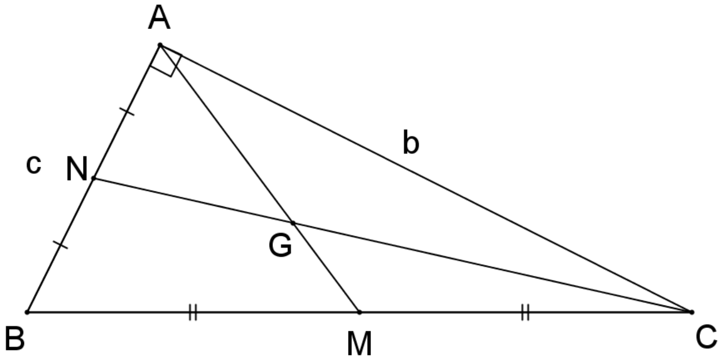
(C) $\frac{bc}{4}$

(D) $\frac{bc}{6}$

(E) $\frac{bc}{9}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:



$$\frac{CM}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow S_{ACM}=\frac{1}{2}S_{ABC}$$

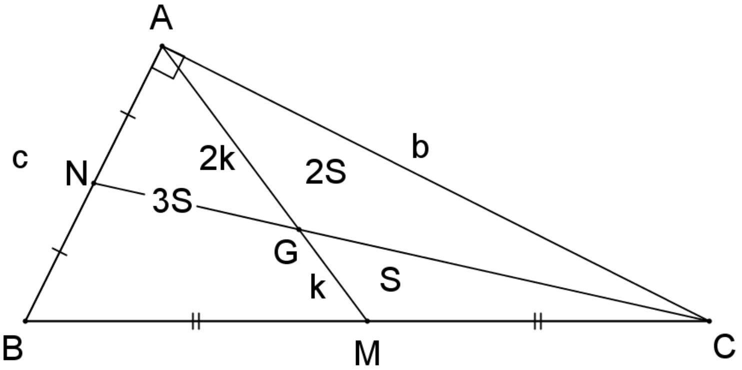
O baricentro do triângulo divide a mediana na razão $2:1$, então $\frac{AG}{GM}=\frac{2}{1}$.

$$\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{S_{AGC}}{S_{ACM}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow S_{AGC}=\frac{2}{3}S_{ACM}$$

$$\Rightarrow S_{AGC}=\frac{2}{3}S_{ACM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\cdot c}{2}=\frac{bc}{6}$$

MÉTODO PRÁTICO:

Seja $S_{CGM}=S$. Vamos calcular as áreas dos outros triângulos da figura utilizando o fato de que a razão entre as áreas de triângulos de altura comum é igual à razão entre suas bases.



$$6S=\frac{bc}{2}\Leftrightarrow S=\frac{bc}{12}$$

$$S_{AGC}=2S=\frac{bc}{6}$$

14) A expressão $\dfrac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}$, $x\cdot y\cdot z\neq 0$, é equivalente a:

a) $4x^3$
b) $4yzx^3$
c) $4yx^3$
d) $4xyz$
e) $4xz^3$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
$$\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3+x^3-y^3-z^3\right)\left(x^3+y^3+z^3-x^3+y^3+z^3\right)}{y^3+z^3}=$$
$$=\frac{2x^3\cdot 2\left(y^3+z^3\right)}{y^3+z^3}=4x^3$$

15) Uma roda gigante tem uma engrenagem que é composta de duas catracas, que funcionam em sentidos contrários. Em um minuto, a menor dá três voltas completas enquanto a maior dá uma volta. Após dezoito minutos de funcionamento da menor, o número de voltas da maior é:
(A) 54
(B) 36
(C) 24
(D) 18
(E) 9

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Em um minuto, a roda gigante maior dá uma volta completa.
Se a roda gigante menor funcionou durante 18 minutos, então a maior funcionou durante o mesmo tempo e deu 18 voltas completas.

16) Resolvendo-se a expressão $\dfrac{\left\{\left[\left(\sqrt[3]{1,331}\right)^{12/5}\right]^0\right\}^{-7,2}-1}{8^{33}+8^{33}+8^{33}+8^{33}+8^{33}}\times\dfrac{1}{2^{302}}$ encontra-se:
(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1
(E) 0

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\left\{\left[\left(\sqrt[3]{1,331}\right)^{12/5}\right]^0\right\}^{-7,2}-1}{8^{33}+8^{33}+8^{33}+8^{33}+8^{33}}\times\frac{1}{2^{302}}=\frac{\{1\}^{-7,2}-1}{5\cdot 8^{33}}\cdot\frac{1}{2^{302}}=\frac{1-1}{5\cdot 8^{33}}\cdot\frac{1}{2^{302}}=\frac{0}{5\cdot 8^{33}}\cdot\frac{1}{2^{302}}=0$$

17) Considere o conjunto A dos números primos positivos menores do que 20 e o conjunto B dos divisores positivos de 36. O número de subconjuntos do conjunto diferença $B-A$ é:
(A) 32
(B) 64
(C) 128
(D) 256
(E) 512

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$B=D(36)=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

$\Rightarrow B-A=\{1,4,6,9,12,18,36\}\Rightarrow n(B-A)=7$

O número de subconjuntos de $B-A$ é $n(P(B-A))=2^{n(B-A)}=2^7=128$, onde $P(X)$ representa o conjunto das partes do conjunto X.

18) (CN 1998) O número de soluções inteiras da inequação $\frac{x^2-6x+10}{x^2-1}<0$ é:
(A) 0
(B) 3
(C) 1
(D) infinito
(E) 2

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

A equação $x^2-6x+10=0$ possui discriminante $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 10=-4<0$, logo não possui raízes reais e, consequentemente, o trinômio $x^2-6x+10$ é sempre positivo.

$$\frac{x^2-6x+10}{x^2-1}<0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow -1<x<1$$

Logo, a única solução inteira da inequação é $x=0$.

19) Um polinômio do 2° grau em x é divisível por $\left(3x-3\sqrt{3}+1\right)$ e $\left(2x+2\sqrt{3}-7\right)$. Sabendo que o coeficiente do termo quadrático é positivo, o valor numérico mínimo do polinômio ocorre para x igual a

(A) $\frac{19}{12}$

(B) $\frac{23}{12}$

(C) $\frac{29}{12}$

(D) $\frac{31}{12}$

(E) $\frac{35}{12}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Um polinômio do 2° grau em x divisível por $\left(3x-3\sqrt{3}+1\right)$ e $\left(2x+2\sqrt{3}-7\right)$ pode ser escrito na forma $P(x)=a\left(3x-3\sqrt{3}+1\right)\left(2x+2\sqrt{3}-7\right)$.

Assim, as raízes de $P(x)$ são $x_1=\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$ e $x_2=\frac{7-2\sqrt{3}}{2}$.

O coeficiente do termo quadrático é positivo, então o polinômio possui um valor mínimo que ocorre na abscissa do vértice.

A reta vertical que passa pelo vértice é um eixo de simetria do gráfico do polinômio quadrático, então a abscissa do vértice é igual à média aritmética das raízes. Assim, temos:

$$x_V=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-1}{3}+\frac{7-2\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{19}{12}.$$

20) Um aluno, efetuando a divisão de 13 por 41, foi determinando o quociente até a soma de todos os algarismos por ele escritos, na parte decimal, foi imediatamente maior ou igual a 530. Quantas casas decimais ele escreveu?

(A) 144
(B) 147
(C) 145
(D) 148
(E) 146

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
O resultado do quociente de 13 por 41 é uma dízima periódica simples.
Para resolver esse problema é necessário identificar o período e para tanto basta efetuar a divisão até que os algarismos comecem a se repetir.

$$\begin{array}{l|l}
130 & 41 \\ \cline{2-2}
\ \ 70 & 0{,}317073\ldots \\
\ \ \ 290 & \\
\ \ \ \ \ 300 & \\
\ \ \ \ \ \ 130 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ddots &
\end{array}$$

O período é 31707 cuja soma é 18. A soma será maior ou igual a 530, após serem escritos 29 períodos, cuja soma é 522, mais os algarismos 3, 1 e 7.
Logo, foram escritos $29 \cdot 5 + 3 = 148$ algarismos.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 1996/1997

1) Três pessoas resolveram percorrer um trajeto da seguinte maneira: a primeira andaria a metade do percurso mais 1 km, a segunda a metade do que falta mais 2 km e finalmente a terceira que andaria a metade do que resta mais 3 km. O número de quilômetros desse trajeto é:
(A) menor que 20
(B) Maior que 19 e menor que 25
(C) Maior que 24 e menor que 30
(D) Maior que 29 e menor que 35
(E) Maior que 34

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se a terceira pessoa completa o percurso ao andar metade do que resta mais 3 km, significa que restavam 6 km.
A segunda andou metade do que faltava mais 2 km e restaram 6 km, ou seja, $6+2=8\text{ km}$ é metade do que faltava. Logo, faltavam 16 km.
A primeira andou metade do que percurso mais 1 km e restaram 16 km, ou seja, $16+1=17\text{ km}$ é metade do percurso. Portanto, o percurso tinha 34 km.

Também é possível resolver esse problema por meio de uma equação do 1° grau, como segue:
Seja x o número de quilômetros do trajeto. A primeira pessoa anda $\left(\frac{x}{2}+1\right)\text{km}$ e restam $\left(\frac{x}{2}-1\right)\text{km}$.
A segunda pessoa anda $\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+2\right)=\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{2}\right)\text{km}$ e restam $\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{x}{4}-\frac{5}{2}\right)\text{km}$. A terceira anda $\left(\frac{x}{8}-\frac{5}{4}+3\right)=\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{4}\right)\text{km}$. Como a terceira pessoa completa o percurso, então
$\frac{x}{4}-\frac{5}{2}=\frac{x}{8}+\frac{7}{4}\Leftrightarrow 2x-20=x+14\Leftrightarrow x=34\text{ km}$.

2) Numa cidade, 28% das pessoas têm cabelos pretos e 24% possuem olhos azuis. Sabendo que 65% da população de cabelos pretos têm olhos castanhos e que a população de olhos verdes que têm cabelos pretos é 10% do total de pessoas de olhos castanhos e cabelos pretos, qual a porcentagem, do total de pessoas de olhos azuis, que tem os cabelos pretos?
Obs.: Nesta cidade só existem pessoas de olhos azuis, verdes ou castanhos.
a) $30,25\%$
b) $31,25\%$
c) $32,25\%$
d) $33,25\%$
e) $34,25\%$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Cabelos / Olhos	Azuis	Castanhos	Verdes	
Pretos	x	y	z	$\rightarrow 28\%$
Não Pretos				$\rightarrow 72\%$
	$\downarrow$ 24%			

A porcentagem de pessoas de cabelos pretos e olhos castanhos é $y = 65\% \cdot 28\% = 18,2\%$.

A porcentagem de pessoas de cabelos pretos e olhos verdes é $z = 10\% \cdot 18,2\% = 1,82\%$.

A porcentagem de pessoas de cabelos pretos e olhos azuis é dada por:

$x = 28\% - y - z = 28\% - 18,2\% - 1,82\% = 7,98\%$.

A porcentagem, do total de pessoas de olhos azuis, que têm os cabelos pretos, é $\frac{7,98\%}{24\%} = 0,3325 = 33,25\%$.

3) Os números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se os algarismos de M são os mesmos algarismos de N, na ordem inversa, então $M + N$ é necessariamente múltiplo de:

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 11

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja $M = \overline{xy}$, onde x e y são os algarismos de M, então $N = \overline{yx}$.

$M = \overline{xy} = 10x + y$

$N = \overline{yx} = 10y + x$

$\Rightarrow M + N = (10x + y) + (10y + x) = 11(x + y) \Rightarrow 11 \mid (M + N)$

Logo, $M + N$ é necessariamente múltiplo de 11.

4) Uma pessoa comprou uma geladeira para pagamento à vista, obtendo um desconto de 10%. Como a balconista não aceitou o seu cheque, ele pagou com 119.565 moedas de um centavo. O preço da geladeira sem desconto é:

(A) R\$ 1.284,20
(B) R\$ 1.284,50
(C) R\$ 1.328,25
(D) R\$ 1.328,50
(E) R\$ 1.385,25

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Sejam P o preço original e P' o preço à vista com desconto.
O preço à vista é $P' = 119565 \cdot 0,01 = 1195,65$ reais.

Assim, temos: $P' = P \cdot (1 - 10\%) = 0,9 \cdot P \Leftrightarrow P = \frac{P'}{0,9} = \frac{1195,65}{0,9} = 1328,50$.

Logo, o preço da geladeira sem desconto é $R\$1328,50$.

5) Foram usados os números naturais de 26 até 575 inclusive para numerar as casas de uma rua. Convencionou-se colocar uma lixeira na casa que tivesse 7 no seu número. Foram compradas 55 lixeiras, assim sendo, podemos afirmar que:
(A) O número de lixeiras compradas foi igual ao número de lixeiras necessárias.
(B) Sobraram duas lixeiras.
(C) O número de lixeiras compradas deveria ser 100.
(D) Deveriam ser compradas mais 51 lixeiras.
(E) Ficaram faltando 6 lixeiras.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Nas casas de número 26 a 99, foram colocadas lixeiras nas casas $27, 37, \ldots, 97$ e $70, 71, \ldots, 79$, ou seja, $8 + 10 - 1 = 17$ lixeiras, onde se subtraiu 1 unidade, pois o 77 aparece nas duas sequências.
Nas casas de número 100 a 200, foram colocadas lixeiras nas casas $107, 117, \ldots, 197$ e $170, 171, \ldots, 179$, ou seja, $10 + 10 - 1 = 19$ lixeiras, onde se subtraiu 1 unidade, pois o 177 aparece nas duas sequências.
Da mesma forma que no caso anterior, conclui-se que, nas casas de número 201 a 500, foram colocadas $3 \cdot 19 = 57$ lixeiras.
Nas casas de número 501 a 575, foram lixeiras nas casas $507, 517, \ldots, 567$ e $570, 571, \ldots, 575$, ou seja, $7 + 6 = 13$ lixeiras.
Logo, devem ser compradas $17 + 19 + 57 + 13 = 106$, ou seja, deveriam ser compradas mais $106 - 55 = 51$ lixeiras.

6) Um aluno declarou o seguinte, a respeito de um polígono convexo P de n lados: "Partindo da premissa de que eu posso traçar $(n-3)$ diagonais de cada vértice de P, então, em primeiro lugar, o total de diagonais de P é dado por $n \cdot (n-3)$; e, em segundo lugar, a soma dos ângulos internos de P é dada por $(n-3) \cdot 180^\circ$. Logo o aluno:
(A) Errou na premissa e nas conclusões.
(B) Acertou na premissa e na primeira conclusão, mas errou na segunda conclusão.
(C) Acertou na premissa e na segunda conclusão, mas errou na primeira conclusão.
(D) Acertou na premissa e nas conclusões.
(E) Acertou na premissa e errou nas conclusões.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A premissa está correta, pois de cada vértice é possível traçar diagonais para todos os outros vértices, exceto para ele mesmo e para os dois vértices adjacentes (nesse caso a ligação é um lado), totalizando $(n-3)$ diagonais traçadas de cada vértice.

A primeira conclusão está errada, pois o produto $n\cdot(n-3)$ do número de vértices pela quantidade de diagonais traçadas de cada vértice é o dobro do número de diagonais, visto que cada diagonal é contada duas vezes em cada um dos vértices de suas extremidades. Dessa forma, o total de diagonais do polígono é dado por $D=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A segunda conclusão também está errada, pois, ao serem traçadas as $(n-3)$ diagonais de cada vértice, o polígono fica dividido em $(n-2)$ triângulos e, consequentemente, a soma dos ângulos internos é $S=180^\circ\cdot(n-2)$.

Logo, o aluno acertou na premissa e errou nas duas conclusões.

7) A solução da equação $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{4\sqrt{x}}$ é:

(A) uma dízima periódica.
(B) um número natural, quadrado perfeito.
(C) um número racional cujo inverso tem 4 divisores positivos.
(D) um número irracional.
(E) inexistente.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, notemos que $x>0$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{4\sqrt{x}}\Leftrightarrow 4\sqrt{x(x+1)}-4\sqrt{x\cdot x}=1\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+x}=4x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(4\sqrt{x^2+x}\right)^2=(4x+1)^2\Leftrightarrow 16x^2+16x=16x^2+8x+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$$

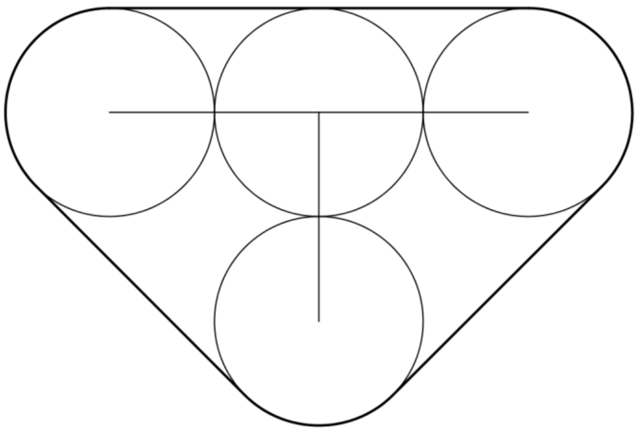
Testando o valor obtido na equação inicial, concluímos que $S=\left\{\frac{1}{8}\right\}$.

$$\sqrt{\frac{1}{8}+1}-\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}.$$

Assim, a solução da equação é um número racional cujo inverso tem 4 divisores positivos, pois $8=2^3$ e a sua quantidade de divisores positivos é $d(8)=3+1=4$.

Note que nesse desenvolvimento usamos que $\sqrt{x^2}=|x|=x$, pois $x>0$.

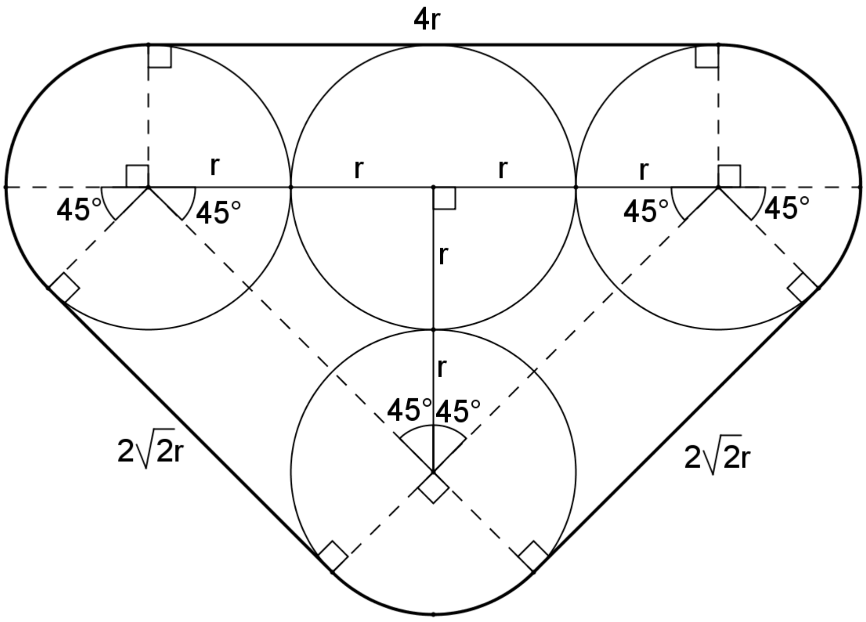
8) As quatro circunferências da figura abaixo têm raios $r = 0,5$. O comprimento da linha que as envolve é aproximadamente igual a:



(A) $6,96$
(B) $7,96$
(C) $8,96$
(D) $9,96$
(E) $10,96$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

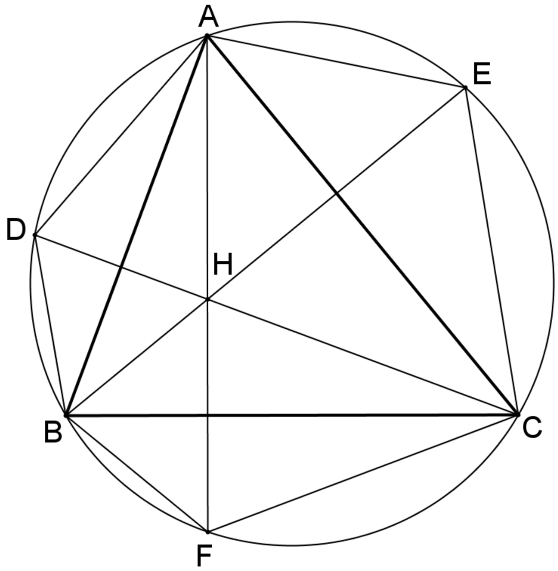


Inicialmente, observemos que as retas tangentes às circunferências são perpendiculares ao raio nos pontos de tangência, o que permite construir a figura acima.
Portanto, o comprimento L da linha envolvente é dado pela soma de três segmentos de reta, mais dois arcos de 135° e um de 90° em circunferências de raio r Os três arcos somados têm o comprimento de uma circunferência completa. Assim,
$L = 4r + 2\sqrt{2}r + 2\sqrt{2}r + 2\pi r = \left(4 + 4\sqrt{2} + 2\pi\right)r$.

Para $r = 0,5$, o comprimento da linha envolvente é igual a:

$L = \left(4 + 4\sqrt{2} + 2\pi\right) \cdot 0,5 = 2 + 2\sqrt{2} + \pi \approx 2 + 2 \cdot 1,41 + 3,14 = 7,96$ unidades de comprimento.

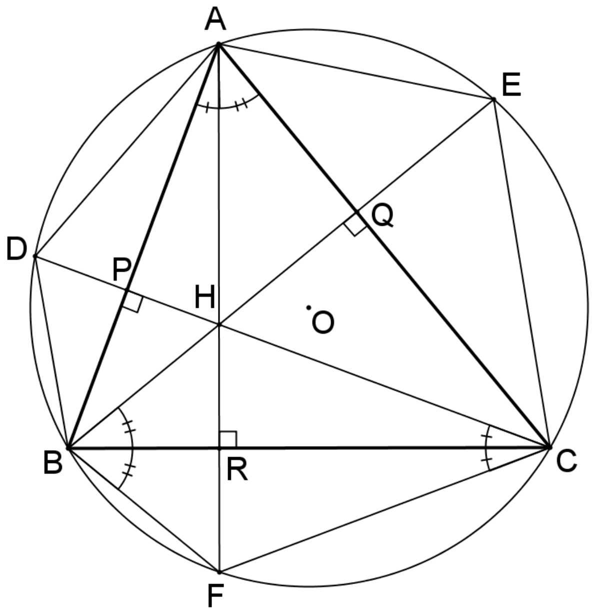
9) Considere na figura abaixo o triângulo ABC de lados $AB = 8$, $AC = 10$ e $BC = 12$, e seja H o seu ortocentro. As retas que passam por A e H, B e H, C e H intersectam o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos F, E e D, respectivamente. A área do hexágono de vértices A, D, B, F, C e E é igual a



(A) $30\sqrt{7}$
(B) $18\sqrt{7}$
(C) 80
(D) 70
(E) 65

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:



O ortocentro H é o ponto de encontro das alturas do ΔABC, portanto as retas que passam por A e H, B e H, C e H são alturas do triângulo.

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}R = B\hat{C}P = 90^\circ - \hat{B} \\ B\hat{A}F = B\hat{C}F = \dfrac{BF}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{C}H = B\hat{C}F$$

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{A}R = C\hat{B}Q = 90^\circ - \hat{C} \\ C\hat{A}F = C\hat{B}F = \dfrac{CF}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{B}H = C\hat{B}F$$

$\Delta BFC \equiv \Delta BHC \ (A.L.A.) \Rightarrow S_{BFC} = S_{BHC}$

Analogamente, $S_{AEC} = S_{AHC}$ e $S_{ADB} = S_{AHB}$.

Logo,

$S_{ADBFCE} = S_{BFC} + S_{BHC} + S_{AEC} + S_{AHC} + S_{ADB} + S_{AHB} = 2 \cdot (S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}) = 2 \cdot S_{ABC}$

Aplicando a fórmula de Heron para o cálculo da área do ΔABC, temos:

$2p_{ABC} = 8 + 10 + 12 = 30 \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)} = 15\sqrt{7}$

$\Rightarrow S_{ADBFCE} = 2 \cdot 15\sqrt{7} = 30\sqrt{7}$ unidades de área

Observe que o triângulo ABC do problema é acutângulo, por isso o ortocentro H está no interior do triângulo.

10) O número de troncos de árvore de 3 m^3 de volume cada, que foram necessários derrubar para fazer os palitos de fósforo, que estão em 1200 containeres, cada um com 12000 pacotes com 10 caixas de 40 palitos cada, é:

Dado: Considerar cada palito com 200 mm^3 de volume.

(A) 1152
(B) 876
(C) 576
(D) 498
(E) 384

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O total de palitos de fósforo é $1200 \cdot 12000 \cdot 10 \cdot 40 = 576 \cdot 10^7$.
O volume dos palitos de fósforo é

$$576 \cdot 10^7 \cdot 200\text{ mm}^3 = 1152 \cdot 10^9\text{ mm}^3 = 1152 \cdot 10^9 \cdot \left(10^{-3}\right)^3\text{ m}^3 = 1152\text{ m}^3.$$

Assim, a quantidade de troncos de árvore necessária é $\dfrac{1152}{3} = 384$.

11) Dados os números:

$A = 0,273849\overline{51}$

$B = 0,\overline{27384951}$

$C = 0,2738\overline{4951}$

$D = 0,27\overline{384951}$

$E = 0,27384\overline{951}$

$F = 0,27384951279897128888...$

Podemos afirmar que:

(A) $A > F > E > C > D > B$
(B) $A > F > B > D > C > E$
(C) $F > C > D > B > A > E$
(D) $B > C > A > F > E > D$
(E) $E > A > C > D > F > B$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Para verificar a relação de ordem entre os números basta comparar o primeiro algarismo diferente da esquerda para a direita.

$A = 0,273849\overline{51} = 0,27384951\boxed{5}151\ldots$

$B = 0,\overline{27384951} = 0,27384951\boxed{2}7\boxed{3}84951\ldots$

$C = 0,2738\overline{4951} = 0,27384951\boxed{4}9514951\ldots$

$D = 0,27\overline{384951} = 0,27384951\boxed{3}84951\ldots$

$E = 0,27384\overline{951} = 0,27384951\boxed{9}51951\ldots$

$F = 0,27384951\boxed{2}7\boxed{9}89712888...$

$\Rightarrow E > A > C > D > F > B$

12) Considere as seguintes inequações e suas respectivas resoluções, nos reais:

$1^a)$ $1+3x > 6x+7$

Solução: $3x-6x > 7-1$; $-3x > 6$; $3x > -6$; $x > -6/3$; $x > -2$

$2^a)$ $5 > 3/x+2$

Solução: $5x > 3+2x$; $5x-2x > 3$; $3x > 3$; $x > 3/3$; $x > 1$

$3^a)$ $x^2 - 4 > 0$

Solução: $x^2 > 4$; $x > \pm\sqrt{4}$; $x > \pm 2$

Logo a respeito das soluções, pode-se afirmar que:

(A) As três estão corretas.
(B) As três estão erradas.
(C) Apenas a 1^a e 2^a estão erradas.
(D) Apenas a 1^a e 3^a estão erradas.
(E) Apenas duas estão corretas.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$1^a)$ ERRADA

$1+3x > 6x+7$; $3x-6x > 7-1$; $-3x > 6$; $3x > -6$; $x > -6/3$; $x > -2$

Ao multiplicar uma desigualdade por um número negativo, o sinal da desigualdade deve ser invertido.

Solução correta:

$1+3x > 6x+7 \Leftrightarrow 3x-6x > 7-1 \Leftrightarrow -3x > 6 \Leftrightarrow 3x < -6 \Leftrightarrow x < -6/3 \Leftrightarrow x < -2$.

$2^a)$ ERRADA

$5 > 3/x+2$; $5x > 3+2x$; $5x-2x > 3$; $3x > 3$; $x > 3/3$; $x > 1$

Pela razão exposta no caso anterior, não podemos tirar o m.m.c. e eliminar o denominador x, pois não sabemos o seu sinal.

Solução correta:

$$5 > \frac{3}{x} + 2 \Leftrightarrow 5 - 2 - \frac{3}{x} > 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{3}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$$

$3^a)$ ERRADA

$x^2 - 4 > 0$; $x^2 > 4$; $x > \pm\sqrt{4}$; $x > \pm 2$

A desigualdade $x^2 > 4$ não implica $x > \pm\sqrt{4}$.

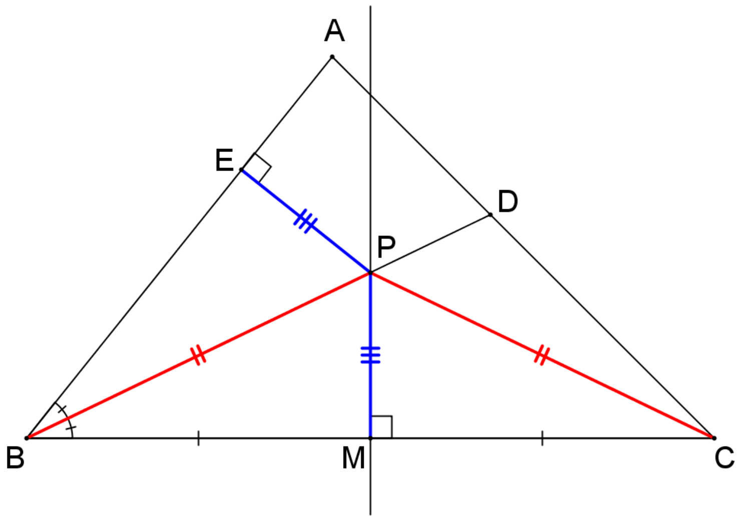
Solução correta:

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$

13) O ponto P interno ao triângulo ABC é equidistante de dois de seus lados e dois de seus vértices. Certamente P é a interseção de:
(A) Uma bissetriz interna e uma altura desse triângulo.
(B) Uma bissetriz interna e uma mediatriz dos lados desse triângulo.
(C) Uma mediatriz de um lado e uma mediana desse triângulo.
(D) Uma altura e uma mediana desse triângulo.
(E) Uma mediana e uma bissetriz interna desse triângulo.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:



Se P é equidistante de dois lados, então está sobre a bissetriz interna do ângulo formado por esses lados.
Se P é equidistante de dois vértices, então está sobre a mediatriz desses vértices.
Logo, P é a interseção de uma bissetriz interna e uma mediatriz do triângulo.

14) A soma e o produto das raízes reais da equação $(x^2-5x+6)^2-5(x^2-5x+6)+6=0$, são respectivamente:
(A) 6 e 8.
(B) 7 e 10.
(C) 10 e 12.
(D) 15 e 16.
(E) 15 e 20.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Fazendo $y=x^2-5x+6$ em $(x^2-5x+6)^2-5(x^2-5x+6)+6=0$ $(*)$, temos:
$y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2 \vee y=3$.
Portanto, $x^2-5x+6=2$ ou $x^2-5x+6=3$. Assim,

$x^2-5x+6=2 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$

$x^2-5x+6=3 \Leftrightarrow x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

A equação $(*)$ possui quatro raízes reais que são as raízes das duas equações do 2° grau anteriores. As raízes da primeira equação do 2° grau têm soma 5 e produto 4, e as raízes da segunda equação do 2° grau têm soma 5 e produto 3.

Logo, a soma das raízes da equação $(*)$ é $5+5=10$ e o seu produto é $4\cdot 3=12$.

15) O valor da expressão $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{-1}{2}}+2^{9^{0,5}}\div\left[\dfrac{\left(12^2-6\right)+17\div 3}{15}\right]^{\left[\left(3^2+1\right)\cdot 0,1\right]-1^{73}}$ é:

(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{-1}{2}}+2^{9^{0,5}}\div\left[\frac{\left(12^2-6\right)+17\div 3}{15}\right]^{\left[\left(3^2+1\right)\cdot 0,1\right]-1^{73}}=(16)^{\frac{1}{2}}+2^3\div\left[\frac{\left(12^2-6\right)+17\div 3}{15}\right]^{(10\cdot 0,1)-1}=$$

$$=4+8\div\left[\frac{\left(12^2-6\right)+17\div 3}{15}\right]^0=4+8\div 1=4+8=12$$

NOTA 5: POTÊNCIAS E RAÍZES

Potência de expoente natural

Definição: Seja $a\in\mathbb{R}^*$ e $n\in\mathbb{N}$. A potência de base a e expoente n é um número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0=1 \\ a^n=a^{n-1}\cdot a\ ,\ \forall n,\ n\geq 1 \end{cases}$$

Além disso, se $n\in\mathbb{N}^*$, então $0^n=0$.

Assim, $a^1=a^{1-1}\cdot a=1\cdot a=a$, $a^2=a^{2-1}\cdot a=a\cdot a$,...

Em geral a^p, $p\in\mathbb{N}$ e $p\geq 2$, é um produto de p fatores iguais a a: $a^p=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{p fatores}}$.

Exemplos:

$4^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$; $2^1 = 2$; $\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$; $(-4)^1 = -4$; $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$; $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$;

$0^2 = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Deve-se ter especial atenção para a diferença entre os dois exemplos seguintes:

$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$ $\qquad$ $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$

Propriedades:

(i) $a^0 = 1, \forall a \neq 0$

(ii) 0^0 não é definido

(iii) $a^1 = a$

(iv) $0^p = 0, \forall p \in \mathbb{R}_+^*$

(v) Para a não nulo, se n é par, então $a^n > 0$ e, se n é ímpar, então a^n tem o mesmo sinal de a.

Potência de expoente inteiro negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}^*$$

Em geral, temos: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Exemplos:

$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Raiz n-ésima aritmética

Definição: Seja o radicando $a \in \mathbb{R}_+$ e o índice $n \in \mathbb{N}$, existe sempre a raiz $b \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Exemplo: $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$.

A definição permite concluir que $\sqrt[4]{16} = 2$ e não $\sqrt[4]{16} = \pm 2$.

Da mesma forma, $\sqrt{a^2} = |a|$. Assim, temos $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Se o radicando a é um número negativo, somente estão definidas no conjunto dos números reais as raízes de índices ímpares. Assim, $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$, e $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

Propriedades das raízes:

Sejam $n, p \in \mathbb{N}^*$ e $a, b \in \mathbb{R}_+$.

(i) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

(ii) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(iii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

(iv) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

(v) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Exemplos:

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[2\cdot3]{2^2} = \sqrt[6]{4}$; $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$;

$\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}$; $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$; $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2\cdot3]{2} = \sqrt[6]{2}$

Operações com radicais

Só é possível somar ou subtrair raízes idênticas (mesmo índice e radicando).

Exemplos: $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$; $4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

Para multiplicar ou dividir raízes, basta que as raízes possuam o mesmo índice, o que é possível obter reduzindo as raízes ao mesmo índice com auxílio da propriedade (i).

Exemplos: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot2]{2^3} \cdot \sqrt[2\cdot3]{3^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}$

Potência de expoente racional

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, define-se:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

onde o numerador p do expoente fracionário torna-se potência do radicando e o denominador q do expoente fracionário, índice da raiz.

Exemplos: $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

As potências de expoente irracional são definidas por "aproximação" de potências racionais, mas apenas para bases não negativas.

Propriedades das potências:

Seja $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $p, q \in \mathbb{R}^*$, são válidas as seguintes relações:

(i) O produto de potências de mesma base é efetuado conservando-se a base e somando-se os expoentes:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

(ii) O quociente de potências de mesma base é efetuado conservando-se a base e subtraindo-se os expoentes:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

(iii) O produto de potências de bases diferentes e mesmo expoente é efetuado multiplicando-se as bases e conservando o expoente:

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

(iv) O quociente de potências de bases diferentes e mesmo expoente é efetuado dividindo-se as bases e conservando o expoente:

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

(v) A potenciação é efetuada multiplicando-se os expoentes:

$$\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$$

Exemplos:

$5^3 \cdot 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$; $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$;

$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$; $\frac{6^2}{2^2} = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2$;

$\left(5^3\right)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$; $5^{3^2} = 5^9$

Atenção:

A potenciação a^{b^c} deve ser efetuada de cima para baixo. Isso é diferente de $\left(a^b\right)^c = \underbrace{\left(a^b\right)\cdot\left(a^b\right)\cdot\ldots\cdot\left(a^b\right)}_{\text{c fatores}} = \left(a^b\right)^c$. Assim, $5^{3^2} = 5^9$ e $\left(5^3\right)^2 = 5^{3\cdot 2} = 5^6$.

Um desafio clássico: Sabendo que $2010^a = 67$ e $2010^b = 10$, o valor de $201^{\frac{1-a-b}{1-b}}$ é

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 6
(E) 67

RESOLUÇÃO: (B)

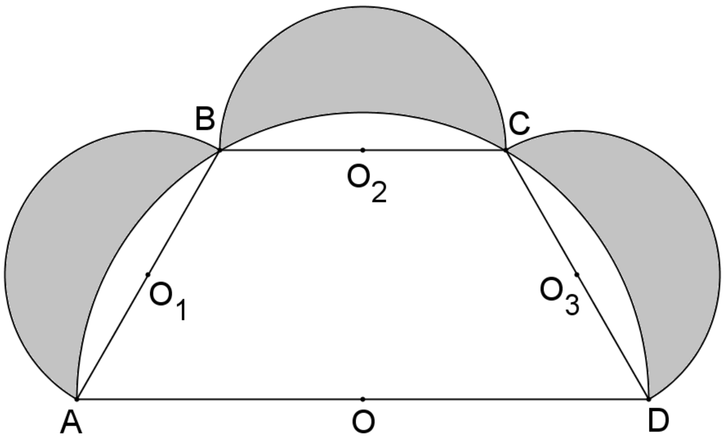
$$2010^b = 10 \Leftrightarrow 2010^b = \frac{2010}{201} \Leftrightarrow 201 = \frac{2010}{2010^b} \Leftrightarrow 201 = 2010^{1-b}$$

$$2010^a = 67 \ \wedge \ 2010^b = 10 \Rightarrow 2010^{a+b} = 670 \Leftrightarrow 2010^{a+b} = \frac{2010}{3} \Leftrightarrow 3 = \frac{2010}{2010^{a+b}} \Leftrightarrow 3 = 2010^{1-a-b}$$

$$201^{\frac{1-a-b}{1-b}} = \left(2010^{1-b}\right)^{\frac{1-a-b}{1-b}} = 2010^{1-a-b} = 3$$

****

16) Na figura abaixo, tem-se um semicírculo de centro O e diâmetro AD e os semicírculos de diâmetros AB, BC, CD e os centros O_1, O_2 e O_3, respectivamente. Sabendo-se que $AB = BC = CD$ e que $AO = R$, a área sombreada é igual a:



(A) $\dfrac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{4}$

(B) $\dfrac{\pi R^2}{16}\left(2\sqrt{3}+\pi\right)$

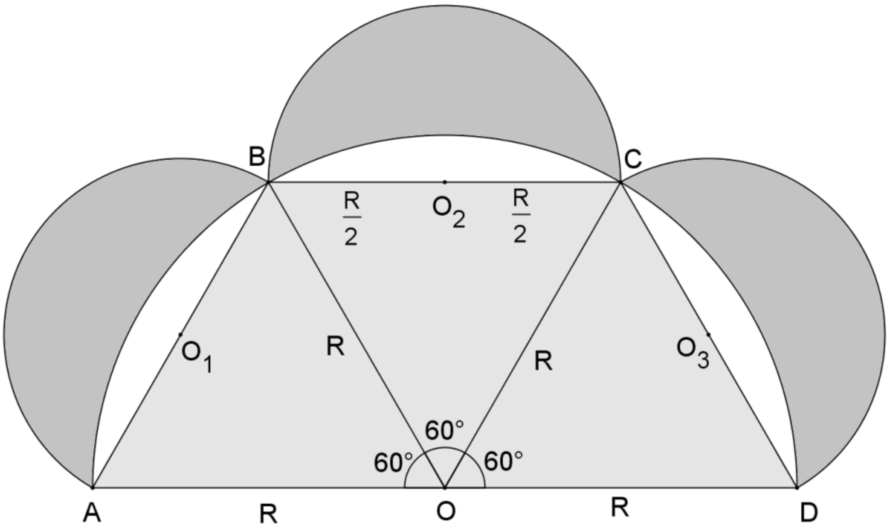
(C) $\frac{R^2}{8}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)$

(D) $\frac{R^2\left(5\sqrt{3}-2\pi\right)}{24}$

(E) $\frac{\pi R^2}{4}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:



O trapézio $ABCD$ é metade de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio R, então $AB = BC = CD = R$ e $AD = 2R$. A área do trapézio $ABCD$ é igual à área de três triângulos equiláteros de raio R.

A área sombreada é igual à área dos três semicírculos de centro O_1, O_2 e O_3, e raio $\frac{R}{2}$, menos a área dos três segmentos circulares (em branco na figura).

A área dos três segmentos circulares é igual à área do semicírculo de centro O e raio R, menos a área do trapézio $ABCD$.

Logo, a área sombreada é igual à área dos três semicírculos de centro O_1, O_2 e O_3, e raio $\frac{R}{2}$, menos a área do semicírculo de centro O e raio R, mais a área do trapézio $ABCD$.

$S_{\text{sombreada}} = 3 \cdot \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} + 3 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{8}\left(6\sqrt{3}-\pi\right)$ unidades de área.

17) Considere o sistema linear S, de incógnita x e y:

$$S:\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Se os pares ordenados $(x,y)=(3,-5)$ e $(x,y)=(2,-3)$ são soluções de S, então:

(A) $(-3,7)$ também é solução de S.

(B) $(3,-7)$ também é solução de S.

(C) S só tem as duas soluções apresentadas

(D) S só tem mais uma solução além das apresentadas.

(E) Qualquer par ordenado de números reais é solução de S.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Se os pares ordenados $(x,y)=(3,-5)$ e $(x,y)=(2,-3)$ são soluções de S, então o sistema é possível e indeterminado e, portanto, possui infinitas soluções.

Como $(3,-5)$ e $(2,-3)$ são soluções de S, então qualquer combinação linear dessas soluções também será solução de S. Como, $(-3,7)=(-5)\cdot(3,-5)+6\cdot(2,-3)$, então $(-3,7)$ também é solução de S.

O problema também pode ser resolvido observando que S é a interseção de duas retas $a_1x+b_1y=c_1$ e $a_2x+b_2y=c_2$. Como S possui duas soluções, então é possível e indeterminado e, portanto, as duas retas são coincidentes.

Dessa forma, a reta que representa as soluções do sistema S é a reta r que passa pelos pontos $(3,-5)$ e $(2,-3)$, que é dada por $\frac{y-(-5)}{x-3}=\frac{(-3)-(-5)}{2-3} \Leftrightarrow \frac{y+5}{x-3}=-2 \Leftrightarrow y=-2x+1$.

O ponto $(-3,7)\in r$, pois $7=-2\cdot(-3)+1$, logo $(-3,7)$ também é solução de S.

18) O valor de $\frac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\right)}{2\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+1\right)^2-1\right]}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ é:

(A) $\frac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$

(B) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12}$

(C) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{24}$

(D) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{24}$

(E) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{30}}{24}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\frac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\right)}{2\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+1\right)^2-1\right]}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\right)}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{3}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\left(5+2\sqrt{6}-5\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{24}$$

19) Quantos triângulos obtusângulos existem, cujos lados são expressos por números inteiros consecutivos?
(A) um.
(B) dois.
(C) três.
(D) quatro.
(E) cinco.

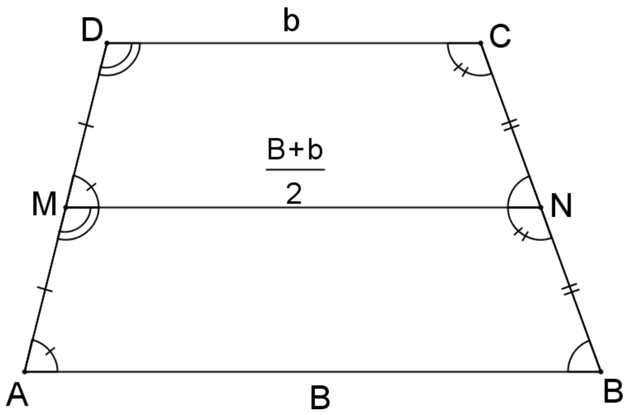
RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Sejam $k-1$, k e $k+1$ os lados do triângulo, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 2$.
As medidas dos lados devem satisfazer a desigualdade triangular. Assim, $k+1<k+(k-1) \Leftrightarrow k>2$.
A síntese de Clairaut estabelece que um triângulo é obtusângulo se, e somente se, o quadrado do seu maior lado é maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados. Assim, temos:
$(k+1)^2>k^2+(k-1)^2 \Leftrightarrow k^2-4k<0 \Leftrightarrow 0<k<4$.
As duas condições acima implicam $2<k<4$. Logo, o único valor de k que faz o triângulo ser obtusângulo é $k=3$. O triângulo em questão possui lados 2, 3 e 4.
Portanto, existe apenas um triângulo que satisfaz as condições estabelecidas.

20) Um quadrilátero de bases paralelas B e b, é dividido em dois outros semelhantes pela sua base média, caso seja, necessariamente, um:
(A) paralelogramo.
(B) trapézio retângulo.
(C) trapézio isósceles.
(D) trapézio qualquer.
(E) losango.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:



Se $\#ABNM \sim \#MNCD$, então seus lados correspondentes são proporcionais.

Mas, $\frac{AM}{DM} = 1$, então a razão de semelhança é 1, o que implica $\#ABNM \equiv \#MNCD$.

Portanto, $b = \frac{B+b}{2} \wedge B = \frac{B+b}{2} \Leftrightarrow B = b$.

Um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e iguais é um paralelogramo.

Acompanhe o blog www.mademactica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:

Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016