Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável: Fabio Martins de Leonardo

Conexões com a Matemática

2

Ensino Médio

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

Conexões com a Matemática

2

Ensino Médio

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável: Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Componente curricular: MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

3ª edição

São Paulo, 2016

MODERNA

Elaboração dos originais

Alexandre Raymundo
Bacharel e licenciado em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu de São Paulo. Professor em escolas particulares no Brasil e na Turquia.

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Débora Regina Yogui
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Enrico Briese Casentini
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Juliane Matsubara Barroso
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora em escolas públicas e particulares de São Paulo por 10 anos. Editora.

Kátia Takahashi
Licenciada em Ciências pelo Centro Universitário Sant'Anna. Professora em escolas particulares de São Paulo por 9 anos. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria Cecília da Silva Veridiano
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Osvaldo Shigueru Nakao
Doutor em Engenharia Civil (área de concentração: Engenharia de estruturas) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Débora Regina Yogui, Enrico Briese Casentini, Juliana Ikeda
Assistência editorial: Roberto Paulo de Jesus Silva
Preparação de texto: ReCriar editorial
Gerência de *design* e produção gráfica: Sandra Botelho de Carvalho Homma
Coordenação de produção: Everson de Paula
Suporte administrativo editorial: Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Mariza de Souza Porto, Adriano Moreno Barbosa
Capa: Douglas Rodrigues José
Foto: Reflexão do céu azul na janela de vidro curvilínea do prédio
© Philippe Lejeanvre/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Camila Ferreira Leite, Marcia Cunha do Nascimento
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Edição de infografia: Luiz Iria, Priscilla Boffo, Otávio Cohen
Coordenação de revisão: Adriana Bairrada
Revisão: Mariana Belli, Rita de Cássia Sam, Viviane Teixeira Mendes
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Böck, Marcia Sato
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio N. Precendo, Hélio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Viviane Pavani
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. — 3. ed. — São Paulo : Moderna, 2016.

Obra em 3 v.
Bibliografia
"Componente curricular: Matemática".

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

16-01379 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2016
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta coleção é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma obra de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo os conceitos com uma imagem. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e com a *Autoavaliação*.

As seções *Pesquisa e ação*, *Compreensão de texto* e *Sugestões de leitura* complementam e enriquecem a obra.

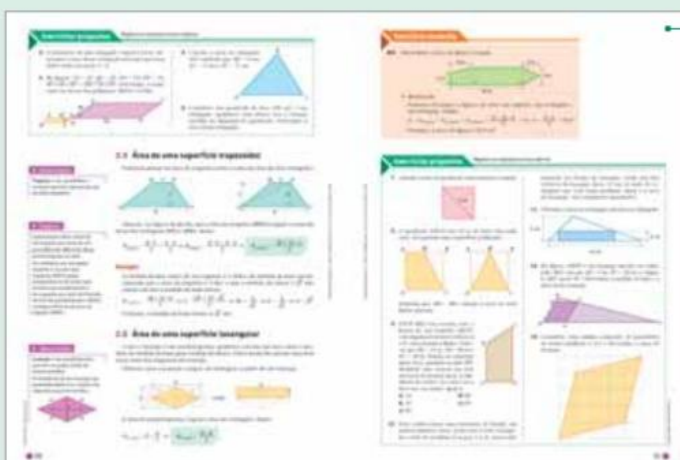
Com esta coleção, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do aluno.

Os editores

Organização da Coleção

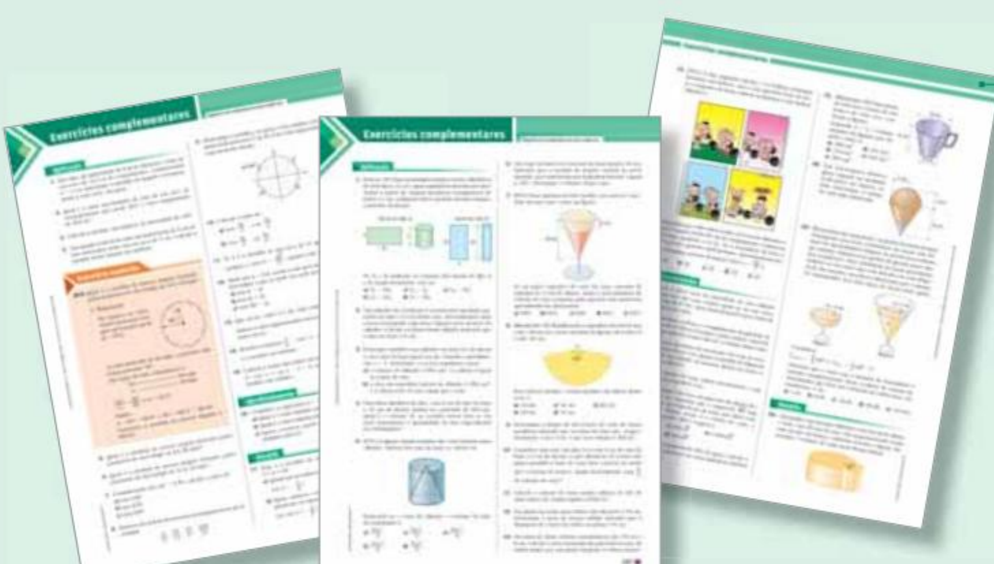
Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere os conceitos abordados no capítulo.



Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



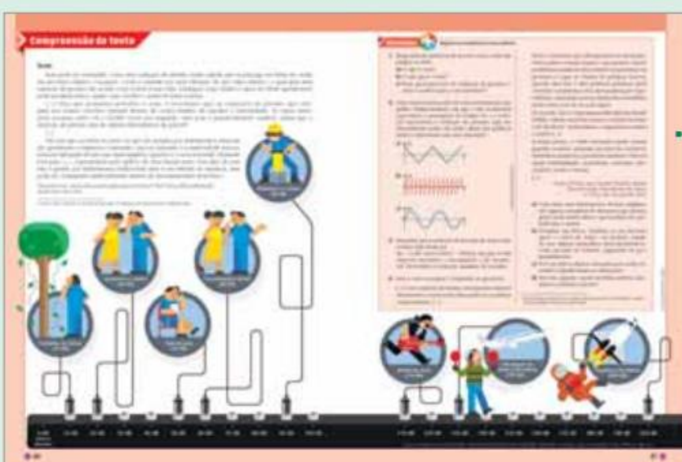
Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.

Ícone de atividade em grupo

Autoavaliação
Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Pesquisa e ação
Diferentes atividades práticas de realização em grupo relacionadas com o tema abordado no capítulo, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.



Compreensão de texto
Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.
Nessa seção, os alunos encontram mais uma oportunidade de desenvolver uma atividade em grupo.

Sugestões de leitura
Indica-se a leitura de livros ficcionais cujos temas foram estudados no livro. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura.

Sumário

Capítulo 1

Ciclo trigonométrico – 1ª volta

ANEESE/SHUTTERSTOCK

A High Roller, em Las Vegas, EUA, é a maior roda-gigante do mundo. Foi inaugurada em 2014 e tem 167 metros de altura. Foto de 2014.

Objetivos do capítulo

- Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.
- Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.
- Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.
- Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Resolver equações trigonométricas.

Nos anos anteriores, estudamos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo e as usamos para obter a medida de lados e de ângulos. No entanto, elas foram definidas apenas para ângulos agudos e não se mostram práticas para trabalhar com triângulos que não sejam retângulos.

Neste capítulo, definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente em uma circunferência, o que possibilitará a aplicação da Trigonometria a triângulos quaisquer e servirá de base para o desenvolvimento do próximo capítulo "Funções trigonométricas".

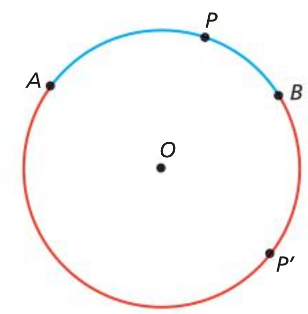
1 Arcos de uma circunferência

Dois pontos, A e B, de uma circunferência a dividem em duas partes. Cada uma dessas partes, incluindo esses pontos, é chamada de **arco da circunferência**. Na figura ao lado, temos:

- $\overset{\frown}{APB}$: arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\overset{\frown}{AP'B}$: arco de extremidades A e B, contendo P'.

Se não houver dúvida sobre qual das partes estamos considerando, podemos indicar o arco apenas por $\overset{\frown}{AB}$.

Podemos obter duas medidas de um arco: seu comprimento (medida linear) e sua medida angular. É o que veremos a seguir.

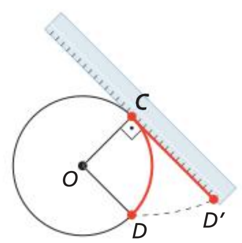


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

1.1 Comprimento de um arco

O **comprimento** de um arco é sua medida linear e pode ser indicado em milímetro, centímetro, metro etc.

Por exemplo, considerando o arco $\overset{\frown}{CD}$, destacado em vermelho na figura abaixo, se pudéssemos "esticar" esse arco, poderíamos medi-lo com uma régua.



Você provavelmente viu em anos anteriores que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por $\boldsymbol{C = 2\pi r}$. Essa fórmula será usada para obter o comprimento de arcos de circunferência, conforme veremos no exercício resolvido **R1**.

Observação

Lembre-se de que π é um número irracional. Nos cálculos práticos, normalmente adotamos $\pi \simeq 3{,}14$.

Ver comentário no Guia do professor.

Exercício resolvido

R1. Calcular o comprimento de um arco de 50° contido em uma circunferência com 8 cm de raio.

▸ ***Resolução***

Lembrando que uma circunferência tem 360° e seu comprimento é dado por $2\pi r$, podemos montar a seguinte regra de três:

medida do arco (grau)	comprimento (cm)
360°	$2\pi \cdot 8$
50°	x

$$x = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 50°}{360°} = \frac{20\pi}{9}$$

Substituindo π por 3,14, obtemos:

$$x \simeq \frac{20 \cdot 3{,}14}{9} \Rightarrow x \simeq 6{,}98$$

Logo, o arco mede aproximadamente 6,98 cm.

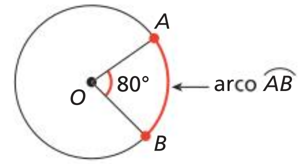
1.2 Medida angular de um arco

Sempre que nos referirmos à medida de um arco de circunferência estamos nos referindo à sua **medida angular**, que é igual à medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura a seguir, temos o arco $\overset{\frown}{AB}$ destacado em vermelho e seu ângulo central correspondente $A\hat{O}B$.

Como o ângulo $A\hat{O}B$ mede 80°, o arco $\overset{\frown}{AB}$ também mede 80°. Indicamos: $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B) = 80°$

Geralmente, as unidades usadas para medir um arco são o grau e o radiano.



O grau

Considere uma circunferência dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. Define-se **um grau** (1°) como a medida angular de cada um desses arcos. Por isso, dizemos que a circunferência tem 360°.

A ideia de dividir uma circunferência em 360 partes surgiu com os astrônomos babilônicos, milênios antes de Cristo. Acredita-se que esses estudiosos tenham escolhido essa divisão ao notar que um ano tem aproximadamente 360 dias. Essa divisão também foi adotada por matemáticos gregos, como Hiparco de Niceia (século II a.C.) e Ptolomeu de Alexandria (c. 90-168), tornando-se usual na Geometria e na Trigonometria.

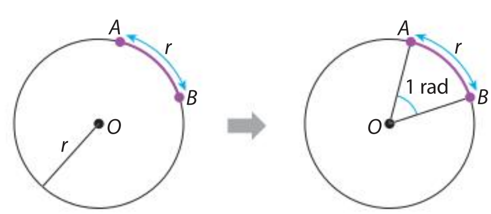
Também foram criados **submúltiplos do grau**. Observe:

- Dividindo 1 grau em 60 partes iguais, obtemos 1 minuto (1′). Ou seja, 1° = 60′.
- Dividindo 1 minuto em 60 partes iguais, obtemos 1 segundo (1″). Ou seja, 1′ = 60″.

O radiano

Para medir arcos e ângulos, também podemos usar o **radiano**. A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe a circunferência de raio ***r*** representada abaixo. Como o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é ***r***, sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 1 \text{ rad}$



No exercício resolvido a seguir, veremos que uma circunferência (ou seja, um arco de 360°) mede 2π rad.

Exercício resolvido

R2. Calcular a medida angular, em radiano, de uma circunferência.

▸ ***Resolução***

Dada uma circunferência de raio r, um arco de medida 1 rad tem o comprimento igual a r. Como o comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

medida do arco (rad)	comprimento (cm)
1	r
α	$2\pi r$

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Logo, uma circunferência mede 2π rad.

◆ Explore

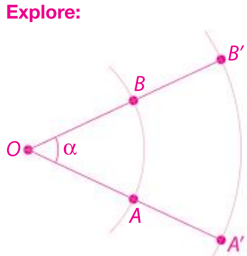
Desenhe em seu caderno duas circunferências concêntricas, com raios diferentes. Desenhe um ângulo central de medida α que determine nessas circunferências, respectivamente, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$.

- As medidas angulares de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais?
- Os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais?

◆ Observação

Se olharmos uma mesma estrela em dois dias consecutivos, no mesmo horário e do mesmo ponto da Terra, haverá um deslocamento aparente de 1° entre suas posições, já que um dia corresponde a aproximadamente $\frac{1}{360}$ do ano.

Explore:



ADILSON SECCO

Espera-se que os alunos percebam que a medida angular do arco depende apenas da medida do ângulo central; logo, as medidas angulares são iguais. Já os comprimentos dos arcos são diferentes, pois dependem do raio da circunferência que contém cada um deles; quanto maior o raio, maior será o comprimento da circunferência.

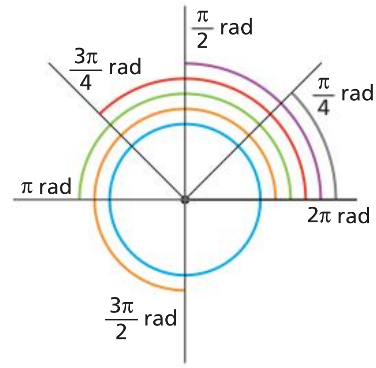
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

1.3 Relação entre grau e radiano

Uma circunferência mede 360° ou 2π rad. Assim, um ângulo raso, que determina uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede 180° ou π rad.

A tabela abaixo fornece a relação entre as medidas, em grau e em radiano, de alguns ângulos. Observe também a figura ao lado.

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



ADILSON SECCO

Exemplos

a) Vamos obter a medida, em grau, de um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad:

grau — radiano

180 —— π

x —— $\frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad mede 30°.

b) Vamos obter a medida, em radiano, de um arco de 200°:

radiano — grau

π —— 180

x —— 200

$$x = \frac{200 \cdot \pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$$

Assim, um arco de 200° mede $\frac{10\pi}{9}$ rad.

c) Vamos determinar a medida x, em grau e em radiano, de um arco com aproximadamente 12,56 cm de comprimento, em uma circunferência com 12 cm de raio.

- Medida em grau:

comprimento (cm) — medida (grau)

12,56 —— x

$2 \cdot \pi \cdot 12$ —— 360

$$x \simeq \frac{360 \cdot 12{,}56}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12} \Rightarrow x \simeq 60$$

Assim, o arco mede aproximadamente 60°.

- Medida em radiano:

comprimento (cm) — medida (rad)

12,56 —— x

$2 \cdot \pi \cdot 12$ —— 2π

$$x = \frac{2\pi \cdot 12{,}56}{2 \cdot \pi \cdot 12} = \frac{12{,}56}{12} \simeq 1{,}047$$

Assim, o arco mede aproximadamente 1,047 rad.

◆ Observação

Veja outro modo:

$\frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{180°}{6} = 30°$

◆ Observação

Pela definição de radiano, poderíamos ter feito esse cálculo assim:

comprimento (cm) — medida (rad)

12,56 —— x

12 —— 1

$$x = \frac{12{,}56}{12} \simeq 1{,}047$$

2. a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{2\pi}{3}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) $\frac{7\pi}{6}$ rad f) $\frac{4\pi}{3}$ rad

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

a) $\frac{5\pi}{4}$ rad 225° **b)** $\frac{7\pi}{6}$ rad 210° **c)** $\frac{\pi}{2}$ rad 90°

2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:

a) 30° **c)** 120° **e)** 210°
b) 60° **d)** 150° **f)** 240°

3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.
144°; $\frac{4\pi}{5}$ rad

4. O ponteiro das horas de um relógio tem 7 cm de comprimento. 120°; $\frac{2\pi}{3}$ rad

a) Quantos graus esse ponteiro percorre das 13 h às 17 h? Qual é essa medida em radiano?

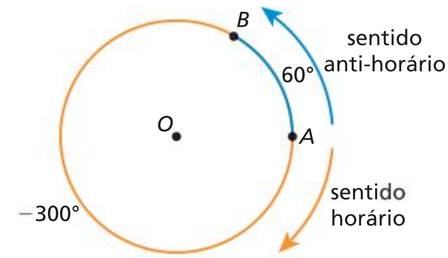
b) Quantos centímetros sua extremidade percorre das 13 h às 17 h? $\simeq$ 14,65 cm

5. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de 70°. Sabendo que esse pêndulo tem 25 cm de comprimento, calcule o comprimento aproximado do arco que ele descreve.
$\simeq$ 30,5 cm

2 Ciclo trigonométrico

Podemos percorrer uma circunferência em dois sentidos: no sentido horário e no sentido anti-horário. Na circunferência representada ao lado, sendo A o ponto de partida, adotamos:

- o sentido anti-horário para medidas positivas. Assim, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 60°$.
- o sentido horário para medidas negativas. Assim, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = -300°$.

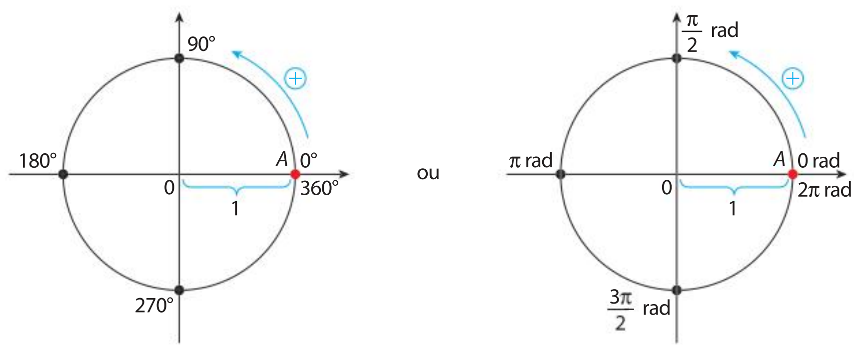


A **circunferência trigonométrica**, ou **ciclo trigonométrico**, tem centro na origem $O(0, 0)$ de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. No ciclo trigonométrico, o ponto $A(1, 0)$ é a **origem** de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco $\overset{\frown}{AP}$ (**P** é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos, a cada ponto **P** da circunferência, a medida de $\overset{\frown}{AP}$ tal que $0 \text{ rad} \leq \text{med}(\overset{\frown}{AP}) \leq 2\pi \text{ rad}$, ou $0° \leq \text{med}(\overset{\frown}{AP}) \leq 360°$.

Os arcos com medida negativa e com medida maior que 2π serão abordados no próximo capítulo.

Observação

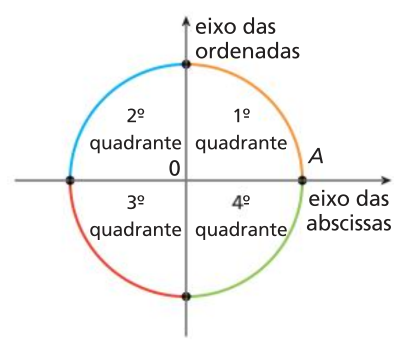
Daqui em diante, convencionamos que a notação $\overset{\frown}{AB}$ representa um arco da circunferência orientada no sentido anti-horário, com origem em A e extremidade em B.



Observação

No ciclo trigonométrico, pelo fato de o raio ser unitário, a medida de um arco em radiano é numericamente igual ao seu comprimento.

O **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas** do plano cartesiano dividem o ciclo em quatro **quadrantes**, como mostra a figura abaixo.



Reflita

Comentário: Se achar conveniente, repetir a pergunta para arcos do 3º e do 4º quadrante.

Entre quais valores, em grau, está a medida de um arco do 2º quadrante? E em radiano?
entre 90° e 180°; entre $\frac{\pi}{2}$ rad e π rad

Desse modo, a medida de um arco do 1º quadrante, por exemplo, está entre 0° e 90°.

Observação

Quando a extremidade P de um arco $\overset{\frown}{AP}$ pertence a algum quadrante, dizemos que o arco $\overset{\frown}{AP}$ é um arco desse quadrante.

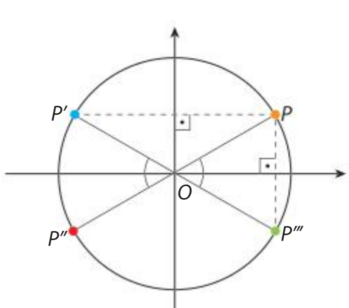
2.1 Simetria no ciclo trigonométrico

Vamos estudar três tipos de simetria no ciclo trigonométrico: em relação ao eixo das ordenadas, em relação à origem O e em relação ao eixo das abscissas.

Na figura ao lado:

- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas;
- P e P'' são simétricos em relação à origem O;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que os arcos são **arcos simétricos**.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

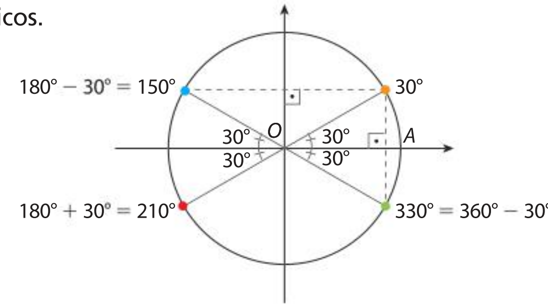
Exemplo

Dado o arco de 30°, vamos obter as medidas de seus arcos simétricos. Observe o ciclo trigonométrico ao lado.

As medidas de seus arcos simétricos são:

- em relação ao eixo das ordenadas: 180° − 30° = 150°
- em relação à origem: 180° + 30° = 210°
- em relação ao eixo das abscissas: 360° − 30° = 330°

Esse mesmo raciocínio pode ser usado para outros arcos, medidos em grau ou em radiano.



Exercício resolvido

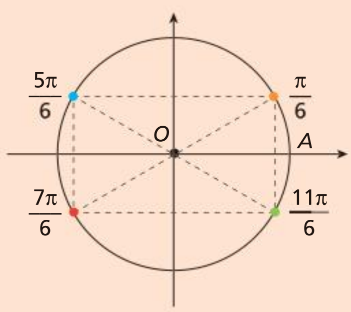
R3. Determinar as medidas, em radiano, dos arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad em relação ao eixo das ordenadas, à origem O e ao eixo das abscissas.

▶ ***Resolução***

Os arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ medem:

- em relação ao eixo das ordenadas: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
- em relação à origem O: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
- em relação ao eixo das abscissas: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Veja a solução gráfica no ciclo trigonométrico abaixo.



◆ **Observação**

Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida, estiver associado a um ponto, subentende-se que o valor representa a medida de um arco em radiano.

Exercícios propostos

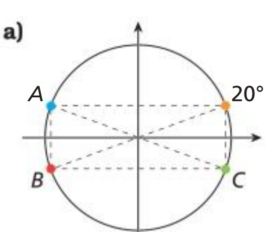
Registre as respostas em seu caderno

6. Em seu caderno, desenhe um ciclo trigonométrico e assinale os pontos que são extremidades dos arcos de 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°.
Ver resolução no Guia do professor.

7. Considere o ciclo trigonométrico desenhado no exercício anterior. Determine, em radiano, as medidas dos arcos indicados no ciclo.
Ver resolução no Guia do professor.

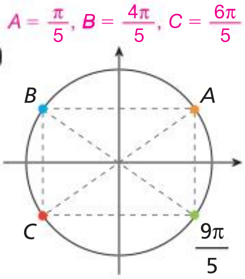
8. Calcule a medida dos arcos de extremidades A, B e C nos ciclos trigonométricos representados abaixo.

a)



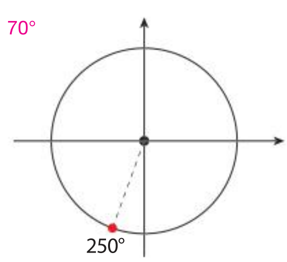
$A = 160°$, $B = 200°$, $C = 340°$

b) $A = \frac{\pi}{5}$, $B = \frac{4\pi}{5}$, $C = \frac{6\pi}{5}$

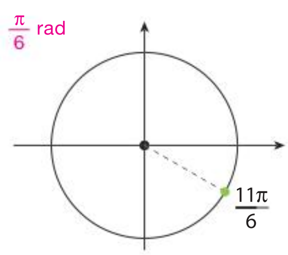


9. Obtenha a medida dos arcos do 1º quadrante que são simétricos aos arcos cujas medidas estão indicadas nas figuras.

a) 70°



b) $\frac{\pi}{6}$ rad



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Seno, cosseno e tangente

Já estudamos o seno, o cosseno e a tangente de ângulos agudos em um triângulo retângulo. Agora, vamos estudar esses conceitos para arcos da circunferência trigonométrica.

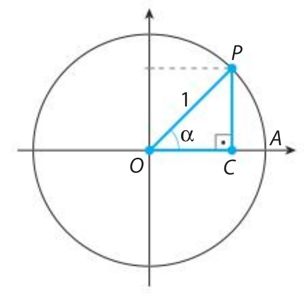
3.1 Seno e cosseno de um arco

Se achar necessário, retome com os alunos, que, em um triângulo retângulo, temos:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\cos \alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α no 1º quadrante do ciclo trigonométrico. Lembrando que o ciclo tem raio unitário, no triângulo OPC, temos:



$$\text{sen } \alpha = \frac{CP}{OP} = \frac{CP}{1} = CP$$

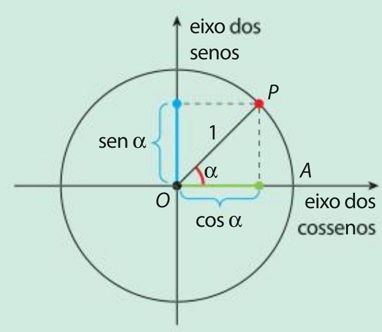
$$\cos \alpha = \frac{OC}{OP} = \frac{OC}{1} = OC$$

Ou seja, nesse caso, o seno de α corresponde à ordenada do ponto P, e o cosseno de α, à abscissa de P.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir seno e cosseno para qualquer arco do ciclo trigonométrico.

Nesta obra, não faremos distinção entre seno de um arco ou de um ângulo e seno da medida de um arco ou da medida de um ângulo.

Para todo arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, de medida α rad, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos:



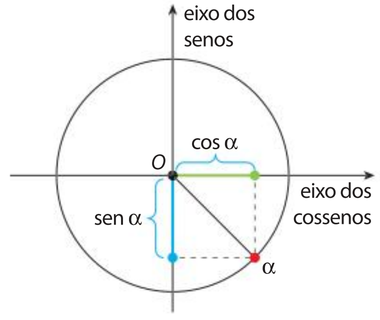
- **seno** de α é a ordenada do ponto P;
- **cosseno** de α é a abscissa do ponto P.

Por isso, podemos chamar o eixo das ordenadas de **eixo dos senos** e o eixo das abscissas de **eixo dos cossenos**.

Note, portanto, que o seno e o cosseno podem ser positivos ou negativos, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

Exemplo

Vamos analisar o sinal do seno e do cosseno de um arco do 4º quadrante de medida α.



Observando o ciclo, concluímos que:

- seno de α é negativo ($\text{sen } \alpha < 0$);
- cosseno de α é positivo ($\cos \alpha > 0$).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

Determine o sinal do seno e do cosseno de arcos do:

- 1º quadrante; sen > 0; cos > 0
- 2º quadrante; sen > 0; cos < 0
- 3º quadrante. sen < 0; cos < 0

Exercícios resolvidos

R4. Escrever os senos dos arcos a seguir em ordem crescente.

$$\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}, \frac{10\pi}{9}$$

▸ ***Resolução***

Como não aparece a unidade de medida, as medidas dos arcos estão em radiano. Para facilitar, podemos converter essas medidas em grau:

$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$

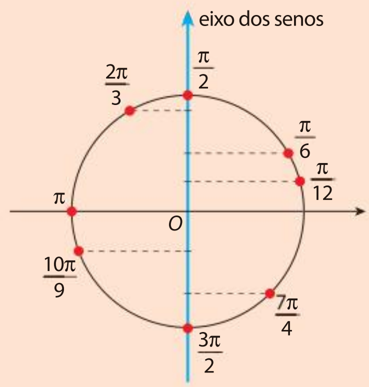
$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°$

$\frac{\pi}{12} = \frac{180°}{12} = 15°$

$\frac{7\pi}{4} = \frac{7 \cdot 180°}{4} = 315°$

$\frac{10\pi}{9} = \frac{10 \cdot 180°}{9} = 200°$

Agora, vamos representá-las no ciclo trigonométrico.



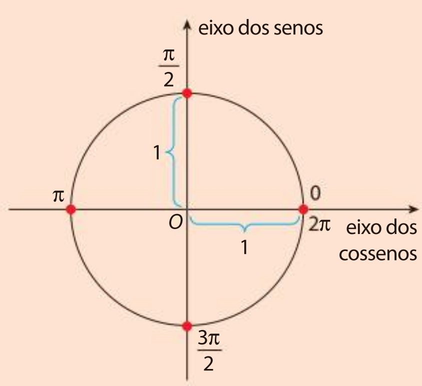
Observando o eixo dos senos, escrevemos os senos em ordem crescente:

$$\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}, \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}, \text{sen}\,\frac{10\pi}{9}, \text{sen}\,\pi, \text{sen}\,\frac{\pi}{12}, \text{sen}\,\frac{\pi}{6}, \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}, \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

R5. Obter o seno e o cosseno de $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π.

▸ ***Resolução***

Vamos representar essas medidas no ciclo trigonométrico.



Lembrando que o raio vale 1, obtemos:

$\text{sen}\,0 = \text{sen}\,2\pi = 0$ | $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ | $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\text{sen}\,\pi = 0$ | $\cos \pi = -1$

$\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$ | $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

◆ Reflita

a) $\frac{10\pi}{9}, \frac{7\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{2}$

Observe a figura ao lado.

a) Quais das medidas representadas têm seno negativo?

b) Lembrando que o raio da circunferência trigonométrica é 1, descubra os valores abaixo.

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$; $\text{sen}\,\pi$; $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$; $\text{sen}\,\pi = 0$; $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$

◆ Observação

No ciclo trigonométrico, sendo α a medida de um arco, sempre teremos:

$-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$

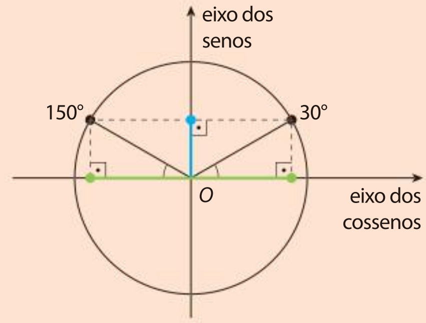
$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R6. Obter o seno e o cosseno de 150°.

▶ ***Resolução***

Vamos determinar esses valores por simetria no ciclo trigonométrico. Primeiro, marcamos o arco de 150° e seu correspondente no 1º quadrante.



Depois, observamos que:

- sen 150° é positivo e tem o mesmo valor que sen 30°;
- cos 150° é negativo e vale o oposto de cos 30°.

Como sabemos os valores para 30°, concluímos que:

$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

◆ Observação

Vamos relembrar os valores do seno e do cosseno dos ângulos notáveis:

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

10. Indique o sinal das expressões.

a) sen 215° · sen 280° positivo

b) (cos 50° + cos 325°) · (cos 215° + cos 145°) negativo

11. Escreva os cossenos dos arcos abaixo em ordem crescente sem calcular seus valores.

$$0,\ \frac{4\pi}{7},\ \frac{6\pi}{7},\ \pi \text{ e } \frac{8\pi}{5}$$

$\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

12. Dado sen 55° ≃ 0,8, calcule o valor aproximado de:

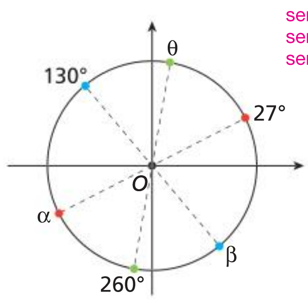
a) sen 125° ≃ 0,8 **b)** sen 235° ≃ −0,8 **c)** sen 305° ≃ − 0,8

13. Sabendo que cos 25° ≃ 0,9, registre o valor aproximado de:

a) cos 155° ≃ −0,9 **b)** cos 205° ≃ −0,9 **c)** cos 335° ≃ 0,9

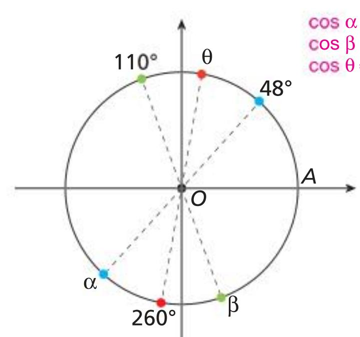
14. Descubra os valores aproximados de sen α, sen β e sen θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: sen 27° ≃ 0,45; sen 50° ≃ 0,77 e sen 80° ≃ 0,98)

sen α ≃ −0,45
sen β ≃ −0,77
sen θ ≃ 0,98



15. Descubra os valores aproximados de cos α, cos β e cos θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: cos 48° ≃ 0,67; cos 70° ≃ 0,34 e cos 80° ≃ 0,17)

cos α ≃ −0,67
cos β ≃ 0,34
cos θ ≃ 0,17



$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \text{sen } \frac{7\pi}{6} = \text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

16. Determine o seno dos arcos simétricos a $\frac{\pi}{6}$ rad nos demais quadrantes.

17. Calcule o valor das expressões.

a) $\text{sen } 2\pi + \cos 2\pi + \text{sen } \pi + \cos \pi$ 0

b) $\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$ 2

c) $\text{sen } \frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6}$ 0

d) $\dfrac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{6}}$ $\frac{1}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Explicar aos alunos que os valores obtidos são aproximações. A quantidade de casas decimais varia de acordo com o modelo do aparelho.

18. Para calcular o seno de $\frac{2\pi}{5}$, Edna digitou no painel avançado da calculadora de seu celular esta sequência de teclas:

$\boxed{\text{sin}}\ \boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

e obteve 0,95106.

Assim, concluiu que sen $\frac{2\pi}{5} \simeq 0{,}95$.

Agora, com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, calcule os valores a seguir dando o resultado com três casas decimais.

a) sen $\frac{\pi}{9}$ 0,342 **b)** sen $\frac{2\pi}{9}$ 0,643 **c)** sen $\frac{3\pi}{9}$ 0,866

(*Observação*: O procedimento pode variar dependendo do modelo do aparelho. Em alguns, por exemplo, a medida deve ser digitada antes da tecla $\boxed{\text{sin}}$. Nas calculadoras científicas, deve-se verificar se a unidade de medida utilizada – rad – está selecionada.)

19. Com base nos valores encontrados no exercício anterior, classifique cada igualdade em verdadeira ou falsa.

a) $2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{9} = \text{sen}\ \frac{2\pi}{9}$ falsa

b) $\text{sen}\ \frac{\pi}{9} + \text{sen}\ \frac{2\pi}{9} = \text{sen}\ \frac{3\pi}{9}$ falsa

20. Em que quadrantes os arcos têm seno e cosseno com mesmo sinal? Nesses quadrantes, para que valores de α tem-se sen α = cos α?

1º quadrante: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3º quadrante: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

21. Dê o valor de x, em grau, com $0° \leq x \leq 360°$, para os quais:

a) sen $x = \frac{1}{2}$ $x = 30°$ ou $x = 150°$

b) cos $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = 135°$ ou $x = 225°$

3.2 Tangente de um arco

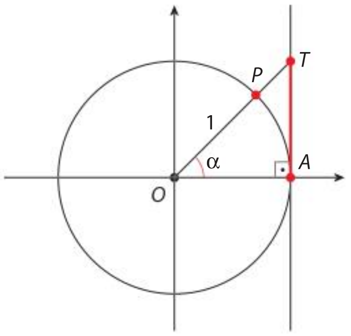
Considere o ciclo trigonométrico ao lado, um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α do 1º quadrante e a reta perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto A. Prolongando o segmento $\overline{OP}$, obtemos na reta vertical o ponto T, conforme mostra a figura ao lado.

Lembrando que o ciclo tem raio unitário, no triângulo AOT, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Note que, nesse caso, a tangente de α corresponde à ordenada do ponto T.

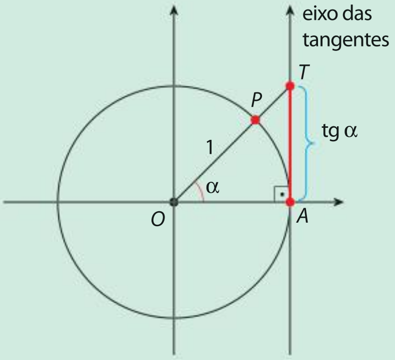
Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir tangente para qualquer arco do ciclo trigonométrico.



Se achar necessário, retome com os alunos que, em um triângulo retângulo, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a}\ \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a}\ \alpha}$$

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, de medida α rad, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$. Seja T o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto A.



A **tangente** de α é a ordenada do ponto T.

◆ Reflita

Vimos que, para qualquer valor α, os valores de seno e cosseno estão contidos no intervalo:

$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\ \alpha \leq 1$

Observe a figura ao lado e responda: isso também é válido para tg α?

Espera-se que os alunos concluam que não há limitação para tg α, uma vez que ela pode assumir qualquer valor real.

Vamos considerar a reta $\overleftrightarrow{AT}$ o **eixo das tangentes**, com origem A e o mesmo sentido e a mesma unidade do eixo dos senos.

Observe, portanto, que a tangente pode ser positiva ou negativa, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

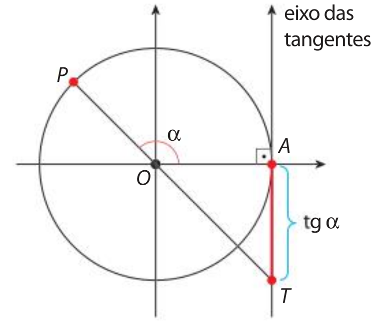
◆ Reflita

Para arcos de quais quadrantes a tangente é positiva? E para quais ela é negativa?

positiva: 1º e 3º quadrantes; negativa: 2º e 4º quadrantes

Exemplo

Considere um arco $\widehat{AP}$ de medida α do 2º quadrante. O prolongamento do segmento $\overline{OP}$ com o eixo das tangentes é o ponto T, conforme mostra a figura ao lado. Note que, nesse caso, tg α é negativa.



◆ Observação

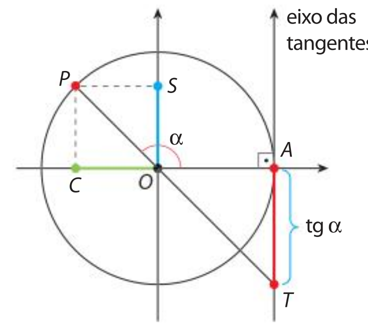
Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes têm mesma medida e seus lados correspondentes são proporcionais.

Observe a figura ao lado. Note que os triângulos AOT e COP são semelhantes. Então:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{CP}{OC} \Rightarrow \frac{AT}{1} = \frac{OS}{OC}$$

Assim, concluímos que, no ciclo trigonométrico, também vale a seguinte relação:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$



◆ Observação

Note que a relação tg $x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ é coerente com o fato de a tangente não estar definida para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, pois, para tais arcos, cos x vale 0, e assim teríamos uma divisão com o denominador zero, o que é impossível.

Exercícios resolvidos

R7. Escrever em ordem crescente as tangentes dos arcos a seguir.

$$\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{10} \text{ e } \frac{15\pi}{8}$$

▶ ***Resolução***

Inicialmente, vamos converter essas medidas em grau e, em seguida, representá-las no ciclo trigonométrico.

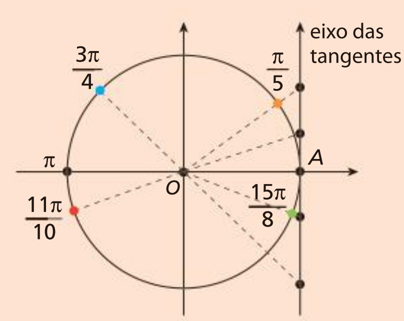
$\pi = 180°$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36°$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$$

$$\frac{11\pi}{10} = \frac{11 \cdot 180°}{10} = 198°$$

$$\frac{15\pi}{8} = \frac{15 \cdot 180°}{8} = 337{,}5°$$



Observando o eixo das tangentes, escrevemos as tangentes em ordem crescente:

$$\text{tg } \frac{3\pi}{4}, \text{ tg } \frac{15\pi}{8}, \text{ tg } \frac{11\pi}{10}, \text{ tg } \frac{\pi}{5}$$

◆ Reflita

Observe a figura ao lado e determine:

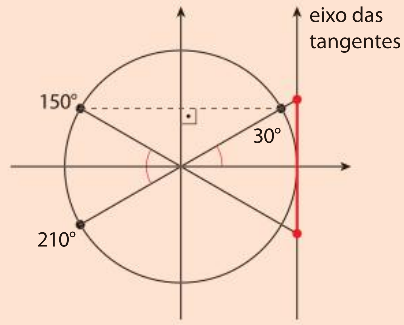
- tg 0 0
- tg π 0
- tg 2π 0

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R8. Obter a tangente de 150° e de 210°.

▸ ***Resolução***

Vamos determinar esses valores por simetria no ciclo trigonométrico. Primeiro, marcamos no ciclo trigonométrico os arcos, seus correspondentes no 1º quadrante e os prolongamentos dos raios, até intersectarem o eixo das tangentes.



Depois, observamos que:

- tg 150° é negativa e tem valor oposto a tg 30°;
- tg 210° é positiva e tem o mesmo valor que tg 30°.

Como conhecemos o valor da tangente de 30°, concluímos que:

$$\text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

Observação

Vamos relembrar os valores da tangente dos ângulos notáveis:

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

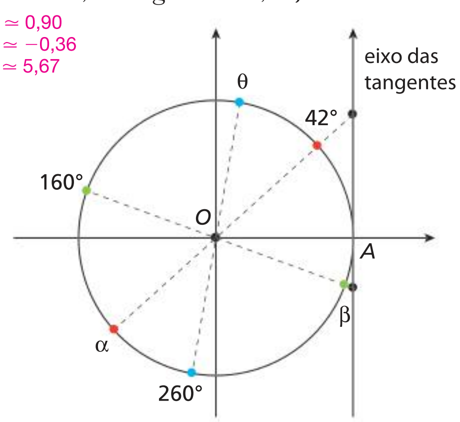
22. Indique o sinal das expressões:

a) (tg 40° + tg 220°) · (tg 315° + tg 165°) negativo

b) $\dfrac{2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4}}{-2}$ positivo

23. Descubra os valores aproximados de tg α, tg β e tg θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: tg 20° ≃ 0,36; tg 42° ≃ 0,90 e tg 80° ≃ 5,67)

tg α ≃ 0,90
tg β ≃ −0,36
tg θ ≃ 5,67



24. Dado tg 35° ≃ 0,7, registre o valor aproximado de:

a) tg 145° ≃ −0,7

b) tg 215° ≃ 0,7

c) tg 325° ≃ −0,7

25. Desenhe em seu caderno um ciclo trigonométrico e marque sobre ele ângulos de medidas α e 2α, com 0° < α < 45°.
Verifique se tg 2α = 2 · tg α. Espera-se que os alunos concluam que a igualdade não é verdadeira. Ver resolução no Guia do professor.

26. Considerando cos α ≃ 0,84 e sen α ≃ 0,55, responda às questões.

a) Sem efetuar cálculos, apenas analisando os valores dados acima, verifique se o valor de tg α é maior ou menor que 1. menor que 1

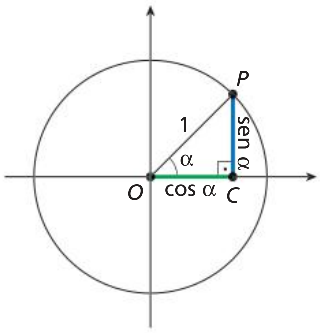
b) Determine o valor aproximado de tg α e compare-o com a resposta do item anterior. ≃ 0,65

c) Em qual quadrante se encontra o arco de medida α? 1º quadrante

d) Determine o sinal de tg (π − α), tg (π + α) e tg (2π − α). negativo; positivo; negativo

e) Determine os valores aproximados de tg (π − α), tg (π + α) e tg (2π − α). ≃ −0,65; ≃ 0,65; ≃ −0,65

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



ADILSON SECCO

3.3 Relação fundamental da Trigonometria

Observe o ciclo trigonométrico ao lado. O ponto ***P*** é extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α rad; logo, ***P*** tem coordenadas cos α e sen α. Os lados do triângulo *COP* medem: $OC = \cos\alpha$, $CP = \text{sen}\,\alpha$ e $OP = 1$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *COP*, obtemos a **relação fundamental da Trigonometria**:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Vimos que essa relação é válida para um arco do 1º quadrante. Agora, vamos verificar se ela continua válida para arcos dos demais quadrantes.

2º quadrante

- $\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,(\pi - \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha$
- $\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\,(\pi - \alpha) = (-\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

Assim: $\text{sen}^2\,(\pi - \alpha) + \cos^2\,(\pi - \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

3º quadrante

- $\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,(\pi + \alpha) = (-\text{sen}\,\alpha)^2 = \text{sen}^2\,\alpha$
- $\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\,(\pi + \alpha) = (-\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

Assim: $\text{sen}^2\,(\pi + \alpha) + \cos^2\,(\pi + \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

4º quadrante

- $\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,(2\pi - \alpha) = (-\text{sen}\,\alpha)^2 = \text{sen}^2\,\alpha$
- $\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \Rightarrow \cos^2\,(2\pi - \alpha) = \cos^2\alpha$

Assim: $\text{sen}^2\,(2\pi - \alpha) + \cos^2\,(2\pi - \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Verificamos, então, que a relação é válida para um arco de qualquer quadrante.

Nos casos em que ***P*** pertence a um dos eixos, temos:

- $\text{sen}^2\,0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1$
- $\text{sen}^2\,\pi + \cos^2\pi = 0^2 + (-1)^2 = 1$
- $\text{sen}^2\,\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1^2 + 0^2 = 1$
- $\text{sen}^2\,\frac{3\pi}{2} + \cos^2\frac{3\pi}{2} = (-1)^2 + 0^2 = 1$

Assim, verificamos que para qualquer arco $\overset{\frown}{AP}$ tal que med$(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, a relação fundamental da Trigonometria é válida.

Exercícios resolvidos

R9. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}5$ e que α é a medida de um arco do 2º quadrante, obter $\cos\alpha$.

▸ ***Resolução***

Podemos obter esse valor pela relação fundamental da Trigonometria:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(0{,}5)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 0{,}75$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos: $\cos\alpha \simeq \pm 0{,}87$

Como o arco é do 2º quadrante, concluímos que $\cos\alpha$ é negativo.

Logo, $\cos\alpha \simeq -0{,}87$.

R10. Sabe-se que α é a medida de um arco do 4º quadrante e que $\text{tg}\,\alpha = -2{,}4$. Calcular $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$.

▸ ***Resolução***

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -2{,}4$

$\text{sen}\,\alpha = -2{,}4 \cdot \cos\alpha$

Substituindo na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2{,}4 \cdot \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6{,}76 \cdot \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{100}{676} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{5}{13}$

Como o arco é do 4º quadrante: $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$

Como $\text{sen}\,\alpha = -2{,}4 \cdot \cos\alpha$, temos: $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{12}{13}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

27. Determine $\cos x$ sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$ e que x é um arco do 1º quadrante. $\frac{12}{13}$

28. Se $\cos x = 0{,}8$ e x é um arco do 4º quadrante, determine:

a) $\operatorname{sen} x$ $-0{,}6$ **b)** $\operatorname{tg} x$ $-0{,}75$

29. Se α é um arco do 3º quadrante e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, determine:

a) $\operatorname{sen} \alpha$ $-0{,}8$ **b)** $\cos \alpha$ $-0{,}6$

30. Verifique se, para um arco de medida α, é possível que $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}8$ e $\cos \alpha = 0{,}4$. não

4 Equações trigonométricas

Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada de **equação trigonométrica**.

Exemplos

- $\operatorname{sen} x = 0{,}5$
- $\operatorname{tg}^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$
- $\cos 2x = -\frac{3}{4}$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$

Na resolução das equações trigonométricas deste capítulo, vamos considerar, para as incógnitas, valores reais que representam as medidas dos arcos, em radiano, no **intervalo [0, 2π]**. Quando a medida de um arco ou ângulo estiver sem unidade de medida, será considerada a medida em radiano.

Observação

Equações do tipo $3x \cdot \cos \pi = 2$ ou $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + x = \frac{1}{2}$ **não são** equações trigonométricas, pois a incógnita x não representa a medida de um arco.

Observação

Nos capítulos **2** e **3**, trabalharemos com arcos de medida negativa e com arcos de medida maior que 2π rad.

Exercícios resolvidos

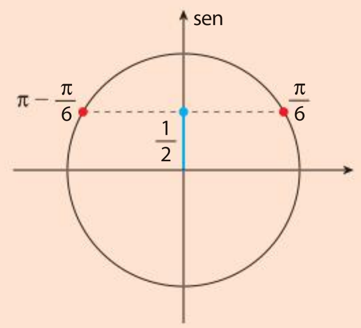
R11. Obter os valores de x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, para os quais $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

▶ ***Resolução***

No ciclo trigonométrico, observamos que, para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, temos dois arcos:

- no 1º quadrante, temos: $x = \frac{\pi}{6}$
- no 2º quadrante, temos: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.



R12. Encontrar o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, com $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi$.

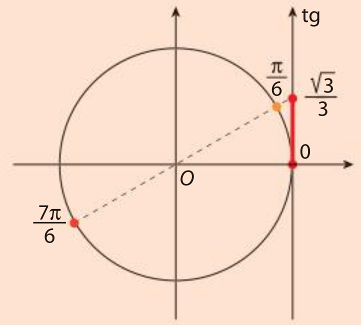
▶ ***Resolução***

Com tangente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ existem dois arcos:

- no 1º quadrante: $\frac{\pi}{6}$
- no 3º quadrante: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Assim: $2x = \frac{\pi}{6}$ ou $2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R13. Que valores de x, em radiano, satisfazem à equação $\cos x + 1 = \text{sen}^2\, x$?

▶ ***Resolução***

Da relação fundamental da Trigonometria vem: $\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$ (I)

Substituindo (I) na equação dada, obtemos:

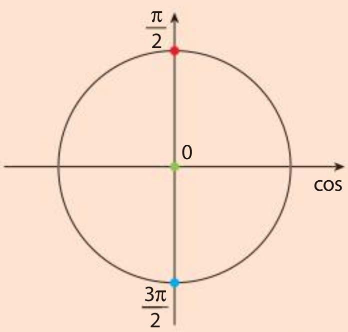
$\cos x + 1 = \underbrace{\text{sen}^2\, x}_{} \Rightarrow \cos x + 1 = \underbrace{1 - \cos^2 x}_{} \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$

Colocando $\cos x$ em evidência, temos: $(\cos x) \cdot (\cos x + 1) = 0$

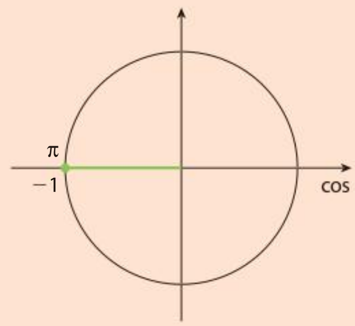
Para um produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja:

$\cos x = 0$ ou $\cos x = -1$

Observando os ciclos trigonométricos, encontramos os valores de x:



$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$



$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Portanto, os valores de x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, que satisfazem à equação são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e π.

R14. Determinar o conjunto solução da equação $\text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x - 2 = 0$.

▶ ***Resolução***

Substituindo $\text{sen}\, x$ por y, obtemos: $y^2 - y - 2 = 0$, com $-1 \leqslant y \leqslant 1$

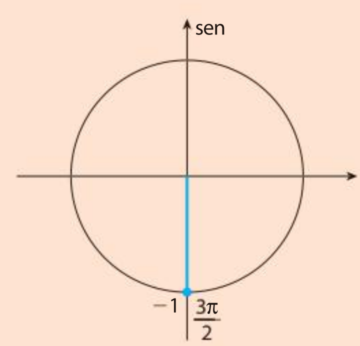
Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$y = 2$ (não serve, pois $-1 \leqslant y \leqslant 1$) ou $y = -1$

Logo, $\text{sen}\, x = -1$. Observando o ciclo trigonométrico, obtemos $x = \frac{3\pi}{2}$.

Portanto, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

31. Determine o valor de x, em radiano, com $x \in [0, 2\pi]$, nas equações:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$

b) $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

c) $\text{tg}\, x = -1$ $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$

d) $\text{sen}\, x = 1$ $\frac{\pi}{2}$

e) $\text{sen}\, x = 0$ 0 ou π ou 2π

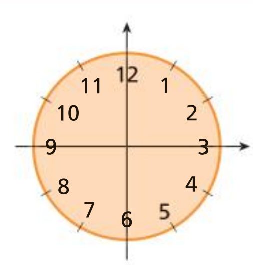
32. Determine os possíveis valores de x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, nas equações a seguir.

a) $\text{sen}\, x \cdot (\text{sen}\, x + 1) = 0$ 0 ou π ou 2π ou $\frac{3\pi}{2}$

b) $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

c) $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$ 0 ou 2π

33. Imagine o ciclo trigonométrico sobreposto ao mostrador de um relógio analógico, com centros coincidentes. Se o ponteiro das horas aponta para a origem do ciclo às 15 h, que horas o relógio indicará quando esse ponteiro se sobrepuser a um raio do ciclo correspondente a um ângulo cujo seno é igual a $-0{,}5$? 16 h ou 20 h ou 4 h ou 8 h



34. Determine x, em radiano, sabendo que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ e que $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. $\frac{3\pi}{2}$

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Em uma circunferência de 8 m de diâmetro, toma-se um arco de 15,7 m de comprimento. Considerando $\pi = 3,14$, determine a medida do ângulo correspondente a esse arco, em grau. 225°

2. Qual é o valor aproximado do raio de um arco de circunferência que mede 300° e tem comprimento de 200 m? $\simeq$ 38,22 m

3. Calcule a medida, em radiano, de um ângulo de 140°. $\frac{7\pi}{9}$ rad

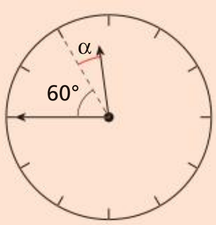
4. Um ângulo central de uma circunferência de 5 cm de raio determina sobre ela um arco de 7 cm. Calcule a medida desse ângulo em radiano. 1,4 rad

Exercício resolvido

R15. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 11 h 45 min?

▶ ***Resolução***

Na figura ao lado, observamos que o ângulo procurado mede $(\alpha + 60°)$.



A cada intervalo de 60 min, o ponteiro das horas percorre 30°.

Por regra de três, calculamos α:

30° ———— 60 min
α ———— 45 min

$$\frac{30°}{\alpha} = \frac{60}{45} \Rightarrow \alpha = 22,5°$$

Assim:

$\alpha + 60° = 22,5° + 60° = 82,5° = 82°30'$

Portanto, a medida do menor ângulo é 82°30'.

5. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2 h 20 min? 50°

6. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h 15 min? 37°30'

7. Considerando sen 32° = 0,53, calcule o valor de:

a) sen 148° 0,53

b) sen 212° −0,53

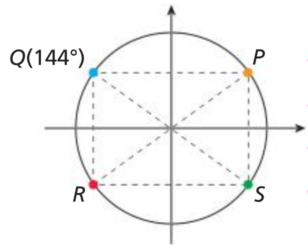
c) sen 328° −0,53

8. Escreva em ordem decrescente as tangentes dos arcos a seguir.

$$\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{23\pi}{12}$$

$\text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{12}$, $\text{tg}\,\frac{23\pi}{12}$, $\text{tg}\,\frac{7\pi}{12}$

9. Determine a medida, em grau e em radiano, dos ângulos indicados por *P*, *Q*, *R* e *S* no ciclo trigonométrico representado abaixo.



$P = 36°$ ou $\frac{\pi}{5}$ rad, $R = 216°$ ou $\frac{6\pi}{5}$ rad, $S = 324°$ ou $\frac{9\pi}{5}$ rad, $Q = \frac{4\pi}{5}$ rad

10. Calcule o valor de:

a) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{4}$ $\quad \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\frac{2\pi}{3} - \text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$ $\quad \frac{-3-2\sqrt{3}}{6}$

11. Se θ é a medida de um arco do 3º quadrante, em radiano, e $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, quanto vale tg θ? $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. Dado sen α = 0,8, sendo α um arco do 1º quadrante, determine o que se pede em cada item.

a) sen $(\pi - \alpha)$ 0,8

b) sen $(\pi + \alpha)$ −0,8

c) sen $(2\pi - \alpha)$ −0,8

13. Que arcos, entre 0 e 2π, têm cosseno igual a $-\frac{1}{2}$?

Esboce o ciclo trigonométrico em seu caderno e mostre esses arcos. $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$

14. Resolva a equação $\frac{3}{4} - \cos^2 x = 0$, em que $x \in [0, 2\pi]$ e é medido em radiano. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

15. Calcule a soma das raízes da equação $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, em que $x \in [0, 2\pi]$ e é medido em radiano. 3π

Aprofundamento

16. Considere a expressão $y = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,x$. **a)** −1; 1 **b)** −2; 2

a) Qual é o valor mínimo para sen *x*? E o máximo?

b) Qual é o valor mínimo para 2 sen · *x*? E o máximo?

c) Agora, conclua: quais são os valores mínimo e máximo para *y*? −1; 3

Desafio

17. Seja ***x*** a medida de um arco, em radiano, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

a) Quais são os valores de ***x*** que satisfazem a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$? $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

b) Agora, observe o ciclo trigonométrico e responda: quais são os valores de ***x*** que satisfazem a inequação $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$? $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Em uma circunferência com 12 cm de raio, um arco de 120° tem aproximadamente ______ cm de comprimento. alternativa d

a) 20
b) 22
c) 24
d) 25

2. A medida 210° é equivalente a ______ rad. alternativa c

a) $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{2\pi}{6}$
c) $\frac{7\pi}{6}$
d) $\frac{2\pi}{6}$

3. Um arco de $\frac{11\pi}{12}$ rad pertence ao ______ quadrante. alternativa b

a) 1º
b) 2º
c) 3º
d) 4º

4. Os arcos simétricos de $\frac{2\pi}{9}$ rad, respectivamente aos eixos x e y e à origem O, medem: alternativa b

a) 320°; 220°; 140°
b) $\frac{16\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{11\pi}{9}$
c) 340°; 160°; 200°
d) $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{16\pi}{9}$

5. Qual das seguintes expressões resulta em um número positivo? alternativa d

a) sen 210° + cos 150°
b) tg 150° · tg 225°
c) cos 270° · sen 125°
d) sen 240° · cos 110°

6. O seno e o cosseno de $\frac{13\pi}{7}$ são, respectivamente, iguais a: alternativa c

a) $\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$ e $\cos \frac{\pi}{7}$
b) $\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$ e $-\cos \frac{\pi}{7}$
c) $-\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$ e $\cos \frac{\pi}{7}$
d) $-\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$ e $-\cos \frac{\pi}{7}$

7. O seno de $\frac{\pi}{6}$ é igual a cos ______ e sen ______. alternativa a

a) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$
c) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$
d) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$

8. Se sen $\alpha = -0{,}6$ e α é medida de um arco do 4º quadrante, então tg α é igual a: alternativa a

a) −0,75
b) −0,6
c) −1,33...
d) 0,75

9. Uma solução da equação $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$ é: alternativa d

a) $\frac{\pi}{3}$ rad
b) $\frac{\pi}{4}$ rad
c) $\frac{\pi}{2}$ rad
d) $\frac{11\pi}{6}$ rad

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	X	X							
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.			X	X	X	X	X		
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.					X	X	X		
Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.								X	
Resolver equações trigonométricas.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	9 a 11	9 a 11	12 e 13	12 e 13	12 a 19	12 a 19	12 a 19	20 e 21	21 e 22

Capítulo 2 Funções trigonométricas

Falésia no litoral da Inglaterra, 2014.

LOOP IMAGES/UIG/GETTY IMAGES

Objetivos do capítulo

- Relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos.
- Estender o conceito de ciclo trigonométrico em $\mathbb{R}$.
- Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.

1 Funções periódicas

Para explorar melhor os fenômenos periódicos, na seção *Pesquisa e ação*, página 45, propomos um trabalho de pesquisa e apresentação sobre esse tema.

Muitos fenômenos naturais, físicos e sociais têm comportamento cíclico, ou periódico (isto é, que se repetem a cada determinado período de tempo), e podem ser modelados por **funções trigonométricas**. Isso significa que essas funções são capazes de representar, de modo aproximado, as oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo.

A maré — movimento de descida e de subida do nível das águas — é um exemplo de fenômeno periódico devido à força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra. Acompanhe a situação a seguir.

Em uma cidade litorânea, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 12 h e das 24 h, e a maré alta ocorre às 6 h e às 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, de modo aproximado, a altura h da maré (em metro) nessa época:

$$h(t) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6} + \pi\right),$$

em que o tempo (t) é medido em hora a partir da meia-noite.

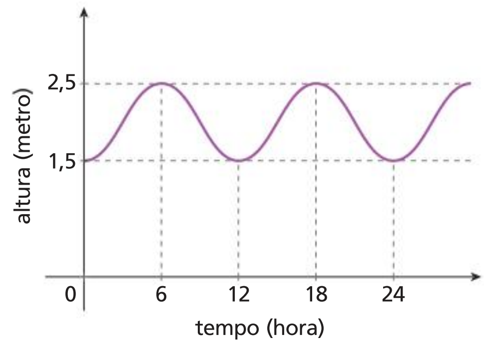
Para o início do estudo das funções trigonométricas, é essencial que os alunos relembrem o ciclo trigonométrico e reflitam sobre os valores máximo e mínimo do seno e do cosseno.

Reflita

Imagine o ciclo trigonométrico visto no capítulo anterior. Considerando a 1ª volta, responda:

- Qual é o valor máximo de cos x? Para quais valores de x isso ocorre? 1; para $x = 0$ e $x = 2\pi$
- Qual é o valor mínimo de cos x? Para qual valor de x isso ocorre? -1; para $x = \pi$

Observe que essa função descreve o comportamento periódico da maré, como mostra o gráfico a seguir.



Note que o gráfico "se repete" a cada 12 horas, assim como a altura da maré. Também é possível concluir que:

- a maré alta atinge 2,5 m de altura (e ocorre às 6 h e às 18 h);
- a maré baixa tem 1,5 m de altura (e ocorre às 0 h, às 12 h e às 24 h).

Pela lei da função, também podemos verificar algebricamente essas conclusões. Por exemplo, às 0 h e às 6 h, temos:

$$h(0) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6} + \pi\right) \qquad h(6) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6} + \pi\right)$$

$$h(0) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos(\pi) \qquad h(6) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos(2\pi)$$

$$h(0) = 2 + 0{,}5 \cdot (-1) \qquad h(6) = 2 + 0{,}5 \cdot 1$$

$$h(0) = 1{,}5 \qquad h(6) = 2{,}5$$

Além do nível das marés, muitos outros fenômenos apresentam comportamento periódico, como as variações da temperatura terrestre e da pressão sanguínea, a propagação do som etc.

Neste capítulo, estudaremos as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente — exemplos típicos de funções periódicas —, as quais surgem com frequência na modelagem matemática de fenômenos que apresentam periodicidade, como é o caso das marés.

Definição de função periódica

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + p)$.

O menor valor positivo de p que satisfaz a igualdade acima é chamado de **período de f**.

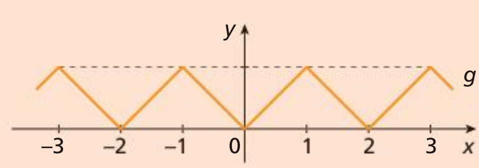
Reflita

Volte à situação das marés e responda: qual é o período da função apresentada? O que isso significa naquele contexto?

O período é 12. Isso significa que a altura da maré se repete a cada 12 horas.

Exercício resolvido

R1. No plano cartesiano ao lado foi traçado o gráfico da função periódica g. Analisando o gráfico, identificar o período dessa função.



▸ *Resolução*

Analisando alguns pontos do gráfico, podemos verificar que:

- $g(-2) = 0$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = 0$

Logo, como a função g é periódica, podemos observar que $g(x) = g(x + 2)$.

Portanto, o período dessa função é 2.

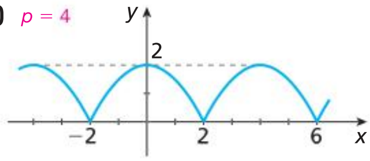
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

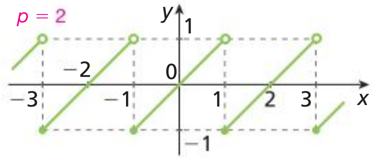
Registre as respostas em seu caderno

1. Em cada plano cartesiano a seguir está representada graficamente uma função periódica. Qual é o período de cada uma dessas funções?

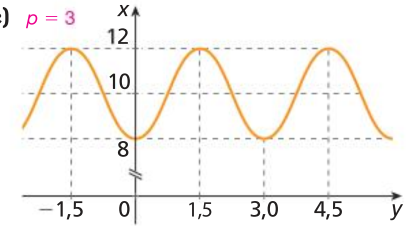
a) $p = 4$



b) $p = 2$



c) $p = 3$



2. Observe os gráficos da questão anterior. Qual é o valor mínimo e o valor máximo de cada uma das funções? **a)** mínimo: 0; máximo: 2 **b)** mínimo: -1; não tem máximo **c)** mínimo: 8; máximo: 12

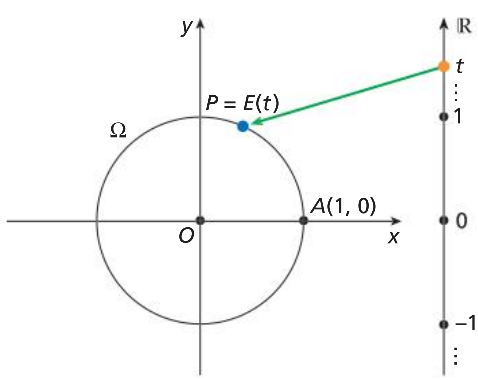
2 Ciclo trigonométrico

Já vimos que o ciclo trigonométrico tem raio 1 e centro na origem do sistema cartesiano. O ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos (ângulos), e a circunferência é orientada com sentido positivo anti-horário.

No capítulo anterior, estudamos apenas a primeira volta do ciclo trigonométrico (arcos com medidas entre 0 e 2π). A seguir, vamos ampliar esse estudo para as infinitas voltas, associando números reais aos pontos do ciclo trigonométrico. Isso possibilitará, mais adiante, o estudo das funções trigonométricas.

2.1 A função de Euler

Vamos definir a função $E: \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência Ω, conforme ilustrado a seguir.



- Se $t = 0$, então $P \equiv A$, ou seja, os pontos P e A são **coincidentes**.
- Se $t > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário (positivo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$, de comprimento t.
- Se $t < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário (negativo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$, de comprimento $|t|$.

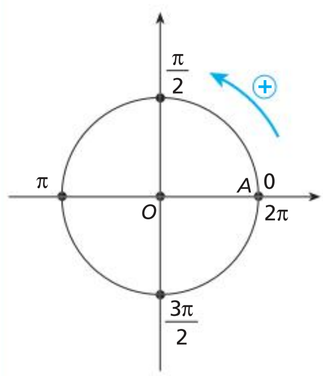
Em referência a seu criador — o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) —, essa função é chamada de **função de Euler**.

Podemos imaginar que a função de Euler consiste em "enrolar" a reta $\mathbb{R}$ sobre a circunferência Ω, de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1, 0)$ e que o sentido positivo da "reta enrolada" seja o sentido anti-horário.

A função de Euler é periódica, de período 2π, ou seja: $E(t) = E(t + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Observação

Vamos relembrar algumas medidas positivas do ciclo trigonométrico:



Não confunda: $O(0, 0)$ é a origem do sistema cartesiano, e $A(1, 0)$ é a origem do ciclo trigonométrico.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

> **Observação**
>
> Lembre-se de que no ciclo trigonométrico, como o raio é 1, o comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida angular, em radiano.

Exemplo

No ciclo trigonométrico, as imagens dos números reais $0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ podem ser representadas assim:

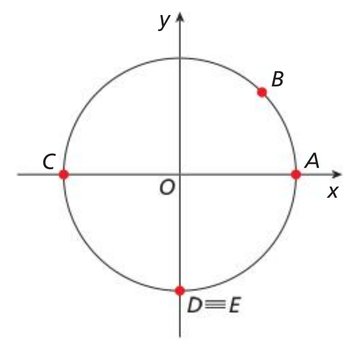
$0 \longrightarrow$ ponto A

$\frac{\pi}{4} \longrightarrow$ ponto B

$\pi \longrightarrow$ ponto C

$\frac{3\pi}{2} \longrightarrow$ ponto D

$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ ponto E

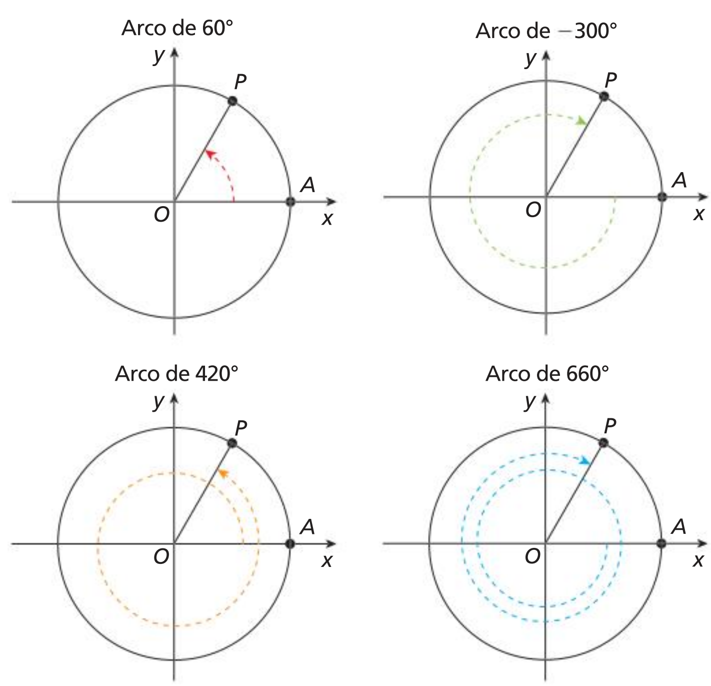


Note que:

- para obter a imagem do número negativo, percorremos o ciclo no sentido horário;
- um mesmo ponto pode representar mais de um número; por exemplo, as imagens dos números $\frac{3\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ coincidem ($E \equiv F$).

2.2 Arcos côngruos

Arcos que têm a mesma extremidade no ciclo trigonométrico são chamados de **arcos côngruos**. Por exemplo, percorrendo 60°, −300°, 420° e −660°, obtemos o mesmo ponto P, conforme mostram as figuras a seguir.



Por isso, dizemos que esses arcos são côngruos. Indicamos essa congruência assim:

$$60° \equiv -300° \equiv 420° \equiv -660°$$

Note que, tanto no sentido positivo quanto no negativo, existem infinitos arcos associados a um mesmo ponto do ciclo trigonométrico. É possível escrever uma **expressão geral** para representar esses infinitos arcos. Nesse exemplo, uma expressão geral é: $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para arcos trigonométricos medidos em radiano, pela função de Euler, se um ponto ***P*** é a imagem de certo número ***t***, também é a imagem dos números $t \pm 2\pi$, $t \pm 4\pi$, ..., ou seja, genericamente, é a imagem de todos os números $\boldsymbol{t + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Essa é a expressão geral de todos os arcos côngruos de extremidade P.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R2. Marcar no ciclo trigonométrico as imagens dos números:

a) $\frac{8\pi}{3}$

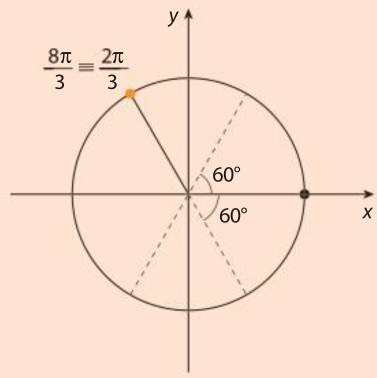
b) $-\frac{17\pi}{3}$

▶ ***Resolução***

a) Observamos que:

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi$$

Ou seja, para obter $\frac{8\pi}{3}$, percorremos uma volta completa mais um arco de $\frac{2\pi}{3}$. Então, basta percorrer $\frac{2\pi}{3}$, pois $\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$.

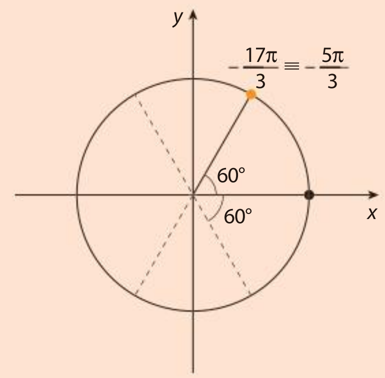


b) Observamos que:

$$-\frac{17\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} =$$

$$= -\frac{5\pi}{3} - 4\pi = -\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$$

Ou seja, para obter $-\frac{17\pi}{3}$, percorremos no sentido negativo duas voltas completas mais um arco de $\frac{5\pi}{3}$. Então, basta percorrer $-\frac{5\pi}{3}$, pois $-\frac{17\pi}{3} \equiv -\frac{5\pi}{3}$.



R3. Usando a medida da 1ª volta positiva, escrever a expressão geral dos arcos côngruos a:

a) $\frac{41\pi}{6}$

b) 1.105°

▶ ***Resolução***

a) Observamos que:

$$\frac{41\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi$$

Ou seja, $\frac{41\pi}{6}$ é côngruo ao arco de medida $\frac{5\pi}{6}$ na 1ª volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Dividindo 1.105° por 360°, descobrimos o número de voltas completas na circunferência:

$$\begin{array}{r|l} 1.105° & 360° \\ \hline 25° & 3 \end{array}$$

1.105° = 3 · 360° + 25°

Ou seja, 1.105° é côngruo ao arco de 25° na 1ª volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$25° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

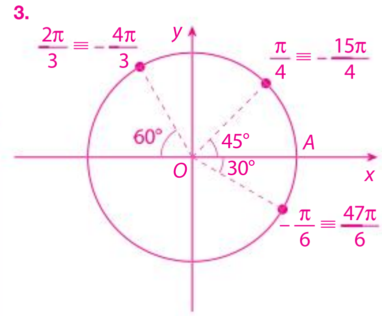
3. Desenhe um ciclo trigonométrico e marque a imagem de cada número abaixo.

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $-\frac{4\pi}{3}$ **d)** $-\frac{15\pi}{4}$ **e)** $-\frac{\pi}{6}$ **f)** $\frac{47\pi}{6}$

4. Usando a medida da 1ª volta positiva, escreva uma expressão geral dos arcos côngruos a:

a) 60° **b)** $\frac{\pi}{6}$ **c)** 385° **d)** $\frac{25\pi}{7}$

3.



ADILSON SECCO

4. a) $60° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

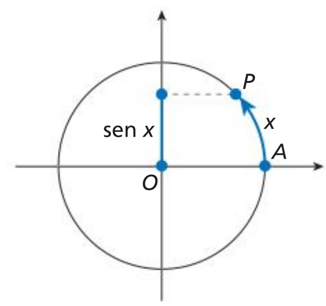
c) $25° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

3 A função seno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o seno do arco de medida x.



Reflita

Em quais quadrantes a função seno é positiva? E negativa?

Positiva no 1º e no 2º quadrantes e negativa no 3º e no 4º quadrantes.

A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{sen } x$, com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o seno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Observação

- $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} =$

  $= 2\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$

  Logo: $\text{sen } \frac{9\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$
- $-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

  Logo: $\text{sen } \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{7\pi}{4}$

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

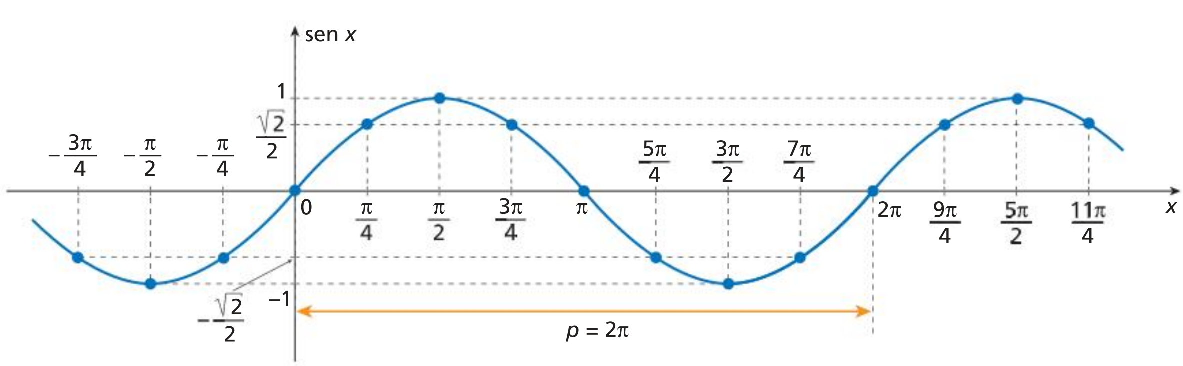
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores do seno de arcos da 1ª volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \ldots = \text{sen } (x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função seno se estende por todo o eixo x e tem o seguinte formato:



Características da função seno

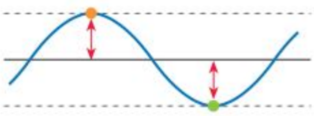
Por definição, o domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, chamado de **senoide**, observamos ainda que a função seno:

- é periódica, de período 2π (a curva se repete a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de sen x estão no intervalo $[-1, 1]$; logo, seu conjunto imagem é Im $= [-1, 1]$;
- tem **amplitude** (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.

Observação

Veja na figura:
- ordenada máxima
- ordenada mínima
- amplitude



ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R4. Determinar os valores reais de m para os quais existe a igualdade sen $x = 3m - 2$.

▸ *Resolução*

Sabemos que os valores da função $f(x) = \text{sen } x$ variam no intervalo $[-1, 1]$.

Assim:

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

substituindo sen x por $3m - 2$

$-1 \leqslant 3m - 2 \leqslant 1$

adicionando 2 em todos os membros

$1 \leqslant 3m \leqslant 3$

dividindo todos os membros por 3

$\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$

Então, m assume valores em $\mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$.

R5. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

$Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{4}$,

em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 ($t = 0$).

TOM BRAKEFIELD/GETTY IMAGES

a) Quantas zebras havia em janeiro de 2016?

b) Qual foi a população mínima de zebras atingida nessa região?

c) De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?

d) De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete?

▸ *Resolução*

a) Em janeiro de 2016, temos $t = 16$. Substituindo t por 16 na equação dada, obtemos:

$Z(16) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot 16}{4}\right)$

$Z(16) = 850 + 400 \cdot \text{sen}(4\pi)$

$Z(16) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$

Logo, em janeiro de 2016 havia 850 zebras.

b) A população mínima ocorre quando sen $\frac{\pi t}{4}$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando sen $\frac{\pi t}{4} = -1$. Então, para esse valor, temos:

$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c) Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x atinge seu valor mínimo (-1) para $x = \frac{3\pi}{2}$.

Então, a função dada será mínima para:

$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2000, ou seja, em janeiro de 2006.

d) A função seno tem período 2π. Assim:

$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

Reflita

a) Qual foi a população máxima de zebras?

b) Quando isso ocorreu pela primeira vez?

a) $850 + 400 \cdot 1 = 1.250$
Logo, a população máxima foi de 1.250 zebras.

$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$
Logo, a população máxima foi atingida pela primeira vez em 2002.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Calcule:

a) sen 3.465° $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen $\frac{13\pi}{4}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen 4.230° -1

d) sen $\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) sen (−3.465°) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) sen $\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) sen (−4.230°) 1

h) sen $\frac{10\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

No exercício resolvido **R8**, mostramos como utilizar um *software* de construção de gráficos para traçar o gráfico de uma função trigonométrica.

9. a) Porque no gráfico feito no computador o *software* aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28 (2π ≃ 6,28).

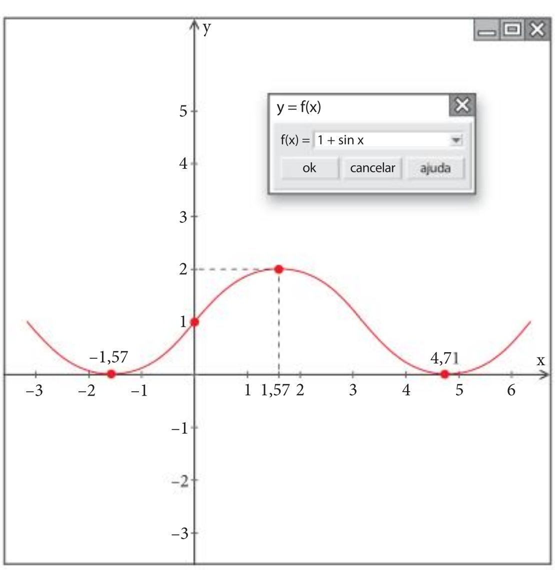
9. d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de *f* é o gráfico de *g* deslocado 1 unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

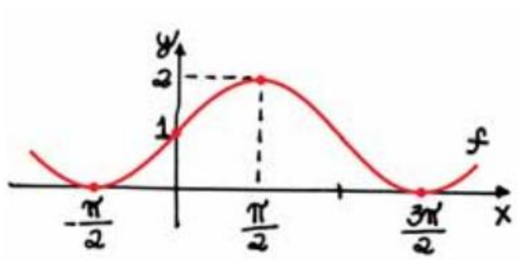
6. Observando os valores encontrados no item anterior, qual é a relação que podemos estabelecer entre sen α e sen (−α)? sen (−α) = −sen α ou sen α = −sen (−α)

7. Determine os valores reais de k para os quais existe x tal que sen $x = 2k - 3$. $1 \leq k \leq 2$

8. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \text{sen}\ x$ para $x \in [2\pi, 4\pi]$. Ver resolução no Guia do professor.

9. Dois alunos fizeram a representação gráfica da função f, de lei $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$. Um utilizou um *software* de construção de gráficos, o outro fez o gráfico em seu próprio caderno.





Em grupo, analisem os gráficos e respondam às questões a seguir.

a) Por que o aluno que fez o gráfico com o *software* encontrou o período da função f igual a 6,28, e o aluno que fez à mão encontrou 2π?

b) Qual é a amplitude dessa função? 1

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função f? D(f) = ℝ; Im(f) = [0, 2]

d) Compare o gráfico dessa função, $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$, com o da função $g(x) = \text{sen}\ x$. O que você pode concluir?

10. A procura por emprego em certa empresa obedece à função $f(t) = 2.500 + 1.215 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$, em que t, em mês, é contado a partir de janeiro de 2014 e $f(t)$ é o número de pessoas. Determine o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa. 3.715 pessoas

11. A altura h, em metro, da maré em certo ponto do litoral, em função do tempo, é dada aproximadamente pela expressão $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, em que t é o tempo, medido em hora a partir do meio-dia.

a) Qual foi a altura máxima atingida pela maré? E a mínima? 5 m; 1 m

b) Com base em uma tabela, esboce o gráfico dessa função. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em um dia, que horas ocorre a maré alta? E a maré baixa? maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h

d) De quanto em quanto tempo a altura da maré se repete? de 12 em 12 horas

12. Considere uma função do tipo $f(x) = k \cdot \text{sen}\ x$. Vamos determinar como a presença do parâmetro k, $k \in \mathbb{R}_+^*$, modifica o gráfico de $g(x) = \text{sen}\ x$. Para isso, utilizamos como exemplo a função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\ x$. Ver resolução no Guia do professor.

Resolva com um colega os itens a seguir.

a) Criem uma tabela com três linhas, intituladas: x, sen x e $2 \cdot \text{sen}\ x$. Completem a tabela considerando os valores de x variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Em um sistema de eixos cartesianos, construam o gráfico da função $g(x) = \text{sen}\ x$.

c) No mesmo sistema, construam o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\ x$.

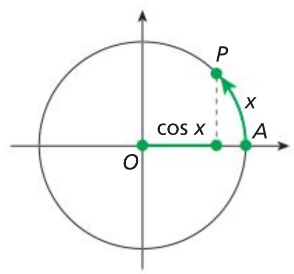
d) Comparem a amplitude da função g com a amplitude da função f. O que vocês observam?

e) Façam o mesmo para $h(x) = 3 \cdot \text{sen}\ x$. Como vocês generalizariam o resultado do item **d** para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen}\ x$, em que $k \in \mathbb{R}_+^*$?

4 A função cosseno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa do ponto P é o cosseno do arco de medida x.



A função **cosseno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Reflita

Em quais quadrantes a função cosseno é positiva? E negativa?

Positiva no 1º e no 4º quadrantes, e negativa no 2º e no 3º quadrantes.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \cos x$, partindo de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o cosseno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

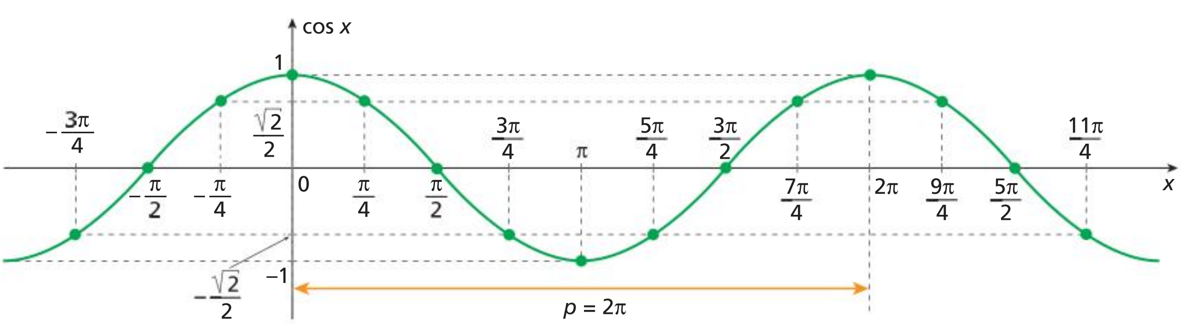
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o cosseno de x assume os valores do cosseno de arcos da 1ª volta. Assim, a função cosseno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$\cos x = \cos (x + 2\pi) = \cos (x + 4\pi) = ... = \cos (x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função cosseno se estende por todo o eixo x e tem o seguinte formato:

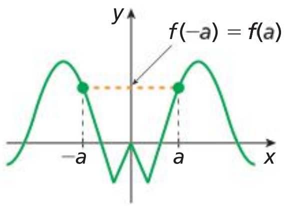


Repare que o gráfico da função cosseno é uma translação (deslocamento) da senoide de $\frac{\pi}{2}$ rad para a esquerda.

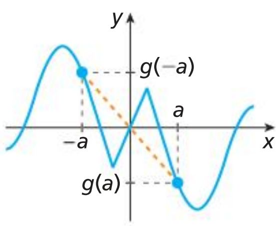
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ **Reflita**

- Quando $f(-x) = f(x)$ em todo o domínio de uma função f, ela é chamada de **função par**.



- Quando $g(-x) = -g(x)$ em todo o domínio de uma função g, ela é chamada de **função ímpar**.



- A função cosseno pode ser classificada como função par, ímpar ou nem par nem ímpar? E a função seno?

A função cosseno é par, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
A função seno é ímpar, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$.

◆ Características da função cosseno

Por definição, o domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, observamos, entre outras características, que a função cosseno:

- é periódica, de período 2π (a curva se repete a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de $\cos x$ estão no intervalo $[-1, 1]$, o que significa que seu conjunto imagem é $\text{Im} = [-1, 1]$;
- tem amplitude igual a 1.

Exercício resolvido

R6. Calcular o valor da expressão $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos 10x$ para $x = \frac{\pi}{3}$.

▶ ***Resolução***

Substituindo x por $\frac{\pi}{3}$, obtemos a expressão:

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{10\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para $x = \frac{\pi}{3}$, a expressão vale $-\frac{3}{2}$.

15. d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado 1 unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Exercícios propostos

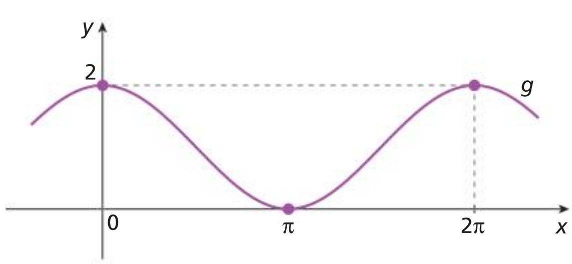
Registre as respostas em seu caderno

13. Calcule, para $x = \frac{\pi}{4}$, o valor da expressão:

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots + \cos 78x + \cos 80x$ 0

14. Faça um esboço do gráfico de f, de lei $f(x) = \cos x$ para $x \in [2\pi, 4\pi]$. Ver resolução no Guia do professor.

15. A curva apresentada abaixo é a representação gráfica da função g, com $g(x) = 1 + \cos x$.



Analisando o gráfico, responda às questões.

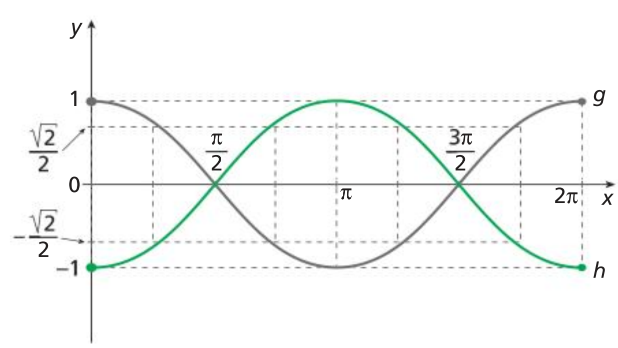
a) Qual é o período da função g? 2π

b) Qual é a amplitude dessa função? 1

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função g? $D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = [0, 2]$

d) Compare o gráfico dessa função, $g(x) = 1 + \cos x$, com o da função $f(x) = \cos x$. O que você pode concluir?

16. Observe que os dois gráficos abaixo, traçados no mesmo sistema cartesiano, representam funções no intervalo $[0, 2\pi]$ e são simétricos em relação ao eixo x.



São gráficos de funções do tipo $f(x) = k \cdot \cos x$:

- o gráfico cinza representa a função dada por $g(x) = 1 \cdot \cos x$;
- o gráfico verde representa a função dada por $h(x) = -1 \cdot \cos x$.

Com base nessas considerações, construa os gráficos de $m(x) = \text{sen}\,x$ e $n(x) = -\text{sen}\,x$ em um mesmo sistema cartesiano no intervalo $[0, 2\pi]$.
Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

17. Diversas doenças são sazonais, ou seja, em determinado período do ano têm maior ocorrência. Esse é o caso da dengue, que tem maior ocorrência no período quente e chuvoso do ano, época que propicia condições mais favoráveis para a proliferação do mosquito transmissor da doença.

O número de casos de dengue, em determinada região, variou aproximadamente de acordo com a função $n(t) = 6.380 + 5.900 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right)$, em que t é o mês do ano, sendo $t = 1$ para janeiro, $t = 2$ para fevereiro, ..., $t = 12$ para dezembro.

Quantos casos ocorreram no pico da doença? Em qual mês ocorreu esse pico? 12.280 casos; janeiro


EDUARDO ZAPPIA/PULSAR IMAGENS

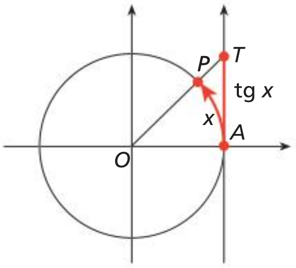
Eliminar focos de água parada é a principal medida de prevenção contra a dengue.

5 A função tangente

Seja P a extremidade de um arco, na circunferência trigonométrica de centro O, correspondente ao número real x.

Consideremos o ponto T de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$.

Sabemos que a ordenada do ponto T é a tangente do arco de medida x.



A função **tangente** é a função $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x do domínio ao número real tg x, ou seja, $f(x) = \text{tg } x$.

Reflita

Analise em quais quadrantes a função tangente é positiva e em quais quadrantes ela é negativa.

A função tangente é positiva no 1º e no 3º quadrantes e negativa no 2º e no 4º quadrantes.

Observação

Quando x é a medida de um arco côngruo a $\frac{\pi}{2}$ rad ou a $\frac{3\pi}{2}$ rad, não há intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$. Por isso, a função tangente não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{tg } x$, com os dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, vamos considerar x no intervalo $[0, 2\pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tg x	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
tg x	1	$\nexists$	-1	0	-1	$\nexists$	1	0

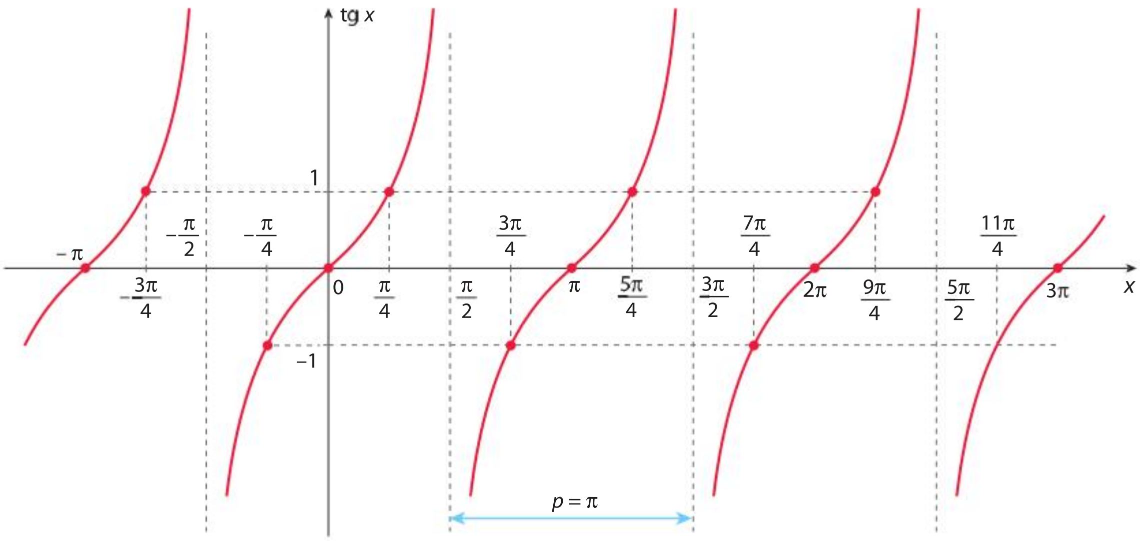
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observe que, para valores de x maiores que π ou menores que zero, a tangente de x assume os valores da tangente de arcos da 1ª meia-volta. Assim, a função tangente é periódica, pois, para todo x do seu domínio, temos:

$\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi) = \text{tg } (x + 2\pi) = ... = \text{tg } (x + k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Por isso, a curva obtida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ repete-se para $x > \frac{\pi}{2}$ e $x < -\frac{\pi}{2}$.

Assim, o gráfico da função tangente tem o seguinte formato:



Características da função tangente

Por definição, o domínio da função tangente é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, observamos ainda que a função tangente:

- é periódica, de período π;
- não é limitada, já que seu conjunto imagem é $\text{Im} =]-\infty, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$.

As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são denominadas **assíntotas** da curva que representa a função f, dada por $f(x) = \text{tg } x$; quando um ponto se move ao longo de uma parte extrema dessa curva, a distância desse ponto à assíntota se aproxima de zero.

Reflita

A função tangente pode ser classificada como função par, ímpar ou nem par nem ímpar?

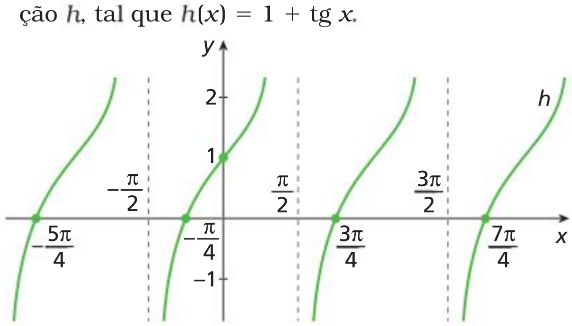
A função tangente é uma função ímpar, pois, para todo x pertencente a seu domínio, $\text{tg } (-x) = -\text{tg } (x)$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

18\. c) $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\text{Im}(h) =]-\infty, +\infty[$

18. A curva abaixo é a representação gráfica da função h, tal que $h(x) = 1 + \text{tg } x$.



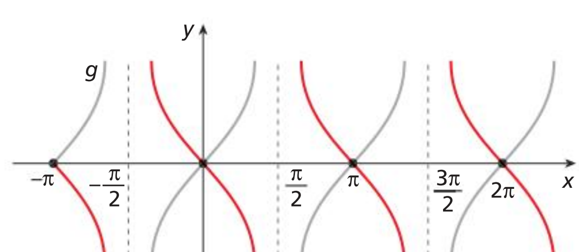
Analisando o gráfico, responda às questões.

a) Qual é o período da função h? π

b) Por quais valores de x passam as assíntotas da função h? $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função h?

19. No plano cartesiano abaixo, a curva cinza representa a função $g(x) = \text{tg } x$, e a curva vermelha representa a função $j(x) = -1 \cdot \text{tg } x$.



Analisando os gráficos, o que podemos afirmar?

Espera-se que os alunos concluam que $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ são simétricos em relação ao eixo x.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6 Construção de gráficos

Até aqui vimos gráficos das funções trigonométricas fundamentais: seno, cosseno e tangente. Agora, veremos como construir gráficos de outras funções a partir desses gráficos. Inicialmente, construiremos o gráfico de uma das funções fundamentais (cor cinza) e, a partir dele, efetuando certas transformações, obteremos o gráfico pedido.

O objetivo deste tópico é possibilitar aos alunos a construção de gráficos mais complexos sem o uso de tabelas. Para isso, é fundamental o entendimento do papel que cada parâmetro desempenha na função trigonométrica em foco. Se possível, e se julgar oportuno, para que os alunos compreendam melhor esse papel, mostrar mais exemplos de cada um dos casos usando um *software* de construção de gráficos, assim como foi feito no exercício resolvido **R8**.

Transladando o gráfico

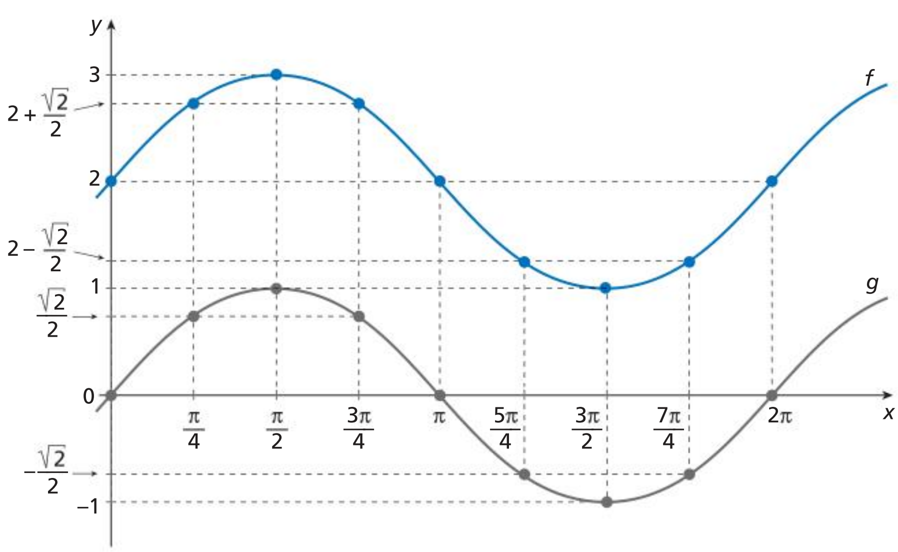
Transladar significa deslocar. A seguir, veremos alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais. Acompanhe.

a) $f(x) = 2 + \text{sen } x$

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2 + sen x	2	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = 2 + \text{sen } x$, em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo:



ADILSON SECCO

Observe que, transladando (deslocando) o gráfico de g, ponto a ponto, duas unidades para cima, obtemos o gráfico de f. Agora, o gráfico oscila entre os valores mínimo 1 e máximo 3. Ou seja, o conjunto imagem de f é [1, 3]. Note que o domínio, o período e a amplitude, em relação à função g, não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \text{sen } x$ são obtidos a partir de uma translação de $|c|$ unidades em relação ao gráfico $y = \text{sen } x$ da seguinte forma:

- se $c > 0$, a translação é para cima;
- se $c < 0$, a translação é para baixo.

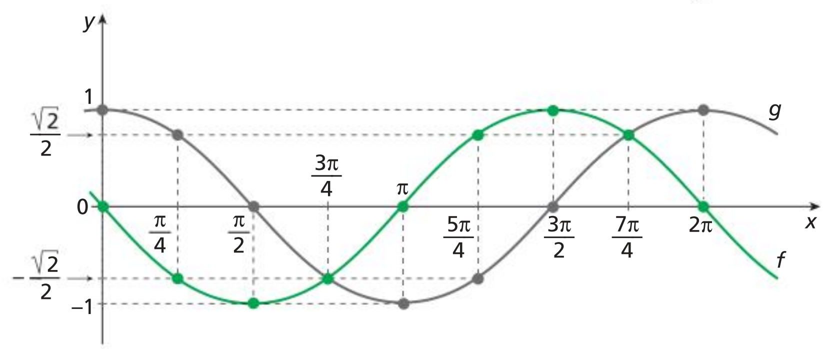
O mesmo vale para funções do tipo $y = c + \cos x$ e $y = c + \text{tg } x$.

b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Novamente, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Os gráficos das funções dadas por $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ são:



A função f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem, mesmo período e mesma amplitude que g, mas o gráfico de g sofreu uma translação (deslocamento) de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções do tipo $y = \cos(x + b)$ são obtidos a partir de uma translação de $|b|$ unidades em relação ao gráfico $y = \cos x$ de tal modo que:

- se $b > 0$, a translação é para a esquerda;
- se $b < 0$, a translação é para a direita.

O mesmo pode ser verificado para funções do tipo $y = \text{sen}\,(x + b)$ ou $y = \text{tg}\,(x + b)$.

Alterando a amplitude

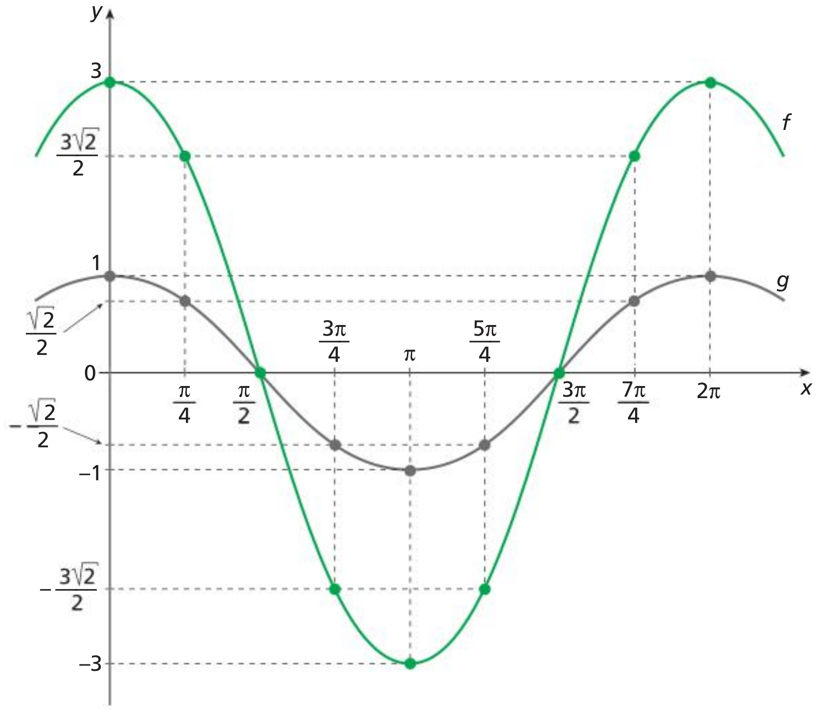
Agora, veremos que podemos obter alguns gráficos "esticando" ou "achatando" verticalmente os gráficos das funções fundamentais.

Por exemplo, vamos construir o gráfico de $f(x) = 3 \cdot \cos x$.

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$3 \cdot \cos x$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3

Os gráficos de f e g, com $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 3 \cdot \cos x$, são:



ADILSON SECCO

a) O gráfico de g seria "achatado" verticalmente. A amplitude seria $\frac{1}{2}$, e o conjunto imagem seria $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

b) O gráfico de f seria simétrico ao gráfico de g em relação ao eixo x, pois as ordenadas positivas ficariam negativas, e as negativas ficariam positivas.

Observe que, multiplicando $g(x) = \cos x$ por 3, "esticamos" o gráfico verticalmente: agora, ele oscila entre -3 e 3. Ou seja, a amplitude de f é 3, o triplo da amplitude de g, e o conjunto imagem de f é $[-3, 3]$.

Veja que o domínio e o período não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Reflita

Qual seria o efeito sobre o gráfico de g se tivéssemos:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$?

b) $f(x) = -1 \cdot \cos x$?

> Gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = d \cdot \cos x$ têm amplitude $|d|$.
> O mesmo ocorre para funções do tipo $y = d \cdot \text{sen}\, x$.

Observação

Os procedimentos para obter gráficos de funções na forma $f(x) + c$, $f(x + c)$ e $c \cdot f(x)$, com base nos gráficos de f, podem ser aplicados para as funções em geral.

Nestes exercícios resolvidos, espera-se que os alunos compreendam como usar os conhecimentos adquiridos na análise dos parâmetros b, c e d para obter o domínio, o conjunto imagem e a amplitude das funções apresentadas. Para a resolução dos exercícios propostos, não devemos incentivá-los a fazer tabelas, pois, nesse caso, a análise dos exemplos terá sido em vão.

Exercícios resolvidos

R7. Determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude da função dada por $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

▶ ***Resolução***

Vamos considerar a função h dada por $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

O gráfico de h é obtido por meio de uma translação do gráfico da função g, dada por $g(x) = \cos x$, de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.

Como a amplitude da função h é 1, igual à amplitude de g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, então a amplitude de f é 2.

Como o conjunto imagem da função h é $[-1, 1]$, igual ao da função g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, podemos obter o conjunto imagem da função f multiplicando por 2 os extremos do intervalo $[-1, 1]$.

Logo, $\text{Im}(f) = [-2, 2]$.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

Comentar com os alunos que, com o uso do *software* de construção de gráficos, poderíamos construir diretamente o gráfico de *f*, sem ter de fazê-lo passo a passo a partir do gráfico da função dada por $g(x) = \cos x$; entretanto, vamos construir o gráfico passo a passo para analisar as mudanças causadas por cada parâmetro.

◆ Observação

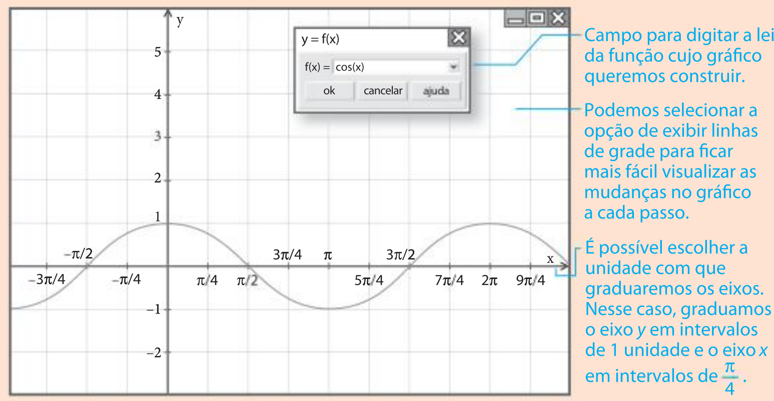
Em alguns *softwares*, temos de escrever a lei da função de maneira diferente. Observe os exemplos:

- sen $x \rightarrow$ sin(x)
- $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ 2*cos(x+pi/4)
- $\text{tg}\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \rightarrow$ tan((x+pi)/2)

R8. Com o auxílio de um *software* de construção de gráficos, a partir do gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de *f*, tal que $f(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, e analisar o que ocorre com o gráfico a cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de *f*.

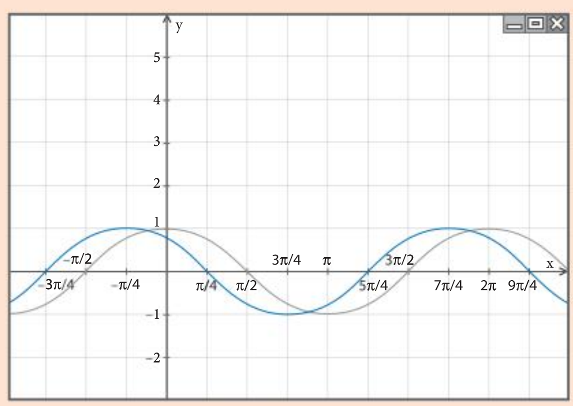
▶ ***Resolução***

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por $g(x) = \cos x$.



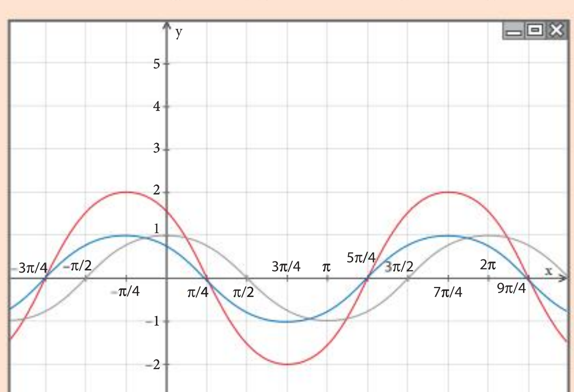
Acompanhe os passos descritos a seguir.

- 1º passo: $\cos x \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



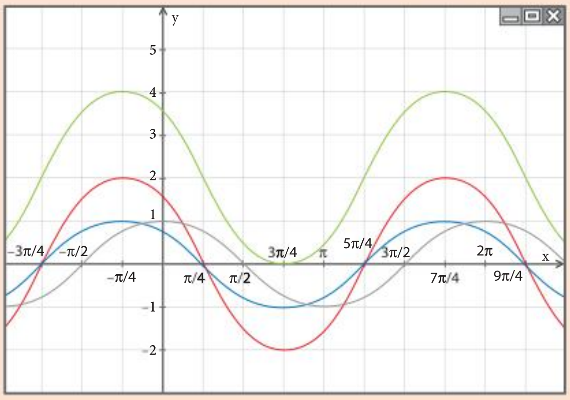
O gráfico de *g* sofreu uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda.

- 2º passo: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico da função tem nova amplitude, igual a 2.

- 3º passo: $2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



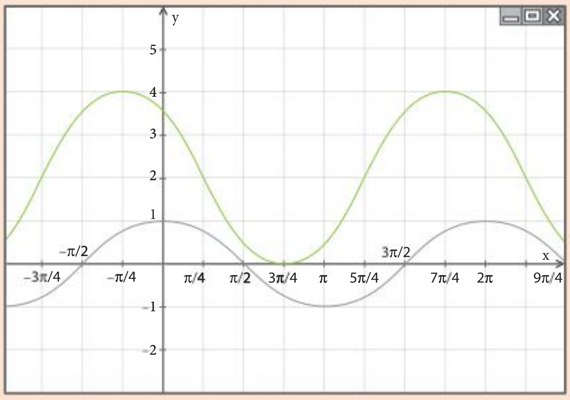
O gráfico sofreu uma translação de duas unidades para cima.

O conjunto imagem da função dada por $g(x) = \cos x$ é $[-1, 1]$. Após o 1º passo, adicionando $\frac{\pi}{4}$ a x, o conjunto imagem da nova função continua sendo $[-1, 1]$. Após o 2º e o 3º passo, o conjunto imagem se modificou. Quando a função é multiplicada por 2, o conjunto imagem passa a ser $[-2, 2]$. Adicionando-se 2, o conjunto imagem da nova função passa a ser $[0, 4]$.

Portanto, $\text{Im}(f) = [0, 4]$. A amplitude de f continua sendo 2.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

Veja ao lado os gráficos das funções f e g.



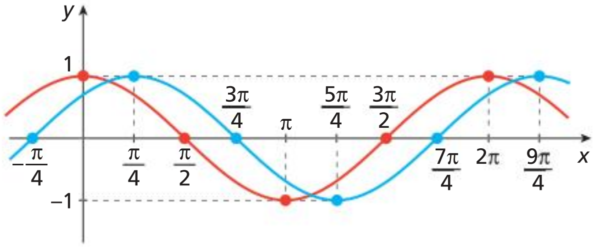
ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

20. Os gráficos abaixo representam as funções:

- $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ vermelho
- $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ azul

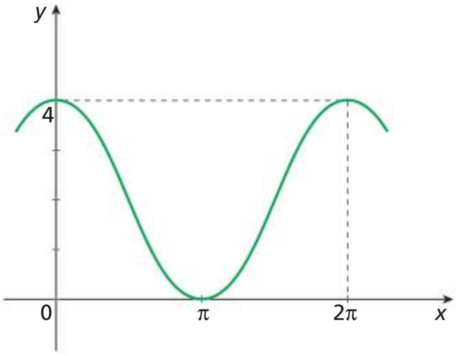


Descubra qual curva representa cada uma das funções.

21. A partir do gráfico da função g de lei $g(x) = \text{sen}\, x$, construa o gráfico de f, tal que $f(x) = 1 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Indique o domínio, o conjunto imagem imagem, o período e a amplitude de f. Ver resolução no Guia do professor.

22. O gráfico abaixo representa a função f de lei $f(x) = a + b \cdot \cos x$. Determine os valores de a e b.
$a = 2$; $b = 2$



23. Utilizando um *software* de construção de gráficos, construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 3 + \text{sen}\, x$ e $g(x) = -3 - \text{sen}\, x$

b) $f(x) = -2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$

- Em duplas, comparem os gráficos das funções f e g de cada item.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Alterando o período

Nos tópicos anteriores, estudamos alguns gráficos que são obtidos a partir de translações horizontais ou verticais ou modificação na amplitude dos gráficos das funções trigonométricas fundamentais, embora conservem o período. Neste tópico, veremos exemplos de gráficos que sofrem alteração de período em relação às funções fundamentais. Acompanhe.

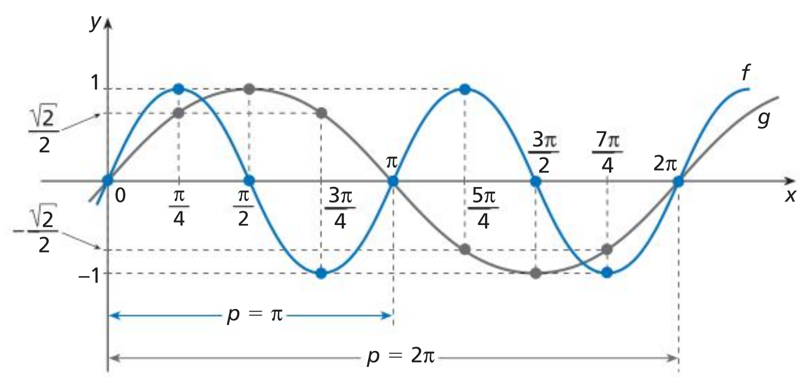
Exemplo

Vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = \text{sen } 2x$ e compará-lo com o da função g dada por $g(x) = \text{sen } x$.

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sen $2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Construímos, então, os gráficos das funções g e f dadas por $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \text{sen } 2x$ no mesmo sistema de eixos:



ADILSON SECCO

Observe que f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem e mesma amplitude que g, porém tem período igual a π, ou seja, metade do período de g.

Analisando casos semelhantes, notamos que:

> As funções trigonométricas do tipo $y = \text{sen }(ax)$ ou $y = \cos(ax)$ têm período $\frac{2\pi}{|a|}$.
>
> No caso das funções do tipo $y = \text{tg }(ax)$, podemos verificar que o período é $\frac{\pi}{|a|}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

Ver resolução das questões **24** e **25** no Guia do professor.

24. Determine o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude (quando houver) das funções indicadas a seguir.

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } 2x$

b) $f(x) = 5 + 2 \cdot \cos 3x$

25. Esboce o gráfico de cada função.

a) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \text{sen } 4x$

c) $f(x) = 2 \cdot \text{sen } 2x$

d) $f(x) = -2 \cdot \cos x$

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

Ver resolução no Guia do professor.

1. Desenhe um ciclo trigonométrico e represente nele as imagens dos números reais:

a) $x = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Usando uma medida da 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica, escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:

a) 855° $135° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{25\pi}{3}$ $\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3. Determine o menor e o maior valor que assume a expressão $4 - \text{sen}\ 10x$. 3; 5

4. A quantidade de algas, em tonelada, em certa baía varia periodicamente com o tempo e é representada pela função $A(t) = 850 + 200 \cdot \text{sen}\ \dfrac{\pi t}{6}$, com t medido em anos. Se t for medido a partir de janeiro de 2010, qual será a quantidade de algas na baía em janeiro de 2025? 1.050 toneladas

5. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800 \cdot \text{sen}\ \dfrac{x \cdot \pi}{12}$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:

a) 600
b) 800
c) 900
d) 1.500
e) 1.600

alternativa e

6. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\dfrac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>.
Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

a) janeiro
b) abril
c) junho
d) julho
e) outubro

alternativa d

7. Em alguns trechos do rio Tietê (SP), verifica-se a formação de notáveis quantidades de espuma, resultante de poluição por resíduos industriais. Em certo dia, a quantidade de espuma variou segundo a função f dada por $f(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\ \dfrac{\pi t}{6}$, em que $f(t)$ é a quantidade de espuma, em metro cúbico por metro de rio, e t é o tempo, em horas contadas a partir da meia-noite. Determine o primeiro momento do dia em que a quantidade de espuma atingiu 5 m^3 por metro de rio. às 3 h

8. Construa o gráfico das funções a seguir e indique o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude.

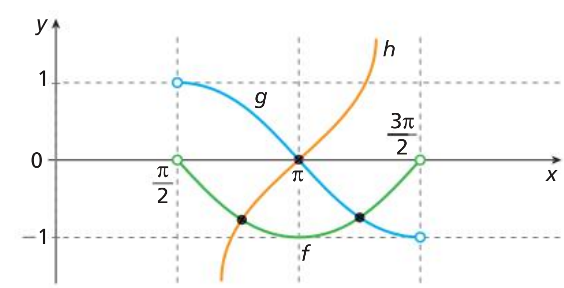
a) $f(x) = 1 - 2 \cdot \cos x$

b) $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ver resolução no Guia do professor.

Aprofundamento

9. Veja o esboço, em um mesmo plano cartesiano, dos gráfico de $f(x) = \cos x$, $g(x) = \text{sen}\ x$ e $h(x) = \text{tg}\ x$ para $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.



No intervalo considerado:

a) cos x é sempre negativo? sim

b) sen x é sempre decrescente e negativo? não

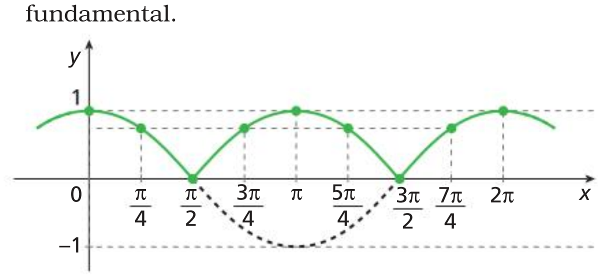
c) tg x é sempre crescente e positiva? não

d) quais são as coordenadas do ponto em que sen x = tg x? $(\pi, 0)$

e) sabendo que A é o ponto em que cos x = sen x e B é o ponto em que tg x = cos x, a abscissa de A é menor, maior ou igual à abscissa de B? maior

Desafio

10. A função f, cujo gráfico está representado abaixo, foi obtida a partir de uma função trigonométrica fundamental.



Podemos concluir que a lei dessa função é:

a) $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$
b) $f(x) = 1 + \cos x$
c) $f(x) = |\text{sen}\ x|$
d) $f(x) = |\cos x|$

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. O arco $\frac{16\pi}{3}$ é côngruo a: alternativa c

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$ **d)** $\frac{5\pi}{3}$

2. Sendo $k \in \mathbb{Z}$, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é: alternativa c

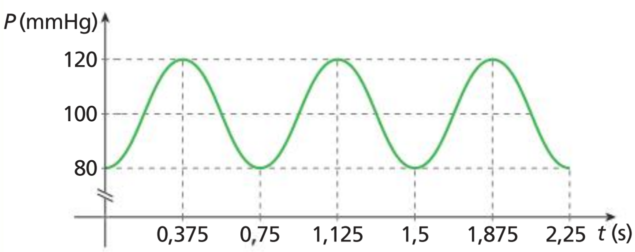
a) $\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi$

b) $\frac{\pi}{5} + k \cdot \pi$

c) $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$

d) $\frac{2\pi}{5} + k \cdot \pi$

3. A variação da pressão sanguínea P, em milímetro de mercúrio, de uma pessoa em função do tempo t, em segundo, pode ser modelada, aproximadamente, pela função trigonométrica representada abaixo, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.



Então, o intervalo de um batimento cardíaco é aproximadamente: alternativa d

a) 80 s

b) 120 s

c) 0,375 s

d) 0,75 s

4. Sabemos que sen x = sen $(x + 2\pi)$ para todo x. Logo, a função seno é ______ e tem ______ igual a 2π. alternativa b

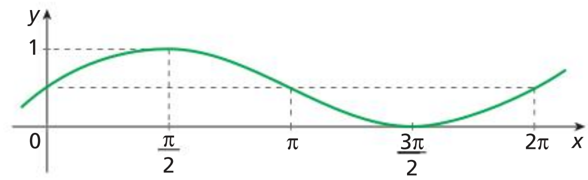
a) limitada; máximo

b) periódica; período

c) ilimitada; período

d) periódica; mínimo

5. Observe o gráfico abaixo.



Esse gráfico representa a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pela lei: alternativa a

a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos x$

6. A função f, tal que $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}\,(x + \pi)$, tem amplitude: alternativa a

a) 3 **b)** -2 **c)** 2π **d)** π

7. O intervalo ______ é o conjunto imagem da função de lei $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos\,(2x + 1)$. alternativa d

a) $[-1, 1]$ **b)** $[-2, 2]$ **c)** $[-1, 5]$ **d)** $[1, 5]$

8. A função $f(x) = \text{sen}\,2x$ tem período: alternativa b

a) $0{,}5\pi$ **b)** π **c)** 2π **d)** 3π

9. Em certo lago, a massa de algas, medida em quilograma, varia de maneira periódica conforme a função $m(t) = 4.500 + 3.400 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi t}{60}$, em que t é o tempo, em dias, a partir de 1º de janeiro de cada ano. Entre ocorrências sucessivas de massa máxima (______ kg) e mínima (______ kg) de algas nesse lago, passam-se ______ dias. alternativa c

a) 4.500; 3.400; 60

b) 4.500; 3.400; π

c) 7.900; 1.100; 60

d) 7.900; 1.100; 120

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos.			X	X					X
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em $\mathbb{R}$.	X	X	X	X	X	X	X	X	
Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.					X	X	X	X	
Páginas do livro referentes ao conceito	27 a 29	28 e 29	25 a 27 30 a 36	26 e 27 30 e 32	30 a 42	30 a 42	30 a 42	30 a 42	25 a 27

Vídeo documentário

Um fenômeno periódico é algo que acontece respeitando determinado ciclo. Muitos fenômenos naturais são cíclicos, como o dia e a noite. Muitos jornais impressos têm edição diária, ou seja, são periódicos.

Vamos criar um vídeo documentário retratando situações que representam fenômenos periódicos. O conceito de período é fundamental no estudo das funções trigonométricas.

AMITH NAG/SHUTTERSTOCK

Montagem das fases da Lua.

Procedimentos

1) Reúna-se com mais quatro colegas e escolham um dos temas apresentados a seguir.
- Acústica.
- Astronomia (ciclos da Lua, estações do ano, dia e noite, período de retorno de cometas).
- Ciclo das marés (citar alguns desastres naturais ocorridos em momentos de desequilíbrio desse ciclo).
- Ciclos nos seres humanos (frequência cardíaca, menstruação).
- A migração das aves e a piracema dos peixes.

2) Escolhido o tema, vocês deverão criar um pequeno vídeo documentário com duração de 2 a 4 minutos. Esse vídeo poderá conter imagens e cenas captadas pelo grupo com câmeras portáteis (digitais ou analógicas) ou pesquisadas na internet.

3) Antes do início da captação e da pesquisa das imagens, o grupo deverá elaborar um roteiro escrito listando as cenas do vídeo. Nessa etapa, é interessante descrever a imagem e o texto que farão parte de cada cena.

4) A próxima etapa é organizar a escolha das imagens e as filmagens necessárias. Depois, vocês deverão escolher um *software* de edição de vídeo para efetivamente construí-lo.

5) Você e os colegas de classe, com o professor, poderão organizar uma mostra dos vídeos produzidos, convidando a comunidade escolar para assistir a eles.

Compreensão de texto

Este tema pode gerar um trabalho interdisciplinar com Física, na explicação do que é som, e um trabalho com Biologia, na exploração dos efeitos colaterais causados pela poluição sonora.

1. a) Som é uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico.
b) O som é causado por vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão de acordo com o meio à sua volta.
c) Entre 20 e 20.000 vezes por segundo.

Som

Som pode ser entendido como uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico. Em geral, o som é causado por uma vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão [de acordo com o] meio à sua volta. Qualquer corpo elástico capaz de vibrar rapidamente pode produzir som e, nesse caso, recebe o nome de fonte sonora.

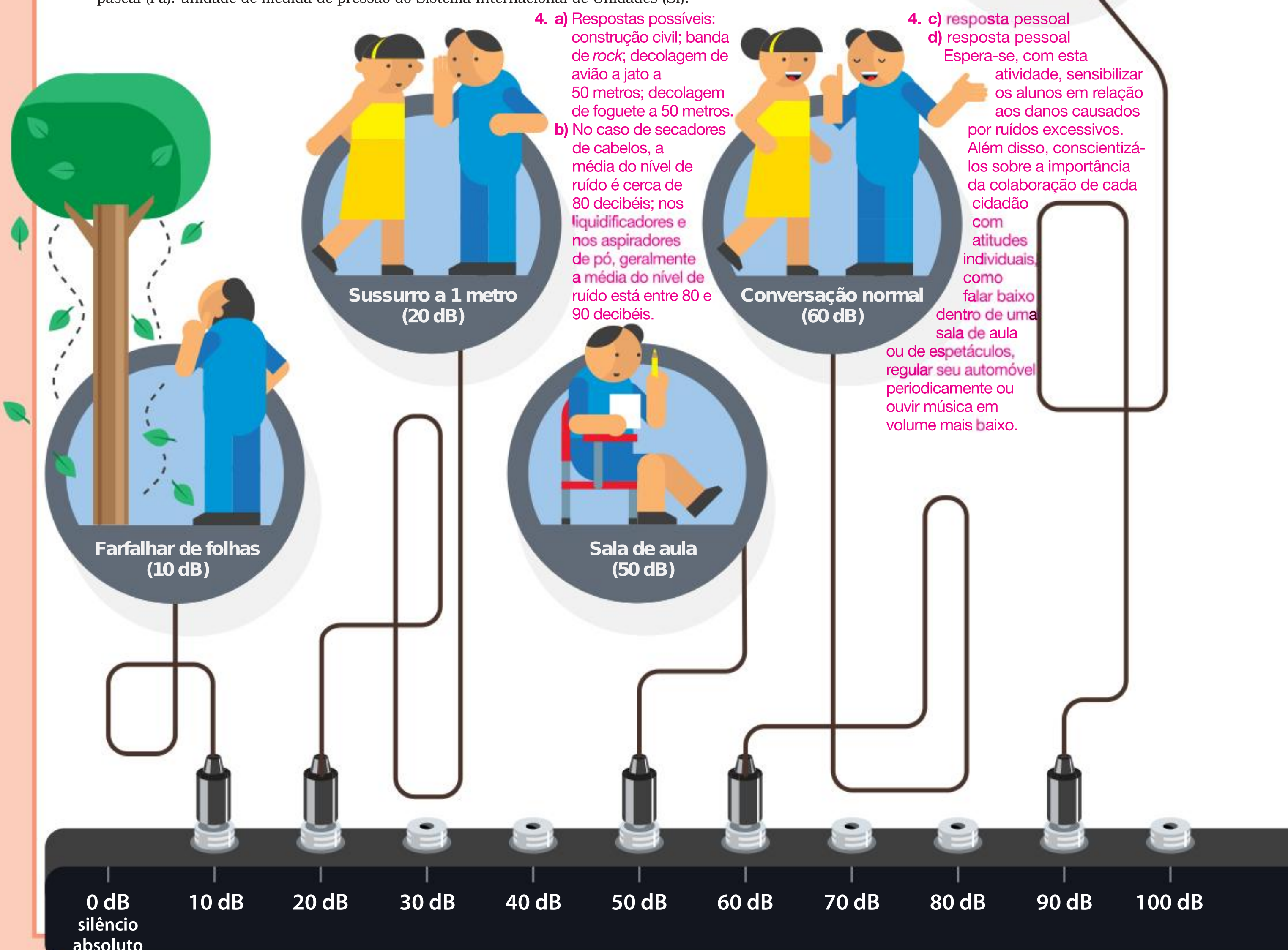
[...] Para que possamos perceber o som, é necessário que as variações de pressão que chegam aos nossos ouvidos estejam dentro de certos limites de rapidez e intensidade. Se essas variações ocorrem entre 20 e 20.000 vezes por segundo, esse som é potencialmente audível, ainda que a variação de pressão seja de alguns milionésimos de pascal*.

[...]

Os sons que ocorrem no meio ou que são gerados por instrumentos musicais são geralmente complexos. Entretanto, para se entender a complexidade sonora, torna-se útil partir de um caso mais simples e genérico: o som senoidal, chamado som puro [...], representado pelo gráfico de uma função seno. Esse tipo de som não é gerado por instrumentos tradicionais nem é encontrado na natureza, mas pode ser conseguido artificialmente através de um sintetizador eletrônico.

Disponível em: <www.etelj.com.br/etelj/artigos/e25e1be1075a875af1aad3b0ce2ffe0f.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2016.

* pascal (Pa): unidade de medida de pressão do Sistema Internacional de Unidades (SI).



4. a) Respostas possíveis: construção civil; banda de *rock*; decolagem de avião a jato a 50 metros; decolagem de foguete a 50 metros.
b) No caso de secadores de cabelos, a média do nível de ruído é cerca de 80 decibéis; nos liquidificadores e nos aspiradores de pó, geralmente a média do nível de ruído está entre 80 e 90 decibéis.
c) resposta pessoal
d) resposta pessoal

Espera-se, com esta atividade, sensibilizar os alunos em relação aos danos causados por ruídos excessivos. Além disso, conscientizá-los sobre a importância da colaboração de cada cidadão com atitudes individuais, como falar baixo dentro de uma sala de aula ou de espetáculos, regular seu automóvel periodicamente ou ouvir música em volume mais baixo.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. Responda às questões de acordo com o texto da página ao lado.

a) O que é som?

b) O que gera o som?

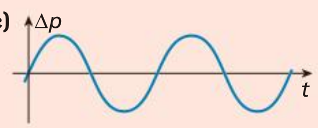
c) Para qual intervalo de variação de pressão o som é audível para o ser humano?

2. Uma onda sonora pode ser representada por um gráfico bidimensional, em que o eixo horizontal representa a passagem do tempo (t) e o vertical representa a variação de pressão (Δp) em determinado ponto do meio. Qual dos gráficos melhor representa um som senoidal? alternativa c

a)

b)

c)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. Suponha que a variação de pressão de uma onda sonora seja dada por $\Delta p = 1{,}48 \cdot \text{sen}\,(1{,}07\pi x - 334\pi t)$, em que x está expresso em metro, t, em segundo, e Δp, em pascal. Determine a variação máxima de pressão. 1,48 pascal

4. Leia o texto a seguir e responda às questões.

[...] *Com o passar do tempo, uma pessoa exposta diariamente a sons muito altos pode ter a audição comprometida.* [...]

Sons e vibrações que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis ou perturbar as pessoas é o que se chama de poluição sonora. Apesar das leis e das políticas públicas para controlar o problema e dos alertas feitos por especialistas, a poluição sonora ainda não sensibiliza tanto como a do ar ou a da água.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o limite suportável para o ouvido humano é 65 decibéis. Acima disso, o organismo começa a sofrer.* [...]

A longo prazo, o ruído excessivo pode causar gastrite, insônia, aumento do nível de colesterol, distúrbios psíquicos e perda da audição. Provoca ainda irritabilidade, ansiedade, excitação, desconforto, medo e tensão.

[...]

Fonte: JOVER, Ana. Cuidado! Barulho demais faz mal à saúde. *Nova Escola*, São Paulo, n. 179, p. 28 e 29, jan./fev. 2005.

a) Com base nas informações destas páginas, cite alguns exemplos de situações que podem gerar sons muito altos e que podem ser prejudiciais à saúde.

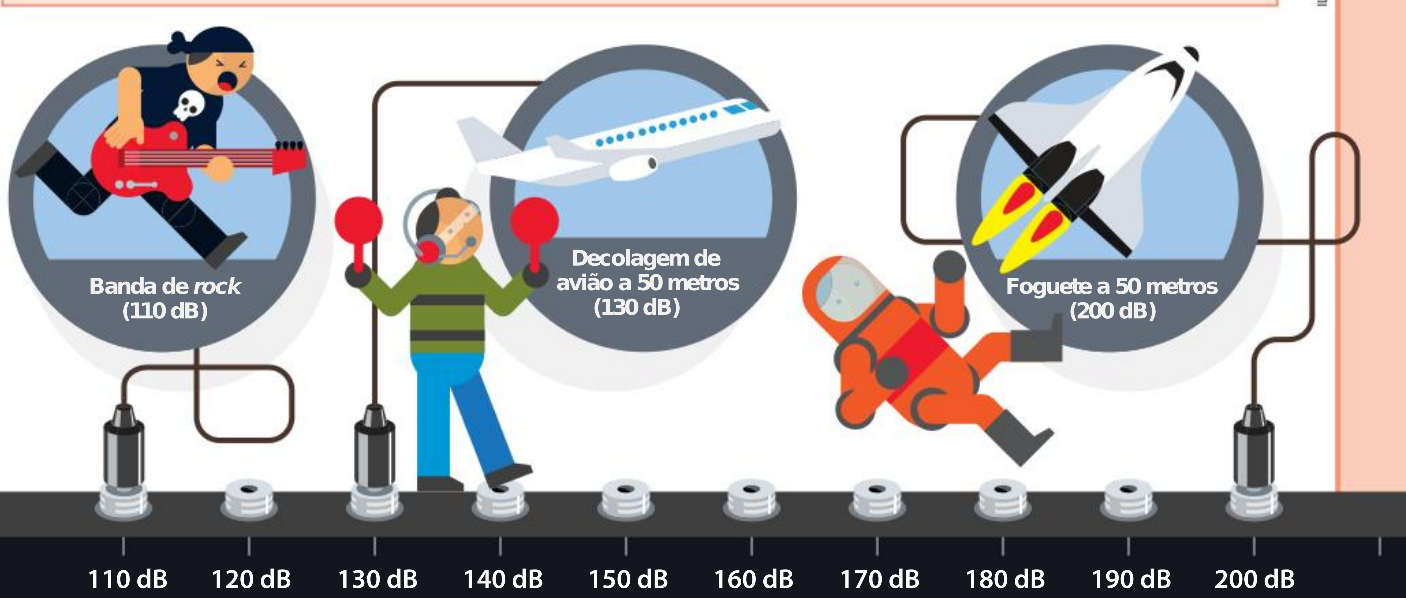
b) Pesquise em livros, revistas ou na internet qual é o nível de ruído, em decibel, atingido por alguns aparelhos eletrodomésticos, como secador de cabelos, aspirador de pó e liquidificador.

c) Você já sofreu danos causados por ruído excessivo? Quais foram os sintomas?

d) Em sua opinião, quais medidas podem amenizar a poluição sonora?

* decibel (dB): unidade de medida usada quando se determina o nível de intensidade sonora de uma fonte.

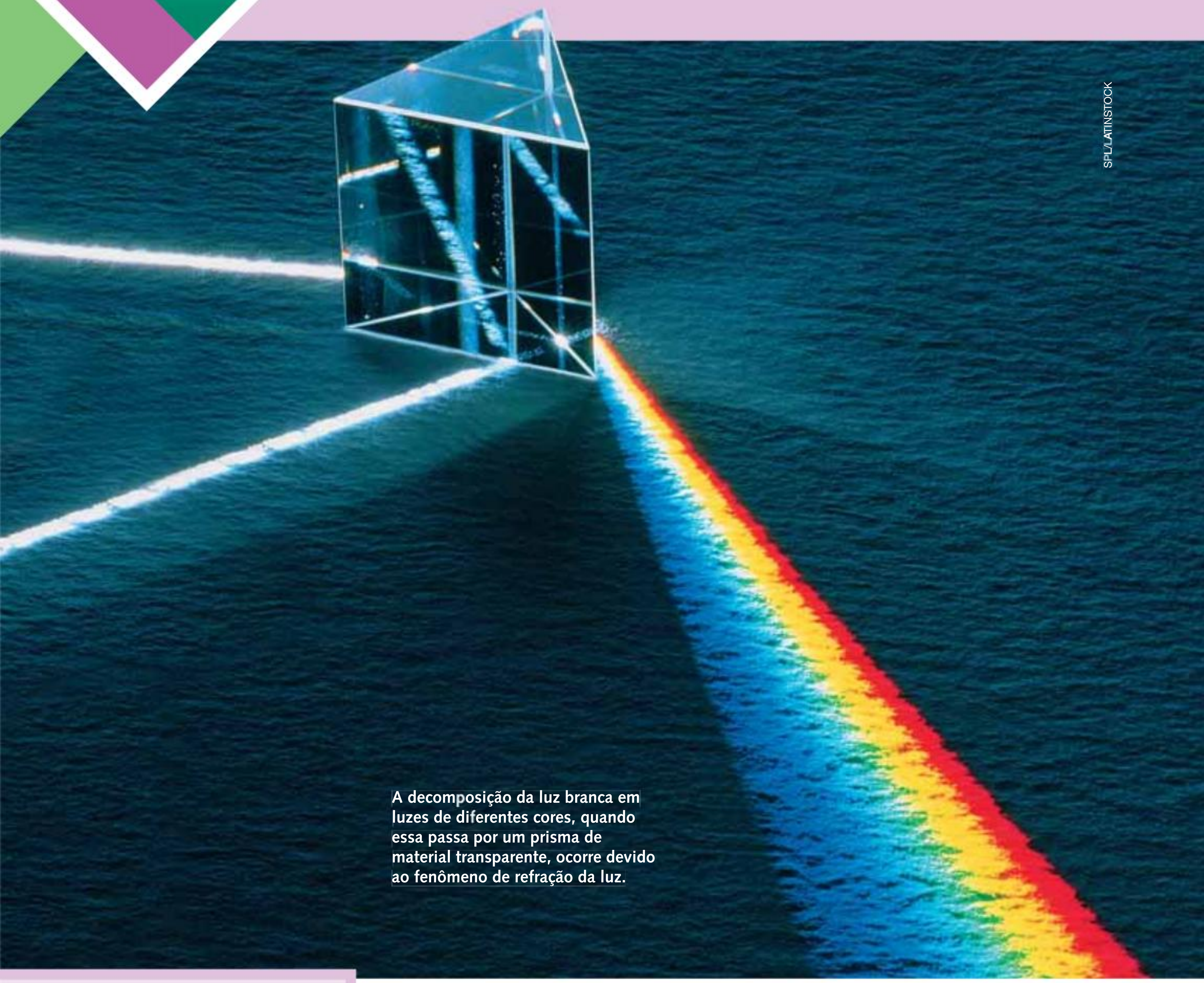
ILUSTRAÇÕES: MÁRIO KANNO



Dados obtidos em: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. *Física 2*. Rio de Janeiro: LTC, 1996. p. 128. 4 v.

Capítulo 3

Complementos de Trigonometria



SPL/LATINSTOCK

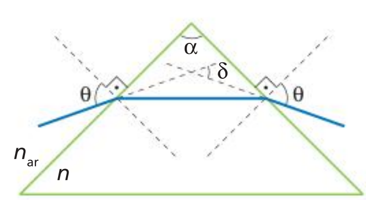
A decomposição da luz branca em luzes de diferentes cores, quando essa passa por um prisma de material transparente, ocorre devido ao fenômeno de refração da luz.

Objetivos do capítulo

- Aplicar a lei dos senos e dos cossenos.
- Ampliar o conceito de razão trigonométrica.
- Resolver equações trigonométricas em $\mathbb{R}$.
- Aplicar as fórmulas de adição de arcos.

Neste capítulo, veremos novas relações trigonométricas. Um exemplo de aplicação de uma delas está no campo da Óptica, quando calculamos o índice de refração n de um material transparente, como um prisma de vidro. Esse índice, que corresponde à razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no material, é expresso matematicamente por:

$$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$



ADILSON SECCO

Um possível desenvolvimento interdisciplinar relacionado ao assunto deste capítulo está na Física, explorando o campo da Óptica.

1 Trigonometria em um triângulo qualquer

Nos capítulos anteriores, aprendemos a calcular as razões trigonométricas de ângulos obtusos. Neste capítulo, usaremos esse conhecimento para estudar novas relações e aplicá-las a um triângulo qualquer.

Por exemplo, em algumas situações, como na demarcação de terras ou no cálculo da altura de uma montanha, é necessário determinar distâncias cuja medição direta não é possível. Nesses casos, é possível medir ângulos com um teodolito e, aplicando relações da Trigonometria, descobrir essas medidas.

CAIAIMAGE/GETTY IMAGES

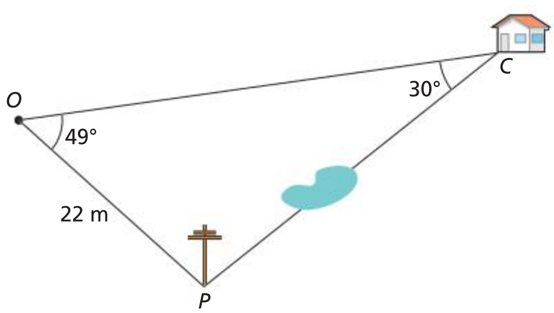
Profissional usando um teodolito, 2015.

1.1 Lei dos senos

Acompanhe a situação a seguir.

Um fio elétrico será instalado entre um poste *P* e uma casa *C*, separados por um lago em um terreno plano. Como calcular o comprimento de fio necessário?

Observe o esquema que representa essa situação.

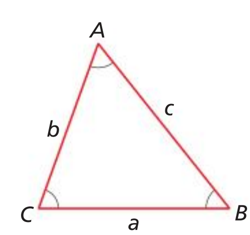


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

As medidas apresentadas no esquema foram obtidas com o auxílio de um teodolito. Aplicando essas medidas na lei dos senos (apresentada a seguir), obtemos o comprimento *PC* do fio.

Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



Demonstração

Consideremos um triângulo qualquer *ABC*, com altura de medida *h*, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Temos: $\text{sen } \hat{C} = \frac{h}{b}$, ou $h = b \cdot \text{sen } \hat{C}$, e $\text{sen } \hat{B} = \frac{h}{c}$, ou $h = c \cdot \text{sen } \hat{B}$

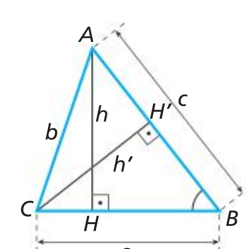
Portanto: $b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B}$, ou $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$ (I)

Considere agora a altura $\overline{CH'}$, de medida h', relativa ao lado $\overline{AB}$.

Temos: $\text{sen } \hat{A} = \frac{h'}{b}$, ou $h' = b \cdot \text{sen } \hat{A}$, e $\text{sen } \hat{B} = \frac{h'}{a}$, ou $h' = a \cdot \text{sen } \hat{B}$

Portanto: $b \cdot \text{sen } \hat{A} = a \cdot \text{sen } \hat{B}$, ou $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$ (II)

De (I) e (II), obtemos: $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

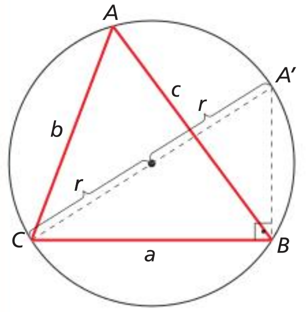


Observação

Na demonstração ao lado, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos senos para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo.

◆ **Observação**

Observe, na figura abaixo, o triângulo *ABC*, inscrito em uma circunferência de raio ***r***, e o triângulo *A'BC*, retângulo em *B* e inscrito na semicircunferência.



É possível mostrar que:

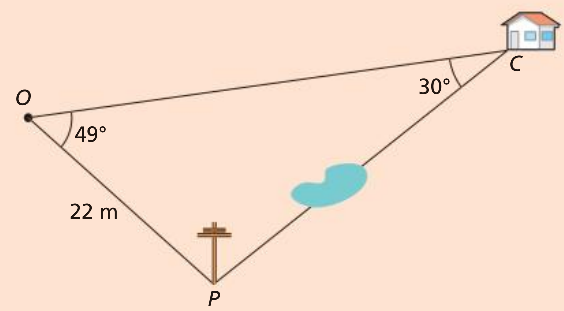
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2r$$

Exercícios resolvidos

R1. Retomar a situação da página anterior e calcular, aproximadamente, o comprimento de fio necessário para unir o poste à casa.

▸ ***Resolução***

Temos o seguinte esquema:



Pela lei dos senos:

$$\frac{PC}{\text{sen } 49°} = \frac{OP}{\text{sen } 30°}$$

Em uma calculadora, obtemos: sen 49° $\simeq$ 0,75

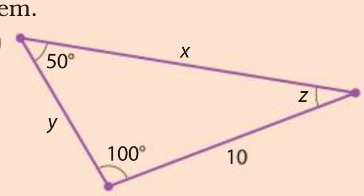
Assim:

$$\frac{PC}{0{,}75} \simeq \frac{22}{0{,}5} \Rightarrow PC \simeq \frac{22 \cdot 0{,}75}{0{,}5} \Rightarrow PC \simeq 33$$

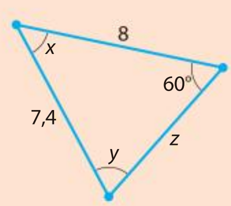
Portanto, serão necessários cerca de 33 m de fio para unir o poste à casa.

R2. Considerando a tabela abaixo, calcular as medidas x, y e z em cada item.

a)



b)



x	sen *x*
20°	0,34
30°	0,50
40°	0,64
50°	0,77
60°	0,87
70°	0,94
80°	0,98

▸ ***Resolução***

a) Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, calculamos o valor de z:

$z = 180° - 100° - 50° = 30°$

Observando o triângulo, pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 100°} = \frac{y}{\text{sen } 30°}$$

Agora, calculamos cada uma das incógnitas separadamente:

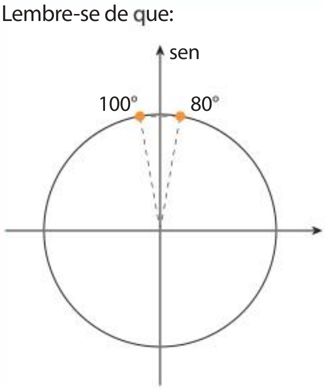
$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 100°} \Rightarrow \frac{10}{0{,}77} = \frac{x}{0{,}98} \Rightarrow x \simeq 12{,}7$$

$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{y}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{10}{0{,}77} = \frac{y}{0{,}5} \Rightarrow y \simeq 6{,}5$$

Assim, $x \simeq 12{,}7$, $y \simeq 6{,}5$ e $z = 30°$.

◆ **Observação**

Lembre-se de que:



sen 100° = sen 80°

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{7{,}4}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } y} = \frac{z}{\text{sen } x}$$

Primeiro, vamos calcular a medida y:

$$\frac{7{,}4}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } y} \Rightarrow \frac{7{,}4}{0{,}87} = \frac{8}{\text{sen } y} \Rightarrow \text{sen } y \simeq 0{,}94$$

Observando a tabela dada, concluímos que $y \simeq 70°$.

Agora, podemos calcular a medida x:

$x \simeq 180° - 60° - 70° = 50° \Rightarrow x \simeq 50°$

Finalmente, calculamos z:

$$\frac{7{,}4}{\text{sen } 60°} = \frac{z}{\text{sen } x} \Rightarrow \frac{7{,}4}{0{,}87} = \frac{z}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \frac{7{,}4}{0{,}87} = \frac{z}{0{,}77} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{7{,}4 \cdot 0{,}77}{0{,}87} \Rightarrow z \simeq 6{,}55$$

Portanto, $x \simeq 50°$, $y \simeq 70°$ e $z \simeq 6{,}55$.

Observação

Algumas calculadoras têm a tecla $\boxed{\sin^{-1}}$, que fornece a medida do ângulo após a digitação do seno dele.

Por exemplo, se não tivéssemos a tabela, poderíamos encontrar o valor de *y* digitando:

$\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{9}\ \boxed{4}\ \boxed{\sin^{-1}}\ \boxed{=}$

Nesse caso, obteríamos, aproximadamente, 70°.

O procedimento apresentado pode variar dependendo do modelo da calculadora.
Orientar os alunos caso tragam calculadoras que funcionem de modo diferente do apresentado.
Em algumas calculadoras, por exemplo, é necessário digitar primeiro a tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ e depois o valor do seno do ângulo que queremos determinar.

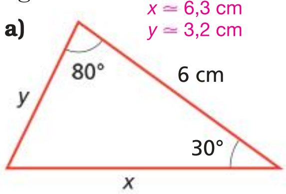
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

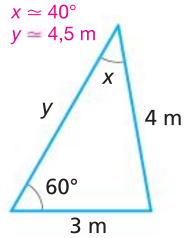
Na resolução dos exercícios a seguir, se necessário, utilize uma calculadora ou a tabela apresentada no exercício resolvido **R2.**

1. Calcule o valor aproximado de x e y em cada figura.

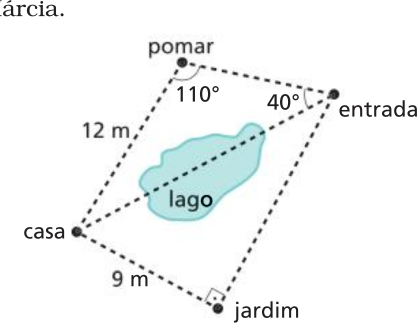
a) $x \simeq 6{,}3$ cm
$y \simeq 3{,}2$ cm



b) $x \simeq 40°$
$y \simeq 4{,}5$ m



2. Na figura a seguir estão posicionados a casa, o pomar, a entrada e o jardim da propriedade de Márcia.



a) Determine a distância aproximada entre a casa e a entrada. $\simeq 17{,}6$ m

b) Como entre a casa e a entrada existe um lago, verifique algebricamente qual dos caminhos alternativos é o mais curto para ir da entrada até a casa.

Caminho 1: entrar, passar pelo pomar e seguir até a casa.

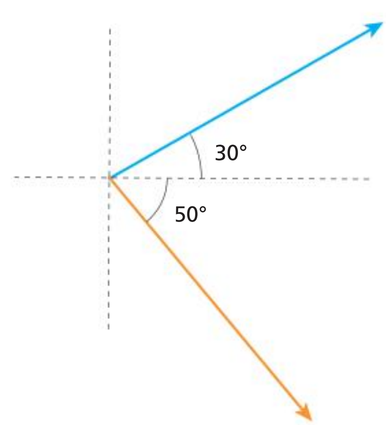
Caminho 2: entrar, passar pelo jardim e seguir até a casa. O caminho 1 é o mais curto (aproximadamente 21,4 m contra 24,1 m do caminho 2).

3. Um paralelogramo tem lados de medidas 3,5 cm e 4,3 cm. Uma de suas diagonais forma com o menor lado um ângulo de 70°. Qual é a medida aproximada dessa diagonal? $\simeq 3{,}95$ cm

4. Um navio é visto no mar por dois pontos de observação, A e B, localizados na costa, distantes 50 km um do outro. O ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ e o segmento que une o navio ao ponto de observação A é 35°. O ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ e o segmento que une o navio ao ponto de observação B é 45°. Qual é a distância aproximada entre o navio e o ponto de observação A? $\simeq 36{,}2$ km

5. Reúna-se com um colega e resolvam o exercício a seguir.

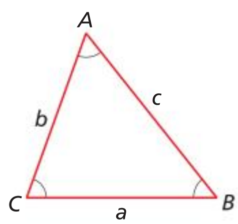
Dois nadadores partiram do mesmo ponto de uma lagoa, ao mesmo tempo, e nadaram à velocidade de 0,2 m/s. Um dos nadadores foi na direção 30° nordeste, e o outro, na direção 50° sudeste, conforme o diagrama abaixo. Qual será a distância aproximada entre os nadadores após 5 minutos de viagem? $\simeq 76{,}36$ m



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

1.2 Lei dos cossenos

O teorema de Pitágoras relaciona a medida dos três lados de um triângulo, mas é válido apenas para triângulos retângulos. A lei dos cossenos (apresentada a seguir) relaciona os três lados de um triângulo qualquer, sabendo a medida de um de seus ângulos internos.

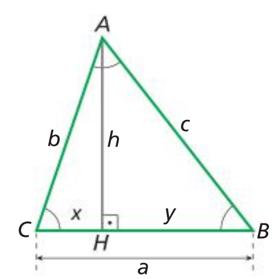


Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto destas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Demonstração

Considere um triângulo ABC qualquer e a altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:

$c^2 = h^2 + y^2$ ou $c^2 = h^2 + (a - x)^2$

Do triângulo AHC, temos:

$h = b \cdot \text{sen}\, \hat{C}$ e $x = b \cdot \cos \hat{C}$

Assim:

$c^2 = (b \cdot \text{sen}\, \hat{C})^2 + (a - b \cdot \cos \hat{C})^2$

$c^2 = b^2 \cdot \text{sen}^2\, \hat{C} + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$

$c^2 = b^2 \cdot (\text{sen}^2\, \hat{C} + \cos^2 \hat{C}) + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Como $\text{sen}^2\, \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$, concluímos que: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:

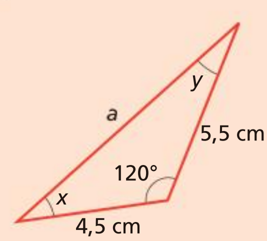
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

◆ Observação

Na demonstração ao lado, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos cossenos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo, caso em que se reduz ao teorema de Pitágoras.

Exercício resolvido

R3. Determinar a medida a indicada no triângulo abaixo.



▸ ***Resolução***

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

$a^2 = (5,5)^2 + (4,5)^2 - 2 \cdot 5,5 \cdot 4,5 \cdot \cos 120°$

Como $\cos 120° = -\cos 60° = -0,5$, encontramos:

$a^2 = 30,25 + 20,25 + 24,75 \Rightarrow a^2 = 75,25 \Rightarrow a \simeq 8,7$

Logo, a vale aproximadamente 8,7 cm.

$\dfrac{8,7}{\text{sen } 120°} = \dfrac{5,5}{\text{sen } x} = \dfrac{4,5}{\text{sen } y}$

$\text{sen } x \simeq 0,55 \Rightarrow x \simeq 33°$

$\text{sen } y \simeq 0,45 \Rightarrow y \simeq 27°$

◆ Reflita

No triângulo do exercício **R3**, após obter o valor de a, calcule x e y aplicando a lei dos senos.

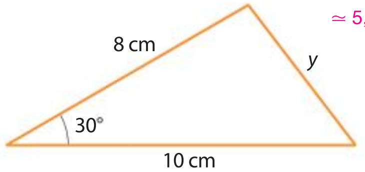
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

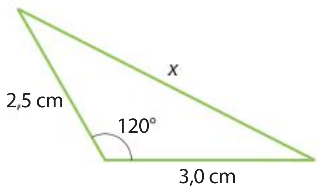
Registre as respostas em seu caderno

6. Calcule o valor aproximado da incógnita em cada item.

a) $\simeq$ 5,1 cm



b) $\simeq$ 4,8 cm



7. Um triângulo possui lados medindo 8 cm e 11 cm. Sabendo que o ângulo interno formado entre esses lados mede 135°, descubra a medida aproximada do terceiro lado. $\simeq$ 17,6 cm

8. Um triângulo tem lados medindo 2 cm, 3,5 cm e 5 cm.

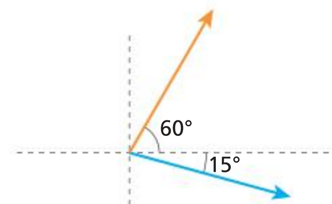
a) Com o auxílio de uma régua e compasso, faça um esboço desse triângulo.

b) De acordo com seu desenho, esse triângulo é retângulo, obtusângulo ou acutângulo? obtusângulo

c) Seja α o ângulo formado entre os lados de medidas 2 cm e 3,5 cm. Pela lei dos cossenos, calcule o valor de cos α. Por esse valor, o triângulo é obtusângulo? $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$; sim

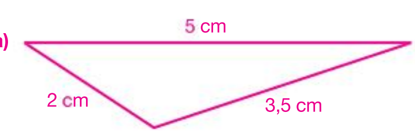
9. Os lados de um paralelogramo têm medida 50 cm e 70 cm. Calcule a medida de cada diagonal desse paralelogramo sabendo que seu maior ângulo interno mede 105°. (*Dado*: cos 75° $\simeq$ 0,26) $\simeq$ 96 cm, $\simeq$ 74,7 cm

10. Dois navios saíram do porto de Santos às 8 h da manhã. Um dos navios viajou na direção 60° nordeste à velocidade de 24 nós. O outro navio viajou na direção 15° sudeste à velocidade de 18 nós, conforme o esquema abaixo.



Sabendo que cos 75° $\simeq$ 0,26, descubra a distância, em quilômetro, entre os navios ao meio-dia. (*Observação*: 1 nó é uma unidade de medida de velocidade equivalente a 1.852 m/h.) $\simeq$ 192,6 km

8. a)



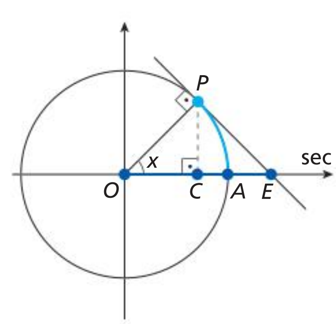
ADILSON SECCO

2 Secante, cossecante e cotangente

Existem outras três razões trigonométricas que decorrem das razões cosseno, seno e tangente: a secante (sec), a cossecante (cossec) e a cotangente (cotg), definidas a seguir.

A **secante** de um ângulo de medida x é definida por:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ para } \cos x \neq 0$$



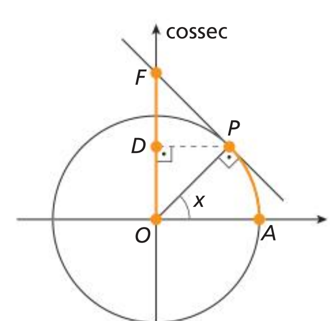
No ciclo trigonométrico (veja a figura ao lado), podemos identificar graficamente a sec x. Pelo ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, que corresponde ao ângulo de medida x, traçamos a reta tangente à circunferência e que intercepta o eixo das abscissas no ponto E.

De acordo com o que já vimos, $OC = \cos x$ e $OP = 1$ (raio do ciclo trigonométrico). Os triângulos OEP e OPC são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Então: $\frac{OE}{OP} = \frac{OP}{OC} \Rightarrow \frac{OE}{1} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow OE = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow OE = \sec x$

A **cossecante** de um ângulo de medida x é definida por:

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}, \text{ para sen } x \neq 0$$



No ciclo trigonométrico (veja a figura ao lado), podemos identificar graficamente a cossec x. Pelo ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, que corresponde ao ângulo de medida x, traçamos a reta tangente à circunferência e que intercepta o eixo das ordenadas no ponto F. Observando que os triângulos OFP e OPD são semelhantes, é possível provar que $OF = \text{cossec } x$.

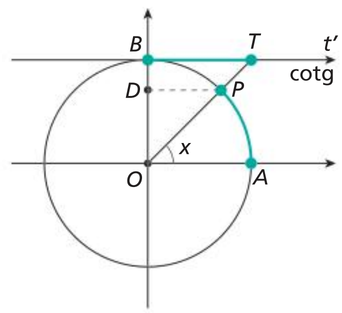
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A **cotangente** de um ângulo de medida x é definida por:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \text{ para sen } x \neq 0$$

No ciclo trigonométrico (veja a figura abaixo), seja t' a reta que passa pelo ponto B e é paralela ao eixo das abscissas. Se P é a extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intercepta t' no ponto T. Por semelhança dos triângulos OBT e ODP, é possível demonstrar que $BT = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$, ou seja, que $BT = \text{cotg } x$.

ADILSON SECCO



Exercícios resolvidos

R4. Calcular:

a) sec 45° **b)** cossec 120° **c)** cotg $\frac{\pi}{6}$

▶ ***Resolução***

a) $\sec 45° = \dfrac{1}{\cos 45°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) $\text{cossec } 120° = \dfrac{1}{\text{sen } 120°} = \dfrac{1}{\text{sen } 60°} = 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\text{cossec } 120° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{cotg } \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\cos \frac{\pi}{6}}{\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$

R5. Sabendo que $\cos x = \dfrac{4}{5}$ e que $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular:

a) sen x **c)** sec x **e)** cotg x
b) tg x **d)** cossec x

▶ ***Resolução***

a) $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, x = 1 - \dfrac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \pm \dfrac{3}{5}$

Como $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, temos sen $x < 0$. Logo, sen $x = -\dfrac{3}{5}$.

b) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg } x = -\dfrac{3}{5} : \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{tg } x = -\dfrac{3}{4}$

c) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = 1 : \dfrac{4}{5} = 1 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \sec x = \dfrac{5}{4}$

d) $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{cossec } x = 1 : \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow \text{cossec } x = -\dfrac{5}{3}$

e) $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{cotg } x = \dfrac{4}{5} : \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow \text{cotg } x = -\dfrac{4}{3}$

◆ Observação

Note que os sinais da secante, da cossecante e da cotangente são, respectivamente, iguais aos sinais do cosseno, do seno e da tangente.

Como nesse intervalo sen $x > 0$, todas as razões seriam positivas.

◆ Reflita

O que mudaria nas respostas do exercício **R5** se o intervalo de variação de x fosse $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. Calcule os valores de:

a) $\sec \frac{\pi}{3}$ 2

b) $\sec 135°$ $-\sqrt{2}$

c) $\operatorname{cossec} 150°$ 2

d) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}$ 1

e) $\operatorname{cossec} 240°$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\operatorname{cotg} 330°$ $-\sqrt{3}$

12. Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule:

a) $\cos x$ $-\frac{3}{4}$

b) $\operatorname{tg} x$ $-\frac{\sqrt{7}}{3}$

c) $\sec x$ $-\frac{4}{3}$

d) $\operatorname{cossec} x$ $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

e) $\operatorname{cotg} x$ $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

3 Equações trigonométricas em $\mathbb{R}$

No capítulo 1, estudamos a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo $[0, 2\pi]$. Agora, vamos estudá-las considerando o conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

Nos exemplos a seguir, veremos que, para obter a solução das equações no universo $\mathbb{R}$, basta resolvê-las como se fosse no intervalo $[0, 2\pi]$ e, em seguida, escrever a expressão que fornece as medidas dos arcos côngruos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica. Acompanhe.

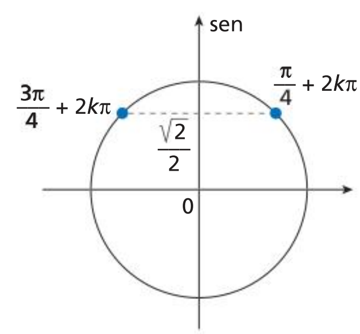
Exemplos

a) Vamos determinar x tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

Se $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$, então x pode assumir os valores $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ e todas as medidas associadas a esses pontos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica.

Portanto, no universo real, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

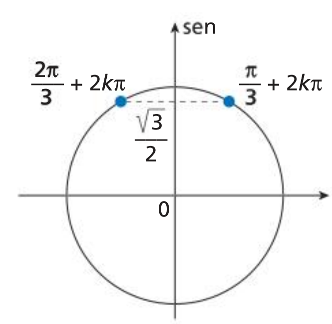


b) Vamos obter x tal que $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ medem $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

Logo, no universo real, temos o conjunto solução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$



c) Vamos obter x tal que $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $-\frac{1}{2}$ medem $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.

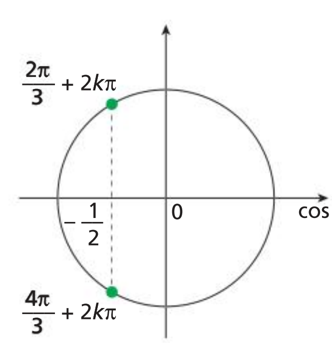
Assim:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{9\pi}{6} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Então, o conjunto solução, no universo real, é:

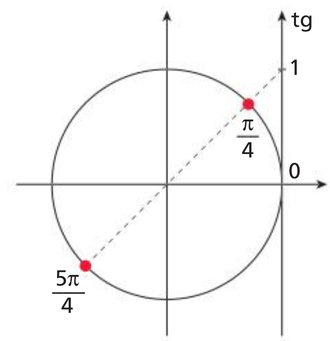
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

d) Vamos resolver a equação tg $2x = 1$.

Os arcos cuja tangente vale 1, levando-se em conta a primeira volta no ciclo trigonométrico, medem $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.



Quando não se menciona o conjunto universo, fica convencionado que $U = \mathbb{R}$.

Considerando, então, o conjunto universo real, temos:

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Repare que, nesse caso, basta somar um múltiplo de π ao primeiro ponto para obter todos os pontos que são solução da equação.

Assim, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

13. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ **b)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

13. Resolva as equações a seguir, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen } x = \text{sen } \frac{2\pi}{3}$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$

d) $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

e) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\text{tg } x = \text{tg } \frac{5\pi}{4}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

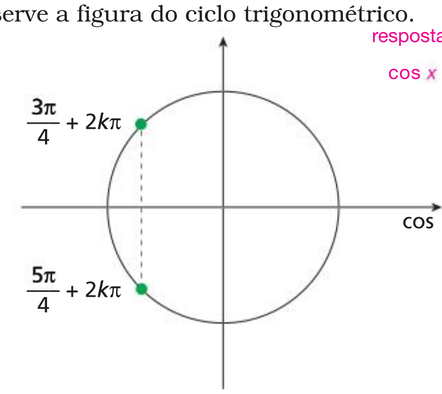
15. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

14. Resolva a equação $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $\mathbb{R}$.

15. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\text{sen } x \cdot \cos x = 0$.

16. Observe a figura do ciclo trigonométrico.

resposta possível: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Supondo que a figura destaque as raízes de uma equação trigonométrica, escreva essa equação. Compare sua resposta com a de um colega.

13. c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ **d)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

14. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

4 Adição de arcos

Conhecidos os valores do seno, do cosseno e da tangente dos arcos notáveis (30°, 45° e 60°), podemos encontrar diversos outros valores das funções trigonométricas realizando operações de adição e de subtração com esses arcos.

As fórmulas da adição de arcos permitem calcular, por exemplo:

$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°)$

$\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$\text{tg } 75° = \text{tg } (120° - 45°)$

$\text{sen } (45° + 45°) = \text{sen } 90° = 1$

$\text{sen } 45° + \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Como $1 \neq \sqrt{2}$, então: $\text{sen } (45° + 45°) \neq \text{sen } 45° + \text{sen } 45°$

Reflita

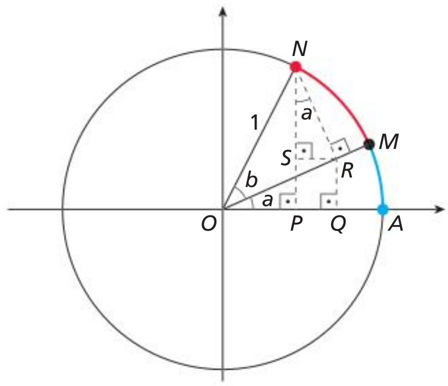
Verifique, por meio de cálculo direto, que: $\text{sen } (45° + 45°) \neq \text{sen } 45° + \text{sen } 45°$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Cosseno da soma

Neste tópico, vamos demonstrar a fórmula do cosseno da soma de dois arcos. As demais fórmulas apresentadas são consequências diretas dessa primeira.

Considere os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{MN}$, de medidas a e b, respectivamente. Vamos determinar o cosseno do arco $\overset{\frown}{AN}$, que é a soma dos arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{MN}$, sendo conhecidos os valores de sen a, sen b, cos a e cos b.



ADILSON SECCO

De acordo com a figura, $OP = OQ - PQ$. Como $PQ = SR$, podemos escrever: $OP = OQ - SR$

O triângulo OPN é retângulo. Logo: $OP = \cos(a + b)$ (I)

Para determinar OQ, consideramos os triângulos retângulos OQR e ORN:

No $\triangle OQR$, temos: $OQ = OR \cdot \cos a$

No $\triangle ORN$, temos: $OR = ON \cdot \cos b$

Como $ON = 1$, temos: $OR = 1 \cdot \cos b \Rightarrow OR = \cos b$

Então: $OQ = \cos a \cdot \cos b$ (II)

Para determinar SR, tomamos os triângulos retângulos RSN e ORN:

No $\triangle RSN$, temos: $SR = NR \cdot \text{sen}\, a$

No $\triangle ORN$, temos: $NR = ON \cdot \text{sen}\, b$

Como $ON = 1$, temos: $NR = 1 \cdot \text{sen}\, b \Rightarrow NR = \text{sen}\, b$

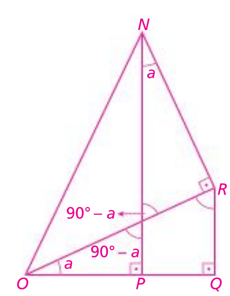
Então: $SR = \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$ (III)

Substituindo as expressões (I), (II) e (III) em $OP = OQ - SR$, obtemos:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

Reflita

Por que a medida do ângulo $Q\hat{O}R$ é igual à medida do ângulo $P\hat{N}R$?



ADILSON SECCO

Observe na figura os triângulos retângulos semelhantes com ângulos agudos de medidas a e $(90° - a)$.

Cosseno da diferença

Vamos substituir, na fórmula do cosseno da soma, o arco $(+b)$ pelo arco $(-b)$. Sabendo que $\cos(-b) = \cos b$ e $\text{sen}(-b) = -\text{sen}\, b$, temos:

$\cos[a + (-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}(-b)$

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot (-\text{sen}\, b)$

Logo:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

Seno da soma

Lembrando que $\text{sen}\, x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e usando a fórmula do cosseno da diferença, escrevemos:

$$\text{sen}(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \text{sen}\, b$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen}\, a$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, concluímos:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$$

Seno da diferença

Vamos considerar o arco $(-b)$ na fórmula do seno da soma. Sabendo que $\cos(-b) = \cos b$ e $\text{sen}(-b) = -\text{sen}\, b$, temos:

$\text{sen}[a + (-b)] = \text{sen}\, a \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos a$

$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + (-\text{sen}\, b) \cdot \cos a$

Logo:

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos a$$

Tangente da soma

Sabemos que $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, para $\cos x \neq 0$. Assim:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}$$

Para trabalhar apenas com tangentes, vamos dividir o numerador e o denominador da fração por $\cos a \cdot \cos b \neq 0$. Assim:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\, a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} + \dfrac{\text{sen}\, b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}} - \dfrac{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

Logo:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

Essa fórmula é válida para $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a + b) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Tangente da diferença

Como nos casos anteriores, vamos considerar o arco $(-b)$. Pela simetria em relação ao eixo x, temos que $\text{tg}(-b) = -\text{tg}\, b$.

Assim: $\text{tg}[a + (-b)] = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}(-b)}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}(-b)} = \dfrac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$

Logo:

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

Essa fórmula é válida para $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a - b) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios resolvidos

R6. Calcular:

a) sen 105° **b)** cos 15° **c)** tg 105°

▸ ***Resolução***

a) Consideremos a igualdade sen 105° = sen (45° + 60°).

Aplicando a fórmula para o seno da soma de arcos, temos:

$\text{sen}\,(45° + 60°) = \text{sen}\,45° \cdot \cos 60° + \text{sen}\,60° \cdot \cos 45°$

$$\text{sen}\,(45° + 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Logo, $\text{sen}\,105° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

b) Consideremos a igualdade $\cos 15° = \cos\,(45° - 30°)$. Aplicando a fórmula para o cosseno da diferença de arcos, temos:

$\cos\,(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\,45° \cdot \text{sen}\,30°$

$$\cos\,(45° - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Logo, $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

c) Sabemos que $105° = 45° + 60°$. Podemos, então, escrever $\text{tg}\,105° = \text{tg}\,(45° + 60°)$.

Aplicando a fórmula da tangente da soma, temos:

$$\text{tg}\,105° = \text{tg}\,(45° + 60°) = \frac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,60°}{1 - \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,60°} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador, obtemos:

$$\text{tg}\,105° = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

Logo, $\text{tg}\,105° = -2 - \sqrt{3}$.

R7. Demonstrar cada uma das identidades abaixo.

a) $\text{sen}\,(x + y) - \text{sen}\,(x - y) = 2\,\text{sen}\,y \cdot \cos x$

b) $\cos\,(x + y) - \cos\,(x - y) = -2\,\text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$

▶ ***Resolução***

Utilizando as fórmulas do seno e do cosseno da soma e da diferença, temos:

a) $\text{sen}\,(x + y) - \text{sen}\,(x - y) =$

$= \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x - (\text{sen}\,x \cdot \cos y - \text{sen}\,y \cdot \cos x) =$

$= \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x =$

$= 2\,\text{sen}\,y \cdot \cos x$

b) $\cos\,(x + y) - \cos\,(x - y) =$

$= \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y - (\cos x \cdot \cos y + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y) =$

$= \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y - \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y =$

$= -2\,\text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

17. Calcule: **a)** $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; **b)**, **c)** e **d)** $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

a) sen 75°
b) cos 75°
c) sen 165°
d) cos 285°

18. Usando as fórmulas de adição de arcos, mostre que: Ver resolução no Guia do professor.

a) $\text{tg}\,15° \neq \text{tg}\,45° - \text{tg}\,30°$
b) $\text{tg}\,60° - \text{tg}\,45° \neq \text{tg}\,15°$

19. Calcule:

a) cos 105° $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
b) cossec 15° $\sqrt{6} + \sqrt{2}$
c) cotg 75° $2 - \sqrt{3}$
d) sec 105° $-\sqrt{2} - \sqrt{6}$

20. Calcule:

a) $\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{12}$ $-\sqrt{3} - 2$ **b)** $\text{tg}\,\dfrac{17\pi}{12}$ $2 + \sqrt{3}$

21. Usando as fórmulas de adição de arcos, mostre que: Ver resolução no Guia do professor.

a) $\cos\,(\pi + x) = -\cos x$
b) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

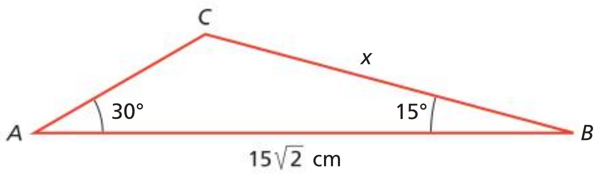
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

8. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

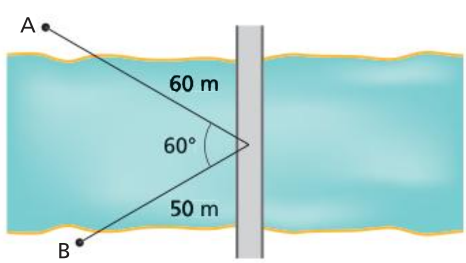
Aplicação

1. Considere o triângulo representado abaixo.



Calcule a o valor de x. 15 cm

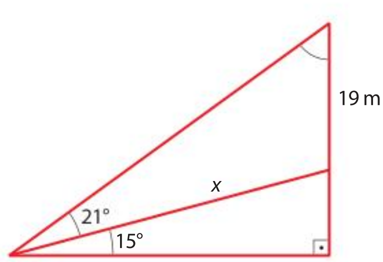
2. De uma ponte, um engenheiro observa dois edifícios, um em cada margem de um rio. O edifício **A** está a 60 m de distância do engenheiro, e o edifício B, a 50 m. Considerando as medidas da figura abaixo, determine a distância entre os edifícios A e B. $\simeq$ 55,7 m



3. Em um triângulo ABC, temos $AB = 8$ cm, $AC = 8$ cm e med$(\hat{A}) = 120°$. Calcule a medida do lado $\overline{BC}$. $8\sqrt{3}$ cm

4. Um triângulo tem lados de medida $AB = 15$ cm, $BC = 21$ cm e $AC = 24$ cm. Qual é a medida do ângulo formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? 60°

5. No pico de uma montanha, há uma torre de 19 m de altura. Ao fazer medições em determinado ponto da região, um topógrafo obtém 36° para o ângulo de visão até o topo da torre e 15° para o ângulo de elevação até a base da torre, conforme mostra a figura.



Qual é a distância aproximada entre o topógrafo e a base da torre? (*Dados*: sen 21° $\simeq$ 0,36 e sen 54° $\simeq$ 0,81) $\simeq$ 42,75 m

6. Calcule o valor de $\text{cossec}\,\frac{\pi}{2} \cdot \sec\pi + \text{tg}\,2\pi \cdot \sec\frac{\pi}{4}$. -1

7. Considerando x um arco do primeiro quadrante e $\cos x = \frac{1}{3}$, determine:

a) sen x $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) tg x $2\sqrt{2}$

c) sec x 3

d) cossec x $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

8. Resolva as equações a seguir considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $\text{sen}\,x = \text{sen}\,\frac{\pi}{5}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

9. Resolva a equação $\text{sen}\,x + \cos x = 0$ considerando $U = \mathbb{R}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. Calcule o valor de:

a) sen 15° $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) cos 165° b) $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

c) tg 75° $2 + \sqrt{3}$

11. Calcule o valor de cos 75° − sen 105°. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de:

a) sen x $\frac{4}{5}$

b) tg x $\frac{4}{3}$

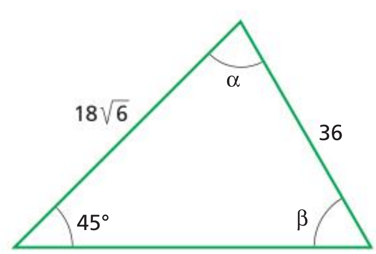
c) cos $2x$ $-\frac{7}{25}$

d) sen $2x$ $\frac{24}{25}$

e) tg $2x$ $-\frac{24}{7}$

Aprofundamento

13. Considere o triângulo representado abaixo.



$\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Aplicando a lei dos senos, encontre o valor de sen β.

b) Com base na resposta do item anterior, podemos concluir que há dois valores possíveis para β. Quais são esses valores? 60° ou 120°

c) Agora, determine os possíveis valores de α. 75° ou 15°

d) Pelos itens anteriores, concluímos que há duas possibilidades de formato para esse triângulo. Faça o esboço delas. Ver resolução no Guia do professor.

14. Aplicando as fórmulas do seno, do cosseno e da tangente da soma de arcos, determine as fórmulas gerais para o cálculo de:

a) sen 2α $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$

b) cos 2α $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha$

c) tg 2α $\text{tg}\,2\alpha = \frac{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha}$

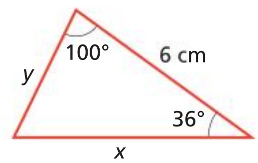
Desafio

15. De que tipo é a sequência (cos x, cos $(x + \pi)$, cos $(x + 2\pi)$, ...), com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$? PG, $a_1 = \cos x$, $q = -1$

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Considere a figura a seguir.



Nesse triângulo, pode-se afirmar que: alternativa d

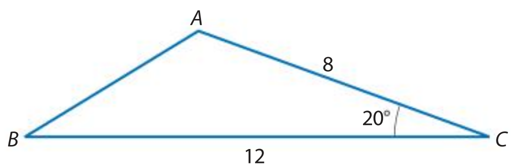
a) $x = \left(\dfrac{6 \cdot \text{sen } 44°}{\text{sen } 100°}\right)$ cm

b) $x = \left(\dfrac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°}\right)$ cm

c) $y = \left(\dfrac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 100°}\right)$ cm

d) $y = \left(\dfrac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°}\right)$ cm

2. Observe o triângulo representado abaixo.



Sabendo que $\cos 20° \simeq 0{,}94$, o valor mais próximo para AB é: alternativa c

a) 3,25 **b)** 4,25 **c)** 5,25 **d)** 6,25

3. Sabendo que $\text{sen } x = \dfrac{3}{5}$, o valor de cossec x é: alternativa b

a) $\dfrac{4}{5}$

b) $\dfrac{5}{3}$

c) $\dfrac{5}{4}$

d) $\dfrac{4}{3}$

4. Sabendo que $\cos x = \dfrac{1}{4}$ e x pertence ao primeiro quadrante, o valor de cotg x é: alternativa a

a) $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

b) $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{16}$

d) $\dfrac{15}{16}$

5. A solução de $2 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$ é: alternativa b

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \varnothing$

6. $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tem o conjunto solução: alternativa b

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \varnothing$

7. Os valores de sen 15° e cos 105° são, respectivamente: alternativa d

a) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ e $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ e $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

d) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

8. Sendo $\text{sen } x = \dfrac{1}{4}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, o valor de sen $2x$ é: alternativa b

a) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{16}$

d) $\dfrac{15}{4}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Aplicar a lei dos senos e dos cossenos.	X	X						
Ampliar o conceito de razão trigonométrica.			X	X				
Resolver equações trigonométricas em $\mathbb{R}$.					X	X		
Aplicar as fórmulas de adição de arcos.							X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	49 a 51	52 e 53	53 a 55	53 a 55	55 e 56	55 e 56	56 a 59	56 a 59

Capítulo 4

Superfícies poligonais, círculo e áreas

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

1 Polígonos regulares

Neste capítulo, vamos aprender a calcular a área de alguns objetos e figuras presentes em nosso cotidiano para, assim, conseguirmos responder a perguntas como: quanto couro é necessário para a confecção de uma bola de futebol oficial? Qual é a quantidade de tinta necessária para pintar uma parede? Para isso, vamos estudar alguns conceitos importantes relacionados aos polígonos regulares.

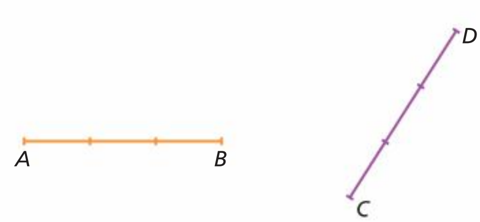
Objetivos do capítulo

- Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.
- Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.
- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.

1.1 Segmentos congruentes e ângulos congruentes

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem a mesma medida, considerando uma mesma unidade de comprimento.

Exemplo



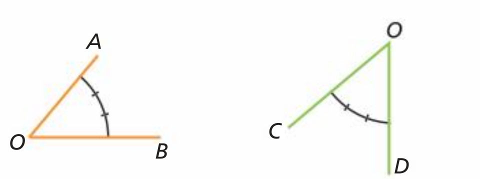
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Indicamos a congruência dos segmentos por: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Composição de uma bola de futebol.

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida, considerando uma mesma unidade de medida.

Exemplo



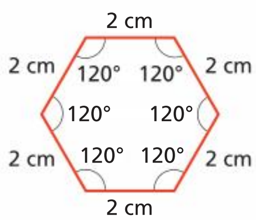
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Indicamos a congruência dos ângulos por: $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

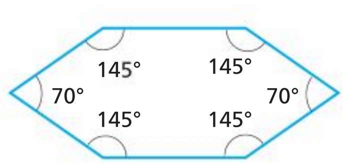
1.2 Definição de polígono regular

Um polígono é **regular** se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Exemplos



polígono regular



polígono não regular

Explore

Com um colega, consulte livros do Ensino Fundamental que tratem de:

- número de diagonais de um polígono de *n* lados;
- soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados.

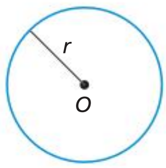
Para o desenvolvimento deste tópico, não é imprescidível, porém é desejável que os alunos recordem ideias referentes a polígonos convexos, como: decomposição em ($n - 2$) triângulos a partir de um vértice, cálculo do número de diagonais e cálculo da soma das medidas dos ângulos internos.

1.3 Polígono regular inscrito em uma circunferência

Antes de falarmos sobre os polígonos regulares inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela, vamos definir circunferência.

Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que distam *r* de um ponto *O* fixo desse plano. A distância *r* é a medida do **raio** da circunferência, e o ponto *O* é o **centro** da circunferência.

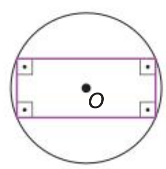
◆ Observação



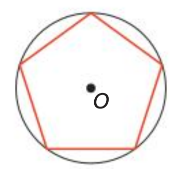
Raio de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades são o centro e um ponto da circunferência.

Quando todos os vértices de um polígono pertencem a uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono inscrito** nessa circunferência ou que a circunferência é **circunscrita** ao polígono.

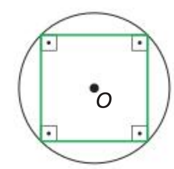
Exemplos



retângulo inscrito



pentágono regular inscrito



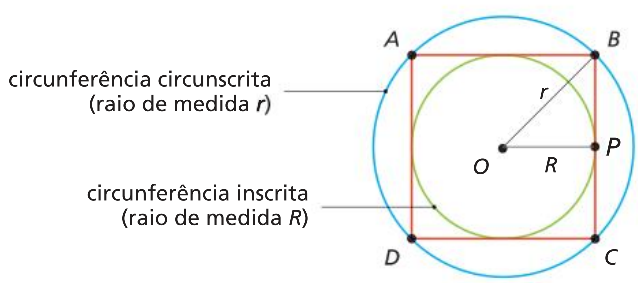
quadrado inscrito

Quando um polígono regular é inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*, todo segmento cujas extremidades são o centro da circunferência e o ponto médio de um lado do polígono é chamado de **apótema** do polígono. A medida do apótema de um polígono regular é a medida do raio da circunferência inscrita no polígono.

◆ Observação

O quadrado *ABCD* da figura ao lado é inscrito na circunferência de raio *r* e é circunscrito à circunferência de raio *R*.

Quando todos os lados de um polígono tangenciam uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono circunscrito** a essa circunferência ou que a circunferência é inscrita no polígono.



Observe que $\overline{OP}$ é o apótema de cada polígono inscrito em uma circunferência.

◆ Reflita

Quantos apótemas tem um polígono regular de *n* lados?

O ponto médio de cada lado de um polígono regular determina um apótema; logo, um polígono regular de *n* lados tem *n* apótemas.

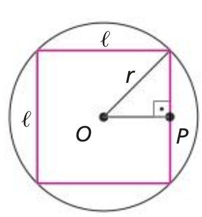


figura I

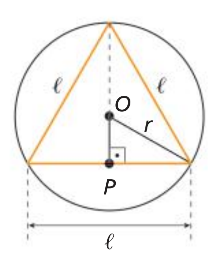


figura II

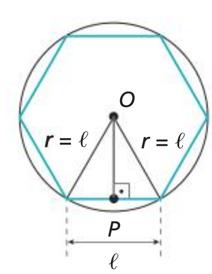


figura III

◆ Observação

Daqui em diante, não distinguiremos alguns segmentos de suas respectivas medidas quando essa opção não causar dificuldade ao entendimento do texto. Assim, empregaremos com o mesmo significado: circunferência com raio de medida *r* e circunferência de raio *r*; polígono com lado de medida ℓ e polígono de lado ℓ; apótema de medida *a* e apótema *a*.

Na figura I, a medida do apótema é metade da medida do lado do quadrado.

Na figura II, a medida do apótema do triângulo equilátero é uma parte da medida da altura desse triângulo.

Na figura III, a medida do apótema do hexágono regular é a medida da altura do triângulo equilátero de lado *r*, no qual *r* é o raio da circunferência circunscrita ao polígono e também a medida do lado do hexágono.

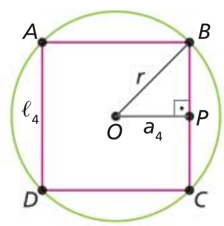
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Relações métricas

As medidas do lado e do apótema de um polígono regular podem ser escritas em função da medida do raio da circunferência em que esse polígono está inscrito. Acompanhe como podemos escrever essas relações métricas para um quadrado e para um triângulo equilátero:

- **quadrado inscrito em uma circunferência**

Observe o quadrado *ABCD* de lado ℓ_4 e apótema a_4, que está inscrito na circunferência de centro *O* e raio *r*.



O triângulo *OBP* é retângulo; seus catetos medem a_4 e $\frac{\ell_4}{2}$, e a hipotenusa, *r*.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OBP*, temos: $(a_4)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$

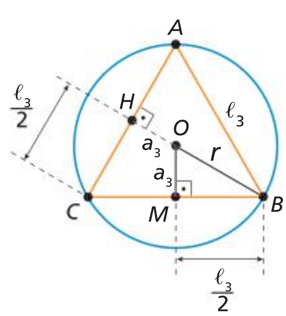
Como $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$, temos: $\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{(\ell_4)^2}{2} = r^2$

Logo, a medida do lado do quadrado é dada por: $\boxed{\ell_4 = r\sqrt{2}}$

Assim, a medida do apótema do quadrado é dada por: $\boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$

- **triângulo equilátero inscrito em uma circunferência**

Observe o triângulo *ABC* de lado ℓ_3 e apótema a_3, que está inscrito na circunferência de centro *O* e raio *r*.



O triângulo *OMB* é retângulo; seus catetos medem a_3 e $\frac{\ell_3}{2}$, e a hipotenusa, *r*.

O triângulo *CHB* é retângulo; seus catetos medem $\frac{\ell_3}{2}$ e $a_3 + r$, e a hipotenusa, ℓ_3.

Os triângulos *OMB* e *CHB* são semelhantes, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Portanto: $\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CHB*, temos:

$$\left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + (a_3 + r)^2 = (\ell_3)^2 \Rightarrow \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + r\right)^2 = (\ell_3)^2$$

Obtendo ℓ_3 em função de *r*, temos:

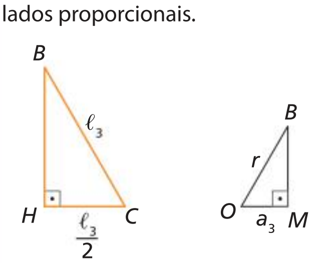
$$\frac{(\ell_3)^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = \frac{4(\ell_3)^2}{4} \Rightarrow 3(\ell_3)^2 = 9r^2 \Rightarrow (\ell_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow \boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$

Observações

- Usaremos ℓ_n e a_n para indicar, respectivamente, a medida do lado e do apótema do polígono regular de *n* lados inscrito em uma circunferência.
- $\overline{OB}$ está contido na diagonal do quadrado, logo $O\hat{B}P$ mede 45° e $B\hat{O}P$ também. O $\triangle OPB$ é isósceles; portanto: $a_4 = BP = \frac{\ell_4}{2}$

Observação

Triângulos semelhantes têm lados proporcionais.



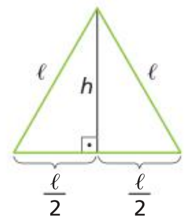
$$\frac{OM}{OB} = \frac{HC}{BC}$$

$$\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Seja h a medida da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ:



Assim, temos:

$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$4\ell^2 = 4h^2 + \ell^2$

$3\ell^2 = 4h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

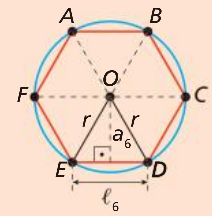
Exercícios resolvidos

R1. O apótema de um hexágono regular mede 3 cm.

a) Determinar o perímetro desse hexágono.

b) Determinar o raio da circunferência circunscrita a ele.

▶ ***Resolução***



a) Traçando as diagonais de um hexágono regular, que passam pelo centro da circunferência circunscrita, obtemos 6 triângulos equiláteros. O apótema do hexágono é a altura do triângulo equilátero. Assim, temos:

$$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, o perímetro do hexágono regular é: $6 \cdot 2\sqrt{3}$ cm $= 12\sqrt{3}$ cm

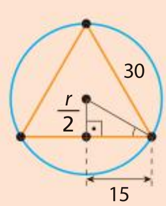
b) Como $\ell_6 = r$, temos: $r = 2\sqrt{3}$ cm

R2. (Enem) O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetro, é igual a:

a) 18 **b)** 26 **c)** 30 **d)** 35 **e)** 60

▶ ***Resolução***



Como o proprietário da mesa deseja adquirir o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa, vamos considerar a situação limite ilustrada na figura ao lado.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo de hipotenusa r e catetos $\frac{r}{2}$ e 15, temos:

$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 15^2 \Rightarrow r^2 - \frac{r^2}{4} = 225 \Rightarrow r^2 = \frac{4 \cdot 225}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot 15}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{30\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r \simeq 10 \cdot 1,7 = 17$$

Logo, o menor raio do círculo suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa deve ter aproximadamente 17 cm. Portanto, entre as alternativas, deve ser escolhido o tampo de vidro com 18 cm de raio.

alternativa a

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Determine a medida do apótema e a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2 cm. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

2. Desenhe um hexágono regular circunscrito a uma circunferência e escreva:

a) a medida ℓ_6 do lado do hexágono em função do raio R da circunferência.

b) a medida D de uma diagonal do hexágono, que passa pelo centro da circunferência, em função do raio R dessa circunferência.

c) o perímetro P do hexágono em função do raio R da circunferência.

2. a) $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

c) $P = 4\sqrt{3}\,R$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2 Área de algumas superfícies poligonais planas

Um polígono divide o plano que o contém em duas regiões distintas, uma interna e outra externa. A figura formada pela união do polígono com sua região interna é denominada **superfície poligonal** ou **região poligonal**.

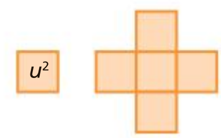
Veremos, a seguir, como calcular a área de algumas superfícies poligonais planas.

2.1 Área de uma superfície quadrada

> A porção do plano ocupada por uma superfície poligonal corresponde a um único número A real positivo chamado de **área**, obtido pela comparação da porção ocupada pela superfície poligonal com a porção ocupada por uma unidade de medida de área.

Observação

Se uma região poligonal é composta de n regiões poligonais justapostas, então sua área é igual à soma das áreas das n regiões. Considerando a unidade u^2, a área da região poligonal abaixo é igual a 5.



A unidade de medida de área que geralmente consideramos é a área delimitada por um quadrado unitário, isto é, um quadrado de lado $1u$, sendo u uma unidade de comprimento. Dizemos que a área desse quadrado unitário é $1u^2$.

A área de uma superfície quadrada de lado ℓ é dada por:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$

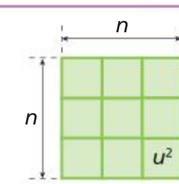
Demonstraremos esse fato para o caso em que ℓ é um número natural.

Demonstração

Considere uma superfície quadrada R, com lados medindo n, em que n é um número natural. A superfície R pode ser decomposta em n^2 superfícies quadradas justapostas com área unitária. Assim, a superfície R tem área igual a n^2.

Logo, a área de uma superfície quadrada R de lado n é dada por n^2.

Observação



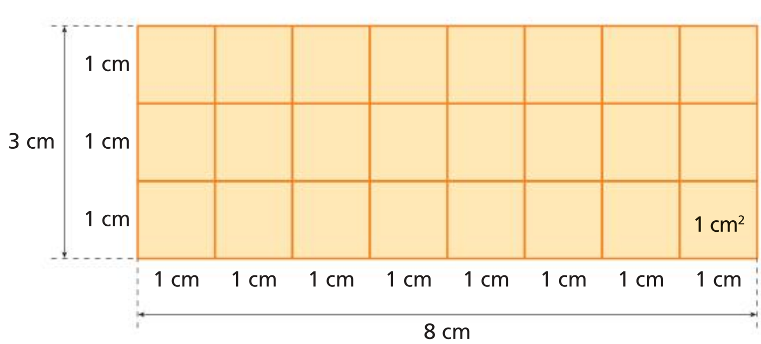
Área de R é n^2.

Nessa demonstração, consideramos n um número natural. Porém, a relação obtida é válida para qualquer valor real de ℓ (racional ou irracional).

2.2 Área de uma superfície retangular

Muitas vezes, há situações em que é preciso determinar a área de uma superfície plana, como para estimar o gasto com a pintura das paredes de uma casa, já que a mão de obra a ser cobrada para esse trabalho muitas vezes é calculada por metro quadrado.

Vamos calcular a área delimitada pelo retângulo abaixo, considerando um quadrado de lado 1 cm como unidade.

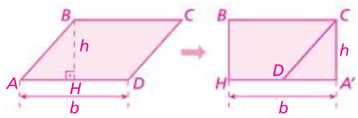


Nesse caso, multiplicamos a quantidade de quadrados de lado 1 cm de uma coluna pela quantidade de quadrados de uma linha ($3 \cdot 8$). Portanto, a área do retângulo é 24 cm^2.

Observação

Em alguns contextos que envolvem áreas, a superfície poligonal será chamada pelo nome do polígono que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a área da superfície retangular", diremos "a área do retângulo".

2º Reflita
Explorar com os alunos maneiras de demonstrar esse fato. Uma delas consiste em usar o conceito de paralelismo e semelhança de triângulos.

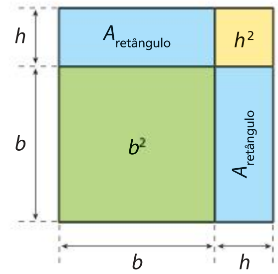


ADILSON SECCO

Como $ABCD$ é paralelogramo, $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e $\overline{BC} /\!/ \overline{AD}$, então os ângulos $B\hat{A}H$ e $C\hat{D}A'$ são congruentes.
Como os ângulos $B\hat{H}A$ e $C\hat{A}'D$ são retos, concluímos que os triângulos ABH e DCA' são semelhantes, e sua razão de semelhança é:
$\frac{AB}{DC} = \frac{AH}{DA'} = \frac{BH}{CA'} = \frac{h}{h} = 1$
Como a razão de semelhança é 1, os triângulos ABH e DCA' são congruentes, por isso eles se justapõem.

Agora, vamos calcular a área de um retângulo qualquer de base medindo b e altura medindo h, com b e h não necessáriamente naturais.

Para isso, consideremos um quadrado com lados medindo $(b + h)$. A área desse quadrado é $(b + h)^2$, e ele pode ser decomposto em dois retângulos e dois quadrados menores, conforme a figura abaixo.



b^2 é a área do quadrado verde.
h^2 é a área do quadrado amarelo.
$A_{retângulo}$ é a área desconhecida de cada retângulo de base medindo b e altura medindo h

Assim, a área do quadrado de lados de medida $(b + h)$ pode ser expressa também por: $b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2$

Igualando as expressões que representam a área do quadrado, temos:
$(b + h)^2 = b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2 \Rightarrow b^2 + 2 \cdot b \cdot h + h^2 = b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot A_{retângulo}$

Portanto, a área do retângulo é dada por:

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

◆ Reflita

A fórmula da área do retângulo também pode ser usada para calcular a área de um quadrado?

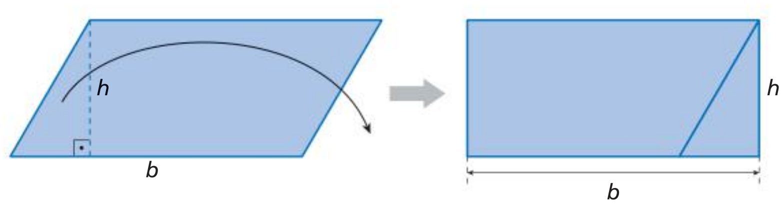
Sim, uma vez que todo quadrado é retângulo, pois tem quatro ângulos retos e lados congruentes dois a dois. Mas vale lembrar que nem todo retângulo é quadrado.

Exemplo

Para determinar a medida da altura do retângulo de área $\pi\sqrt{3}$ cm² e cuja medida da base é π cm, fazemos:
$A_{retângulo} = b \cdot h \Rightarrow \pi\sqrt{3} = \pi \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{3}$
Portanto, a medida da altura do retângulo é $\sqrt{3}$ cm.

2.3 Área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo

É possível compor um retângulo valendo-se de um paralelogramo não retangular.



Se achar conveniente, relembrar o que são polígonos convexos e não convexos: se a reta que passa por qualquer par de vértices consecutivos mantiver todos os demais vértices no mesmo semiplano, então tal polígono será *convexo*; caso contrário, tem-se um polígono *não convexo*.

◆ Observação

Paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.

O paralelogramo e o retângulo são **equivalentes**, ou seja, têm a mesma área. Assim:

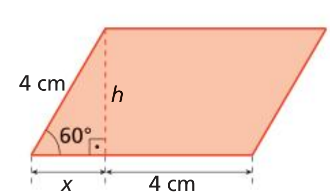
$$A_{paralelogramo} = b \cdot h$$

◆ Reflita

Na decomposição do paralelogramo inicial e na composição do retângulo final, o que garante que o triângulo retângulo se justaponha perfeitamente ao outro lado do paralelogramo?

Exemplo

Vamos calcular a área do paralelogramo ao lado.

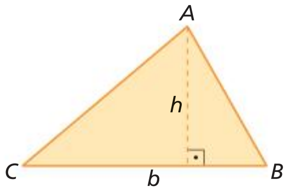


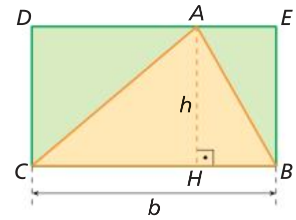
A medida da altura do paralelogramo é:
$\text{sen } 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$
Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular x:
$4^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow 16 = 12 + x^2 \Rightarrow x = 2$
Portanto, a medida da base do paralelogramo é $2 + 4 = 6$.
$A_{paralelogramo} = b \cdot h = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
Portanto, a área do paralelogramo é $12\sqrt{3}$ cm².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.4 Área de uma superfície triangular

Podemos pensar na área do triângulo como metade da área de um retângulo.



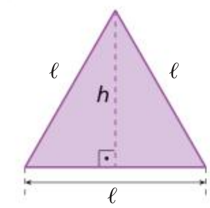


Observe, na figura da direita, que os triângulos ACD e CAH são congruentes (pois os lados correspondentes são congruentes), da mesma maneira que os triângulos ABE e BAH o são. Portanto, a área do triângulo ABC é metade da área do retângulo $BCDE$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Observação

Veja o triângulo equilátero de lado ℓ:



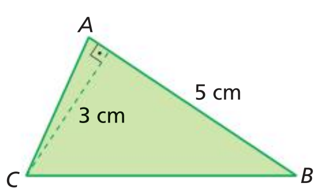
Já vimos que a medida da altura desse triângulo é $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Assim, sua área é:

$$\frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Exemplo

Vamos calcular a área do triângulo ABC a seguir.



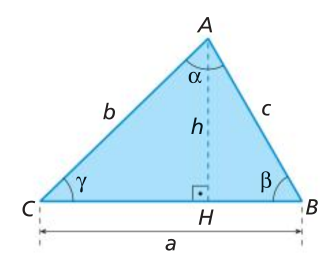
Consideremos como base o lado $\overline{AB}$, que mede 5 cm. A medida da altura relativa a esse lado é 3 cm. Assim:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5$$

Portanto, a área do triângulo é 7,5 cm^2.

Outros modos de obter a área de uma superfície triangular

Vamos determinar a área de um triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo formado por eles. Depois, vamos determinar essa área em função das medidas dos três lados. Observe a figura ao lado e acompanhe os cálculos.



1. A área do triângulo é:

$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ (I)

Como o $\triangle ABH$ é retângulo, temos:

$\text{sen}\ \beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen}\ \beta$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}\ \beta$$

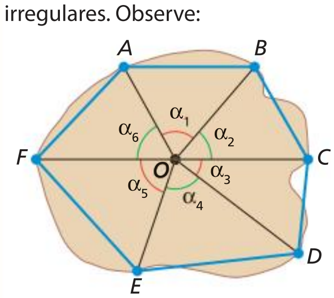
2. O perímetro do triângulo é $2p = a + b + c$; então, o semiperímetro é $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Demonstra-se que a área do $\triangle ABC$ também pode ser dada pela **fórmula de Heron**:

$$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Reflita

Uma aplicação da primeira fórmula ao lado está no cálculo aproximado da área de terrenos irregulares. Observe:



Com um teodolito, obtêm-se, a partir de um ponto O do terreno, as medidas $\alpha_1, ..., \alpha_6$. Medem-se também $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}$ e $\overline{OF}$. Supondo $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_6$, calcule as áreas dos 6 triângulos e adicione-as.

Reflita

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360° \end{cases}$$

$6\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

$$\text{Área} = \left(\frac{OA \cdot OB}{2} + \frac{OB \cdot OC}{2} + \frac{OC \cdot OD}{2} + \frac{OD \cdot OE}{2} + \frac{OE \cdot OF}{2} + \frac{OF \cdot OA}{2}\right) \cdot \text{sen}\ 60°$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}[OA \cdot (OB + OF) + OC \cdot (OB + OD) + OE \cdot (OD + OF)]$$

Exemplo

Comentário: Esta atividade propõe uma aplicação da Matemática na agrimensura. Seria interessante solicitar aos alunos uma pesquisa sobre esse ramo de atividade humana.

Para determinar a área do triângulo retângulo com catetos de medidas 3 cm e 4 cm, e hipotenusa 5 cm, podemos empregar três modos diferentes:

- Considerando os lados $a = 3$ cm, $c = 4$ cm e o ângulo $\beta = 90°$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen}\ 90° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 6$$

- Aplicando a fórmula de Heron: $A_{\text{triângulo}} = \sqrt{6(6 - 5)(6 - 3)(6 - 4)} = \sqrt{36} = 6$
- Considerando que, em um triângulo retângulo, um cateto é a altura relativa ao outro: $A_{\text{triângulo}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Portanto, a área do triângulo é 6 cm^2.

Quanto ao cálculo, convém propor um questionamento sobre a precisão desse procedimento e o que poderia ser feito para obter resultados mais próximos do real. Espera-se que os alunos concluam que a precisão do cálculo torna-se maior com o aumento da quantidade de repartições da superfície com o vértice no ponto O.

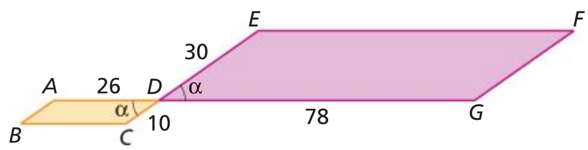
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

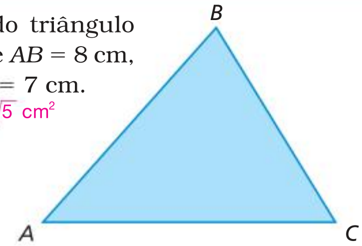
Registre as respostas em seu caderno

3. O perímetro de um retângulo é igual a 12 m. Determine a área desse retângulo sabendo que seus lados estão na razão 1 : 2. $8\ m^2$

4. Na figura, $CD = 10$, $AD = 26$, $DG = 78$, $DE = 30$, $\overline{BC} /\!/ \overline{AG} /\!/ \overline{EF}$ e $\overline{AB} /\!/ \overline{CE} /\!/ \overline{GF}$. Determine a razão entre as áreas dos polígonos *DEFG* e *DCBA*. 9

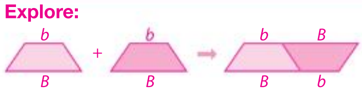


5. Calcule a área do triângulo *ABC* sabendo que $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm e $BC = 7$ cm. $12\sqrt{5}\ cm^2$



6. Considere um quadrado de área 150 cm^2 e um triângulo equilátero cuja altura tem a mesma medida da diagonal do quadrado. Determine a área desse triângulo. $100\sqrt{3}\ cm^2$

Explore:



$2 \cdot A_{trapézio} = A_{paralelogramo} \Rightarrow 2 \cdot A_{trapézio} = (B + b) \cdot h \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

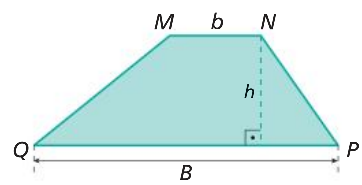
LUIZ RUBIO

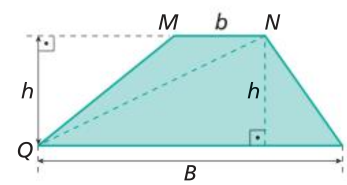
2.5 Área de uma superfície trapezoidal

◆ **Observação**

Trapézio é um quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

Podemos pensar na área do trapézio como a soma da área de dois triângulos.





Observe, na figura da direita, que a área do trapézio *MNPQ* é igual à soma das áreas dos triângulos *NPQ* e *MNQ*. Assim:

$$A_{trapézio} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{B \cdot \mathbf{h} + \mathbf{b} \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

◆ **Explore**

Experimente obter a área de um trapézio por meio de um procedimento diferente desse que foi exposto ao lado.

Por exemplo, em um papel, desenhe e recorte dois trapézios *MNPQ* iguais. Justaponha-os de modo que formem um paralelogramo. Em seguida, por meio da fórmula da área do paralelogramo obtido, consiga a fórmula da área do trapézio *MNPQ*.

Exemplo

A medida da base maior de um trapézio é o dobro da medida da base menor. Sabendo que a área do trapézio é 3 dm^2 e que a medida da altura é $\sqrt{2}$ dm, vamos calcular a medida da base menor.

$$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow 3 = \frac{(2b + b) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3b = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

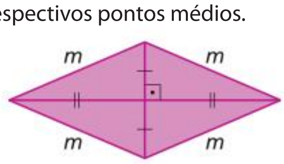
Portanto, a medida da base menor é $\sqrt{2}$ dm.

2.6 Área de uma superfície losangular

◆ **Observação**

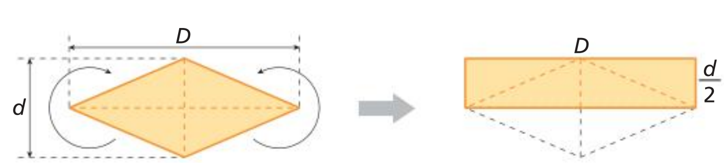
Losango é um paralelogramo que tem os quatro lados de mesma medida.

As diagonais de um losango são perpendiculares e se cruzam nos respectivos pontos médios.



Como o losango é um paralelogramo, podemos calcular sua área como o produto da medida da base pela medida da altura. Outro modo de calcular essa área é por meio das diagonais do losango.

Observe como é possível compor um retângulo a partir de um losango:



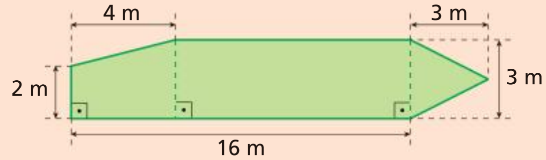
A área do paralelogramo é igual à área do retângulo. Assim:

$$A_{losango} = D \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2}}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R3. Determinar a área da figura a seguir.



▸ ***Resolução***

Podemos decompor a figura em três: um trapézio, um retângulo e um triângulo. Assim:

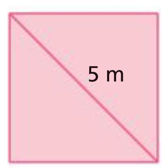
$$A = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}} = \frac{(3+2)\cdot 4}{2} + 12\cdot 3 + \frac{3\cdot 3}{2} = 50{,}5$$

Portanto, a área da figura é 50,5 m^2.

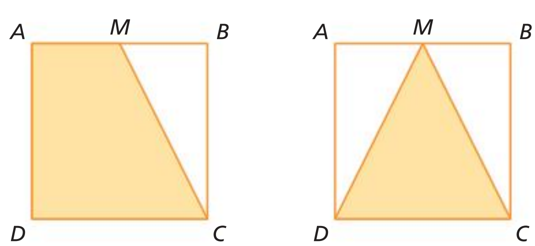
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

7. Calcule a área do quadrado representado a seguir. 12,5 m^2

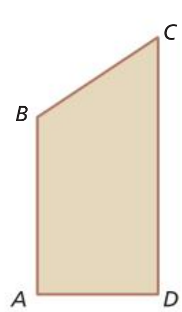


8. O quadrado *ABCD* tem 10 m de lado. Em cada caso, foi pintada uma superfície poligonal.



Sabendo que *AM* = *MB*, calcule a área de cada figura pintada. 75 m^2 e 50 m^2

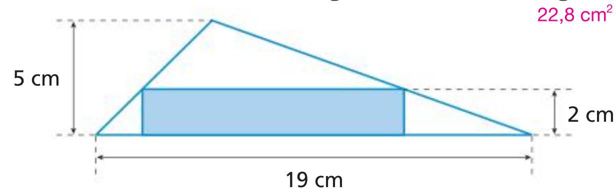
9. (UFJF-MG) Um terreno tem a forma de um trapézio *ABCD*, com ângulos retos nos vértices *A* e *D*, como mostra a figura. Sabe-se que *AB* = 31 m, *AD* = 20 m e *DC* = 45 m. Deseja-se construir uma cerca, paralela ao lado $\overline{AD}$, dividindo esse terreno em dois terrenos de mesma área. A distância do vértice *D* a esta cerca deve ser, em metro, igual a: alternativa b



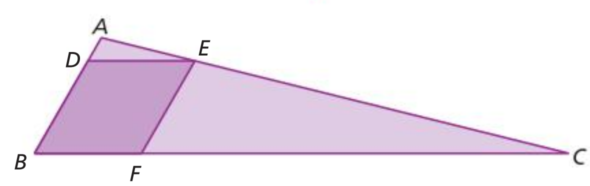
a) 12
b) 19
c) 20
d) 22
e) 26

10. Para confeccionar uma bandeira do Brasil, um artista plástico colou, sobre um tecido retangular verde de medidas 2 m por 1,4 m, um tecido amarelo na forma de losango. Cada um dos vértices do losango dista 17 cm do lado do retângulo que está mais próximo. Qual é a área do losango, em centímetro quadrado? 8.798 cm^2

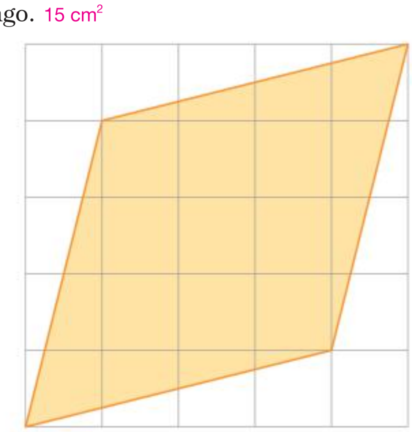
11. Obtenha a área do retângulo inscrito no triângulo. 22,8 cm^2



12. Na figura, *DEFB* é um losango inscrito no triângulo *ABC*, em que *AB* = 5 m, *BC* = 20 m e o ângulo *ABC* mede 60°. Determine a medida do lado e a área desse losango. 4 m; $8\sqrt{3}$ m^2

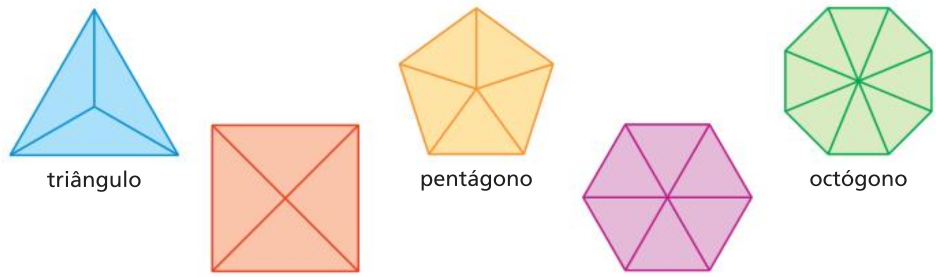


13. Considere uma malha composta de quadrados de lados medindo 1 cm e determine a área do losango. 15 cm^2



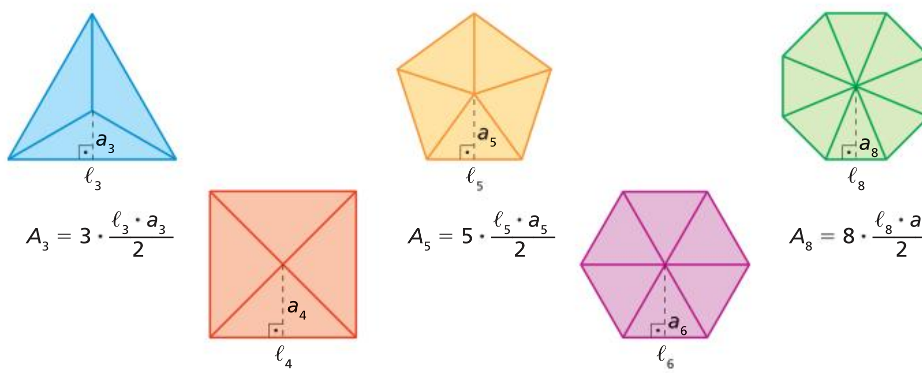
2.7 Área de superfícies poligonais regulares

Sempre é possível decompor um polígono regular de n lados em n triângulos isósceles congruentes entre si.



Cada um desses triângulos tem pelo menos dois lados congruentes, de medida igual ao raio da circunferência circunscrita ao polígono.

A base e a altura de cada um desses triângulos são, respectivamente, o lado e o apótema do polígono regular. Como a área de cada um desses polígonos regulares é igual à soma das áreas dos triângulos que os compõem, podemos chegar às seguintes igualdades:



$$A_3 = 3 \cdot \frac{\ell_3 \cdot a_3}{2} \quad A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2} \quad A_5 = 5 \cdot \frac{\ell_5 \cdot a_5}{2} \quad A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2} \quad A_8 = 8 \cdot \frac{\ell_8 \cdot a_8}{2}$$

Dessa maneira, concluímos que, se um polígono regular tem n lados de medida ℓ_n cada um e apótema medindo a_n, sua área é dada por:

$$A_n = n \cdot \frac{\ell_n \cdot a_n}{2} \Rightarrow A_n = \frac{n \cdot \ell_n}{2} \cdot a_n \Rightarrow \boxed{A_n = p \cdot a_n}$$

Observação

Note que p representa o semiperímetro do polígono.

Exercícios resolvidos

R4. Determinar a área de um hexágono regular sabendo que $a_6 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

▸ ***Resolução***

Como $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$, então: $\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = 5$

Sabendo que $p = \frac{6 \cdot \ell_6}{2}$, então: $p = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow p = 15$

Substituindo o valor do semiperímetro encontrado na expressão $A_6 = p \cdot a_6$, obtemos:

$A_6 = 15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $A_6 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm²

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R5. A área de um triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{16}$ m^2, e seu perímetro é $\frac{3}{2}$ m. Calcular o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

▶ ***Resolução***

Se o perímetro do triângulo é $\frac{3}{2}$ m, seu semiperímetro é $p = \frac{3}{4}$ m.
Sendo $A_3 = p \cdot a_3$, temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4} \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 16} \Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Como a medida do apótema de um triângulo equilátero é metade do raio da circunferência circunscrita a ele, temos:

$$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

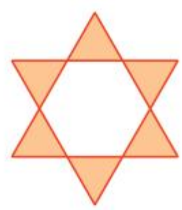
Portanto, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

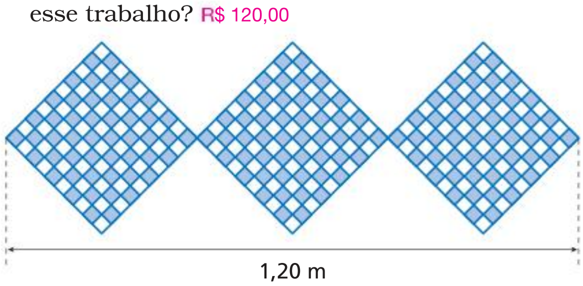
14. Qual é a área de um triângulo equilátero cujo apótema mede $\sqrt{3}$ cm? $9\sqrt{3}$ cm^2

15. Determine a área da região laranja da estrela representada ao lado sabendo que os triângulos e o hexágono que a formam são regulares e que o apótema do hexágono mede 6 cm. $72\sqrt{3}$ cm^2



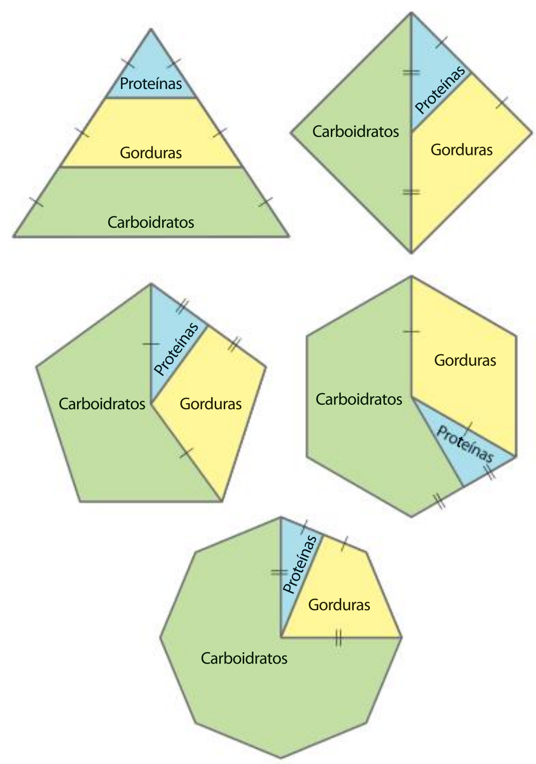
16. A razão entre a medida do apótema de um hexágono regular e a medida do apótema de um quadrado é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Determine a razão entre as áreas do hexágono e do quadrado. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

17. Um artesão montou um mosaico de 1,20 m de largura, composto de três placas quadradas idênticas. Sabendo que ele cobra R$ 500,00 o metro quadrado de mão de obra, quanto ele recebeu por esse trabalho? R$ 120,00



18. (Enem) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas.

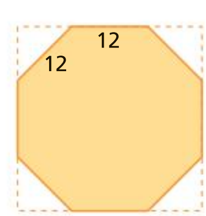
Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o: alternativa c

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octeogono.

19. Cortando os cantos de um quadrado, como mostra a figura, obtém-se um octógono regular de lados que medem 12 cm. Qual é a medida do apótema desse octógono? $6(1 + \sqrt{2})$ cm

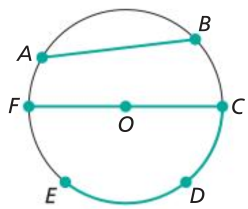


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3 Círculo e circunferência

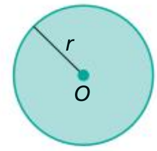
O **círculo** é formado pela união de uma circunferência com sua região interna.

Circunferência e seus elementos

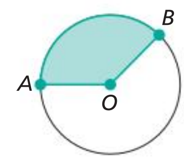


- O é o centro da circunferência.
- $\overline{AB}$ é uma corda.
- $\overline{CF}$ é um diâmetro.
- $\overline{OC}$ é um raio.
- $\overset{\frown}{CE}$ é um arco (há dois arcos $\overset{\frown}{CE}$: um que passa por D, outro que passa por A).

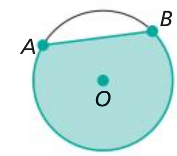
Círculo e suas partes



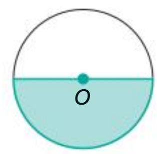
círculo



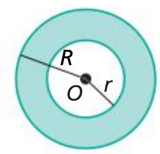
setor circular



segmento circular



semicírculo



coroa circular

BIBLIOTHEQUE NATIONALE, PARIS

Arquimedes em gravura do século XVII.

$C_1 = 2\pi r$
$C_2 = 2\pi(r \cdot k) = C_1 \cdot k$
Logo, o comprimento também será multiplicado por k.

Reflita

Se multiplicarmos o raio de uma circunferência por k, por quanto será multiplicado seu comprimento?

Reflita

Se, em uma circunferência de comprimento C e raio r, aumentarmos em uma unidade:
- seu raio, em quanto aumentará seu comprimento?
- seu comprimento, em quanto aumentará seu raio?

3.1 Comprimento da circunferência

Você conhece algum método para determinar o valor do número irracional π?

Provavelmente, os primeiros valores para π foram obtidos por meio de medidas. Por exemplo, no papiro de Rhind (documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C.), a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência apresenta o valor 3,1604, que seria uma aproximação do número π.

Mais tarde, o matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Para isso, ele considerou uma circunferência de raio de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência estava entre os perímetros de polígonos regulares, com n lados cada um, inscrito em uma circunferência e circunscrito a ela.

Hoje, sabemos que a razão entre o comprimento C de uma circunferência de raio r e a medida do seu diâmetro é constante, ou seja, a razão é sempre a mesma, qualquer que seja a circunferência. Essa constante é denotada por π. Então, o comprimento da circunferência pode ser determinado por:

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow \boxed{C = 2\pi r}$$

Exemplos

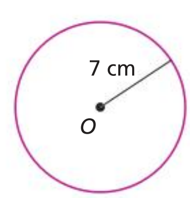
a) Vamos calcular o comprimento da circunferência a seguir.

$C = 2\pi r$

$C = 2 \cdot \pi \cdot 7$

$C = 14\pi$

Portanto, o comprimento dessa circunferência é 14π cm.



b) Vamos determinar o raio da circunferência cujo comprimento é $\pi\sqrt{5}$ m.

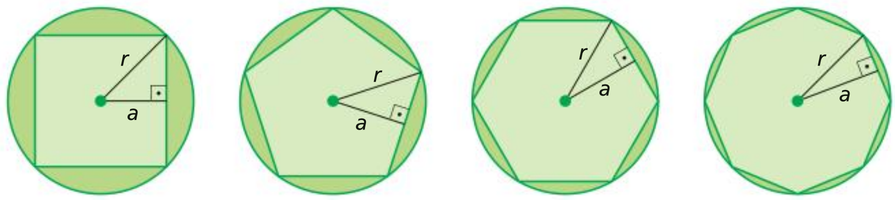
$C = 2\pi r \Rightarrow \pi\sqrt{5} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Portanto, o raio da circunferência é $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.2 Área do círculo

Observe cada circunferência a seguir na qual foi inscrito um polígono regular.



Note que, quanto maior é o número de lados do polígono inscrito, mais a área dele se aproxima da área do círculo, além de a medida do apótema *a* se aproximar cada vez mais da medida do raio *r* do círculo.

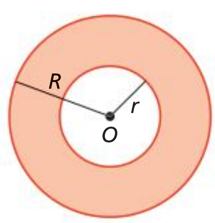
Já vimos que a área de um polígono regular é dada pelo produto de seu semiperímetro pela medida do apótema ($A = p \cdot a$). Podemos estender essa ideia para a área do círculo, ao considerar que, quando o número de lados do polígono tende a infinito, o apótema do polígono tende a *r*.

Assim: $A_{\text{círculo}} = \dfrac{2\pi r}{2} \cdot r$

Portanto, a área do círculo é dada por: $\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$

Área da coroa circular

Observe a coroa circular representada abaixo.

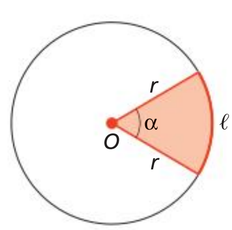


A área da coroa circular é a diferença entre a área do círculo de maior raio e a área do círculo de menor raio:

$$A_{\text{coroa}} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2)}$$

Área do setor circular

A área do setor circular é diretamente proporcional à medida α do ângulo central que o determina, ou seja, quando sua medida é duplicada ou triplicada, a área correspondente também duplica ou triplica.



Sabendo disso e considerando que o círculo de raio *r* é um setor circular determinado por um ângulo de 360°, podemos escrever, para α em grau:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{A_{\text{círculo}}} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \boxed{A_{\text{setor}} = \frac{\alpha \pi r^2}{360°}}$$

Para α em radiano, temos:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{A_{\text{círculo}}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \boxed{A_{\text{setor}} = \frac{\alpha r^2}{2}}$$

2º Reflita, p. 74

$C = 2\pi r$

- Aumentando em 1 unidade seu raio:
  $C_2 = 2\pi(r + 1) = 2\pi r + 2\pi$
  $C_2 = C + 2\pi$
  Logo, o comprimento aumentará em 2π unidades.
- Aumentando em 1 unidade seu comprimento:
  $C + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow 2\pi r + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{2\pi r}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi} = r_2 \Rightarrow r_2 = r + \dfrac{1}{2\pi}$
  Portanto, seu raio aumentará em $\dfrac{1}{2\pi}$ unidade.

Reflita

Como podemos expressar a área de um círculo de raio *r* em função da medida *d* do diâmetro da circunferência desse círculo?

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$

Como $r = \dfrac{d}{2}$, temos:

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \dfrac{\pi d^2}{4}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$2\pi r$ ——— $360°$
ℓ ——— α

$\alpha = \dfrac{360° \cdot \ell}{2\pi r}$

$A_{\text{setor}} = \dfrac{\alpha \pi r^2}{360°} = \dfrac{\dfrac{360° \cdot \ell}{2\pi r} \cdot \pi r^2}{360°}$

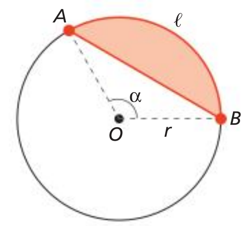
$A_{\text{setor}} = \dfrac{\ell r}{2}$

Reflita

Como podemos expressar a área de um setor circular de raio *r* em função do comprimento ℓ do arco determinado pelo mesmo ângulo central que determina o setor circular?

Área do segmento circular

Observe o segmento circular representado abaixo, em que $\alpha < 180°$.

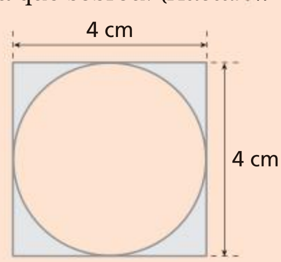


Note que a área do segmento circular é a diferença entre a área do setor circular determinado pelo ângulo α e a área do triângulo AOB:

$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}}$$

Exercícios resolvidos

R6. Um serralheiro recortou um disco circular de uma chapa quadrada de metal com 4 cm de lado, conforme mostra a figura a seguir. Determinar a área da chapa que sobrou. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



► ***Resolução***

Vamos chamar, respectivamente, de A_1, A_2 e A_3 a área de chapa que sobrou, a área do quadrado e a área do círculo.

Sabendo que o raio do círculo é metade da medida do lado do quadrado ($r = 2$ cm) e que $A_1 = A_2 - A_3$, temos:

$A_1 = 4^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_1 = 16 - 3{,}14 \cdot 2^2 \Rightarrow A_1 = 3{,}44$

Portanto, a área da chapa que sobrou é 3,44 cm^2.

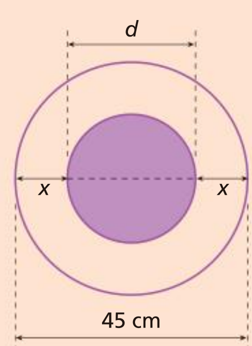
R7. Segundo as regras do jogo de basquete, a bola deve ter circunferência máxima entre 74,9 cm e 78 cm de comprimento. Se uma bola de basquete, com circunferência máxima de 78 cm, for centralizada no aro de uma cesta com 45 cm de diâmetro, de quanto será a folga x entre a bola e o aro em toda a volta? (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)

► ***Resolução***

Sendo d a medida do diâmetro da circunferência máxima da bola, temos:

$C = d \cdot \pi \Rightarrow 78 = d \cdot 3{,}14 \Rightarrow d = \dfrac{78}{3{,}14} \Rightarrow$

$\Rightarrow d \simeq 24{,}84$



Observando o esquema da vista superior da bola e do aro, temos:

$2x = 45 - d$

$2x \simeq 45 - 24{,}84$

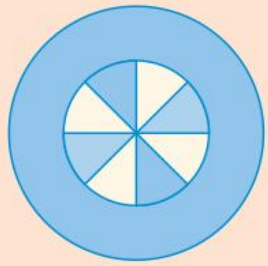
$x \simeq \dfrac{20{,}16}{2}$

$x \simeq 10{,}08$

Portanto, a folga entre a bola e o aro é de aproximadamente 10,08 cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R8. A figura abaixo é formada por quatro setores circulares de 45° e por uma coroa circular. As circunferências que limitam a coroa têm raios iguais a 4 cm e 7 cm. Determinar a área da região pintada de azul. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▶ ***Resolução***

Área de um setor circular: $\dfrac{45° \cdot \pi \cdot 4^2}{360°} = \dfrac{3{,}14 \cdot 16}{8} = 6{,}28$

Área dos quatro setores: $4 \cdot 6{,}28 = 25{,}12$

Área da coroa circular: $\pi \cdot (7^2 - 4^2) = 3{,}14 \cdot (49 - 16) = 103{,}62$

Portanto, a área da região pintada de azul é:

$25{,}12 \text{ cm}^2 + 103{,}62 \text{ cm}^2 = 128{,}74 \text{ cm}^2$

21.

$A_1 = \dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \dfrac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \dfrac{8A_1}{\pi}$

Analogamente: $b^2 = \dfrac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \dfrac{8A_3}{\pi}$

Do triângulo retângulo, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

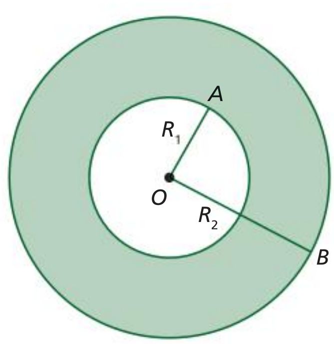
$\Rightarrow \dfrac{\cancel{8}A_3}{\cancel{\pi}} = \dfrac{\cancel{8}A_1}{\cancel{\pi}} + \dfrac{\cancel{8}A_2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$

Assim: $A_1 + A_2 = A_3$

Exercícios propostos

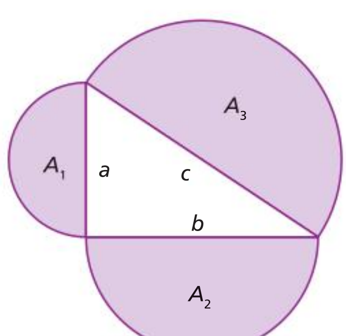
Registre as respostas em seu caderno

20. (FCC-SP) Se, na figura abaixo, R_1 mede 5 cm e a área da coroa circular é 75π cm², então R_2, em centímetro, é igual a: alternativa e

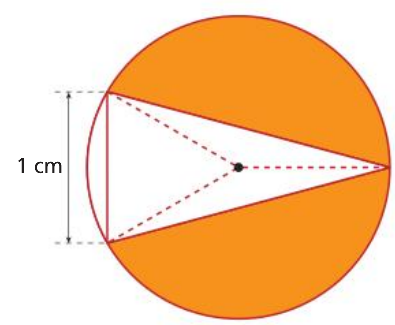


a) 6 **c)** 8 **e)** 10
b) 7 **d)** 9

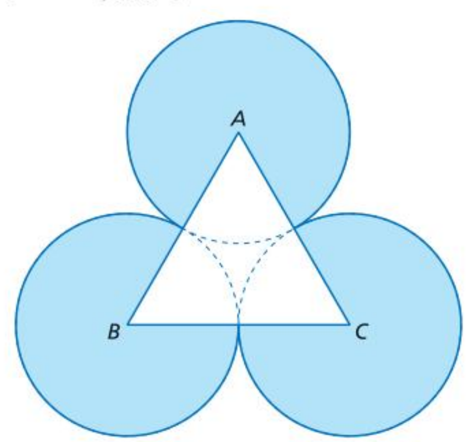
21. Os catetos de um triângulo retângulo medem a e b, e a hipotenusa, c. Sobre esses lados foram construídos os semicírculos de áreas A_1, A_2 e A_3. Mostre que $A_1 + A_2 = A_3$.



22. O triângulo inscrito na circunferência da figura abaixo de raio 1 cm é isósceles e sua base mede 1 cm. Calcule a área da região pintada de laranja. $\dfrac{5\pi - 3}{6}$ cm²



23. O triângulo ABC representado abaixo é equilátero e tem área $2\sqrt{3}$ cm². As circunferências têm centro em A, B e C.



Calcule a área da região pintada de azul. 5π cm²

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Aplicação

1. Calcule o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita a um quadrado com 10 cm de lado. 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm

2. Qual é o raio de uma circunferência circunscrita ao hexágono regular de área $6\sqrt{3}$ cm^2? 2 cm

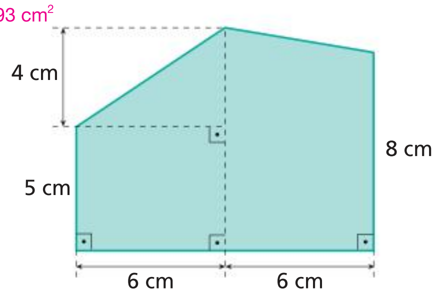
3. Calcule a área de um triângulo cujos lados medem 7 cm, 8 cm e 9 cm. Depois, determine a medida da altura relativa ao lado de 8 cm desse triângulo. $12\sqrt{5}$ cm^2; $3\sqrt{5}$ cm

4. O piso de uma cozinha retangular de 3 m de comprimento por 2 m de largura deverá ser revestido por cerâmicas quadradas de 20 cm de lado. Quantas peças de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso? 150 peças

5. Calcule a área das figuras a seguir.

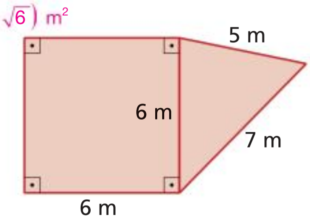
93 cm^2

a)

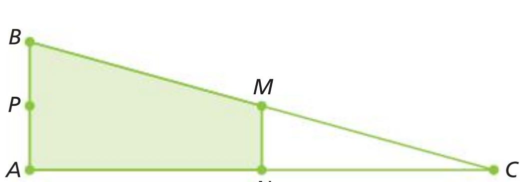


$6(6 + \sqrt{6})$ m^2

b)



6. (Enem) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas *A*, *B*, *M* e *N* deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde: alternativa e

a) à mesma área do triângulo *AMC*.

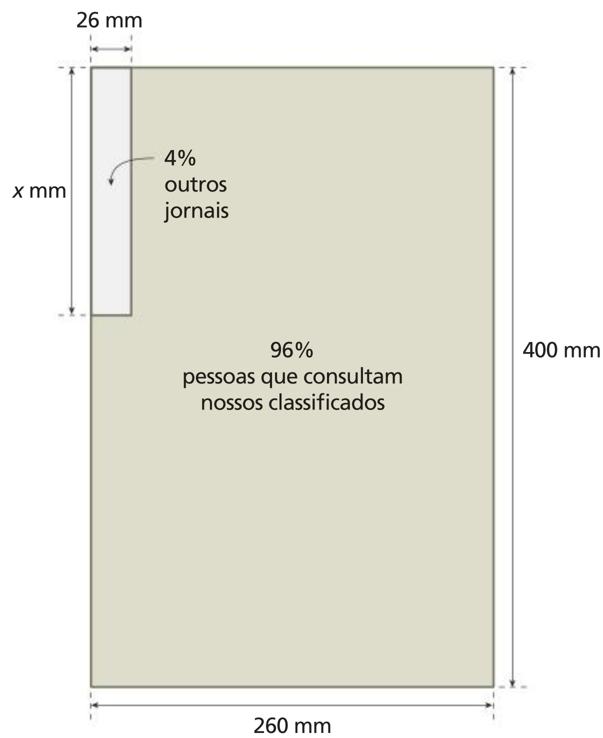
b) à mesma área do triângulo *BNC*.

c) à metade da área formada pelo triângulo *ABC*.

d) ao dobro da área do triângulo *MNC*.

e) ao triplo da área do triângulo *MNC*.

7. (Enem) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados:



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4% deve ser de aproximadamente: alternativa d

a) 1 mm

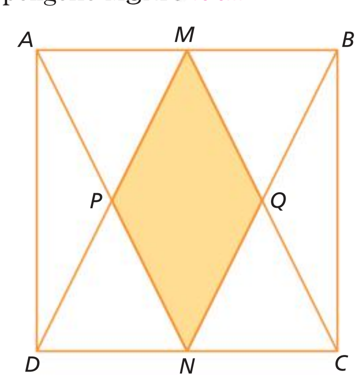
b) 10 mm

c) 17 mm

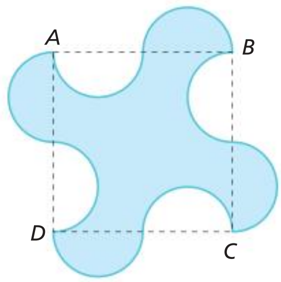
d) 160 mm

e) 167 mm

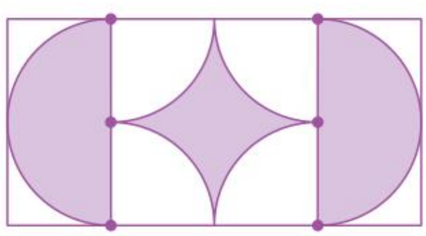
8. O quadrado *ABCD* tem área 64 cm^2. Se *M* e *N* são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, determine a área do polígono *MQNP*. 16 cm^2



9. Calcule a área da figura sabendo que *ABCD* é um quadrado de diagonal $15\sqrt{2}$ cm e que a figura é limitada por semicircunferências congruentes. 225 cm²



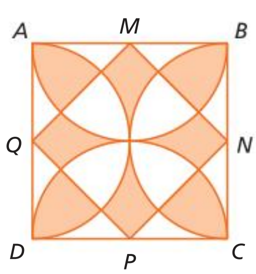
10. (Ibmec) Considere que os ângulos de todos os cantos da figura abaixo são retos e que todos os arcos são arcos de circunferências de raio 2, com centros sobre os pontos em destaque.



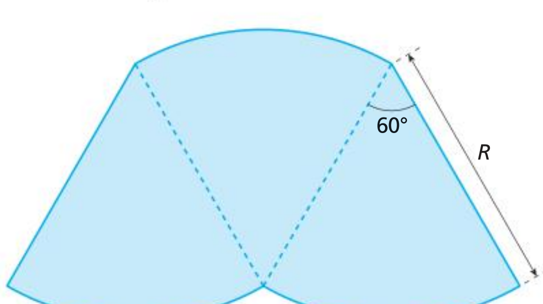
A área da região sombreada é igual a: alternativa c

a) 4 **b)** 4π **c)** 16 **d)** 16π **e)** 64

11. Calcule a área da região alaranjada, sendo *ABCD* e *MNPQ* quadrados e *M*, *N*, *P* e *Q* centro dos arcos de circunferência de raio 2 cm. 8 cm²



12. (Enem) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato regular com dimensões 50 m × 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para *R*, em metros, devera ser: alternativa b

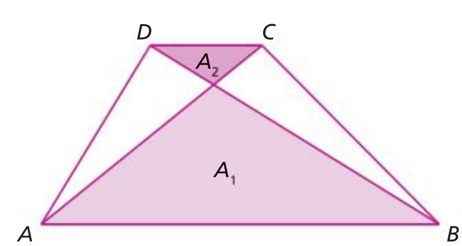
a) 16
b) 28
c) 29
d) 31
e) 49

13. Em certa pizzaria, uma *pizza* cujo diâmetro mede 40 cm custa R$ 40,00. Qual deve ser o preço de uma *pizza* cujo diâmetro mede 35 cm, se o preço da *pizza* é sempre proporcional à sua área? ≃ R$ 30,63

14. Uma bola de futebol com medida oficial, como a ilustrada na abertura deste capítulo, é composta de 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. Sabendo que o apótema do hexágono mede aproximadamente 3,8 centímetros, e o do pentágono, 4,2 centímetros, com o auxílio de uma calculadora, calcule quanto couro é necessário para confeccionar uma bola de futebol desconsiderando a área utilizada para a costura. (Observe que, nesse caso, os lados dos polígonos são iguais.) 1.554,06 cm²

Aprofundamento

15. Seja o trapézio *ABCD*, cujas bases medem 8 cm e 5 cm, respectivamente, e a altura mede 4 cm. Determine a diferença entre as áreas A_1 e A_2. 6 cm²



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. Um quadrado tem área igual a 4 cm². Formando-se infinitos quadrados que têm como vértices os pontos médios dos lados do quadrado anterior, qual será a área do 5º quadrado assim formado? 0,25 cm²

Desafio

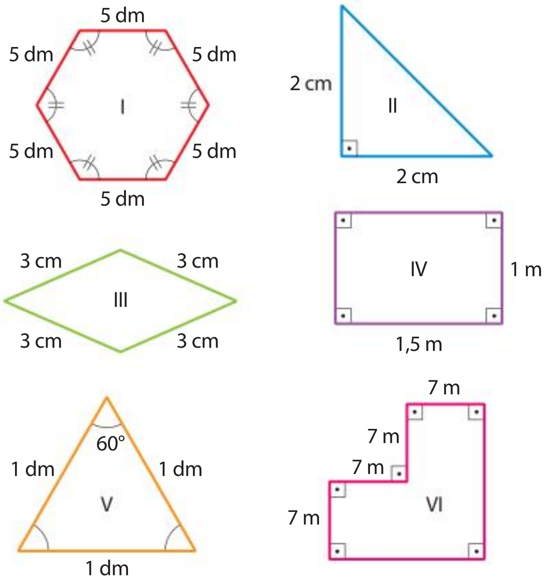
17. (UFC-CE) A razão $\frac{\text{área } H}{\text{área } K}$, em que *H* é um hexágono regular *ABCDEF* (com vértices nomeados no sentido horário) e *K* é o hexágono obtido pela intersecção dos triângulos *ACE* e *BDF*, é igual a: alternativa c

a) 2
b) 2,5
c) 3
d) 3,5
e) 4

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Observe os polígonos a seguir.



São regulares os polígonos: alternativa d

a) III e V **b)** IV e VI **c)** I e III **d)** II e V

2. Em um ______ inscrito em uma circunferência, a medida do lado é dada pela relação $\ell = 2a\sqrt{3}$, em que a é a medida do apótema. alternativa b

a) quadrado
b) triângulo equilátero
c) hexágono regular
d) octógono regular

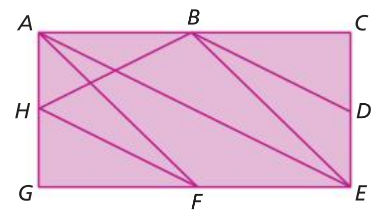
3. A área de um paralelogramo é igual à área de um ______ de mesma base e altura. alternativa d

a) polígono qualquer
b) triângulo
c) trapézio
d) retângulo

4. Um quadrado e um hexágono regular têm o mesmo perímetro e medidas dos respectivos apótemas iguais a a_4 e a_6; então, a razão entre as áreas do hexágono e do quadrado, nessa ordem, é: alternativa a

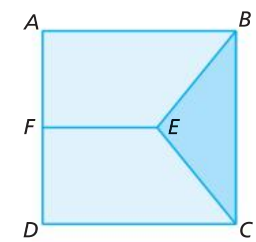
a) $\dfrac{a_6}{a_4}$ **b)** a_6 **c)** $\dfrac{a_4}{a_6}$ **d)** $a_4 \cdot a_6$

5. Sabendo que $ACEG$ é um retângulo e B, D, F e H são pontos médios dos lados $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$ e $\overline{GA}$, respectivamente, podemos afirmar que as áreas dos triângulos ______ **não** são iguais. alternativa c



a) BDE e BAH
b) ABE e AGF
c) AGF e BDE
d) GHF e DBC

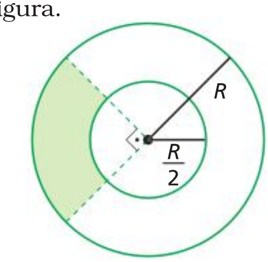
6. Considere um quadrado $ABCD$ com lado 10 cm. A área de cada trapézio ($ABEF$ e $DCEF$) é igual ao dobro da área de BCE. Qual é a medida de $\overline{FE}$?



a) 3 cm **c)** 5 cm
b) 4 cm **d)** 6 cm

alternativa d

7. Observe a figura.



A área pintada de verde corresponde a ______ da área do círculo maior, de raio R. alternativa a

a) $\dfrac{3}{16}$ **c)** $\dfrac{1}{16}$

b) $\dfrac{3}{8}$ **d)** $\dfrac{1}{8}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	X				X	X	X
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.		X		X			
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.			X	X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	63 e 64	65 e 66	67 e 68	72 e 73	63 e 64 69 e 70	63 e 64 69 a 71	74 a 77

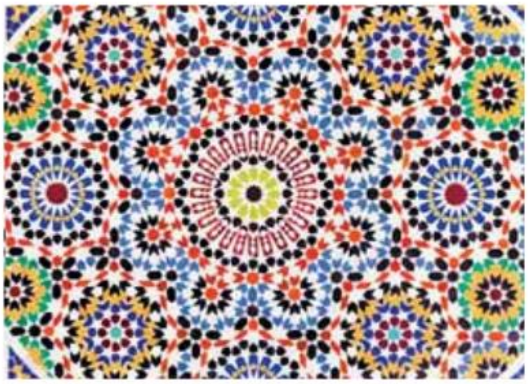
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Pesquisa e ação — Mosaico

Os azulejos decorados com mosaicos fazem parte da cultura de muitos países, como Portugal, por causa da influência árabe no território português. Em Marrocos e na Espanha, também há azulejos de influência árabe. No Brasil, devido à colonização portuguesa, é possível encontrar azulejos semelhantes aos de Portugal.

Os mosaicos são constituídos de formas geométricas que se repetem formando determinado padrão.

NICK FIELDING/ALAMY/GLOW IMAGES



Detalhe de mosaico em Marrocos, 2015.

JAVARMAN/SHUTTERSTOCK

Detalhe de mosaico em Marrocos, 2014.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Detalhe de azulejo português, Alcântara, MA, 2014.

MARCO ANTONIO SÁ/KINO

Detalhe de azulejo português, Alcântara, MA, 2014.

Procedimentos

1) Reúna-se com quatro colegas e pesquisem os seguintes temas:
- Azulejos em Portugal
- Azulejos no Brasil
- Azulejos em Marrocos

Essa pesquisa servirá para a construção de um repertório de imagens, formas e cores, dando subsídio para a construção dos azulejos do grupo.

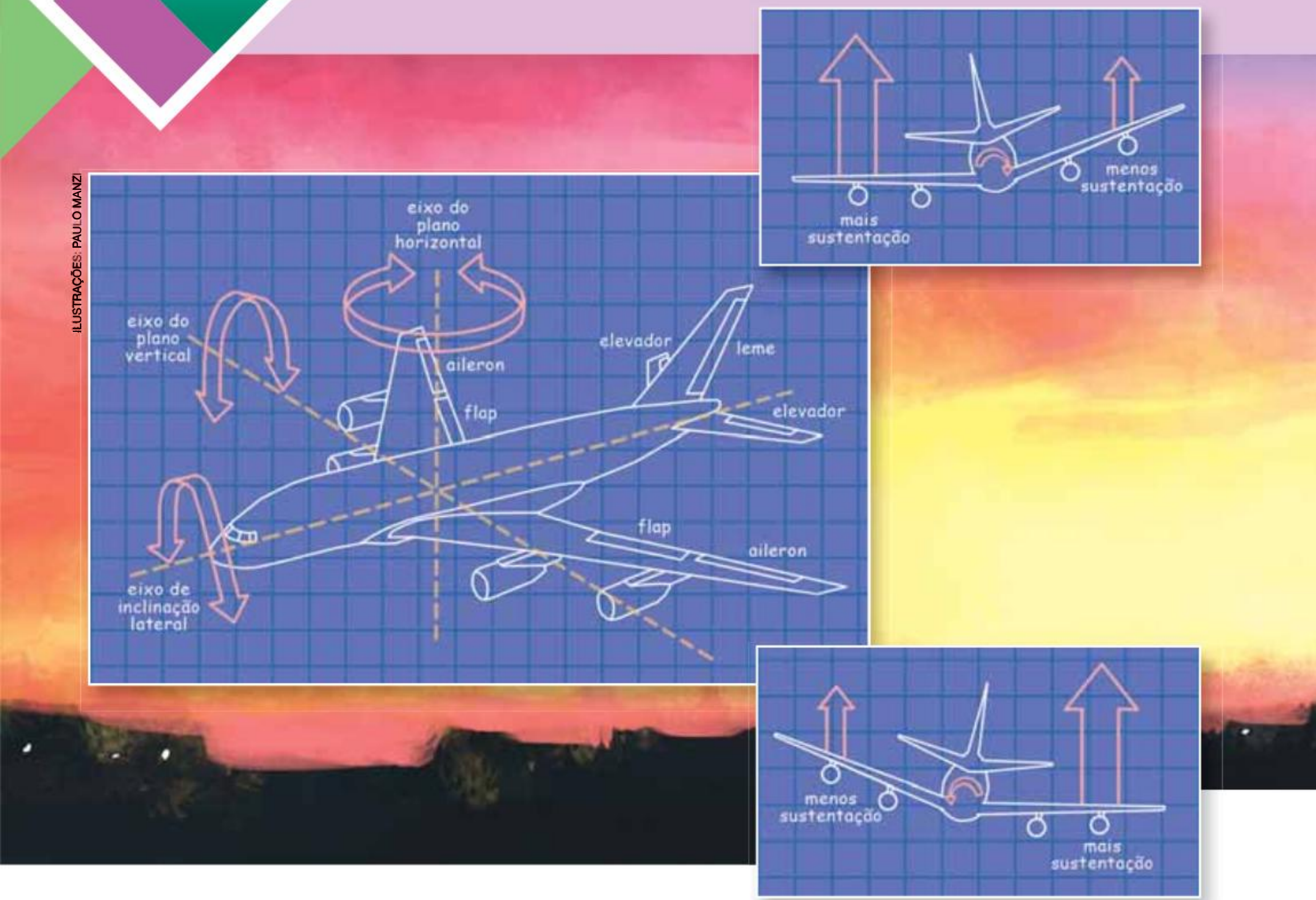
2) A próxima etapa é definir quais polígonos serão usados para compor cada imagem dos azulejos e a imagem geral do mosaico, levando em consideração a área predeterminada que será coberta pelos azulejos. Essa área será estabelecida pelo professor.

3) Decisões tomadas, escolham o material que será usado na confecção dos azulejos, considerando não só a estética, mas também a matemática. Lembrem-se de usar material reciclado.

4) Você e seus colegas, com o professor, poderão organizar uma mostra dos painéis de azulejos produzidos e contar um pouco a trajetória do trabalho, destacando os *sites* e os livros utilizados como referência.

Capítulo 5

Introdução à Geometria espacial



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

Objetivos do capítulo

- Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos. Aplicá-las na resolução de problemas.
- Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.
- Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.

1 Ideias gerais

A sustentabilidade no ar e a forma aerodinâmica de um avião são frutos do conhecimento humano construído durante milhares de anos. A forma da fuselagem e das asas, a posição relativa do plano do leme e do plano das pequenas asas traseiras exemplificam o uso de conceitos e relações geométricas na aerodinâmica de um avião. As asas do avião formam um ângulo que, na Geometria, é conhecido por **ângulo diedro**; graças a ele, quando o avião se inclina, a asa na posição inferior adquire maior sustentação, o que o leva de volta à posição horizontal em uma manobra de estabilização durante o voo. Neste capítulo, vamos estudar alguns elementos constitutivos da Geometria no espaço tridimensional.

Primeiro, vamos conhecer um pouco sobre Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. e teve grande importância no desenvolvimento da Geometria. Euclides é reconhecido, sobretudo, por sua obra *Os elementos*, composta de 13 livros (ou capítulos), na qual está organizado todo o conhecimento geométrico até então acumulado. Neste capítulo, veremos alguns tópicos da **Geometria euclidiana**.

MANOHEAD

1.1 Noções primitivas

Na Geometria, ponto, reta e plano são algumas noções aceitas sem definição e por isso são chamadas de **noções primitivas**. Como são produtos da mente humana, elas funcionam como modelos para explicar a realidade.

- Um **ponto** não tem dimensão, nem massa, nem volume.

- Uma **reta** não tem espessura, nem começo, nem fim.

- Um **plano** não tem espessura nem fronteiras.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

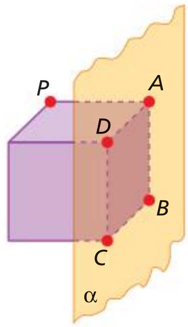
Podemos imaginar um ponto ao ver um pequeno furo em um papel, uma reta ao ver uma linha fina esticada ou um plano ao ver as águas tranquilas de um lago.

Essas três noções fazem parte do **espaço**, conjunto dos infinitos pontos existentes.

Podemos explorar questionamentos como:
Quando definimos um objeto, recorremos a palavras e definições já existentes, as quais podem ter sido criadas de outras palavras e de definições também já existentes. Mas como foram definidas as primeiras palavras em Geometria? Para responder a essa questão, partimos de conceitos não definidos, chamados noções primitivas.

Observação

Nesta obra, representaremos os pontos por letras latinas maiúsculas (A, B, C, ...), as retas por letras latinas minúsculas (r, s, t, ...) e os planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ, ...).



Qualquer conjunto de pontos considerado no espaço, que tenha pelo menos um ponto, é chamado de **figura**.

Convém lembrar que dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.

- Na figura ao lado, os pontos A, B, C e D são coplanares, pois pertencem ao plano α. Em linguagem simbólica, indicamos:
  $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$
- O ponto P não é coplanar com A, B, C e D, pois P não pertence ao plano α. Em linguagem simbólica, escrevemos: $P \notin \alpha$

Observe, a seguir, alguns exemplos de figura.


figura I


figura III


figura II


figura IV

Com exceção da figura I, que tem apenas quatro pontos coplanares, as demais têm infinitos pontos. Essas figuras apresentam ainda as seguintes diferenças:

- enquanto as figuras I, II e III são **planas**, pois existe um único plano que as contém, a figura IV é **não plana**, porque, considerando a perspectiva, não existe um plano que contenha todos os pontos da figura;
- a figura II representa uma **linha**; a III, uma **superfície**; a IV, um **sólido**. A figura I, que não representa nenhum desses tipos de figura, não recebe nome especial.

1.2 Sistema dedutivo

Em Geometria, além das noções primitivas, são estabelecidas verdades iniciais aceitas sem demonstração: os **postulados**, proposições fundamentais que descrevem relações entre os conceitos primitivos (noções primitivas). Com base nos postulados, demonstramos, por meio de deduções lógicas, outros fatos ou propriedades denominados **teoremas**.

O conjunto de noções primitivas, postulados e teoremas constitui o **sistema dedutivo**.

◆ Postulados: um ponto de partida da Geometria

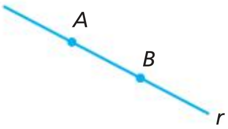
Iniciamos nossa reflexão a respeito das bases sobre as quais se assenta o desenvolvimento da Geometria com as noções primitivas de ponto, reta e plano. Dando continuidade, foram estabelecidos como propriedades fundamentais desses elementos alguns postulados, os quais são apresentados a seguir.

P1 O espaço tem infinitos pontos.

P2 Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.

P3 Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.

P4 Dois pontos distintos determinam uma única reta.



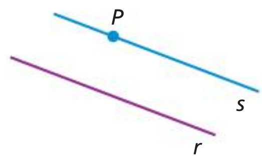
◆ Observação

Embora, em Geometria, o termo **determinar** signifique **existir** e **ser único**, há situações em que achamos conveniente enfatizar essas ideias. Nesses casos, usamos, por exemplo: **determinam** uma **única** reta.

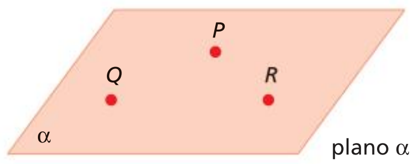
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

P5 Postulado de Euclides

Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa somente uma reta *s* paralela a *r*.

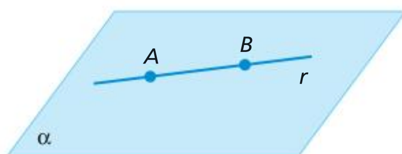


P6 Três pontos não colineares determinam um único plano.

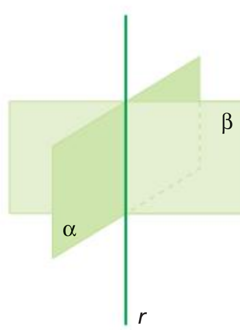


plano α ou plano (*PQR*)

P7 Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.

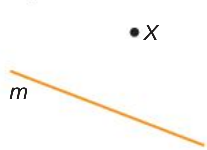


P8 Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.



Com esses postulados, é possível demonstrar vários teoremas. No decorrer deste capítulo, veremos alguns deles.

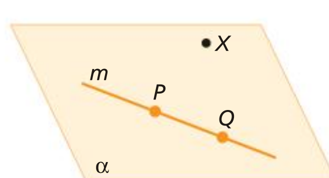
Teorema 1: Dada uma reta *m* e um ponto *X* fora dela, existe um único plano que contém o ponto *X* e a reta *m*.



Demonstração

Pelos postulados P2 e P3, a reta *m* tem dois pontos distintos, *P* e *Q*, que não são colineares com *X*, pois $X \notin m$.

Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano, ou seja, existe um único plano que passa por *P*, *Q* e *X*, sendo α esse plano.



A reta *m* tem dois pontos em α; então, pelo postulado P7, ela está contida em α.

Portanto, α é o único plano que contém a reta *m* e o ponto *X*.

◆ Observações

- Quando uma reta está contida em um plano, significa que todos os pontos que pertencem à reta também pertencem ao plano.
- Uma reta que passa por dois pontos distintos, *A* e *B*, como na figura ao lado pode ser representada por *r* ou $\overleftrightarrow{AB}$.

◆ Observação

Dois ou mais pontos são ditos **colineares** quando existe uma reta que contém todos eles.

- Na figura, os pontos *A*, *P* e *M* são colineares, pois pertencem à reta *r*. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in r$, $P \in r$ e $M \in r$
- O ponto *X* não é colinear com *A*, *P* e *M*, pois *X* não pertence à reta *r*. Em linguagem simbólica, escrevemos: $X \notin r$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R1. Quantos planos podem passar por um ponto P dado?

▸ ***Resolução***

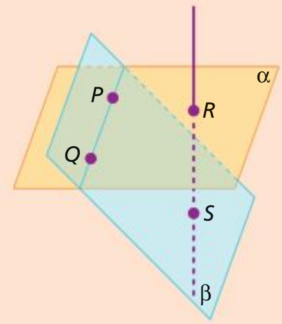
Em um sistema dedutivo, certas resoluções, como a que exemplificaremos aqui, necessitam de um desenvolvimento e de uma linguagem estritamente formal.

Além do ponto P, o espaço tem infinitos pontos (postulado P1). Portanto, existe um ponto Q, distinto de P, e uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P4).

Vamos considerar um ponto R, fora da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P3), que determina com ela um plano α (teorema 1). Logo, o plano α passa por P.

Agora, vamos considerar um ponto S, fora de α (postulado P3). Como $S \notin \alpha$, $S \notin \overleftrightarrow{PQ}$ e, novamente pelo teorema 1, existe um plano β, com $\beta \neq \alpha$, que passa por P.

Continuando a fazer construções análogas, podemos construir infinitos planos que passam pelo ponto P.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Quantos planos podem passar por dois pontos distintos? E quantos planos podem passar por três pontos distintos que não estejam alinhados? E se os três pontos estiverem alinhados?
infinitos; um único; infinitos

2. Quantos são os planos que contêm quatro pontos distintos? infinitos planos, um só plano ou nenhum plano

3. Dados quatro pontos, dos quais três deles nunca são colineares, quantas retas são determinadas por esse conjunto de pontos? seis retas

4. Indique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.
   - Se F é uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos são coplanares, então F é uma figura plana, isto é, está contida em um plano.

   Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Uma mesa de quatro pernas às vezes pode oscilar, enquanto uma mesa de três pernas está sempre firme. Explique esse fato segundo a teoria estudada. Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

WESTEND61/GETTY IMAGES

ALL ABOUT SPACE/SHUTTERSTOCK

2 Posições relativas

2.1 Paralelismo

O paralelismo está muito presente em nosso dia a dia.

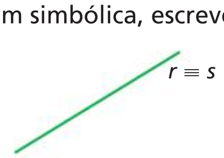
A seguir, veremos como as retas e os planos se relacionam por meio dessa ideia.

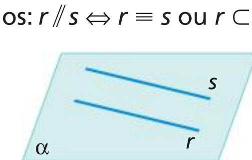
Retas paralelas

Duas **retas**, r e s, são **paralelas** se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão em um mesmo plano α e não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r \mathbin{/\!/} s \Leftrightarrow r \equiv s$ ou $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$

retas coincidentes





retas paralelas distintas (não coincidentes)

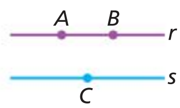
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Teorema 2: Duas retas paralelas, não coincidentes, determinam um único plano.

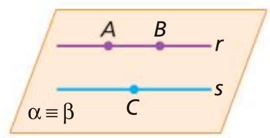
Demonstração

Por definição, existe pelo menos um plano α que contém as retas r e s, já que elas são paralelas e não coincidentes. Vamos mostrar que α é único.

Pelo postulado P2, consideremos A e B (distintos) em r e o ponto C em s.



Pelo postulado P6, os pontos A, B e C determinam um plano β. Logo, $A \in \beta$, $B \in \beta$ e $C \in \beta$. Vamos mostrar que β coincide com α.

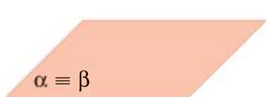


Como o plano α contém as retas r e s, α contém todos os pontos dessas retas, isto é, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$, que, por não serem colineares, determinam um único plano. Logo, os planos α e β coincidem ($\alpha \equiv \beta$).

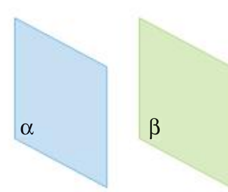
Planos paralelos

Dois **planos**, α e β, são **paralelos** se coincidem (têm todos os pontos comuns) ou se não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$ ou $\alpha \cap \beta = \varnothing$



planos coincidentes



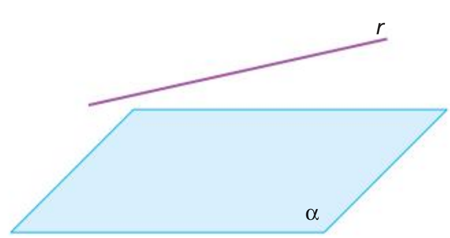
planos paralelos distintos
(não coincidentes)

Reta e plano paralelos

Uma reta r e um plano α são paralelos se a reta r está contida no plano α ou se a reta r e o plano α não têm nenhum ponto comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ \alpha \Leftrightarrow r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$

$r \subset \alpha$

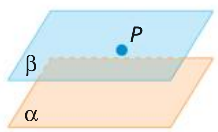


$r \cap \alpha = \varnothing$

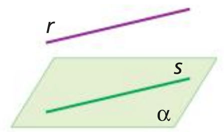
Propriedades do paralelismo

Veja a seguir algumas propriedades do paralelismo. Todas elas podem ser demonstradas.

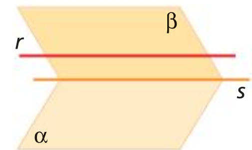
1. Por P não pertencente a α passa um único plano β paralelo a α.



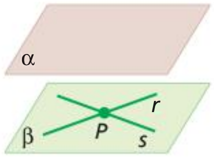
2. Se r não está contida em α, r é paralela a s, com s contida em α, então r é paralela a α.



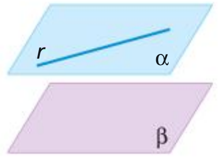
3. Se r é paralela a α e β, sendo $\alpha \cap \beta = s$, então r é paralela a s.



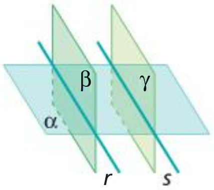
4. Se α é um plano paralelo a duas retas, r e s, contidas em um plano β, tais que $r \cap s = \{P\}$, então α é paralelo a β.



5. Se dois planos são paralelos e distintos, então qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro.



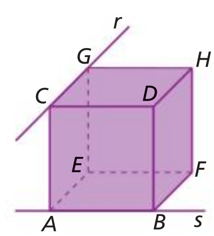
6. Se α intercepta β e γ, com β paralelo a γ, então as intersecções r e s de α com esses planos são retas paralelas.



Retas reversas

Duas **retas**, r e s, são **reversas** quando não existe um mesmo plano que as contenha.

Na figura abaixo, é possível visualizar que não existe um mesmo plano que contenha as retas r e s; portanto, elas são reversas.



Em linguagem simbólica, escrevemos:

$$\nexists\ \alpha \text{ tal que } r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$$

Observe, ainda, que as retas r e s não têm nenhum ponto comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$.

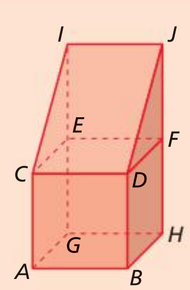
Se achar necessário, explicar que os planos (ABE) e (CDG) que contêm faces paralelas do cubo são paralelos não coincidentes, ou seja, os planos não têm nenhum ponto comum e, por isso, a reta s contida no plano (ABE) e a reta r contida no plano (CDG) não têm nenhum ponto comum. Além disso, s é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ e r é perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, r e s não são paralelas; logo, r e s são reversas.

Observação

Duas retas distintas, r e s, podem ser coplanares ou reversas.
Se forem coplanares, poderão ser paralelas distintas (não têm nenhum ponto comum) ou concorrentes (têm um único ponto comum).

Exercício resolvido

R2. Considerando o cubo $ABCDEFGH$ e o retângulo $EFJI$ representado ao lado, fazer o que se pede.



a) Identificar um par de retas paralelas, um par de retas reversas e um par de retas que não sejam paralelas nem reversas.

b) Indicar a posição relativa entre a reta $\overleftrightarrow{CJ}$ e o plano que contém a face $CDJI$.

c) Identificar dois planos paralelos por meio de três pontos não colineares.

▶ ***Resolução***

a) Respostas possíveis: retas paralelas: $\overleftrightarrow{CI}$ e $\overleftrightarrow{DJ}$; retas reversas: $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{DF}$; retas que não são paralelas nem reversas: $\overleftrightarrow{JH}$ e $\overleftrightarrow{DF}$

b) A reta $\overleftrightarrow{CJ}$ é paralela ao plano que contém a face $CDJI$, pois está contida nele.

c) Resposta possível: os planos (ABG) e (EFD).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

6. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

a) Se duas retas não são coplanares, elas são reversas. verdadeira

b) Duas retas reversas podem ser coplanares. falsa

c) Duas retas paralelas podem não ser coplanares. falsa

d) Se dois planos, α e β, são coincidentes, então são paralelos. verdadeira

7. Registre quais das afirmações a seguir são falsas. afirmações a, c

a) Duas retas reversas nunca estão em planos paralelos.

b) Se uma reta r é paralela à reta s e uma reta t é paralela à reta s, então t é paralela a r.

c) Se uma reta r e um plano α têm ponto comum, então r está contida em α.

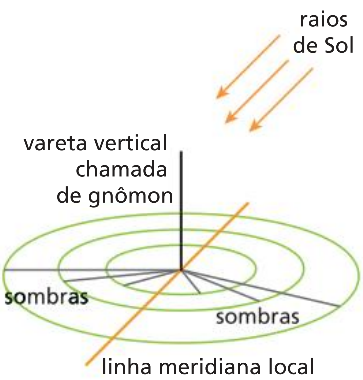
2.2 Perpendicularismo

Além do paralelismo, podemos identificar ao nosso redor inúmeras situações nas quais é notável o **perpendicularismo**. Acompanhe, a seguir, uma delas.

Para traçar a direção da linha meridiana de um local, fincamos, perpendicularmente ao solo, uma vareta (denominada **gnômon**), marcamos suas sombras no decorrer do dia e traçamos a bissetriz de todos os ângulos formados por sombras de mesmo comprimento. A direção da linha meridiana local coincide com a das bissetrizes.

Nessa situação, como podemos garantir que a vareta fique perpendicular ao solo?

O estudo do perpendicularismo entre retas, entre planos e entre retas e planos nos ajudará a responder a questões como essa.



◆ Retas concorrentes

Duas **retas**, r e s, são **concorrentes** quando têm apenas um ponto P comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r \cap s = \{P\}$

Observe as figuras I e II abaixo.

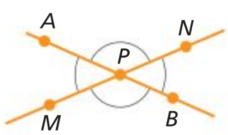


figura I

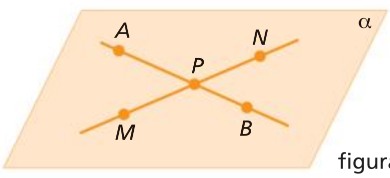


figura II

Na figura I, observamos duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, que se interceptam no ponto P. Nelas, identificamos os ângulos $A\hat{P}M$, $M\hat{P}B$, $B\hat{P}N$ e $N\hat{P}A$.

Além de determinar esses ângulos, duas retas concorrentes também determinam um plano (figura II).

Teorema 3: Se duas retas, r e s, são concorrentes em um ponto P, então elas determinam um único plano α.

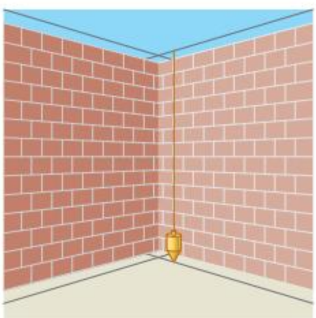
Demonstração

Pelo postulado P2, existem os pontos A em s e C em r tais que $A \neq P$ e $C \neq P$.
Assim, os pontos A, P e C não são colineares.
Pelo postulado P6, concluímos que A, P e C determinam um plano α; logo:
α = plano (APC) (I)
Pelo postulado P7, o plano α contém r e s, pois contém dois pontos de cada reta.
Vamos mostrar que α é único.
Suponhamos que exista outro plano β que contenha r e s.
Pelo postulado P7, os pontos P, A e C pertencem a β; logo: β = plano (APC) (II)
De (I) e (II), concluímos que $\alpha \equiv \beta$ e que, portanto, α é único.

◆ Reflita

Na construção civil, qual é a função:

- do fio de prumo?

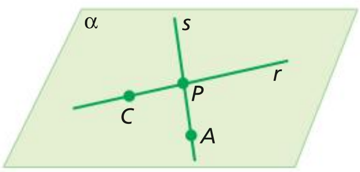


- do nível de bolha?

PHOTODISC/ GETTY IMAGES

O fio de prumo serve para verificar a perpendicularidade de uma parede em relação ao solo, e o nível de bolha, além dessa função, serve para verificar a horizontalidade de uma superfície.

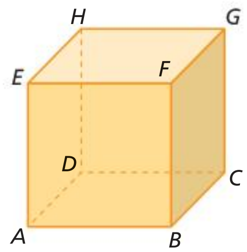
Comentário: Esta atividade propicia um trabalho interdisciplinar com Física, relacionando a ação da força gravitacional com a perpendicularidade do fio de prumo e com a horizontalidade da superfície da água dentro do nível de bolha.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

Observe os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HG}$ do cubo representado abaixo.



- Quantos pares desses segmentos são perpendiculares? 24 pares
- Quantos pares desses segmentos são paralelos? 18 pares

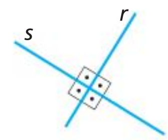
- Cada vértice do cubo é extremo de 3 segmentos perpendiculares dois a dois. O cubo tem 8 vértices; logo, são 24 (8 · 3) pares de segmentos perpendiculares.
- Há 3 conjuntos de 4 segmentos paralelos:
  - $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$
  - $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$
  - $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$

Cada conjunto forma 3 pares de segmentos paralelos; então, temos: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Mas cada par foi contado duas vezes; logo, 18 (36 : 2) pares de segmentos são paralelos.

Retas perpendiculares

Duas **retas**, *r* e *s*, são **perpendiculares** quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.

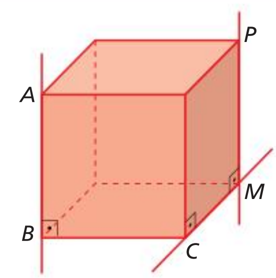


$r \perp s$ (lemos: "a reta *r* é perpendicular à reta *s*")

Retas ortogonais

Duas **retas** reversas, *r* e *s*, são **ortogonais** quando existe uma reta ***t*** que é paralela (não coincidente) a *s* e perpendicular a *r*.

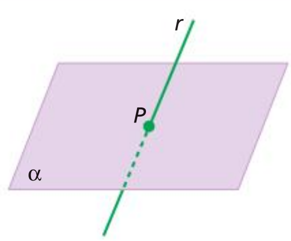
Na figura ao lado, em que os pontos *A*, *B*, *C*, *M* e *P* são vértices de um cubo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CM}$ são ortogonais, pois a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{CM}$.



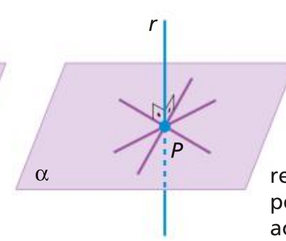
Reta e plano perpendiculares

Quando uma reta *r* e um plano α têm somente um ponto comum, dizemos que *r* e α são **secantes** (ou **concorrentes**). Uma situação particular de reta e plano secantes é o caso em que a reta é perpendicular ao plano.

Dados uma reta ***r*** e um plano α, concorrentes no ponto *P*, dizemos que *r* é **perpendicular** a α quando ***r*** é perpendicular a todas as retas de α que passam por *P*.



reta *r*: secante não perpendicular ao plano α



reta *r*: secante e perpendicular ao plano α

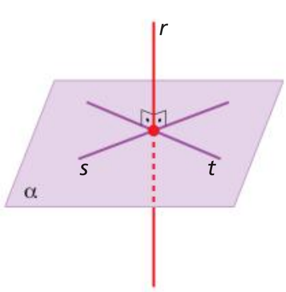
Teorema fundamental do perpendicularismo

O teorema enunciado a seguir, conhecido como **teorema fundamental do perpendicularismo**, é muito importante para a Geometria.

Teorema 4: Se *r* é uma reta perpendicular a duas retas concorrentes, *s* e *t*, então *r* é perpendicular ao plano α determinado por essas retas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $s \subset \alpha$, $t \subset \alpha$, $r \perp s$, $r \perp t \Rightarrow r \perp \alpha$

A definição de perpendicularismo entre reta e plano nos remete à questão sobre o meridiano astronômico: como ter certeza de que a vareta fincada no solo é perpendicular a ele? Na verdade, não é preciso verificar se ela é perpendicular a todas as retas contidas no plano do solo, pois isso seria impossível, já que são infinitas retas; basta verificar se é perpendicular a duas retas não coincidentes desse plano que passam pelo ponto em que a vareta foi fincada. O teorema fundamental do perpendicularismo nos garante isso.



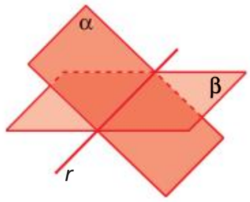
A reta *r* é perpendicular ao plano α, pois é perpendicular a duas retas concorrentes contidas nesse plano.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

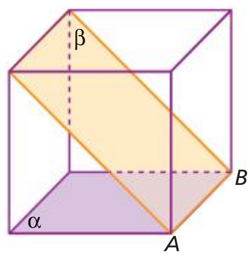
Planos concorrentes

Dois **planos** distintos, α e β, são **concorrentes** (ou **secantes**) quando têm pelo menos um ponto comum (intersecção não vazia).

Como, pelo postulado P8, a intersecção de dois planos distintos não paralelos é uma reta, podemos escrever: $\alpha \cap \beta = r$



Considere a figura do cubo abaixo.



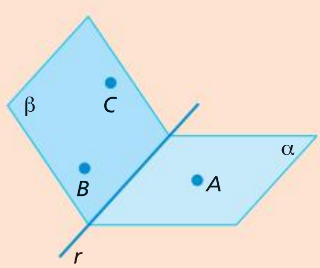
A intersecção dos planos α e β é a reta que contém o segmento $\overline{AB}$, ou seja, a reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é: $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$

Exercício resolvido

R3. Sejam α e β dois planos secantes cuja intersecção é a reta r. Se A é um ponto em α, e B e C são dois pontos distintos em β tais que A, B e C não pertencem à reta r:

a) mostrar que A, B e C não são pontos colineares.

b) determinar a intersecção do plano α com o plano dado por A, B e C.

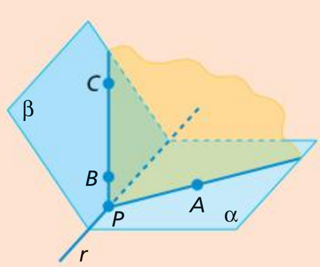


▸ ***Resolução***

a) Suponhamos que A, B e C sejam pontos colineares. Mostremos que isso gera uma contradição.

Se o ponto A pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$, então A pertence ao plano β. Como A pertence a α, temos que $A \in \alpha \cap \beta$, isto é, $A \in r$, o que gera contradição, pois, pelo enunciado, sabemos que $A \notin r$. Essa contradição veio da suposição da colinearidade dos três pontos.

Logo, A, B e C não são colineares.



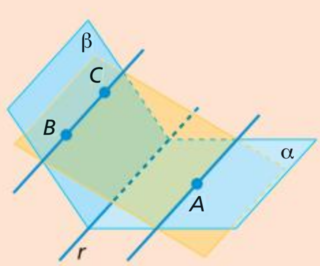
b) Existem dois casos para analisar. O primeiro, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são concorrentes e, o segundo, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são paralelas.

- $\overleftrightarrow{BC}$ e r concorrentes

  Seja P o ponto comum a $\overleftrightarrow{BC}$ e r. Como $P \in \overleftrightarrow{BC}$, sabemos que P pertence ao plano (ABC). Mas $P \in \alpha$, pois $P \in r$ e $r \subset \alpha$. Como os pontos A e P pertencem ao plano α e ao plano (ABC), concluímos que a reta $\overleftrightarrow{AP}$ é a reta procurada.

- $\overleftrightarrow{BC}$ e r paralelas

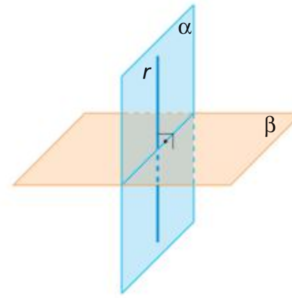
  Se $\overleftrightarrow{BC} \parallel r$, então $\overleftrightarrow{BC} \parallel \alpha$. O plano (ABC) intercepta o plano α em uma reta que contém o ponto A e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e, portanto, paralela a r.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Planos perpendiculares

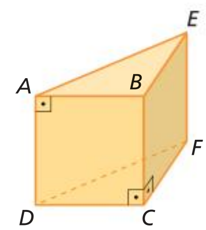
Dois **planos**, α e β, são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta *r* perpendicular ao outro plano.



Exemplo

Observe o prisma representado ao lado. Nele:

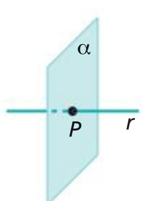
- o plano (*ABC*) é perpendicular ao plano (*DCF*), pois contém a reta $\overleftrightarrow{BC}$, que é perpendicular ao plano (*DCF*);
- os planos (*ABC*) e (*BFC*) não são perpendiculares entre si, pois não há indicação de que algum deles contenha uma reta perpendicular a duas retas do outro.



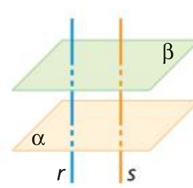
Propriedades do perpendicularismo

Veja, a seguir, algumas propriedades do perpendicularismo. Todas elas podem ser demonstradas.

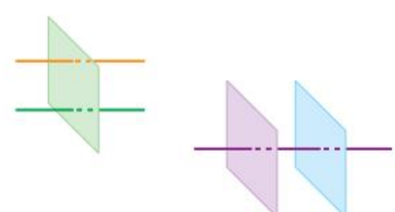
1. Por um ponto de uma reta passa somente um plano perpendicular a essa reta.



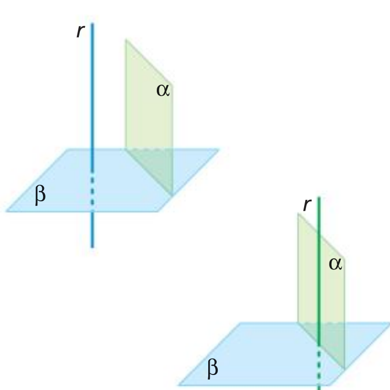
2. Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então toda reta paralela a *r* é perpendicular ao plano α e todo plano paralelo a α é perpendicular a *r*.



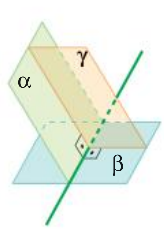
3. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.



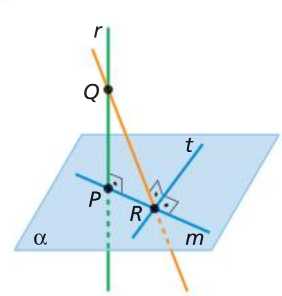
4. Se uma reta *r* e um plano α são perpendiculares a um plano β, então a reta *r* é paralela a α.



5. Se os planos α e β são concorrentes e γ é um plano perpendicular a α e a β, então γ é perpendicular à reta de intersecção entre α e β.



6. Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α em um ponto *P*, uma reta *t* está contida em α e não passa por *P*, uma reta *m* está contida em α, passa por *P* e *m* é perpendicular a *t* no ponto *R*, então a reta $\overleftrightarrow{QR}$, em que *Q* pertence a *r*, é perpendicular a *t*.



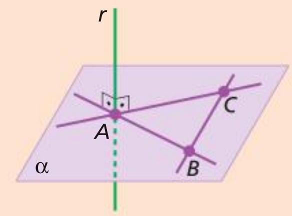
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R4. Dados três pontos não colineares, A, B e C, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a uma reta r, demonstrar que as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

▶ ***Resolução***

Seja α o plano determinado por A, B e C (postulado P6). Assim, pelo postulado P7, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ estão contidas em α. Como r é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, que são concorrentes, r é perpendicular ao plano que as contém, isto é, $r \perp \alpha$. Portanto, r é ortogonal a qualquer reta de α que não passe pelo ponto A. Logo, as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais entre si.



R5. Considerando dois planos paralelos distintos, α e β, e duas retas, r e s, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, indicar todas as possíveis posições entre r e s.

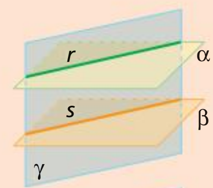
▶ ***Resolução***

Existem duas possibilidades:

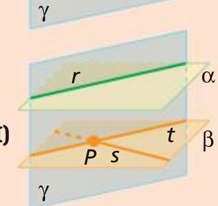
(I) As retas r e s estão contidas em um plano γ, sendo $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$. Nesse caso, o plano γ intercepta α e β, respectivamente, em r e s, que são paralelas distintas.

(II) Não há um plano que contenha as retas r e s. Nesse caso, vamos considerar uma reta t de β que seja paralela a r. A reta t determina com r um plano γ, tal como o do item (I). A reta t determina com s um plano que coincide com β. Assim, temos: $r // t$, $t \cap s = \{P\}$, $r \cap s = \varnothing$; logo, r e s são retas reversas.

(I)



(II)



◆ Observação

No caso (II), se as retas t e s forem perpendiculares, então r e s serão retas ortogonais.

R6. Demonstrar que duas retas reversas têm uma única reta perpendicular comum.

▶ ***Resolução***

Sejam r e s duas retas reversas e α e β dois planos paralelos que contêm r e s, respectivamente.

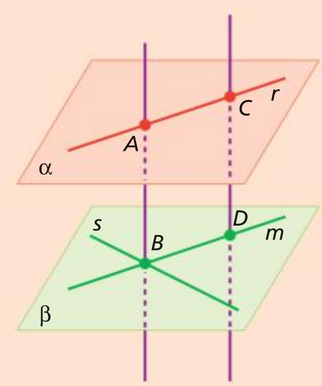
Por um ponto C de r passa uma perpendicular ao plano β. Seja D o ponto de intersecção dessa reta ($\overleftrightarrow{CD}$) com β.

Por D passa uma única paralela (m) à reta r (postulado de Euclides). Essa reta está contida em β. Seja B a intersecção da reta m com a reta s.

Por B passa uma única paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ (postulado de Euclides), que intercepta a reta r no ponto A. É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular aos planos α e β, pois é paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ e, portanto, $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a todas as retas de α e de β que passam por suas intersecções com esses planos.

Logo, $\overleftrightarrow{AB}$ é a única perpendicular comum às retas r e s.



Ver resoluções dos exercícios **8** a **13** no Guia do professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

8. Quais das afirmações abaixo são falsas? Justifique.

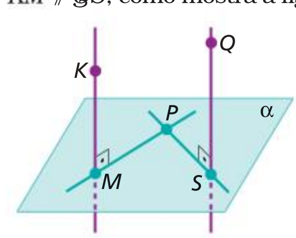
a) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si.

b) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular ao plano α é perpendicular à reta r.

c) Se uma reta r está contida em um plano α, então toda perpendicular a r é perpendicular a α.

d) Se uma reta r é perpendicular a um plano α e esse plano é paralelo a outro plano β, então r é perpendicular a β.

9. Sejam P, M e S três pontos não colineares tais que $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{PS}$ estão contidas no plano α. Sejam $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$, $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{KM} // \overleftrightarrow{QS}$, como mostra a figura abaixo.

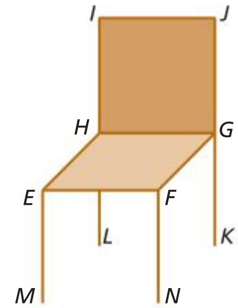


Com um colega, mostrem que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$. (*Sugestão*: Construam por P uma paralela à $\overleftrightarrow{KM}$.)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. (UFRN) Na cadeira representada na figura, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.

Sendo assim, responda às questões a seguir.



a) Os planos EFN e FGJ são paralelos?

b) $\overline{HG}$ é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH?

c) Os planos HIJ e EGN são paralelos?

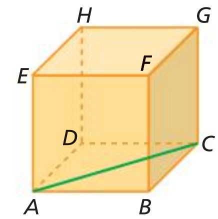
d) $\overline{EF}$ é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG?

11. Considere que um plano α é perpendicular a um plano β, r é uma reta contida em α e r é perpendicular à reta de intersecção entre os planos α e β.

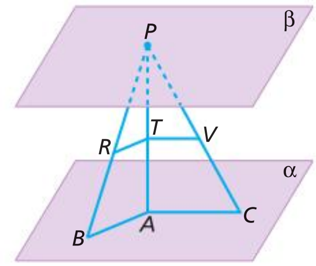
a) Mostre que r é perpendicular ao plano β.

b) Compare a demonstração que você elaborou com a de um colega.

12. Mostre que, no cubo representado ao lado, a diagonal $\overline{AC}$ da face $ABCD$ é perpendicular ao plano $(HFBD)$.



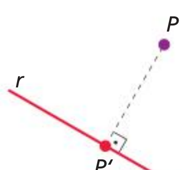
13. Sejam α e β planos paralelos distintos, A, B e C pontos não colineares de α e P um ponto de β tais que $\overline{PA} \perp \beta$. Se R, T e V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, prove que o plano (RTV) é paralelo a β.



3 Projeção ortogonal e distância

3.1 Projeções ortogonais

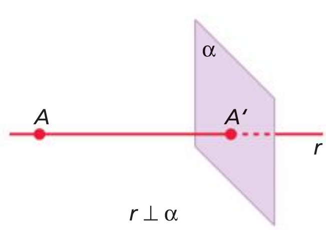
Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta



A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P', que é a intersecção de r com a reta perpendicular a r que passa por P.

Em particular, se P pertencer a r, sua projeção ortogonal sobre r será o próprio P.

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano



$r \perp \alpha$

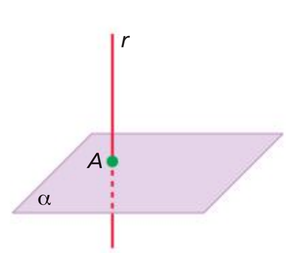
A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é o ponto A', que é a intersecção, com esse plano, da reta que passa por A e é perpendicular a α.

Em particular, se A pertencer a α, sua projeção ortogonal sobre α será o próprio A.

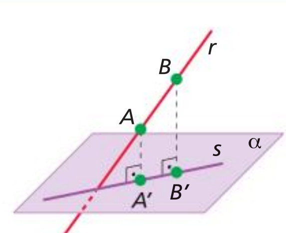
Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Consideremos uma reta r e um plano α.

Se $r \perp \alpha$, com $r \cap \alpha = \{A\}$, então a projeção ortogonal de r sobre α é o ponto A.



Se a reta r não é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é a reta s determinada pela projeção ortogonal de dois pontos distintos de r sobre α.

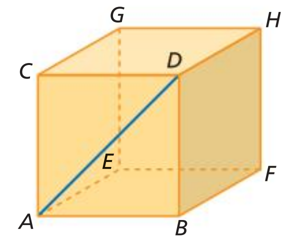


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exemplo

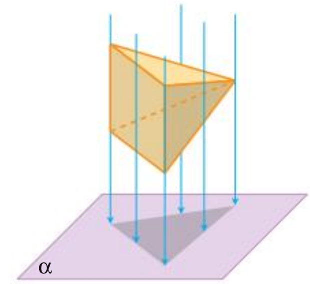
Observe o cubo representado abaixo. Nele, temos que a projeção ortogonal do:

- ponto *C* sobre o plano (*ABE*) é o ponto *A*;
- ponto *C* sobre o plano (*ACE*) é o próprio ponto *C*;
- segmento $\overline{CD}$ sobre o plano (*ABE*) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AD}$ sobre o plano (*ABE*) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AC}$ sobre o plano (*ABE*) é o ponto *A*.



Observação

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é a figura formada pelas projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre esse plano.



3.2 Distâncias

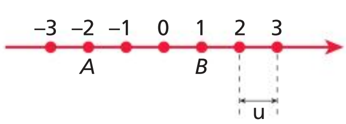
Distância entre dois pontos

Se *A* e *B* são dois pontos do espaço, a distância entre eles é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$, em uma certa unidade de medida.

Indicamos a distância de *A* a *B* (ou distância de *B* a *A*) por $d_{A,\,B}$ (ou $d_{B,\,A}$).

Exemplo

Na reta numérica, se o ponto *A* representa o número real -2 e *B*, o número real 1, então a distância de *A* a *B*, ou a distância *AB*, é 3, que é a medida do segmento $\overline{AB}$, determinada pelo valor absoluto da diferença dos números -2 e 1.



Simbolicamente, temos: $d_{A,\,B} = AB = |(-2) - (1)| = |-3| = 3$

Nesse caso, a unidade de medida de comprimento utilizada (u) é o comprimento do segmento cujos extremos representam dois números inteiros consecutivos.

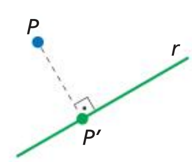
Observação

$d_{B,\,A} = BA = |(1) - (-2)| =$
$= |1 + 2| = |3| = 3$
Assim: $d_{B,\,A} = BA = d_{A,\,B} = AB = 3$

Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto *P* e uma reta *r* é a distância entre *P* e sua projeção ortogonal *P'* sobre *r*.

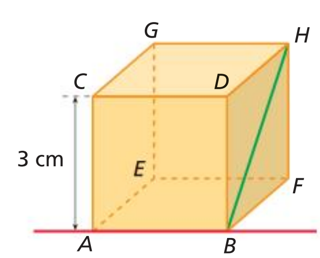
Indicamos a distância de *P* a *r* por $d_{P,\,r} = PP'$.



Exemplo

A distância do ponto *C*, de um cubo de aresta 3 cm, à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é 3 cm. A distância *HB*, do ponto *H* à reta $\overleftrightarrow{AB}$, é $3\sqrt{2}$ cm, pois o triângulo *BHD* é retângulo e, portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

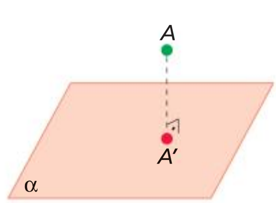
$(HB)^2 = (DH)^2 + (DB)^2 \Rightarrow HB = 3^2 + 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow HB = 3\sqrt{2}$



Se achar necessário, explicar que, no cubo, os planos (*ABC*) e (*BDH*) são perpendiculares e, por isso, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que está contida no plano (*ABC*) é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$ que está contida no plano (*BDH*); logo, *HB* é a distância do ponto *H* à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto *A* e um plano α é a distância entre o ponto *A* e a sua projeção ortogonal *A'* sobre α.



Indicamos a distância de *A* a α por $d_{A,\,\alpha} = AA'$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

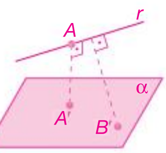
◆ Reflita

- Se a distância de um ponto A a um plano α é zero, o que podemos afirmar sobre a posição de A em relação a α?
- Se uma reta r é paralela a um plano α, a distância de qualquer ponto de r ao plano α é sempre a mesma. Nessa situação, o que podemos dizer sobre a distância de qualquer ponto de α em relação à reta r?

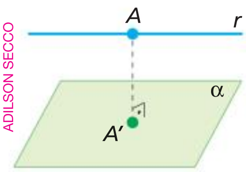
- Podemos afirmar que o ponto A pertence ao plano α.
- Podemos dizer que a distância de qualquer ponto do plano α à reta r é maior ou igual à distância de qualquer ponto da reta r ao plano α.

◆ Distância entre uma reta e um plano paralelos

Dados um plano α e uma reta r paralelos, a distância entre a reta r e o plano α é a distância entre um ponto A qualquer de r e o plano α.



ADILSON SECCO

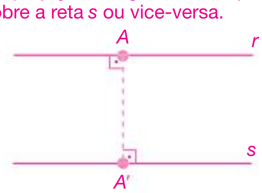


Comentário: É interessante enfatizar que o fato de qualquer ponto da reta r estar à mesma distância do plano α não implica sua comutativa, ou seja, que todo ponto de α está à mesma distância de r. Observar ainda que aquela distância é o limite inferior desta.

Indicamos a distância de r a α por $d_{r,\alpha} = AA'$, sendo A' a projeção ortogonal de A sobre α.

- Dadas duas retas paralelas distintas r e s, a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de r e a projeção ortogonal desse ponto sobre a reta s ou vice-versa.

ADILSON SECCO



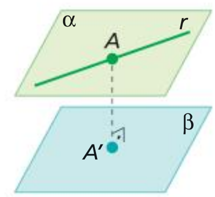
- A distância entre duas retas coincidentes é zero.

◆ Reflita

- Como se descobre a distância entre duas retas paralelas distintas?
- Qual é a distância entre duas retas coincidentes?

◆ Distância entre dois planos paralelos

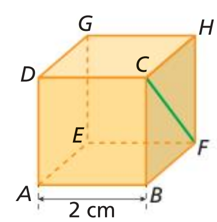
Dados dois planos paralelos, α e β, a distância entre eles é a distância entre qualquer ponto de α e o plano β, ou vice-versa.



Exemplo

No cubo representado ao lado, temos:

- a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é igual à distância entre um ponto de uma delas e a outra, por exemplo, entre C e $\overleftrightarrow{EF}$, que é $2\sqrt{2}$ cm;
- a distância entre os planos (CDG) e (ABE) é 2 cm.



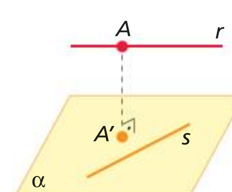
◆ Reflita

A distância entre duas retas reversas pode ser nula? Por quê?

A distância entre duas retas reversas não pode ser nula, pois elas não têm nenhum ponto comum, ou seja, não se cruzam.

◆ Distância entre duas retas reversas

Dadas duas retas reversas, r e s, a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de r e o plano que contém s e é paralelo a r, ou vice-versa.

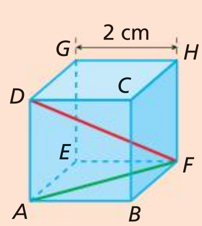


Exercício resolvido

R7. Considerando o cubo representado ao lado, mostrar que:

a) a distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm.

b) a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.



▸ ***Resolução***

a) O $\triangle ABF$ é retângulo em B, que é ângulo interno do quadrado $ABFE$. Como $AB = BF = 2$ cm, pelo teorema de Pitágoras, temos: $(AF)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow AF = 2\sqrt{2}$

O $\triangle DAF$ é retângulo, pois $\overline{DA} \perp$ plano (ABE). Logo, $\overline{DA}$ é perpendicular a todas as retas desse plano que passam por A e, portanto, $\overline{DA} \perp \overline{AF}$.

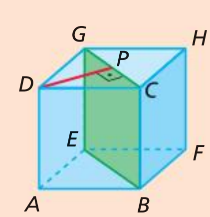
Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle DAF$, temos:

$(DF)^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$(DF)^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow DF = 2\sqrt{3}$

Logo, a distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm.

b) A distância entre $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é DP, que é metade da medida da diagonal de uma face do cubo. Assim:



$DP = \left(2\sqrt{2}\right) : 2$

$DP = \sqrt{2}$

Logo, a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

14. (UFSCar-SP) Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçamos a reta perpendicular a α, a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano qualquer fixado, pode-se dizer que: alternativa e

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.

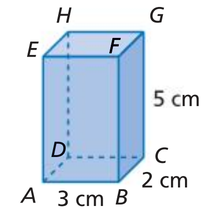
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

15. Considerando o paralelepípedo representado a seguir, determine a distância entre:



a) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$. 2 cm

b) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$. 2 cm

c) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$. $\sqrt{29}$ cm

d) $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (HGF). zero

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC). 5 cm

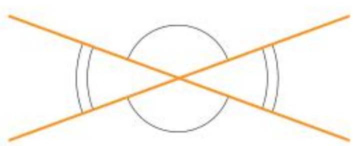
f) o plano (EHD) e o plano (FGC). 3 cm

g) o plano (ABC) e o plano (HGF). 5 cm

4 Ângulos e diedros

Ângulo entre duas retas concorrentes

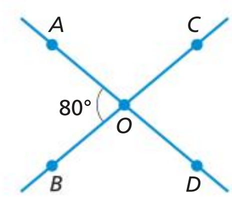
Já vimos que duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice (opv) e, portanto, congruentes dois a dois.



A partir de agora, fica estabelecido que, quando nos referimos ao ângulo entre duas retas concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida (se elas forem perpendiculares, o ângulo entre elas mede 90°, por definição de retas perpendiculares). É claro que, conhecida a medida do menor dos quatro ângulos, podemos determinar as medidas dos demais.

Observação

Veja a figura abaixo.

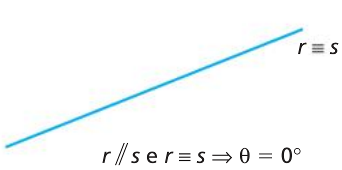


Como os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opv, temos $m(A\hat{O}B) = m(C\hat{O}D)$, isto é, $m(C\hat{O}D) = 80°$.

Os ângulos $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são suplementares, então $m(A\hat{O}C) = 100°$. Portanto, $m(A\hat{O}C) = m(B\hat{O}D) = 100°$, pois $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são opv.

Ângulo entre duas retas paralelas

O ângulo entre duas retas paralelas (extensão da ideia de ângulo, de medida θ, estudada no Ensino Fundamental) tem medida igual a 0°.



$r \parallel s$ e $r \equiv s \Rightarrow \theta = 0°$

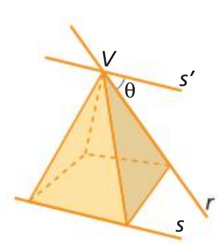
$r \parallel s$ e $r \cap s = \varnothing \Rightarrow \theta = 0°$

Ângulo entre duas retas reversas

O ângulo entre duas retas reversas, r e s (medida θ), é o ângulo formado entre r e s', sendo s' uma reta paralela a s e concorrente com r.

Em linguagem simbólica, escrevemos:

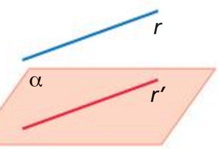
r e s reversas, $s \parallel s'$, $s' \cap r = \{V\}$, ângulo entre r e s' mede $\theta \Rightarrow$ ângulo entre r e s mede θ.

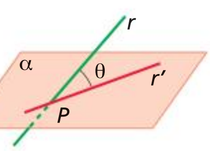
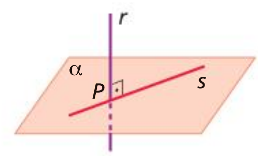


Ângulo entre uma reta e um plano

Se uma reta ***r*** não é perpendicular a um plano α, o ângulo entre ***r*** e α, de medida θ, é o ângulo formado por ***r*** e ***r'***, sendo ***r'*** a projeção ortogonal de ***r*** sobre α.

No caso em que ***r*** é perpendicular ao plano α, o ângulo mede 90°.

Reta *r* não concorrente com o plano α ($r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$)	
 $r \subset \alpha \Rightarrow r \equiv r'$ e $\theta = 0°$	 $r \parallel \alpha$ e $r \not\subset \alpha \Rightarrow r \parallel r'$ e $\theta = 0°$

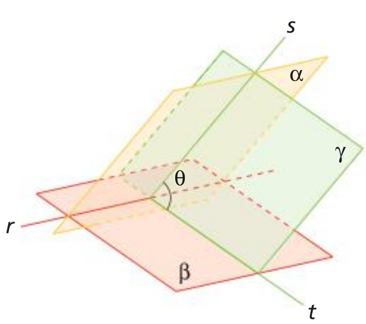
Reta *r* concorrente com o plano α ($r \cap \alpha = \{P\}$)	
 $r \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow r \cap r' = \{P\}$ O ângulo entre *r* e α é o ângulo entre *r* e *r'*.	 ***r*** e α são perpendiculares; então, ***r*** e *s* são perpendiculares. Os ângulos entre ***r*** e *s* e entre ***r*** e α medem 90°.

Ângulo entre dois planos

Se dois planos, α e β, são concorrentes, ***r*** é a reta de intersecção deles, γ é um plano perpendicular à reta ***r***, e as retas *s* e *t* são as intersecções de α e β com γ, então o ângulo entre os planos α e β é o ângulo formado entre as retas *s* e *t*.

Observação

Quando nos referirmos ao ângulo formado por dois planos concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida, entre as retas *s* e *t*.

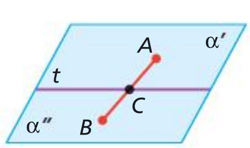


Se dois planos, α e β, são paralelos, então o ângulo entre eles é nulo (mede 0°).

Diedro

Antes de falarmos sobre diedro, será necessário apresentarmos um novo postulado, conhecido por **postulado da separação de planos**.

P9 Dada uma reta ***t*** contida em um plano α, essa reta divide o plano em dois conjuntos de pontos convexos e disjuntos, α' e α'', de tal modo que o segmento de reta que liga um ponto qualquer pertencente a α' a um ponto qualquer de α'' tem um único ponto em comum com a reta *t*.



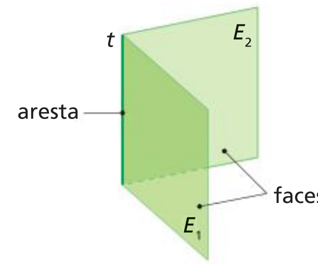
Com base nesse postulado, podemos definir o que é um semiplano:

> Seja um plano α e uma reta *t*, contida nesse plano, de tal modo que o plano fique dividido em dois conjuntos de pontos, α' e α'': cada um dos conjuntos $\alpha' \cup$ ***t*** e $\alpha'' \cup$ ***t*** é chamado **semiplano**, sendo a reta ***t*** a sua origem.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

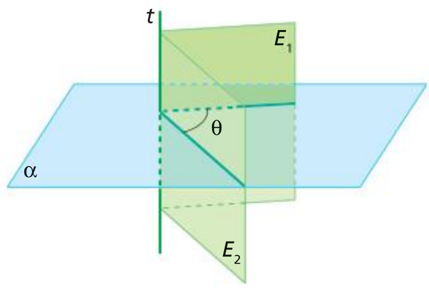
Agora, com base no postulado e na definição, vamos definir o que é um diedro.

Sejam E_1 e E_2 dois semiplanos de mesma origem t, não contidos em um mesmo plano. Chama-se **diedro** ou **ângulo diedro** a figura formada pela reunião dos semiplanos E_1 e E_2.



diedro $E_1 \cup E_2$

Dado um diedro e um plano α perpendicular à aresta do diedro, chama-se **ângulo plano** a intersecção do plano α com o diedro. A medida θ desse ângulo é considerada a medida do diedro.

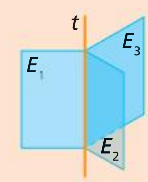


◆ Observação

Para medida de diedro, consideraremos $0° < \theta < 180°$.

Exercícios resolvidos

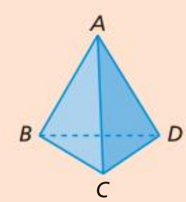
R8. Identificar os diedros representados na figura ao lado.



▸ ***Resolução***

$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_1 \cup E_3$

R9. Nomear os seis diedros do tetraedro representado ao lado.



▸ ***Resolução***

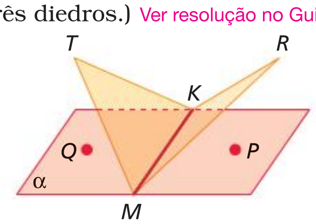
Consideremos os semiplanos E_1 contido no plano (ABC), E_2 contido no plano (ACD), E_3 contido no plano (ADB) e E_4 contido no plano (BCD). Assim, temos:

- $E_1 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{BC}$)
- $E_1 \cup E_2$ (origem $\overleftrightarrow{AC}$)
- $E_1 \cup E_3$ (origem $\overleftrightarrow{AB}$)
- $E_2 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{CD}$)
- $E_2 \cup E_3$ (origem $\overleftrightarrow{AD}$)
- $E_3 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{BD}$)

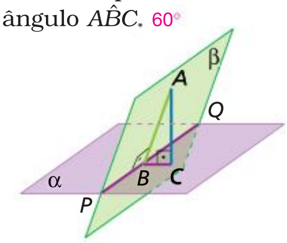
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

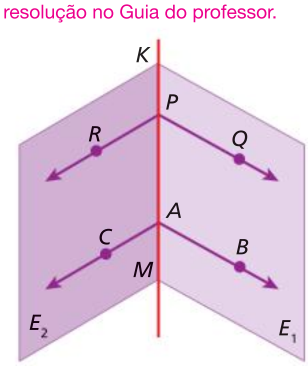
16. Nomeie todos os diedros da figura. (*Dica*: Existem mais de três diedros.) Ver resolução no Guia do professor.



17. Na figura abaixo, a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é $\overline{BC}$ tal que $AB = 2 \cdot BC$. O segmento $\overline{PQ}$ é perpendicular ao plano (ABC). Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$. 60°



18. Seja $E_1 \cup E_2$ um diedro de aresta $\overleftrightarrow{KM}$ tal que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ estão em E_1 e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{PR}$ estão em E_2. Ver resolução no Guia do professor.



a) Se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, podemos afirmar que $B\hat{A}C$ é um ângulo plano do diedro? Justifique.

b) Se a medida do ângulo $R\hat{P}Q$ é 90°, podemos afirmar que $\overrightarrow{PQ} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB}$? Justifique.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

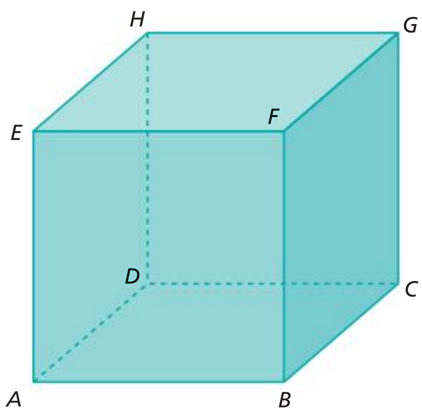
Registre as respostas em seu caderno

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência; a projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

Aplicação

1. Dois planos, α e β, interceptam-se em uma reta r. Escreva quantas retas paralelas a r passam por um ponto A de α. uma reta paralela

2. Considere o cubo representado na figura abaixo.



Qual é a posição relativa entre:

a) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{GC}$? reversas

b) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$? paralelas

c) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$? perpendiculares

d) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC)? paralelos

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (DCG)? perpendiculares

f) o plano (ABF) e o plano (EHG)? perpendiculares

3. Identifique qual das afirmações a seguir é falsa. Justifique sua resposta. Ver resolução no Guia do professor.

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

b) Se dois planos são paralelos, então toda reta de um é paralela a uma reta do outro.

c) Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

4. Escreva como pode ser a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano. uma reta ou um ponto

5. A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo contido em α. Se P dista $2\sqrt{3}$ m da hipotenusa desse triângulo e 2 m do plano α, determine a medida da altura relativa à hipotenusa. $2\sqrt{2}$ m

6. Quais são as possíveis projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano? E de uma esfera?

7. Escreva qual é a distância entre um plano e uma reta nele contida. zero

8. Um ponto contido em uma face de um diedro de 30° dista 9 m da outra face desse diedro. Determine quanto esse ponto dista da aresta do diedro. 18 m

9. A projeção ortogonal de um ponto A interior a um diedro de 60° determina os pontos A_1 e A_2 em cada uma das faces desse diedro. Calcule a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$. 120°

10. Nesse caso, a projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

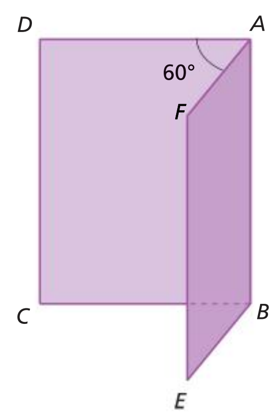
Aprofundamento

10. Uma circunferência está contida em um plano α que é perpendicular a um plano β. Determine a projeção ortogonal dessa circunferência sobre o plano β.

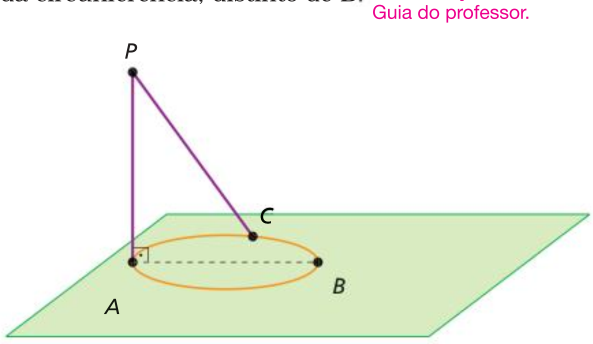
11. O segmento $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Se $AB = 2 \cdot AP$ e M é o ponto médio de $\overline{BC}$, determine a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$. 60°

Desafio

12. (UFPE) Na ilustração abaixo, $ABCD$ e $ABEF$ são retângulos, e o ângulo $D\hat{A}F$ mede 60°. Se $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{30}$, $\overline{BE}$ mede 6 e $\overline{BC}$ mede 10, qual a distância entre os vértices C e F? 14 unidades de comprimento



13. De uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ levanta-se por A um segmento $\overline{AP}$ perpendicular ao plano da circunferência. Une-se P a um ponto C qualquer da circunferência, distinto de B. Ver resolução no Guia do professor.



a) Prove que as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

b) Sabendo que $AB = AP = 8$ cm e C é o ponto médio do arco $\widehat{AB}$, determine a medida do ângulo $C\hat{P}B$. 30°

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r /\!/ s$ e t e m são reversas, a semelhança que existe entre esses dois pares é que as retas de cada par: alternativa c

a) são coplanares.

b) não são coplanares.

c) não têm nenhum ponto comum.

d) têm apenas um ponto comum.

2. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r /\!/ s$ e t e m são reversas, a diferença que existe entre esses dois pares é que: alternativa a

a) r e s são coplanares, mas m e t não são.

b) r e s não são coplanares, mas m e t são.

c) r e s, bem como m e t, não têm ponto comum.

d) nenhuma das anteriores.

3. Uma reta r é perpendicular a uma reta s, contida em um plano α, e r é ortogonal a uma reta t, contida em α e concorrente com s. Portanto, podemos afirmar que: alternativa b

a) r não pode ser perpendicular a α.

b) r é necessariamente perpendicular a α.

c) r pode ser paralela a α.

d) nenhuma das anteriores.

4. Um plano α é paralelo a duas retas distintas, r e s. Assim, pode-se afirmar que: alternativa b

a) r e s são paralelas, necessariamente.

b) r e s podem ser perpendiculares.

c) r e s são reversas, necessariamente.

d) r e s não são perpendiculares.

5. Se a projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é um ponto P, então: alternativa d

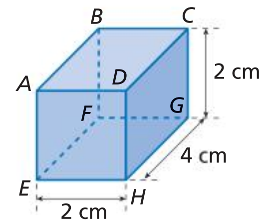
a) $r /\!/ \alpha$

b) $r \cap \alpha = \varnothing$

c) $r \cap \alpha \neq P$

d) $r \perp \alpha$

Considere a figura ao lado para responder às questões **6** a **9**.



6. A distância entre os pontos A e C é: alternativa d

a) 2 cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** $2\sqrt{5}$ cm

7. A distância entre o ponto A e o plano (BCF) é: alternativa b

a) 2 cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** $5\sqrt{2}$ cm

8. A distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é: alternativa a

a) $2\sqrt{2}$ cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** $5\sqrt{2}$ cm

9. A distância entre o ponto A e o plano (DHE) é: alternativa d

a) 2 cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** 0 cm

10. O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo. Então, podemos afirmar que: alternativa d

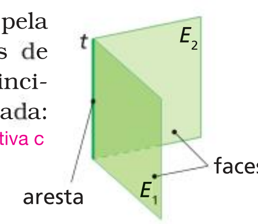
a) existe um ponto P tal que $r \cap \alpha = \{P\}$.

b) existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r \perp s$.

c) a reta r é perpendicular ao plano α.

d) $r \cap \alpha = r$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$.

11. A figura ao lado, formada pela reunião dos semiplanos de mesma origem e não coincidentes E_1 e E_2, é denominada: alternativa c



a) projeção.

b) sólido.

c) diedro.

d) plano.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos. Aplicá-las na resolução de situações-problema.	X	X	X	X	X					X	
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.						X	X	X	X		
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.											X
Páginas do livro referentes ao conceito	86 a 89	86 a 89	89 a 94	86 a 89	94 e 95	95 a 97	95 a 97	95 a 97	95 a 97	97 a 99	97 a 99

Capítulo 6

Poliedros

WATCHAREE SUPHALUXANA/SHUTTERSTOCK

Objetivos do capítulo

- Identificar poliedros, prismas, pirâmides, troncos de pirâmides e seus elementos.
- Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.
- Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.
- Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).

1 Sólidos geométricos

O estudo das mais variadas formas geométricas sempre instigou a mente humana. Um destaque nesse campo de interesse são as figuras que hoje denominamos **sólidos geométricos**. Um dos motivos para a importância desse estudo é a constante aplicabilidade das propriedades dos sólidos geométricos a situações do mundo físico tratadas em diversas áreas do conhecimento, como a Arquitetura, a Engenharia e as Artes.

1.1 Sólidos geométricos e figuras planas

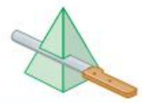
Olhando ao redor, observamos diversos objetos que lembram figuras geométricas planas e não planas. As linhas e as superfícies podem ser planas ou não planas, ao passo que os sólidos são sempre não planos.

Embora os sólidos geométricos exibam formas bastante diversas, é possível classificá-los em três grandes grupos: os **poliedros**, os **corpos redondos** e outros.

Veja nos quadros da página a seguir algumas figuras planas que podem ser obtidas de alguns sólidos geométricos.

Museu do Louvre, Paris, França, 2013.

- Secção dos sólidos por planos:

	Poliedros		**Corpos redondos**		
Sólido					
Região de corte (figuras planas)					

- Apoiando os sólidos em um plano:

	Poliedros		**Corpos redondos**		
Sólido					
Região de apoio (figuras planas)	 retângulo	 triângulo	ponto	 segmento	 círculo

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Neste capítulo, vamos estudar um dos tipos de sólidos geométricos: os poliedros.

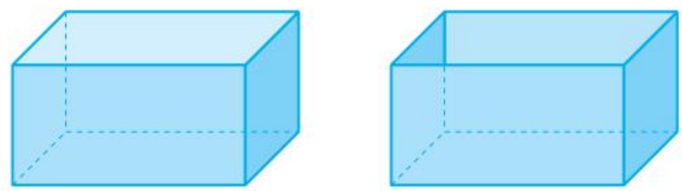
2 Poliedros

2.1 Superfície poliédrica fechada e poliedros

Todo poliedro apresenta uma superfície chamada **superfície poliédrica fechada**.

Uma superfície poliédrica fechada é composta de um número finito (maior ou igual a quatro) de superfícies poligonais planas, de modo que cada lado de uma dessas superfícies coincida com apenas um lado da outra.

Observe as figuras abaixo.



Entre essas duas figuras, apenas a da esquerda representa uma superfície poliédrica fechada.

Considerando que uma superfície poliédrica fechada delimita uma porção do espaço em seu interior, vamos definir o que é um **poliedro**.

Poliedro (do grego *poli*, "muitas, várias", e *edro*, "face") é o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

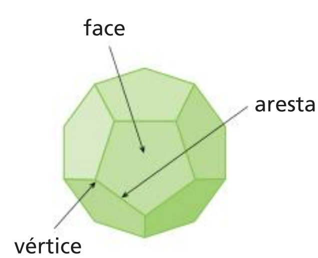
◆ Explore

Fotografe ou pesquise fotos (em jornais, revistas ou na internet) de objetos e construções que lembrem poliedros.
Em grupo, montem um cartaz com as fotos, os nomes e as características dos poliedros correspondentes.

Elementos de um poliedro

Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Face** – cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro.
- **Aresta** – lado comum a duas faces.
- **Vértice** – ponto comum a três ou mais arestas.



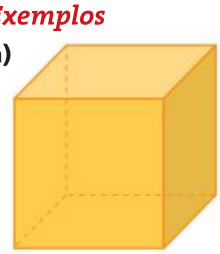
Um poliedro costuma ser nomeado de acordo o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição *edro*. Por exemplo, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: *tetra* (4) + *edro* (face).

◆ Observação

As arestas do poliedro são os lados dos polígonos que determinam as faces.
Os vértices do poliedro são os vértices desses polígonos.

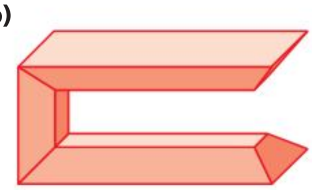
Exemplos

a)



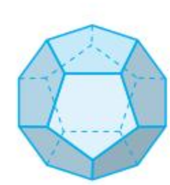
hexaedro { 6 faces, 8 vértices, 12 arestas

b)



tetradecaedro { 14 faces, 16 vértices, 28 arestas

c)



dodecaedro { 12 faces, 20 vértices, 30 arestas

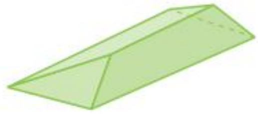
Veja no quadro abaixo alguns dos nomes de poliedros.

Número de faces	4	5	6	7	8	12	20
Nome do poliedro	tetraedro	pentaedro	hexaedro	heptaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro

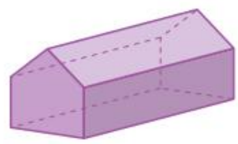
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

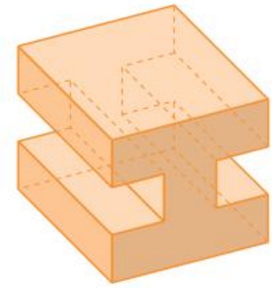
1. Escreva o nome do poliedro representado abaixo.
pentaedro



2. Um galpão tem a forma representada pela figura a seguir. Qual é o nome do poliedro correspondente?
heptaedro



3. Analise o sólido abaixo para responder à questão.



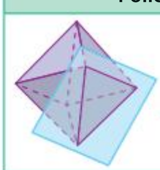
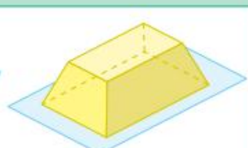
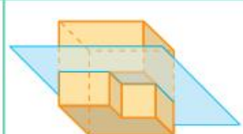
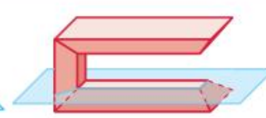
Quantas faces, arestas e vértices esse sólido tem?
14 faces, 36 arestas, 24 vértices

2.2 Poliedro convexo e poliedro não convexo

Os poliedros que não apresentam "reentrâncias" em sua superfície são denominados **convexos**; os que têm "reentrâncias" são denominados **não convexos** (ou **côncavos**). De maneira mais precisa:

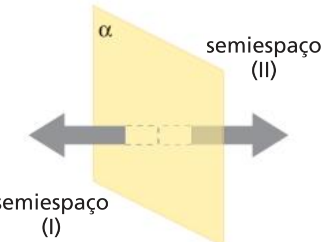
Se cada plano que contém uma face de um poliedro posiciona as demais faces em um mesmo semiespaço, então o poliedro em questão é **convexo**; caso contrário, é **não convexo** (ou **côncavo**).

Em cada figura abaixo, foi destacado um plano que contém uma das faces do poliedro. Observe.

Poliedros convexos		Poliedros não convexos	
			

Observação

Um plano α divide o espaço em dois **semiespaços** de mesma origem α.



Relação de Euler

Os elementos dos poliedros mantêm entre si muitas relações geométricas, numéricas e métricas. Entre as relações numéricas, uma das mais importantes é a denominada **relação de Euler**, que relaciona o número de vértices (V), de arestas (A) e de faces (F) de qualquer poliedro convexo. Essa relação pode ser escrita assim:

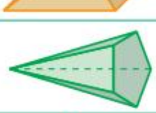
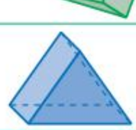
$$V + F - A = 2$$

COLEÇÃO PARTICULAR

Esse selo comemorativo, de 1983, mostra a importância da descoberta da relação de Euler, matemático suíço que viveu no século XVIII.

Exemplos

Vamos verificar a validade da relação de Euler para os poliedros convexos representados abaixo.

Poliedro	Vértice (V)	Face (F)	Aresta (A)	$V + F - A$
	8	6	12	2
	6	6	10	2
	6	5	9	2

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ Observação

Embora todo poliedro convexo satisfaça a relação de Euler, nem sempre um poliedro que satisfaz essa relação é convexo. Observe, como exemplo, o poliedro abaixo.

Ele tem 24 vértices, 14 faces e 36 arestas. Assim:

$24 + 14 - 36 = 2$

$V + F - A = 2$

Logo, esse poliedro satisfaz a relação de Euler, mas não é convexo.

Exercícios resolvidos

R1. Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

▶ ***Resolução***

Como a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow A = 8 + 6 - 2 \Rightarrow A = 12$

Portanto, esse poliedro possui 12 arestas.

R2. Quantos vértices tem um poliedro convexo com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares?

▶ ***Resolução***

O número de faces do poliedro é 4 + 5, ou seja, 9.

As 4 faces triangulares têm 12 lados ($4 \cdot 3$), e as 5 faces quadrangulares têm 20 lados ($5 \cdot 4$). Então, o número de arestas é dado por $(12 + 20) : 2 = 16$, pois cada aresta é lado comum de exatamente duas faces (portanto, cada aresta foi contada duas vezes). Assim, o poliedro tem 16 arestas e 9 faces. Logo:

$V + 9 - 16 = 2 \Rightarrow V = 9$

Portanto, esse poliedro tem 9 vértices.

5.

Poliedro	V	F	A	$V + F - A$
I	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
II	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$

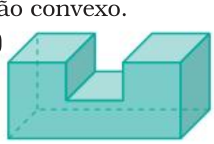
A relação de Euler é válida para os dois poliedros indicados.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

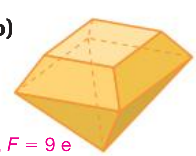
4. Determine o número de vértices, faces e arestas de cada poliedro e classifique-os em convexo ou não convexo.

a)



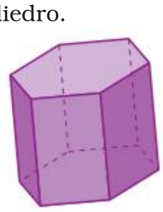
$V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo

b)

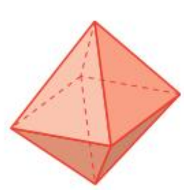


$V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo

5. Verifique a validade da relação de Euler para cada poliedro.



poliedro I



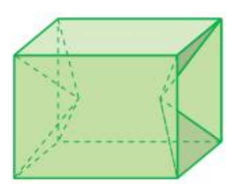
poliedro II

6. Alberto é torneiro mecânico e deve construir uma peça maciça de acordo com o esquema abaixo.

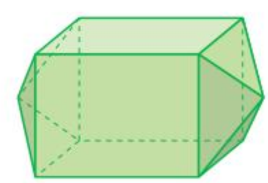
Verifique se o poliedro que essa peça lembra satisfaz a relação de Euler.
sim; $V = 36$, $F = 20$, $A = 54$ e $36 + 20 - 54 = 2$

7. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem apenas 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. 10 vértices

8. Observe os poliedros e, em seguida, responda às questões.



poliedro I



poliedro II

Qual desses poliedros:

a) é um poliedro côncavo? poliedro I

b) tem mais faces? Ambos têm 12 faces.

c) tem menos vértices? Ambos têm 10 vértices.

d) tem mais arestas? Ambos têm 20 arestas.

e) satisfaz a relação de Euler?
Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro. 8 faces

10. Um poliedro convexo com 11 vértices tem o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e 1 face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro. 11 faces

11. Calcule o número de faces triangulares e quadrangulares de um poliedro convexo (que só tem esses dois tipos de face) com 20 arestas e 10 vértices.
8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares

12. Um poliedro convexo de 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. O número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares são números inteiros consecutivos. Determine o número de faces e de arestas.
9 faces e 16 arestas

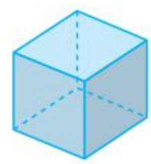
Poliedros regulares

Um poliedro convexo é **regular** quando satisfaz às seguintes condições:

- apresenta todas as faces poligonais regulares e congruentes entre si;
- em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares. Observe abaixo um exemplo de cada uma dessas classes.


tetraedro regular


hexaedro regular (ou cubo)


octaedro regular


dodecaedro regular


icosaedro regular

Observações

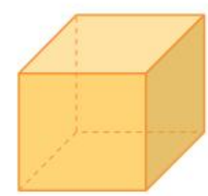
- Uma superfície poligonal plana é regular se o polígono que a compõe é regular.
- Um polígono é regular se tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si.

Veja um exemplo:


pentágono regular

2.3 Planificação da superfície de um poliedro

Os poliedros podem ser representados de diferentes maneiras; por exemplo, em perspectiva ou pela planificação de sua superfície. Até agora, você tem observado a representação de alguns poliedros em perspectiva, como o cubo representado ao lado.

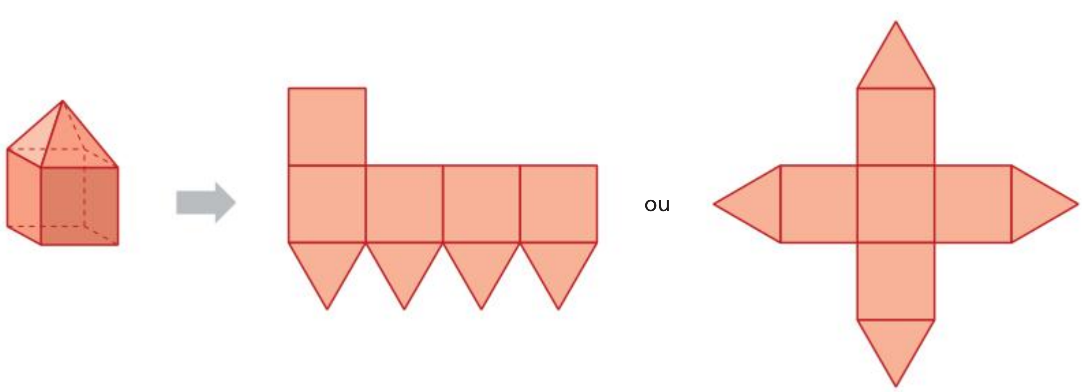


Entretanto, a superfície de um poliedro, que é formada de superfícies poligonais planas, pode ser colocada sobre um plano de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de **molde do poliedro**, ou **planificação da superfície do poliedro**, ou simplesmente **planificação do poliedro**.

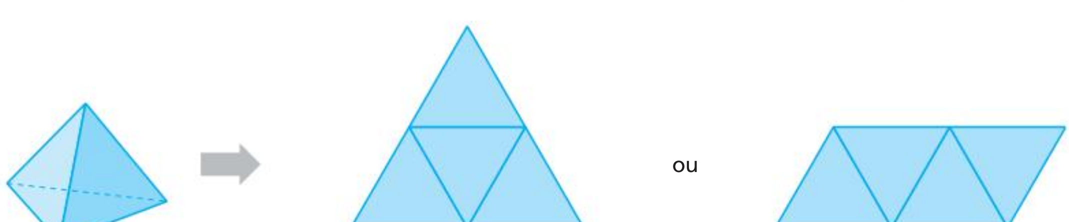
De modo geral, as faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos diferentes, desde que cada face esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

Exemplos

a)



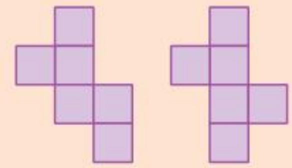
b)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

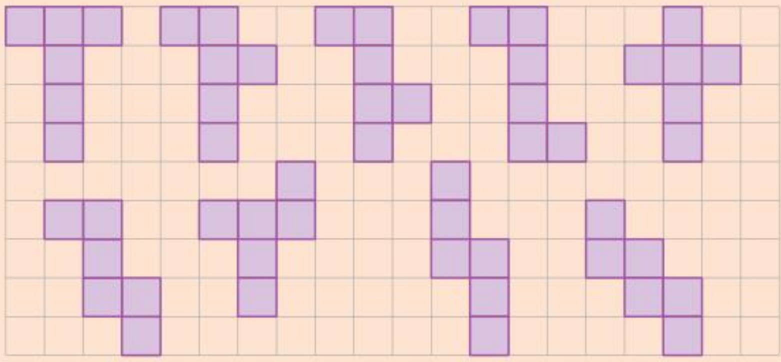
Exercícios resolvidos

R3. Existem 11 diferentes planificações para o cubo. Duas delas estão representadas ao lado; desenhar as outras 9 planificações.

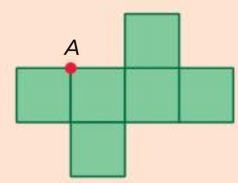


▸ ***Resolução***

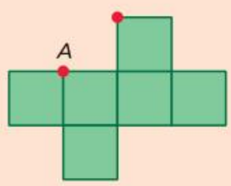
A resolução desta questão fica facilitada se usarmos uma malha quadriculada. Estas são as outras possibilidades:



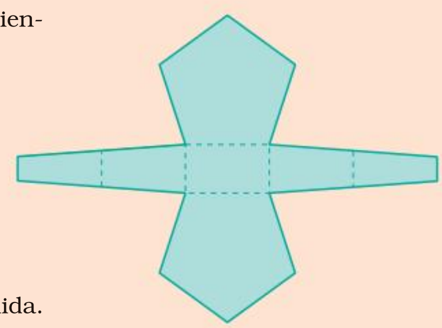
R4. Na planificação da superfície de um cubo foi assinalado um ponto *A*. Marcar nessa planificação o ponto que coincidirá com *A* depois de montado o cubo.



▸ ***Resolução***



R5. Qual é o número de vértices do sólido obtido ao dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura ao lado?



▸ ***Resolução***

O sólido obtido é um heptaedro; logo, o número de faces é 7.
Como há 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais, o número de arestas é:

$$A = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 15$$

Uma vez que o sólido obtido é convexo, a relação de Euler é válida. Desse modo, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

13. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais foram retiradas as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, de faces e de vértices da superfície poliédrica que restou. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices

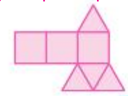
14. Faça o que se pede.

a) Represente a planificação da superfície de um poliedro que tem 3 faces quadradas e 4 faces triangulares.

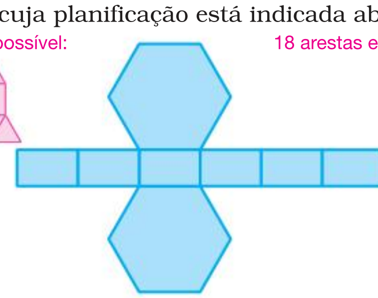
b) Compare a planificação que você elaborou com a de um colega. resposta pessoal

15. Determine o número de arestas e vértices do poliedro cuja planificação está indicada abaixo.

14. a) Resposta possível:

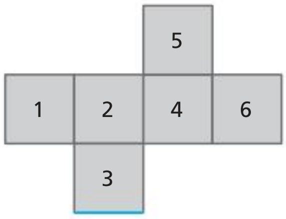


18 arestas e 12 vértices



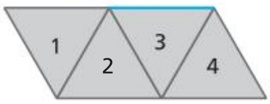
16. Em cada uma das planificações abaixo, anote o número da face que coincidirá com o lado destacado em azul depois que o sólido for montado.

a)



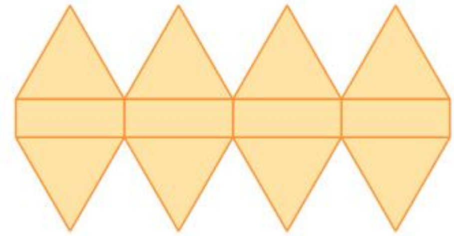
face 6

b)



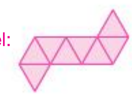
face 1

17. Considere que a figura abaixo seja a planificação da superfície de um poliedro convexo. Qual é a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro? 30



18. Represente a planificação de um octaedro regular.

18. Resposta possível:



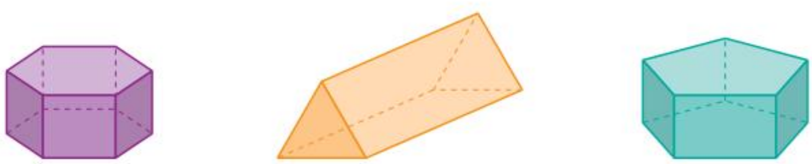
ADILSON SECCO

3 Prismas

Vários objetos do espaço em que vivemos têm a forma de poliedros, entre os quais destacamos os **prismas**.

Desde as mais simples embalagens até as mais elaboradas edificações, muitos são os exemplos da presença dos prismas no dia a dia.

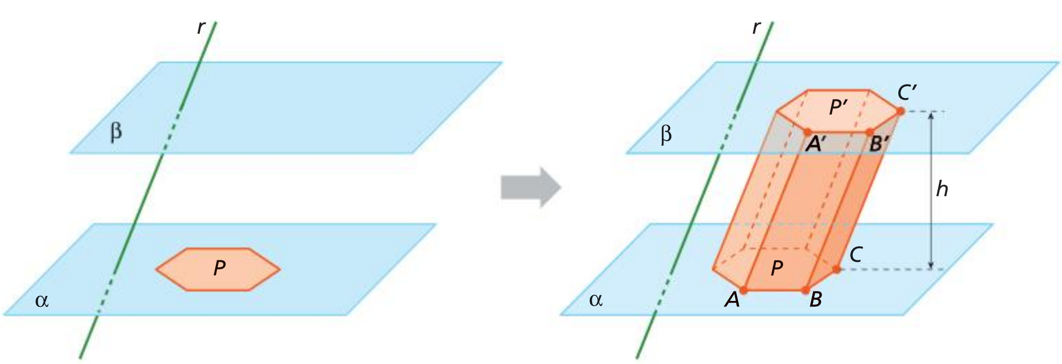
Observe os prismas representados abaixo.



Note que todos eles possuem pelo menos um par de faces paralelas e congruentes e pelo menos três faces paralelográmicas (lados paralelos dois a dois). Esse fato, embora não seja exclusivo dos prismas, ocorre em todos eles.

3.1 Definição de prisma

Consideremos dois planos paralelos distintos, α e β, uma região poligonal convexa *P* contida em α e uma reta *r* que intercepta os planos α e β.



> Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a ***r*** tais que uma de suas extremidades é um ponto da região ***P*** e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Se a reta *r* é perpendicular aos planos α e β, dizemos que o prisma é **reto**; caso contrário, ele é **oblíquo**. Observe que o prisma acima é oblíquo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Elementos de um prisma

Considerando o prisma da página anterior, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Bases** – as regiões poligonais P e P', que são congruentes e estão situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente).
- **Faces laterais** – as regiões poligonais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Arestas das bases** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ etc.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ etc.
- **Altura do prisma** – a distância h entre os planos das bases (α e β).

Reflita

Que tipo de polígono compõe as faces laterais de um prisma reto? Justifique sua resposta.

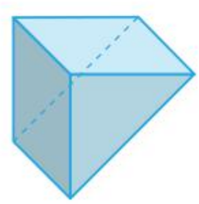
O retângulo, pois o fato de a reta r ser perpendicular aos planos garante os quatro ângulos internos retos para as faces laterais.

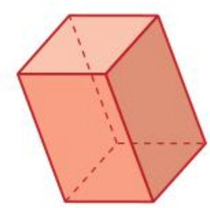
Classificação dos prismas

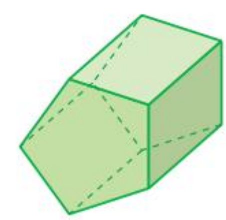
Os prismas podem ser classificados de acordo com alguns critérios. Um deles você já conhece: a inclinação da reta r em relação aos planos α e β que contêm as bases. É essa reta que define a inclinação das arestas laterais dos prismas em relação às bases. Nos prismas retos, as arestas laterais são perpendiculares às bases; os oblíquos, não.

Outro critério que permite classificar os prismas é o que considera o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo, o prisma é **triangular**; se é um quadrilátero, o prisma é **quadrangular**; se é um pentágono, o prisma é **pentagonal**; e assim por diante.

Exemplos

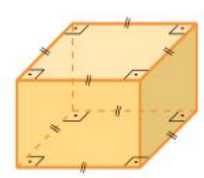

prisma triangular

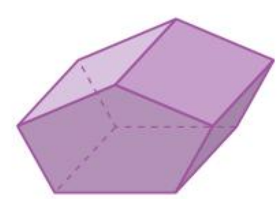

prisma quadrangular


prisma pentagonal

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Um prisma reto cujas bases são superfícies poligonais regulares é denominado **prisma regular**.

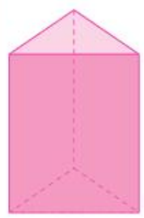
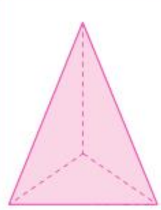

Esse prisma é regular, pois as bases são quadradas e ele é reto.


Esse prisma não é regular, pois as bases não são polígonos regulares.

Reflita

- Todo prisma regular é um poliedro regular? não
- Todo poliedro regular é um prisma regular? não

Veja os contraexemplos:

Prisma regular que não é poliedro regular	Poliedro regular que não é prisma regular
	

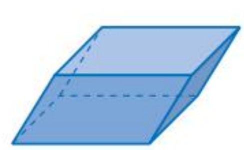
ADILSON SECCO

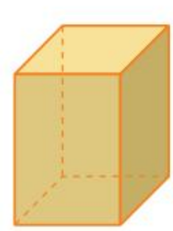
Comentário: Nesta atividade, os alunos têm a oportunidade de verificar, por meio das definições de poliedro regular e de prisma regular, quais dos poliedros regulares são prismas e produzir contraexemplos para fundamentar sua resposta.

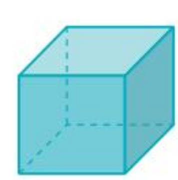
Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases paralelogrâmicas são chamados de **paralelepípedos**; esses, por sua vez, podem ser retos ou oblíquos.

Se um paralelepípedo reto tem bases retangulares, é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo** ou **bloco retangular**; se tem todas as faces congruentes, denomina-se **cubo**.

Exemplos


paralelepípedo oblíquo

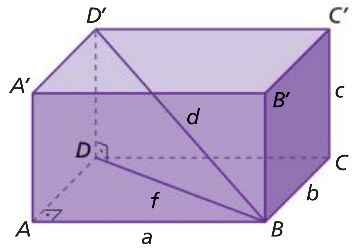

paralelepípedo reto-retângulo


cubo

3.2 Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Diagonal de um paralelepípedo é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.

Considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c.



A medida d da diagonal desse paralelepípedo depende da medida f do segmento $\overline{DB}$, que é uma diagonal da face $ABCD$.

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADB, temos:

$$f^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(I)}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo DBD', temos:

$$d^2 = f^2 + c^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

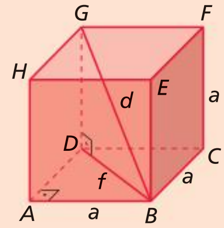
$$d^2 = (a^2 + b^2) + c^2$$

Portanto, a medida d da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Exercício resolvido

R6. Calcular a medida da aresta de um cubo cuja medida da diagonal excede em $\sqrt{2}$ cm a medida da diagonal da base.



▶ ***Resolução***

Sendo d a medida da diagonal do cubo e f a medida da diagonal da base, temos, pelos dados do problema: $d = f + \sqrt{2} \Rightarrow d - f = \sqrt{2}$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, temos:

$f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$ (II)

Por se tratar de um cubo, sabemos que: $d = a\sqrt{3}$ (III)

Assim, substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$d - f = \sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2} \Rightarrow a = \sqrt{6} + 2$$

Portanto, a aresta do cubo mede $\left(2 + \sqrt{6}\right)$ cm.

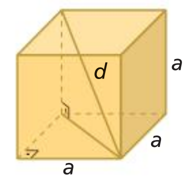
◆ Reflita

Quantas diagonais tem um paralelepípedo reto-retângulo?

Todo paralelepípedo reto-retângulo tem quatro diagonais. Na figura ao lado, por exemplo, são: $\overline{BD'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{AC'}$ e $\overline{CA'}$.

◆ Observação

Se o paralelepípedo retângulo é um cubo, todas as suas arestas são congruentes.



Assim:

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

◆ Reflita

Qual é o maior segmento cujas extremidades são vértices de um cubo? E qual é o menor?

Observe a figura do exercício resolvido **R6** e considere:

- o triângulo ABD, isósceles, retângulo, de catetos medindo a e hipotenusa medindo f. Então, $a < f$.
- o triângulo BDG, retângulo, de catetos medindo a e f e hipotenusa medindo d. Então, $a < f < d$.

Portanto, o maior segmento é uma diagonal do cubo; o menor é uma aresta.

Comentário: Esta é uma ótima oportunidade de os alunos ampliarem o estabelecimento de relações métricas entre elementos de um cubo e exercitar um procedimento de análise.

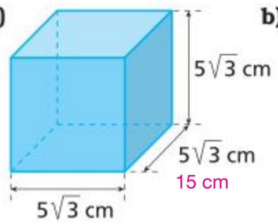
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

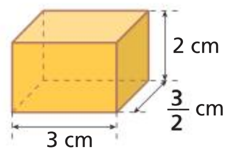
19. Calcule a medida das diagonais dos paralelepípedos reto-retângulos abaixo.

a)



15 cm

b)

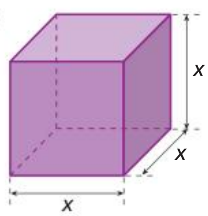


$\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

20. Um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a cm, 4 cm e 7 cm tem diagonal medindo $3\sqrt{10}$ cm. Calcule o valor de a. 5 cm

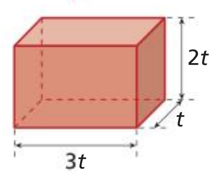
21. Escreva a expressão algébrica que indica a medida da diagonal de cada paralelepípedo reto-retângulo.

a)



$x\sqrt{3}$

b)

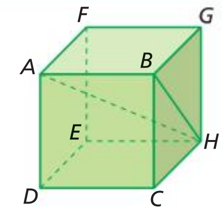


$t\sqrt{14}$

22. Um paralelepípedo reto-retângulo tem diagonal medindo $\sqrt{14}$ cm. Determine as medidas das três arestas sabendo que são números inteiros consecutivos. 1 cm, 2 cm e 3 cm

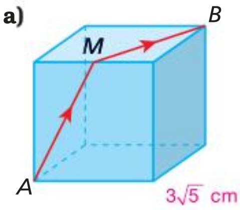
23. As medidas das arestas de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 4 e 12. Se a diagonal mede 130 cm, então quais são essas medidas? 30 cm, 40 cm e 120 cm

24. O sólido representado ao lado é um cubo cujas arestas medem 4 cm. Calcule a área do triângulo ABH. $8\sqrt{2}$ cm^2



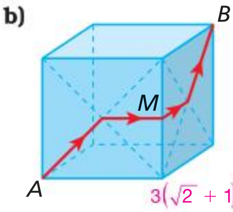
25. Em cada item, calcule a medida do caminho de A a B destacado sobre a superfície do cubo de aresta medindo 3 cm. O ponto M é o ponto médio de uma aresta.

a)



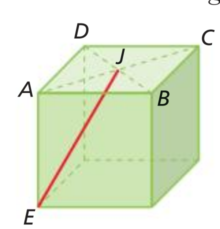
$3\sqrt{5}$ cm

b)



$3(\sqrt{2} + 1)$ cm

26. A medida da aresta do cubo representado abaixo é 20 cm. Se J é a intersecção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então qual é a medida do segmento $\overline{EJ}$? $10\sqrt{6}$ cm



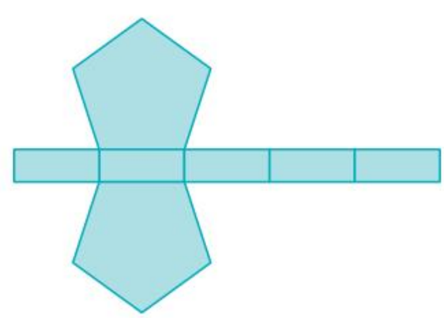
27. Desenhe um cubo e trace duas de suas diagonais. Mostre que duas diagonais de um cubo não são perpendiculares entre si. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.3 Planificação da superfície de um prisma

Podemos planificar a superfície de um prisma.

Observe a planificação a seguir.



Pela planificação, podemos identificar muitas características desse prisma:

- tem 7 faces, já que a planificação de sua superfície apresenta 7 regiões poligonais;
- tem bases pentagonais, pois faces desse tipo não podem ser faces laterais de um prisma, as quais necessariamente são quadriláteros;
- tem 5 faces laterais (as faces retangulares), já que as pentagonais são bases;
- tem 10 vértices, uma vez que cada base contém metade dos vértices do prisma;
- é um prisma reto, já que suas faces laterais são retangulares;
- tem altura igual ao comprimento de uma aresta lateral, já que é reto.

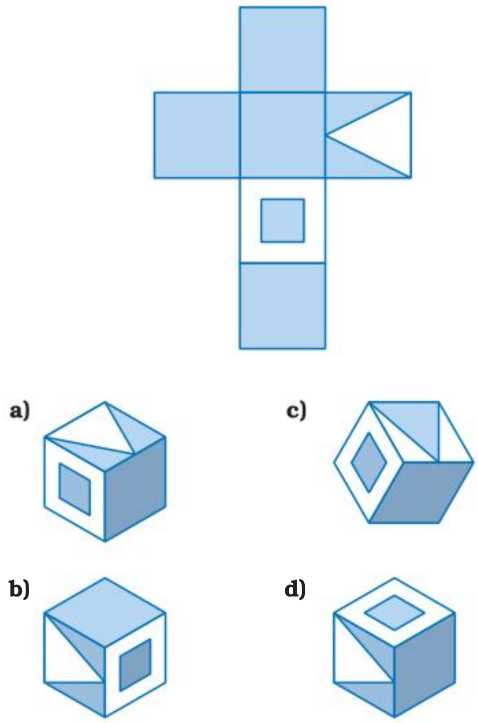
Observação

As faces laterais de um prisma reto são sempre retangulares. Mesmo que o prisma seja um cubo, podemos dizer que sua face lateral é retangular, porque todo quadrado é um retângulo.

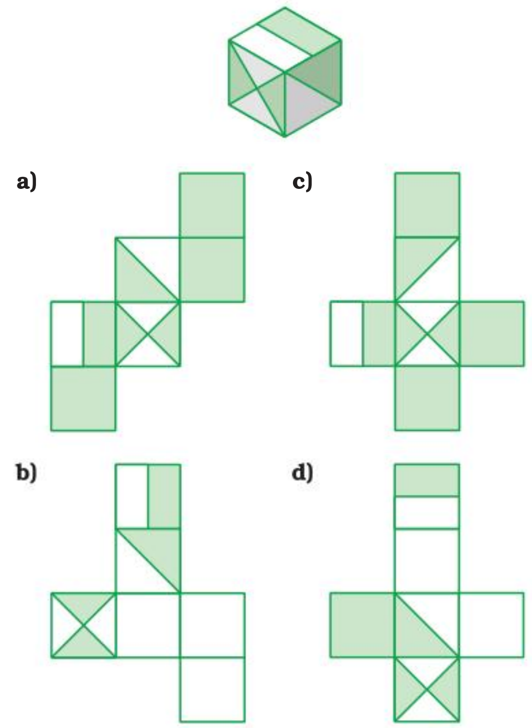
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

28. Registre a alternativa que corresponde à seguinte planificação: alternativa d



29. Registre a alternativa que corresponde ao cubo representado a seguir. alternativa b



3.4 Área da superfície de um prisma

Dado um prisma qualquer, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) – área de uma das faces que é base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais.
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com as áreas das duas bases.

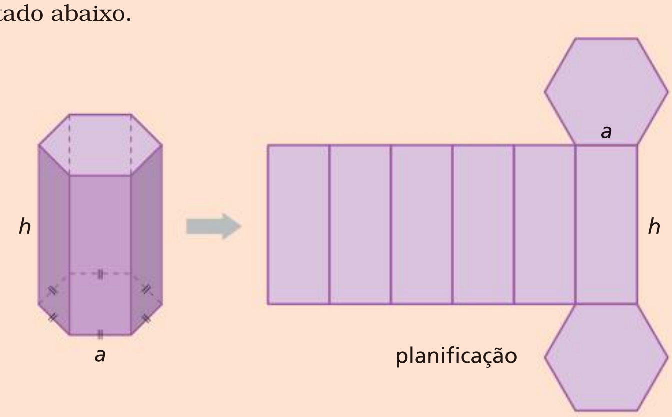
$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Observação

Embora um polígono seja uma linha e tenha apenas comprimento, para simplificar a comunicação, sempre que possível, vamos usar "área do polígono" em vez de "área da superfície poligonal".

Exercícios resolvidos

R7. Calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular representado abaixo.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

▸ ***Resolução***

Como vimos, um prisma regular é um prisma reto e, portanto, suas faces laterais são retangulares e congruentes, de dimensões a e h.
Assim, a área lateral é dada por:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot \underbrace{a \cdot h}_{\text{área da face retangular lateral}}$$

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado a.

Portanto, a área da base é dada por: $A_{\text{base}} = \dfrac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Logo, a área total da superfície desse prisma hexagonal é:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6ah + 3a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$A_{\text{total}} = 3a\left(2h + a\sqrt{3}\right)$ unidades de área

◆ **Observação**

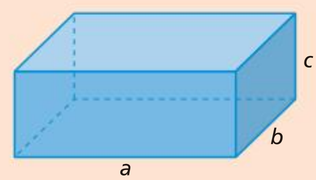
Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.
A área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por:

$$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área de um hexágono regular de lado ℓ é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

R8. Calcular a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c (medidas dadas em uma mesma unidade).

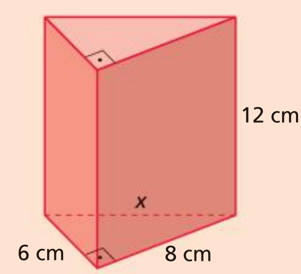


▸ ***Resolução***

Nesse caso, quaisquer pares de faces paralelas podem ser as bases do prisma. Assim, a área total é a soma das áreas de seis retângulos congruentes dois a dois:

$A_{\text{total}} = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow A_{\text{total}} = 2(ab + ac + bc)$ unidades de área

R9. Calcular a área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6 cm e 8 cm.



▸ ***Resolução***

Como a base do prisma é um triângulo retângulo, temos:

$$A_{\text{base}} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_{\text{base}} = 24$$

Para calcular a área lateral, vamos obter a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da base.

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

A área lateral é dada pela soma das áreas das faces retangulares que compõem a superfície lateral. Assim:

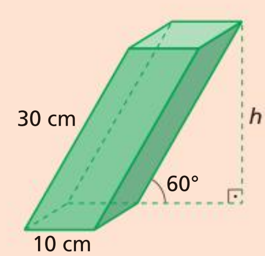
$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

Logo, a área total é dada por:

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 288 + 2 \cdot 24 = 336$

Portanto, a área total da superfície do prisma é 336 cm^2.

R10. Calcular a área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado ao lado, sabendo que as faces laterais são congruentes.



▸ ***Resolução***

O prisma tem base quadrada. Assim: $A_{\text{base}} = 10^2 \Rightarrow A_{\text{base}} = 100$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$$

Assim:

$$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \underbrace{\left(10 \cdot 15\sqrt{3}\right)}_{\text{área do paralelogramo}} \Rightarrow A_{\text{lateral}} = 600\sqrt{3}$$

Logo, a área total é dada por:

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}}$

$A_{\text{total}} = 600\sqrt{3} + 2 \cdot 100 = 200\left(1 + 3\sqrt{3}\right)$

Portanto, a área total da superfície do prisma é $200\left(1 + 3\sqrt{3}\right)$ cm^2.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

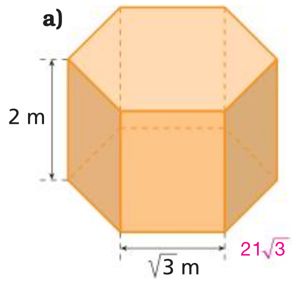
Registre as respostas em seu caderno

34. a) 6; 24; 54; 96 (unidades de área)
b) Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.

30. Uma indústria de embalagens produz caixas de papelão em forma de paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm, 10 cm e 15 cm. Calcule quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer a planificação de uma dessas caixas (despreze as abas). $1.300\ cm^2$

31. Calcule a área total da superfície dos sólidos.

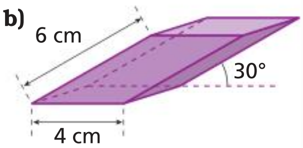
a)



prisma hexagonal regular

$21\sqrt{3}\ m^2$

b)



prisma oblíquo de base quadrada e faces laterais congruentes

$80\ cm^2$

32. Considere três cubos: cubo A com 12 cm de aresta, cubo B com 12 cm de diagonal e cubo C com diagonal da face quadrada medindo 12 cm.

Escreva qual deles tem a superfície de menor área. cubo B

33. Calcule a área total da superfície de um prisma triangular regular, de área lateral 300 cm^2, sabendo que a medida da aresta da base é igual à medida da aresta lateral. $50(6 + \sqrt{3})\ cm^2$

34. Quatro cubos têm arestas medindo 1, 2, 3 e 4 unidades, respectivamente.

a) Determine a área total de cada cubo.

b) O que acontece com a área total se o comprimento da aresta dobra? E se triplica?

c) Quantos cubos de aresta unitária cabem dentro dos cubos de arestas medindo 2, 3 e 4 unidades, respectivamente? 8, 27 e 64, respectivamente

3.5 Volume de um prisma

Como todo sólido, um prisma ocupa uma porção do espaço. Adotando uma unidade de volume, podemos medir a porção do espaço ocupada por um prisma.

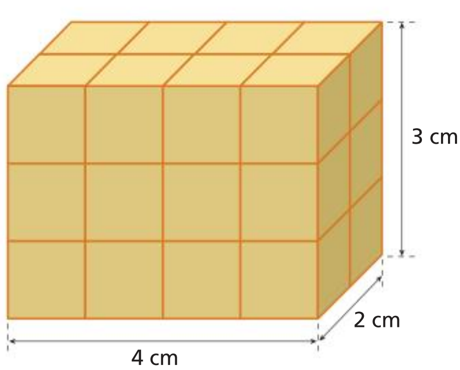
O **volume** de um prisma corresponde a um único número real *V* positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção do espaço ocupado por uma unidade de volume.

A unidade de volume que usualmente consideramos é o volume de um cubo unitário, isto é, de um cubo de aresta 1 u, sendo u certa unidade de comprimento. Assim, dizemos que o volume desse cubo unitário é 1 u^3.

Se a aresta do cubo unitário mede 1 m, seu volume é 1 m^3; se a aresta do cubo unitário mede 1 mm, o volume desse cubo é 1 mm^3; e assim por diante.

Exemplo

Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário de aresta 1 cm cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm.



Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por 8 cubos unitários na base e tem 3 camadas iguais à camada da base.

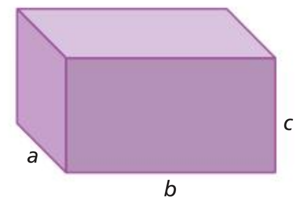
Logo, há 24 cubos unitários no total, e, portanto, o paralelepípedo é formado por 24 cubos ($4 \cdot 2 \cdot 3$) de 1 cm^3 de volume. Dizemos, então, que o volume do paralelepípedo dado é 24 cm^3.

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

No exemplo anterior, podemos verificar que um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números inteiros tem volume igual ao produto desses três números. Esse fato pode ser demonstrado, verificando-se que ele é válido para qualquer paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números reais.

Desse modo, temos:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$



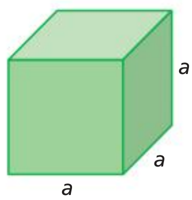
Note que o volume do paralelepípedo também pode ser expresso assim:

V = área da base $\times$ altura

Observação

Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto-retângulo com todas as arestas de mesma medida, seu volume é:

$$V_{\text{cubo}} = a^3$$



Exercício resolvido

R11. Deseja-se cimentar um quintal quadrado, com lados medindo 8 m, com 4 cm de espessura de massa de cimento. Calcular o volume necessário de massa para revestir essa área.

▶ ***Resolução***

A camada de cimento terá a forma de um paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada, com 8 m de aresta e 4 cm de altura.

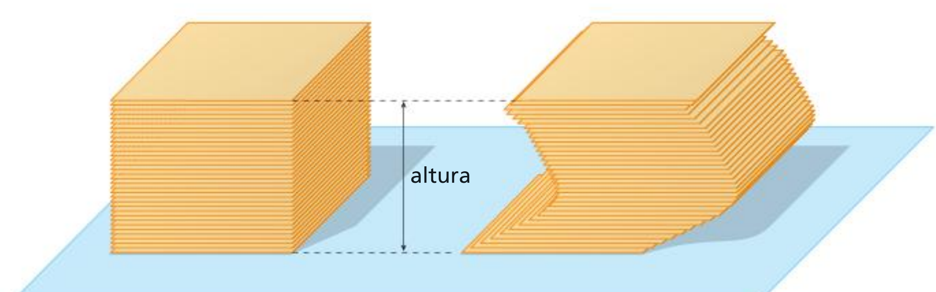
Como a espessura do revestimento é de 4 cm ou 0,04 m, temos que o volume necessário de massa é:

$V = 8 \cdot 8 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 64 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 2{,}56$

Logo, são necessários 2,56 m^3 de massa para fazer o revestimento.

Princípio de Cavalieri

Sobre uma mesa, formamos duas pilhas com a mesma quantidade de cartões retangulares idênticos. Vamos modificar a forma de uma das pilhas sem retirar nem pôr nenhum cartão. Veja a possível situação das pilhas formadas na ilustração abaixo.



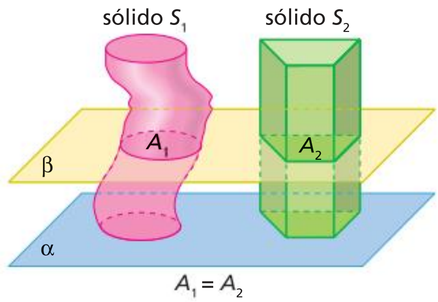
Observando as pilhas, é possível notar que:

- a altura das duas pilhas que formamos é a mesma, pois elas têm a mesma quantidade de cartões de mesma espessura;
- os cartões das duas pilhas que ficam à mesma distância da mesa têm a mesma área, pois eles são idênticos;
- a segunda pilha tem o mesmo volume que a primeira, já que é formada por cartões idênticos e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Essa situação ilustra o **princípio de Cavalieri**, ou **postulado de Cavalieri**, que afirma:

> Dois sólidos, S_1 e S_2, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço, terão o mesmo volume V se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma área (A).



◆ Observação

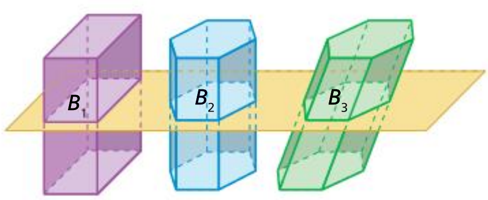
O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado, porém aqui vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração.

◆ Secção transversal de um prisma

Um plano intercepta um sólido segundo uma superfície chamada de **secção plana**. No caso em que a secção plana é paralela à base do prisma, ela é denominada **secção transversal**.

Exemplo

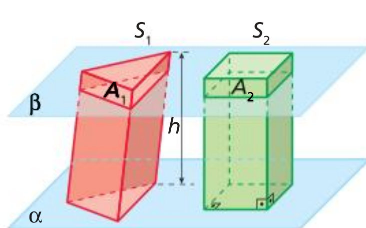
Observe uma secção transversal de cada prisma representado abaixo.



Qualquer secção transversal de um prisma é congruente à base desse prisma e, portanto, tem a mesma área que essa base.

◆ Volume de um prisma qualquer

Considere um prisma S_1 e um paralelepípedo reto-retângulo S_2 de mesma altura h e de bases equivalentes (de mesma área), apoiados em um plano α e situados em um mesmo semiespaço.



Como qualquer secção transversal de cada prisma possui a mesma área que a base desse prisma e as áreas das bases de S_1 e S_2 são iguais, temos que qualquer plano β paralelo a α que intercepte os dois prismas determina secções transversais de mesma área: $A_1 = A_2$

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois prismas têm volumes iguais, isto é, $V_1 = V_2$, em que V_1 é o volume do prisma S_1 e V_2 é o volume do prisma S_2.

Como S_2 é um paralelepípedo reto-retângulo, seu volume pode ser calculado por:

$$V_2 = \text{área da base de } S_2 \times \text{altura}$$

Como as áreas das bases de S_1 e de S_2 são iguais e $V_1 = V_2$, temos:

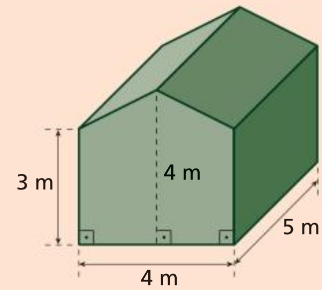
$$V_1 = \text{área da base de } S_1 \times \text{altura}$$

Assim, o volume de um prisma qualquer pode ser obtido por:

$$\boxed{V_{\text{prisma}} = \text{área da base} \times \text{altura}}$$

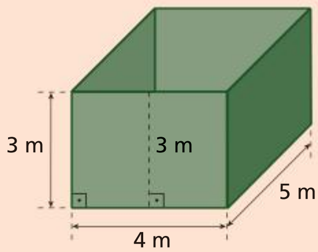
Exercícios resolvidos

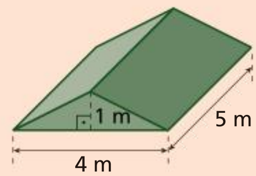
R12. Calcular o volume de ar contido em um galpão que tem a forma do prisma representado ao lado.



▸ ***Resolução***

Vamos decompor a figura do galpão em duas partes com formas de prisma.





Forma de paralelepípedo reto-retângulo

$V_1 = A_{base} \cdot \text{altura}$

$V_1 = 4 \cdot 5 \cdot 3$

$V_1 = 60$

Forma de prisma reto de base triangular

$V_2 = A_{base} \cdot \text{altura}$

$V_2 = \dfrac{4 \cdot 1}{2} \cdot 5$

$V_2 = 10$

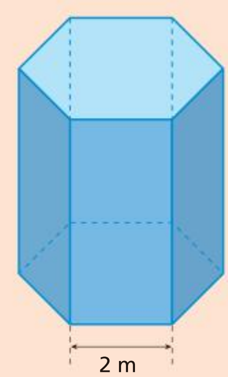
Logo, o volume total de ar contido no galpão é dado por $V_1 + V_2$, ou seja, 70 m^3.

◆ Reflita

- Que tipo de prisma corresponde ao formato do galpão?
- Explique como você determinaria o volume de ar contido no galpão calculando o volume desse prisma sem decompô-lo.

Resposta do boxe **Reflita**:
- prisma pentagonal
- Resposta possível: Determinar a área da base pentagonal (que é dada por um triângulo isósceles e um retângulo) e, em seguida, calcular o volume pela fórmula:
  $A_{base} = 2 + 12 = 14 \Rightarrow A_{base} = 14 \text{ m}^2$
  $V_{ar} = A_{base} \times \text{altura} = 70 \text{ m}^3$

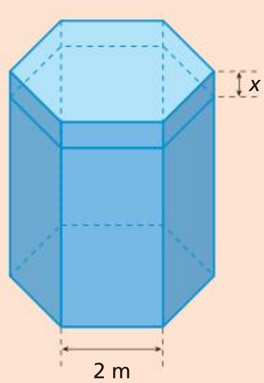
R13. Um reservatório cheio de água tem a forma de um prisma hexagonal regular como o representado na figura ao lado. Se forem consumidos $3.000\sqrt{3}$ litros, quanto baixará, em metro, o nível de água desse reservatório?



▸ ***Resolução***

Vamos representar por x, em metro, quanto baixará o nível da água no reservatório.

Os $3.000\sqrt{3}$ litros consumidos ocupam o volume do prisma hexagonal regular de mesma base do prisma da figura e altura de x metro.



A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado 2 m, cuja área é dada por:

$$A_{base} = \frac{6 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = \frac{6 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = 6\sqrt{3}$$

O volume da parte do prisma correspondente aos $3.000\sqrt{3}$ litros é:

$V = A_{base} \cdot x = 6\sqrt{3} \cdot x$

Como $3.000\sqrt{3}$ litros $= 3\sqrt{3} \text{ m}^3$, temos:

$6\sqrt{3} \cdot x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 0{,}5$

Portanto, o nível de água baixará 0,5 m.

◆ Observação

Lembre que 1 litro corresponde a 1 dm³ e 1 dm $= \dfrac{1}{10}$ m. Então:

$1 \text{ dm}^3 = \dfrac{1}{1.000} \text{ m}^3$

Portanto, 1 litro corresponde a $\dfrac{1}{1.000} \text{ m}^3$.

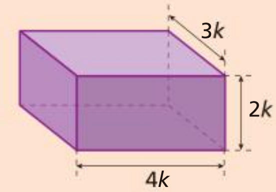
R14. Uma caixa de isopor tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas de medidas proporcionais a 2, 3 e 4 e com volume de 192 cm^3. Ela será revestida por uma película protetora de plástico. Quantos centímetros quadrados de plástico serão necessários para revestir essa caixa?

▸ ***Resolução***

Vamos considerar que as medidas da caixa, dadas em centímetro, sejam a, b e c.

Se elas são proporcionais a 2, 3 e 4, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases}$$



Se o volume da caixa é 192 cm^3, então:

$2k \cdot 3k \cdot 4k = 192 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Logo, $a = 4$ cm, $b = 6$ cm e $c = 8$ cm.

Como a área total da caixa é dada por $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$, temos:

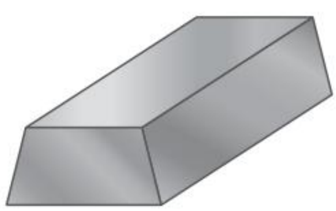
$A_{total} = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 208$

Portanto, serão necessários 208 centímetros quadrados de plástico para revestir a caixa.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

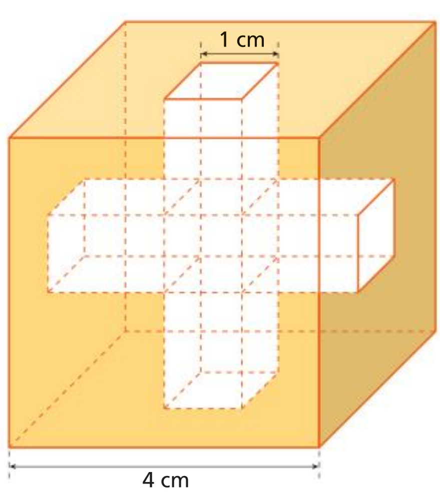
35. Uma barra de prata é fundida na forma de um prisma reto de altura 32 cm e base trapezoidal. A altura do trapézio mede 5 cm, e as bases medem 7,5 cm e 10 cm. Se a prata tem 10,5 g por cm^3, qual será a massa da barra? 14.700 g



36. Sabe-se que a superfície de um cubo tem 216 m^2 de área total. Calcule o volume desse cubo. 216 m^3

37. Quando uma amostra de metal é mergulhada em um tanque de água com formato retangular, cuja base mede 15 cm por 20 cm, o nível de água se eleva 0,35 cm. Calcule o volume dessa peça. 105 cm^3

38. De um cubo de aresta 4 cm foram retirados prismas retos, de bases quadradas de 1 cm de lado, conforme mostra a figura. Determine o volume do sólido restante. 57 cm^3



39. A área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo é igual à área total da superfície de um cubo. Se as medidas de três arestas que concorrem em um mesmo vértice do paralelepípedo são 3, 5 e 7, respectivamente, quanto mede a diagonal do cubo? $\sqrt{71}$ unidades de comprimento

40. Calcule a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo, cujo volume é 240 cm^3, sabendo que as áreas de duas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2. 236 cm^2

41. Calcule o volume de um prisma regular hexagonal de altura 8 cm, sabendo que a área total de sua superfície é o triplo da área lateral. $4.096\sqrt{3}$ cm^3

42. Determine a capacidade, em litro, de um reservatório cúbico, sabendo que a maior vara de pesca que nele cabe inteiramente, sem envergar, tem 2 m de comprimento. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

43. As arestas de um paralelepípedo estão na razão 2 : 3 : 4, e sua diagonal mede $4\sqrt{29}$ cm. Qual é a área total e o volume desse paralelepípedo? 832 cm^2 e 1.536 cm^3

44. Um cubo de aresta 4 cm é formado de cubinhos independentes com aresta de 1 cm. Deseja-se construir com esses cubinhos um paralelepípedo.

a) Que dimensões tem o paralelepípedo de menor área que se pode formar? 4 cm, 4 cm e 4 cm

b) E o de maior área? 1 cm, 1 cm e 64 cm

45. Considerando um cubo de aresta 2 cm, responda às questões a seguir.

a) Qual é o volume desse cubo? 8 cm^3

b) Qual é a área da superfície desse cubo? 24 cm^2

c) O que ocorre com o volume se a medida da aresta é dobrada? Fica multiplicado por 8.

d) E com a área da superfície? Fica multiplicada por 4.

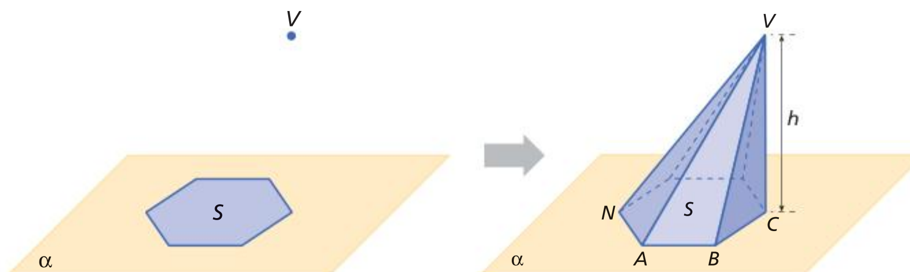
JOSE IGNACIO SOTO/SHUTTERSTOCK

4 Pirâmides

Além dos prismas, as **pirâmides** constituem outro importante tipo de poliedro. Exercendo fascínio sobre o ser humano desde a Antiguidade, a forma piramidal tem ressurgido na arquitetura moderna em edifícios de grande imponência. As pirâmides do Egito, a pirâmide de vidro do Museu do Louvre ou mesmo as pirâmides decorativas, como a apresentada na imagem ao lado, são belos exemplos desse sólido.

4.1 Definição de pirâmide

Consideremos um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α.



Chama-se **pirâmide** o poliedro convexo formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto V e um ponto da região S.

Reflita

A relação de Euler é válida para as pirâmides? Por quê?

Sim, pois uma pirâmide é um poliedro convexo.

Elementos de uma pirâmide

Considerando a pirâmide desenhada acima, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base** – a região poligonal S.
- **Vértice da pirâmide** – o ponto V.
- **Faces laterais** – as superfícies triangulares AVB, BVC, ..., NVA.
- **Arestas da base** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{NA}$.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ..., $\overline{VN}$.
- **Altura da pirâmide** – a distância h entre o vértice V e o plano α.

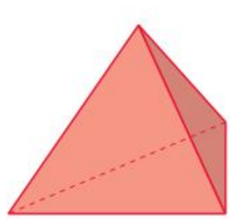
Observação

A denominação **vértice da pirâmide** é dada ao único vértice que não pertence à base.

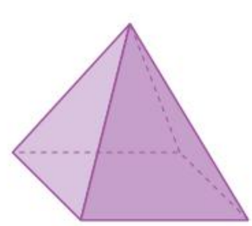
Classificação das pirâmides

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o número de arestas da base. Se a base tiver 3 arestas, a pirâmide é **triangular**; se tiver 4 arestas, a pirâmide é **quadrangular**; se tiver 5 arestas, a pirâmide é **pentagonal**; e assim por diante.

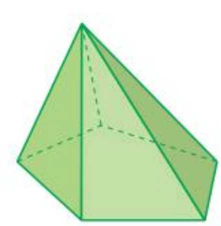
Exemplos



pirâmide triangular (tetraedro)



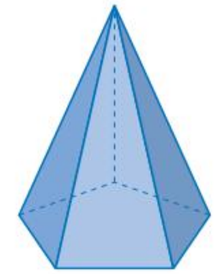
pirâmide quadrangular



pirâmide pentagonal

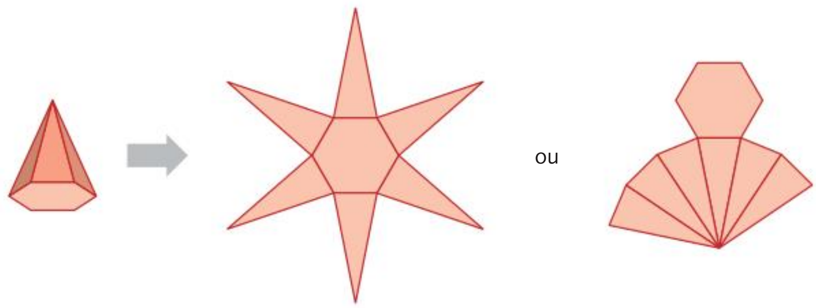
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.2 Planificação da superfície de uma pirâmide



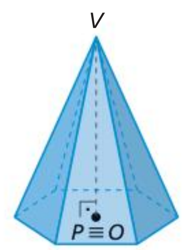
Até aqui, temos representado pirâmides em perspectiva, como esta ao lado. Como os demais poliedros, uma pirâmide também pode ser representada por planificações de sua superfície: é possível, em um plano, justapor as faces de uma pirâmide de modos diferentes, desde que cada uma delas tenha pelo menos uma aresta em comum com outra.

Como exemplo, observe a seguir duas planificações de uma pirâmide hexagonal.



4.3 Pirâmides regulares

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e cuja projeção ortogonal P do vértice sobre o plano da base coincide com o centro O do polígono da base é chamada de **pirâmide regular**.



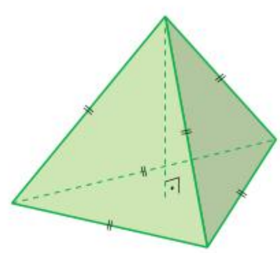
Observação

O centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita ao polígono ou da circunferência inscrita nele.

As faces laterais de uma pirâmide regular são determinadas por triângulos isósceles congruentes.

Assim, uma pirâmide triangular regular tem quatro faces: uma é a base (um triângulo equilátero) e as outras três são as faces laterais (triângulos isósceles congruentes).

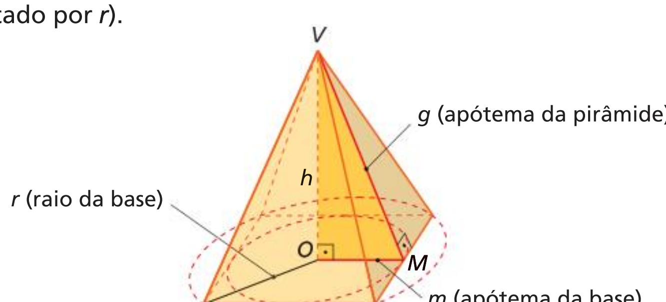
Um importante exemplo desse tipo de pirâmide regular é o **tetraedro regular**, que tem as quatro faces constituídas por triângulos equiláteros congruentes. No tetraedro regular, qualquer uma das faces pode ser considerada base da pirâmide.



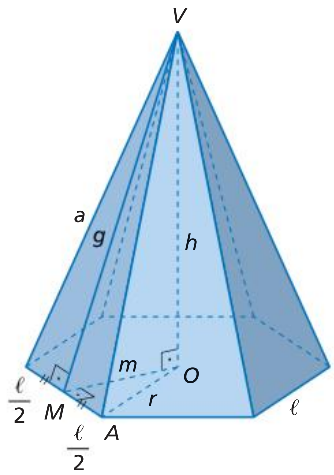
Elementos das pirâmides regulares

Em uma pirâmide regular, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Apótema da pirâmide** – altura relativa à base de qualquer face lateral (seu comprimento será identificado por g).
- **Apótema da base** – segmento que determina o raio da circunferência inscrita no polígono da base (seu comprimento será identificado por m).
- **Raio da base** – raio da circunferência circunscrita ao polígono da base (será identificado por r).



Algumas relações métricas



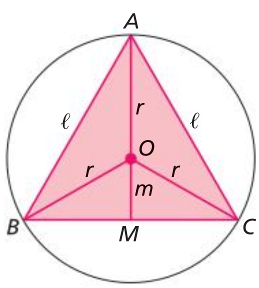
Podemos destacar algumas relações métricas nas pirâmides regulares. Observe a pirâmide regular de altura h, aresta da base medindo ℓ e arestas laterais medindo a representada ao lado.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo:

- VOA, temos $a^2 = h^2 + r^2$.
- MOA, temos $r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$.
- VMO, temos $g^2 = h^2 + m^2$.
- VMA, temos $a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$.

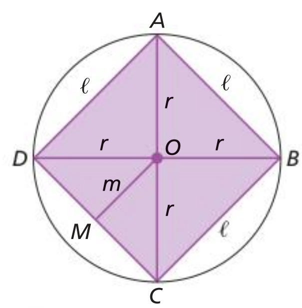
Essas relações métricas são válidas para qualquer pirâmide regular, independentemente do polígono que forma a base. Além disso, há a relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares.

- A base é um triângulo equilátero.



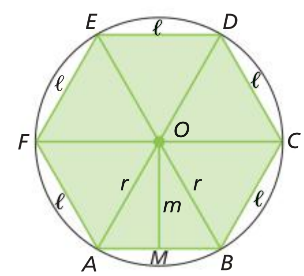
$$m = \frac{r}{2} \text{ ou } m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

- A base é um quadrado.



$$m = \frac{r\sqrt{2}}{2} \text{ ou } m = \frac{\ell}{2}$$

- A base é um hexágono regular.



$$m = \frac{r\sqrt{3}}{2} \text{ ou } m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Considere as três figuras acima.

- Base: triângulo equilátero
  Como o triângulo ABC é equilátero, O é o baricentro.
  Logo, $m = \frac{1}{3}AM$ e $BM = \frac{\ell}{2}$.
  Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMB$, temos:
  $(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2$
  $(AM)^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
  $(AM)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
  $m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$
- Base: quadrado
  $\triangle OMC \sim \triangle ADC$
  $\frac{OM}{AD} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow m = \frac{\ell}{2}$
- Base: hexágono regular
  O triângulo OAB é equilátero e $\overline{OM}$ é uma altura.
  Então, $AO = r = \ell$ e $AM = \frac{\ell}{2}$.
  Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMO$, temos:
  $(OM)^2 = (OA)^2 - (AM)^2$
  $m^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
  $m^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

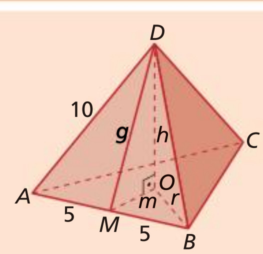
Comentário: Aqui, há uma retomada de relações métricas estudadas no capítulo 4, cuja finalidade específica é auxiliar os alunos nos cálculos de áreas e de volume de pirâmides.

Reflita

Demonstre a relação entre as medidas da aresta da base e do apótema da base de cada uma das pirâmides regulares referentes às figuras acima.

Exercícios resolvidos

R15. Um tetraedro regular tem arestas medindo 10 cm. Calcular a medida do apótema da pirâmide (g), a medida do apótema da base (m) e a altura da pirâmide (h).



Resolução

No $\triangle DMA$, temos: $10^2 = g^2 + 5^2 \Rightarrow g^2 = 75 \Rightarrow g = 5\sqrt{3}$

Como a base é triangular, obtemos:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

No $\triangle DMO$, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 75 = h^2 + \frac{25}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

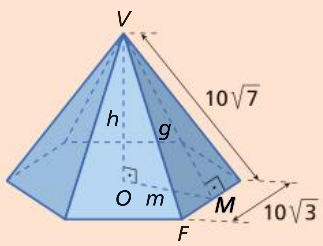
Portanto, $g = 5\sqrt{3}$ cm, $m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm e $h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R16. Uma pirâmide regular hexagonal tem arestas da base medindo $10\sqrt{3}$ cm e arestas laterais medindo $10\sqrt{7}$ cm. Calcular a medida do apótema da base (m), a medida do apótema da pirâmide (g) e a altura da pirâmide (h).

▶ ***Resolução***

Observe a figura abaixo.



Na base hexagonal, o apótema mede:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 15$$

No triângulo VMF, temos:

$$g^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = \left(10\sqrt{7}\right)^2 \Rightarrow g^2 + 75 = 700 \Rightarrow g^2 = 625 \Rightarrow g = 25$$

No triângulo VMO, temos:

$$m^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 15^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$$

Portanto, $m = 15$ cm, $g = 25$ cm e $h = 20$ cm.

47. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices

48. Apenas as planificações (I) e (II) são de superfícies de pirâmides.

Exercícios propostos

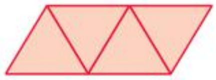
Registre as respostas em seu caderno

46. Determine o número de faces de uma pirâmide cuja base tem 8 vértices. 9 faces

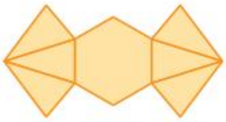
47. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de uma pirâmide que tem n faces laterais, sendo n um número natural maior que 2.

48. Registre quais das planificações a seguir são de superfícies de pirâmides.

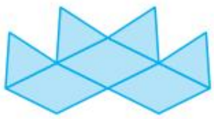
(I)



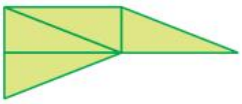
(II)



(III)



(IV)



49. O apótema de uma pirâmide regular tem 12 cm e a aresta lateral tem 13 cm. Determine a medida da aresta da base. 10 cm

50. Uma pirâmide regular tem 4 dm de altura. A base é um hexágono que tem 6 dm de lado. Determine a medida do apótema da pirâmide. $\sqrt{43}$ dm

51. Qual é a medida da aresta lateral de uma pirâmide regular de base pentagonal se o apótema da pirâmide mede 12 m e o lado do pentágono mede 10 m? 13 m

52. Calcule a medida do raio da base, a altura e a medida do apótema de uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede 8 cm e a aresta lateral mede $\sqrt{41}$ cm. $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm

4.4 Área da superfície de uma pirâmide

Dada uma pirâmide qualquer, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) – área da superfície poligonal que constitui a base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais (superfícies triangulares).
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com a área da base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

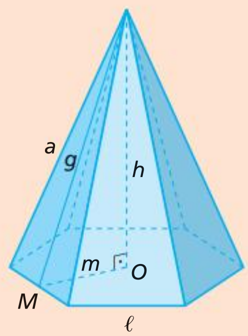
R17. Determinar a área total da superfície de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que a aresta da base mede ℓ e o apótema da pirâmide mede g.

▸ ***Resolução***

A base da pirâmide é uma superfície hexagonal regular de lado ℓ. Portanto, a área da base é dada por:

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{base}} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$



Como a pirâmide é regular, as faces laterais são formadas por triângulos isósceles e congruentes, que, nesse caso, têm base ℓ e altura g.

Assim, a área lateral é dada por:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo isósceles}}$$

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot \left(\frac{\ell g}{2}\right)$$

$$A_{\text{lateral}} = 3\ell g$$

Logo, a área total é dada por:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$$

$$A_{\text{total}} = 3\ell g + \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{total}} = 3\ell \cdot \left(g + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

53. Calcule a área total da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 82 mm e a aresta da base mede 36 mm. $108(40 + 3\sqrt{3})$ mm²

54. Calcule a área da base, a área lateral e a área total da superfície de uma pirâmide quadrangular regular que tem 3 cm de altura e cuja aresta da base mede 8 cm. 64 cm², 80 cm² e 144 cm²

55. Sabendo que a área total da superfície de um tetraedro regular é $16\sqrt{3}$ cm², calcule a medida da aresta desse tetraedro. 4 cm

56. A base de uma pirâmide quadrangular regular está inscrita em uma circunferência de $6\sqrt{2}$ cm de raio. Sabendo que a pirâmide tem 8 cm de altura, calcule a área total da sua superfície. 384 cm²

4.5 Volume de uma pirâmide

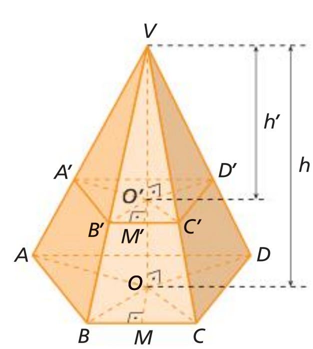
Antes de estudar o volume de uma pirâmide qualquer, vamos conhecer duas propriedades das pirâmides e demonstrá-las.

Propriedade 1: A razão entre a área S' de uma secção transversal de uma pirâmide, feita a uma altura h' em relação ao vértice, e a área S da base dessa pirâmide de altura h é $\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Demonstração

Vamos considerar uma pirâmide de altura $VO = h$ cuja base tem área S. Seja uma secção transversal dessa pirâmide, de área S', a uma distância $VO' = h'$ do vértice.

Vamos decompor a base da pirâmide e a secção transversal nos triângulos OAB, OBC etc. e $O'A'B'$, $O'B'C'$ etc., respectivamente.



$$\overline{O'C'} \,/\!/\, \overline{OC} \Rightarrow \triangle VO'C' \sim \triangle VOC \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

$$\overline{B'C'} \,/\!/\, \overline{BC} \Rightarrow \triangle VB'C' \sim \triangle VBC \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

Com o mesmo raciocínio, chegamos a: $\frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h}$

Área do $\triangle OBC$: $S_{OBC} = \frac{(BC) \cdot (OM)}{2}$

Área do $\triangle O'B'C'$: $S_{O'B'C'} = \dfrac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}$

$$\frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \frac{\dfrac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}}{\dfrac{(BC) \cdot (OM)}{2}} = \frac{B'C'}{BC} \cdot \frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Analogamente, mostra-se que: $\dfrac{S_{O'C'D'}}{S_{OCD}} = \dfrac{S_{O'D'A'}}{S_{ODA}} = \dfrac{S_{O'A'B'}}{S_{OAB}} = \left(\dfrac{h'}{h}\right)^2$

Temos: $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$ e $S' = S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}$

Assim: $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}}{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}} = \dfrac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} \Rightarrow \dfrac{S'}{S} = \left(\dfrac{h'}{h}\right)^2$

Observação

Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para seu consequente, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

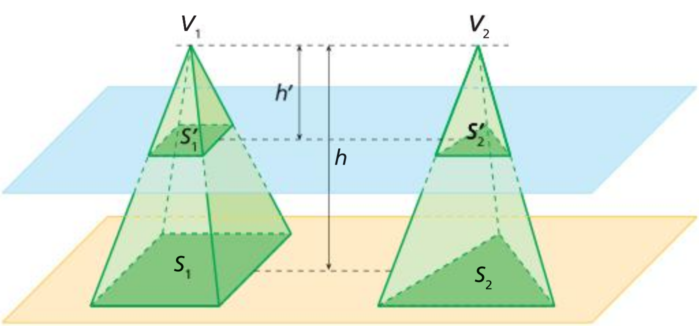
Propriedade 2: Se duas pirâmides têm mesma altura e mesma área de base, então elas têm mesmo volume.

Demonstração

Vamos considerar as pirâmides de vértices V_1 e V_2.

Chamaremos de:

- S_1 e S_2 as áreas das bases dessas pirâmides, tais que $S_1 = S_2$;
- S'_1 e S'_2 as áreas das secções transversais;
- h a altura das duas pirâmides e h' a distância das secções transversais aos vértices V_1 e V_2, respectivamente.



Pela propriedade 1, obtemos:

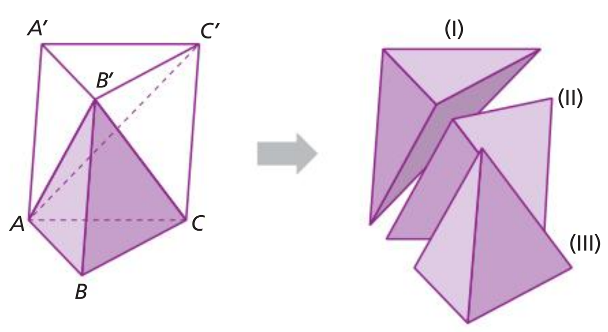
$$\frac{S'_1}{S_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S'_2}{S_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$S'_1 = S_1 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } S'_2 = S_2 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Como $S_1 = S_2$, temos $S'_1 = S'_2$ e, portanto, pelo princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume.

Volume de uma pirâmide de base triangular

Considere um prisma triangular de volume V_{prisma}. Vamos decompô-lo em três pirâmides triangulares.



A pirâmide I tem por base o triângulo $AA'C'$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

A pirâmide II tem por base o triângulo $AC'C$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

$AA'C'C$ é um paralelogramo; logo, os triângulos $AA'C'$ e ACC' têm mesma área. Assim, as pirâmides I e II têm bases de mesma área e, como têm também mesma altura, concluímos que elas têm volumes iguais.

Entretanto, a pirâmide I é também aquela que tem por base o triângulo $A'B'C'$ e por altura a distância de A ao plano que contém a base $A'B'C'$ do prisma (altura do prisma).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A pirâmide III tem por base o triângulo *ABC* e por altura a distância de *B'* ao plano que contém a base *ABC* do prisma (altura do prisma).

Os triângulos *A'B'C'* e *ABC* têm mesma área (são bases do prisma). Assim, as pirâmides I e III têm bases de mesma área e, como também têm mesma altura (altura do prisma), concluímos que elas têm volumes iguais.

Se V_1, V_2 e V_3 são, respectivamente, os volumes dessas três pirâmides triangulares, temos: $V_1 = V_2 = V_3 = \dfrac{V_{\text{prisma}}}{3}$

Como V_{prisma} = área da base × altura, vem:

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

Volume de uma pirâmide qualquer

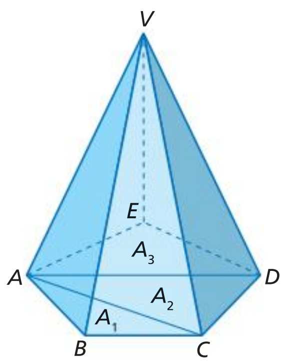
Para uma pirâmide qualquer, podemos dividir o polígono de sua base em triângulos justapostos por meio de diagonais. Assim, a pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares de mesma altura.

Se a base foi dividida em *n* triângulos de áreas A_1, A_2, ..., A_n, então a área da base é dada por: $A_{\text{base}} = A_1 + A_2 + ... + A_n$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}_{A_{\text{base}}} \cdot h$$

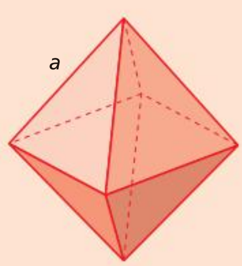


Pirâmide pentagonal dividida em três pirâmides triangulares: *VABC*, *VACD* e *VADE*.

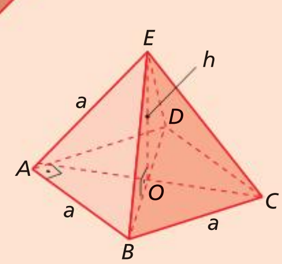
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura}$$

Exercícios resolvidos

R18. Calcular o volume do octaedro regular de aresta *a*.



▸ ***Resolução***



Observe que o sólido é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares cuja área da base é $A_{\text{base}} = a^2$.

Como *OB* é igual à metade da medida da diagonal do quadrado da base, temos $OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

No triângulo retângulo *BOE*, temos:

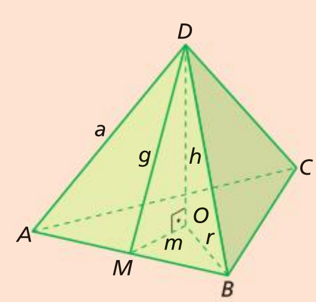
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo, o volume do octaedro é:

$$V_{\text{octaedro}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

R19. Calcular o volume do tetraedro regular de aresta *a*.



▸ Resolução

A área da base é a área de uma superfície triangular equilátera de lado a. Logo:

$$A_{\text{base}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A altura h é tal que $h^2 = g^2 - m^2$.

Pelo $\triangle ADM$: $g^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow g^2 = \frac{3a^2}{4}$

Como o $\triangle ABC$ é equilátero, temos:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m^2 = \frac{3a^2}{36} \Rightarrow m^2 = \frac{a^2}{12}$$

Assim: $h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

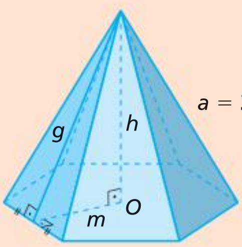
Portanto:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

R20. Determinar o volume de uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de aresta da base e 20 cm de aresta lateral.



▸ Resolução

Inicialmente, vamos calcular a medida g do apótema da pirâmide.

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow 20^2 = g^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = g^2 + 36 \Rightarrow g = \sqrt{364} \Rightarrow g = 2\sqrt{91}$$

Agora, vamos determinar a medida m do apótema da base. Como a base é um hexágono regular, temos:

$$m = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 6\sqrt{3}$$

Cálculo da altura h da pirâmide:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{91}\right)^2 = h^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 256 \Rightarrow h = 16$$

Cálculo da área da base:

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$$

Cálculo do volume da pirâmide:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 16$$

$$V_{\text{pirâmide}} = 1.152\sqrt{3}$$

Portanto, o volume da pirâmide é $1.152\sqrt{3}$ cm³.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

57. Uma pirâmide regular de base quadrada e 4 cm de altura possui aresta da base com 6 cm de comprimento. Calcule o volume dessa pirâmide.
48 cm³

58. Determine o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 cm. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³

59. Calcule a área total da superfície e o volume de um octaedro regular de aresta 3 cm.
área = $18\sqrt{3}$ cm²; volume = $9\sqrt{2}$ cm³

60. Dê o volume de uma pirâmide triangular regular de 8 cm de altura e aresta da base medindo 6 cm.
$24\sqrt{3}$ cm³

61. Uma pirâmide regular hexagonal tem aresta lateral de medida $4\sqrt{2}$ dm. Se o perímetro da base tem 24 dm, qual é seu volume? $32\sqrt{3}$ dm³

62. Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado de medida $6\sqrt{2}$ cm e as arestas laterais medem 10 cm. Determine o volume dessa pirâmide.
192 cm³

63. A aresta lateral de uma pirâmide regular quadrangular mede 5 cm e o perímetro da base tem $12\sqrt{2}$ cm. Determine o volume dessa pirâmide.
24 cm³

64. O apótema de uma pirâmide regular quadrangular mede $g = 9$ cm. Sabendo que a aresta da base mede 4 cm, calcule:

a) a área da base. 16 cm²

b) a área lateral. 72 cm²

c) a área total. 88 cm²

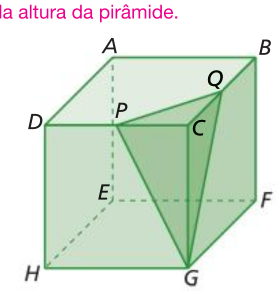
d) a altura. $\sqrt{77}$ cm

e) o volume. $\frac{16\sqrt{77}}{3}$ cm³

65. A base de um prisma é um quadrado de lado de medida 2 m, e a base de uma pirâmide é um quadrado de lado de medida 1 m. Se o prisma e a pirâmide têm mesmo volume, qual é a razão entre suas alturas?
1 para 12

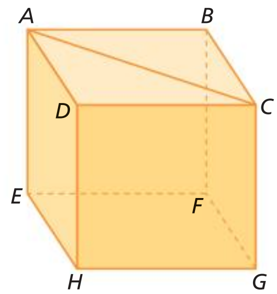
66. Um prisma e uma pirâmide têm bases com mesma área, e o volume do prisma é o sêxtuplo do volume da pirâmide. Qual é a relação entre suas alturas?
A altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. Sabendo que P e Q são os pontos médios das arestas $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$, respectivamente, de medida 10 cm, do cubo $ABCDEFGH$, determine o volume da pirâmide $PQCG$ da figura. $\frac{125}{3}$ cm³

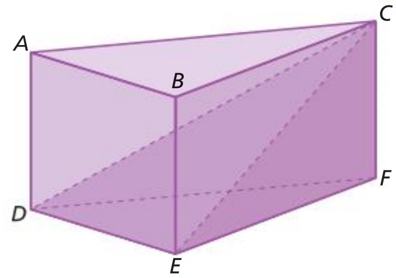


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

68. No paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo, tem-se $AC = \sqrt{13}$ cm, $AD = 2$ cm e $CG = 3$ cm. Determine o volume da pirâmide $ACDG$. 3 cm³



69. A figura representa um prisma de base triangular decomposto em duas pirâmides. Determine a razão entre os volumes de $ABCDE$ e de $DEFC$. 2 para 1

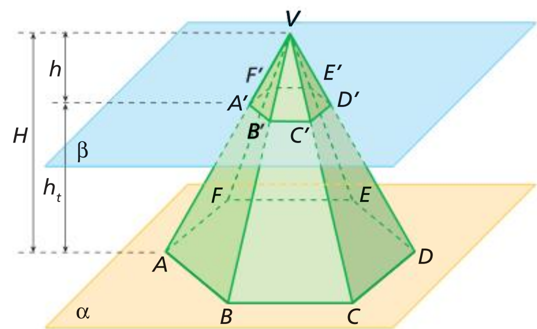


4.6 Tronco de pirâmide de bases paralelas

Pirâmide de Kukulcán (987 d.C.) da cidade maia de Chichén Itzá, México, 2015.

Alguns sólidos, embora chamados de pirâmides, são, na realidade, **troncos de pirâmide**, pois lhes falta a parte superior para ser uma pirâmide. A foto ao lado é de um monumento que lembra um tronco de pirâmide.

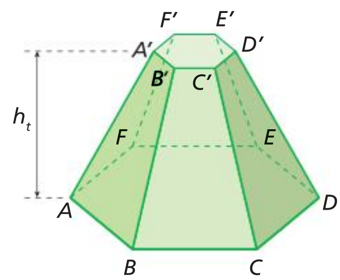
Considere uma pirâmide de vértice V, altura H e base contida em um plano α.



Seccionando-a com um plano β, paralelo a α, separamos essa figura em dois sólidos:

- o que contém o vértice V, que é uma nova pirâmide de altura h e base contida no plano β;
- o que contém a base da pirâmide maior, que é um **tronco de pirâmide de bases paralelas**.

◆ Elementos de um tronco de pirâmide



◆ Observação

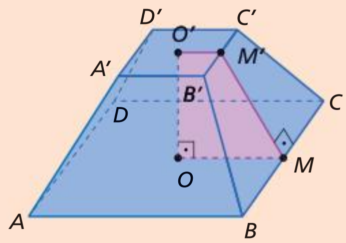
Para calcular o volume de um tronco de pirâmide, basta subtrair, do volume da pirâmide original, o volume da pirâmide de mesmo vértice, altura h e base congruente à base menor do tronco.

Em um tronco de pirâmide, como o representado na figura acima, temos os seguintes elementos:

- **Base maior** – a superfície poligonal $ABCDEF$.
- **Base menor** – a superfície poligonal $A'B'C'D'E'F'$.
- **Faces laterais** – as superfícies trapezoidais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Altura do tronco (h_t)** – a distância entre a base maior e a base menor ($h_t = H - h$).

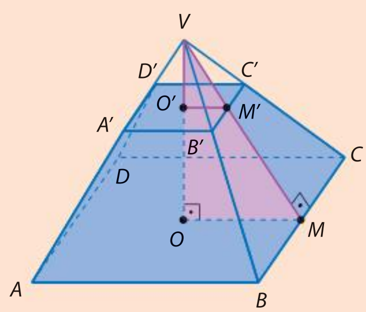
Exercício resolvido

R21. Um tronco de pirâmide regular tem a aresta lateral medindo $\sqrt{34}$ dm e bases quadradas cujos lados medem 4 dm e 10 dm. Calcular o volume do tronco.



▸ ***Resolução***

Inicialmente, vamos imaginar a pirâmide *ABCDV* que deu origem a esse tronco de pirâmide pela secção com o plano que contém a base menor do tronco.



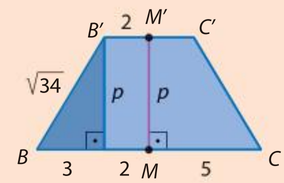
Para calcular o volume do tronco, é necessário obter o volume da pirâmide *ABCDV*, de altura *H*, e o volume da pirâmide *A′B′C′D′V*, de altura *h*.

Vamos calcular a medida do segmento $\overline{M'M}$, altura da face lateral do tronco.

Pela figura ao lado, temos:

$p^2 + 3^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2$

$p = 5$

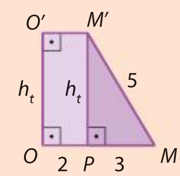


Agora, vamos calcular a altura h_t do tronco; para isso, consideremos o trapézio $OO'M'M$, destacado abaixo.

Pela figura, temos:

$h_t^2 + 3^2 = 5^2$

$h_t = 4$



Observando o triângulo *VMO*, podemos destacar os triângulos *M′MP* e *VM′O′*. Note que esses triângulos são semelhantes; logo:

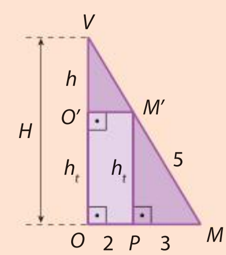
$\dfrac{h}{h_t} = \dfrac{O'M'}{PM}$

$\dfrac{h}{4} = \dfrac{2}{3}$

$h = \dfrac{8}{3}$

Assim:

$H = 4 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{20}{3}$



Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

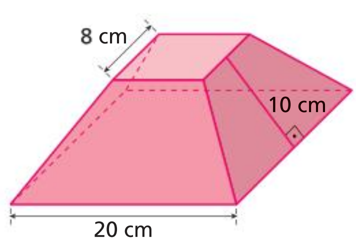
$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \frac{20}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \frac{8}{3} = 208$$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide é 208 dm^3.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

70. Observe as medidas do tronco de pirâmide regular e, em seguida, calcule a altura do tronco. 8 cm



71. Um tronco de pirâmide regular tem como bases dois quadrados de lados 6 cm e 16 cm. Sabendo que a altura de uma face lateral do tronco mede 13 cm, calcule a altura do tronco e seu volume.
altura = 12 cm; volume = 1.552 cm^3

72. Um tronco de pirâmide regular tem por bases dois hexágonos de lados 4 m e 6 m. Sabendo que o volume é $342\sqrt{3}$ m^3, calcule a altura do tronco. 9 m

73. Determine o volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal de aresta lateral com 5 m de comprimento e áreas das bases de $54\sqrt{3}$ m^2 e $6\sqrt{3}$ m^2. $78\sqrt{3}$ m^3

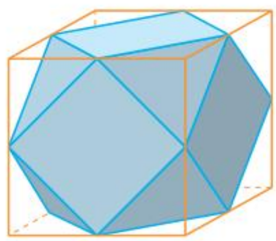
74. Uma pirâmide tem 12 cm de altura e base com área de 81 cm^2. Seccionando-se a pirâmide por um plano paralelo ao plano da base, exatamente à distância de 8 cm da base, obtemos um tronco de pirâmide. Calcule o volume desse tronco. 312 cm^3

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. (Unifesp) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente: alternativa b

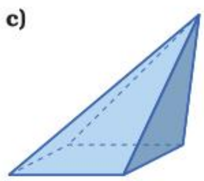
a) 8 e 8
b) 8 e 6
c) 6 e 8
d) 8 e 4
e) 6 e 6

2. Classifique os poliedros abaixo em convexo ou não convexo.

a)

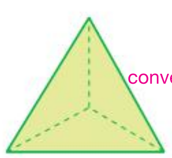
não convexo

c)



convexo

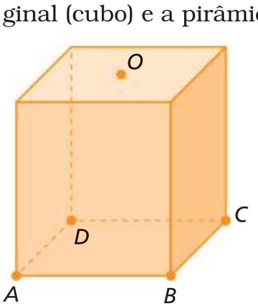
b)

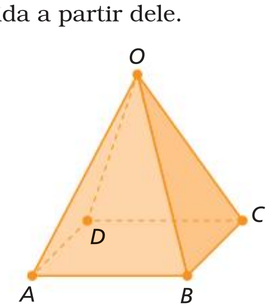


convexo

3. Um poliedro convexo tem 8 faces triangulares e 6 faces octogonais. Quantos vértices tem esse poliedro? 24 vértices

4. (Enem) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.





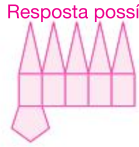
Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são: alternativa e

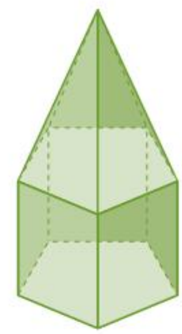
a) todos iguais.
b) todos diferentes.
c) três iguais e um diferente.
d) apenas dois iguais.
e) iguais dois a dois.

5. Represente uma possível planificação do sólido abaixo.

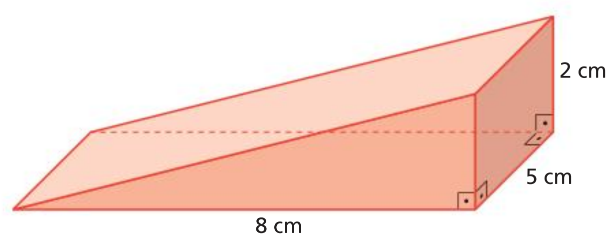
Resposta possível:



ADILSON SECCO

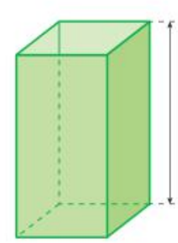


6. Uma cunha utilizada para prender uma porta tem o formato de um prisma, conforme mostra a figura.



Calcule o volume de madeira necessário para fazer essa cunha. 40 cm^3

7. (Mackenzie-SP) A base do cesto reto da figura é um quadrado de lado 25 cm.



Se a parte lateral externa e o fundo externo do cesto devem ser forrados com um tecido que é vendido com 50 cm de largura, o menor comprimento de tecido necessário para a forração é: alternativa e

a) 1,115 m
b) 1,105 m
c) 1,350 m
d) 1,250 m
e) 1,125 m

8. Determine a área total da superfície de um paralelepípedo reto com 6 cm de altura cuja base é um losango de diagonais medindo 12 cm e 14 cm. $24(7+\sqrt{85})$ cm^2

9. (PUC-RJ) Um cubo tem 96 m^2 de área total. Em quantos metros deve ser aumentada sua aresta para que seu volume se torne igual a 125 m^3? 1 m

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. Calcule o volume de um prisma triangular cuja base é um triângulo equilátero de lado 4 cm, sabendo que a aresta lateral mede 6 cm e forma com a base desse prisma um ângulo de 60°. 36 cm³

11. Um balconista vai empacotar 6 livros de formatos idênticos e de dimensões 20 cm, 25 cm e 1,5 cm. Para empacotar esses livros, colocando-os um em cima do outro, na menor dimensão, gasta-se, para o acabamento, 20% a mais de papel que a área da superfície a ser empacotada.

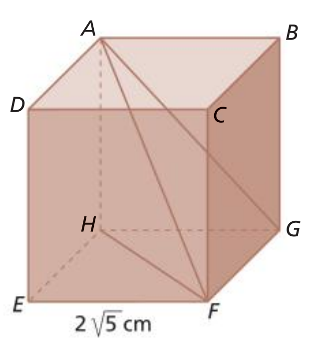
Determine quanto de papel o balconista gastará para embrulhar os 6 livros juntos. 2.172 cm²

12. Um reservatório para armazenar soja tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 35 m de altura e base quadrada com 60 m de perímetro. Depois de parte da colheita de soja ser armazenada, o reservatório ficou com 60% de sua capacidade ocupada. Quantos metros cúbicos do reservatório ainda restam para que ele fique com a capacidade total ocupada? 3.150 m³

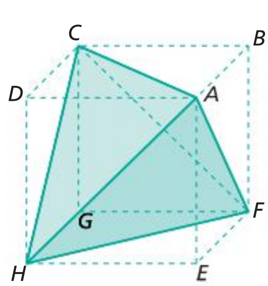
13. (FEI-SP) Num paralelepípedo reto-retângulo a área total mede 28 cm² e a diagonal $\sqrt{21}$ cm. A soma das dimensões mede: alternativa a

a) 7 cm **b)** 8 cm **c)** 9 cm **d)** 10 cm **e)** 12 cm

14. Calcule o volume da pirâmide *AHFG* inscrita no cubo, conforme mostra a figura abaixo. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³



15. (UFSCar-SP) Na figura, os pontos *ACFH* são vértices de um tetraedro inscrito em um cubo de lado 3.



O volume do tetraedro é: alternativa c

a) $\frac{27}{8}$

b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$

c) 9

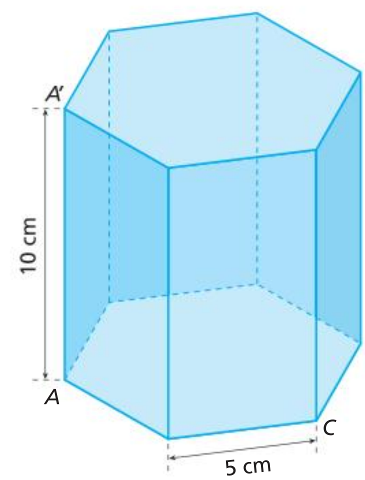
d) $\frac{27\sqrt{13}}{18}$

e) 18

16. Uma pirâmide triangular tem 9 cm de altura e a base é um triângulo isósceles cujos lados medem 5 cm, 5 cm e 8 cm. Determine o volume de uma nova pirâmide triangular, de 3 cm de altura, obtida pela secção de um plano paralelo à base da primeira pirâmide. $\frac{4}{3}$ cm³

Aprofundamento

17. (Unicamp-SP) A figura abaixo representa um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares.



Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma é 10 cm.

a) Calcule o volume do prisma. $375\sqrt{3}$ cm³

b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos *A*, *C* e *A'*. $50\sqrt{3}$ cm²

18. Um prisma hexagonal regular tem $A_{base} = 96\sqrt{3}$ cm². Calcule a área lateral sabendo que a altura do prisma é igual à medida do apótema da base. $192\sqrt{3}$ cm²

19. Determine o volume de um paralelepípedo reto-retângulo com 60 cm de altura e bases quadradas, sabendo que a diagonal desse paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. 36.000 cm³

20. As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo formam uma PG. Sabendo que a diagonal desse paralelepípedo mede $\sqrt{91}$ cm e que a soma das medidas de todas as suas arestas é 52 cm, calcule o volume desse sólido. 27 cm³

Desafio

21. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado cujo lado mede 5 cm. Sabendo que uma das arestas laterais mede $10\sqrt{2}$ cm e forma um ângulo de 60° com os lados adjacentes da base, determine seu volume. 250 cm³

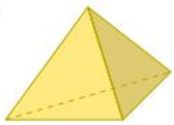
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Indique qual das figuras abaixo representa um poliedro. alternativa a

a)



c)

b)

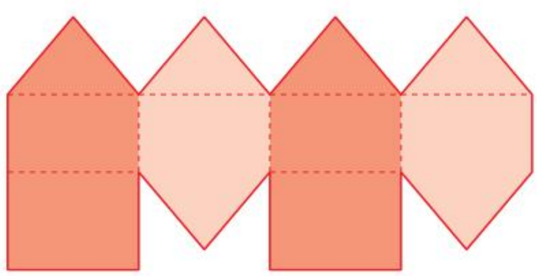
2. O número de vértices de um poliedro convexo formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais é: alternativa b

a) 80 **b)** 60 **c)** 50 **d)** 48

3. Um poliedro com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares que não satisfaz a relação de Euler tem o número de vértices diferente de: alternativa d

a) 15 **b)** 13 **c)** 11 **d)** 9

4. Marilu quer construir uma caixa com a forma de um poliedro convexo usando um molde como o da figura abaixo.



O número de vértices dessa caixa é: alternativa d

a) 15 **b)** 13 **c)** 9 **d)** 11

5. As arestas de um paralelepípedo retângulo medem 3 cm, 4 cm e 5 cm. A medida da sua diagonal e de seu volume são, respectivamente: alternativa c

a) $5\sqrt{5}$ cm e 60 cm^3

b) $5\sqrt{2}$ cm e 47 cm^3

c) $5\sqrt{2}$ cm e 60 cm^3

6. Um prisma oblíquo de base quadrada tem todas as arestas medindo 10 cm. As arestas laterais formam um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do prisma é, em centímetro cúbico, igual a: alternativa c

a) $150\sqrt{3}$ **b)** $240\sqrt{3}$ **c)** $500\sqrt{3}$ **d)** 900

7. Uma geladeira de isopor, com formato de um paralelepípedo reto-retângulo, tem paredes e tampa com 5 cm de espessura e medidas externas iguais a 0,85 m, 1,10 m e 0,80 m. Lembrando que 1 litro equivale a 1 dm^3, a capacidade, em litro, dessa geladeira é de: alternativa c

a) 748 **b)** 330,75 **c)** 525 **d)** 1.026

8. A área total e o volume de um prisma triangular regular de aresta da base 2 cm e altura $\sqrt{3}$ cm são, respectivamente: alternativa d

a) $7\sqrt{3}$ cm^2 e $\sqrt{3}$ cm^3

b) $4\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3

c) $8\sqrt{3}$ cm^2 e 1 cm^3

d) $8\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3

9. Para fazer uma vela com o formato de uma pirâmide regular quadrangular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4 cm, Fábio usa ▬▬▬ cm^3 de parafina. alternativa b

a) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ **c)** $16\sqrt{2}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Identificar poliedros, prismas, pirâmides, troncos de pirâmides e seus elementos.	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.		X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.					X	X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).				X			X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	102 a 105	104 a 106	104 a 106	104 a 109	109 a 112 115 a 119	115 a 119	115 a 119	113 a 119	120 a 128

Pesquisa e ação — Pesquisa estatística

No dia a dia, estamos cercados de anúncios publicitários. Um anúncio publicitário usa diferentes recursos visuais e/ou linguísticos para despertar o desejo do consumidor de adquirir um produto, apoiar uma ideia ou aderir a uma causa.

Vimos que os poliedros são sólidos geométricos que possuem faces poligonais. Determinando a área dessas faces, calculamos a área de um poliedro. Esse recurso é bastante utilizado por empresas desenvolvedoras de embalagens para o cálculo do custo de produção de uma nova embalagem, já que, quanto maior for a área, maior será o custo de produção.

Em seguida, aplicaremos as características dos poliedros na construção de embalagens práticas, econômicas e inovadoras, que deverão ser promovidas por meio de anúncios veiculados em TV ou publicados em revistas.

SOS MATA ATLÂNTICA

TRAEL

SOS MATA ATLÂNTICA

Exemplos de campanhas institucionais para preservação do meio ambiente.

Procedimentos

1) Reúna-se com mais quatro colegas para desenvolver as atividades a seguir.

2) Inicialmente, vocês deverão escolher um produto que será divulgado por uma propaganda publicitária. Essa propaganda poderá ser veiculada em TV ou em revista impressa.

3) Após a seleção do produto, o grupo deverá passar para a etapa da escolha do poliedro que servirá de modelo para a embalagem. Essa escolha deverá levar em consideração a capacidade do poliedro e a área total.

Um dos objetivos dessa etapa é buscar a maior embalagem (a de maior capacidade) ao menor custo possível (ou seja, com menor área total). Para minimizar os custos com a quantidade de material utilizado na confecção da embalagem, o grupo poderá usar materiais mais econômicos. Pode ser comparado o custo para plástico, papelão, alumínio etc. Há também a opção de utilizar matéria-prima reciclada.

4) Após a escolha do produto, da embalagem e do material, o grupo deverá elaborar uma propaganda de divulgação desse produto, destacando suas vantagens (custo-benefício), além de apresentar pontos importantes: a sustentabilidade e a preocupação com a reciclagem e com o consumo excessivo.

5) A propaganda poderá ser criada para TV ou para revista. Em cada caso, é preciso que seja feito um roteiro específico. No caso da propaganda de TV, será elaborado um vídeo. Para a revista, é preciso escolher uma imagem e apresentar um texto que comunique as ideias pretendidas.

6) Você e os colegas de classe, com o professor, poderão organizar uma mostra das propagandas criadas.

Compreensão de texto

Economia das formas

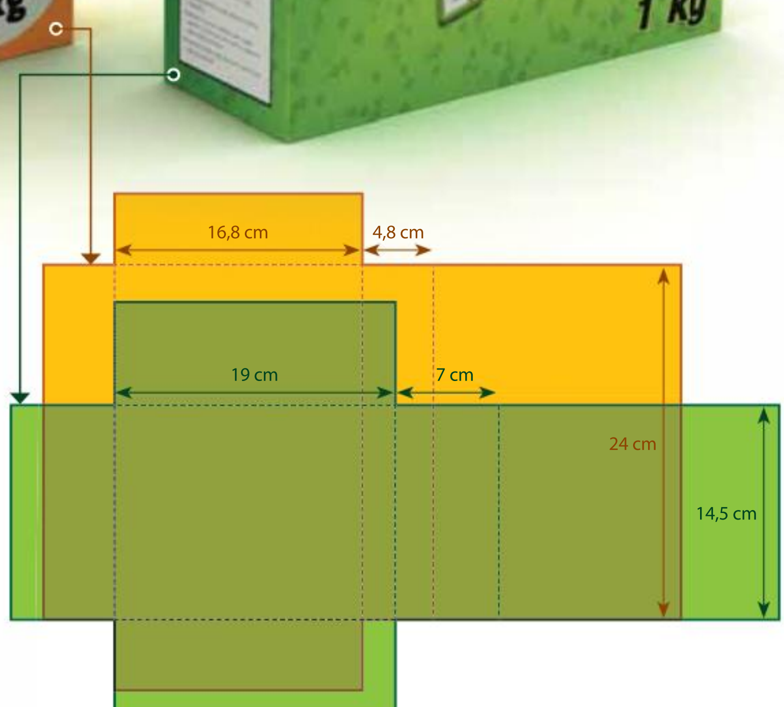
Embalagens mais eficientes poupam dinheiro e o meio ambiente.

Do desenvolvimento de novos produtos ao transporte, à venda e à reciclagem, a embalagem de um produto influencia toda a cadeia produtiva. Observe a seguir como uma mudança aparentemente pequena no projeto das caixas de detergente em pó para roupas permite melhor aproveitamento de matérias-primas e dos recursos preciosos, como a água.

Os detergentes em pó para roupas começaram a ser produzidos no Brasil nos anos 1950. Por meio século, esse mercado foi dominado por embalagens em forma de paralelepípedos de papel-cartão, substituídos nos últimos anos por paralelepípedos mais compactos.

Caixa antiga

Caixa nova



Economia de papel

Apesar da diferença de quase **15%** na área, ambas as caixas contêm 1 kg de produto e algum espaço vazio. Se as **780 mil** toneladas de detergente em pó consumidas pelos brasileiros em 2010 fossem embaladas apenas em caixas **de 1 kg**, a troca **do modelo antigo** pelo novo pouparia **13,89 milhões** de **metros quadrados** de papel-cartão por ano.

ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

4. a) Podem ser reciclados papéis, plásticos, vidros e metais. b) Cooperativas de catadores; indústrias relacionadas ao material que vai ser reciclado; setores da tecnologia. c) Geração de emprego e de renda por meio da criação de cooperativas de catadores; redução dos gastos das indústrias com a aquisição de matérias-primas; preservação ambiental por meio da redução da exploração de recursos naturais e diminuição das áreas destinadas a aterros sanitários.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. Calcule a área total e o volume correspondente a cada modelo de paralelepípedo usado nos dois tipos de caixa de detergente em pó. Compare-os e conclua se realmente a mudança foi válida.

2. Com relação à troca do modelo antigo pelo novo, responda às questões.

a) Se em 2010 fossem utilizadas apenas as caixas do modelo novo, de quanto seria a economia de papel-cartão? 13,89 milhões de metros quadrados

b) Com essa economia, quantas caixas do modelo novo poderiam ser produzidas? aproximadamente 136 milhões de caixas

3. Pesquise em jornais, revistas, *sites* etc. quais medidas as indústrias estão tomando para reduzir o custo de fabricação de determinado produto, visando diminuir o valor de venda para o consumidor.

4. O infográfico traz dados interessantes e muito importantes sobre a economia de matéria-prima e melhor aproveitamento de recursos naturais com a simples mudança no projeto de algumas embalagens. Uma importante iniciativa para essa economia é a **reciclagem**.

a) Quais materiais podem ser reciclados?

b) Quais são os principais agentes envolvidos em um processo de reciclagem?

c) A reciclagem de materiais traz muitos benefícios tanto do ponto de vista socioeconômico como ambiental. Cite alguns desses benefícios.

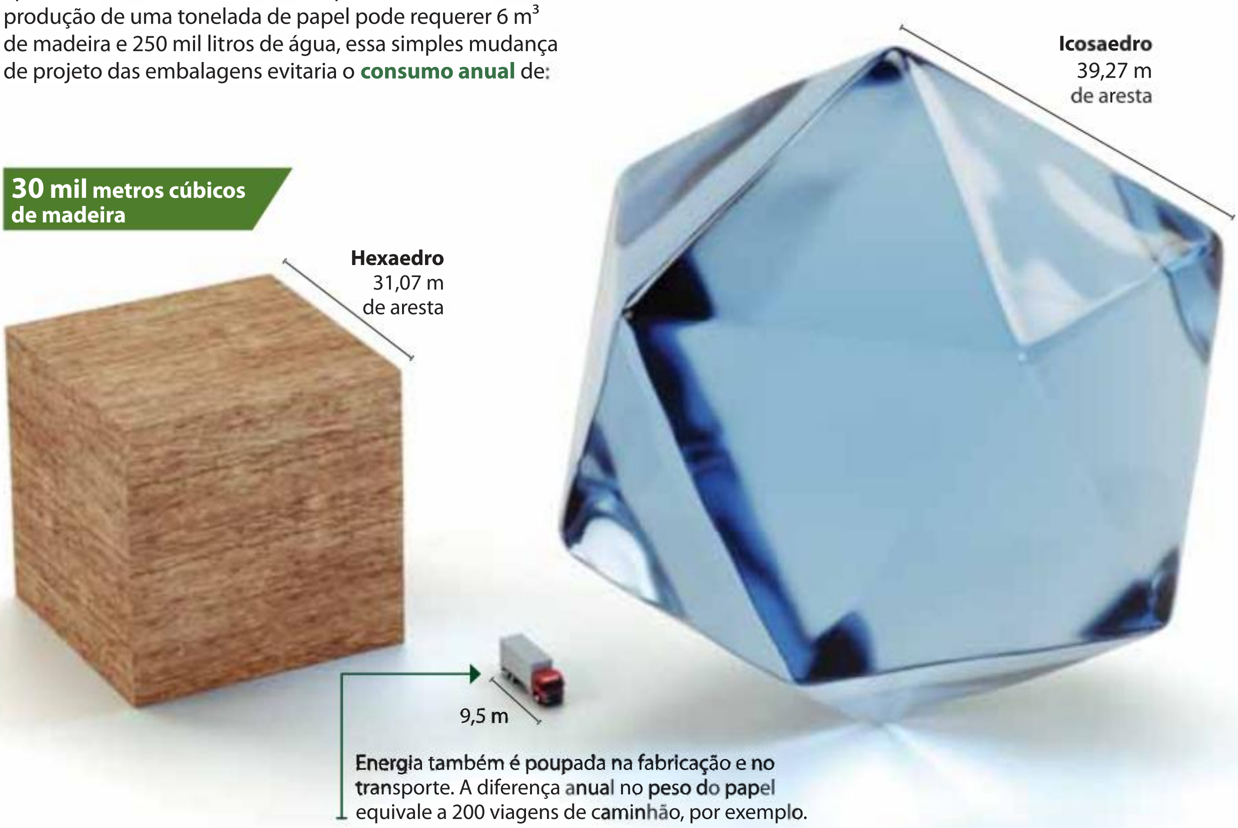
5. Em seu município, bairro ou condomínio, existe algum programa de reciclagem de lixo doméstico? Elabore cartazes e uma cartilha sobre a reciclagem de materiais e faça uma campanha, com seus colegas, na sua comunidade para conscientizar as pessoas sobre os benefícios dessa atitude. Lembre-se de usar materiais recicláveis para a confecção dos cartazes e da cartilha. resposta pessoal

1. Caixa antiga: 1.198,08 cm²; 1.935,36 cm³, respectivamente; caixa nova: 1.020 cm²; 1.928,5 cm³, respectivamente. A caixa nova realmente utiliza menos papel-cartão e, apesar de a capacidade ser menor, ela comporta 1 kg de detergente em pó.
3. Algumas medidas são: embalagens menores com produtos concentrados, venda de produtos em refil, uso de materiais reciclados etc.

Economia de matéria-prima e recursos naturais

O papel economizado com a troca equivaleria a aproximadamente 5 mil toneladas por ano. Como a produção de uma tonelada de papel pode requerer 6 m³ de madeira e 250 mil litros de água, essa simples mudança de projeto das embalagens evitaria o **consumo anual** de:

1 bilhão e 250 milhões de litros de água

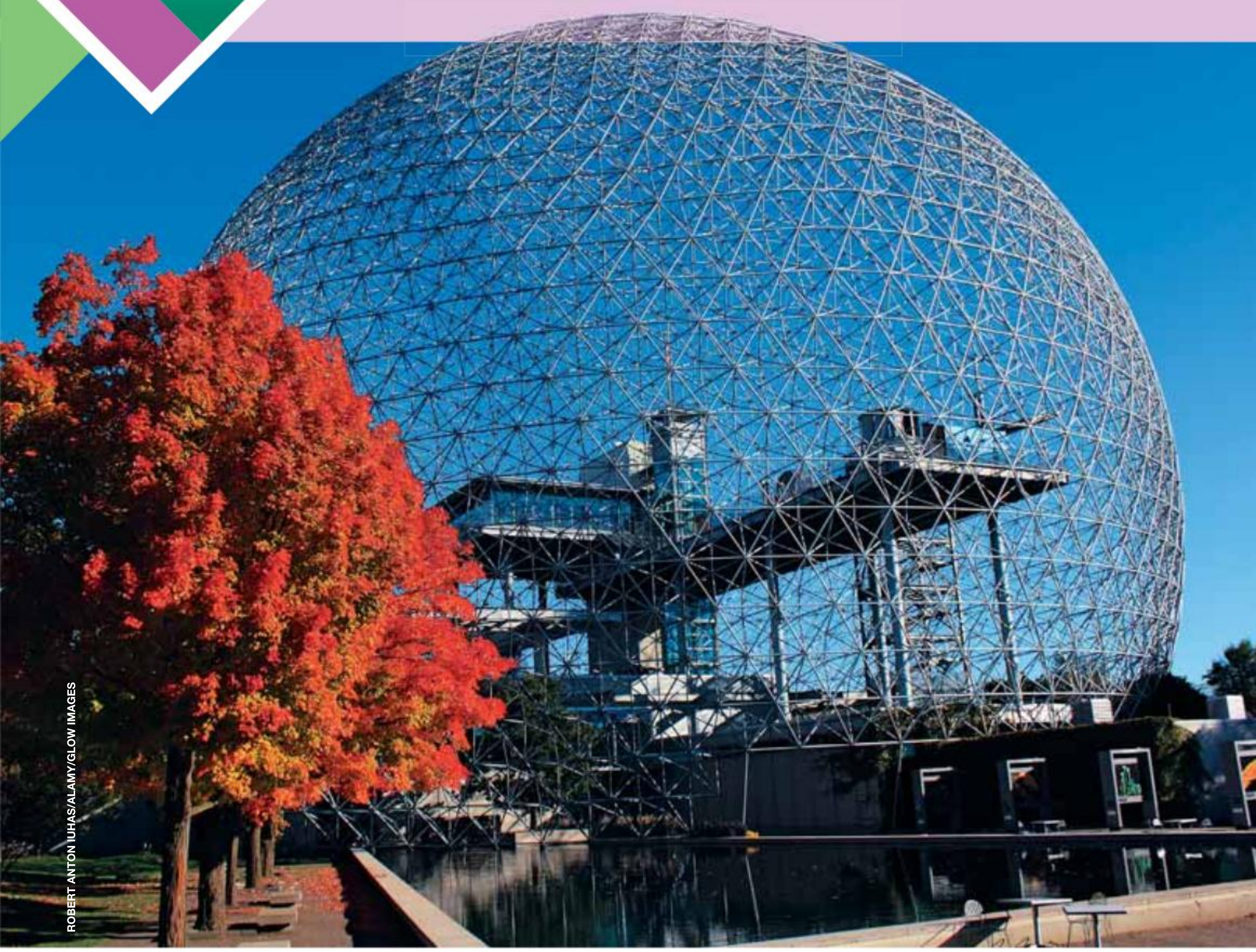


ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

Fontes: Associação Brasileira das Indústrias de Produtos de Limpeza e Afins. Disponível em: <www.abipla.org.br/novo>; Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <www.rpm.org.br/>; Embrapa. Disponível em: <www.embrapa.br>; Sabesp. Disponível em: <site.sabesp.com.br>; Universidade de São Paulo. Disponível em: <www5.usp.br>; Instituto Estadual do Ambiente. Disponível em: <www.inea.rj.gov.br>. Acessos em: 21 jan. 2016.

Capítulo 7

Corpos redondos



ROBERT ANTON IUHAS/ALAMY/GLOW IMAGES

Biosfera de Montreal de Buckminster Fuller, Montreal, Canadá, 2012.

Objetivos do capítulo

- Identificar cilindros, cones, troncos de cone, esferas e seus respectivos elementos.
- Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.
- Determinar o volume desses corpos redondos.

1 Corpos redondos

No capítulo anterior, vimos que muitas das formas dos objetos que nos cercam podem ser estudadas matematicamente por meio de representações chamadas de **sólidos geométricos**.

Vimos também que os sólidos geométricos compreendem grandes grupos, como os **poliedros** e os **corpos redondos**.

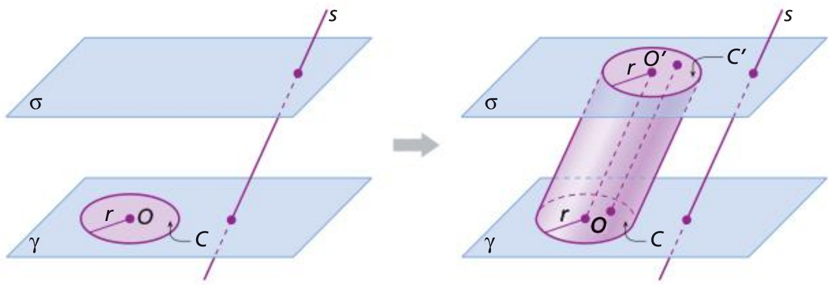
Entre os corpos redondos, distinguimos o cilindro, o cone, a esfera e os corpos obtidos a partir deles. A estrutura da biosfera de Montreal, mostrada na foto acima, por exemplo, lembra a forma de uma esfera.

Neste capítulo, estudaremos as propriedades geométricas e métricas dos corpos redondos.

2 Cilindro

No capítulo anterior, definimos prisma indicando um procedimento de construção. Neste capítulo, o primeiro corpo redondo que vamos estudar é o cilindro e, a seguir, vamos apresentar uma definição análoga à do prisma.

Consideremos dois planos paralelos distintos, γ e σ, um círculo **C** de raio ***r*** contido em γ e uma reta *s* secante aos planos γ e σ.



FELIX LIPOV/SHUTTERSTOCK

Edifício com forma cilíndrica, Joanesburgo, África do Sul, 2015.

Chama-se **cilindro circular**, ou apenas **cilindro**, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta *s*, com uma extremidade no círculo **C** e a outra no plano σ.

Observação

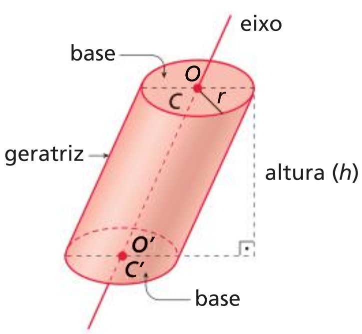
Embora exista uma definição de cilindro mais ampla, estudaremos aqui apenas os cilindros circulares.

Observe que as extremidades que pertencem ao plano σ formam um círculo *C'*, congruente a *C*.

Elementos de um cilindro

Considerando o cilindro desenhado ao lado, podemos destacar os seguintes elementos:

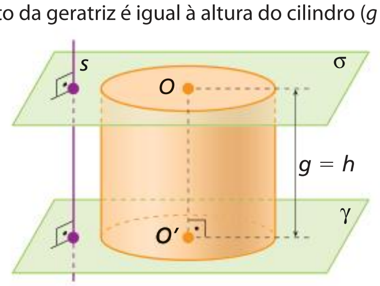
- **Bases** – os círculos **C** e *C'*, de raio ***r*** e centros *O* e *O'*.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **Geratrizes** – os segmentos paralelos ao eixo do cilindro cujas extremidades são os pontos correspondentes das circunferências das bases do cilindro. Indicaremos por *g* o comprimento da geratriz.
- **Altura do cilindro** – a distância *h* entre os planos que contêm as bases.



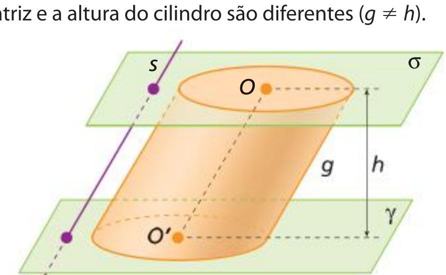
2.1 Classificação dos cilindros

Podemos classificar um cilindro de acordo com a inclinação da reta *s* em relação aos planos γ e σ que contêm as bases.

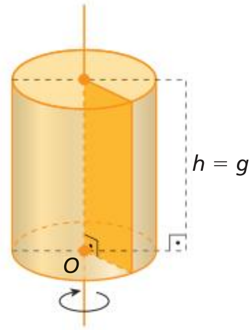
- Se a reta *s* é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **reto**. Nesse caso, tanto o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ quanto as geratrizes do cilindro são perpendiculares aos planos das bases e, dessa maneira, o comprimento da geratriz é igual à altura do cilindro ($g = h$).



- Se a reta *s* não é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **oblíquo**. Nesse caso, nem o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ nem as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases e, assim, o comprimento da geratriz e a altura do cilindro são diferentes ($g \neq h$).

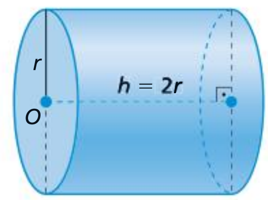


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



Um cilindro circular reto também é denominado **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície retangular em torno da reta que contém um dos lados dessa superfície. A medida desse lado é igual à altura h do cilindro, e a medida do lado perpendicular a este é igual ao raio r da base do cilindro.

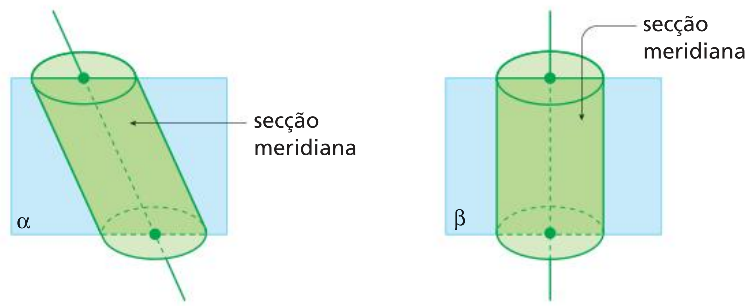
Se um cilindro reto tem altura igual ao dobro do raio da base ($h = 2r$), ele é chamado de **cilindro equilátero**.



2.2 Secções de um cilindro

◆ Secção meridiana de um cilindro

Uma **secção meridiana** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contenha seu eixo.



◆ Reflita

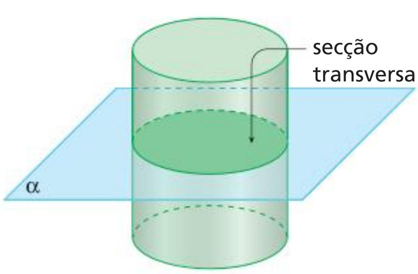
Que quadrilátero é determinado pela secção meridiana de um cilindro qualquer?

Um paralelogramo. Em particular, se o cilindro for reto, o quadrilátero será um retângulo. Se o cilindro for equilátero, podemos particularizar ainda mais: o quadrilátero será um quadrado.

Comentário: Explorar e comparar os tipos de quadrilátero que podem formar uma secção meridiana de um cilindro circular. Pode-se pedir aos alunos que obtenham a razão entre a medida da geratriz e a do raio da base de um cilindro cuja secção meridiana determina um losango. Eles deverão verificar que essa razão é 2.

◆ Secção transversal de um cilindro

Uma **secção transversal** de um cilindro é a intersecção do cilindro com um plano paralelo ao plano da base.



Propriedade: As secções transversais de um cilindro são círculos congruentes à base.

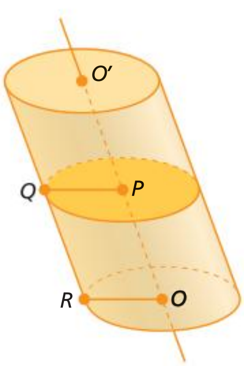
Demonstração

Considere uma secção transversal qualquer de um cilindro.

Como o eixo do cilindro é paralelo a qualquer geratriz, concluímos que $\overline{PO}$ é paralelo a $\overline{QR}$. A secção transversal é paralela ao plano da base; então, o plano $(PQRO)$ corta essa secção e a base, determinando as retas paralelas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Logo, o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo ao segmento $\overline{OR}$.

Como o quadrilátero $PQRO$ é um paralelogramo, seus lados opostos têm medidas iguais. Daí, temos $PQ = OR$.

Portanto, a secção transversal e a base têm raios de mesma medida e, portanto, são congruentes.



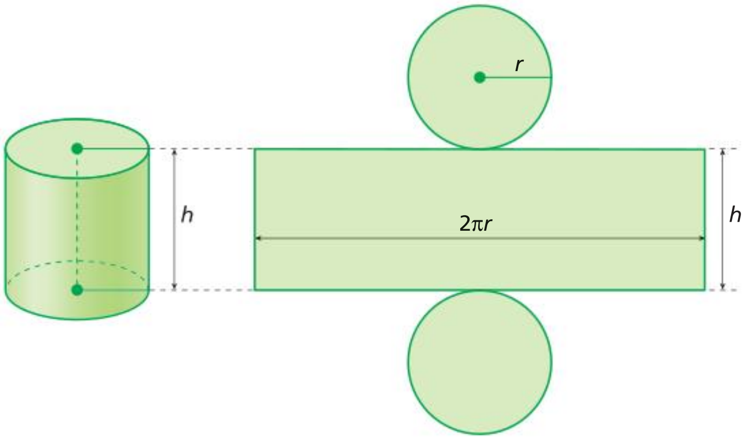
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.3 Área da superfície de um cilindro reto

Imagine que a superfície de um cilindro reto seja revestida de papel.

Recortando o papel nas circunferências das bases e ao longo de uma geratriz, obtemos a **planificação** da superfície do cilindro.

A planificação é composta de dois círculos e de uma superfície retangular, em que a medida de um dos lados é igual ao comprimento da circunferência da base ($2\pi r$), e a medida do outro lado é igual à altura do cilindro (h).



Dado um cilindro reto de altura h e raio da base r, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r.

$$A_{base} = \pi r^2$$

- **Área lateral** ($A_{lateral}$) é a área do retângulo de lados $2\pi r$ e h.

$$A_{lateral} = 2\pi rh$$

- **Área total** (A_{total}) da superfície do cilindro é a soma das áreas das bases com a área lateral.

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow \boxed{A_{total} = 2\pi r(r + h)}$$

Exercícios resolvidos

R1. Dado um retângulo de dimensões 3 cm e 5 cm, comparar a área lateral e a área total da superfície dos cilindros de revolução dele obtidos.

▶ ***Resolução***

Fazendo a rotação do retângulo em torno do lado que mede 3 cm, obtemos um cilindro reto de raio 5 cm e altura 3 cm. Então:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (5 + 3) = 80\pi$

Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm² e área total de 80π cm².

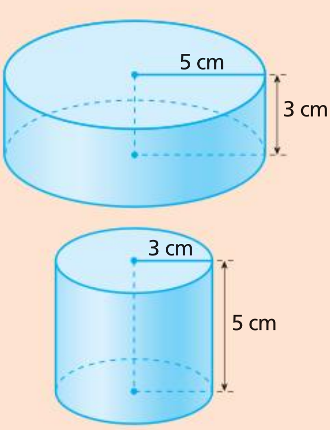
O outro cilindro de revolução tem raio de 3 cm e altura 5 cm. Então:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (3 + 5) = 48\pi$

Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm² e área total de 48π cm².

Portanto, as áreas laterais dos cilindros obtidos são iguais. No entanto, quando fazemos a rotação do retângulo em torno do lado menor, a área total da superfície do cilindro é maior.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R2. Calcular a razão entre a área da base e a área da secção meridiana de um cilindro equilátero.

Resolução

Vamos considerar um cilindro equilátero de altura h, cuja base é um círculo de raio r.

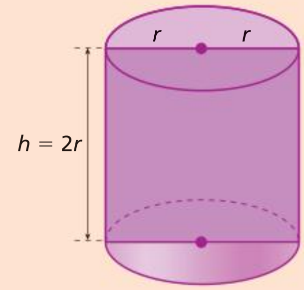
A área da base é: $A_{base} = \pi \cdot r^2$

Como um cilindro equilátero tem altura igual ao dobro do raio ($h = 2r$), a secção meridiana é um quadrado de lado $2r$.

A área da secção meridiana é: $A_{\text{secção meridiana}} = 2r \cdot 2r = 4r^2$

Assim, temos: $\dfrac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \dfrac{\pi}{4}$

Portanto, a razão entre a área da base e a área da secção meridiana é $\dfrac{\pi}{4}$.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Qual é a razão entre a área lateral e a área da secção meridiana de um cilindro circular reto? π

2. Uma indústria farmacêutica quer produzir comprimidos efervescentes de vitamina C em forma cilíndrica de 0,5 cm de altura e raio da base de 1 cm. Determine a área total da superfície desse comprimido. (Quanto maior a área de um comprimido efervescente, mais rapidamente ele se dissolve na água.) 3π cm²

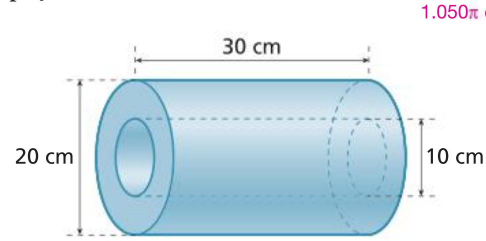

FABIO YOSHIHITO MATSUURA

3. O raio da base de um cilindro de revolução gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados mede 5 cm. A altura desse cilindro é igual ao comprimento da circunferência da base. Calcule a área total da superfície do cilindro. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm²

4. Sabendo que o raio da base de um cilindro reto mede 2 cm e que a área da secção meridiana é 20 cm², calcule a área total da superfície do cilindro. 28π cm²

5. Se a altura de um cilindro reto é igual a $\dfrac{3}{2}$ do raio da base, calcule a altura e o raio, sabendo que a área lateral do cilindro é 108π cm². 9 cm; 6 cm

6. Um empresário recebeu um pedido para fabricar a peça representada abaixo, que tem a forma de um cilindro circular reto com um furo cilíndrico no sentido longitudinal. Para cobrar pelo serviço, o dono da indústria precisa calcular a quantidade de matéria-prima necessária para a fabricação de cada unidade. Calcule a área total da superfície da peça, de acordo com as dimensões indicadas. 1.050π cm²



2.4 Volume de um cilindro

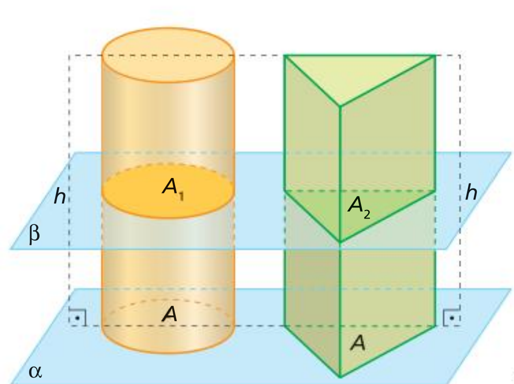
Considere um cilindro e um prisma situados em um mesmo semiespaço, de mesma altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a área da base do cilindro igual à da base do prisma.

Observe que cada plano β, paralelo a α, que secciona o cilindro também secciona o prisma, determinando as secções do cilindro e do prisma, ambas de mesma área, já que $A_1 = A$ e $A_2 = A$.

Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cilindro é igual ao volume do prisma: $V_{cilindro} = V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

Portanto, o volume de um cilindro de raio r e altura h é dado por:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R3. Considerar três cilindros circulares retos: C, de altura h e base de raio r; C', de altura h e base de raio $2r$; e C'', de altura $2h$ e base de raio r.

a) Comparar o volume de C' com o de C.

b) Comparar o volume de C'' com o de C.

c) Comparar o volume de C' com o de C''.

▶ ***Resolução***

Primeiro, calculamos o volume de C: $V = \pi r^2 h$

a) Cálculo do volume de C':

$V' = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4(\pi r^2 h)$, ou seja, $V' = 4V$

Portanto, o volume de C' é o quádruplo do volume de C.

b) Cálculo do volume de C'': $V'' = \pi \cdot r^2 \cdot (2h) = 2(\pi r^2 h)$, ou seja, $V'' = 2V$

Portanto, o volume de C'' é o dobro do volume de C.

c) Dos itens anteriores, temos: $V' = 4\pi r^2 h = 2(2\pi r^2 h)$, ou seja, $V' = 2V''$

Portanto, o volume de C' é o dobro do volume de C''.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

7. Se aumentarmos o raio da base ou a altura de um cilindro reto em 4 cm, os volumes dos novos cilindros coincidirão. Calcule o raio da base do cilindro inicial sabendo que sua altura é 2 cm. $(2 + 2\sqrt{3})$ cm

8. Determine o volume de um cilindro equilátero cuja área total é igual a 24π dm². 16π dm³

9. Quantos mililitros (mℓ) de tinta cabem no reservatório cilíndrico de uma caneta cujo diâmetro é 2 mm e o comprimento é 10 cm? (*Adote*: $\pi = 3{,}14$) 0,314 mℓ

10. Um cilindro de revolução, com 10 cm de raio da base, foi cortado por um plano paralelo a seu eixo e distante 6 cm dele. Sabendo que a área da secção determinada pelo plano é 80 cm², calcule o volume do cilindro. 500π cm³

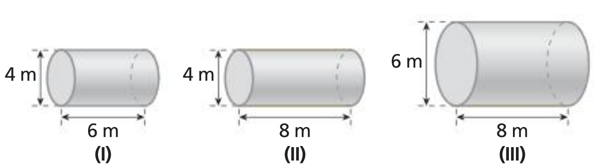
11. A parte interna de um botijão de gás de cozinha tem a forma cilíndrica com 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura. Quantos dias o gás de um botijão cheio durará se forem consumidos diariamente 3,1 litros? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) 24 dias

12. O líquido que ocupa completamente um cilindro com 20 cm de diâmetro e 40 cm de altura será transferido para outro cilindro com 12 cm de diâmetro e 125 cm de altura. Que fração da altura do novo cilindro será ocupada pelo líquido transferido? $\frac{8}{9}$

13. Um produto que ocupa completamente um recipiente cilíndrico será dividido em recipientes menores, também cilíndricos, cujo diâmetro se reduz a $\frac{1}{4}$ e cuja altura se reduz a $\frac{1}{3}$ da do recipiente maior. Qual será a quantidade de recipientes menores necessários? 48 recipientes menores

14. Uma cisterna cilíndrica para armazenar água tem 1 m de diâmetro. Se forem consumidos 310 litros, quantos centímetros o nível de água baixará? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) 40 cm

15. (Enem) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com as medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



ADILSON SECCO

Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (*Considere*: $\pi \simeq 3$) alternativa d

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

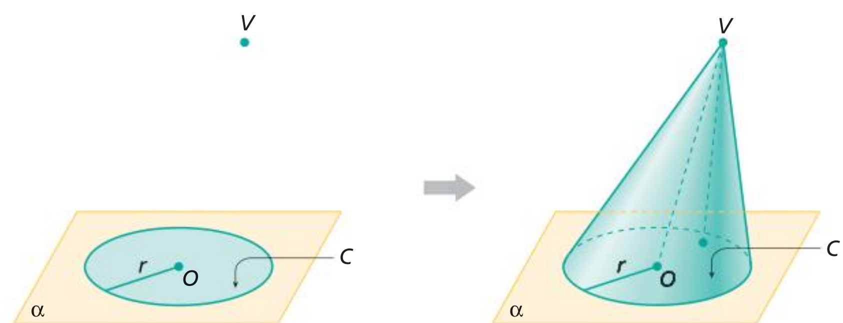
SAKARIN SAWASDINAKA/SHUTTERSTOCK

3 Cone

A forma cônica aparece em muitos objetos do dia a dia, como a casquinha de sorvete ou o cone de sinalização de trânsito.

A seguir, observe a definição geométrica de cone.

Consideremos um círculo **C**, de centro *O* e raio *r*, em um plano α, e um ponto *V* não pertencente ao plano α.

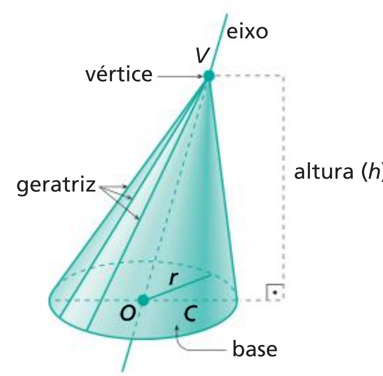


A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e outra no círculo **C** é denominada **cone circular**, ou simplesmente **cone**.

Elementos do cone

Considerando o cone desenhado ao lado, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base** – o círculo **C** de raio *r* e centro *O*.
- **Vértice** – o ponto *V*.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{VO}$.
- **Geratrizes** – os segmentos com extremidades em *V* e na circunferência da base do cone. No cone reto (que veremos a seguir), indicaremos o comprimento da geratriz por *g*.
- **Altura do cone** – a distância *h* do vértice *V* ao plano que contém a base.

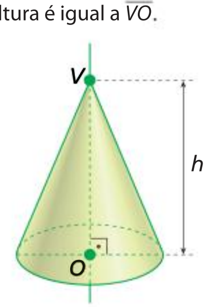


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

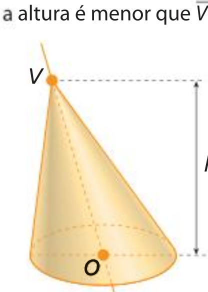
3.1 Classificação dos cones

Podemos classificar um cone de acordo com a inclinação do eixo $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano que contém a base.

- Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **reto**. Nesse caso, a altura é igual a $\overline{VO}$.



- Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ não é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **oblíquo**. Nesse caso, a altura é menor que $\overline{VO}$.



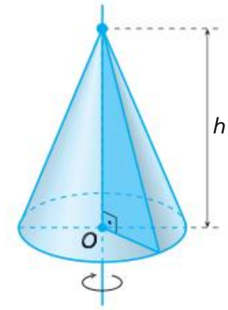
Uma maneira é pensar no triângulo *VOP*, retângulo em *P*, tal que *P* pertence ao plano que contém a base e $VP = h$. Como $\overline{VO}$ é a hipotenusa, $\overline{OP}$ e $\overline{VP}$ são catetos; então, $VP < VO$.

Comentário: Novamente, temos a resolução de uma questão de Geometria espacial reduzida à Geometria plana. Na análise desenvolvida nesta resolução, optou-se pelo emprego da propriedade dos triângulos, que afirma que ao maior ângulo se opõe o maior lado.

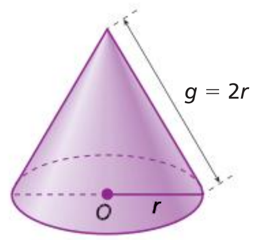
Reflita

Como podemos provar que, em um cone oblíquo, a altura é menor que a distância do vértice ao centro da base?

Um cone circular reto também é denominado **cone de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação da superfície triangular, determinada por um triângulo retângulo, em torno de uma reta que contém um de seus catetos. O comprimento do outro cateto será o raio da base do cone.



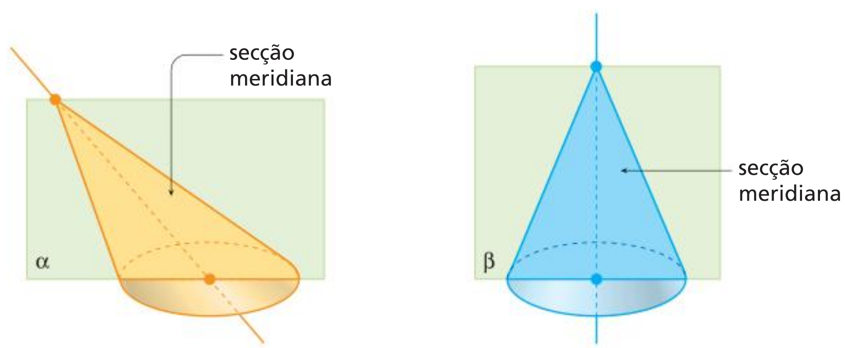
Se um cone reto tem a medida da geratriz igual ao dobro do raio da base ($g = 2r$), ele é chamado de **cone equilátero**.



3.2 Secções de um cone

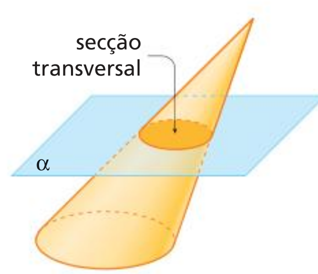
Secção meridiana de um cone

Uma **secção meridiana** de um cone é determinada pela intersecção do cone com um plano que contenha seu eixo.



Secção transversal de um cone

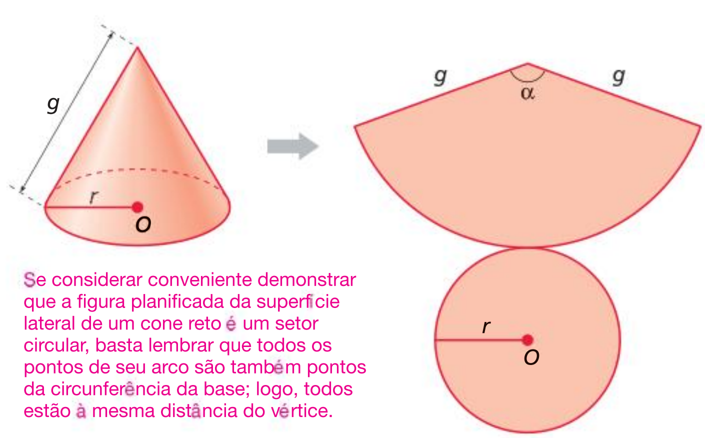
Uma **secção transversal** de um cone é a intersecção do cone com um plano paralelo ao plano da base.



3.3 Planificação da superfície de um cone reto

Assim como fizemos com o cilindro, vamos supor que a superfície de um cone reto seja revestida de papel. Para obter a planificação dessa superfície, vamos imaginar um recorte do papel na circunferência da base e, em seguida, um recorte ao longo de uma de suas geratrizes.

A planificação da superfície de um cone reto é formada por um círculo de raio r e centro O e por um setor circular de raio g, ângulo α e arco de comprimento $2\pi r$.



Se considerar conveniente demonstrar que a figura planificada da superfície lateral de um cone reto é um setor circular, basta lembrar que todos os pontos de seu arco são também pontos da circunferência da base; logo, todos estão à mesma distância do vértice.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R4. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um semicírculo. Como se chama esse cone?

▶ ***Resolução***

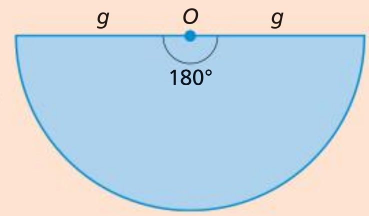
Vamos considerar um cone reto de raio da base r, comprimento da geratriz g e altura h.

O semicírculo de raio g é o setor circular da planificação da superfície lateral desse cone reto; logo, o comprimento do arco do setor deve ser igual ao comprimento da circunferência correspondente ao círculo da base do cone.

Assim: $\pi \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow g = 2r$

Portanto, o cone em questão é um cone equilátero.

Pode-se verificar também que a secção meridiana desse cone é um triângulo equilátero.



◆ Relações métricas entre os elementos de um cone reto

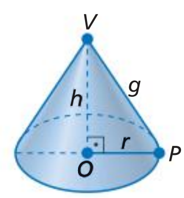
Considere um cone reto de raio da base r, comprimento da geratriz g e altura h.

O triângulo VOP é retângulo em O.

Daí, temos: $VO^2 + OP^2 = VP^2$

Portanto:

$$h^2 + r^2 = g^2$$



O setor circular ao lado representa a planificação da superfície lateral do cone.

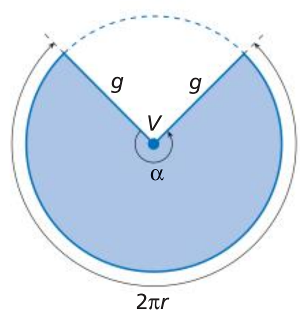
Então, podemos estabelecer a seguinte regra de três:

comprimento do arco		medida do ângulo (em grau)
$2\pi g$	———	360°
$2\pi r$	———	α

Logo: $2\pi g \cdot \alpha = 2\pi r \cdot 360°$

Portanto, α, em grau, é dado por:

$$\alpha = \frac{360° \cdot r}{g}$$



Espera-se que os alunos percebam que, quando $\alpha = 180°$, temos $g = 2r$ e, portanto, o cone é equilátero; então, nesse caso, $h = r\sqrt{3}$.

◆ Reflita

Como podemos escrever h em função de r quando $\alpha = 180°$?

Exercícios resolvidos

R5. Calcular o comprimento da circunferência da base e a altura de um cone reto com 13 cm de geratriz e 5 cm de raio.

▶ ***Resolução***

O comprimento da circunferência da base é dado por $C = 2\pi r$. Sabemos que o cone tem raio $r = 5$ cm. Assim:

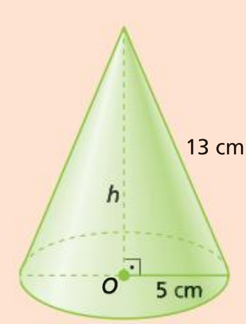
$C = 2 \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi \Rightarrow C \simeq 31{,}4$

Portanto, o comprimento da circunferência da base é aproximadamente 31,4 cm.

Sabendo que o cone é reto, podemos obter a altura por meio de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a geratriz, e as medidas dos catetos são a altura e o raio da base do cone. Assim:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

Portanto, o cone tem 12 cm de altura.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R6. Um cone reto de 10 cm de altura tem por planificação da superfície lateral um setor circular de ângulo α medindo 150°. Determinar o raio da base e o comprimento da geratriz.

▸ ***Resolução***

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos:

$r^2 + 10^2 = g^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = 100 \quad \text{(I)}$

Como $\alpha = \dfrac{360° \cdot r}{g}$, temos:

$150° = \dfrac{360° \cdot r}{g} \Rightarrow g = \dfrac{12r}{5} \quad \text{(II)}$

De (I) e (II), concluímos que:

$\left(\dfrac{12r}{5}\right)^2 - r^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{144r^2}{25} - r^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 144r^2 - 25r^2 = 2.500 \Rightarrow r^2 = \dfrac{2.500}{119} \Rightarrow$

$\Rightarrow r \simeq 4{,}58$

Portanto, o raio da base do cone é aproximadamente 4,58 cm.

Como $g = \dfrac{12r}{5}$, o comprimento da geratriz é aproximadamente 11 cm.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

16. Determine a medida do ângulo central de um setor circular obtido pela planificação da superfície lateral de um cone reto com 60 cm de geratriz e 10 cm de raio da base. 60°

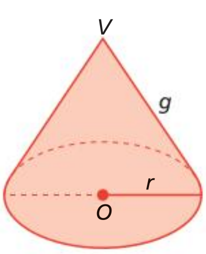
17. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular com ângulo central medindo 60°. Calcule a razão k entre o comprimento da circunferência da base e o comprimento da geratriz do cone. $\frac{\pi}{3}$

18. Determine a altura de um cone reto, sabendo que a planificação da superfície lateral é um setor circular com ângulo central medindo 120° e o raio da base é igual a 10 cm. $20\sqrt{2}$ cm

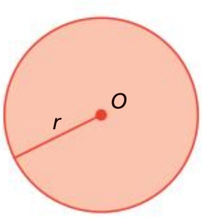
19. Um pedaço de cartolina tem a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Construindo um cone reto com essa cartolina e colocando-o sobre uma mesa, qual será a distância do vértice até a mesa? $10\sqrt{3}$ cm

3.4 Área da superfície de um cone reto

Pela planificação da superfície de um cone, podemos obter a área total dessa superfície. Para isso, vamos considerar um cone reto de raio da base r e comprimento da geratriz g.

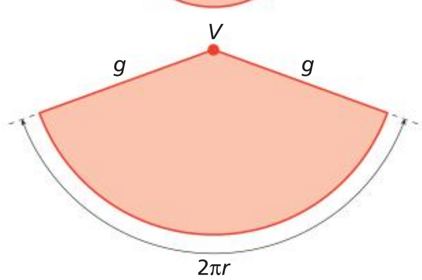


A **área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r e centro O.



$$A_{base} = \pi r^2$$

A **área lateral** ($A_{lateral}$) é a área de um setor circular tal que o raio é o comprimento g da geratriz e o arco tem comprimento igual a $2\pi r$ (o comprimento da circunferência da base do cone).



Como a área desse setor é diretamente proporcional ao comprimento $2\pi r$ do arco que o define, temos:

$$\frac{\text{comprimento do arco do setor}}{\text{comprimento da circunferência de raio } g} = \frac{\text{área do setor}}{\text{área do círculo}}$$

$$\frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{A_{lateral}}{\pi g^2} \Rightarrow A_{lateral} = \frac{(2\pi r) \cdot (\pi g^2)}{2\pi g} \Rightarrow A_{lateral} = \pi r g$$

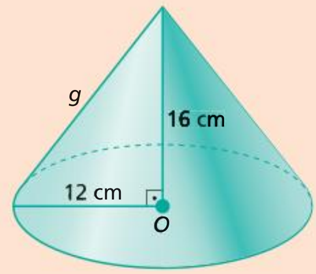
A **área total** (A_{total}) da superfície do cone reto é a soma da área da base com a área lateral.

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow A_{total} = \pi r(r + g)$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R7. Determinar a área lateral de um cone reto com 16 cm de altura e 12 cm de raio da base.



▸ ***Resolução***

Temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 400 \Rightarrow g = 20$

Portanto, o comprimento da geratriz do cone é 20 cm.

A área lateral do cone é:

$A_{lateral} = \pi rg \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_{lateral} = 240\pi \Rightarrow A_{lateral} \simeq 753{,}6$

Logo, a área lateral do cone é 240π cm^2 ou, aproximadamente, 753,6 cm^2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

20. Determine a área lateral e a área total da superfície de um cone reto conforme os dados a seguir.

a) A altura é 12 cm, e o raio da base, 9 cm. 135π cm^2; 216π cm^2

b) O comprimento da geratriz é 26 cm, e a altura, 24 cm. 260π cm^2; 360π cm^2

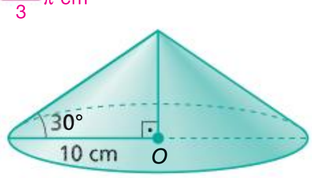
21. Uma escola infantil realizará a Festa do Circo. Uma professora ficou de confeccionar 34 chapéus cônicos de palhaço. Sabendo que cada chapéu terá 12 cm de altura e 8 cm de raio, calcule a quantidade total de papel usado para fazer todos os chapéus. $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2

22. Determine a área total da superfície de um cone reto inscrito em um cilindro reto de 5 cm de altura e 2 cm de raio da base. $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm^2

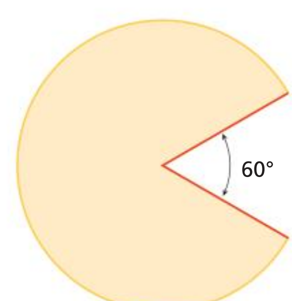
23. Determine a área total da superfície de um cone circular reto cuja secção meridiana é um triângulo equilátero de 10 cm de lado. 75π cm^2

24. A área lateral da superfície de um cone reto é 600π cm^2. Sabendo que a geratriz mede 30 cm, calcule a área total da superfície. 1.000π cm^2

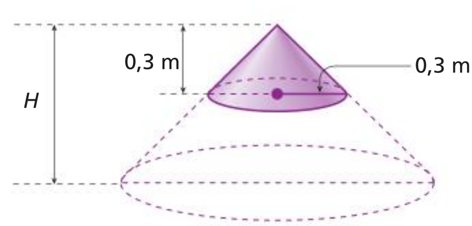
25. Determine a área lateral do cone representado a seguir. $200\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^2



26. O setor circular representado pela figura tem 6 cm de raio. Após a união das bordas vermelhas, ele é transformado na superfície lateral de um cone reto. Determine o raio da base do cone. 5 cm



27. Uma lâmpada pontual é colocada em um lustre na forma de um cone com altura e raio da base igual a 0,3 m. A que altura H do chão esse lustre deve ser pendurado para obter uma forma circular iluminada com área de $6{,}25\pi$ m^2? 2,5 m



28. Um triângulo retângulo tem catetos medindo 3 dm e 4 dm. Determine a área da superfície do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo em torno de sua hipotenusa. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi$ dm^2

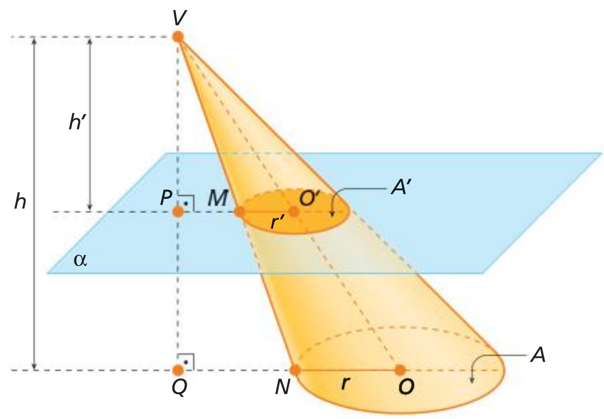
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3.5 Volume de um cone

Antes de tratar do volume de um cone qualquer, vamos estudar duas propriedades dos cones.

Para isso, considere um plano α que secciona um cone a uma distância h' do vértice, paralelamente à base, determinando uma secção de área A'.

Seja h a altura do cone, r o raio da base e A a área da base do cone.



ADILSON SECCO

Propriedade 1: A razão entre a distância h' de uma secção transversal ao vértice do cone e a altura h do cone é igual à razão entre o raio r' da secção transversal e o raio r da base, isto é:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$$

Demonstração

Os triângulos VMO' e VNO são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes). Assim, temos: $\frac{VM}{VN} = \frac{r'}{r}$ (I)

Os triângulos VPM e VQN são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes). Assim, temos: $\frac{VP}{VQ} = \frac{VM}{VN}$ (II)

De (I) e (II), podemos concluir que: $\frac{VP}{VQ} = \frac{r'}{r}$

Como $VP = h'$ e $VQ = h$, temos: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$

Propriedade 2: A razão entre a área A' de uma secção transversal de um cone, feita a uma altura h' em relação ao vértice V, e a área A da base desse cone de altura h é igual ao quadrado da razão entre h' e h, isto é:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Demonstração

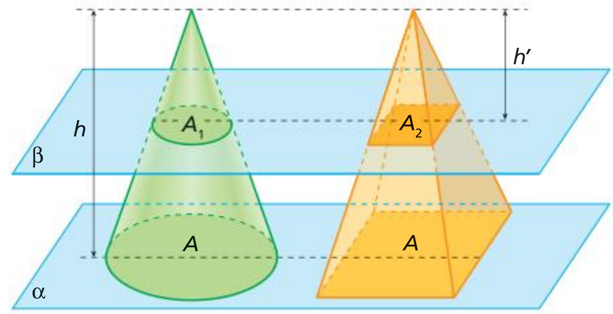
A área da secção transversal do cone é $A' = \pi(r')^2$, e a área da base do cone é $A = \pi r^2$. Assim, temos:

$$\frac{A'}{A} = \frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{(r')^2}{r^2}$$

Mas sabemos, pela propriedade 1, que $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$; portanto:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Determinação do volume de um cone



Considere um cone e uma pirâmide em um mesmo semiespaço, de mesma altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a área da base do cone igual à da base da pirâmide.

Observe que cada plano β, paralelo a α, que secciona o cone também secciona a pirâmide, determinando as secções do cone e da pirâmide, de áreas A_1 e A_2, respectivamente.

Pelas propriedades já vistas, temos:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{(h')^2}{h^2} \text{ e } \frac{A_2}{A} = \frac{(h')^2}{h^2}$$

Portanto: $\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$

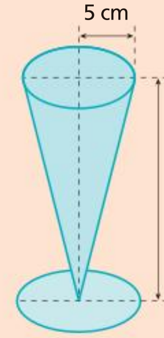
Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cone é igual ao volume da pirâmide: $V_{cone} = V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Portanto, o volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Exercício resolvido

R8. Calcular a quantidade máxima de líquido, em litro, que a taça representada na figura ao lado pode comportar.



▸ ***Resolução***

Vamos calcular o volume da taça:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}$

Assim, $V \simeq 523{,}3 \text{ cm}^3$.

Sabemos que $1\ \ell = 1 \text{ dm}^3$ e $1 \text{ dm}^3 = 1.000 \text{ cm}^3$.

Logo, $1\ \ell = 1.000 \text{ cm}^3$.

Então:

$V \simeq 523{,}3 \text{ cm}^3 = 523{,}3 \cdot \frac{1}{1.000}\ \ell = 0{,}5233\ \ell$

Portanto, a taça pode conter até $0{,}5233\ \ell$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

29. Um cone reto de 3 cm de raio da base tem volume $18\sqrt{2}\,\pi \text{ cm}^3$. Calcule a área total da superfície desse cone. $36\pi \text{ cm}^2$

30. Calcule o volume do lápis representado na figura a seguir. $\frac{23}{6}\pi \text{ cm}^3$

31. Em um cone de revolução de 10 cm de altura, a área da base excede em $216\pi \text{ cm}^2$ a área de uma secção paralela à base, feita a 2 cm do vértice. Calcule o volume do cone. $750\pi \text{ cm}^3$

32. Dois cones, 1 e 2, são gerados pela rotação da superfície determinada por um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm. Para obter o cone 1, o giro se dá em torno do cateto menor; para obter o cone 2, em torno do cateto maior.

a) Determine a razão percentual entre V_1 e V_2. 240%

b) Se as medidas dos catetos desse triângulo fossem x e y, em torno dos quais se fizessem rotações para gerar, respectivamente, os cones 1 e 2, qual seria a razão entre V_1 e V_2?

32. b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$

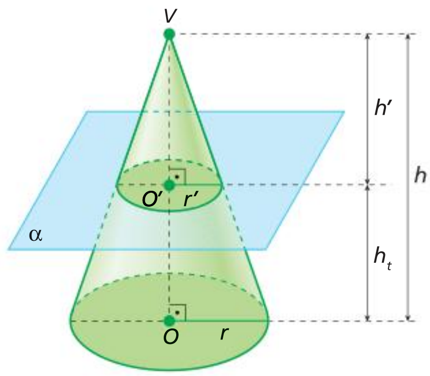
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4 Tronco de cone de bases paralelas

Vários objetos do nosso cotidiano têm a forma que lembra um tronco de cone, como copas de abajur, canecas, vasos, entre outros.

Em seguida, observe a definição de tronco de cone.

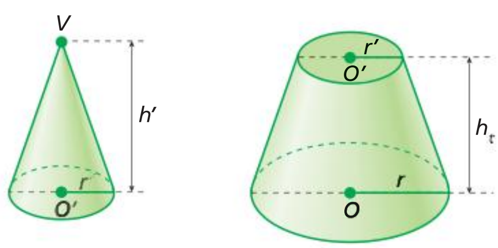
Considere um cone reto de vértice V, altura h e raio da base r, seccionado por um plano α, paralelo ao plano da base, a uma distância h_t dela ($h_t < h$), que determina uma secção transversal de centro O' e raio r'.



Peça de terracota, de 4500 a.C. a 3000 a.C., civilização japonesa. Foto de 2013.

Ao seccionar o cone original, o plano α determina dois sólidos:

- um cone menor, de mesmo vértice V e altura $h' = h - h_t$;
- um sólido denominado **tronco de cone de bases paralelas**.



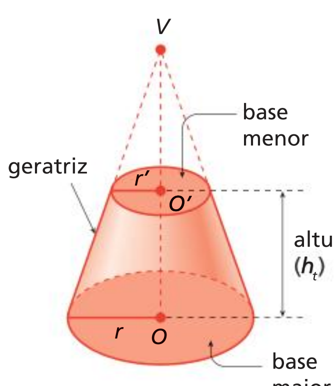
Reflita

Que figura geométrica é determinada pela secção meridiana de um tronco de cone de bases paralelas?

A figura determinada pela secção meridiana de um tronco de cone é um trapézio, pois:
- tem dois lados paralelos determinados pelos diâmetros da base do cone e da base da secção transversal paralela à base do cone;
- tem dois lados não paralelos.

(E o quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos é um trapézio.)

Elementos de um tronco de cone



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

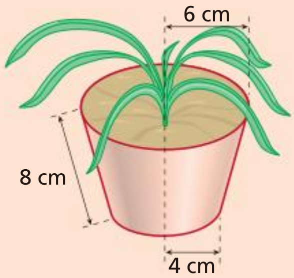
Considerando o tronco de cone desenhado acima, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base maior** – o círculo de centro O e raio r.
- **Base menor** – a secção transversal obtida por meio do plano α, ou seja, o círculo de centro O' e raio r'.
- **Geratrizes** – os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes das circunferências das bases e que estão contidos em retas que passam pelo vértice V do tronco do cone.
- **Altura** – a distância h_t entre os planos que contêm as bases do tronco de cone.

Observação

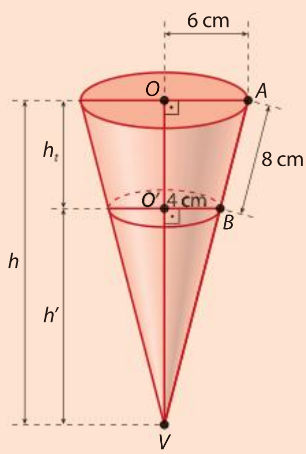
Para calcular o volume de um tronco de cone, basta subtrair, do volume do cone original, o volume do cone de mesmo vértice, altura h' e base congruente à base menor do tronco.

R9. Calcular a quantidade máxima de terra que o vaso representado na figura pode comportar.

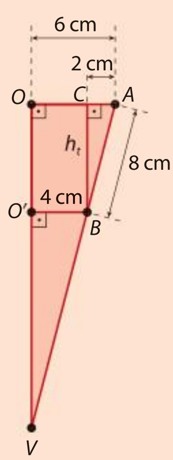


▶ ***Resolução***

O exercício consiste em obter o volume do tronco de cone reto que representa o vaso. Para isso, vamos considerar o cone que deu origem a esse tronco:



Destacando o triângulo *AVO*, temos:



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, vamos calcular a altura do tronco de cone:

$8^2 = 2^2 + h_t^2 \Rightarrow h_t = \sqrt{60} \Rightarrow h_t = 2\sqrt{15}$

Note que os triângulos *AVO* e *ABC* são semelhantes; então:

$$\frac{6}{2} = \frac{h}{h_t} \Rightarrow 3 = \frac{h}{2\sqrt{15}} \Rightarrow h = 6\sqrt{15}$$

Assim: $h' = 6\sqrt{15} - 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

Logo, o volume do tronco de cone é:

$$V_{\text{tronco}} = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{15} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{15}\right)$$

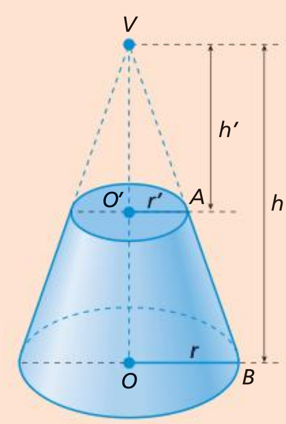
$$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(216\sqrt{15} - 64\sqrt{15}\right) = \frac{152\sqrt{15}}{3} \cdot \pi$$

Portanto, o vaso comporta, no máximo, $\frac{152\sqrt{15}}{3}\,\pi$ cm³, aproximadamente 616 cm³ de terra.

R10. Dado um tronco de cone reto de bases paralelas, calcular a razão entre os volumes V'_{cone}, do cone menor, e V_{cone}, do cone maior, que determinam esse tronco, em função da razão entre as respectivas alturas, h' e h.

▶ ***Resolução***

O volume do tronco de cone é obtido do volume V'_{cone} do cone menor (de altura h' e raio da base r') e do volume V do cone maior (de altura h e raio da base r), conforme a figura.



Os triângulos *VO'A* e *VOB* são semelhantes; portanto:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \quad \text{(I)}$$

Como os volumes dos cones são dados por

$V'_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'$ e $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$,

a razão entre os volumes é:

$$\frac{V'_{\text{cone}}}{V_{\text{cone}}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

$$\frac{V'_{\text{cone}}}{V_{\text{cone}}} = \frac{(r')^2 \cdot h'}{r^2 \cdot h} = \frac{(r')^2}{r^2} \cdot \frac{h'}{h}$$

$$\frac{V'_{\text{cone}}}{V_{\text{cone}}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \frac{h'}{h} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos a razão solicitada:

$$\frac{V'_{\text{cone}}}{V_{\text{cone}}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$$

Exercícios propostos

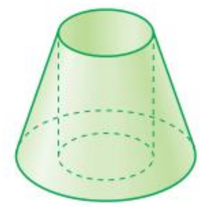
Registre as respostas em seu caderno

33. Os raios das circunferências das bases paralelas de um tronco de cone reto são 5 cm e 3 cm. Sabendo que a altura do tronco é 6 cm, calcule seu volume. 98π cm³

34. As áreas das bases de um tronco de cone reto de bases paralelas medem 36π cm² e 16π cm². Sabendo que sua geratriz mede $2\sqrt{5}$ cm, determine o volume desse tronco. $\frac{304\pi}{3}$ cm³

35. Uma taça tem a forma cônica e a altura é o dobro da medida do diâmetro da base. A taça estava cheia de água, mas alguém bebeu até que o restante da água ficasse exatamente com a metade da altura da taça. Que fração da água foi bebida? $\frac{7}{8}$

36. Observe o desenho de uma peça com o formato de um tronco de cone reto. Note que, no centro, há uma cavidade em formato cilíndrico. A altura do cilindro coincide com a altura do tronco de cone. Sabendo que os raios das circunferências das bases paralelas do tronco de cone medem 7 cm e 12 cm e que a geratriz do tronco mede 13 cm, calcule o volume da peça. 520π cm³

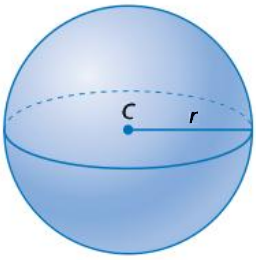


5 Esfera

Vários objetos do dia a dia têm forma esférica (como a bolinha de gude) ou aproximadamente esférica (como uma laranja). Para estudar esse tipo de forma, vamos analisar o sólido denominado esfera.

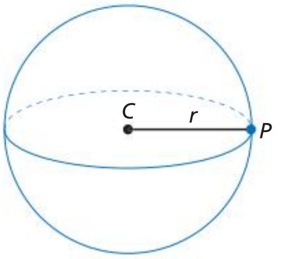
Consideremos um ponto *C* do espaço e um número real e positivo *r*.

Chama-se **esfera** de centro *C* e raio *r* o sólido formado por todos os pontos *P* do espaço que estão a uma distância de *C* menor ou igual a *r*.



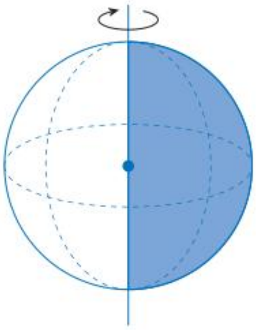
Hotel em Vancouver, Canadá, 2013. Para que os hóspedes se sintam integrados à natureza, os quartos do hotel têm a forma de esferas presas às árvores por meio de cabos e de suportes.

Chamamos de **superfície esférica** a "casca" da esfera, ou seja, o conjunto de pontos *P* do espaço que estão a uma distância de *C* igual a *r*.



O estudo dos cilindros, dos cones e das esferas permite o desenvolvimento interdisciplinar com Geografia (na área da cartografia). Para mais detalhes sobre esse assunto, recomendamos um trabalho em conjunto com o professor de Geografia e uma consulta ao *site* <http://www.cartografiaescolar.ufsc.br/index.htm> Acesso em: 12 jan. 2016.

Assim como o cilindro e o cone, a esfera também pode ser considerada um sólido de revolução, pois pode ser obtida pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que passa por seu diâmetro.



Efetuando-se a rotação completa de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, obtém-se uma superfície esférica.

Reflita

Fazendo a rotação de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, que figura geométrica se obtém?

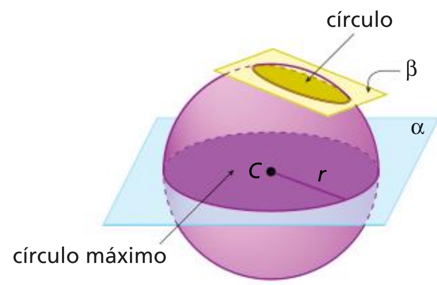
◆ Reflita

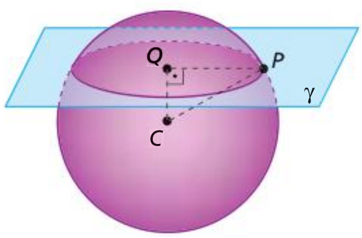
Qual a área máxima que uma secção plana de uma esfera pode atingir?

A área máxima será igual à área do círculo máximo. Para uma esfera de raio r, essa área máxima é igual a πr^2.

Secção plana de uma esfera

Toda secção plana de uma esfera, ou intersecção de uma esfera com um plano, é um ponto ou é um círculo. Se o plano de intersecção contiver o centro da esfera, então a secção obtida será chamada de **círculo máximo**.





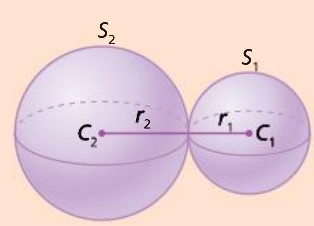
A afirmação de que a intersecção de um plano com uma esfera pode ser um círculo é explicada de maneira simples. Observe, na figura ao lado, a secção determinada pelo plano γ. Considere o ponto Q de γ tal que $CQ \perp \gamma$ e também um ponto P qualquer de γ e da superfície esférica. Sendo o triângulo CQP um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras: $(QP)^2 + (QC)^2 = (PC)^2$

Assim, temos $(QP)^2 = (PC)^2 - (QC)^2$.

Como as medidas QC (distância de C a Q) e PC (raio da esfera) são constantes, $QP = \sqrt{(PC)^2 - (QC)^2}$ também é constante, e a linha formada pelos pontos P da intersecção da secção com a superfície esférica é uma circunferência de centro Q e raio QP, ou seja, a secção é um círculo.

Exercícios resolvidos

R11. As esferas S_1 e S_2 representadas abaixo, de raio 3 cm e 4 cm, respectivamente, têm somente um ponto em comum. Calcular a distância entre seus centros.



▶ ***Resolução***

Como as esferas são tangentes, ou seja, têm somente um ponto em comum, o segmento que une seus centros tem medida $r_1 + r_2$; nesse caso, $3 + 4 = 7$.

Então, a distância entre os centros das esferas é 7 cm.

R12. Calcular o raio r_1 de uma secção plana de uma esfera sabendo que o raio da esfera é igual a 13 cm e que a distância dessa secção ao centro da esfera é 5 cm.

▶ ***Resolução***

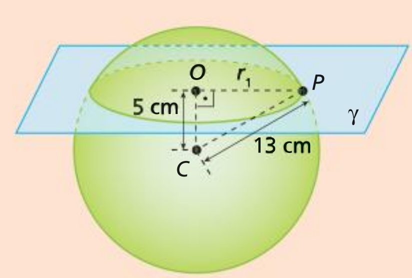
Observe a figura ao lado.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle COP$, obtemos:

$13^2 = 5^2 + r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = 144 \Rightarrow$

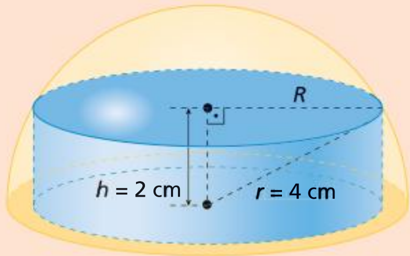
$\Rightarrow r_1 = 12$

Portanto, o raio r_1 é igual a 12 cm.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R13. Calcular o volume do cilindro inscrito na semiesfera representada abaixo.



▶ ***Resolução***

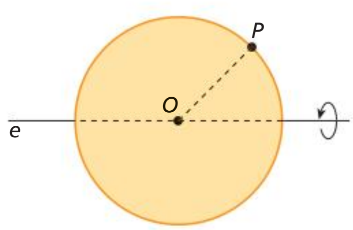
$V_{\text{cilindro}} = \pi R^2 h = \pi \cdot (r^2 - h^2) \cdot h = \pi \cdot (4^2 - 2^2) \cdot 2 = 24\pi$

Portanto, o volume do cilindro é 24π cm³.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

37. A figura abaixo gira em torno do eixo *e*.



Escreva que figura é descrita com esse giro:

a) pelo ponto *P*. circunferência

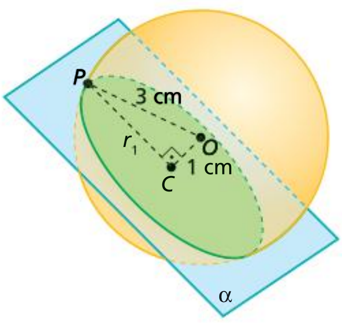
b) pelo segmento $\overline{OP}$. superfície lateral de um cone

c) pela circunferência de centro *O* e raio *OP*. superfície esférica

38. Um queijo moldado na forma esférica tem 10 cm de raio. Derretido, ele cabe exatamente em uma panela cilíndrica de raio 10 cm. Qual é a altura dessa panela? $\frac{40}{3}$ cm

39. Uma superfície esférica, de centro O_1 e raio r_1, tem somente um ponto em comum com outra superfície esférica, de centro O_2 e raio r_2. Qual é a distância entre O_1 e O_2? $r_1 + r_2$, ou $r_1 - r_2$, ou $r_2 - r_1$

40. Calcule o raio r_1 do círculo determinado pela intersecção do plano α com a esfera, conforme a figura abaixo. $2\sqrt{2}$ cm



41. Considere uma esfera de 2 cm de raio e um plano β interceptando a esfera de forma que determine uma secção plana de raio $\sqrt{3}$ cm. Calcule a distância entre o plano β e o centro da esfera. 1 cm

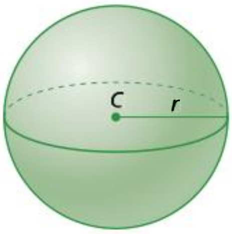
5.1 Área da superfície esférica e volume da esfera

Consideremos uma esfera de centro *C* e raio *r*.

Pode-se demonstrar que a **área da superfície esférica** e o volume da esfera são dados por:

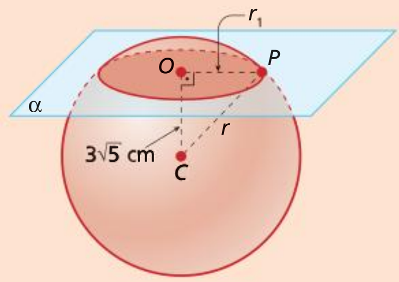
$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Exercícios resolvidos

R14. Uma secção plana de uma esfera, distante $3\sqrt{5}$ cm do centro da esfera, tem 36π cm^2 de área. Calcular o volume da esfera e a área de sua superfície.



▸ ***Resolução***

Como toda secção plana de uma esfera é um círculo, a área é dada por $A_1 = \pi r_1^2$. Assim:

$36\pi = \pi r_1^2 \Rightarrow r_1 = 6$ (raio da secção plana)

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle COP$, calculamos o raio da esfera.

$r^2 = 6^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 45 \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9$

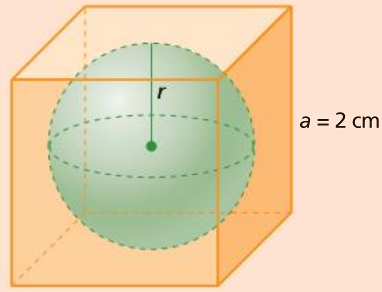
Então, podemos calcular o volume V da esfera e a área A de sua superfície:

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \Rightarrow V = 972\pi \Rightarrow V \simeq 3.052$

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 324\pi \Rightarrow A \simeq 1.017$

Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, 3.052 cm^3, e a área da sua superfície é, aproximadamente, 1.017 cm^2.

R15. Uma esfera foi inscrita em um cubo, conforme mostra a figura abaixo. Calcular o volume dessa esfera e determinar a razão entre as áreas da superfície cúbica e da superfície esférica.



▸ ***Resolução***

Pela figura, temos $a = 2r$, e como a aresta do cubo é igual a 2 cm, temos $r = 1$ cm.

Volume da esfera: $V_{esfera} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \Rightarrow V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi$

Área da superfície cúbica: $A_{cubo} = 6 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow A_{cubo} = 24$

Área da superfície esférica: $A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4\pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos: $A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_{esfera} = 12{,}56$

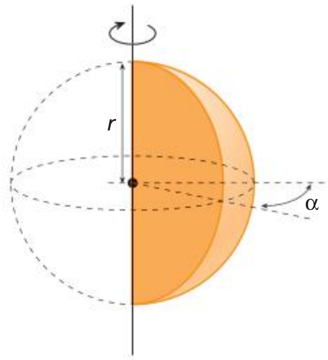
A razão entre as áreas é: $\dfrac{24}{12{,}56} \simeq 1{,}91$

Logo, o volume da esfera é $\dfrac{4}{3}\pi$ cm^3, e a área do cubo é quase o dobro da área da superfície esférica.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5.2 Cunha esférica e fuso esférico

Chama-se **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α, de um semicírculo de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



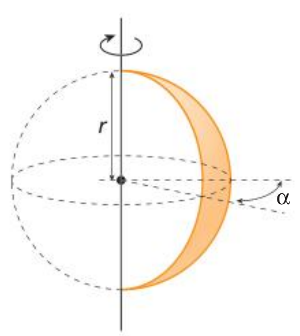
O **volume de uma cunha esférica** é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculado usando uma regra de três simples.

volume		medida do ângulo (em grau)
$\frac{4}{3}\pi r^3$	———	360°
V_{cunha}	———	α

Resolvendo essa regra de três, obtemos o volume da cunha esférica:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$$

Pela rotação, por um ângulo de medida α, de uma semicircunferência de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro, obtemos um **fuso esférico**.



A **área de um fuso esférico** é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculada usando uma regra de três simples.

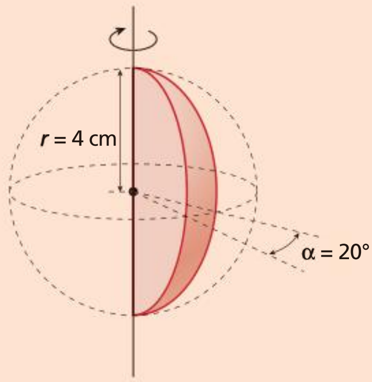
área		medida do ângulo (em grau)
$4\pi r^2$	———	360°
A_{fuso}	———	α

Resolvendo essa regra de três, obtemos a área do fuso esférico:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$$

Exercício resolvido

R16. Calcular o volume da cunha esférica e a área do fuso esférico da figura abaixo.



▶ ***Resolução***

O volume da cunha esférica é dado por:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 4^3 \cdot 20°}{270°} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128\pi}{27}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128 \cdot 3{,}14}{27} \simeq 14{,}9$$

A área do fuso esférico é dada por:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20°}{90°} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32\pi}{9}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32 \cdot 3{,}14}{9} \simeq 11{,}2$$

Portanto, o volume da cunha esférica é, aproximadamente, 14,9 cm^3, e a área do fuso esférico é, aproximadamente, 11,2 cm^2.

Exercícios propostos

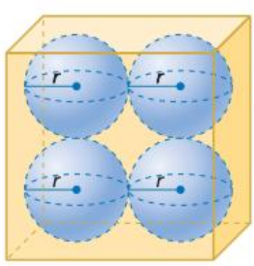
Registre as respostas em seu caderno

42. Determine a área da superfície esférica e o volume de cada esfera descrita abaixo.

a) A esfera tem 3 cm de raio. 36π cm^2; 36π cm^3

b) A esfera tem 18 cm de diâmetro. 324π cm^2; 972π cm^3

43. Determine o volume do paralelepípedo representado abaixo sabendo que cada esfera tangencia quatro faces do paralelepípedo e outras duas esferas. Além disso, o volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3. 32 cm^3



44. Calcule a área do fuso esférico e o volume da cunha esférica de 45° contidos em uma esfera de raio 6 cm. 18π cm^2; 36π cm^3

45. Se considerarmos uma laranja como sendo uma esfera de raio *r* composta de 12 gomos exatamente iguais, qual será a medida da superfície total de cada gomo? $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$

46. Uma cunha esférica de raio 1 m tem volume 1 m^3. Qual é a medida α, em radiano, do ângulo que a determina? $\frac{3}{2}$ radiano

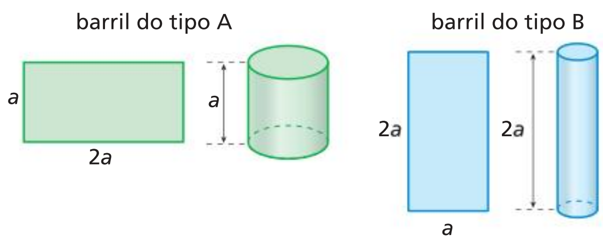
47. Para abrigar uma exposição, construiu-se uma estrutura coberta em forma de um hemisfério. Se o revestimento do piso totalizou 78,5 m^2, quantos metros quadrados de lona foram utilizados na cobertura toda? (*Use*: $\pi = 3{,}14$) 157 m^2

48. Um copinho de sorvete cônico tem 10 cm de altura (profundidade) e "boca" com 4 cm de diâmetro. Mostre que, se forem colocadas nesse copinho duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Aplicação

1. (Fuvest-SP) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e $2a$, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado.



Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se: alternativa a

a) $V_A = 2V_B$
b) $V_B = 2V_A$
c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$
e) $V_B = 4V_A$

2. Um cilindro de revolução é cortado por um plano paralelo ao eixo e a 3 cm desse eixo, determinando uma secção retangular cuja área é igual à área da base do cilindro. Calcule o volume desse cilindro sabendo que o raio da base é 5 cm. $\frac{625\pi^2}{8}$ cm³

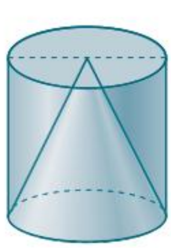
3. (Vunesp) Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é 243 cm³, e a altura é igual ao triplo do raio. $x = 9$ e $y = 3$

b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm², e a altura tem 10 cm a mais que o raio. $x = 15$ e $y = 5$

4. Uma lata cilíndrica de óleo, com 4 cm de raio da base e 19 cm de altura, indica ter conteúdo de 900 mℓ. Qual é o volume de ar contido nessa lata se ela tiver exatamente a quantidade de óleo especificada na embalagem? 54,6 mℓ

5. (PUC) A figura abaixo mostra um cone inscrito num cilindro. Ambos têm raio da base x e altura $2x$.



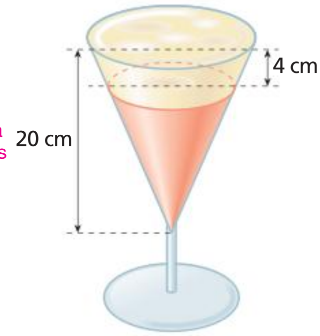
Retirando-se o cone do cilindro, o volume do sólido resultante é: alternativa b

a) $\frac{2\pi x^3}{3}$
b) $\frac{4\pi x^3}{3}$
c) $\frac{5\pi x^3}{3}$
d) $\frac{7\pi x^3}{3}$
e) $\frac{8\pi x^3}{3}$

6. Um cone circular reto tem raio da base igual a 10 cm. Sabendo que a medida do ângulo central do setor circular, que representa sua superfície lateral, é igual a 135°, determine o volume desse cone. $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm³

7. (FGV) Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura.

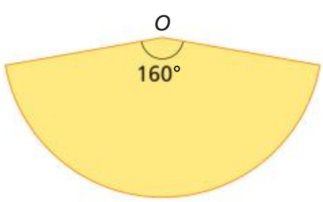
Recomendamos que antes de os alunos efetuarem os cálculos seja perguntado qual é a estimativa deles para essa situação: menos de 50%, 50% ou mais de 50%.



Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4 cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está mais bem aproximada na alternativa: alternativa c

a) 65% **b)** 60% **c)** 50% **d)** 45% **e)** 70%

8. (Mackenzie-SP) Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm.



Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é: alternativa d

a) 12 cm
b) 18 cm
c) 14 cm
d) 16 cm
e) 20 cm

9. Determine a altura de um tronco de cone de bases paralelas sabendo que os raios da base são, respectivamente, 3 m e 2 m, e que seu volume é 20π m³. $\frac{60}{19}$ m

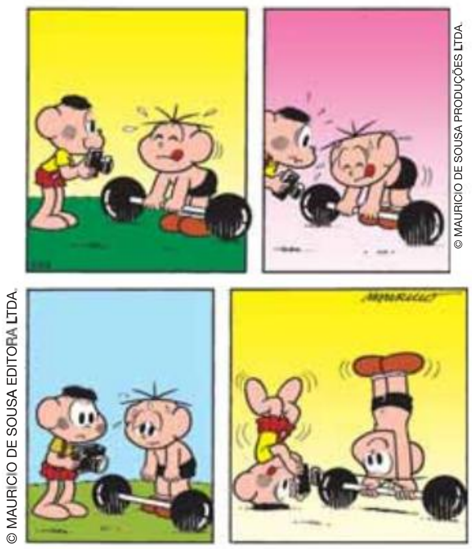
10. Considere um cone circular reto com 3 cm de raio da base e 9 cm de altura. A que distância do vértice um plano paralelo à base do cone deve cortá-lo de modo que o volume do tronco, assim determinado, seja $\frac{2}{3}$ do volume do cone? $3\sqrt[3]{9}$ cm

11. Calcule o volume de uma cunha esférica de 30° de uma esfera de volume igual a 972π m³. 81π cm³

12. Um plano secciona uma esfera cujo diâmetro é 34 cm. Determine a área da secção obtida sabendo que a distância do centro da esfera ao plano é 8 cm. 225π cm²

13. Os raios de duas esferas concêntricas são 15 cm e 8 cm. Calcule a área determinada pela intersecção da esfera maior por um plano tangente à esfera menor. 161π cm²

14. (PUC) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.



Suponha que cada esfera tenha 10,5 cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4 cm. Se a densidade do ferro é 7,8 g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use $\pi = \frac{22}{7}$.) alternativa e

a) 18 **b)** 16 **c)** 15 **d)** 12 **e)** 10

Aprofundamento

15. Calcule a área total da superfície de um cilindro circular reto que tem volume igual ao de um cubo, de aresta de 9 cm e área lateral igual à área total da superfície do cubo. $(486 + 18\pi)$ cm²

16. O raio da base, a altura e o comprimento da geratriz de um cone de revolução formam, nessa ordem, uma PA. Determine essa PA, sendo 12π cm³ o volume desse cone. (3, 4, 5)

17. Os diâmetros das bases de um tronco de cone de revolução medem 22 m e 4 m. Qual é a medida do diâmetro da base de um cilindro de mesma altura do tronco e de mesmo volume? 14 m

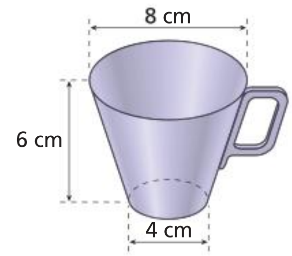
18. Calcule o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de aresta medindo 4 m. $32\pi\sqrt{3}$ m³

19. (Ibmec) Considere um cone circular reto de altura 24 e raio da base 10. Suponha que o segmento $\overline{AB}$ seja uma corda da circunferência da base que diste 5 do seu centro C. Então, sendo V o vértice do cone, o volume do tetraedro $ABCV$ é igual a: alternativa a

a) $200\sqrt{3}$ **c)** $600\sqrt{3}$ **e)** $1.000\sqrt{3}$
b) $400\sqrt{3}$ **d)** $800\sqrt{3}$

20. Uma melancia é composta de 95% de água. Calcule o volume de água existente em uma melancia esférica de 15 cm de raio. 4.275π cm³

21. (Mackenzie-SP) Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura.

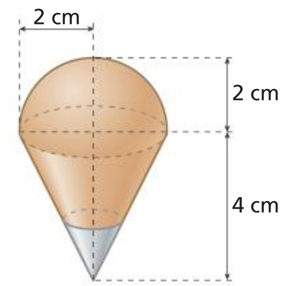


Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é: alternativa a

a) 168 cm³ **d)** 176 cm³
b) 172 cm³ **e)** 164 cm³
c) 166 cm³

22. Um ludologista fabrica piões usando as medidas indicadas na figura ao lado. Determine o volume de cada pião fabricado.

$\frac{32\pi}{3}$ cm³



23. (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1); porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

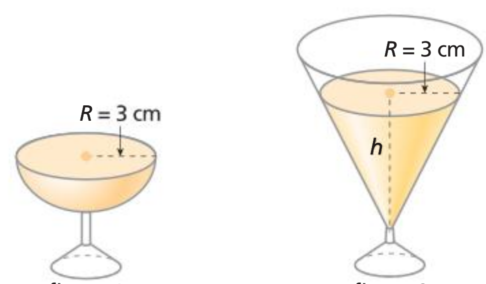


figura 1 figura 2

Considere:

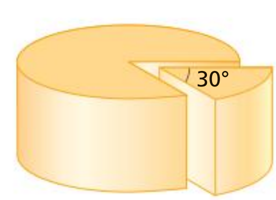
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetro, é de: alternativa b

a) 1,33 **b)** 6,00 **c)** 12,00 **d)** 56,52 **e)** 113,04

Desafio

24. Um queijo com formato cilíndrico tem 30 cm de altura e base com 25 cm de raio. Um supermercado vende esse queijo em fatias, conforme mostra a figura. Determine o volume de cada uma dessas fatias. $1.562,5\pi$ cm³



Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. A área, em centímetro quadrado, da superfície lateral de um cilindro reto de 6 cm de altura e 10 cm de raio da base é: alternativa b

a) 25π **c)** 100π
b) 120π **d)** 125π

2. A área total da superfície de um cilindro equilátero é ______, sendo r o raio da base desse cilindro. alternativa d

a) $\frac{\pi r^2}{2}$ **c)** $2\pi r^2 + r^2$
b) $2\pi r^2 + 2r^2$ **d)** $2\pi r^2 + 4\pi r^2$

3. A área da superfície lateral de um cone reto de 12 cm de altura e com raio da base medindo 9 cm é ______ cm^2. alternativa a

a) 135π **c)** 180π
b) 200π **d)** 250π

4. Considere um cilindro cujo raio r da base é o triplo da altura h. O volume desse cilindro é: alternativa a

a) $9\pi h^3$ **c)** $9\pi h^2$
b) $3\pi h^4$ **d)** $\frac{\pi h^3}{3}$

5. A área total da superfície de um cone reto, cujo comprimento g da geratriz é igual a duas vezes o raio r ($g = 2r$), é: alternativa b

a) $\frac{\pi g^2}{2}$ **c)** $\frac{\pi g^3}{2}$
b) $\frac{3\pi g^2}{4}$ **d)** πg^2

6. Se o raio de uma esfera é 1, então a área da superfície dessa esfera é ______ unidades de área. alternativa b

a) $\frac{4\pi^2}{3}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$
b) 4π **d)** $4\pi^2$

7. O volume de uma esfera de raio π é ______ unidades de volume. alternativa a

a) $\frac{4\pi^4}{3}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$
b) $4\pi^2$ **d)** 4

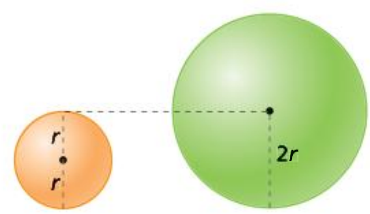
8. Uma indústria de processamento de suco de uva usa dois tipos de embalagem, ambos com formato cônico e de mesma altura. O raio da base da embalagem A é metade do raio da embalagem B, na qual cabe ______ do conteúdo da embalagem A. alternativa d

a) a metade
b) o dobro
c) o triplo
d) o quádruplo

9. Um plano α tangencia uma esfera de centro O e raio r, isto é, α tem só um ponto em comum com a esfera. Outro plano β, paralelo a α, contém o centro O. A distância entre os planos α e β é ______. alternativa c

a) π **c)** r
b) πr **d)** $2r$

10. As bolas de borracha representadas na figura abaixo são esféricas e maciças.



ADILSON SECCO

Com a quantidade de borracha usada para fazer 12 bolas maiores, podem-se fazer ______ bolas menores. alternativa c

a) 4 **c)** 48
b) 8 **d)** 96

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar cilindros, cones, troncos de cone, esferas e seus respectivos elementos.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	X	X	X		X	X				
Determinar o volume desses corpos redondos.				X			X	X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	137 a 140	137 a 140	142 a 146	140 e 141	142 a 146	151 a 154	151 a 154	147 e 148	151 a 153	153 e 154

Capítulo 8

Matrizes e determinantes


RODRIGO EMANUEL PHILIPPS/FOCO RADICAL

Atleta participando de uma corrida de montanha, Imbituba, Santa Catarina, 2016.

Corredores participando da maratona internacional de Hainan, China, 2016.

Objetivos do capítulo

- Identificar e classificar uma matriz.
- Operar com matrizes.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.

1 Matriz

O sedentarismo está em queda, e as corridas de rua estão na moda. A cada dia, mais e mais grupos formados por amigos, familiares e colegas de trabalho deixam de lado a preguiça e engrossam as fileiras dos que, por meio do esporte, buscam uma melhor qualidade de vida.

Convém lembrar que todo esporte deve ser praticado com moderação e com orientação de especialistas. Por isso, Daniel se prepara seguindo as tabelas elaboradas pelo seu treinador.

A tabela A mostra, em cada linha, os intervalos de tempo T1, T2 e T3, em minuto, que o atleta deve correr segundo as velocidades V1, V2 e V3, indicadas na tabela B. Cada série deve ser repetida três vezes, após descanso de quinze minutos, em cada dia da semana.

Tabela A:	Intervalo de tempo (minuto)		
	T1	T2	T3
1ª semana	6	3	6
2ª semana	3	6	3
3ª semana	3	6	9

Fonte: treinador.

Tabela B:	Velocidade (quilômetro por hora)	
	Manhã	Tarde
V1	8	12
V2	12	10
V3	10	12

Fonte: treinador.

CHINA FOTOPRES/GETTY IMAGES

A organização dos dados numéricos em tabelas facilita a leitura e a interpretação desses dados, bem como alguns cálculos. Observe como é fácil identificar, na segunda semana, quantos minutos Daniel deve correr no primeiro intervalo de treinamento. Para isso, basta verificar, na tabela A, o valor que aparece no "cruzamento" da segunda linha com a primeira coluna: "3 minutos".

Aplicando o mesmo raciocínio, podemos interpretar o significado de todos os números que constam nas tabelas. Por exemplo, o número 12 que aparece na terceira linha da segunda coluna da tabela B representa a velocidade, em quilômetro por hora, que Daniel deve desenvolver durante o terceiro intervalo de cada semana no período da tarde.

Em Matemática, tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais) são denominadas **matrizes**.

Uma matriz pode ser escrita entre colchetes ou entre parênteses.

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Define-se **matriz** $m \times n$ (lemos: "m por n") uma tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplos

a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 (lemos: "três por dois"), pois tem 3 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & x^2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & x \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×3 (lemos: "três por três"), pois tem 3 linhas e 3 colunas.

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×1 (lemos: "dois por um"). Essa matriz, por ter uma só coluna, recebe o nome especial de **matriz coluna**.

d) $\begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{4} & 0 & 5{,}1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×4 (lemos: "um por quatro"). Essa matriz, por ter uma só linha, é chamada de **matriz linha**.

Também podemos indicar o tipo de uma matriz ao lado dela, em sua extremidade inferior direita.

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 9 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$

(matriz de 2 linhas e 4 colunas)

b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & \sqrt{5} & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$

(matriz de 3 linhas e 5 colunas)

1.1 Representação genérica de uma matriz

Os números que compõem uma matriz são chamados de **elementos** ou **termos**.

Em uma matriz, cada elemento ocupa uma posição definida por certa linha e por certa coluna, nessa ordem.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{1ª linha} \\ \text{2ª linha} \\ \text{3ª linha} \\ \text{4ª linha} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 21 \\ \sqrt{3} & 16 & -8 \\ 6 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Observe, na matriz acima, que o elemento 16, por exemplo, ocupa a 3ª linha e a 2ª coluna. Indicamos esse elemento por a_{32}.

Portanto, $a_{32} = 16$ (lemos: "*a* três dois é igual a dezesseis").

Genericamente, cada elemento de uma matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij}, em que i indica a linha e j indica a coluna ocupadas por ele.

Observação

Na matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 21 \\ \sqrt{3} & 16 & -8 \\ 6 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

temos, ainda:

$a_{11} = 2$ $\quad$ $a_{13} = 3$

$a_{22} = -1$ $\quad$ $a_{23} = 21$

$a_{31} = \sqrt{3}$ $\quad$ $a_{32} = 16$

$a_{33} = -8$ $\quad$ $a_{41} = 6$

$a_{42} = 4$

Exemplos

a) O elemento 5 está na 1ª linha e na 2ª coluna; então, $a_{12} = 5$.

b) O elemento 0 está na 2ª linha e na 1ª coluna; então, $a_{21} = 0$.

c) O elemento $\sqrt{2}$ está na 4ª linha e na 3ª coluna; então, $a_{43} = \sqrt{2}$.

Uma matriz A é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, a matriz A, do tipo $m \times n$, pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Exercício resolvido

R1. Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, na qual $a_{ij} = i + 2j$.

▸ ***Resolução***

Uma matriz do tipo 2×3 é representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Aplicando a "lei de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

- $a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
- $a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- $a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$
- $a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$
- $a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

1.2 Igualdade de matrizes

Tomando-se matrizes de mesmo tipo, os elementos de mesmo índice, isto é, aqueles que ocupam a mesma posição, são denominados **elementos correspondentes**.

Considere as matrizes A e B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Como as matrizes A e B são do mesmo tipo (3×3), seus elementos correspondentes são:

a_{11} e b_{11}	a_{12} e b_{12}	a_{13} e b_{13}
a_{21} e b_{21}	a_{22} e b_{22}	a_{23} e b_{23}
a_{31} e b_{31}	a_{32} e b_{32}	a_{33} e b_{33}

Duas matrizes, A e B, são **matrizes iguais** quando são de mesmo tipo e todos os elementos correspondentes são iguais.

Exercício resolvido

R2. Determinar os valores de x, y e z que tornam as matrizes A e B iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y + z & 1 \\ 3 & 5 & y - z \\ |x| & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

▸ ***Resolução***

Para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que os elementos correspondentes sejam iguais; assim, devemos ter:

- $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$
- $\begin{cases} y + z = 7 \\ y - z = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} y + \cancel{z} = 7 \ \text{(I)} \\ y - \cancel{z} = 9 \ \text{(II)} \end{cases}$$
$$\overline{2y = 16 \Rightarrow y = 8}$$

Substituindo y por 8 em (I), obtemos:

$8 + z = 7 \Rightarrow z = -1$

Portanto, $x = \pm 4$, $y = 8$ e $z = -1$.

◆ Reflita

Não; nesse caso, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois $a_{11} \neq b_{11}$.

Considere as matrizes A e B do exercício **R2**. Caso mudássemos b_{11} para um número diferente de 2, as respostas para os valores de x, y e z seriam as mesmas?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Determine o tipo das matrizes abaixo.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 1×3

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ 3×1

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2×1

d) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ 2×2

2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ na qual $a_{ij} = 3i + 2j$.

3. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, \text{ para } i = j \\ 3j, \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. Identifique os elementos de A em que $i = j$ ou $i + j = 4$.

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = |-6| = 6$
$a_{22} = 7$
$a_{33} = 9$
$a_{13} = 3$
$a_{31} = -7$

5. Elabore uma lei de formação que represente os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$.

Resposta possível:
$A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Considere as matrizes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $(1\ 3\ 4\ 7\ 0)$.

Elas são iguais? Por quê?

Não, pois elas não são do mesmo tipo.
A primeira é do tipo 5×1 e a segunda é do tipo 1×5.

7. Determine a, b, c e d para que as matrizes

$$\begin{pmatrix} a + 2b & 3c - 2d \\ -a + 3b & -2c + d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$ sejam iguais.

$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

1.3 Algumas matrizes especiais

De acordo com algumas características apresentadas por certas matrizes, elas recebem nomes especiais. A seguir, veremos algumas dessas matrizes.

Matriz quadrada

Chama-se **matriz quadrada** aquela matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2 ou, simplesmente, matriz de ordem 2.

As matrizes quadradas apresentam elementos que formam o que chamamos de **diagonais**.

Considere uma matriz quadrada de ordem n.

Os elementos a_{ij} com $i = j$, isto é, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, formam a **diagonal principal** dessa matriz. Os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$, isto é, $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots, a_{n1}$, formam a **diagonal secundária** dessa matriz.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Observação

Uma matriz quadrada que tenha todos os elementos não pertencentes à diagonal principal iguais a zero é chamada de **matriz diagonal**.

Matriz nula

Uma matriz com todos os elementos iguais a zero é denominada **matriz nula**.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 3×2, também indicada por $0_{3 \times 2}$.

Matriz identidade

Chama-se **matriz identidade** (I_n) a matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são iguais a zero.

Exemplos

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observação

Em qualquer matriz identidade de ordem n, vale a relação:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

8. Determine a matriz quadrada A de ordem 2 na qual $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Se $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com $a_{ij} = 2i + j^2$, determine a diagonal principal e a diagonal secundária de A.
diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7

10. Sendo $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem. 375

11. Determine k, real, para que:

$$\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = I_2$$ 1

12. Denomina-se **traço** de uma matriz a soma dos elementos de sua diagonal principal. Determine o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com:

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$ 14

2 Adição e subtração de matrizes

O dono de uma rede de floriculturas mantém registrado cada tipo de ornamento vendido em três de suas lojas, para controlar a compra de suprimentos sem precisar manter um estoque elevado.

As tabelas abaixo mostram as vendas em duas semanas.

ISTOCKPHOTO/GETTY IMAGES

Semana 1	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	120	290	230
Cesta	49	40	37
Buquê	130	89	77

Semana 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	90	270	98
Cesta	76	44	53
Buquê	123	76	90

Com os dados das tabelas acima, podemos encontrar, por exemplo, o total de vendas de cada tipo de ornamento nas duas semanas. Para isso, somamos os dados correspondentes a cada tipo de ornamento em cada loja. Por exemplo, o total de arranjos vendidos nas duas semanas na loja 1 foi: $120 + 90 = 210$. Veja a tabela indicando a soma em cada loja:

Soma das semanas 1 e 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	210	560	328
Cesta	125	84	90
Buquê	253	165	167

Também podemos encontrar a diferença nas vendas de cada tipo de ornamento em cada loja nas duas semanas. Para isso, subtraímos os dados correspondentes a cada tipo de ornamento em cada estabelecimento. Por exemplo, a diferença entre o número de cestas vendidas nas duas semanas na loja 2 foi: $40 - 44 = -4$ (o sinal negativo indica que foram vendidas 4 cestas a mais na segunda semana em relação à primeira). Veja a tabela indicando a diferença em cada loja:

Diferença entre as semanas 1 e 2 (nessa ordem)	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	30	20	132
Cesta	−27	−4	−16
Buquê	7	13	−13

A ideia trabalhada nessa situação será usada no estudo da adição e da subtração de matrizes.

2.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ na qual $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Exemplo

Sejam as matrizes A e B, tal que: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

1º Reflita
A própria matriz A, pois $0_{m \times n}$ é a matriz nula, isto é, todos os seus elementos correspondem ao número real zero; portanto, ao somarmos cada elemento (a_{ij}) da matriz A com zero, obtemos o próprio elemento (a_{ij}).

Observação

Note que as matrizes A, B e C são do mesmo tipo.

Reflita

Que matriz você obtém se adicionar a uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz $0_{m \times n}$?

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A do tipo $m \times n$ (e indica-se por $-A$) a matriz que somada com A resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, pois: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Reflita

Que matriz você obtém ao calcular a matriz oposta da matriz oposta de uma matriz A?

A própria matriz A, pois, ao calcular o oposto do oposto de cada elemento a_{ij}, isto é, $-(-a_{ij})$, obtemos o próprio a_{ij}. Espera-se que os alunos percebam que o oposto do oposto de um número é o próprio número; então, a matriz oposta da matriz oposta é a matriz dada.

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- $A + B = B + A$ (*comutativa*)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*associativa*)
- $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ (*existência do elemento neutro*)
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$ (*existência do elemento oposto*)
- $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$ (*cancelamento*)

Reflita

Invente três matrizes de mesmo tipo e verifique a validade das propriedades da adição.

Resposta pessoal.
Espera-se que os alunos percebam que, independentemente dos valores atribuídos, as propriedades da adição de matrizes são válidas.
Verificar a conveniência de aproveitar essa atividade para fazer analogia entre as propriedades da adição no conjunto $\mathbb{R}$ e as propriedades da adição no conjunto das matrizes.

2.2 Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B, de mesmo tipo, é a soma da matriz A com a oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

R3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, obter $X_{2 \times 2}$ de modo que $A + X = B$.

▶ ***Resolução***

Representando a matriz X por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + a & 1 + b \\ 0 + c & 3 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

- $2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$
- $0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$
- $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$
- $3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Outro modo:

Também poderíamos determinar a matriz X usando as propriedades da adição de matrizes:

$A + X = B \Rightarrow$

$(-A) + A + X = (-A) + B \Rightarrow$

$\Rightarrow 0_{2 \times 2} + X = B - A \Rightarrow$

$\Rightarrow X = B - A$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

13. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } I_3,$$

efetue, quando possível, as operações:

a) $A + B$ **b)** $A + (B + C)$ **c)** $(A + B) + I_3$

Não é possível.

14. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $B - A$ **b)** $A - (B + I_2)$ **c)** $B - (A + 0_{2 \times 2})$

15. Determine a matriz X em cada item.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$ para todo a_{ij}, e $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, com $b_{ij} = 3i$ para todo b_{ij}, determine:

a) o elemento c_{22} da matriz $C = A + B$. 14

b) o termo de C igual a 3. $\nexists$

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real, $k \cdot A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $k = 3$, então:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

- Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ de tal modo que $B = A + A + A$, para cada par i, j, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, temos:
  $(b_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij}) + (a_{ij}) \Rightarrow (b_{ij}) = 3 \cdot (a_{ij})$
  Logo, $B = 3 \cdot A$.
  Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que: $A + A + A = 3 \cdot A$

- Para a matriz do exemplo:

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 2 + 2 + 2 & 0 + 0 + 0 \\ 3 + 3 + 3 & -7 - 7 - 7 \\ 5 + 5 + 5 & \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo: $A + A + A = 3A$

◆ Reflita

- Verifique, para a matriz A do exemplo, se é válida a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$.
- Para uma matriz A qualquer, vale a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$?

Exercício resolvido

R4. Determinar as matrizes X e Y tal que $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = A + B \end{cases}$, em que:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

▶ ***Resolução***

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} X + \cancel{Y} = A + 3B \\ X - \cancel{Y} = A + B \end{cases}$$
$$\overline{2X \qquad = 2A + 4B} \Rightarrow X = A + 2B$$

Como $X + Y = A + 3B$, temos:

$A + 2B + Y = A + 3B \Rightarrow Y = B$

Assim:

$$X = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

17. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, determine: Ver resolução no Guia do professor.

a) $3A$

b) $\frac{1}{3}(A + B)$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B$

d) $2A - (B + C)$

e) $2(A - C) + 3(B - A)$

f) $B + C - 2 \cdot I_2$

18. Invente duas matrizes A e B de mesmo tipo e verifique se a igualdade matricial é verdadeira ou falsa.

a) $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$ verdadeira

b) $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$ verdadeira

c) $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$ verdadeira

d) $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$ falsa

e) $-1 \cdot (-B) = B$ verdadeira

19. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y tais que: $\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$

19. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

4 Multiplicação de matrizes

Considere a situação a seguir.

Pedro precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. Veja as tabelas indicando os preços pesquisados e as quantidades de que ele precisa.

	Produto			
Supermercado	**Sal (R$/kg)**	**Cenoura (R$/kg)**	**Laranja (R$/kg)**	**Ovos (R$/dúzia)**
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

Produto	Quantidade
Sal	1 kg
Cenoura	0,5 kg
Laranja	3 kg
Ovos	2 dúzias

ENÁGIO COELHO

Para saber em qual dos supermercados ele gastaria menos, podemos calcular:

- Supermercado A $\rightarrow (1{,}72) \cdot 1 + (1{,}90) \cdot 0{,}5 + (1{,}55) \cdot 3 + (3{,}00) \cdot 2 = 13{,}32$
- Supermercado B $\rightarrow (1{,}76) \cdot 1 + (1{,}24) \cdot 0{,}5 + (1{,}72) \cdot 3 + (3{,}94) \cdot 2 = 15{,}42$

Também é possível efetuar esse cálculo por meio de matrizes. Veja:

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

◆ Reflita

A quantidade de colunas da matriz P poderia ser diferente da quantidade de linhas da matriz Q? Por quê?

Não. Se a quantidade de colunas da matriz P fosse diferente da quantidade de linhas da matriz Q, sobrariam elementos que não teriam correspondentes; portanto, não seria possível calcular o produto entre as matrizes.

A multiplicação das matrizes P (preço) e Q (quantidade) resulta na matriz C (custo da compra em cada supermercado):

$$C = P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}32 \\ 15{,}42 \end{pmatrix}$$

O elemento c_{11} da **matriz produto** $P \cdot Q$ foi calculado multiplicando o 1º elemento da linha 1 de P pelo 1º elemento da coluna 1 de Q, o 2º elemento da linha 1 de P pelo 2º elemento da coluna 1 de Q e assim sucessivamente; em seguida, os produtos obtidos foram somados:

- $p_{11} \cdot q_{11} + p_{12} \cdot q_{21} + p_{13} \cdot q_{31} + p_{14} \cdot q_{41} = c_{11}$

  $(1{,}72) \cdot 1 + (1{,}90) \cdot 0{,}5 + (1{,}55) \cdot 3 + (3{,}00) \cdot 2 = 13{,}32$

O elemento c_{21} da matriz produto $P \cdot Q$ é obtido de modo análogo.

- $p_{21} \cdot q_{11} + p_{22} \cdot q_{21} + p_{23} \cdot q_{31} + p_{24} \cdot q_{41} = c_{21}$

  $(1{,}76) \cdot 1 + (1{,}24) \cdot 0{,}5 + (1{,}72) \cdot 3 + (3{,}94) \cdot 2 = 15{,}42$

De modo geral:

> Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos obtidos ao multiplicar o 1º elemento da linha i de A pelo 1º elemento da coluna j de B, o 2º elemento da linha i de A pelo 2º elemento da coluna j de B, e assim sucessivamente.

Note que o produto das matrizes A e B, indicado por $A \cdot B$, só é definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, e esse produto terá o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

iguais

Exemplo

$$[-2 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-2) \cdot (-2) + 6 \cdot 6] = [40]$$

Exercícios resolvidos

R5. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determinar $A \cdot B$.

▶ ***Resolução***

Como a matriz A é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 3×2, existe o produto $A \cdot B$ (pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B).

Então $A \cdot B = C$, sendo $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

iguais

Os elementos da matriz C são obtidos do seguinte modo:

- c_{11}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 1ª coluna de B;

- c_{12}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 2ª coluna de B;
- c_{21}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{22}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 2ª coluna de B.

Assim, temos:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}$.

R6. Resolver a equação matricial:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

▶ ***Resolução***

São condições para a ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter 2 colunas, pois a matriz multiplicada tem 2 linhas;
- a matriz X ter 2 linhas, pois o produto das matrizes tem 2 linhas.

$$X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

iguais

Temos, então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot (-2) & a \cdot 3 + b \cdot (-1) \\ c \cdot 1 + d \cdot (-2) & c \cdot 3 + d \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtemos os sistemas:

- $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 3c - d = 5 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$$a = \frac{4}{5},\ b = \frac{2}{5},\ c = \frac{9}{5} \text{ e } d = \frac{2}{5}$$

Logo, $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

R7. Retomando a situação da abertura deste capítulo, vamos calcular as distâncias percorridas por Daniel nas corridas de cada série do período da manhã e da tarde.

RODRIGO EMANUEL PHILIPPS/FOCO RADICAL

▶ ***Resolução***

Vimos que as tabelas podem ser escritas na forma de matriz. Inicialmente, os dados da matriz A devem ser convertidos da unidade minuto para a unidade hora, pois a matriz B representa a velocidade na unidade km/h. Assim, como 3 min equivalem a 0,05 h, 6 min equivalem a 0,10 h e 9 min equivalem a 0,15 h, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Para obter as distâncias percorridas em cada série de cada período do dia nesse treinamento, devemos multiplicar as matrizes A e B. Em cada série das manhãs da 1ª semana, por exemplo, ele correu por 0,10 hora a 8 km/h mais 0,05 hora a 12 km/h mais 0,10 hora a 10 km/h, ou seja, ele percorreu:

$(0{,}10 \cdot 8 + 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10)$ km $= 2{,}4$ km

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando cada elemento da matriz produto, obtemos:

$c_{11} = 0{,}10 \cdot 8 + 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10 = 2{,}4$
$c_{12} = 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}05 \cdot 10 + 0{,}10 \cdot 12 = 2{,}9$
$c_{21} = 0{,}05 \cdot 8 + 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}05 \cdot 10 = 2{,}1$
$c_{22} = 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 12 = 2{,}2$
$c_{31} = 0{,}05 \cdot 8 + 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}15 \cdot 10 = 3{,}1$
$c_{32} = 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}15 \cdot 12 = 3{,}4$

Assim:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2{,}4 & 2{,}9 \\ 2{,}1 & 2{,}2 \\ 3{,}1 & 3{,}4 \end{bmatrix}$$

Portanto, em cada dia da 1ª semana, ele deve percorrer 2,4 km em cada uma das séries da manhã e 2,9 km em cada série da tarde; na 2ª semana, 2,1 km em cada série da manhã e 2,2 km em cada série da tarde; e na 3ª semana, 3,1 km em cada série da manhã e 3,4 km em cada série da tarde.

Propriedades da multiplicação

Dadas as matrizes A, B e C, tais que as operações entre elas, indicadas abaixo, sejam possíveis, valem as seguintes propriedades:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (*associativa*)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (*distributiva à direita*)
- $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ (*distributiva à esquerda*)

Reflita

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Vale a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes?
- Verifique que $A \cdot B = A \cdot C$, bem como $B \neq C$. Responda se vale a lei do cancelamento.

- $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

  $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

  $A \cdot B \neq B \cdot A$; logo, não vale a propriedade comutativa.
- $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

  $A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, não vale a lei do cancelamento.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

20. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

determine, caso exista:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A \cdot C$

d) $(A \cdot B) \cdot C$

e) $A \cdot (B \cdot C)$

a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) Não é possível calcular. c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

21. Calcule o valor de x e de y de modo que:

$$\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$ $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

22. Resolva a equação $A \cdot X + B = C$ em que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

23. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $X \cdot A = A$. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

O que pode ser dito a respeito da matriz X? X é a matriz identidade de ordem 2.

24. Invente quatro matrizes quadradas: $A_{1 \times 1}$, $B_{2 \times 2}$, $C_{3 \times 3}$ e $D_{4 \times 4}$

a) Realize as multiplicações abaixo:

- $A \cdot I_1$ e $I_1 \cdot A$ A e A
- $B \cdot I_2$ e $I_2 \cdot B$ B e B
- $C \cdot I_3$ e $I_3 \cdot C$ C e C
- $D \cdot I_4$ e $I_4 \cdot D$ D e D

b) Compare os produtos obtidos com as respectivas matrizes inventadas. Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

25. (Ibmec) Uma agência de propaganda utiliza nas campanhas publicitárias que elabora para seus clientes três tipos de material para divulgação em papel:

- impresso tipo PB, em preto e branco no papel simples;
- impresso tipo CK, colorido no papel simples;
- impresso tipo CKX, colorido no papel mais grosso.

Para fazer esse tipo de trabalho, a agência contrata normalmente três gráficas, que cobram preços unitários diferentes para cada tipo de impressão conforme a tabela abaixo.

Tabela 1

Tipo	PB	CK	CKX
Gráfica A	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica B	R$ 3,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica C	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 6,00

a) Determine a gráfica que, para fazer 300 impressões do tipo PB, 150 do tipo CK e 200 do tipo CKX, apresentaria o menor custo. gráfica C

b) No último ano, a agência fez 25% dos seus impressos com a gráfica A, 45% com a gráfica B e o restante com a gráfica C. Supondo que, em cada campanha deste último ano, a agência sempre fez os três tipos de impressão com a mesma gráfica e que os preços unitários foram os valores dados na Tabela 1, determine o custo unitário médio que a agência teve em cada tipo de impressão. PB: R$ 2,15; CK: R$ 2,70; CKX: R$ 4,60

5 Determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por **det** A), substituímos os parênteses ou colchetes da matriz por barras simples.

Exemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

b) $A = [4]$ e $\det A = |4|$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Determinante de matriz de ordem 2

Dada uma matriz quadrada A de ordem 2, o determinante de A é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

Determinante de matriz de ordem 3

Dada uma matriz quadrada A de ordem 3, o determinante de A pode ser calculado pela **regra de Sarrus**.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Pela regra de Sarrus, o determinante é calculado conforme o procedimento a seguir.

1. Ao lado da matriz, copiam-se suas duas primeiras colunas.

2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas filas à sua direita.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ & & & 10 & -8 \quad 0 \end{array}$$

3. Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção da diagonal secundária, os elementos das outras duas filas à sua direita.

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ & -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ -6 & 12 & 0 & & & \end{array}$$

4. Subtraem-se as somas dos produtos obtidos nos passos **2** e **3**, nessa ordem. Então: $\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$

Observação

Pierre Frédéric **Sarrus** (1798-1861) foi professor na universidade francesa de Strasbourg.
A regra de Sarrus foi escrita, provavelmente, em 1833.
Os determinantes constituem uma ferramenta útil no estudo dos sistemas lineares.

Observação

É possível calcular o determinante de matrizes de ordem maior que 3; porém, isso não será objeto de nosso estudo.

Exercício resolvido

R8. Determinar x para que seja verdadeira a igualdade:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

▶ ***Resolução***

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 2 & -1 & -x & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -2 & x & -1 \end{array}$$

$-2x^2 \quad -2 \quad 6 \qquad\qquad -8 \quad -x \quad 3x$

Assim, temos:

$(-8 - x + 3x) - (-2x^2 - 2 + 6) = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$x = 2$ ou $x = -3$

Portanto, $x = 2$ ou $x = -3$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

26. Dadas as matrizes $A = (2)$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det A 2 **b)** det B 5 **c)** det C −1

27. Aplicando a regra de Sarrus, calcule o valor dos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 0

b) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$ 0

28. Determine o valor da expressão:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ −8

29. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A \cdot B)$ 20

b) det $(B \cdot A)$ 20

c) det $A \cdot$ det B 20

30. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A + B)$ −12

b) $3 \cdot$ det A −75

c) det $(3 \cdot A)$ −225

d) det A + det B −22

31. Em cada item, depois de calcular os determinantes, responda às questões. (Esta atividade pode ser feita em grupo.)

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

O determinante de uma matriz de ordem 3 com uma linha de zeros sempre vale zero? sim

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

O determinante de uma matriz de ordem 3 em que uma linha é "o dobro de outra linha" sempre vale zero? E se fosse o triplo? sim; sim

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$

Se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma fila (ou linha, ou coluna) triplicada, seu valor triplica? sim

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $ad - bc$

O determinante de uma matriz de ordem 2 e o da matriz obtida dessa, trocando-se as linhas por colunas, são iguais? sim

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$

Determinantes de matrizes de ordem 2 que têm linhas (ou colunas) permutadas são iguais ou opostos? opostos

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ abc

O determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal? sim

32. Calcule os determinantes de I_1, I_2 e I_3. Qual valor você imagina para o determinante de I_4?

32. 1, 1, 1. Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

6 Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas

Neste capítulo, vimos que matrizes são tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas e colunas. Assim, uma tabela de números dispostos de maneira retangular em uma planilha eletrônica é uma matriz.

Observe como a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 15 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser representada em uma planilha eletrônica:

Campo que mostra a célula selecionada.

Campo que mostra o número ou, quando for o caso, a fórmula associada à célula.

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

A1 | *Fórmula* | 2

	A	B	C
1	2	3	0
2	–2	15	9
3	7	1	4
4			

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam esses procedimentos e explorem outros recursos das planilhas eletrônicas.
Algumas planilhas podem ter comandos diferentes dos apresentados.
Oriente os alunos caso a planilha eletrônica que tenham disponível funcione de maneira diferente.

Na planilha, cada elemento da matriz ocupa uma coluna (indicada por uma letra) e uma linha (indicada por um número). Assim, o elemento indicado por A1 é o elemento que está na coluna A e na linha 1 (nesse caso, o número 2).

Usando planilhas eletrônicas, é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada, além do produto de duas matrizes.

Como exemplo, vamos considerar as matrizes $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Vamos, inicialmente, representar a matriz A na planilha eletrônica:

Para calcular o determinante, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
=MATRIZ.DETERM(A1:B2)
(Calcula o determinante da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último elemento está em B2)

D2 | *Fórmula* | =MATRIZ.DETERM(A1:B2)

	A	B	C	D	E
1	2	3		**Determinante**	
2	5	7		–1	
3					

Agora, vamos representar as matrizes A e B na planilha, deixando um espaço de pelo menos uma fila entre elas:

Para calcular o produto $A \cdot B$, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)
(Determina o produto da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último está em B2 pela matriz cujo primeiro elemento está em D1 e o último está em F2.)

A5 | *Fórmula* | =MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)

	A	B	C	D	E	F
1	2	3		–1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4					
6						
7						

A seguir, é necessário converter a fórmula em uma fórmula de matriz.
Selecionamos na planilha o intervalo em que ficará a matriz produto, iniciando pela célula em que a fórmula foi digitada. Nesse caso, o produto será do tipo 2×3; então, selecionamos um intervalo com 2 linhas e 3 colunas.
Pressionamos F2 e, em seguida, CTRL+SHIFT+ENTER. Obtemos, assim, o produto $A \cdot B$.

A5 | *Fórmula* | {=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)}

	A	B	C	D	E	F
1	2	3		–1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4	17	20			
6	9	41	50			
7						

Nos dois casos, quando os alunos tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.
Por exemplo:

A4 | *Fórmula* | =MATRIZ.DETERM(A1:C2)

	A	B	C	D
1	–1	4	10	
2	2	3	0	
3				
4	#VALOR!	Um valor usado na fórmula tem o tipo de dados incorreto.		
5				

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

ADILSON SECCO

Reflita

Usando uma planilha eletrônica, calcule o determinante da matriz B e o produto $B \cdot A$.

- Que resultado você obteve em cada caso?
- Compare as respostas que você obteve com as de seus colegas e discutam por que vocês obtiveram esses resultados.

No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz B não é quadrada; no caso do produto $B \cdot A$, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

Exercícios complementares

5. b) $\begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$; total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

Aplicação

1. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, em que $b_{ij} = \dfrac{3(i-j)}{i+j}$, construa as matrizes e verifique se $A = B$. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = 1 + 2j$ e $b_{ij} = 2i - j + 1$, determine a matriz $X = 2A - 3B$. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. (UEL-PR) Durante a primeira fase da Copa do Mundo de Futebol realizada na França, em 1998, o grupo A era formado por quatro países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada país, registrados na tabela I.

Tabela I	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem uma pontuação que pode ser observada na tabela II.

Tabela II	Pontuação
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

A matriz $C = \begin{bmatrix} \text{Noruega} \\ \text{Marrocos} \\ \text{Escócia} \\ \text{Brasil} \end{bmatrix}$, que representa a pontuação final de cada país, ao término dessa primeira fase, é:

a) $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

alternativa c
Após obter o produto matricial (Tab. I) · (Tab. II), é preciso observar a ordem dos países em C.

4. (Vunesp) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produto, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que: alternativa e

a) a quantidade de produto do tipo P_2 vendido pela loja L_2 é 11.

b) a quantidade de produto do tipo P_1 vendido pela loja L_3 é 30.

c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pela loja L_i, $i = 1, 2, 3$, é 52.

e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

5. Duas máquinas, I e II, produzem três itens, A, B e C, de acordo com o número de peças feitas por hora de funcionamento apresentadas na matriz H. A matriz S, por sua vez, apresenta o número de horas que cada máquina trabalha por dia da semana.

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \qquad S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{S} & \text{T} & \text{Q} & \text{Q} & \text{S} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

$H_{3 \times 2}$, $S_{2 \times 5}$, $(H \cdot S)_{3 \times 5}$

a) Dê os tipos das matrizes H, S e $(H \cdot S)$.

b) Calcule o produto $H \cdot S$. Que informação ele nos dá?

c) Quantos itens B são produzidos na segunda-feira? Quantos itens C são produzidos na quinta-feira? 62 itens B; 27 itens C

6. Determine o valor de x que satisfaz cada equação.

a) $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 5$ $\quad \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ ou $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ $\quad 2$

7. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(\det A)^n$, sendo $n \in \mathbb{Z}_+$. 1

Aprofundamento

8. Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, encontre uma matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = C$, sendo C a matriz nula de ordem 2. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

9. Determine a matriz X tal que $X - 3B = I_3$, sendo:

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Exercício resolvido

R9. Dado um triângulo RST em um plano cartesiano, conhecidas as coordenadas dos vértices, podemos calcular sua área por meio da fórmula:

$$A_{RST} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_R & y_R & 1 \\ x_S & y_S & 1 \\ x_T & y_T & 1 \end{vmatrix}$$

Nessa fórmula, $|D|$ é o módulo do determinante de ordem 3, tal que: a 1ª coluna é formada pelas abscissas dos pontos, a 2ª, pelas ordenadas, e a 3ª, por 1.
Determinar a área do triângulo RST dados os pontos $R(-2, 2)$, $S(4, 3)$ e $T(5, -3)$.

▸ ***Resolução***

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -37$$

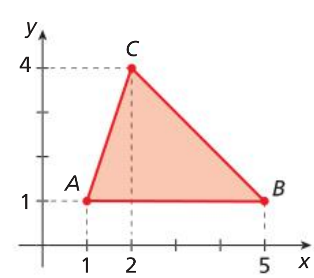
$$A_{RST} = \frac{1}{2} \cdot |-37| = 18{,}5$$

Logo, a área do triângulo é 18,5 unidades de área.

10. Observe o triângulo ABC.
Determine a área de sua superfície:

a) usando a fórmula estudada na Geometria plana $A_{ABC} = \dfrac{\text{medida da base} \times \text{medida da altura}}{2}$. 6 unidades de área

b) usando a fórmula dada no exercício resolvido **R9**. 6 unidades de área



ADILSON SECCO

11. (UFSC) A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ está sendo usada para representar as coordenadas dos vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ e $C(4, 3)$ de um triângulo ABC. Multiplicando-se M por uma constante $k > 0$, a matriz resultante da operação indicará os vértices do triângulo $A'B'C'$, de acordo com o mesmo padrão anterior de representação. Em tais condições, a área do triângulo $A'B'C'$ será igual a: alternativa d

a) $3k$ **b)** $6k$ **c)** k^2 **d)** $3k^2$ **e)** $6k^2$

Desafio

12. Considere o quadrilátero $ABCD$, cujos vértices são $A(0, 0)$, $B(3, -1)$, $C(6, 3)$ e $D(2, 4)$. Construa esse quadrilátero no plano cartesiano e determine sua área. Ver resolução no Guia do professor.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Uma matriz de ordem 2 é uma matriz: alternativa b

a) identidade.
b) quadrada.
c) nula.
d) linha.

2. Só existe adição ou subtração de matrizes se elas forem: alternativa c

a) opostas.
b) nulas.
c) de mesmo tipo.
d) quadradas.

3. Sejam as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$. Os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostos.
c) respectivamente, dos tipos 3×3 e 2×2.
d) respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

4. As matrizes $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostas.
c) identidades.
d) diagonais.

5. Na ______ de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. alternativa a

a) multiplicação
b) adição
c) subtração
d) igualdade

6. Multiplicando-se as matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtém-se uma matriz de ordem: alternativa a

a) 3×4
b) 3×5
c) 2×2
d) 3×3

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade: alternativa c

a) associativa.
b) distributiva à esquerda.
c) comutativa.
d) distributiva à direita.

8. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ é: alternativa d

a) -10
b) 22
c) 10
d) -22

9. Se $\det A \neq 0$, então a matriz A é: alternativa d

a) matriz linha.
b) nula.
c) diagonal.
d) nenhuma das anteriores.

10. Se $\det A = 5$ e A é uma matriz de ordem 2, podemos afirmar que: alternativa d

a) $\det(-A) = -5$
b) $\det\left(\dfrac{A}{10}\right) = 0{,}5$
c) $\det(2A) = 10$
d) $\det(2A) = 20$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar e classificar uma matriz.	X		X	X		X			X	
Operar com matrizes.		X	X		X	X	X			
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.								X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	160 a 165	165 a 167	160 a 171	160 a 165	163 a 171	160 a 171	168 a 171	172 e 173	160 a 165, 172 e 173	172 e 173

Capítulo 9

Sistemas lineares

ISAC KOSMINSKY/FRAMEPHOTO

Lama e detritos de mineração provenientes do rompimento da barragem do Fundão em Mariana, MG, 2015.

Objetivos do capítulo

- Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.
- Reconhecer e classificar sistemas lineares.
- Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.
- Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

1 Introdução ao estudo de sistemas lineares

Frequentemente nos deparamos com situações-problema cuja solução pode ser iniciada com a tradução de seus dados para a linguagem matemática por meio de equações ou sistemas de equações.

Tragédias ambientais como o rompimento da barragem de uma mineradora em Mariana, em 2015, por exemplo, podem ser analisadas por meio de equações: para calcular o tempo de chegada da lama ao oceano, no estado do Espírito Santo, resolve-se um sistema de equações lineares.

Já conhecemos os métodos da adição e da substituição para a resolução de sistemas. Veremos, neste capítulo, o método do escalonamento, também chamado de método da eliminação de Gauss-Jordan. Esse método guarda semelhanças com o método da adição e constitui uma poderosa ferramenta para a resolução, feita com computadores, de problemas complexos.

2 Equações lineares

Acompanhe a situação a seguir.

Luís foi ao caixa eletrônico sacar R$ 100,00 de sua conta. Se no caixa havia apenas notas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00, de quantas maneiras ele pode ter efetuado o saque?

STEVE DUNWELL/GETTY IMAGES

Esse é o tipo de problema que pode ser expresso por meio de uma equação linear.

Chamando de x o número de cédulas de R$ 10,00, de y o número de cédulas de R$ 20,00 e de z o número de cédulas de R$ 50,00, podemos associar essa situação à equação $10x + 20y + 50z = 100$.

A equação $10x + 20y + 50z = 100$ é chamada de **equação linear**.

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas; os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes das incógnitas; e b, real, é o termo independente.

Exemplos

a) $x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ **b)** $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 3$ **c)** $2x + 3y - z = 0$

Quando o termo independente é nulo, a equação linear é dita **homogênea**.

◆ Observação

As equações abaixo **não** são equações lineares.
- $x^2 + 3y - z = 7$ (incógnita x com expoente diferente de 1)
- $x - \frac{1}{y} = 3$ (incógnita y no denominador)
- $2x + 3yz = 0$ (termo $3yz$ com mais de uma incógnita)

2.1 Solução de uma equação linear

Acompanhe as afirmações a seguir.

- O par ordenado (3, 5) é solução da equação $-3x + 2y = 1$, pois, substituindo x por 3 e y por 5, obtemos uma sentença verdadeira: $-3 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{5} = 1$
- O terno ordenado (1, 3, 5) não é solução da equação $3x - 2y - 3z = 14$, pois $3 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{3} - 3 \cdot \mathbf{5} = 14$ não é uma sentença verdadeira.
- O terno ordenado (0, 0, 0) é solução da equação $x + 2y - 3z = 0$, pois $\mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{0} - 3 \cdot \mathbf{0} = 0$ é uma sentença verdadeira.

  Note que essa equação é homogênea.

Solução de uma equação linear é toda ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que torna a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ verdadeira, isto é, tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Exercício resolvido

R1. Sabendo que o par ordenado $(2a, a)$ é solução da equação $4x + 3y = 10$, determinar o valor de a.

▶ ***Resolução***

Substituindo x por $2a$ e y por a, obtemos:

$$4 \cdot (2a) + 3 \cdot (a) = 10 \Rightarrow 8a + 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{11}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Verifique se os ternos ordenados a seguir são soluções da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

a) (1, 3, 2) sim **b)** (2, 2, 2) não

2. Determine k de modo que o par $(3, k)$ seja solução da equação linear $2x + 3y = 12$. 2

3. Encontre duas soluções para a equação $2a + 3b - c = 0$. Respostas possíveis: (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2)

4. Verifique se o par $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das equações lineares $x - 3y = 1$ e $x + 3y = 5$. sim

3 Sistema de equações lineares

Acompanhe a situação a seguir.

Em Química, uma equação está balanceada quando o número de átomos dos reagentes é igual ao número de átomos dos produtos. Podemos fazer o balanceamento pelo método algébrico: resolvendo um sistema de equações lineares.

Considere a reação de combustão do gás metano, representada pela equação:

$$\underbrace{CH_4 + O_2}_{\text{reagentes}} \rightarrow \underbrace{CO_2 + H_2O}_{\text{produtos}}$$

reagentes	**produtos**
Número de átomos	Número de átomos
carbono (C): 1	carbono (C): 1
hidrogênio (H): 4	hidrogênio (H): 2
oxigênio (O): 2	oxigênio (O): 3

Para balancear essa equação, multiplicamos cada substância por uma incógnita:

$$a\,CH_4 + b\,O_2 \rightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$$

Com isso, formamos um sistema de equações lineares:

- carbono .... $a = c$
- hidrogênio....... $4a = 2d$
- oxigênio........... $2b = 2c + d$

$$\rightarrow \begin{cases} a = c \\ 4a = 2d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

Um **sistema *S* de equações lineares**, ou **sistema linear**, de m equações com n incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ são os coeficientes reais; e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são os termos independentes.

Exemplos

a) $S_1 = \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$ (sistema de duas equações com duas incógnitas)

b) $S_2 = \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 0x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ (sistema de três equações com quatro incógnitas)

Observação

O sistema S_2 também pode ser escrito assim:

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

3.1 Solução de um sistema linear

Veja as seguintes equações e algumas de suas soluções:

- $2x + y = 4 \rightarrow (-1, 6), (0, 4), \mathbf{(1, 2)}, (2, 0), ...$
- $x + 2y = 5 \rightarrow (-1, 3), \mathbf{(1, 2)}, (3, 1), (5, 0), ...$

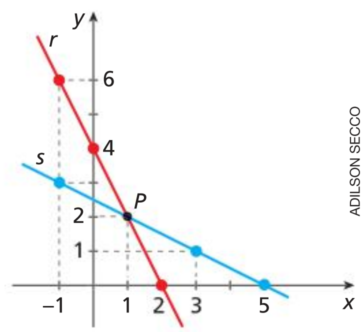
Observe que as duas equações têm o par ordenado (1, 2) como solução comum.

Então, esse par ordenado é uma solução do sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

A ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de m equações com n incógnitas quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Veja, no plano cartesiano representado ao lado, que os pares ordenados que são soluções da equação $2x + y = 4$ representam pontos da reta ***r***, e cada ponto da reta ***r***, por sua vez, representa uma solução da equação $2x + y = 4$. O mesmo ocorre para as soluções da equação $x + 2y = 5$ (reta s).

O par ordenado (1, 2) representa o ponto P, intersecção das retas r e s. O ponto P é a solução gráfica desse sistema.



ADILSON SECCO

Exemplos

a) Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

O par ordenado (2, 3) satisfaz as duas equações do sistema, pois $2 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{3} = 7$ e $3 \cdot \mathbf{2} - \mathbf{3} = 3$. Então, o par ordenado (2, 3) é solução do sistema.

b) Seja o sistema: $\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$

O terno ordenado (1, 3, 4) não é uma solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, temos: $\begin{cases} -\mathbf{1} + \mathbf{3} - \mathbf{4} = -2 \text{ (sentença verdadeira)} \\ 0 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot \mathbf{3} - 2 \cdot \mathbf{4} = 0 \text{ (sentença falsa)} \end{cases}$

Exercício resolvido

R2. Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} x + 4y = 12 & \text{(I)} \\ 5x + 2y = 24 & \text{(II)} \end{cases}$

▸ ***Resolução***

Multiplicando a equação (I) por -5 e adicionando as duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{-5x} - 20y = -60 & \text{(III)} \\ \cancel{5x} + 2y = 24 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$-18y = -36 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo y por 2 em (II), obtemos $x = 4$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(4, 2)\}$.

Observações

- O método da adição para a resolução de um sistema consiste em multiplicar os membros de uma ou mais equações por números convenientes e, em seguida, adicioná-las membro a membro.
- O conjunto solução de um sistema é formado por todas as soluções comuns a todas as equações do sistema.

Observação

A equação $ax + by = c$, com $b \neq 0$, também representa a expressão algébrica de uma função afim. Explicitando a lei dessa função como $y = f(x)$, podemos escrever $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, com $b \neq 0$. Seu gráfico é uma reta não vertical.

Reflita

Represente, em um mesmo plano cartesiano, as soluções gráficas de $2x + y = 7$ e de $3x - y = 3$. Em seguida, verifique que o par (2, 3) representa o ponto comum às duas retas obtidas e, portanto, é solução do sistema do exemplo **a**.

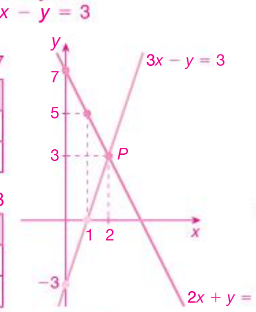
Temos: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

$2x + y = 7$

x	y
0	7
1	5

$3x - y = 3$

x	y
0	−3
1	0



ADILSON SECCO

As retas $2x + y = 7$ e $3x - y = 3$ se interceptam no ponto (2, 3). Logo, $P(2, 3)$ é a solução do sistema.

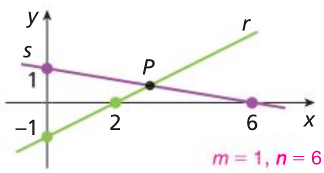
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

5. Os pontos $A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $B(1, 2)$ são soluções da equação $y = ax + b$. Calcule os valores de a e b. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

6. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Encontre a solução comum das duas equações lineares que se podem obter de $(2x + y)(-x + 3y) = 0$. $S = \{(0, 0)\}$

7. As retas r e s são, respectivamente, as representações gráficas das equações $mx - 2y = 2$ e $x + ny = 6$.



$m = 1$, $n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$

- Determine m, n e as coordenadas de P.

8. Considere o sistema: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Ver resolução no Guia do professor.

a) Dê três soluções para cada equação.

b) Em um mesmo plano cartesiano, represente as soluções gráficas de cada equação.

c) Identifique a solução gráfica do sistema.

9. Alguns alunos faziam prova em uma sala. Em dado momento, 5 meninas terminaram e saíram da sala, ficando o número de meninos igual ao dobro do número de meninas. Depois de alguns minutos, 7 meninos terminaram a prova e saíram, ficando na sala o mesmo número de meninas e de meninos. Determine o número total de alunos que faziam a prova nessa sala. 26 alunos

10. Misturam-se dois tipos de leite — um com 2% de gordura, outro com 4% de gordura — para obter, ao todo, 80 litros de leite com 2,5% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo são misturados? São misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.

3.2 Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado, de acordo com seu número de soluções, em:

- sistema possível e determinado (SPD) — uma só solução;
- sistema possível e indeterminado (SPI) — infinitas soluções;
- sistema impossível (SI) — nenhuma solução.

Observação

Se um sistema de equações lineares tem mais de uma solução, então ele tem infinitas soluções.

Exercício resolvido

R3. Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

a) R\$ 100,00, sendo o preço do litro de látex R\$ 4,00 e o do litro de corante R\$ 8,00.

b) R\$ 80,00, sendo o preço do litro de látex R\$ 4,00 e o do litro de corante R\$ 4,00.

c) R\$ 60,00, sendo o preço do litro de látex R\$ 4,00 e o do litro de corante R\$ 4,00.

ANDREAS KRAUS/SHUTTERSTOCK

▸ ***Resolução***

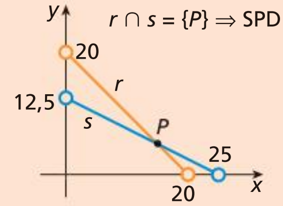
a) Representando a quantidade, em litro, de látex e de corante por x e y, respectivamente, e sabendo que sempre haverá mistura entre eles, construímos o sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 8y = 100 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 15$ e $y = 5$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(15, 5)\}$, isto é, S_1 tem apenas uma solução, constituindo um **sistema possível e determinado (SPD)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura ao lado.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

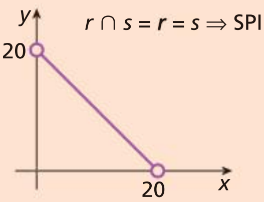
b) Nesse caso, construímos o sistema:

$$S_2 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 80 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

A segunda equação é, em ambos os membros, o quádruplo da primeira equação, representando, assim, a mesma informação. Algumas das infinitas soluções de S_2 são (1, 19), (2, 18), (3, 17) e (5,3; 14,7). Note que essas soluções são do tipo $(20 - k, k)$, com $0 < k < 20$ $(k \in \mathbb{R})$.

Logo, $S = \{(20 - k, k) \mid k \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < k < 20\}$ e S_2 é um **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas *r* e *s*, conforme mostra a figura abaixo.



Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas coincidentes e apresentam infinitos pontos em comum.

c) Para essa situação, construímos o sistema:

$$S_3 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

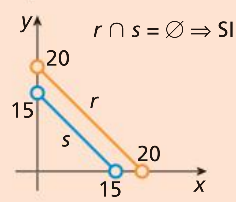
Resolvendo S_3, temos:

$$\begin{cases} -\cancel{4x} - \cancel{4y} = -80 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} = 60 \end{cases}$$

$$0x + 0y = -20 \Rightarrow 0 = -20 \text{ (sentença falsa)}$$

Não há valores para *x* e *y* que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$ e S_3 é um **sistema impossível (SI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas *r* e *s*, conforme mostra a figura abaixo.



Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas paralelas distintas e não possuem pontos em comum.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

11. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ SPD

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ SPI

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$ SI

d) $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$ SPI

12. Calcule *k* tal que $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases}$ seja:

a) um sistema possível e indeterminado. $k = 0$

b) um sistema possível e determinado. $k \neq 0$

13. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x + 3y = a \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

a) Existe algum valor de *a* que torne o sistema possível e indeterminado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado.

b) Existe algum valor de *a* que torne o sistema possível e determinado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado. não

13. a) sim, $a = \frac{15}{2}$; $S = \left\{\left(\frac{5 - 2k}{4}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$


MARIA TEIJEIRO/GETTY IMAGES

3.3 Sistemas lineares homogêneos

Acompanhe a situação a seguir.

Um jogo para *smartphone* tem início com a distribuição de fichas coloridas aos participantes. A tabela abaixo apresenta a quantidade de fichas de cada cor que cada jogador recebeu.

	Azul (*a*)	Branca (*b*)	Cinza (*c*)
Ana	3	2	1
Laís	1	2	3
João	5	6	7

O aplicativo atribui valores às cores das fichas, de modo que, para cada jogador, a soma inicial é zero. Para calcularmos o valor de cada ficha, basta resolver o sistema formado pelo número de fichas de cada jogador.

Representando o valor de cada cor por sua inicial, construímos o sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 & \text{(I)} \\ a + 2b + 3c = 0 & \text{(II)} \\ 5a + 6b + 7c = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -1 e a equação (II) por -2 e adicionando os resultados à equação (III), obtemos: $0a + 0b + 0c = 0$

A sentença é verdadeira para quaisquer valores de *a*, *b* e *c*. O sistema é SPI.

Atribuindo um valor real α para *a*, obtemos:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2b + c = 0 \\ \alpha + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + c = -3\alpha \\ 2b + 3c = -\alpha \end{cases} \Rightarrow c = \alpha \text{ e } b = -2\alpha$$

Logo, $a = \alpha$, $b = -2\alpha$ e $c = \alpha$.

Pela substituição de *a*, *b* e *c*, verificamos que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha, -2\alpha, \alpha)$ é solução do sistema:

- $3\alpha + 2 \cdot (-2\alpha) + \alpha = 0$
- $\alpha + 2 \cdot (-2\alpha) + 3\alpha = 0$
- $5\alpha + 6 \cdot (-2\alpha) + 7\alpha = 0$

Em particular, quando $\alpha = 0$, temos que $(\alpha, -2\alpha, \alpha)$ é a solução (0, 0, 0).

Quando $\alpha = 1$, a solução é (1, −2, 1).

Note que no sistema inicial $\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ 5a + 6b + 7c = 0 \end{cases}$ os termos independentes de todas as equações lineares são nulos.

Quando todos os termos independentes de um sistema linear são nulos, o sistema é denominado **homogêneo**.

Exemplos

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 6y + z - t = 0 \\ 0x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 8y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ 7x - 2z = 0 \end{cases}$

Todo sistema linear homogêneo com *n* incógnitas admite a ênupla (0, 0, ..., 0) como solução. Essa solução é chamada de **solução nula**, **trivial** ou **imprópria**.

Qualquer solução diferente de (0, 0, ..., 0) para um sistema homogêneo é chamada de **não nula**, **não trivial** ou **própria**.

Reflita

Existe algum sistema linear homogêneo que não tenha, pelo menos, uma solução?

Não; sempre há a solução trivial ou infinitas soluções.

Exercício resolvido

R4. Determinar a, b e c para que o sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 7z = c + a \\ -2x + y + 2z = 1 - c \\ x - y + z = a - b \end{cases}$ de incógnitas x, y e z seja homogêneo.

▸ ***Resolução***

O sistema é homogêneo se: $\begin{cases} c + a = 0 \Rightarrow a = -c \\ 1 - c = 0 \Rightarrow c = 1 \\ a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$

Como $c = 1$ e $a = -c$, temos $a = -1$. E, como $a = b$, temos $b = -1$. Logo, para que o sistema seja homogêneo, devemos ter $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

14. Calcule m e n para que os sistemas abaixo, de incógnitas x e y, tenham a mesma solução. $m = 1$ e $n = 3$

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

15. Dado o sistema homogêneo de incógnitas x, y e z, determine a, b e c. $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$

$\begin{cases} x + y + z = a - 2 \\ x + 2y + 3z = 2a + c \\ x - y + 2z = a + 2b - c \end{cases}$

3.4 Matrizes associadas a um sistema

Todo sistema linear pode ser associado a matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Exemplos

a) Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$

- Chamamos de **matriz associada incompleta** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, formada apenas pelos coeficientes das incógnitas.
- Chamamos de **matriz associada completa** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

b) Para o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$, definimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

matriz associada incompleta — matriz associada completa

Note que, quando uma das incógnitas do sistema não aparece em alguma das equações, seu coeficiente é nulo.

Representação matricial de um sistema

Aplicando a definição de multiplicação de matrizes e o conceito de matriz incompleta associada a um sistema, é possível representar um sistema em forma de equação matricial.

Exemplos

a) Sistema: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1 \quad 3} \; \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \rightarrow \boxed{1x + 3y = 7}$$

$$\boxed{7 \quad -4} \; \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \rightarrow \boxed{7x - 4y = -1}$$

b) Sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1 \quad -2 \quad 1} \; \boxed{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}} \rightarrow \boxed{1x - 2y + 1z = 3}$$

$$\boxed{1 \quad 0 \quad 2} \; \boxed{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}} \rightarrow \boxed{1x + 0y + 2z = 1}$$

Exercício resolvido

R5. Resolver o sistema linear associado à equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

▸ ***Resolução***

O sistema correspondente à equação é: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

Pelo método da adição, obtemos $5x = 5$. Então, $x = 1$ e $y = 2$.
Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1, 2)\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

16. Escreva o sistema correspondente a:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

17. Construa a matriz incompleta N e a matriz completa M para cada um dos sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

18. Dadas as matrizes completas, escreva os sistemas associados a elas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

19. Verifique se $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sim

20. Determine quais dos ternos ordenados são soluções do sistema linear: alternativas b, c, d

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $(1, 1, 1)$ **c)** $(-3, 1, 2)$ **e)** $(-1, 1, 0)$
b) $(0, 0, 0)$ **d)** $(3, -1, -2)$

21. Escreva o sistema associado a cada equação matricial e resolva-o.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

18. a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$

17. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

4 Escalonamento de sistemas lineares

4.1 Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto solução.

Indica-se que o sistema S_1 é equivalente ao sistema S_2 por: $S_1 \sim S_2$

Exemplos

a) Sejam os sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$$

O par ordenado (2, 3) é a única solução do sistema S_1, pois:

- $2 \cdot 2 + 3 = 7$ é uma sentença verdadeira;
- $2 + 3 = 5$ é uma sentença verdadeira.

O par ordenado (2, 3) também é a única solução do sistema S_2, pois:

- $3 \cdot 2 + 3 = 9$ é uma sentença verdadeira;
- $7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 5$ é uma sentença verdadeira.

Como $S = \{(2, 3)\}$ é conjunto solução dos dois sistemas, S_1 e S_2 são sistemas equivalentes ($S_1 \sim S_2$).

Reflita

- Resolva o sistema: $S_1 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$
- Escreva outro sistema (S_2) mantendo uma das equações de S_1. Substitua a outra equação pela soma dela com uma obtida pela multiplicação de um número real não nulo por aquela que foi mantida.
- Verifique que $S_1 \sim S_2$.

- Temos: $S_1 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

Resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$\begin{cases} \cancel{-2x} + 4y = 8 \\ \cancel{2x} - 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 5$ e $x = 6$

Logo, $S = \{(6, 5)\}$.

- Resposta possível:

Multiplicando a primeira equação de S_1 por -1 e somando à segunda, temos:

$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$
$x - y = 1$

$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

- Resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 5$ e $x = 6$

Assim, $S = \{(6, 5)\}$.

Portanto, $S_1 \sim S_2$.

b) Sejam os sistemas: $S_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 4 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

Podemos verificar que para todo número real α o terno ordenado $(2, -2\alpha, \alpha)$ é solução de S_1, pois são verdadeiras as sentenças:

- $2 + (-2\alpha) + 2 \cdot \alpha = 2$
- $2 \cdot 2 + (-2\alpha) + 2 \cdot \alpha = 4$
- $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2\alpha) + 4 \cdot \alpha = 6$

O terno ordenado $(2, -2\alpha, \alpha)$ também é solução de S_2, pois são verdadeiras as sentenças:

- $2 - (-2\alpha) - 2 \cdot \alpha = 2$
- $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2\alpha) - 6 \cdot \alpha = 4$
- $2 + 2 \cdot (-2\alpha) + 4 \cdot \alpha = 2$

Em particular, se $\alpha = 1$, uma das infinitas soluções de S_1 e de S_2 é $(2, -2, 1)$.

Como $S = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução dos dois sistemas, temos $S_1 \sim S_2$, isto é, S_1 e S_2 são sistemas equivalentes.

Exercício resolvido

R6. Verificar se os sistemas $\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - 1 = 2y \\ x = 5(y - 1) \end{cases}$ são equivalentes.

▶ ***Resolução***

Resolvendo cada um dos sistemas, temos:

- $\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - \cancel{2y} = -14 \\ 4x + \cancel{2y} = 24 \end{cases}$

  $2x = 10 \Rightarrow x = 5$

  Como $x = 5$, obtemos $y = 2$.

  Logo, $(5, 2)$ é a única solução desse sistema.

- $\begin{cases} x - 1 = 2y & \text{(I)} \\ x = 5(y - 1) & \text{(II)} \end{cases}$

  Substituindo (II) em (I), obtemos: $5(y - 1) - 1 = 2y \Rightarrow y = 2$

  Como $y = 2$, obtemos $x = 5$.

  Logo, $(5, 2)$ é a única solução desse sistema.

Como os dois sistemas têm a mesma solução, eles são equivalentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

22. Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas: $a = 0$ e $b = 1$

$$S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

23. Calcule m e n tal que as equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes.

$m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

24. Nos sistemas possíveis e determinados S_1, S_2 e S_3 a seguir, observe que:

- a segunda equação de S_2 é a soma da segunda equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 2 ($E = B + 2 \cdot A$);
- a terceira equação de S_2 é a soma da terceira equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 3 ($F = C + 3 \cdot A$);
- a terceira equação de S_3 é a soma da terceira equação de S_2 com a segunda equação de S_2 multiplicada por 4 ($I = F + 4 \cdot E$).

Este exercício tem o objetivo de fazer os alunos começarem a se familiarizar com a forma escalonada dos sistemas. Esse assunto será esclarecido mais adiante.

$$S_1 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(A)} \\ 2x + 5y + 4z = -2 & \text{(B)} \\ 3x + 2y + z = 3 & \text{(C)} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(D)} \\ y + 2z = 0 & \text{(E)} \\ -4y - 2z = 6 & \text{(F)} \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(G)} \\ y + 2z = 0 & \text{(H)} \\ 6z = 6 & \text{(I)} \end{cases}$$

Determine a solução de S_3 e verifique se ela também é solução de S_2 e de S_1, isto é, verifique se S_1, S_2 e S_3 são sistemas equivalentes. $(2, -2, 1)$; sim

4.2 Sistema escalonado

Para resolver e classificar sistemas lineares, podemos recorrer ao processo do escalonamento, ou método da eliminação de Gauss-Jordan.

Antes de estudar o método, veremos o que são sistemas escalonados e o modo de resolvê-los e classificá-los.

Um sistema em que todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem é dito **escalonado** quando, de cada equação para a seguinte, aumenta a quantidade de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo.

Exemplos

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 0x + 2y - z = 3 \\ 0x + 0y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 0x + 3y + 2z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + 2z - 3t = 7 \\ 0x + 0y + 5z + t = 2 \end{cases}$

Exercício resolvido

R7. Resolver e classificar os sistemas lineares.

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 2y - z = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$

▸ ***Resolução***

a) Como o sistema já está escalonado, temos $z = 5$.
Substituindo z por 5 na segunda equação, obtemos:
$2y - 5 = 3 \Rightarrow y = 4$

Substituindo z por 5 e y por 4 na primeira equação, obtemos:

$2x - 4 + 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, há uma só solução $\left(\frac{1}{2}, 4, 5\right)$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) O sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = k$, sendo k real, temos:
$\begin{cases} x + 2y - k = 4 \\ 2y - 6k = 0 \end{cases}$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 3k$ e $x = 4 - 5k$.
Atribuindo valores reais a k, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $k = -6$, obtemos o terno $(34, -18, -6)$, que satisfaz o sistema.
Como k é um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI).
Portanto, a solução do sistema será do tipo $(4 - 5k, 3k, k)$, em que k é real.

c) Na equação $0z = 2$, do sistema $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$, não há valores para z que tornem a igualdade verdadeira, pois toda multiplicação por zero resulta em zero. Sem solução, o sistema é impossível (SI).

◆ Observação

Quando um sistema admite infinitas soluções (SPI), chamamos a variável que assume o valor k, real, de **variável livre**.
No item **b**, z é a variável livre.
Há sistemas com mais de uma variável livre.

4.3 O processo do escalonamento

Para escalonar um sistema linear, escrevemos sistemas equivalentes a ele, adotando, quantas vezes for necessário, total ou parcialmente, o seguinte procedimento:

I) invertemos a ordem das equações;

II) multiplicamos ambos os membros de uma equação por um mesmo número, real e não nulo;

III) substituímos uma equação pela soma dela com outra multiplicada por um número real não nulo.

Observação

Se todos os termos de uma equação linear forem multiplicados por um mesmo número não nulo, a solução da equação não será alterada.

Exemplos

a) Para escalonar o sistema $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = 5 \\ 3x - y - 5z = 10 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita da 2ª e da 3ª equações.

Somamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{r} -\cancel{2x} + 4y + 2z = -6 \\ \cancel{2x} - 3y - 3z = 5 \\ \hline y - z = -1 \end{array}$	Somamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{r} -\cancel{3x} + 6y + 3z = -9 \\ \cancel{3x} - y - 5z = 10 \\ \hline 5y - 2z = 1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ y - z = -1 \\ 5y - 2z = 1 \end{cases}$

2º) Multiplicamos a nova 2ª equação por −5 e somamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} -\cancel{5y} + 5z = 5 \\ \cancel{5y} - 2z = 1 \\ \hline 3z = 6 \end{array}$$

3º) Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ y - z = -1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Com o sistema escalonado sua resolução fica facilitada. Observe:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 2$.
- Substituindo z por 2 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 2 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 7$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(7, 1, 2)\}$.

b) Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Como 1ª equação, escolhemos aquela cuja 1ª incógnita tenha coeficiente não nulo e, se possível, igual a 1 ou a −1, o que simplifica o processo. Assim, invertemos a posição da 1ª e da 2ª equação:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 & \text{(2ª equação no sistema original)} \\ 3x - y + z = 5 & \text{(1ª equação no sistema original)} \\ 2x + 3y - z = 7 & \text{(3ª equação no sistema original)} \end{cases}$$

2º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita da 2ª e da 3ª equações.

Somamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{r} -\cancel{3x} - 3y + 6z = -9 \\ \cancel{3x} - y + z = 5 \\ \hline -4y + 7z = -4 \end{array}$	Somamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 2y + 4z = -6 \\ \cancel{2x} + 3y - z = 7 \\ \hline y + 3z = 1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ -4y + 7z = -4 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

3º) No sistema obtido, invertemos a posição entre a 2ª e a 3ª equações:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 & \text{(3ª equação no sistema anterior)} \\ -4y + 7z = -4 & \text{(2ª equação no sistema anterior)} \end{cases}$$

4º) Multiplicamos a nova 2ª equação por 4 e somamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} \cancel{4y} + 12z = 4 \\ -\cancel{4y} + 7z = -4 \\ \hline 19z = 0 \end{array}$$

5º) Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \\ 19z = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema fica, então, facilitada:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 0$.
- Substituindo z por 0 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 0 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 2$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(2, 1, 0)\}$.

c) Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Invertemos a ordem das equações: passamos a 3ª equação para o lugar da 1ª equação e vice-versa, o que simplifica o processo, conforme foi visto no exemplo **b**.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & \text{(3ª equação do sistema original)} \\ 2x - y - z = -3 & \text{(2ª equação do sistema original)} \\ 3x + 2y + 2z = -1 & \text{(1ª equação do sistema original)} \end{cases}$$

2º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações.

Somamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por (-2) com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 2y - 2z = 0 \\ \cancel{2x} - y - z = -3 \\ \hline -3y - 3z = -3 \end{array}$	Somamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por (-3) com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{r} -\cancel{3x} - 3y - 3z = 0 \\ \cancel{3x} + 2y + 2z = -1 \\ \hline -y - z = -1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 3z = -3 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

3º) No sistema obtido, dividindo a 2ª equação por -3 e somando, membro a membro, a nova 2ª equação com a 3ª equação, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y + z = 1 \\ \quad 0z = 0 \end{cases}$$

Este último é um sistema escalonado equivalente ao sistema original.

A equação $0z = 0$ admite a solução $z = k$, em que k é um número real.

Assim, se admite solução com $z = k$, sendo k real, o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + k = 0 \\ \quad y + k = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 1 - k$ e $x = -1$.

Atribuindo valores reais a k, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $k = 3$, obtemos o terno $(-1, -2, 3)$, que satisfaz o sistema.

Como k é um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Então, a solução do sistema é do tipo $(-1, 1 - k, k)$, em que k é um número real.

Portanto, $S = \{(-1, 1 - k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema.

Exercício resolvido

R8. Escalonar e resolver o sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 4x - 6y + 8z = 16 \\ 4x - 7y + 6z = 15 \end{cases}$

▸ ***Resolução***

Multiplicamos a 1ª equação por (-4) e a somamos com a 2ª; e multiplicamos a 1ª equação por (-4) e a somamos com a 3ª: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2y + 4z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Dividimos a 2ª equação por 2: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Multiplicamos a 2ª equação por -1 e somamos com a 3ª: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$

A nova 3ª equação não admite solução.

Logo, o sistema é impossível (SI) e, portanto, $S = \varnothing$.

25. a) $S = \{(2, -1)\}$; SPD **b)** $S = \{(1, k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$; SPI **c)** $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD **d)** $S = \{(7k - 4, 1 - 3k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$; SPI

26. a) $S = \{(2, 3)\}$ **b)** $S = \{(3, -1)\}$ **c)** $S = \{(8, -1)\}$ **d)** $S = \{(-1, -3)\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

25. Resolva e classifique os sistemas escalonados.

a) $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \\ \quad 2y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + z = 3 \\ -4z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ \quad y + 3z = 1 \end{cases}$

26. Escalone e resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

27. Escalone, resolva e classifique os sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

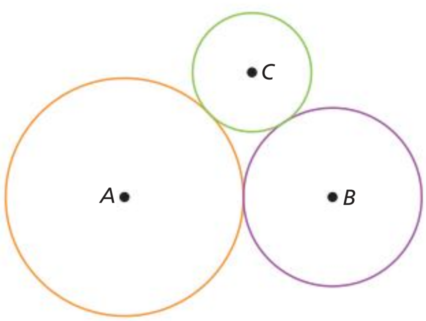
27. a) $S = \{(1, 3)\}$, SPD **b)** $S = \varnothing$, SI **c)** $S = \varnothing$, SI **d)** $S = \{(1, 2, -2)\}$, SPD **e)** $S = \left\{\left(\frac{28 - 3k}{5}, \frac{9 + k}{5}, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$, SPI **f)** $S = \left\{\left(\frac{k - 5}{3}, \frac{17 - 4k}{3}, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$, SPI

Aplicação

1. Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ de modo que $(2, k)$ seja solução da equação $3kx - ky + 40 = 0$, de incógnitas x e y. 10 ou −4

2. (Unicamp-SP) O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma cidade. Se cada um deles recenseasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como, no entanto, todas as residências foram visitadas e cada recenseador visitou 102, quantas residências tem a cidade? 3.060 residências

3. Em determinada região da cidade, existem três delegacias de polícia (A, B e C). Cada delegacia atende a um raio, de acordo com sua quantidade de funcionários (conforme mostra a figura).



ADILSON SECCO

A distância entre as delegacias A e B é 18 km, entre A e C é 16 km e entre B e C é 12 km. Determine o raio de atendimento de cada delegacia, admitindo que as circunferências sejam tangentes entre si.
$r_A = 11$ km, $r_B = 7$ km, $r_C = 5$ km

4. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ de modo que $(2m, -m)$ seja solução do sistema:
$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 3mx - y = 5 \end{cases}$, de incógnitas x e y. −1

5. (Mackenzie-SP) Um supermercado vende três marcas diferentes, A, B e C, de sabão em pó embalados em caixas de 1 kg. O preço da marca A é igual à metade da soma dos preços das marcas B e C. Se um cliente paga R\$ 14,00 pela compra de dois pacotes do sabão A, mais um pacote do sabão B e mais um do sabão C, o preço que ele pagaria por três pacotes do sabão A seria: alternativa b

a) R\$ 12,00
b) R\$ 10,50
c) R\$ 13,40
d) R\$ 11,50
e) R\$ 13,00

6. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema abaixo tenha solução única. 9

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

7. (Fuvest-SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3.300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas. 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas

8. (Fuvest-SP) Durante uma viagem, choveu 5 vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem? alternativa b

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

9. O sistema linear $\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = 0 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$, de incógnitas x e y, admite solução $(x, 0)$. Determine o valor de λ. −1

10. Determine a lei da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ sabendo que seu gráfico passa pelos pontos $A(2, 5)$ e $B(-3, 1)$. $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$

11. Dadas as equações $y = 2x - 6$ e $y = 2x - 4$:
a) represente, em um mesmo sistema de coordenadas, as funções dadas por essas expressões. Ver resolução no Guia do professor.
b) interprete os gráficos construídos no item **a** e dê o conjunto solução do sistema formado pelas equações. $S = \varnothing$

12. (UFJF-MG) A tabela abaixo fornece a quantidade de proteína, carboidrato e gordura, contida em cada grama dos alimentos A, B, C e D.

Alimentos	Unidades de proteína	Unidades de carboidrato	Unidades de gordura
A	4	4	4
B	6	1	3
C	6	2	3
D	2	3	1

Um nutricionista deseja preparar uma refeição, composta somente por esses alimentos, que contenha exatamente 50 unidades de proteínas, 21 unidades de carboidrato e 24 unidades de gordura. Então, quanto às maneiras de se combinarem quantidades desses quatro alimentos, em números inteiros de gramas, para compor tal refeição, é correto afirmar que: alternativa a

a) não existe tal maneira.
b) existe uma única maneira.
c) existem exatamente duas maneiras.
d) existem exatamente três maneiras.
e) existem infinitas maneiras.

Exercícios complementares

18. a) Sendo x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha de caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas em quilograma: $\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

13. Classifique os sistemas lineares abaixo e determine o correspondente conjunto solução.

a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ SPD; $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ SPI; $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

14. (Unipar-PR) Sobre o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$

é correto afirmar que é: alternativa c

a) possível e determinado.

b) possível e indeterminado.

c) impossível.

d) homogêneo.

e) inclassificável.

15. Resolva o sistema abaixo.

$\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

16. Resolva os sistemas lineares.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $S = \{(3, 1, 5)\}$

17. (Enem) A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose da criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em ano)}}{\text{idade da criança (em ano)} + 12}\right) \cdot \text{dose do adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta. Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a: alternativa b

a) 15 **b)** 20 **c)** 30 **d)** 36 **e)** 40

18. (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo do amendoim custa R\$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R\$ 20,00 e o quilo da castanha-do-pará, R\$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura, e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser R\$ 5,75.

Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das quantidades das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita.

b) Resolva o referido sistema e determine as quantidades, em grama, de cada ingrediente por lata. amendoim: 250 g; castanha de caju: 125 g; castanha-do-pará: 125 g

19. Resolva, por escalonamento, o sistema linear a seguir.

$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$ $S = \{(1, -1, 2, 3)\}$

Aprofundamento

20. Resolva o sistema abaixo.

$\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$ $S = \{(21, 6)\}$

21. Resolva o sistema abaixo.

$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$ $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

22. Sabendo que o sistema abaixo é possível e não admite solução trivial, determine k.

$\begin{cases} 2x + y + 4z = k \\ 3x + 2y + 5z = k \\ x + \frac{y}{2} + 2z = k^2 \end{cases}$ $\frac{1}{2}$

Desafio

23. (Fuvest-SP) Considere o sistema:

$\begin{cases} x - my = 1 - m \\ (1 + m)x + y = 1 \end{cases}$

a) Prove que o sistema admite solução única para cada número real m. Ver resolução no Guia do professor.

b) Determine m de modo que o valor de x seja o maior possível. $-\frac{1}{2}$

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. A equação que, com $2x + 2y = 2$, compõe um sistema linear 2×3 é: alternativa a

a) $y - z = 0$
b) $3x + 3y = 3$
c) $xy + xz + yz = 3$
d) $x^3 + y^3 = 8$
e) $xyz = 0$

2. A intersecção de duas retas concorrentes necessariamente representa a solução de um sistema linear 2×2: alternativa e

a) possível e indeterminado.
b) indeterminado.
c) homogêneo.
d) escalonado.
e) possível e determinado.

3. Para que os sistemas $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ sejam equivalentes, o valor de a deve ser:

a) 5
b) 4
c) 9
d) 12
e) 10

alternativa c

4. Um sistema linear homogêneo não pode ser:

a) SI
b) SPD
c) SPI
d) 2×3
e) 3×2

alternativa a

5. Para que $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ (a + 3)x + y = 5 \end{cases}$ seja um sistema escalonado, o valor de a deve ser: alternativa d

a) 2
b) 3
c) 0
d) -3
e) -5

6. A equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde ao sistema: alternativa b

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

7. Dos sistemas

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$$

pode-se dizer que: alternativa b

a) não têm solução.
b) são equivalentes.
c) têm infinitas soluções.
d) são homogêneos.
e) são indeterminados.

8. Em uma loja, os artigos A e B, juntos, custam R$ 55,00, os artigos A e C, juntos, custam R$ 50,00 e, juntos, os artigos B e C custam R$ 45,00. A soma dos preços dos artigos A, B e C é: alternativa c

a) R$ 85,00
b) R$ 80,00
c) R$ 75,00
d) R$ 70,00
e) R$ 65,00

9. Uma loja ofereceu a seus clientes a possibilidade de comprar lençóis, fronhas e colchas agrupados nos seguintes jogos:

(I) 2 lençóis e 2 fronhas;
(II) 2 lençóis e 2 colchas;
(III) 1 lençol, 1 fronha e 1 colcha.

O preço de cada peça é o mesmo em qualquer um dos jogos, I, II e III, que são vendidos por R$ 130,00, R$ 256,00 e R$ 143,00, respectivamente. O preço unitário da colcha é: alternativa c

a) R$ 85,00
b) R$ 80,00
c) R$ 78,00
d) R$ 70,00
e) R$ 65,00

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.								X	X
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	X	X	X	X			X		
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.						X			
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.					X		X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	178 a 180	181 a 183	187 e 188	182 a 185	189 a 192	185 a 187	181 a 183 e 187 a 192	180 a 182	180 a 182 e 189 a 192

Compreensão de texto

Montando uma dieta alimentar com sistemas lineares

Neste artigo vamos mostrar que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser útil para abordar um problema nutricional.

O leitor já deve ter reparado que as embalagens de alimentos trazem informações sobre o valor energético e as quantidades de carboidratos, gorduras, sódio, proteínas etc. contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência — VDR — para uma alimentação adequada.

Após vasculhar a geladeira e os armários da cozinha, montamos a tabela a seguir, que mostra os valores nutricionais de alguns alimentos encontrados: arroz e feijão *in natura**, peito de frango empanado congelado, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal.

Principais nutrientes de alguns alimentos

	Arroz (50 g)	Feijão (30 g)	Frango (80 g)	Suco (200 mℓ)	Pão (50 g)	Margarina (14 g)	VDR
Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2.000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55

Sistema linear

Para montar uma dieta, é preciso determinar as quantidades $x_1, ..., x_6$ (em porções) de cada alimento necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear.

$$\begin{cases} 190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 = 2.000 \\ 37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 = 300 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + x_4 + 4x_5 = 75 \\ 6x_3 + 1{,}5x_5 + 5x_6 = 55 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Observe que o sistema (I) possui quatro equações, correspondentes ao número de nutrientes, e seis incógnitas, correspondentes ao número de alimentos. A melhor maneira de resolver o sistema é por escalonamento [...], transformando o sistema na forma (I) escalonada reduzida.

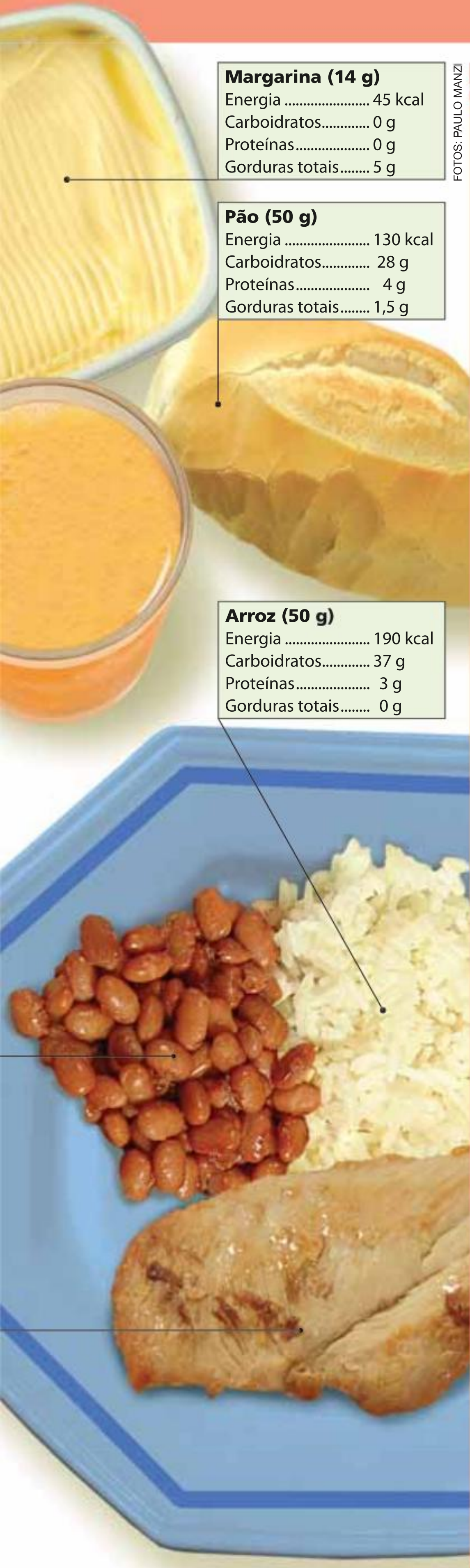
$$\begin{cases} x_1 - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0{,}19 \\ x_2 + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8{,}05 \\ x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9{,}16 \\ x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11{,}60 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

[...] nem toda solução matemática é utilizável na situação prática, já que numa dieta é necessário escolher $x_5 \geqslant 0$ e $x_6 \geqslant 0$ de modo que também tenhamos $x_1 \geqslant 0, ..., x_4 \geqslant 0$.

[...]

Fonte: DORNELLES FILHO, Adalberto A. Montando uma dieta com sistemas lineares. *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, 2006. p. 27-28.

* *In natura:* no estado natural, sem ter passado por processamento industrial.



Margarina (14 g)	
Energia	45 kcal
Carboidratos	0 g
Proteínas	0 g
Gorduras totais	5 g

Pão (50 g)	
Energia	130 kcal
Carboidratos	28 g
Proteínas	4 g
Gorduras totais	1,5 g

Arroz (50 g)	
Energia	190 kcal
Carboidratos	37 g
Proteínas	3 g
Gorduras totais	0 g

FOTOS: PAULO MANZI

Atividades

Registre as respostas em seu caderno

1. No texto da página ao lado, quais elementos foram considerados para o estudo dos valores nutricionais dos alimentos escolhidos?
energia, carboidratos, proteínas e gorduras totais

2. Observe, no texto, o sistema (I), obtido com base na tabela dos principais nutrientes.
4 equações e 6 incógnitas

a) O sistema tem quantas equações? E quantas incógnitas?

b) No sistema, a que correspondem cada equação e cada incógnita?
No sistema, cada equação corresponde a um nutriente, e cada incógnita, a um alimento.

3. Podemos dizer que o sistema é:

a) possível e determinado.

b) possível e indeterminado.

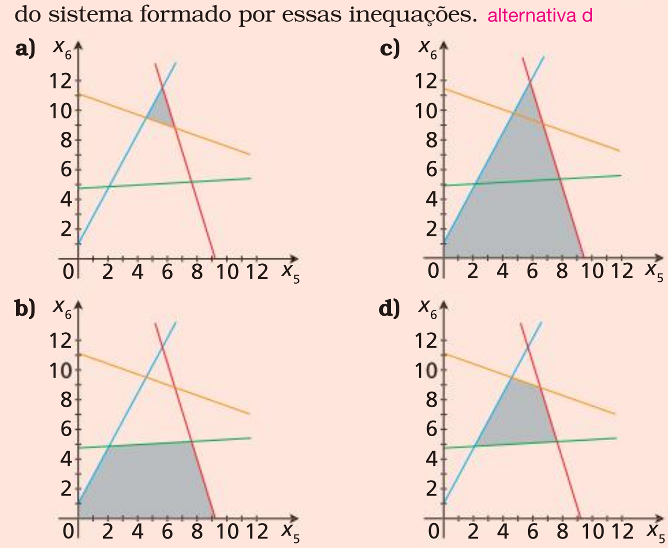
c) impossível.

alternativa b

4. Partindo da forma escalonada reduzida, escreva o sistema de modo que x_1, x_2, x_3 e x_4 sejam expressos em função de x_5 e x_6.
Ver resolução no Guia do professor.

5. Com base no sistema obtido na questão **4**, determine as inequações que relacionam x_6 com x_5 de modo que tenhamos $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_4 \geqslant 0$.

6. Cada inequação obtida na questão **5** corresponde a um semiplano no sistema de eixos x_5 e x_6, e os valores de x_5 e x_6 que satisfazem todas as inequações pertencem à região de intersecção dos semiplanos. Sabendo disso, verifique qual dos gráficos melhor representa o conjunto solução do sistema formado por essas inequações. alternativa d



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

7. De acordo com o gráfico, uma possível dieta composta apenas desses alimentos pode ser obtida escolhendo-se $x_5 = 5$ (250 g de pão) e $x_6 = 6$ (84 g de margarina). Substituindo esses valores no sistema da questão **4**, determine x_1, x_2, x_3 e x_4.

8. Em grupos, façam uma pesquisa levando em consideração estas e/ou outras questões que julgarem interessantes: Ver orientações no Guia do professor.

- Qual é a importância dos nutrientes considerados no texto?
- Qual é a diferença entre *gorduras saturadas* e *gorduras trans*, ingredientes informados na embalagem de alguns alimentos?
- Quais são as funções das *fibras alimentares* e do *sódio* no organismo humano?
- O que seria uma dieta saudável em termos de porcentagem de VD (valores diários), isto é, de quais grupos as porcentagens de VD devem ser maiores e de quais grupos devem ser menores?
- Que atitudes vocês podem tomar para ter uma alimentação mais saudável?

Preparem uma apresentação oral para a turma com os resultados encontrados. Para auxiliar na apresentação, vocês podem fazer cartazes ou usar recursos multimídia.

Se achar oportuno, o texto e a atividade de pesquisa podem ser mais bem desenvolvidos em um trabalho interdisciplinar com Biologia e Química.

5. $x_6 \leqslant 1{,}94x_5 + 1{,}12$
$x_6 \geqslant 0{,}04x_5 + 4{,}79$
$x_6 \leqslant -0{,}30x_5 + 11{,}04$
$x_6 \leqslant -2{,}76x_5 + 25{,}78$

7. $x_1 = 0{,}82$ (41 g de arroz)
$x_2 = 1{,}68$ (50,4 g de feijão)
$x_3 = 2{,}93$ (234,4 g de frango)
$x_4 = 2{,}7$ (540 mℓ de suco)

Capítulo 10

Análise combinatória

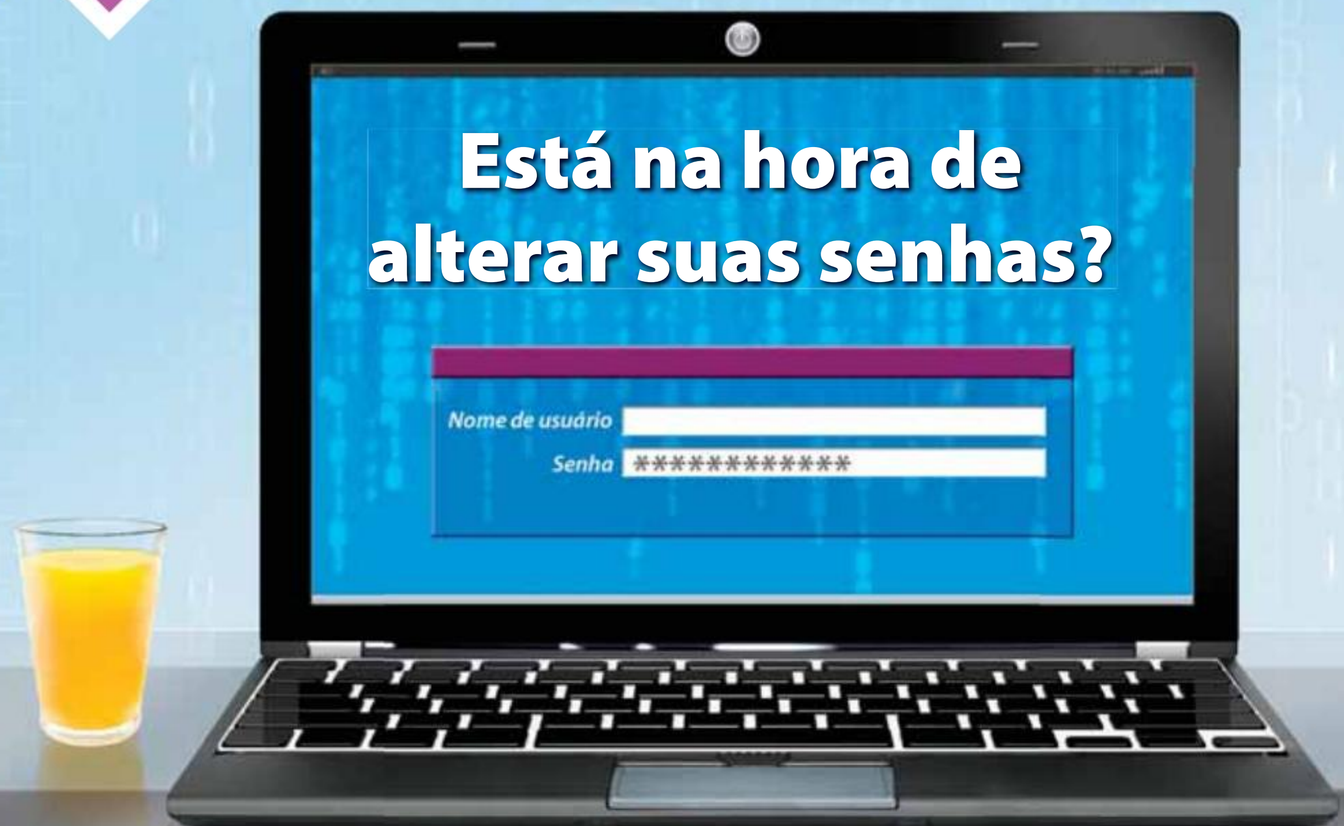


ILUSTRAÇÃO: LUIZ AUGUSTO BARBOZA

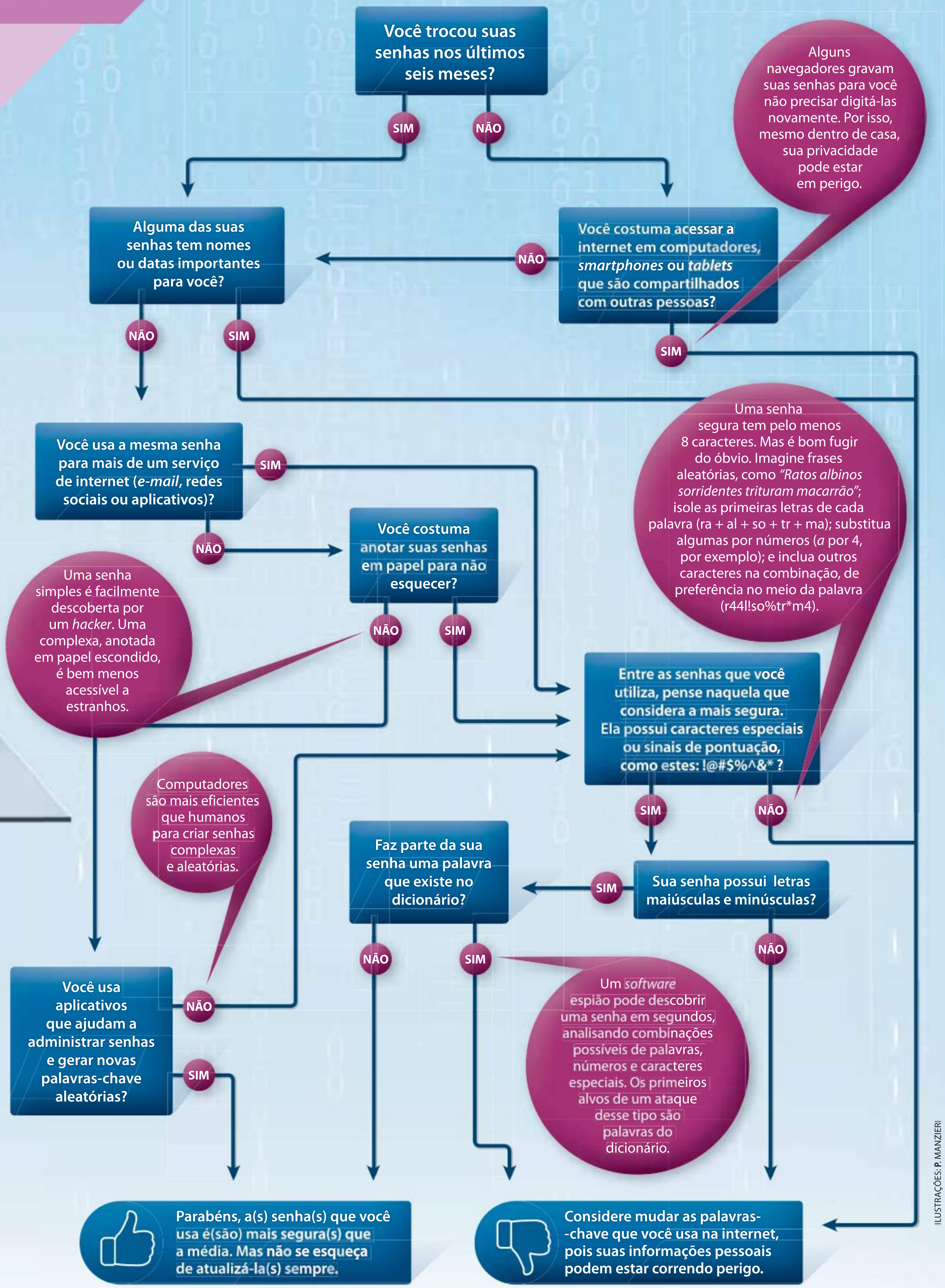
Objetivos do capítulo

- Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.
- Aplicar as noções de fatorial.
- Identificar a natureza dos problemas de contagem.
- Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.

*Quem acessa a internet com frequência está acostumado a criar senhas para diferentes tipos de serviço (*e-mail*, redes sociais, cadastros em* sites *etc.). Essas senhas, que muitas vezes misturam letras, algarismos e outros caracteres especiais, servem para garantir a segurança das informações e a privacidade dos usuários. Mas os termos que escolhemos como palavras-chave podem não ser tão seguros quanto imaginamos, o que nos torna alvos fáceis de vírus, pessoas e programas de computador mal-intencionados.*

Todos os anos, *sites* especializados em segurança na rede divulgam as senhas mais comuns descobertas por *hackers*. No topo da lista, sempre estão combinações óbvias, como 123456 e password (a palavra "senha", em inglês), ou formadas por sequências de caracteres do teclado, como qwerty. **É impossível estar completamente seguro na internet**, mas com criatividade e cuidado é possível escapar do óbvio e aprimorar sua segurança na rede.

SEGURANÇA EM DOBRO
Dê preferência a *sites* e serviços virtuais que tenham sistema de segurança complexo. Para acessá-los, além de uma senha, você precisará passar por uma etapa extra, como digitar um código autenticador ou reconhecer caracteres na tela.



Fontes: Worst Passwords of 2015. *SplashData*. Disponível em: <www.splashdata.com>. Acesso em: 4 fev. 2016; *How secure is my passport?*. Disponível em: <howsecureismypassword.net/>. Acesso em: 4 fev. 2016; *Cartilha de Segurança para Internet*: versao 4.0; CERT.br. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2012.

1 Contagem

No mundo atual, é cada vez maior a necessidade de armazenar e transmitir dados pessoais e sigilosos. Esse fato aumenta a nossa dependência dos dispositivos e meios eletrônicos que, por possuírem alto grau de conectividade, exigem muito cuidado com a segurança.

Além de complexos sistemas criptografados que compõem os suportes lógicos de programação dos computadores, celulares, *tablets* e outros suportes, a inviolabilidade dos dados pode ser assegurada com certo grau de confiança, quando o usuário cria senhas não previsíveis.

Uma senha nada mais é do que um conjunto de caracteres destinado a identificar o usuário ou a permitir acesso a dados, programas ou sistemas que não estão disponíveis ao público.

Além das 26 letras do alfabeto – que podem ser aplicadas em maiúscula ou em minúscula – e dos 10 algarismos conhecidos, ainda dispomos de vários caracteres especiais para formá-las.

Segundo o infográfico da abertura deste capítulo, uma senha segura deve ter pelo menos oito caracteres. Mesmo sem fazer uso dos caracteres especiais, a quantidade de senhas que podemos inventar é enorme.

Empregando apenas letras e algarismos, quantas senhas com o tamanho mínimo sugerido no infográfico podem ser formadas? E se pudermos utilizar também os outros oito caracteres especiais sugeridos?

Resolver esse problema implica quantificar todas as combinações possíveis para formar as diferentes senhas. Problemas de contagem desse tipo permeiam nosso cotidiano.

O campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto é chamado de **Análise combinatória**. A Análise combinatória pode ser aplicada nas mais diversas situações, como na Química, ao se investigar a possível união entre átomos, ou no esporte, ao se montar tabelas de campeonatos.

Observação

Números com algarismos distintos são aqueles que não têm algarismos repetidos. São válidos, por exemplo, 532 ou 125, mas não 332, 555 ou 242.

Associada à Probabilidade e à Estatística, a Análise combinatória constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados nos campos industrial, comercial, científico ou governamental.

No decorrer deste capítulo, veremos a resolução do exemplo acima e de outros problemas pertinentes à Análise combinatória.

Situações que recaem em problemas de contagem

Acompanhe as situações a seguir.

a) Um programa de TV sorteia duas casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendem à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?

Vamos partir de um esquema que represente números de 3 algarismos no sistema decimal de numeração:

Observação

A casa da centena não pode ser zero, porque, nesse caso, teríamos um número com dois algarismos, e não com três. Por exemplo: 047

centena	dezena	unidade

No primeiro caso, há 9 possibilidades para a centena (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Para cada algarismo da centena, há 10 possibilidades para a dezena (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), totalizando $9 \cdot 10$ possibilidades, isto é, 90 possibilidades. Para cada uma das 90 possibilidades, há 5 para a unidade (para o número ser par, a casa da unidade deve ser ocupada por 0, 2, 4, 6 ou 8). Logo, podemos formar $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$, ou seja, 450 números pares.

No segundo caso, como os algarismos devem ser distintos, há 9 possibilidades para a centena, 9 para a dezena e 8 para a unidade: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, ou seja, 648 números.

Portanto, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é possível formar 450 números pares de 3 algarismos e 648 números de 3 algarismos distintos.

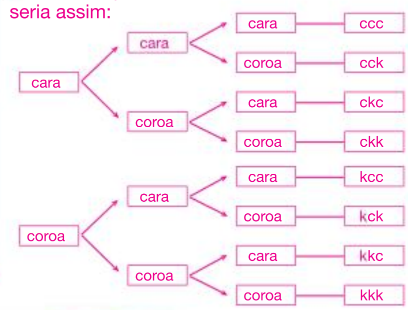
b) Raul almoça em um restaurante que oferece refeições a um preço fixo com direito a uma entrada, um prato principal e uma fruta. O restaurante oferece 2 opções de entrada (sopa ou salada), 3 opções de prato principal (carne, massa ou legumes) e 2 opções de fruta (pera ou banana). Quantas refeições diferentes Raul pode montar?

Ele deve fazer três tipos de escolha:

- E_1: sopa ou salada (**sp** ou **sl**);
- E_2: carne, massa ou legumes (**c**, **m** ou **l**);
- E_3: pera ou banana (**p** ou **b**).

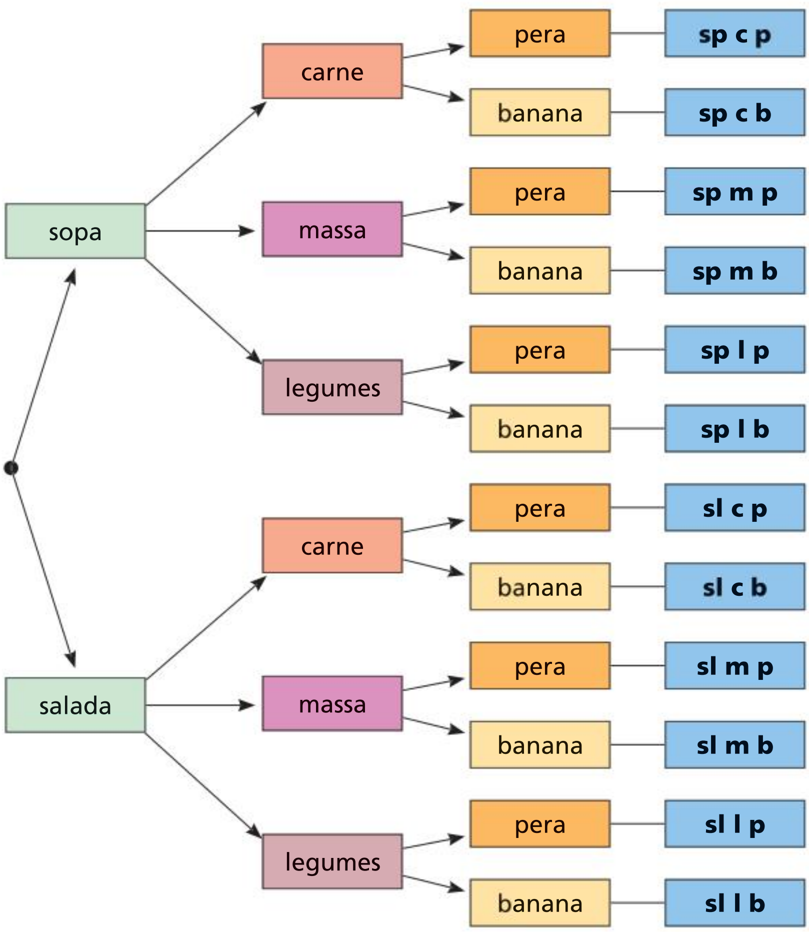
Reflita
Sim, é possível.
Quando lançamos uma moeda, podemos obter cara (c) ou coroa (k). Lançando uma segunda vez, podemos obter novamente cara (c) ou coroa (k). E, lançando uma terceira vez, podemos mais uma vez obter cara (c) ou coroa (k).

A árvore de possibilidades, nesse caso, seria assim:



ADILSON SECCO

Vamos organizar as opções em uma árvore de possibilidades:



ADILSON SECCO

CRÉDITOS DAS FOTOS: SOPA: MARGOUILLAT PHOTO/SHUTTERSTOCK; SALADA: VALERY121283/SHUTTERSTOCK; CARNE: BONCHAN/SHUTTERSTOCK; MASSA: YELLOWJ/SHUTTERSTOCK; LEGUMES: SIAMIONAU PAVEL/SHUTTERSTOCK; PERA: BERGAMONT/SHUTTERSTOCK; BANANA: MAKS NARODENKO/SHUTTERSTOCK

Portanto, Raul pode montar $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, ou seja, 12 refeições diferentes.

Observação

Em problemas de contagem mais simples, a **árvore de possibilidades**, também chamada **diagrama de árvore** ou **diagrama sequencial**, ajuda na visualização e na contagem de todas as possibilidades.

c) Agora, vamos considerar dois lançamentos sucessivos de uma moeda. Que resultados podem ocorrer?

Quando lançamos uma moeda, podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**). Lançando-a uma segunda vez, novamente podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**).

Vamos representar em uma tabela de dupla entrada esses 2 lançamentos:

1º lançamento \ 2º lançamento	Cara (c)	Coroa (k)
Cara (c)	cc	ck
Coroa (k)	kc	kk

URFIN/SHUTTERSTOCK

Observação

Fazer uma tabela é outra maneira de visualizar e de contar as possibilidades.

Nos 2 lançamentos, temos $2 \cdot 2 = 4$, ou seja, 4 resultados: (**c**, **c**), (**c**, **k**), (**k**, **c**) ou (**k**, **k**).

Ao resolver as três situações anteriores, empregamos um princípio que será muito usado neste capítulo: o **princípio multiplicativo**, também chamado de **princípio fundamental da contagem**.

Reflita

É possível fazer uma árvore de possibilidades para 3 lançamentos sucessivos de uma mesma moeda? Se sim, como ela seria?

1.1 Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma delas, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

O princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais etapas.

Exercícios resolvidos

R1. Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras?

▶ ***Resolução***

Vamos considerar que a ocupação das cadeiras ocorra em três etapas:

- E_1 (escolha de uma cadeira pelo primeiro aluno): 7 possibilidades
- E_2 (escolha pelo segundo aluno após ter ocorrido E_1): 6 possibilidades
- E_3 (escolha pelo terceiro aluno após terem ocorrido E_1 e E_2): 5 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Logo, os alunos podem ocupar as cadeiras de 210 maneiras diferentes.

A situação de 7 alunos escolherem 3 cadeiras é análoga à de 7 cadeiras serem escolhidas por 3 alunos, quanto ao número de possibilidades. Logo a quantidade seria a mesma.

◆ Reflita

Se houvesse uma inversão na situação da palestra — 7 alunos chegam atrasados e só há 3 cadeiras vazias no auditório —, qual seria a quantidade de grupos diferentes de 3 alunos que poderiam ocupar os 3 lugares?

R2. Ao entrar em um cinema, 6 amigos encontram uma fila de 6 poltronas livres. De quantas maneiras diferentes eles podem ocupar essas poltronas?

▶ ***Resolução***

O esquema abaixo representa as possibilidades de ocupação para as 6 poltronas.

6	5	4	3	2	1

Observe que são:

- 6 possibilidades para a ocupação da primeira poltrona;
- 5 possibilidades para a segunda;
- 4 possibilidades para a terceira;
- 3 possibilidades para a quarta;
- 2 possibilidades para a quinta;
- 1 possibilidade para a sexta.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Portanto, os amigos podem ocupar as poltronas de 720 maneiras diferentes.

◆ Reflita

Em uma situação parecida com a do **R2**, de quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem ocupar uma fila com 7 poltronas livres?

Pelo princípio multiplicativo, temos:
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, são 5.040 maneiras diferentes.

R3. Quantos números de 4 algarismos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

▶ ***Resolução***

O esquema abaixo representa o número de 4 algarismos:

milhar	centena	dezena	unidade

Observe que, para o algarismo do milhar, há apenas 5 possibilidades, pois essa posição não pode ser ocupada pelo algarismo zero. Para as posições restantes — centena, dezena e unidade —, há 6 possibilidades para cada uma.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.080$

Portanto, é possível formar 1.080 números com os algarismos dados.

R4. Quantos são os números de 4 algarismos distintos formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 que são divisíveis por 5?

▶ ***Resolução***

Se um número é divisível por 5, termina em 0 ou em 5. Vamos estudar esses dois casos.

__ __ __ 0

3 possibilidades
4 possibilidades
5 possibilidades: (1, 2, 3, 4 e 5)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

__ __ __ 5

3 possibilidades
4 possibilidades
4 possibilidades: (1, 2, 3 e 4)

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Assim, temos 60 números terminados em 0 e 48 números terminados em 5. Portanto, é possível formar 108 números divisíveis por 5.

R5. De 1990 até 2015, as placas de automóvel no Brasil tinham 3 letras seguidas por 4 algarismos. Quantas são as possibilidades de placas diferentes nesse sistema? (Considere o alfabeto com 26 letras.)

PAULO MANZI

Modelo de placa utilizado no Brasil para veículos emplacados de 1990 até dezembro de 2015.

▶ ***Resolução***

O diagrama a seguir representa os 7 espaços de uma placa de automóvel nesse sistema:

$\underbrace{\square\ \square\ \square}_{\text{3 letras}}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{\text{4 algarismos}}$

Cada um dos 3 primeiros espaços pode ser preenchido com qualquer uma das 26 letras do alfabeto, e cada um dos 4 últimos espaços pode ser preenchido com qualquer um dos 10 algarismos, conforme o esquema abaixo:

26	26	26	10	10	10	10

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de placas diferentes é:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$

Portanto, há 175.760.000 possibilidades de placas diferentes nesse sistema.

Se achar conveniente, conversar com o professor de Geografia e promover um trabalho interdisciplinar com base na questão do **R5**. Pode-se explicar aos alunos o que é o Mercosul (Mercado Comum do Sul) e discutir quais seriam os objetivos de se criar um sistema comum de emplacamento de veículos. Para obter informações sobre o Mercosul, você pode consultar o *site*: <www.mercosul.gov.br>. Segundo o Departamento Nacional de Trânsito (Denatran), a criação de um sistema comum de emplacamento permitirá um controle mais rigoroso do transporte de cargas e de passageiros, bem como de veículos particulares entre os países que compõem o bloco.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

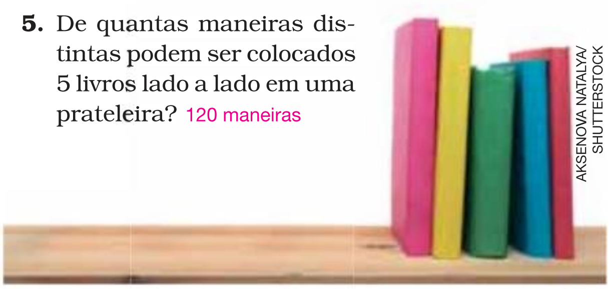
1. Com 3 tipos de macarrão e 2 tipos de molho, quantas opções de pratos diferentes de macarronada podem ser preparadas? 6 opções

2. Uma pessoa quer viajar de uma cidade A a uma cidade C, passando pela cidade B. As cidades A e B estão ligadas por 3 estradas: d_1, d_2 e d_3; e as cidades B e C estão ligadas por 4 estradas: e_1, e_2, e_3 e e_4. De quantos modos diferentes se pode fazer o percurso ABC? 12 modos

3. Doze cavalos participam de uma corrida. Se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras podem ser distribuídos o 1º e o 2º prêmios? 132 maneiras

4. Quantos são os números de 4 algarismos? 9.000 números

5. De quantas maneiras distintas podem ser colocados 5 livros lado a lado em uma prateleira? 120 maneiras



AKSENOVA NATALYA/SHUTTERSTOCK

6. A senha de acesso de um *site* é composta de 4 letras distintas seguidas de 3 algarismos distintos. A primeira letra não pode ser *Z*, e o primeiro algarismo não pode ser zero. Quantas diferentes senhas de acesso a esse *site* podem ser criadas? 223.560.000 senhas

7. Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a) podem ser repetidos. 180 números

b) não podem ser repetidos. 100 números

8. Quantos números entre 1.000 e 8.000 podemos formar usando apenas 1, 3, 5, 7 e 9 sem repeti-los? 96 números

9. A seleção para certo concurso é feita por uma prova com 6 questões. Para cada questão, há 3 opções de resposta. Os candidatos marcam as 6 respostas em um cartão igual ao da figura a seguir.

Código do candidato: xxxxxxx-y

	1	2	3	4	5	6
A	○	●	○	○	●	○
B	●	○	○	●	○	○
C	○	○	●	○	○	●

ADILSON SECCO

Calcule e responda: de quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido? 729 maneiras

10. Um técnico de atletismo deve escolher, de um grupo de 7 corredores, dois times de 4 atletas cada um para as corridas de revezamento 4×100 m e 4×200 m. Todos os 7 atletas podem correr em qualquer um dos revezamentos. Se o melhor corredor deve ser o último nas duas corridas, de quantas maneiras distintas o técnico pode formar os times, sendo que os outros 6 corredores devem participar de apenas uma equipe e cada ordem será contada como um time diferente? 720 maneiras

DUNCAN SELBY/ALAMY/GLOW IMAGES

Corrida de revezamento 4×400 m, EUA, 2012.

11. Uma torre de comunicações conta com 5 bandeiras sinalizadoras, e as mensagens são enviadas quando uma ou mais bandeiras são hasteadas, importando a ordem em que elas são hasteadas. Quantas mensagens distintas podem ser enviadas? 325 mensagens


MANGA

12. No código Morse, as "letras" são representadas por pontos e traços, em agrupamentos ordenados de 1 a 4 desses sinais para cada "letra". Quantas "letras" distintas podem ser representadas nesse código? 30 letras

A	B	C	D	E
•—	—•••	—•—•	—••	•

13. Quantos números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3? 542 números

14. Uma escola tem 677 alunos. Explique por que pelo menos 2 alunos devem ter as mesmas duas letras iniciais de seus nomes. (Considere o alfabeto com 26 letras.) Ver resolução no Guia do professor.

15. Resolva este exercício com um colega.

Em determinado país, os números de telefone possuem 10 dígitos, conforme o padrão:

- código de área com 3 dígitos: o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1;
- prefixo com 3 dígitos: o primeiro e o segundo dígitos não podem ser 0 ou 1;
- número da linha com 4 dígitos: os dígitos não podem ser todos iguais a 0.

a) Quantos diferentes códigos de área existem? 800 códigos

b) O código de área para certa cidade é 431. Com esse código, quantos diferentes prefixos existem? 640 prefixos

c) Um dos prefixos da cidade do item **b** é 223. Com esse prefixo, quantos números de linha são possíveis? 9.999 números

d) Quantos diferentes números de telefone de 7 dígitos são possíveis dentro do código de área 431? 6.399.360 números

e) Quantos números de telefone de 10 dígitos são possíveis nesse país? 5.119.488.000 números

2 Fatorial de um número natural

Boa parte dos problemas da Análise combinatória é resolvida por um produto de números naturais consecutivos, como $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n, sendo, no primeiro caso, $n = 3$ e, no segundo, $n = 8$.

Em geral, produtos do tipo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n - 1) \cdot n$ serão escritos com a notação de fatorial.

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:

- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 2$
- $1! = 1$
- $0! = 1$

Observação

Algumas calculadoras científicas têm a tecla $\boxed{x!}$, usada para calcular o fatorial de um número natural x.

Em uma calculadora com essa função, para calcular 10!, por exemplo, basta digitar 10 e apertar a tecla $\boxed{x!}$; no visor aparecerá o número 3.628.800, que é o resultado de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Esse procedimento pode variar dependendo da calculadora.

Exemplos

a) O fatorial de 4, ou seja, 4!, é 24, pois: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

A notação fatorial facilita a representação da multiplicação de números naturais consecutivos. Por exemplo, para representar o produto $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos escrever 25!

Se tivermos um número natural n muito grande, o cálculo de $n!$ será bastante trabalhoso. Por isso, ao representar $n!$, podemos fazer algumas substituições, como:

- $10! = 10 \cdot \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{9!} = 10 \cdot 9!$
- $n! = n \cdot (n - 1)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)!$ etc., para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Esse tipo de notação será muito usado na simplificação de expressões.

Exemplos

a) Veja como podemos simplificar as seguintes expressões:

- $\dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
- $\dfrac{1.001!}{1.000!} = \dfrac{1.001 \cdot \cancel{1.000!}}{\cancel{1.000!}} = 1.001$
- $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n + 1$ (simplificamos $n!$ com $n!$)

b) Nos exemplos abaixo, vamos escrever todas as expressões em termos de 5!.

- $\dfrac{6!}{6} = \dfrac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$
- $\dfrac{6!}{2} = \dfrac{6 \cdot 5!}{2} = 3 \cdot 5!$
- $4! = \dfrac{4! \cdot 5}{5} = \dfrac{5!}{5}$
- $\dfrac{8! - 6!}{3!} = \dfrac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!) - (6 \cdot 5!)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{(6 \cdot 5!) \cdot (8 \cdot 7 - 1)}{6} = 55 \cdot 5!$

Reflita

Se n é um número natural maior que 1, $(n - 1)!$, $n!$ e $(n + 1)!$ são números consecutivos?

Para que $(n - 1)!$, $n!$ e $(n + 1)!$ sejam números consecutivos, devemos ter o sistema:

$$\begin{cases} n! - (n-1)! = 1 \text{ (I)} \\ (n+1)! - n! = 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

De (II), temos: $(n + 1 - 1) \cdot n! = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot n! = 1 \Rightarrow n = 1$

Substituindo n por 1 em (I), temos:
$1! - (1 - 1)! = 1 \Rightarrow 0 = 1$ (falso)

O sistema é do tipo SI; logo, não há valor de n que torne $(n - 1)!$, $n!$ e $(n - 1)!$ números consecutivos.

Exercícios resolvidos

R6. Determinar o número natural n sabendo que: $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 4!$

▶ ***Resolução***

Podemos escrever $(n + 1)!$ como $(n + 1) \cdot n!$, obtendo: $\dfrac{(n+1) \cdot n!}{n!} = 4!$

Temos: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Obtemos, assim, uma nova expressão, que pode ser simplificada:

$\dfrac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 24 \Rightarrow n + 1 = 24 \Rightarrow n = 23$

R7. Calcular de quantas maneiras 8 crianças podem sentar em um banco se a criança mais nova deve necessariamente sentar do lado esquerdo do banco.

▶ ***Resolução***

O esquema ao lado representa o número de possibilidades de ocupação dos 8 lugares do banco.

1	7	6	5	4	3	2	1

O primeiro lugar no lado esquerdo do banco pode ser ocupado de uma única maneira (a criança mais nova). Sobram, então, 7 lugares para as outras 7 crianças. Assim, o próximo lugar pode ser ocupado de 7 maneiras diferentes; o lugar ao lado deste, de 6 maneiras diferentes; e assim por diante.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5.040$

Portanto, as crianças podem ocupar o banco de 5.040 maneiras diferentes.

Reflita

Veja como, usando os símbolos $+$, $-$, $:$, $\cdot$, $\sqrt{\ }$ e $!$, além de 4 "quatros", expressamos 1, 2, 3 e 4:

$1 = (4 + 4 - 4) : 4$

$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$

$3 = 4 - 4^{(4-4)}$

$4 = (4!) : \left(\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}\right)$

Faça o mesmo para expressar números de 5 a 10.

Respostas possíveis:

$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$

$6 = (4! : 4) + 4 - 4$

$7 = (4 + 4) - (4 : 4)$

$8 = 4 + 4 + 4 - 4$

$9 = (4 : 4) + 4 + 4$

$10 = (44 - 4) : 4$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

16. Calcule o valor de:

a) $\dfrac{7!}{4!}$ 210

b) $\dfrac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!}$ $\dfrac{7}{4}$

17. Escreva as expressões em termos de 4!

a) $\dfrac{5!}{5}$

b) $\dfrac{5!}{2!}$

c) $\dfrac{7! - 5!}{4}$

Ver resolução no Guia do professor.

18. Calcule n sabendo que:

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 30$ 6

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ 8

19. As letras A, B, C, D, E e F devem ser escritas uma em seguida da outra. De quantas maneiras isso pode ser feito? 720 maneiras

20. Os portões de 5 casas devem ser pintados com as cores azul, marrom, branca, verde e vermelha. De quantas maneiras isso pode ser feito se cada portão deve ser pintado de uma única cor e dois portões não podem ser pintados da mesma cor? 120 maneiras

21. Quantos números pares maiores de 40.000 podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 se cada algarismo é usado apenas uma vez em cada número? 42 números

3 Permutações

3.1 Permutação simples

Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, um anagrama da palavra AMOR é ROMA.

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

Para a primeira letra, temos 4 possibilidades (A, M, O, R). Depois dessa escolha, há 3 possibilidades para a colocação da segunda letra, 2 para a terceira letra e 1 para a quarta letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, ou seja, 24 anagramas.

Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra AMOR.

De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam de posição. Daí o nome **permutação** (permutar significa trocar os elementos que formam um todo com a finalidade de obter nova configuração).

Reflita

- É possível resolver esse problema usando uma árvore de possibilidades? Em caso afirmativo, faça isso.
- Todos os anagramas encontrados formam palavras com significado?

- Sim, pode-se resolver usando um diagrama de árvore.
- Não. Anagramas tais como AOMR, RMAO ou MROA, por exemplo, formam palavras sem significado.

> Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se **permutação simples** dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos.

Indica-se por P_n o número de permutações simples de n elementos.

Vamos calcular o número de permutações simples em algumas situações.

Para saber, por exemplo, quantos anagramas da palavra CINEMA começam por C, consideramos que, para a primeira letra, temos 1 possibilidade (C) e que as outras 5 letras podem ser permutadas entre si.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 5! = 120$

Logo, há 120 anagramas de CINEMA começados por C.

Acompanhe mais uma situação.

Vamos considerar que as 20 carteiras de uma sala de aula podem ser ocupadas por 20 alunos de modos distintos. Dizemos, então, que esses alunos podem ocupar essas carteiras de P_{20} modos, ou seja:

$P_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.432.902.008.176.640.000$

Logo, há 2.432.902.008.176.640.000 modos de os alunos ocuparem essas carteiras.

$\frac{P_{n+2}}{P_n} = 42$

$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 42$

$n^2 + 3n + 2 = 42$
$n^2 + 3n - 40 = 0$
$n = 5$ ou $n = -8$ (não serve)

Logo, $n = 5$.

Reflita

Qual é o valor de n se $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 42$?

> O número de permutações simples de n elementos é dado por:
> $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou $P_n = n!$

Exercícios resolvidos

R8. De quantas maneiras diferentes um casal com 3 filhos pode ocupar um sofá com 5 lugares, de modo que o casal fique sempre junto?

▸ ***Resolução***

Se o casal não pode ser separado, devemos considerá-lo como se fosse uma única pessoa, calculando a permutação de 4 pessoas (4!). O esquema abaixo representa uma das possibilidades de ocupação dos 5 lugares.

pai	mãe	filho 1	filho 2	filho 3


PAULO MANZI

Porém, se o casal trocar as posições entre si (2!), obtemos uma possibilidade diferente da anterior.

mãe	pai	filho 1	filho 2	filho 3

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$

Portanto, os 5 lugares podem ser ocupados de 48 maneiras diferentes.

R9. Qual é a soma de todos os números de 4 algarismos distintos formados com 2, 4, 6 e 8?

▸ ***Resolução***

A soma procurada (S) tem P_4 parcelas: $P_4 = 4! = 24$

Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 6 vezes (número de permutações dos outros 3 algarismos nas outras ordens). Ocorre o mesmo nas outras ordens.

A soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$$\underbrace{(8 + 8 + \dots + 8)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(6 + 6 + \dots + 6)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + \dots + 4)}_{6 \text{ vezes}} +$$

$$+ \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{6 \text{ vezes}} = 120$$

24 parcelas

UM	C	D	U
2	4	6	8
2	6	4	8
4	2	6	8
4	6	2	8
⋮	⋮	⋮	⋮
8	4	6	2
8	6	4	2

$S = 120 \text{ U} + 120 \text{ D} + 120 \text{ C} + 120 \text{ UM}$

$S = 120 + 1.200 + 12.000 + 120.000$

$S = 133.320$

Então, a soma procurada é 133.320.

3.2 Permutação com elementos repetidos

Trocando-se a posição das letras da palavra AMORA, podem ser escritas outras sequências de letras. Nesse caso, porém, os anagramas não correspondem mais às permutações simples, pois a letra A se repete. Apesar de a palavra AMORA ter 5 letras, o número de anagramas distintos é inferior a 5!. Se as 2 letras A fossem distintas, (A_1MORA_2), teríamos 5! anagramas. Assim, fixadas as letras M, O e R, a permutação das letras A_1 e A_2 daria, para cada anagrama de AMORA, origem a 2! novos anagramas. Como essas letras são iguais, a permutação delas não gera um novo anagrama. Então, para o cálculo correto do número de anagramas de AMORA, devemos dividir por 2! o total de permutações simples, 5!. Portanto, o total de anagramas da palavra AMORA é $\frac{5!}{2!} = 60$.

Aplica-se o mesmo raciocínio aos casos em que há repetição de mais de 2 elementos.

Por exemplo, na palavra MACACA, se as letras A fossem distintas, teríamos 3! anagramas em cada posição fixada para as demais letras. Se as letras C fossem distintas, teríamos 2! anagramas em cada posição fixada para as demais letras.

Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples (6!) por ($3! \cdot 2!$). Então, o número de anagramas da palavra MACACA é $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$, ou seja, 60 anagramas, pois, das 6 letras, 3 são A e 2 são C.

O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, ..., n_k de um k-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

◆ **Reflita**

O que acontece se permutarmos a primeira e a última letra da palavra AMORA?

Obtemos a mesma palavra.

Comentário: Apesar de evidente, instamos ao aluno para que não perca o foco deste aspecto importante do texto teórico do livro do aluno ao lado do boxe Reflita.

◆ **Reflita**

Empregando apenas letras e algarismos, aproximadamente quantas senhas com o tamanho mínimo sugerido no infográfico da abertura deste capítulo podem ser formadas?

$\simeq 2{,}1 \cdot 10^{14}$ senhas

Exercício resolvido

R10. Determinar quantos anagramas da palavra ELEGER começam:

a) por consoante.

b) por vogal.

▸ ***Resolução***

a) Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante. Tendo escolhido a primeira consoante, sobram 5 letras com 3 letras E repetidas. Então, o número de anagramas é:

$$3 \cdot P_5^3 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$$

b) Temos 1 possibilidade de escolher uma vogal. Fixando essa vogal (E), sobram 5 letras com 2 letras E repetidas. Então, o número de anagramas é:

$$1 \cdot P_5^2 = 1 \cdot \frac{5!}{2!} = 60$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

22. Quantos são os anagramas da palavra SABER? 120 anagramas

23. Com as letras da palavra PROVA, quantos são os anagramas que começam por vogal e quantos são os anagramas que começam e terminam por consoante? 48 anagramas; 36 anagramas

24. Quantos são os anagramas da palavra CARREIRA? 3.360 anagramas

25. Oito clientes de um banco, dos quais 3 são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas? 4.320 maneiras

26. Com 2 bandeiras vermelhas indistinguíveis, 3 azuis também indistinguíveis e 1 branca, quantos sinais diferentes podemos emitir pendurando todas elas, enfileiradas, no mastro de um navio? 60 sinais

27. Deseja-se arrumar em uma estante 4 livros de Matemática, 3 de Química e 5 de Português, todos diferentes. Quantas são as possibilidades de arrumação se:

a) não houver restrições? 479.001.600 possibilidades

b) os livros de uma mesma matéria permanecerem juntos? 103.680 possibilidades

28. (FGV) Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.

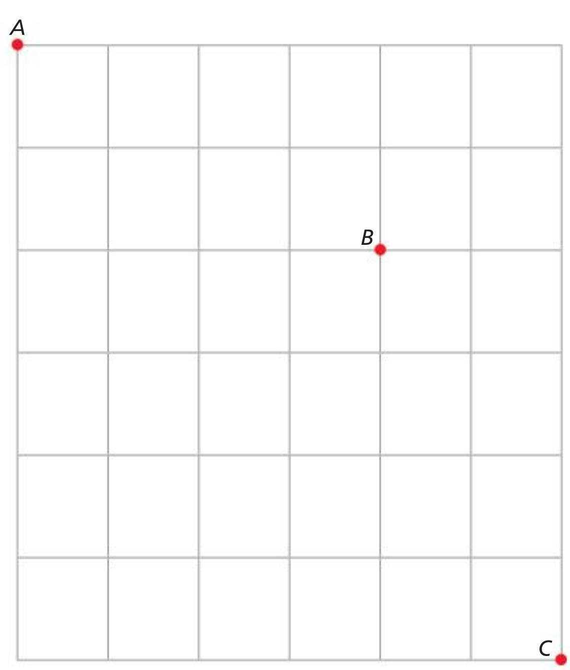
a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve preceder B? 6 sequências

b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo? 48 sequências

29. Qual é a soma de todos os números de 5 algarismos distintos que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? 3.999.960

30. De quantos modos podemos guardar 10 objetos em 3 caixas: a primeira com 5 objetos, a segunda com 3 e a terceira com 2? (*Sugestão*: Numere os objetos: 5 objetos com o número 1, 3 com o número 2 e 2 com o número 3.) 2.520 modos

31. Uma pessoa vai de *A* para *B* e, então, de *B* para *C*, sempre andando para baixo ou para a direita, conforme o diagrama a seguir.



ADILSON SECCO

Quantos caminhos diferentes são possíveis? 225 caminhos

31. Seria interessante que os alunos resolvessem esta questão em duplas ou trios para incentivar a discussão de estratégias.

4 Arranjo simples

Já vimos que a quantidade de permutações simples das letras da palavra AMOR é igual a $4! = 24$. Isso significa que as 4 letras dessa palavra podem ser reordenadas de 24 maneiras diferentes, resultando em 24 anagramas. Se, contudo, quisermos formar sequências de 2 letras distintas (escolhidas entre as 4 que formam a palavra AMOR), de quantas maneiras diferentes podemos fazê-las?

Vamos considerar que a situação descrita ocorra em duas etapas:

1ª etapa: escolher a primeira letra entre 4 possíveis;

2ª etapa: escolher a segunda letra entre 3 possíveis.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 = 12$.

Logo, são 12 possibilidades de formar sequências de 2 letras.

Observe que, desse total de 12 possibilidades, começam por:

- A → AM, AO e AR
- M → MA, MO e MR
- O → OA, OM e OR
- R → RA, RM e RO

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 2 a 2. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,\,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Se desejarmos escolher 3 letras entre as 4 possíveis, as duas primeiras etapas se repetem e, para a 3ª etapa, temos a escolha da terceira letra entre as 2 restantes, o que totaliza $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Desse total de 24 possibilidades, começam por:

- A → AMO, AMR, AOM, AOR, ARO e ARM
- M → MAO, MAR, MOA, MOR, MRA e MRO
- O → OAM, OAR, OMA, OMR, ORA e ORM
- R → RAM, RAO, RMA, RMO, ROA e ROM

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 3 a 3. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

> Dado um conjunto com n elementos, chama-se **arranjo simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $\boldsymbol{A_{n,p}}$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Vamos calcular o número total de agrupamentos simples de n elementos distintos, arranjados p a p, com $0 < p \leq n$, indicado por $A_{n,p}$.

Existem n possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento, $n - 1$ possíveis escolhas para o segundo elemento, $n - 2$ para o terceiro elemento, ..., $\boldsymbol{n - (p - 1)}$ possíveis escolhas para o p-ésimo elemento do agrupamento.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, o número de arranjos simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}, \text{ com } 0 < p \leq n$$

Desenvolvendo a expressão do 2º membro e multiplicando-o por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,\,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Então: $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, com $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $0 < p \leq n$

Observação

Dois arranjos simples diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos ou por pelo menos um elemento. Exemplos:

- $abc \neq bca$
- $abc \neq abd$

Observação

Qualquer problema que envolva permutações ou arranjos simples pode ser resolvido diretamente pelo princípio multiplicativo.

Observações

- Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número não nulo, obtemos uma fração equivalente.
- $n - (p - 1) = n - p + 1$

Reflita

Verifique que:

- $A_{n,\,n} = n! = P_n$
- $A_{n,\,1} = n$

- $A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

Como $P_n = n!$, então: $A_{n,\,n} = n! = P_n$

- $A_{n,\,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$

Portanto: $A_{n,\,1} = n$

Exercícios resolvidos

R11. Quantos números de 3 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7?

▶ ***Resolução***

Os problemas que envolvem permutações ou arranjos simples podem ser resolvidos por meio da fórmula ou do princípio multiplicativo. Vamos resolver este exercício dos dois modos.

1º modo:

Sabemos que a ordem dos algarismos escolhidos resulta em números diferentes. Por exemplo, escolhendo os algarismos 1, 2 e 3, podemos escrever os números 123, 132, 213, 231, 312 ou 321. Portanto, devemos calcular o número de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3:

$$A_{5,\,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Logo, podemos escrever 60 números de 3 algarismos distintos com os algarismos dados.

2º modo:

Vamos agora resolver este exercício aplicando o princípio multiplicativo. Fazendo um esquema para representar o número de 3 algarismos diferentes escolhidos entre 1, 2, 3, 6 e 7, temos:

___ ___ ___

3 possibilidades

4 possibilidades

5 possibilidades: (1, 2, 3, 6 e 7)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Assim, temos 60 números de 3 algarismos diferentes formados a partir dos algarismos dados.

◆ Reflita

Se a pergunta fosse: "Quantos números de 3 algarismos, sem restrição, podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7", o resultado seria também igual a 60? Por quê?

Não, pois teríamos de contar os números com algarismos repetidos, nesse caso haveria 125 números.

R12. Em uma sala existem 10 cadeiras enfileiradas numeradas de 1 a 10. De quantas formas 2 pessoas podem sentar nessas cadeiras, havendo ao menos uma cadeira entre elas?

▶ ***Resolução***

Vamos considerar que os números das cadeiras escolhidas pelas pessoas A e B formam um par ordenado. Assim, o par ordenado (2, 5) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 2, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 5. O par ordenado (5, 2) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 5, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 2.

O total de maneiras diferentes de as cadeiras serem ocupadas pelas 2 pessoas será dado pelo número de pares ordenados formados com os números das cadeiras, que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_{10,\,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = 90$$

Logo, podem ser formados 90 pares ordenados.

Porém, existe uma restrição: A e B não podem sentar-se juntas.

Isso significa que A e B não devem ocupar cadeiras cujos números são consecutivos. Assim, devemos descobrir quantos são os pares ordenados cujos elementos são consecutivos para subtraí-los dos 90 pares ordenados possíveis.

Os pares ordenados formados com números consecutivos são:

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8) e (10, 9), totalizando 18 pares.

Fazendo $90 - 18$, podemos concluir que existem 72 maneiras de as 2 pessoas se sentarem com pelo menos uma cadeira entre elas.

Outro modo:

Também poderíamos resolver este problema aplicando o princípio multiplicativo.

Por esse princípio, calculamos todas as possibilidades de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras enfileiradas.

A primeira pessoa poderá se sentar em qualquer uma das 10 cadeiras, restando, então, apenas 9 possibilidades de escolha para a segunda pessoa. Dessa maneira, temos 90 $(10 \cdot 9)$ maneiras de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras.

Este problema nos apresenta uma restrição: é necessário que haja pelo menos uma cadeira entre elas. Se listarmos todas as possibilidades em que as duas pessoas ficam juntas, lado a lado, temos 18 posições.

Agora, basta descontar esse valor do total de posições encontradas inicialmente. Assim, há 72 possibilidades de 2 pessoas se sentarem em 10 cadeiras contanto que haja pelo menos uma cadeira entre elas.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

32. De quantos modos 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares? 60 modos

33. Em uma empresa, 10 de seus diretores são candidatos aos cargos de presidente e vice-presidente. Quantos são os possíveis resultados da eleição? 90 resultados

34. Cinco cavalos disputam um páreo. Admitindo que não haja empates, qual é o número de possíveis resultados para as 3 primeiras colocações? 60 resultados

35. Um campeonato de futebol escolar vai ser disputado por 20 equipes. Admitindo que não haja empates, quantas são as possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares? 380 possibilidades

SHAWN PECOR/SHUTTERSTOCK

36. Determine o número x inteiro, $x \geqslant 2$, para que $A_{x,\,2} = 156$. 13

37. Uma sala possui 6 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente? 30 maneiras

38. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O segredo do cofre é dado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre e gastar 10 segundos em cada tentativa, quanto tempo levará (no máximo) para conseguir abri-lo? 2 horas

39. A urna I contém 5 bolas numeradas de 1 a 5. A urna II, contém 3 bolas numeradas de 1 a 3. Qual é o número de sequências numéricas que podemos obter se extrairmos, sem reposição, 3 bolas da urna I e, em seguida, 2 bolas da urna II? 360 sequências

5 Combinação simples

Considerando o conjunto formado pelas letras da palavra AMOR, quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar?

Como já vimos, a quantidade de agrupamentos ordenados ou sequências é dada por $A_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Esses agrupamentos são:

AMO, AMR, AOM, AOR, ARO, ARM, MAO, MAR, MOA, MOR, MRA, MRO,

OAM, OAR, OMA, OMR, ORA, ORM, RAO, RAM, RMA, RMO, ROA, ROM

Pensando em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento, os conjuntos formados pelas letras AMO, AOM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois, ao permutar as 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (número de permutações das 3 letras).

Pode-se, portanto, dizer que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,\,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

{A, M, O}, {A, M, R}, {A, O, R}, {M, O, R}

Chamamos esses agrupamentos de combinações simples dos 4 elementos, tomados 3 a 3.

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **combinação simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $C_{n,\,p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p.

Observações

- Sequência é um agrupamento ordenado: $(a, b) \neq (b, a)$
- Conjunto é um agrupamento não ordenado: $\{a, b\} = \{b, a\}$

Pelo princípio multiplicativo, contamos o total de possibilidades e descontamos as escolhas repetidas. Assim, temos: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$
Ou seja, há 20 maneiras de escolhermos 3 frutas diferentes em um conjunto com 6 frutas disponíveis.

TOPNATTHAPON/SHUTTERSTOCK

Há 6 tipos de fruta na foto. De quantas maneiras podemos escolher 3 frutas para fazer um suco?

Apenas um, o próprio conjunto. Lembrar que um conjuto não é diferente de “outro” se tiver os mesmos elementos dispostos em outra ordem.

Reflita

Quantos subconjuntos com n elementos tem um conjunto com n elementos?

Acompanhe a situação a seguir.

Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5,\,3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo {2, 6, 8}, origina $3! = 6$, ou seja, 6 agrupamentos ordenados (permutações desses elementos):

(2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2)

Portanto, $C_{5,\,3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5,\,3}$):

$$C_{5,\,3} \cdot 3! = A_{5,\,3} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{A_{5,\,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5,\,3} = 10$$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n,\,p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} : p! = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Portanto:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leq n$$

$A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

$P_n = n!$

$n! \cdot C_{n,\,n} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot 0!} = n!$

Portanto: $A_{n,\,n} = P_n = n! \cdot C_{n,\,n}$

Reflita

Verifique que:
$A_{n,\,n} = P_n = n! \cdot C_{n,\,n}$

Exercícios resolvidos

R13. Dos 30 alunos de uma classe, 4 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Quantas equipes podem ser formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo?

b) com 2 garotas e 2 garotos?

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

▶ ***Resolução***

a) Os 4 alunos devem ser escolhidos entre o total de 30 alunos. Como a ordem dos alunos não altera o agrupamento, se trata de uma combinação:

$$C_{30,\,4} = \frac{30!}{4! \cdot (30-4)!} =$$

$$= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \cancel{26!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{26!}} = 27.405$$

O número de equipes de 4 alunos, escolhidos entre 30, é 27.405.

b) Nesse caso, a escolha deverá ocorrer em duas etapas:

- E_1: escolher 2 entre as 20 garotas;
- E_2: escolher 2 entre os 10 garotos.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é dado por:

$$C_{20,\,2} \cdot C_{10,\,2} = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = 190 \cdot 45 = 8.550$$

O número de equipes com 2 garotas e 2 garotos é 8.550.

R14. Um garoto gostaria de convidar 7 amigos para um acampamento, porém só há lugar para 4 amigos na barraca. Calcular de quantas maneiras o garoto pode escolher 4 amigos entre 7.

▶ ***Resolução***

A ordem em que os amigos serão escolhidos não é importante, o que sugere um problema de combinação de 7 pessoas tomadas 4 a 4.

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Portanto, o garoto pode escolher os 4 amigos de 35 maneiras distintas.

Outro modo:

A escolha de 4 pessoas em um grupo de 7 poderia ser feita pelo princípio multiplicativo: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Porém, nesse total de 840 possibilidades, existem quartetos repetidos, pois a ordem em que as pessoas são escolhidas não altera a configuração do grupo. Assim, é preciso descontar a quantidade de possibilidades de formação de cada quarteto.

Temos, então: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Dessa maneira, cada quarteto foi contado 24 vezes.

Portanto, é necessário efetuar a divisão de 840 por 24, o que resulta em 35 possibilidades.

R15. Considerando 6 pontos, pertencentes a um mesmo plano e distribuídos de tal forma que não haja 3 pontos colineares, determinar quantos triângulos podem ser formados com 3 desses pontos como vértices.

▶ ***Resolução***

A ordem em que tomamos os vértices de um triângulo não altera o triângulo. Logo, temos um problema envolvendo combinação.

$$C_{6,\,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Portanto, podem ser formados 20 triângulos distintos.

◆ Observação

Se existissem 3 pontos colineares, teríamos de subtrair do total o número de combinações envolvendo esses 3 pontos, já que eles formariam segmentos, e não triângulos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

40. Uma prova é composta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões? 3.003 formas

41. Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados? $\frac{n(n-3)}{2}$

42. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 7 pessoas? 35 comissões

43. Ao sair de uma festa, 10 amigos se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados? 45 apertos de mão

BONGA1965/SHUTTERSTOCK

44. Em um congresso de Educação, há 6 professores de Física e 6 de Matemática. Quantas são as possibilidades de se formar uma comissão de 5 professores com 2 professores de Matemática e 3 de Física? 300 possibilidades

45. Usando as 5 vogais e os algarismos de 0 a 9, quantos conjuntos de 5 elementos podemos formar, sendo 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos? 1.200 conjuntos

46. Quantos grupos de 3 letras distintas podem ser constituídos com as letras da palavra SUCESSO? Quantos desses grupos não contêm vogal? 10 grupos; nenhum grupo

47. Entre os números 1, 2, 3, 4, ..., 15, serão selecionados 5 números ímpares e 3 números pares. Calcule quantos diferentes grupos de 8 números podem ser escolhidos. 1.960 grupos

48. Com um baralho de 52 cartas, quantos grupos de 3 cartas de espadas podem ser selecionados? 286 grupos

49. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. De quantas maneiras diferentes podemos retirar 3 bolas de modo que não saiam somente bolas vermelhas? 55 maneiras

50. Considere 7 pontos distintos sobre uma reta e 4 pontos, também distintos, sobre outra reta, paralela à primeira. Quantos triângulos podemos obter ligando 3 quaisquer desses 11 pontos? 126 triângulos

51. Certa loteria é denominada “6/53”, significando que o vencedor deve acertar 6 números entre os números de 1 a 53. De quantas maneiras um jogador pode escolher 6 números nessa loteria? 22.957.480 maneiras

Registre as respostas em seu caderno

Aplicação

1. Um restaurante tem 3 tipos de entrada, 2 pratos principais e 4 sobremesas. Quantas opções uma pessoa terá se comer 1 entrada, 1 prato principal e 1 sobremesa? 24 opções

2. Uma linha ferroviária com 11 estações deve imprimir bilhetes para cada tipo de viagem. Se cada bilhete deve conter o nome da estação de partida e o nome da estação de chegada, quantos tipos de bilhete são necessários? 110 tipos

3. Em uma corrida de Fórmula 1, 10 pilotos chegaram ao final. Admitindo que não haja empate, de quantas maneiras diferentes o pódio pode ser formado com 3 desses pilotos? 720 maneiras

4. Quantos números inteiros distintos podem ser formados usando todos os algarismos do número 253.225? 60 números

5. Em uma experiência na aula de Química, o professor coloca à disposição de seus alunos 5 substâncias: sal de cozinha (NaCl), ácido sulfúrico (H_2SO_4), sulfato de cobre ($CuSO_4$), carbonato de cálcio ($CaCO_3$) e água (H_2O). Os alunos devem selecionar 3 dessas substâncias para formar uma nova solução. Quantas são as possíveis escolhas? 10 escolhas

6. Quantos grupos podem ser formados, cada um com 3 meninos e 2 meninas, escolhidos de um total de 7 meninos e 5 meninas? 350 grupos

7. Uma bibliotecária precisa selecionar 5 jornais e 7 revistas, entre 8 jornais e 9 revistas disponíveis. De quantas maneiras ela pode fazer essa seleção? 2.016 maneiras

8. De uma urna que contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas amarelas, devem-se sortear todas as bolas. Quantos são os resultados possíveis se as bolas sorteadas forem colocadas em fila? 56 resultados

RICARDO SIWIEC

9. No final de uma festa, alguns amigos se despediram trocando, ao todo, 28 apertos de mão. Sabendo que cada um deles cumprimentou todos os outros, quantos amigos estavam na festa? 8 amigos

10. (Mackenzie-SP) Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é: alternativa b

a) 7 **b)** 6 **c)** 4 **d)** 10 **e)** 8

11. Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetição, quantos números de 3 dígitos podem ser pares? 24 números

12. (Mackenzie-SP) Considere todos os números de 3 algarismos formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9. Entre eles, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é: alternativa c

a) 17
b) 18
c) 15
d) 22
e) 24

13. (Mackenzie-SP) Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura abaixo.

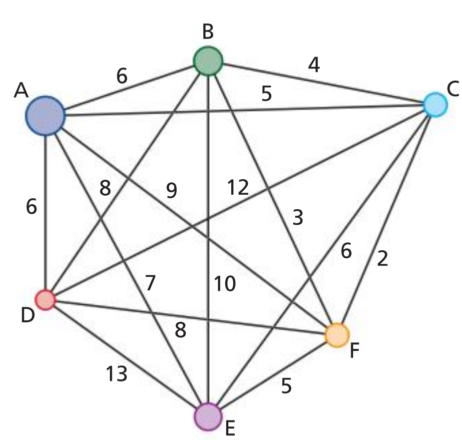
Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de: alternativa d

a) 6
b) 7
c) 8
d) 10
e) 12

14. (UFRJ) Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas, de modo que não ficasse a mesma cor no papel e na fita em nenhuma das embalagens. A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou usar para a confecção de todas as embalagens foi igual a: alternativa c

a) 30
b) 18
c) 6
d) 3

15. (Enem) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F, nessa ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de: alternativa b

a) 60 min
b) 90 min
c) 120 min
d) 180 min
e) 360 min

16. Uma sala deve ser iluminada com 5 lâmpadas e com interruptores independentes para acendê-las. De quantos modos possíveis poderemos iluminar essa sala? 31 modos

17. Um clube de tênis deve selecionar 2 duplas mistas de um grupo de 5 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras isso pode ser feito? 120 maneiras


ANDRESR/GETTY IMAGES

Duplas mistas jogando tênis.

18. (FEMM-MG) Uma fábrica de sucos de frutas utiliza laranjas, uvas, maçãs, abacaxis e kiwis para produzir seus produtos, que são sucos com um único tipo de fruta ou sucos com mistura de dois tipos de frutas.

Aos sucos produzidos pode ser adicionado açúcar ou adoçante. A quantidade de sucos diferentes que essa fábrica produz é: alternativa a

a) 30
b) 25
c) 20
d) 10

19. (Vunesp) Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1. 720 e 120

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512.346 e que número ocupa a 242ª posição. 481ª e 312.465

20. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é: alternativa e

a) 24
b) 31
c) 32
d) 88
e) 89

Aprofundamento

21. Resolva a equação $(\log_3 n)! = 24$. $S = \{81\}$

22. Uma empresa é composta de 12 diretores. Quantas são as maneiras de escolher 5 deles para compor uma comissão com presidente, vice-presidente e 3 supervisores? 15.840 maneiras

Desafio

23. (UFMG) Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:

- leva seu neto para a escola, às 13 horas;
- pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica;
- passeia com o cachorro da família;
- pega seu neto na escola, às 17 horas;
- rega as plantas do jardim de sua casa.

Cansado, porém, de fazer essas atividades na mesma ordem, ele resolveu realizá-las em uma ordem diferente. Nesse caso, o número de maneiras possíveis de ele realizar essas cinco atividades, *em ordem diferente*, é: alternativa b

a) 24 **b)** 60 **c)** 72 **d)** 120

24. (Fuvest-SP) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa, e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos? alternativa c

a) 12
b) 18
c) 36
d) 72
e) 108

25. (ITA-SP) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c? alternativa d

a) 1.692
b) 1.572
c) 1.520
d) 1.512
e) 1.392

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno

1. Para ir da cidade A à cidade B existem 3 rodovias; e para ir da cidade B à cidade C há 4 rodovias. Existem _____ maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B. alternativa c

a) 7
b) 3^4
c) 12
d) 4^3

2. Existem _____ números naturais de 4 algarismos que não têm algarismos repetidos. alternativa b

a) 4^9
b) $9^2 \cdot 56$
c) 10^4
d) $9 \cdot 10^3$

3. A expressão 6! é igual a: alternativa d

a) $7! - 1!$
b) $5! + 1!$
c) 6
d) $6 \cdot 5!$

4. Quatro atletas participam de uma prova. Não ocorrendo nenhum empate, podemos dizer que são possíveis _____ classificações nessa prova. alternativa d

a) 20
b) 240
c) 120
d) 24

5. São _____ os anagramas da palavra PAPAGAIO. alternativa d

a) 2.590
b) 1.280
c) 560
d) 3.360

6. Considere 15 pontos distintos de uma circunferência. Existem _____ retas passando por 2 desses pontos. alternativa c

a) $A_{15,\,2}$
b) $2 \cdot P_{15}$
c) $C_{15,\,2}$
d) $C_{15,\,5}$

7. Cinco estudantes fizeram um trabalho em conjunto, mas apenas 2 vão apresentar o trabalho. São _____ as possibilidades de escolha dessa dupla. alternativa b

a) 20
b) 10
c) 45
d) 60

8. _____ são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante. alternativa c

a) Permutações
b) Permutações com repetição
c) Combinações
d) Arranjos

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte a tabela e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.	X	X		X				
Aplicar as noções de fatorial.			X					
Identificar a natureza dos problemas de contagem.						X		X
Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.		X		X	X	X	X	
Páginas do livro referentes ao conceito	200 a 204	200 a 204	204 e 205	206 a 208	206 a 208	209 a 213	211 a 213	206 a 213

Pesquisa e ação — *QR Code*

Em nosso dia a dia, vemos muitas representações em códigos: placas de automóveis, código de barras de produtos no supermercado, *QR Codes* etc.

O *QR Code* é um código de barras em duas dimensões, que pode ser escaneado por celulares que tenham câmera fotográfica e um aplicativo de leitura.

Vamos conhecer as origens do *QR Code*, seu funcionamento e suas aplicações para, então, criar nosso próprio *QR Code* e desvendar os códigos criados pelos colegas.

Procedimentos

1) Reúna-se com mais três colegas e realizem uma pesquisa para responder às seguintes questões:
- O que é um *QR Code*?
- Como ele surgiu?
- Quais são as principais aplicações de um *QR Code*?

2) Após a etapa de pesquisa, vocês deverão criar seus próprios *QR Codes*. Existem vários *sites* que oferecem programas de criação de *QR Codes* personalizados e que podem ser baixados gratuitamente. Poderão ser criados até dois *QR Codes* por grupo. Cada *QR Code* deverá trazer uma frase sobre uma das etapas da pesquisa, isto é, uma frase bem característica sobre o *QR Code*.

3) Com os *QR Codes* criados, cada grupo deverá produzir um painel apresentando a pesquisa feita e os *QR Codes* elaborados. Os painéis poderão ser expostos na escola.

4) Os grupos deverão trocar seus códigos entre si, para que sejam decifrados. Nessa etapa, é necessário o uso de telefones celulares com câmeras fotográficas e aplicativos decodificadores de *QR Code* instalados.

5) Com o professor, os grupos vão debater e confrontar o que foi decifrado, podendo levantar alguma divergência nas pesquisas feitas.

Sugestões de leitura

Os livros indicados podem ampliar o conhecimento dos alunos em relação ao assunto; devemos lembrar, porém, que, como toda obra literária, baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Os títulos indicados nesta seção abrangem a Matemática em sua forma mais geral e abstrata, como suporte do pensamento lógico que permeia tanto nossas ações cotidianas quanto as grandes teorias da ciência.

20.000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números

A. K. Dewdney

Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

Uma viagem à Grécia e a outros países traz ao leitor a discussão e a explicação de alguns dos grandes mistérios matemáticos. Além disso, garante diversão e conhecimentos gerais interessantes para os alunos de Ensino Médio. Com um texto bem-humorado, o autor conduz seus estudos sobre teoremas, átomos, equações, Trigonometria e outros assuntos, cativando, informando e, ao mesmo tempo, levando o leitor a ampliar a Matemática vista na escola e fora dela. Uma leitura que estimula o aprendizado tirando dúvidas e divertindo.

A dama ou o tigre?: e outros problemas lógicos

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 2004.

Nesse livro, o autor nos convida a desvendar incríveis problemas e enigmas que envolvem raciocínio lógico-matemático. A leitura é conduzida por personagens diferentes e divertidos que povoam histórias que surpreendem pelos desafios que propõem ao leitor e por suas resoluções.

Aventuras matemáticas: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Com enigmas e jogos, o autor procura mostrar como até os raciocínios mais elaborados de Matemática podem ser entendidos por qualquer pessoa. Uma leitura curiosa e divertida para todos os leitores.

Desafios e enigmas: uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio

Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar

São Paulo: Novera, 2008.

Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução e também divertem. São situações que envolvem a aplicação de conteúdos como equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, análise combinatória, probabilidade etc. Para aprender e se divertir.

REPRODUÇÃO

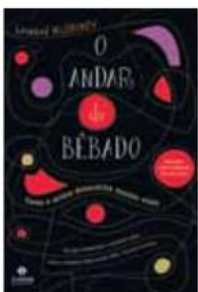
Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade

Colin Bruce

Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

O livro traz interessantes enigmas, casos e problemas matemáticos resolvidos pelo famoso detetive inglês Sherlock Holmes. Mas não são simplesmente contos matemáticos; são, na verdade, histórias que envolvem mistérios, intrigas e crimes solucionados pelo mestre das aventuras policiais. A leitura da obra é bem interessante, pois o autor mostra a importância da argumentação e da avaliação bem fundamentadas para entender os casos e tomar decisões que mudam o rumo e o desfecho das histórias. São lições que ultrapassam a aprendizagem matemática e divertem.

REPRODUÇÃO



O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas

Leonard Mlodinow

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

O autor apresenta ferramentas para identificar os indícios do acaso, procurando ajudar o leitor a fazer escolhas mais acertadas e a conviver melhor com fatores que ele não pode controlar.

REPRODUÇÃO

O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos do filósofo que não foram publicados e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

REPRODUÇÃO

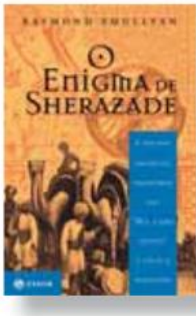
O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática

Hans Magnus Enzensberger

São Paulo: Cia. das Letras, 2000.

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Assim, Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começa a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler, a sequência de Fibonacci e outros, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de qualquer leitor.

REPRODUÇÃO



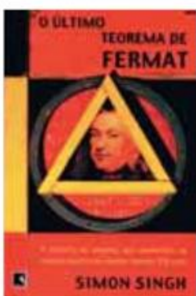
O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

O autor põe Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem e divertem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que divertem e surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

REPRODUÇÃO



O último teorema de Fermat

Simon Singh

Rio de Janeiro: Record, 2008.

Pierre de Fermat, um matemático francês amador do século XVII, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia; uma delas foi: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade em se chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

REPRODUÇÃO

O universo e a xícara de chá: a Matemática da verdade e da beleza

K. C. Cole

Rio de Janeiro: Record, 2006.

Nesse interessante livro, a autora, uma jornalista especializada em ciências, percorre uma vasta gama de áreas do conhecimento e de situações, científicas ou cotidianas, para mostrar como a ideia geral de que a Matemática é incompreensível à maioria dos mortais pode ser desmistificada quando nos propomos a examinar criticamente o significado da enxurrada de números com que convivemos no dia a dia. Com uma linguagem objetiva e simples e uma abordagem perspicaz e bem-humorada, ela consegue esclarecer fatos numéricos aparentemente obscuros ou muito complexos.

REPRODUÇÃO

Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente

Mario Livio

Rio de Janeiro: Record, 2007.

O que há em comum entre a disposição dos flóculos do girassol, a espiral que delineia a concha de um molusco, a conformação de uma galáxia, a estrutura molecular de cristais e a árvore genealógica de um zangão? Uma razão constante, que há muito intriga a mente humana: a chamada razão áurea. Com uma linguagem acessível e fartamente ilustrada, a obra de Mario Livio é fascinante, além de tratar o assunto de maneira confiável.

Respostas

Capítulo 1

1. a) 225° b) 210° c) 90°

2. a) $\frac{\pi}{6}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad

b) $\frac{\pi}{3}$ rad e) $\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $\frac{2\pi}{3}$ rad f) $\frac{4\pi}{3}$ rad

3. 144°; $\frac{4\pi}{5}$ rad

4. a) 120°; $\frac{2\pi}{3}$ rad

b) $\simeq$ 14,65 cm

5. $\simeq$ 30,5 cm

8. a) $A = 160°$, $B = 200°$, $C = 340°$

b) $A = \frac{\pi}{5}$, $B = \frac{4\pi}{5}$, $C = \frac{6\pi}{5}$

9. a) 70°

b) $\frac{\pi}{6}$ rad

10. a) positivo b) negativo

11. $\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} <$

$< \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

12. a) $\simeq 0{,}8$ b) $\simeq -0{,}8$ c) $\simeq -0{,}8$

13. a) $\simeq -0{,}9$

b) $\simeq -0{,}9$

c) $\simeq 0{,}9$

14. $\text{sen}\ \alpha \simeq -0{,}45$

$\text{sen}\ \beta \simeq -0{,}77$

$\text{sen}\ \theta \simeq 0{,}98$

15. $\cos \alpha \simeq -0{,}67$

$\cos \beta \simeq 0{,}34$

$\cos \theta \simeq 0{,}17$

16. $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\ \frac{7\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

17. a) 0 b) 2 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

18. a) 0,342 b) 0,643 c) 0,866

19. a) falsa b) falsa

20. 1º quadrante: $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

3º quadrante: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

21. a) $x = 30°$ ou $x = 150°$

b) $x = 135°$ ou $x = 225°$

22. a) negativo

b) positivo

23. $\text{tg}\ \alpha \simeq 0{,}90$

$\text{tg}\ \beta \simeq -0{,}36$

$\text{tg}\ \theta \simeq 5{,}67$

24. a) $\simeq -0{,}7$

b) $\simeq 0{,}7$

c) $\simeq -0{,}7$

26. a) menor que 1

b) $\simeq 0{,}65$

c) 1º quadrante

d) negativo; positivo; negativo

e) $\simeq -0{,}65$; $\simeq 0{,}65$; $\simeq -0{,}65$

27. $\frac{12}{13}$

28. a) $-0{,}6$

b) $-0{,}75$

29. a) $-0{,}8$

b) $-0{,}6$

30. não

31. a) $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

e) 0 ou π ou 2π

32. a) 0 ou π ou 2π ou $\frac{3\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

c) 0 ou 2π

33. 16 h ou 20 h ou 4 h ou 8 h

34. $\frac{3\pi}{2}$

Exercícios complementares

1. 225°

2. $\simeq$ 38,22 m

3. $\frac{7\pi}{9}$ rad

4. 1,4 rad

5. 50°

6. 37°30'

7. a) 0,53

b) $-0{,}53$

c) $-0{,}53$

8. $\text{tg}\ \frac{7\pi}{6}$, $\text{tg}\ \frac{\pi}{12}$, $\text{tg}\ \frac{23\pi}{12}$, $\text{tg}\ \frac{7\pi}{12}$

9. $P = 36°$ ou $\frac{\pi}{5}$ rad

$Q = \frac{4\pi}{5}$ rad

$R = 216°$ ou $\frac{6\pi}{5}$ rad

$S = 324°$ ou $\frac{9\pi}{5}$ rad

10. a) $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{6}$

11. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. a) 0,8

b) $-0{,}8$

c) $-0{,}8$

13. $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$

14. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

15. 3π

16. a) -1; 1

b) -2; 2

c) -1; 3

17. a) $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$

Autoavaliação

1. alternativa d

2. alternativa c

3. alternativa b

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa c

7. alternativa a

8. alternativa a

9. alternativa d

Capítulo 2

1. a) $p = 4$
b) $p = 2$
c) $p = 3$

2. a) mínimo: 0; máximo: 2
b) mínimo: -1; não tem máximo
c) mínimo: 8; máximo: 12

4. a) $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
c) $25° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
d) $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

5. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) -1
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
g) 1
h) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. sen $(-\alpha) = -$sen (α)
ou
sen $(\alpha) = -$sen $(-\alpha)$

7. $1 \leqslant k \leqslant 2$

9. a) Porque, no gráfico feito no computador, o *software* aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado como 6,28 ($2\pi \simeq 6{,}28$).
b) 1
c) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [0, 2]$
d) O gráfico de f é o gráfico de g deslocado 1 unidade para cima.

10. 3.715 pessoas

11. a) 5 m; 1 m
c) maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h
d) de 12 em 12 horas

12. d) A amplitude da função g mede 1 e a amplitude da função f mede 2, ou seja, a amplitude da função f é o dobro da amplitude da função g.
e) A amplitude da função h mede 3 e a amplitude da função g mede 1, ou seja, a amplitude da função h é o triplo da amplitude da função g.

Para funções do tipo $i(x) = k \cdot$ sen x, a amplitude do gráfico de i terá medida igual a k vezes o valor da medida da amplitude do gráfico da função $g(x) =$ sen x.

13. 0

15. a) 2π
b) 1
c) $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = [0, 2]$
d) O gráfico de g é o gráfico de f deslocado 1 unidade para cima.

17. 12.280 casos; janeiro

18. a) π
b) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
c) $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
$Im(h) =]-\infty, +\infty[$

19. Os gráficos g e j são simétricos em relação ao eixo x.

20. $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$: vermelho
$g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$: azul

21. domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
imagem: $Im(f) = [0, 2]$
período: $p = 2\pi$
amplitude: $A = 1$

22. $a = 2$ e $b = 2$

24. a) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-3, 3]$
$p = \pi$
$A = 3$
b) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [3, 7]$
$p = \frac{2\pi}{3}$
$A = 2$

Exercícios complementares

2. a) $135° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. 3; 5

4. 1.050 toneladas

5. alternativa e

6. alternativa d

7. às 3 h

8. a) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-1, 3]$
período: 2π
amplitude: 2
b) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-3, 3]$
período: 2π
amplitude: 3

9. a) sim
b) não
c) não
d) $(\pi, 0)$
e) maior

10. alternativa d

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa b

5. alternativa a

6. alternativa a

7. alternativa d

8. alternativa b

9. alternativa c

Capítulo 3

1. a) $x \simeq 6{,}3$ cm; $y \simeq 3{,}2$ cm
b) $x \simeq 40°$; $y \simeq 4{,}5$ m

2. a) $\simeq 17{,}6$ m
b) O caminho 1 é o mais curto (aproximadamente 21,4 m contra 24,1 m do caminho 2).

3. $\simeq 3{,}95$ cm

4. $\simeq 36{,}2$ km

5. $\simeq 76{,}36$ m

6. a) $\simeq 5{,}1$ cm **b)** $\simeq 4{,}8$ cm

7. $\simeq 17{,}6$ cm

8. b) obtusângulo
c) $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$; sim

9. $\simeq 96$ cm, $\simeq 74{,}7$ cm

10. $\simeq 192{,}6$ km

11. a) 2
b) $-\sqrt{2}$
c) 2
d) 1
e) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
f) $-\sqrt{3}$

12. a) $-\frac{3}{4}$
b) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$
c) $-\frac{4}{3}$
d) $\frac{4\sqrt{7}}{7}$
e) $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

13. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{-5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

f) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

14. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{23\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{19\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

15. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

16. resposta possível: $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

19. a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

b) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

c) $2-\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{2}-\sqrt{6}$

20. a) $-\sqrt{3}-2$

b) $2+\sqrt{3}$

Exercícios complementares

1. 15 cm

2. $\simeq 55{,}7$ m

3. $8\sqrt{3}$ cm

4. 60°

5. $\simeq 42{,}75$ m

6. -1

7. a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $2\sqrt{2}$

c) 3

d) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

8. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{5}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{4\pi}{5}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

9. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

10. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $2+\sqrt{3}$

11. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $-\frac{7}{25}$

d) $\frac{24}{25}$

e) $-\frac{24}{7}$

13. a) $\text{sen}\,\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 60° ou 120°

c) 75° ou 15°

14. a) $\text{sen}\,2\alpha = 2\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha$

c) $\text{tg}\,2\alpha=\frac{2\cdot\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

15. PG, $a_1=\cos x$, $q=-1$

Autoavaliação

1. alternativa d

2. alternativa c

3. alternativa b

4. alternativa a

5. alternativa b

6. alternativa b

7. alternativa d

8. alternativa b

Capítulo 4

1. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

2. a) $\ell_6 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$ c) $P = 4\sqrt{3}R$
   b) $D = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}R$

3. 8 m^2

4. 9

5. $12\sqrt{5}$ cm^2

6. $100\sqrt{3}$ cm^2

7. 12,5 m^2

8. $A_{trapézio} = 75\ m^2$; $A_{triângulo} = 50\ m^2$

9. alternativa b

10. 8.798 cm^2

11. 22,8 cm^2

12. 4 m; $8\sqrt{3}$ m^2

13. 15 cm^2

14. $9\sqrt{3}$ cm^2

15. $72\sqrt{3}$ cm^2

16. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

17. R$ 120,00

18. alternativa c

19. $6(1 + \sqrt{2})$ cm

20. alternativa e

22. $\dfrac{5\pi - 3}{6}$ cm^2

23. 5π cm^2

Exercícios complementares

1. 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm

2. 2 cm

3. $12\sqrt{5}$ cm^2, $3\sqrt{5}$ cm

4. 150 peças

5. a) 93 cm^2
   b) $6(6 + \sqrt{6})$ m^2

6. alternativa e

7. alternativa d

8. 16 cm^2

9. 225 cm^2

10. alternativa c

11. 8 cm^2

12. alternativa b

13. $\simeq$ R$ 30,63

14. 1.554,06 cm^2

15. 6 cm^2

16. 0,25 cm^2

17. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa d

2. alternativa b

3. alternativa d

4. alternativa a

5. alternativa c

6. alternativa d

7. alternativa a

Capítulo 5

1. infinitos; um; infinitos

2. infinitos planos, um plano ou nenhum plano

3. seis retas

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa apenas um plano e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Três pontos (três pés da mesa) determinam apenas um plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

6. a) verdadeira c) falsa
   b) falsa d) verdadeira

7. a) falsa c) falsa
   b) verdadeira

8. São falsas:
   a) considere uma reta t, perpendicular a um plano α por um ponto P e duas retas r e s de α, concorrentes no mesmo ponto P. Então, r e s são duas retas perpendiculares à mesma reta t, e r e s não são paralelas.
   b) porque, se uma reta r e um plano α são paralelos, toda reta perpendicular ao plano α é perpendicular à reta r ou é reversa à reta r.
   c) porque, se uma reta r está contida em um plano α, existe pelo menos uma reta t perpendicular a r que está contida em α.

10. a) Não, são perpendiculares.
    b) Não, $\overline{HG}$ é paralelo ao plano (EFN).
    c) Não, são concorrentes.
    d) Sim, pois $\overleftrightarrow{EF} \supset EFN \cap EHG$.

14. alternativa e

15. a) 2 cm
    b) 2 cm
    c) $\sqrt{29}$ cm
    d) zero
    e) 5 cm
    f) 3 cm
    g) 5 cm

16. Considerando os semiplanos E_1, contido no plano (MQK), E_2, contido no plano (MTK), E_3, contido no plano (MRK), e E_4, contido no plano (MPK), temos os diedros:
    - $E_1 \cup E_2$
    - $E_2 \cup E_3$
    - $E_3 \cup E_4$
    - $E_1 \cup E_3$
    - $E_2 \cup E_4$

    Todos os diedros têm origem $\overleftrightarrow{MK}$.

17. 60°

18. a) Sim, pois, se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem ao plano (ABC), que é perpendicular à aresta do diedro.
    b) Não, pois, pelo enunciado do exercício, não podemos garantir que as medidas dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ sejam iguais.

Exercícios complementares

1. uma reta paralela

2. a) reversas
   b) paralelas
   c) perpendiculares
   d) paralelos
   e) perpendiculares
   f) perpendiculares

3. A afirmação **a** é falsa, pois os dois planos podem se interceptar.

4. uma reta ou um ponto

5. $2\sqrt{2}$ m

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência.
A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

7. zero

8. 18 m

9. 120°

10. A projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

11. 60°

12. 14 unidades de comprimento

13. **b)** 30°

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa a
3. alternativa b
4. alternativa b
5. alternativa d
6. alternativa d
7. alternativa b
8. alternativa a
9. alternativa d
10. alternativa d
11. alternativa c

Capítulo 6

1. pentaedro

2. heptaedro

3. 14 faces, 36 arestas, 24 vértices

4. **a)** $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo
b) $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo

5. poliedro I: $12 + 8 - 18 = 2$
poliedro II: $6 + 8 - 12 = 2$

6. sim; $V = 36$, $F = 20$, $A = 54$ e $36 + 20 - 54 = 2$

7. 10 vértices

8. **a)** poliedro I
b) Ambos têm 12 faces.
c) Ambos têm 10 vértices.
d) Ambos têm 20 arestas.
e) Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. 8 faces

10. 11 faces

11. 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares

12. 9 faces e 16 arestas

13. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices

14. **b)** resposta pessoal

15. 18 arestas e 12 vértices

16. **a)** face 6
b) face 1

17. 30

19. **a)** 15 cm
b) $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

20. 5 cm

21. **a)** $x\sqrt{3}$
b) $t\sqrt{14}$

22. 1 cm, 2 cm e 3 cm

23. 30 cm, 40 cm e 120 cm

24. $8\sqrt{2}$ cm^2

25. **a)** $3\sqrt{5}$ cm
b) $3(\sqrt{2} + 1)$ cm

26. $10\sqrt{6}$ cm

28. alternativa d

29. alternativa b

30. 1.300 cm^2

31. **a)** $21\sqrt{3}$ m^2
b) 80 cm^2

32. cubo B

33. $50(6 + \sqrt{3})$ cm^2

34. **a)** 6; 24; 54; 96 (unidades de área)
b) Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.
c) 8, 27 e 64, respectivamente

35. 14.700 g

36. 216 m^3

37. 105 cm^3

38. 57 cm^3

39. $\sqrt{71}$ unidades de comprimento

40. 236 cm^2

41. $4.096\sqrt{3}$ cm^3

42. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

43. 832 cm^2 e 1.536 cm^3

44. **a)** 4 cm, 4 cm e 4 cm
b) 1 cm, 1 cm e 64 cm

45. **a)** 8 cm^3
b) 24 cm^2
c) Fica multiplicado por 8.
d) Fica multiplicado por 4.

46. 9 faces

47. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices

48. Apenas as planificações (I) e (II) são de superfícies de pirâmides.

49. 10 cm

50. $\sqrt{43}$ dm

51. 13 m

52. $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm

53. $108(40 + 3\sqrt{3})$ mm^2

54. 64 cm^2, 80 cm^2 e 144 cm^2

55. 4 cm

56. 384 cm^2

57. 48 cm^3

58. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3

59. área $= 18\sqrt{3}$ cm^2;
volume $= 9\sqrt{2}$ cm^3

60. $24\sqrt{3}$ cm^3

61. $32\sqrt{3}$ dm^3

62. 192 cm^3

63. 24 cm^3

64. **a)** 16 cm^2
b) 72 cm^2
c) 88 cm^2
d) $\sqrt{77}$ cm
e) $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm^3

65. 1 para 12

66. A altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. $\frac{125}{3}$ cm^3

68. 3 cm^3

69. 2 para 1

70. 8 cm

71. altura = 12 cm; volume = 1.552 cm^3

72. 9 m

73. $78\sqrt{3}$ m^3

74. 312 cm^3

Exercícios complementares

1. alternativa b
2. a) não convexo
   b) convexo
   c) convexo
3. 24 vértices
4. alternativa e
6. 40 cm^3
7. alternativa e
8. $24(7 + \sqrt{85})$ cm^2
9. 1 m
10. 36 cm^3
11. 2.172 cm^2
12. 3.150 m^3
13. alternativa a
14. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm^3
15. alternativa c
16. $\frac{4}{3}$ cm^3
17. a) $375\sqrt{3}$ cm^3
    b) $50\sqrt{3}$ cm^2
18. $192\sqrt{3}$ cm^2
19. 36.000 cm^3
20. 27 cm^3
21. 250 cm^3

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa b
3. alternativa d
4. alternativa d
5. alternativa c
6. alternativa c
7. alternativa c
8. alternativa d
9. alternativa b

Capítulo 7

1. π
2. 3π cm^2
3. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2
4. 28π cm^2
5. $h = 9$ cm e $r = 6$ cm
6. 1.050π cm^2
7. $(2 + 2\sqrt{3})$ cm
8. 16π dm^3
9. 0,314 mℓ
10. 500π cm^3
11. 24 dias
12. $\frac{8}{9}$
13. 48 recipientes menores
14. 40 cm
15. alternativa d
16. 60°
17. $\frac{\pi}{3}$
18. $20\sqrt{2}$ cm
19. $10\sqrt{3}$ cm
20. a) $A_{lateral} = 135\pi$ cm^2; $A_{total} = 216\pi$ cm^2
    b) $A_{lateral} = 260\pi$ cm^2; $A_{total} = 360\pi$ cm^2
21. $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2
22. $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm^2
23. 75π cm^2
24. 1.000π cm^2
25. $200\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^2
26. 5 cm
27. 2,5 m
28. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi$ dm^2
29. 36π cm^2
30. $\frac{23}{6}\pi$ cm^3
31. 750π cm^3
32. a) 240%
    b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$
33. 98π cm^3
34. $\frac{304\pi}{3}$ cm^3
35. $\frac{7}{8}$
36. 520π cm^3
37. a) circunferência
    b) superfície lateral de um cone
    c) superfície esférica
38. $\frac{40}{3}$ cm
39. $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$
40. $2\sqrt{2}$ cm
41. 1 cm
42. a) 36π cm^2 e 36π cm^3
    b) 324π cm^2 e 972π cm^3
43. 32 cm^3
44. 18π cm^2; 36π cm^3
45. $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$
46. $\frac{3}{2}$ radiano
47. 157 m^2

Exercícios complementares

1. alternativa a
2. $\frac{625\pi^2}{8}$ cm^3
3. a) $x = 9$ e $y = 3$
   b) $x = 15$ e $y = 5$
4. 54,6 mℓ
5. alternativa b
6. $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm^3
7. alternativa c
8. alternativa d
9. $\frac{60}{19}$ m

10. $3\sqrt[3]{9}$ cm

11. 81π cm^3

12. 225π cm^2

13. 161π cm^2

14. alternativa e

15. $(486 + 18\pi)$ cm^2

16. (3, 4, 5)

17. 14 m

18. $32\pi\sqrt{3}$ m^3

19. alternativa a

20. 4.275π cm^3

21. alternativa a

22. $\dfrac{32\pi}{3}$ cm^3

23. alternativa b

24. $1.562{,}5\pi$ cm^3

Autoavaliação

1. alternativa b
2. alternativa d
3. alternativa a
4. alternativa a
5. alternativa b
6. alternativa b
7. alternativa a
8. alternativa d
9. alternativa c
10. alternativa c

Capítulo 8

1. a) 1×3 c) 2×1
   b) 3×1 d) 2×2

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. • $i = j$: $a_{11} = 6$, $a_{22} = 7$ e $a_{33} = 9$
   • $i + j = 4$: $a_{13} = 3$, $a_{22} = 7$ e $a_{31} = -7$

5. resposta possível:
   $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Não, pois elas não são do mesmo tipo. A primeira é do tipo 5×1 e a segunda é do tipo 1×5.

7. $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

8. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. diagonal principal: 3, 8 e 15;
   diagonal secundária: 11, 8 e 7

10. 375

11. 1

12. 14

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
    b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$
    c) Não é possível.

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
    b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
    c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. a) $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
    b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. a) $c_{22} = 14$ b) $\nexists$

17. a) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
    b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$
    c) $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix}$
    d) $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
    e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
    f) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

18. a) verdadeira
    b) verdadeira
    c) verdadeira
    d) falsa
    e) verdadeira

19. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

20. a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
    b) Não é possível calcular.
    c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
    d) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$
    e) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

21. $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{7}{3}$

22. $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

23. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

    X é a matriz identidade de ordem 2.

24. a) • A e A
       • B e B
       • C e C
       • D e D
    b) Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

25. a) gráfica C
    b) PB: R\$ 2,15; CK: R\$ 2,70; CKX: R\$ 4,60

26. a) 2
    b) 5
    c) -1

27. a) 0
    b) 0

28. -8

29. **a)** 20 **c)** 20
b) 20

30. **a)** -12 **c)** -225
b) -75 **d)** -22

31. **a)** 0; sim
b) 0; sim; sim
c) $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$; sim
d) $ad - bc$; $ad - bc$; sim
e) $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$; opostos
f) abc; sim

32. 1, 1, 1; resposta pessoal

Exercícios complementares

1. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. alternativa c

4. alternativa e

5. **a)** $H_{3 \times 2}$, $S_{2 \times 5}$, $(H \cdot S)_{3 \times 5}$
b) $\begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$; total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.
c) 62 itens B; 27 itens C

6. **a)** $\frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ ou $\frac{2 - \sqrt{6}}{2}$
b) 2

7. 1

8. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

9. **a)** $X = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
b) $X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

10. **a)** 6 unidades de área
b) 6 unidades de área

11. alternativa d

12. 16,5 unidades de área

Autoavaliação

1. alternativa b

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa d

5. alternativa a

6. alternativa a

7. alternativa c

8. alternativa d

9. alternativa d

10. alternativa d

Capítulo 9

1. **a)** sim
b) não

2. 2

3. respostas possíveis: (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2)

4. sim

5. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

6. $S = \{(0, 0)\}$

7. $m = 1$, $n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$

8. **a)** respostas possíveis:
Para $x - y = 0$: (0, 0); (1, 1); (−2, −2)
Para $x + y = 2$: (1, 1); (2, 0); (0, 2)
c) A solução do sistema é o ponto de intersecção das retas, ou seja, $S = \{(1, 1)\}$.

9. 26 alunos

10. São misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.

11. **a)** SPD
b) SPI
c) SI
d) SPI

12. **a)** $k = 0$
b) $k \neq 0$

13. **a)** sim, para $a = \frac{15}{2}$;
$S = \left\{\left(\frac{5 - 2k}{4}, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$
b) não

14. $m = 1$ e $n = 3$

15. $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$

16. **a)** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

17. **a)** $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

18. **a)** $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

19. sim

20. alternativas b, c, d

21. **a)** $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$
b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$

22. $a = 0$ e $b = 1$

23. $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$

24. (2, −2, 1); sim

25. **a)** $S = \{(2, -1)\}$; SPD
b) $S = \{(1, k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$; SPI
c) $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD
d) $S = \{(7k - 4, 1 - 3k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$; SPI

26. **a)** $S = \{(2, 3)\}$ **c)** $S = \{(8, -1)\}$
b) $S = \{(3, -1)\}$ **d)** $S = \{(-1, -3)\}$

27. **a)** $S = \{(1, 3)\}$; SPD
b) $S = \varnothing$; SI
c) $S = \varnothing$; SI
d) $S = \{(1, 2, -2)\}$; SPD
e) $S = \left\{\left(\frac{28-3k}{5}, \frac{9+k}{5}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$; SPI
f) $S = \left\{\left(\frac{k-5}{3}, \frac{17-4k}{3}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$; SPI

Exercícios complementares

1. 10 ou -4
2. 3.060 residências
3. $r_A = 11$ km, $r_B = 7$ km, $r_C = 5$ km
4. -1
5. alternativa b
6. 9
7. 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas
8. alternativa b
9. -1
10. $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$
11. **b)** $S = \varnothing$
12. alternativa a
13. **a)** SPD; $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$
b) SPI; $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
14. alternativa c
15. $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
16. **a)** $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$
b) $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$
c) $S = \{(3, 1, 5)\}$
17. alternativa b
18. **a)** Considere:
x: quantidade de amendoim (em kg)
y: quantidade de castanha de caju (em kg)
z: quantidade de castanha-do-pará (em kg)

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

b) amendoim: 250 g; castanha-do-pará: 125 g; castanha de caju: 125 g
19. $S = \{(1, -1, 2, 3)\}$
20. $S = \{(21, 6)\}$
21. $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$
22. $\frac{1}{2}$
23. **b)** $-\frac{1}{2}$

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa e
3. alternativa c
4. alternativa a
5. alternativa d
6. alternativa b
7. alternativa b
8. alternativa c
9. alternativa c

Capítulo 10

1. 6 opções
2. 12 modos
3. 132 maneiras
4. 9.000 números
5. 120 maneiras
6. 223.560.000 senhas
7. **a)** 180 números
b) 100 números
8. 96 números
9. 729 maneiras
10. 720 maneiras
11. 325 mensagens
12. 30 letras
13. 542 números
15. **a)** 800 códigos
b) 640 prefixos
c) 9.999 números
d) 6.399.360 números
e) 5.119.488.000 números
16. **a)** 210
b) $\frac{7}{4}$
17. **a)** $4!$
b) $\frac{5}{2} \cdot 4!$
c) $\frac{205}{4} \cdot 4!$
18. **a)** 6
b) 8
19. 720 maneiras
20. 120 maneiras
21. 42 números
22. 120 anagramas
23. 48 anagramas; 36 anagramas
24. 3.360 anagramas
25. 4.320 maneiras
26. 60 sinais
27. **a)** 479.001.600 possibilidades
b) 103.680 possibilidades
28. **a)** 6 sequências
b) 48 sequências
29. 3.999.960
30. 2.520 modos
31. 225 caminhos
32. 60 modos
33. 90 resultados
34. 60 resultados
35. 380 possibilidades
36. 13
37. 30 maneiras
38. 2 horas
39. 360 sequências
40. 3.003 formas
41. $\frac{n(n-3)}{2}$
42. 35 comissões
43. 45 apertos de mão
44. 300 possibilidades

45. 1.200 conjuntos

46. 10 grupos; nenhum grupo

47. 1.960 grupos

48. 286 grupos

49. 55 maneiras

50. 126 triângulos

51. 22.957.480 maneiras

Exercícios complementares

1. 24 opções

2. 110 tipos

3. 720 maneiras

4. 60 números

5. 10 escolhas

6. 350 grupos

7. 2.016 maneiras

8. 56 resultados

9. 8 amigos

10. alternativa b

11. 24 números

12. alternativa c

13. alternativa d

14. alternativa c

15. alternativa b

16. 31 modos

17. 120 maneiras

18. alternativa a

19. **a)** 720 e 120
b) 481^a e 312.465

20. alternativa e

21. $S = \{81\}$

22. 15.840 maneiras

23. alternativa b

24. alternativa c

25. alternativa d

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa d

4. alternativa d

5. alternativa d

6. alternativa c

7. alternativa b

8. alternativa c

Lista de siglas

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio

FCC-SP – Fundação Carlos Chagas

FEI-SP – Faculdade de Engenharia Industrial

FEMM-MG – Fundação Educacional Monsenhor Messias

FGV – Fundação Getulio Vargas

Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular

Ibmec – Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais

ITA-SP – Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Mackenzie-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie

PUC – Pontifícia Universidade Católica

UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina

UFC-CE – Universidade Federal do Ceará

UFJF-MG – Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

UFSCar-SP – Universidade Federal de São Carlos

Unicamp-SP – Universidade Estadual de Campinas

Unifesp – Universidade Federal de São Paulo

Vunesp – Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual de São Paulo

Bibliografia

ANGEL, Allen R. *Intermediate algebra for college students*. New Jersey: Prentice Hall, 2004.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo: Atual, 1997.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. São Paulo: Atual, 1997.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria, números complexos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à geometria espacial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

COMO FUNCIONA: *Enciclopédia de ciência e técnica*. 2. ed. São Paulo: Abril, 1979.

CRESPO, Antonio Arnot. *Estatística fácil*. São Paulo: Saraiva, 1994.

DEVANEY, Robert L. *Chaos, fractals, and dynamics*: computer experiments in Mathematics. Menlo Park: Addison-Wesley, 1990.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios.)

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos (tomo 1)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

______. *História universal dos algarismos (tomo 2)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.

LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. v. 1.

______. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática.)

______. *A Matemática do Ensino Médio*. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. v. 3. (Coleção do Professor de Matemática.)

______. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção do Professor de Matemática.)

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

MOISE, Edwin E.; DOWNS JR., Floyd L. *Geometria moderna*. São Paulo: Edgard Blücher, 1971. Partes I e II.

MONTEIRO, L. H. Jacy. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

ROSA NETO, Ernesto. *Números complexos*. 2. ed. São Paulo: Paed, 1981.

SMITH, David Eugene. *History of Mathematics*. Nova York: Dover, 1958. 2 v.

SPIEGEL, Murray R. *Estatística*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1984.

TINOCO, Lucia A. A. *Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1999. (Projeto Fundão.)

Guia do professor

Parte geral

Parte específica

I. Atividades extras

II. Resoluções e comentários

Parte geral

1. Pressupostos teóricos e objetivos da coleção

Esta coleção foi elaborada tomando como base reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças curriculares previstas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) nº 9.394/96, promulgada em 20 de dezembro de 1996.

Para isso, tentamos refletir sobre alguns pontos de relevância de nossa realidade.

Em primeiro lugar, as consideráveis mudanças que afetaram o Ensino Médio brasileiro nos últimos anos. Além da rápida expansão da "clientela" com acesso a esse segmento educacional, os próprios objetivos dessa etapa já estão distantes daqueles de algum tempo atrás. Talvez pela inerente condição de fase intermediária entre o Fundamental e o Superior, o Ensino Médio sempre tenha oscilado entre duas direções: a profissionalizante, com características terminativas, e a propedêutica, voltada ao prosseguimento dos estudos. Tal dualidade reforçava a divisão social entre os frequentadores de ambos os tipos de curso: de um lado, formava-se a mão de obra das futuras classes trabalhadoras, educadas para as bases de produção; de outro, forneciam-se os conhecimentos preparatórios a uma elite intelectual, que, após a conclusão dos estudos superiores, estaria pronta para assumir o comando dos diversos segmentos produtivos. Com as profundas transformações que a sociedade vem presenciando diante de um mundo crescentemente globalizado e informatizado, ganhou força a urgência de uma nova visão de ensino, que ofereça aos jovens algo além de um corpo teórico de conhecimentos, em direção a um desempenho prático real, capaz de conciliar as múltiplas demandas culturais e socioeconômicas, contemporâneas e futuras. Dentro dessa tendência geral, uma das principais orientações da citada Lei de Diretrizes e Bases é a flexibilização dos mecanismos de acesso ao Ensino Superior, promovendo a desvinculação do Ensino Médio em relação ao vestibular tradicional, como meta de ensino.

Em segundo lugar, tentamos dar suporte ao professor de Matemática para enfrentar os questionamentos que surgem com essas novas realidades. Em um universo fortemente permeado por uma visão pragmática, um dos maiores problemas é justificar a presença, no currículo do Ensino Médio, daqueles conteúdos que não têm utilidade prática imediata e responder à questão: "Por que aprender Matemática?".

O professor pode argumentar com o fato de os conhecimentos matemáticos serem ferramentas para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem de imediato, por exemplo, nos campos da Estatística, da Matemática financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Essa seria, contudo, uma resposta incompleta. Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla — e, ao mesmo tempo, elementar — dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o aluno compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e das orientações fornecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de Matemática, esta coleção delineou como objetivo colaborar para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos — escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados — com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como os diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente — por via oral, escrita e gráfica — situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

2. Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto.

Os conteúdos assim selecionados, à luz de reflexões iniciais da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem, da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes.

O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao aluno tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência, com a preocupação do uso das formas contemporâneas de linguagem.

Assim, no decorrer da coleção, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em três **volumes**, cada qual composto de **capítulos**. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de:

- exercícios resolvidos, para professor e alunos explorarem os tópicos principais em sala de aula;
- exercícios propostos, para os alunos resolverem;
- exercícios complementares;
- questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por seções que apresentam:

- textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o aluno a desenvolver a competência leitora;
- atividades em grupo que incentivam o aluno a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos.

No final de cada volume, são apresentadas sugestões de leitura para a ampliação do conhecimento dos alunos a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos capítulos

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os **objetivos do capítulo** são apresentados logo no início, para auxiliar o aluno a formar um panorama dos conteúdos ali tratados. Como, nessa faixa etária, o aluno já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por ***Exemplos*** e ***Exercícios resolvidos***, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento. Na seção ***Exercícios propostos***, o aluno encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes laterais que dialogam com o aluno, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há ***Exercícios complementares*** temáticos que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção ***Autoavaliação*** apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o aluno precise retomá-lo.

A seção ***Compreensão de texto*** traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do aluno.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção ***Pesquisa e ação*** devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, exigem organização, análise e interpretação de dados e informações, com o objetivo de desenvolver a argumentação, a relação entre informações e conhecimentos adquiridos pelos alunos e a apresentação adequada dos resultados, por meio de cartazes, vídeos, jornais e outros recursos.

As seções e atividades de cada capítulo procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos alunos desenvolver as capacidades de:

- ler e interpretar textos matemáticos;
- ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.);
- transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa;
- exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática;
- usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os alunos a desenvolver as capacidades de:

- identificar dados significativos de um problema;
- procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- formular hipóteses e prever resultados;
- selecionar estratégias de resolução de problemas;
- interpretar e criticar resultados em uma situação concreta;
- discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os alunos a desenvolver as capacidades de:

- usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano;
- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

3. A importância do livro didático

No campo da Matemática em particular, a maior parte do professorado concorda que a importância do livro didático no processo educacional é inegável. Por um lado, ele costuma ser um suporte confiável e amplificador em sala de aula. Por outro, representa uma referência histórica indispensável para os estudos na área da didática geral e das didáticas específicas — no caso, as pesquisas da Educação matemática, que mapeiam, analisam e inter-relacionam os múltiplos elementos do ensinar e do aprender nessa área do conhecimento. Verificamos, no decorrer das últimas décadas, o surgimento de uma multiplicidade de pesquisas didático-pedagógicas voltadas para o ensino matemático e podemos afirmar que grande parte dessas investigações é de alta qualidade e valia para a educação brasileira. Devemos ter em mente, contudo, o dinamismo que tais estudos requerem quando se deseja o constante aprimoramento das práticas de ensino, de modo que correspondam às reais necessidades da aprendizagem.

Nessa perspectiva, apresentamos a seguir uma rápida análise das diretrizes didático-pedagógicas que o livro deve adotar para atender às expectativas da educação em nosso país.

Alguns aspectos de um livro didático

Em seu papel de apoio ao trabalho do professor, o livro didático deve:

- Orientar-se pelas propostas de ensino que favorecem o aprimoramento dos processos reflexivos. Para isso, os conteúdos escolares devem ser entendidos como instrumentos do desenvolvimento de competências e do estabelecimento de uma base confiável para o conhecimento do mundo.

Abordar os conteúdos de modo que os alunos tenham oportunidade de expor o que sabem sobre o assunto, de elaborar soluções próprias para os problemas e de refletir adequadamente sobre as decisões a tomar implica tratar esses conteúdos de diferentes maneiras, de ângulos variados. Tratar um mesmo conteúdo de diferentes pontos de vista favorece a construção do corpo de conhecimentos, sobretudo pela exposição de maneiras diversas de pensar e pelo incentivo à busca de novas soluções, além de promover maior comunicação entre professor e alunos e entre colegas.

- Manter a maior proximidade possível entre os conteúdos tratados e os fatos e fenômenos da realidade.

  Os conteúdos devem estar em consonância com as questões que afetam a sociedade de seu tempo, e seu aprendizado deve favorecer a inserção positiva do aluno nessa sociedade. A abordagem de conteúdos socialmente significativos contribui para a construção de instrumentos de compreensão da realidade e de participação em relações políticas e culturais diversificadas. A seleção e o tratamento dos conteúdos devem ter como perspectiva a construção da cidadania, da pertinência a um país pluricultural e a um mundo globalizado. O tratamento dos conteúdos deve possibilitar ao aluno assumir postura crítica e colaborativa na sociedade da qual é integrante.

- Garantir que os conteúdos propostos respeitem a natureza do objeto de conhecimento.

  Por identificarem a complexidade conceitual e as implicações do ato de ensinar e de aprender, as pesquisas em didática geral e específica têm muito a colaborar na proposição de conteúdos. As didáticas específicas explicitam as aproximações e os distanciamentos em relação ao objeto de conhecimento comumente proposto em sala de aula, o que possibilita ao professor analisar sua prática e, ao mesmo tempo, antecipar aos alunos questões que vão ao encontro de suas hipóteses sobre determinados conteúdos, favorecendo a aprendizagem significativa.

- Oferecer recursos para a diversidade de propostas.

  A diversidade de atividades em torno de um mesmo conteúdo é essencial à construção de um saber significativo. Ao perceber que um mesmo conteúdo é aplicável a diferentes situações ou que uma mesma situação pode ser abordada de diferentes ângulos, o aluno consegue generalizar e contextualizar produtivamente o conhecimento adquirido, desenvolvendo flexibilidade na resolução de problemas.

- Estruturar-se em conformidade com um movimento de "uso-conceituação-uso".

  Os primeiros contatos do aluno com um novo objeto de conhecimento devem ser acompanhados de situações de uso que permitam a compreensão da natureza desse objeto. À medida que cresce sua familiarização com o novo objeto, é possível solicitar reflexões mais abstratas para a formalização do conhecimento, de tal maneira que o aluno consiga transformar suas conclusões iniciais em saber de caráter universal, aplicável a diferentes situações. Assim, o movimento de "uso-conceituação-uso" favorece a assimilação gradativa e segura dos novos conhecimentos. Cabe ao livro didático estruturar unidades que permitam e facilitem tal fluxo, buscando equilíbrio entre suas etapas e oferecendo situações-problema e atividades providas de significado e abrangentes o suficiente para possibilitar generalizações e transferências.

Cabe destacar que, embora o livro didático não seja, e não deva ser, o único material de apoio ao desenvolvimento do trabalho em sala de aula, é interessante que se estabeleça um paralelismo entre as horas de aula e as unidades didáticas, sugerindo, assim, um cronograma para a aprendizagem dos alunos.

4. Interdisciplinaridade

A organização do currículo escolar tradicional, estruturada em disciplinas que se justapõem, sem se inter-relacionarem, é apontada como responsável por uma formação compartimentada. Por outro lado, a abordagem interdisciplinar no ensino assinala a possibilidade de enriquecimento por meio da combinação de diferentes perspectivas, incentivando a busca de caminhos alternativos àqueles oferecidos pelos saberes já adquiridos, instituídos e institucionalizados.

A interdisciplinaridade é definida pelos educadores como a interação entre duas ou mais disciplinas, o que se traduz desde a simples comunicação de ideias específicas das disciplinas até a integração orgânica de conceitos, terminologias, metodologias, procedimentos, dados, linguagens ou representações particulares. Alguns especialistas estendem o conceito de interdisciplinaridade à atitude que pressupõe uma postura uniformemente estruturada diante dos fatos a serem analisados.

Pesquisas educacionais destacam as seguintes vantagens da abordagem interdisciplinar:

- possibilita uma visão global dos conteúdos do mundo atual, permitindo visão crítica e compreensão das múltiplas informações cotidianas, o que só ocorre com a superação das fronteiras entre disciplinas;
- colabora para a formação de uma base mais ampla e segura para o futuro desempenho profissional, considerando a crescente necessidade de integrarem-se informações de diferentes domínios de atuação;
- estimula o exercício contínuo da educação, tanto no âmbito geral quanto no profissional.

Com a interdisciplinaridade, espera-se o estabelecimento de uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas por meio da fixação de um objeto comum diante dos objetos particulares.

Cabe destacar que muitas disciplinas, ao longo de sua história, desenvolveram métodos e procedimentos semelhantes, critérios de verificação coerentes entre si, linguagens e conceitos comuns. Tal aproximação permite a atribuição de um maior número de significados aos conceitos, favorecendo o trabalho interdisciplinar na busca de um aprendizado mais expressivo. Isso não significa que as disciplinas percam suas especificidades, mas sim que o diálogo entre elas (e com as disciplinas de outras áreas) seja pedagogicamente rico.

O trabalho interdisciplinar organiza e otimiza o tempo escolar, o aprendizado do aluno, o trabalho pedagógico e evita repetições; não se restringe a desenvolver temas comuns ou projetos interdisciplinares; pode ser feito por meio de atividades desenvolvidas por uma disciplina, mas planejadas pelos professores de várias disciplinas ligadas à área.

E como articular, por exemplo, a Biologia, a Física, a Matemática e a Química em um trabalho interdisciplinar?

A alternativa mais usual é a abordagem por temas comuns. No entanto, também são possíveis as abordagens por linguagens, gêneros do discurso ou procedimentos comuns. Como linguagens comuns, podemos citar, a título de exemplo, os gráficos, os mapas conceituais, as tabelas, os símbolos e os códigos. Como gêneros do discurso, os relatórios, artigos científicos, artigos de opinião, debates, enunciados de problemas e protocolos de pesquisa. E, como procedimentos, a resolução de problemas, a observação de regularidades, as investigações, o levantamento de hipóteses, as inferências, a dedução, a análise, a síntese e a generalização.

5. Avaliação

Avaliar o desempenho dos alunos é uma das tarefas mais problemáticas para o professor em qualquer nível de ensino. Apesar de ultimamente muitos educadores matemáticos se debruçarem sobre o tema, o conceito e as práticas de avaliação em Matemática não têm evoluído de modo satisfatório, o que mantém a atualidade da reflexão sobre a concepção de avaliação em seus diferentes aspectos.

Em primeiro lugar, é preciso ter claro que a avaliação não é um fim em si, mas parte integrante do processo de ensino e aprendizagem. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos alunos ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, a avaliação na educação diz respeito tanto aos atores da ação educativa (alunos e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos.

A avaliação, nessa concepção, deixa de ser instrumento de julgamento para integrar-se ativamente ao processo de tomada de decisões e, nesse sentido, servir de alimento e reorientação nos processos de mudança.

Uma das primeiras preocupações dos professores de Ensino Médio deve ser o diagnóstico do perfil dos alunos ingressantes, equivocadamente idealizados como capacitados em todos os conteúdos do Ensino Fundamental. Diante da constatação de uma série de defasagens em relação aos conhecimentos básicos, as pesquisas na área de Educação matemática apontam para a necessidade de avaliações diagnósticas que, ao determinar as lacunas no domínio e na compreensão desses conteúdos, subsidiem o professor na seleção e organização dos tópicos próprios do Ensino Médio. Em outras palavras, diagnósticos que forneçam ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos dos alunos.

Evidentemente, a preocupação em identificar as falhas nos conhecimentos prévios não deve ser motivação para "rebaixamento da qualidade" do ensino subsequente, mas, ao contrário, uma forma de superar problemas de formação e, então, construir um curso mais consistente, de maior significado para os alunos. Ao mesmo tempo, esse tipo de avaliação possibilita sondar as concepções e habilidades dos estudantes e fazê-los conscientes de suas limitações e possibilidades. Essa contribuição das avaliações diagnósticas muito provavelmente se manifestará na redução da evasão, problema hoje tão comum no segmento intermediário.

O diagnóstico pode ser estabelecido pela aplicação conjunta de alguns instrumentos, por exemplo:

- questionários ou entrevistas para obtenção de informações pessoais;
- testes fechados de múltipla escolha, com questões específicas de Matemática;
- questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Quanto mais o professor souber a respeito da formação anterior e dos hábitos e modos de vida dos alunos, mais perto estará de um perfil confiável de sua "clientela". Assim, a avaliação diagnóstica pode contemplar aspectos como: se estudaram em curso regular ou supletivo; com quais conteúdos do Ensino Fundamental tiveram contato e em que profundidade; quais são seus hábitos de leitura; o que cultivam nas horas de lazer; se trabalham ou têm participação nas atividades domésticas etc.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os alunos dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam o aluno a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

Voltando às reflexões sobre os processos gerais de avaliação, é importante lembrar o papel historicamente punitivo que foi atribuído à Matemática, tomando-a como instrumento de seleção e rotulação dos indivíduos. Por certo, um dos pontos para a superação dessa visão equivocada é a adoção de um novo conceito de avaliação. Trabalhando com a ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os alunos. Assim, os "erros" — tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado — devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Cabe salientar que, em todos os graus de ensino, os currículos disciplinares têm evoluído no sentido de incluir, entre os objetivos da aprendizagem, as capacidades e as atitudes que o aluno desenvolve ao longo do processo, como a criatividade e a independência na resolução de problemas, a comunicação adequada das ideias e a participação positiva nos trabalhos em grupo. É, portanto, preciso adequar os instrumentos de avaliação a essa nova perspectiva, na tentativa de valorizar não apenas os conhecimentos procedimentais, mas os conceitos e as atitudes dos alunos.

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades acumuladas em períodos maiores, atestando as competências através da construção de um produto. Além desse recurso, podemos fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao formador uma ideia sintetizada das competências construídas pelos alunos.

Oferecendo a possibilidade de escolhas e da avaliação contínua do desempenho, o portfólio permite ao aluno a participação na tomada de decisões. O foco da avaliação passa a ser o trabalho, considerando tanto o processo de desenvolvimento como o produto. Nesse caso, avaliam-se todo o processo e o desempenho dos atores envolvidos, e não apenas os registros numéricos. O compartilhamento de informações conduz à compreensão das propostas em vigor ao mesmo tempo que abre espaço para o replanejamento do trabalho do professor, de modo que se obtenham melhores resultados.

Apresentamos no quadro abaixo uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e autoavaliação dos alunos.

Descritores	Avaliação pelo aluno	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Além dos portfólios, outros recursos podem ser aplicados. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o aluno se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do aluno em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema.

É importante ter em mente que qualquer tipo de avaliação escrita revela a orientação fornecida aos alunos. Por isso, os parâmetros de avaliação devem ser discutidos com eles. Em relatórios escritos, por exemplo, a avaliação tende a ser mais qualitativa, inserida na perspectiva de uma apreciação global. Nesse caso, não fazem sentido os critérios estritos de "certo e errado", que pontos sejam descontados de acordo com os erros cometidos. Se isso não for observado, os relatórios tendem ao empobrecimento, pois, na maioria das vezes, as melhores produções, aquelas que apresentam as melhores argumentações, explicitações de raciocínio e descobertas, costumam conter mais erros que os relatórios simples, com menos escrita.

As apresentações orais permitem ao aluno preparar-se previamente, organizar sua exposição e estar pronto para responder a questões dos colegas, desenvolvendo, assim, as capacidades de argumentação e de comunicação.

Outra sugestão para a avaliação do desempenho oral é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Nesse tipo de discussão, podem ser avaliadas a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, a aptidão para interpretar e discutir situações em que tais ideias estejam presentes e mesmo as atitudes gerais em relação à Matemática.

É por meio de observações contínuas da participação dos alunos nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução de seus alunos em relação aos objetivos propostos no curso. Embora seja um juízo subjetivo, o professor não deve desvalorizar esse tipo de informação. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada aluno.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos alunos nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

6. Formação e desenvolvimento profissional do professor

A maioria dos autores que hoje discutem a formação de professores chama atenção para a importância de o desenvolvimento profissional ser contemplado ao longo de toda a carreira, com suporte na educação "formal" inicial. A partir dessa etapa, o aprimoramento de cada professor é de responsabilidade própria.

É oportuno lembrar algumas das diferenças entre a formação inicial e o desenvolvimento profissional de professores apontadas pelo educador português João Pedro da Ponte.

Na formação inicial, o futuro professor é obrigado a assimilar os conhecimentos que lhe são transmitidos, geralmente de modo compartimentado, por assuntos ou disciplinas, e com nítido predomínio da especulação teórica. Pode-se dizer que essa etapa transcorre em um movimento do exterior para o interior, no qual o profissional é, antes de tudo, um receptor.

Na continuidade da formação a que estamos denominando desenvolvimento profissional, admitem-se cursos e atividades mais direcionados para a práxis, como projetos em grupo e trocas de experiências, leituras e reflexões compartilhadas. O movimento é, então, do interior para o exterior, cabendo ao professor considerar teoria e prática de modo interligado, na busca de uma formação integral em seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais. Através da combinação entre processos formais e informais, a formação continuada tem por finalidade tornar o professor mais capacitado para conduzir o ensino de sua disciplina. O professor deixa de ser objeto para ser sujeito de sua formação.

O desenvolvimento profissional envolve diferentes domínios, como o conhecimento específico da disciplina ministrada e do currículo em vigência, a reflexão sobre a relação com o aluno, a permanente análise crítica dos processos de aprendizagem e de avaliação, a expansão da própria instrução, a conscientização sobre o contexto de trabalho, o autoconhecimento e, sobretudo, a capacidade de resolver problemas da prática educativa.

As leituras sugeridas nesta obra foram selecionadas com o propósito de auxiliar o docente de Matemática em sua trajetória para um ininterrupto desenvolvimento profissional.

7. Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. *Educação matemática*: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (Orgs.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo relacionado à experiência em Educação matemática.
- _______ (Org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive através do *software* Cabri-Géomètri.

- CARAÇA, Bento de J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998. (Coleção Ciência Aberta).
  Essa obra encontra-se dividida em três partes: Números, Funções e Continuidade. O autor faz uma abordagem de aspectos da Ciência e dá ênfase a alguns conceitos da Matemática relacionados aos números e às funções.
- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. 5. ed. São Paulo: Summus, 1986.
  Essa obra dá enfoque conceitual à Educação matemática, de forma crítica, abordando aspectos (relacionados à Matemática, à História e à Educação) que atingem todos os níveis de escolaridade.
- _______. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor traz nessa obra algumas de suas experiências relacionadas a uma disciplina ministrada no curso de Mestrado em Educação matemática da Unesp de Rio Claro. Expõe sua interpretação sobre Matemática e Educação, de forma que as apresenta como estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2011. p. 11-33.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios alunos.
- KRULIK, S.; REYS, R. E. *A resolução de problemas na Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 2003.
  Esse livro traz vinte e dois artigos de alguns dos mais eminentes especialistas da área, que buscam rever a metodologia do ensino de Matemática.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor, porém não são adequados para que o professor os utilize com alunos do Ensino Médio. Esse livro serve de apoio ao professor no esmero de seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 2003.
  Esse livro é o primeiro anuário do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) dos Estados Unidos, publicado pela editora Atual, contendo vinte artigos de alguns dos mais eminentes especialistas da área.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra configuram e complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- LOPES, C. E.; CURI, E. (Orgs.). *Pesquisas em Educação matemática*: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos, SP: Pedro e João Editores, 2008.
  Essa obra decorre de um processo reflexivo sobre metodologias de pesquisa em Educação matemática, que tem o foco central na análise sobre a relação teoria-prática. Os textos discutem temáticas diversas, relacionadas à Educação matemática em todos os níveis de ensino da Educação básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos. As temáticas abordadas permitem refletir sobre processos de ensino e aprendizagem, mudanças curriculares e inovações, bem como análise da prática docente.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? O que entendemos por cotidiano? Que concepções de ciência, verdade e educação fundamentam essa proposta? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática e interessante, que deixa de lado as questões teóricas mais difíceis. O autor selecionou um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como: o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PIRES, C. M. C.; CAMPOS, T. M. M. (Orgs.). *Utilizando resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de números e funções*. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta o tema números e funções através de situações-problema que suscitam discussões e reflexões.
- _______ (Org.). *Utilizando resultados de pesquisas sobre análise de dados*. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta o tema análise de dados através de situações-problema que suscitam discussões e reflexões.
- _______ (Org.). *Matemática e suas interfaces com outras disciplinas*. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta o tema da interdisciplinaridade através de situações-problema que suscitam discussões e reflexões.
- PONTE, J. P. et al. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro traz trabalhos de autores portugueses e mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula. Esses trabalhos ilustram as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.
- UDINA i ABELLÓ, F. *Aritmética y calculadoras*. Madri: Síntesis, 1999. (Coleção Matemáticas: cultura y aprendizaje).
  Aborda a utilização de calculadora como uma metodologia de ensino, o que indica que nem sempre um ensino centrado no método "lápis e papel" pode ser entendido como o mais eficiente.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BARUFFI, M. C. B.; LAURO, M. M. *Funções elementares, equações e inequações*: uma abordagem utilizando microcomputador. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2002.
  Apresenta uma abordagem por meio da qual se utiliza o computador como ferramenta para o ensino de funções elementares, equações e inequações.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Abordagem sobre a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- COLL, C.; MONEREO, C. *Psicologia da educação virtual*: ensinar e aprender com as tecnologias da informação e da comunicação. Porto Alegre: Artmed, 2010.
  Apresenta uma análise do impacto das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) sobre os processos de ensino e aprendizagem.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Nessa edição de 2012, apresenta ainda uma cobertura atualizada de tópicos como o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 1995.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.
  Essa obra apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e apresenta personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.
- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo*. São Paulo: Ática, 1999.
  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.
- PIRES, C. M. C. *Matemática e sua inserção curricular*. Curso de especialização em Educação matemática, mod. 1, versão preliminar. São Paulo: Proem, 2006.
  Material formatado para um curso de especialização em Educação matemática da PUC/SP, apresenta uma síntese das principais reformas educacionais no cenário brasileiro, indicando a trajetória dos documentos curriculares oficiais.
- ______. *Currículos de Matemática*: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.
  Essa obra analisa as organizações curriculares (mais recentes para o ensino da Matemática) formuladas em diferentes países e, em particular, no Brasil. Aponta novos e possíveis caminhos para as discussões sobre a proposta educacional da escola, sobre planejamento, avaliação e para a organização dos currículos de Matemática.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2000.
  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.
- PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.
  Traz artigos de alguns autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática e enfocam diversas situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.
  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.
- PERRENOUD, P.; THURLER, M. G. et al. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Trad. Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.
  Essa obra apresenta uma reflexão sobre os procedimentos de avaliação e a forma como é vista por professores e pelo próprio sistema educacional, além de uma discussão de como de fato deveria ocorrer o processo de avaliação, bem como seus objetivos. Todas essas reflexões são abordadas em torno da questão da formação de professores.
- SHULMAN, L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado*. 9, 2 (2005). Disponível em: <www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2016.
  Nesse artigo, são abordadas as três vertentes necessárias ao conhecimento do professor quanto ao conteúdo da disciplina a ensinar: o conhecimento didático da disciplina, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento curricular. O autor salienta que não basta o professor dominar o conteúdo de sua disciplina.

Avaliação

- PISA 2006. *Estrutura da avaliação*: conhecimentos e habilidades em Ciências, Leitura e Matemática. São Paulo: Moderna, 2007.
  Apresenta a estrutura do Programa Internacional para Avaliação de Alunos com relação aos conteúdos de Ciências, Leitura e Matemática, bem como sua organização e as diretrizes do desenvolvimento da avaliação.

Publicações oficiais

- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias). Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 3.
  Esse volume apresenta orientações para a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Tais orientações foram elaboradas para auxiliar professores em sua metodologia em sala de aula frente a determinados temas presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino da Matemática*: artigos. Brasília: MEC/SEB, 2004. v. 3.
  Esse documento apresenta artigos divididos nos seguintes eixos: Números, Geometria, História, Álgebra e Ensino. Tem por objetivo levar professores a aprofundar seus conhecimentos, que podem ser utilizados em sala de aula, na elaboração de atividades ou, ainda, servir de incentivo para a reflexão sobre os temas abordados.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília, 2002.
  Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam orientações e sugestões ao trabalho docente, que implicam o trabalho com a interdisciplinaridade e os temas transversais. Tratando também a diversidade da sala de aula e o trabalho com recursos de tecnologia, os conteúdos são organizados em eixos estruturadores. Esse documento pode ser encontrado em formato eletrônico no *site* do Ministério da Educação e Cultura (MEC).
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+*: Ensino Médio, orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002.
  Nesse documento, o professor pode encontrar referências e orientações de conteúdos a serem trabalhados por ano, bem como sugestões de trabalho para a sala de aula.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*: Matemática. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, 2008.
  Esse documento foi elaborado levando em conta as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais, porém apresenta no caderno do professor atividades com orientações para o trabalho em sala de aula que constam no caderno do aluno. Sua versão eletrônica está disponível no *site* da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Sites e artigos para *download*

- <https://linhamestra24.wordpress.com/sobre/>
  O Comitê Científico do 19º COLE e a ALB (Associação de Leitura do Brasil) disponibilizam os anais das últimas realizações do Congresso de Leitura do Brasil (Cole), que possui um eixo específico de Educação matemática. Assim, o professor pode encontrar artigos de seu interesse para aprofundar seus conhecimentos.
- <www.cempem.fae.unicamp.br>
  Site do Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática, dá acesso aos resumos e aos índices dos volumes da revista *Zetetiké*.
- <www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=3>
  Portal educacional do estado do Paraná, disponibiliza artigos, dissertações e teses em todas as áreas da educação, além de outros recursos para auxiliar o professor.
- <www.furb.br/cremm/portugues/index.php>
  Site do Centro de referência de modelagem matemática no ensino, disponibiliza informações sobre livros, trabalhos acadêmicos, artigos e revistas eletrônicas.
- <www.gilmaths.mat.br/home_0.html>
  Esse *site* disponibiliza materiais de apoio para o Ensino Médio apresentados por tema, jogos, testes *on-line* e *softwares*.
- <www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexem.html>
  Nesse *site* é possível acessar documentos de interesse para o ensino da Matemática em todos os níveis.
- <www.periodicos.capes.gov.br>
  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza a consulta a periódicos de diversos assuntos.
- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>
  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.
- <www.edumatec.mat.ufrgs.br>
  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.
- <www.ime.usp.br/lem/>
  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, traz *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.
- <rived.mec.gov.br>
  Site da Rede Interativa Virtual de Educação, oferece objetos de aprendizagem de diferentes temas de apoio ao desenvolvimento de atividades pelo professor em sala de aula.
- <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>
  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.
- <www.scielo.br/scielo.php?script=sci_home&lng=pt&nrm=iso>
  Disponibiliza artigos em diversos periódicos nas mais variadas áreas de interesse.

Revistas e periódicos

- BOLEMA. Rio Claro: Departamento de Matemática da Unesp.
  O BOLEMA (Boletim de Educação Matemática) é um dos mais antigos e importantes periódicos da área de Educação matemática do Brasil. Dissemina a produção científica em Educação matemática e áreas afins, publica artigos, ensaios, resenhas e resumos de dissertações e teses com destaque ao ensino e à aprendizagem de Matemática e/ou ao papel da Matemática e da Educação matemática na sociedade.
- Boletim GEPEM. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.
  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- Cadernos do CEM. São Paulo: Centro de Educação Matemática (CEM).
  Publicação do Centro de Educação Matemática, tem por objetivo veicular trabalhos na área de Educação matemática.
- Cálculo. São Paulo: Segmento.
  A revista apresenta, em linguagem simples e acessível, entrevistas, histórias, desafios, frases e até piadas relacionadas à Matemática.
- Educação Matemática em Revista.
  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.
- Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática.
  Publicação do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação matemática da PUC/SP, divulga pesquisas científicas da área. Os trabalhos relacionam-se aos temas: A Matemática na estrutura curricular e Formação de professores; História, Epistemologia e Didática da Matemática, além de Tecnologias da Informação e Didática da Matemática.
- Revista do Professor de Matemática.
  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática.
- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação matemática.
  Publicação do Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática, divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

8. Sugestões de leitura para o aluno

Obras sugeridas

Além das obras indicadas na parte final do livro do aluno, apresentamos as sugestões a seguir.

- *Desafios e enigmas* — uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio, de Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar. São Paulo: Novera, 2008.
  Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução e também divertem. São situações que envolvem mais que conhecimentos matemáticos, mas propiciam a aplicação de conteúdos como equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, análise combinatória, probabilidade e outros. Para aprender e se divertir.
- *Iniciação à lógica matemática*, de Edgard de Alencar Filho. São Paulo: Nobel, 2009.
  O autor utiliza um texto didático e objetivo para introduzir o aluno de Ensino Médio no universo da Lógica. A obra traz explicações básicas, bem elaboradas e funcionais para aplicação em sala de aula. As situações são organizadas por grau de dificuldade, possibilitando vencer um desafio antes de enfrentar o próximo, o que facilita a compreensão das estratégias empregadas para solucionar cada situação. Traz atividades e respostas.
- *Matemágica*: história, aplicações e jogos matemáticos, de Fausto Arnaud Sampaio. Campinas, SP: Papirus, 2009. v. I.
  O autor explora as relações entre a Matemática e suas aplicações em diversas áreas, como Biologia, Física e Arte. Aborda também alguns fatos da história da Matemática e propõe jogos e curiosidades divertidos e interessantes. A linguagem é clara, didática e objetiva, favorecendo o enriquecimento de vários conteúdos vistos em sala de aula. Das antigas escritas secretas à moderna teoria do caos, o livro informa sobre o pensamento e as técnicas desenvolvidas por gregos, egípcios, árabes e maias, entre outros povos. Uma leitura indicados para todos os alunos e professores.
- *Matemática divertida e curiosa*, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Record, 2009.
  Nessa obra, o autor relata casos curiosos sobre fatos e descobertas matemáticas. Traz ainda enigmas, problemas e figuras que surpreendem pela ilusão de óptica. O livro é um clássico do Prof. Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan. Uma leitura que amplia o universo de conhecimentos e, ao mesmo tempo, diverte.
- *Matemática e gregos*, de Hélio Cyrino. Campinas, SP: Átomo, 2006.
  O tema principal do livro é a história da Matemática na Grécia antiga. É uma leitura interessante para o aluno, pois traz uma abordagem panorâmica simplificada da história da Grécia, favorecendo inclusive um trabalho interdisciplinar com a área de História. Alguns conteúdos específicos de Matemática explorados pelo autor são: teorema de Tales, razão áurea, sistemas de numeração e números amigos, estudos da escola pitagórica e teorema de Pitágoras, Álgebra, Lógica e outros. Uma leitura interessante e pertinente para o aluno de Ensino Médio.
- *Matemática lúdica*, de Leon Battista Alberti. Rio de Janeiro: Zahar, 2006.
  O autor viveu durante o Renascimento italiano (1404-1472). Nessa obra, descreve e explica de maneira prática como fazer medições com os recursos disponíveis naquela época; por exemplo, como medir "com a vista" a altura de uma torre; a largura de um rio; uma grande profundidade de água; como pesar cargas muito pesadas; como avaliar grandes distâncias. Explica ainda o caso de Arquimedes e a coroa de Hieron. O texto é bem traduzido e traz comentários sobre os casos. Vale como curiosidade e ampliação de conhecimento. Favorece atividades interdisciplinares com História.
- *Medidas desesperadas*: comprimento, área e volume, de Kjartan Poskitt. São Paulo: Melhoramentos, 2006. (Coleção Saber horrível).
  O autor utiliza uma linguagem bem-humorada para abordar os conteúdos matemáticos, explorando-os do ponto de vista atual e de outras épocas. Assim, tem-se uma proposta criativa e instigante que facilita a aprendizagem de assuntos vistos na escola e também fora dela. Com esse jeito especial de explorar as ideias matemáticas, o autor apresenta medidas antigas e atuais, área, perímetro, volume, ângulos e figuras geométricas.
- *Newton e a gravitação*, de Steve Parker. São Paulo: Scipione, 2007.
  O livro aborda a história da Matemática, trazendo dados biográficos sobre Isaac Newton, a construção das suas teorias e alguns experimentos e invenções realizados pelo estudioso.

É uma leitura informativa interessante sobre as ideias de um dos mais importantes cientistas. Aborda ainda as séries binomiais de maneira objetiva e de fácil compreensão.

- *Origami*: dobras, contas e encantos, de Carlos Genova. São Paulo: Escrituras, 2008.
  Origami é a arte de dobrar papel (*ori* = dobrar e *gami* = papel, em japonês). Mas, além de melhorar os movimentos das mãos e exercitar o cérebro, a arte do *origami* abre portas para a expressão artística. O livro explora esse universo, relacionando-o à importância das figuras geométricas na composição de interessantes e criativas dobraduras. A obra proporciona uma maneira divertida e interessante de trabalhar com Geometria.

Temas transversais

- *Aprendendo valores éticos*, de Márcia Botelho Fagundes. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
  O livro discute valores como amizade, cooperação, diálogo, responsabilidade, respeito, solidariedade, construção da paz, cidadania, entre outros. A autora oferece uma ferramenta modificadora para reflexão sobre o que é ser cidadão. A obra busca contribuir para a formação humana dos alunos, papel fundamental das escolas e dos educadores. Há ainda sugestões de leituras e atividades em grupo e individuais sobre cada um dos valores apresentados.
- *Cidadania em preto e branco*, de Maria Aparecida S. Bento. São Paulo: Ática, 2006.
  A autora parte de situações do cotidiano, comuns no nosso dia a dia, para abordar a formação da cidadania e das relações raciais. Explica como surgiram as teorias sobre racismo, a resistência e a luta contra as práticas racistas e como os preconceitos e estereótipos são transmitidos dentro da família. Além disso, o livro põe em discussão o conceito de raça, revisto nas últimas décadas por meio dos estudos que decifraram parte dos códigos do DNA humano.
- *Clima e meio ambiente*, de José Bueno Conti. São Paulo: Atual, 2011. (Série Meio ambiente).
  Qual é a diferença entre tempo e clima? Como o clima influencia a preservação da vida — inclusive a da humana — no planeta Terra? Por que ocorrem enchentes devastadoras e secas arrasadoras em regiões, muitas vezes, bastante próximas? Essas e outras questões, que nos interessam especialmente na época que estamos vivendo, são discutidas nesse livro. Outro ponto positivo da obra é o texto bem organizado e objetivo e as atividades propostas, que auxiliam a fundamentar e a compreender os assuntos abordados.
- *De cara com a violência*, de Ivan Jaf e Regina Célia Pedroso. São Paulo: Ática, 2007. (Coleção Jovem cidadão).
  A obra aborda um assunto que preocupa todas as pessoas que vivem em grandes cidades: a violência. Por meio de uma história fictícia, os autores refletem sobre situações violentas que atingem especialmente os jovens de 16 a 24 anos. Um livro indispensável que questiona e faz pensar sobre as condições de vida e as oportunidades de estudo e trabalho que as sociedades reservam aos jovens.
- *Do nicho ao lixo*, de Francisco Capuano Scarlato e Joel Arnaldo Pontin. São Paulo: Atual, 2009. (Série Meio ambiente).
  O livro aborda assuntos relevantes para a época atual, desde as fontes poluidoras, como os combustíveis fósseis, até os problemas gerados pelo acúmulo de lixo e o que fazer com ele. Além disso, os autores discutem outras questões essenciais na atualidade, como o gerenciamento do processo técnico, econômico e social que gera os impactos ambientais. Assim, ampliam-se os conhecimentos sobre chuva ácida, desmatamentos, inversão térmica, buraco na camada de ozônio e outros. A obra oferece ainda a possibilidade de realização de atividades interdisciplinares com Química.
- *Drogas*: mitos e verdades — uma história diferente, de Beatriz Carlini Marlatt. São Paulo: Ática, 2010. (Coleção De olho na ciência).
  A autora emprega um texto ficcional, sensível e adequado ao jovem leitor, para abordar o uso de drogas legais e ilegais e alguns dos comportamentos de risco praticados pelos jovens, como o desejo de experimentar emoções diferentes e desafiar a morte. O livro levanta questões importantes para a época atual e pode auxiliar professores, pais e, especialmente, os alunos do Ensino Médio.
- *Ética, cidadania e trabalho*, de Júlia Falivene Alves. São Paulo: Copidart, 2002.
  Nesse livro, a autora propõe a discussão de relevantes questões para a época atual, que favorecem o trabalho com o tema transversal Cidadania. O texto foi criado para servir de ponto de partida para a abordagem dos temas em sala de aula, sem a intenção de esgotá-los, mas, antes, de estimular questionamentos que auxiliem na formação de cidadãos tolerantes e conscientes de seus direitos e deveres. A apresentação dos temas é didática e objetiva, possibilitando um trabalho panorâmico sobre respeito, comportamento no trânsito, Estatuto da Criança e do Adolescente, ética profissional e outros assuntos.
- *Lixo e sustentabilidade*, de Sônia M. Muhringer, Rosana Rios e Michelle M. Shayer. São Paulo: Ática, 2013.
  Por meio de um texto ficcional, as autoras abordam os problemas decorrentes do acúmulo de lixo gerado pelas sociedades urbanas, o destino dado a esses resíduos e caminhos possíveis para a reciclagem, a conservação ambiental e a sustentabilidade. Tratam ainda da armazenagem do lixo radioativo, que traz sérios riscos ambientais. Há também informações sobre a quantidade de lixo gerada em várias cidades do mundo, diferentes tipos de lixo, possibilidades de destino e fontes geradoras de lixo. Essas informações são documentadas em tabelas, gráficos e infográficos, que oferecem oportunidade de trabalho com vários conteúdos matemáticos. O livro apresenta também atividades.
- *O massacre da natureza*, de Júlio José Chiavenato. São Paulo: Moderna, 2007.
  O livro faz uma abordagem panorâmica da exploração incontrolável da natureza pelo ser humano, especialmente pelas sociedades capitalistas, abrindo um espaço de questionamento e reflexão na sala de aula. Alguns dos temas abordados são: progresso *versus* devastação da natureza, uso de agrotóxicos e danos à saúde, energia atômica, a lucratividade da indústria de guerra, doenças causadas pela poluição, contaminação da água e outros assuntos relevantes à época atual. Possibilita o trabalho com pesquisa e conteúdos matemáticos. Traz também sugestões de atividades.
- *Redes de abuso*, de Tânia Alexandre Martinelli. São Paulo: Scipione, 2007.
  O livro trata de um tema extremamente atual: as redes de abuso infantojuvenil operadas pela internet. A autora introduz o assunto por meio de um texto ficcional que faz um alerta aos jovens, pais e professores para um tipo de crime cada vez mais comum e que pode ocorrer sem que percebamos, pois os *blogs*, salas de bate-papo e redes sociais são facilmente acessados pelos jovens. Uma leitura fundamental para todos.

9. Textos para reflexão sobre a educação

Apresentamos a seguir o *link* em que é possível acessar a proposta de projetos da coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, assim como alguns textos que certamente contribuirão para o aprimoramento do trabalho pedagógico e da prática educativa a ser desenvolvida em sala de aula e na escola.

Proposta de projetos

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Água hoje e sempre*: consumo sustentável. São Paulo, 2004. Disponível em: <cenp.edunet.sp.gov.br/Agua/metodologia.asp>. Acesso em: 1º mar. 2016.

Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem

Yves Chevallard, Mariana Bosch e Josep Gascón.
Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 200-206.

O caráter aberto da relação didática

Ao se formar uma comunidade de estudo em torno de um determinado tipo de problema, estabelece-se uma *relação didática* entre os estudantes e o coordenador de estudo. Essa relação torna-se "aberta", ao mesmo tempo, para os alunos e para o professor. Por um lado, os alunos, geralmente, não poderão conhecer de antemão o caminho que devem percorrer ao longo do estudo, nem entender as razões pelas quais o professor os leva para esse ou aquele tipo de problema, abordando-os com essa ou aquela técnica de resolução. Por outro lado, o professor também não será capaz de prever todas as dificuldades que poderão surgir ao longo do processo de estudo nem as reações dos alunos diante delas.

Essa dupla abertura é uma característica essencial da relação entre o professor de Matemática e seus alunos. Dentre as coisas que um professor ensina a seus alunos, existem algumas que ele conhece e outras que ignora — e talvez nunca poderá saber. O professor não pode prever com exatidão o que o aluno fará, nem tampouco o que aprenderá. De fato, toda tentativa de "fechar" a relação didática pode chegar a bloquear ou enfraquecer o processo de estudo, com o consequente empobrecimento e até mesmo a paralisação da aprendizagem.

Dentre os fenômenos relacionados com a tendência de fechar a relação didática, podemos destacar: a pouca consideração dada ao trabalho matemático do aluno (que não costuma ser considerado como um "verdadeiro" trabalho matemático); a concentração na aula das atividades matemáticas do aluno e sua grande dependência do professor; o papel excessivo que se atribui ao professor dentro do processo didático e, em última instância, o que denominamos de "irresponsabilidade matemática" dos alunos.

O ensino, como meio do processo didático, não deve pretender controlar de maneira absoluta o desenvolvimento desse processo. A relação didática é uma relação "aberta". À medida que o ensino de Matemática se organiza para tentar "fechar" essa relação, provoca um empobrecimento da aprendizagem matemática dos alunos.

O professor como coordenador de estudo

Vimos que o estudo da Matemática é uma atividade comunitária e que a relação didática que se estabelece no interior da comunidade de estudo é uma relação aberta.

Ao considerar o estudo como objetivo principal do processo didático, é possível vencer a excessiva dependência dos protagonistas com a instituição escolar. Nessa perspectiva, o ensino deixa de ser o objetivo último e começa a ter um papel de instrumento de apoio para o estudo, o que produz uma mudança fundamental na visão dos papéis de "professor" e de "aluno". O professor de Matemática já não é mais considerado *somente* como aquele que ensina, nem os alunos como meros sujeitos de um processo de aprendizagem.

Essa mudança de perspectiva é importante em vários sentidos. Em primeiro lugar, a atividade matemática a ser desenvolvida ganha um destaque especial: já não aparece (nem para os alunos, nem para o professor) como dependente, a todo momento, da vontade do professor, e seu desenvolvimento adquire condições próprias, com alguma independência dos protagonistas.

Em segundo lugar, a visão estanque do professor como "aquele que ensina" e do aluno como "aquele que aprende o que lhe é ensinado" pode evoluir para uma visão na qual os papéis de professor e de aluno são definidos de maneira menos rígida. Embora continue existindo uma assimetria entre ambos, aparecem novos pontos de contato, visto que agora a questão é realizar de maneira conjunta uma tarefa matemática.

Em terceiro lugar, é produzida uma importante mudança no equilíbrio das responsabilidades atribuídas tradicionalmente tanto para o professor como para o aluno. O professor já não tem como decidir a cada instante qual será a atividade pontual dos alunos e deixa de ser considerado o único (e principal) responsável pela atitude, motivação e tarefa deles. A crescente responsabilidade do aluno permite também, por exemplo, dar sentido e legitimidade a uma avaliação *externa* de seu trabalho (isto é, uma avaliação não elaborada e controlada pelo professor), na medida em que o estudo de uma obra matemática se torna mais objetivo e independente do critério do professor.

[...]

Em contrapartida, as responsabilidades do professor como matemático fiador do controle e guia de uma atividade genuinamente matemática tornam-se mais visíveis, o que contribui para diminuir o risco da "didatite". Em particular, o professor deverá conhecer aquelas questões que definem a "razão de ser" das obras a serem estudadas, assim como as possíveis maneiras concretas de gerar, sob determinadas condições, as principais organizações matemáticas (tipos de problemas, técnicas, tecnologias e teorias) que constituem a obra estudada. Essa "reconstrução artificial" dos conhecimentos matemáticos foi desenvolvida pela *teoria das situações didáticas*.

Do mesmo modo, o aluno, na qualidade de estudante, pode se considerar menos dependente do professor ao ter um referente externo na atividade matemática que realiza. Isso lhe proporciona maior liberdade para administrar seu próprio estudo e utilizar meios de estudo complementares ao ensino, como são, por exemplo, os livros de consulta, as pesquisas pessoais, os intercâmbios com os colegas etc.

Quando se considera o estudo como o objetivo principal do processo didático, torna-se muito mais fácil transferir para o aluno uma parte da responsabilidade matemática atribuída, hoje em dia, exclusivamente ao professor. Essa nova divisão de responsabilidades atribui ao professor o papel de "coordenador de estudo", possibilita que os alunos reconheçam o professor como "matemático" e diminui o risco da "didatite".

Contrato didático, contrato pedagógico e contrato escolar

As mudanças descritas no item anterior são mudanças da relação didática, isto é, da relação que se estabelece dentro de um sistema didático entre os estudantes e o coordenador de estudo em relação às questões estudadas. Trata-se, portanto, de mudanças nas cláusulas que regem o *contrato didático*.

Mas o contrato didático não rege todos os aspectos da relação estabelecida entre os alunos e o professor. Existe, primeiro, um contrato mais geral e visível, o contrato *pedagógico*, que regula as interações entre alunos e professores, as quais não dependem do conteúdo do estudo. Ao mesmo tempo, o contrato pedagógico aparece como uma parte específica de um contrato mais amplo, o contrato *escolar*, que governa essas instituições sociais particulares, que chamamos de *escolas*.

Para situar esses diferentes contratos, é necessário partir da noção genérica de escola. A palavra escola vem, por intermédio do latim *schola*, da palavra grega *skholé*, que significa, na Grécia antiga, ócio, mas que muito rapidamente passou a designar todo aquele tempo livre que, fora do trabalho, era dedicado ao estudo. A noção de escola remete, então, à ideia de uma instituição na qual, ao se distanciar de suas atividades normais — em particular do trabalho — uma pessoa podia se instruir mediante o estudo. A expressão *escolaridade obrigatória* significa, em princípio, a obrigação de interromper suas atividades habituais para dedicar esse tempo livre para se instruir.

Trabalho, ócio e obrigação escolar

Quando se estabeleceu a obrigatoriedade da instrução, o objetivo era impor um tempo de escolaridade — de "ócio estudioso" — àquelas crianças que trabalhavam o dia todo no campo ou na fábrica.

Hoje em dia, a instrução obrigatória (entendida de um ponto de vista mais profissional ou ético do que legal) também envolve os adultos, que devem cada vez mais interromper seu trabalho durante um curto período de tempo para renovar seus conhecimentos profissionais, acompanhando cursos de formação. Para a maioria dos profissionais, a obrigação de "ir à escola" ou de "voltar à escola" parece que tende a se estender para toda a vida ativa da pessoa.

É o *contrato escolar* aquele que, ao definir a escola, define também a posição genérica do aluno: nesse sentido, o aluno é toda aquela pessoa que, interrompendo suas atividades "normais", vai a uma escola para se instruir; uma pessoa se transforma em aluno ao entrar na escola. Na realidade, pelo fato de ser aluno, pode fazer muitas coisas que não poderiam ser feitas em situação normal. A escola proporciona aos alunos um salvo-conduto para ter acesso de maneira legítima a certas obras da sociedade que normalmente não lhes são acessíveis. Por exemplo, um cidadão qualquer não pode, sem mais nem menos, entrevistar um lojista do bairro sobre sua atividade comercial. Mas um grupo de alunos do Ensino Fundamental, que tem de fazer um trabalho sobre os problemas dos comerciantes na gestão do I.V.A [imposto sobre o valor acrescentado — em Portugal], fica automaticamente legitimado para realizar essa entrevista. Do mesmo modo, sem a mediação da escola, muitas crianças não poderiam nunca ter acesso à obra musical de Mozart, porque se interessar por essa obra poderia parecer algo ilegítimo em seu meio social. A posição de aluno proporciona, talvez, mais liberdade que nenhuma outra posição em relação às normas sociais e culturais de seu meio: paradoxalmente, a *obrigação* escolar é produtora de *liberdade*.

Então, para ter acesso a essas obras, a escola proporciona a seus alunos alguns "guias" — os professores — para que desempenhem o papel de "pedagogos". A palavra "pedagogo" originalmente designava, na Grécia antiga, o escravo que conduzia o jovem aluno para a escola e lhe servia de preceptor. Nós a utilizamos aqui para designar o professor como a pessoa encarregada de *conduzir o aluno às obras* que ele deve estudar. O *contrato pedagógico* regula, então, os aspectos gerais que afetam o ambiente de estudo, isto é, os aspectos não específicos da obra a ser estudada. O contrato pedagógico se parece com o sistema operacional de um computador — que seria a escola —, no sentido de que possibilita o funcionamento de diferentes programas — os contratos didáticos — que permitem a realização de tarefas específicas de estudo. Assim, por exemplo, o contrato pedagógico exige do aluno uma confiança total no professor, nas decisões que ele toma, e um respeito à sua autoridade. Ao mesmo tempo, também exige do professor uma atenção e responsabilidade especiais em relação ao aluno e às suas condições de trabalho.

O escolar, o pedagógico, o didático

O professor para de escrever no quadro e se vira para os alunos, irritado, porque eles não param de falar. A origem do burburinho pode ser encontrada em cada um dos três níveis indicados.

Pode ser que sejam alunos relativamente indiferentes à instituição escolar, isto é, alunos "não civilizados" em relação com essa instituição e que rejeitam o contrato escolar.

Também pode ser que os alunos rejeitem o "estilo" pedagógico do professor, porque parece menosprezá-los ou porque não tem suficiente autoridade etc.

Mas, talvez, o burburinho seja resposta a uma ruptura do contrato didático por parte do professor: talvez esteja resolvendo o problema com uma técnica que os alunos não conhecem; ou ainda que não mostra claramente o que os alunos deverão fazer por si mesmos em relação a isso; ou, talvez, aja como se os alunos tivessem certas informações que eles próprios desconhecem etc. A observação de aulas mostra que esta é a origem mais frequente dos burburinhos espontâneos, que costumam surgir em sala de aula.

O contrato didático é acionado quando, sob a coordenação do professor, o aluno entra, verdadeiramente, em contato com uma obra concreta para estudá-la e a apreende. A passagem do *contrato pedagógico* para o *contrato didático* acontece quando a relação entre dois (professor e aluno) se transforma realmente em uma relação entre três: o aluno, a obra a ser estudada e o professor como coordenador de estudo. Se retomarmos a metáfora anterior, o contrato didático seria o programa de computador que, em um sistema operacional adequado, permite realizar tarefas concretas (embora não *qualquer* tipo de tarefa).

Vemos, então, que o contrato didático somente pode existir quando existe um contrato pedagógico e, mais do que isso, quando existe um contrato escolar. Na realidade, o contrato escolar e o contrato pedagógico, mediante seu conteúdo e a maneira como são interpretados, afetam em grande parte os *tipos de contratos didáticos possíveis*, embora estes sejam principalmente determinados pela obra a ser estudada.

Pode acontecer, por exemplo, que o aluno não aceite bem o contrato escolar, porque não entende bem as razões de ser da escola. Mas, mesmo assim, pode ser também que aceite, ao mesmo tempo, o contrato pedagógico que o aproxima desse ou daquele professor: o aluno gosta de estar com seu professor ou professora, mas não gosta do que fazem na escola. Também pode acontecer que o aluno se envolva com prazer no contrato escolar, mas não aceite bem o contrato pedagógico, que faz com que ele dependa de sua relação com o professor para ter acesso às obras a serem estudadas.

Muitos "movimentos inovadores" tentam, sobretudo, modificar o contrato pedagógico ou o contrato escolar, com o objetivo de tornar viáveis determinados contratos didáticos. Mas sabemos que dispor de um computador mais potente ou com um sistema operacional melhor ainda deixa em aberto o problema da construção de programas eficazes para a realização de determinados tipos de tarefas. Sem esquecer a interdependência, entre os três níveis (o escolar, o pedagógico e o didático), cabe lembrar que o contrato didático é a pedra de toque de toda a organização escolar.

Meu Professor de Matemática e outras histórias

Elon Lages Lima. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. p. 4-6.

Meu Professor de Matemática

[...]

A Matemática ensinada por Benedito de Morais* não era apenas um conjunto de regras e receitas válidas por decreto (o que ele chamava de método "ou crê ou morre") nem tampouco um sistema dedutivo formal, vazio de significado. Era qualquer coisa bem próxima da realidade e das aplicações, porém organizada com definições, exemplos e demonstrações. Algumas dessas definições apelavam abertamente para a experiência intuitiva e certas de suas demonstrações também lançavam mão de argumentos não contidos nos axiomas. Isto escandalizaria um purista lógico, mas tinha o grande mérito de assentar a Matemática em bases concretas, próximas da realidade. Devo deixar claro que suas eventuais transgressões ao rigor não continham nada fundamentalmente errado: nunca subtraiu desigualdades do mesmo sentido, nunca dividiu por zero e jamais considerou raiz quadrada real de um número negativo. Simplesmente não fazia cavalo de batalha em torno de certos fatos óbvios e verdadeiros que qualquer aluno de ginásio estaria disposto a aceitar sem discutir. Por exemplo: se o ponto *A* está no interior e o ponto *B* está no exterior de uma circunferência, então ele concluía que o segmento *AB* tem exatamente um ponto em comum com essa circunferência, sem tecer maiores considerações a respeito da continuidade da reta, nem sobre a convexidade do círculo.

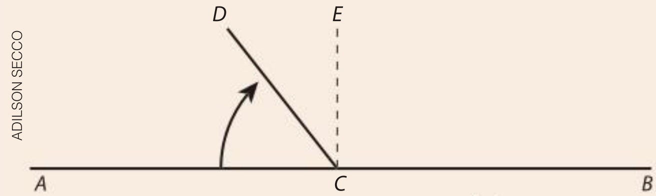
Para maior clareza, vejamos um exemplo de definição e outro de demonstração, tirados de suas aulas, segundo as recordo.

Números: "Número inteiro é o resultado de uma contagem de objetos. Números ocorrem, mais geralmente, como resultados de medidas. Medir uma grandeza é compará-la com outra de mesma espécie chamada *unidade*. Se uma grandeza *A* está contida exatamente, numa grandeza *B*, um número inteiro de vezes, diz-se que *B* é um *múltiplo* de *A* e *A* é um *submúltiplo* de *B*. Se algum submúltiplo de *A* é também submúltiplo de *B*, então as grandezas *A* e *B* dizem-se *comensuráveis*. Caso contrário, *A* e *B* dizem-se *incomensuráveis*. Um número racional é a medida de uma grandeza comensurável com a unidade. Quando uma grandeza é incomensurável com a unidade, sua medida é um número irracional. Exemplos: o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis; o diâmetro e a circunferência também são incomensuráveis. Para algumas grandezas, há também uma noção de sentido, positivo ou negativo. (Exemplos: temperatura, saldo bancário, corrente elétrica, altitude etc.) A medida dessas grandezas é um número relativo, isto é, provido de um sinal $+$ ou $-$".

Naturalmente, essas noções não eram apresentadas assim, de enxurrada, mas intercaladas com exemplos e explicações. O importante é notar nas definições acima uma conexão entre a Matemática e a realidade, uma explicação concreta da noção de número irracional e uma atitude honesta, direta e desmitificadora. Essas qualidades objetivas, presentes nos bons compêndios franceses de Matemática do começo do século 20 e sensatamente copiadas em nossos melhores da época, parecem ter sido erradamente varridas junto com o entulho que aqueles compêndios também continham. Foram substituídas pelo formalismo pedante e inócuo da "Matemática moderna" que hoje, em declínio acentuado, deu lugar a uma penosa indefinição de personalidade existente na maioria dos textos atuais.

A propósito, Benedito de Morais nunca adotou nenhum dos textos existentes. Recomendava-os, mas não os seguia. Em primeiro lugar, porque fazia tudo de modo mais simples e claro. E depois, mesmo que quisesse adotar um deles, isto seria incompatível com seu hábito de dar todo o programa, principalmente no chamado "curso colegial".

Um teorema: *Por um ponto dado numa reta passa uma e somente uma perpendicular a essa reta.*



Demonstração: Pelo ponto *C* da reta $\overleftrightarrow{AB}$, tracemos uma semirreta $\overrightarrow{CD}$ de modo que o ângulo $D\hat{C}A$ seja menor do que o ângulo $D\hat{C}B$. Fazendo girar a semirreta $\overrightarrow{CD}$ em torno do ponto *C*, na direção da seta, vemos que o ângulo $D\hat{C}A$ aumenta enquanto $D\hat{C}B$ diminui até ficar menor do que $D\hat{C}A$. Logo, deve haver uma posição $\overleftrightarrow{CE}$ na qual os dois ângulos, $A\hat{C}E$ e $E\hat{C}B$, são iguais. Então, por definição, $\overleftrightarrow{CE}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Em qualquer outra posição $\overleftrightarrow{CD}$, ou teremos $D\hat{C}A < E\hat{C}A < D\hat{C}B$, ou então $D\hat{C}B < E\hat{C}B < D\hat{C}A$. Em qualquer caso, os dois ângulos, $D\hat{C}A$ e $D\hat{C}B$, são diferentes; logo $\overleftrightarrow{CD}$ não é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

Como aluno do terceiro ano ginasial, esta demonstração me satisfez plenamente. Mais do que isso: além de sua elegância, nela eu via um novo tipo de raciocínio (que hoje reconheço como o teorema do valor intermediário), tão marcante que ainda me lembro dos seus detalhes.

Mais tarde, ao prosseguir os estudos, me disseram que esta demonstração estava errada porque se baseava na ideia de movimento e na hipótese de continuidade da grandeza ângulo, coisas que não constavam dos axiomas, postulados e noções fundamentais que se admitiram no início da teoria, coisas que não tinham sido cuidadosamente discutidas antes, logo não poderiam ser utilizadas em demonstrações.

A crítica acima seria válida se considerássemos a Geometria como um sistema lógico-dedutivo, onde é feita uma lista completa dos axiomas e dos conceitos básicos não definidos, a partir da qual se dão todas as definições e se provam todas as afirmações, segundo os padrões impecáveis da lógica formal. Como nos "Fundamentos da Geometria", de Hilbert. Acontece, porém, que uma tal atitude não tem o menor cabimento no âmbito da Escola Secundária. A demonstração ali tem a finalidade de convencer o aluno por meio de argumentos precisos e claros, os quais poderão eventualmente valer-se de fatos aceitáveis (ainda que não explicitamente discutidos) que pertençam à experiência intuitiva e que possam ser provados rigorosamente em cursos mais avançados. Imperdoável seria utilizar-se de sofismas, raciocínios logicamente incorretos ou fatos matematicamente absurdos. Estou afirmando aqui que considero plenamente admissível, numa demonstração, lançar mão de resultados verdadeiros, intuitivamente óbvios, que são considerados evidentes pelos alunos, mesmo que não tenham sido esmiuçados logicamente. De resto, é assim que fazem os matemáticos profissionais em seus trabalhos de pesquisa.

No exemplo em questão, o argumento usado para demonstrar o teorema é absolutamente correto e fácil de justificar com todo o rigor se utilizarmos coordenadas cartesianas ou se interpretarmos os pontos do plano como números complexos.

Assim, a demonstração acima para mim estava certa, depois estava errada e, afinal de contas, está certa. (Como aquela história do motorista, que pediu ao amigo: "Ponha a cabeça fora da janela e veja se a luz do pisca-pisca está acendendo". Resposta: "Está, não está, está, não está...")

[...]

(*) Benedito de Morais: ex-professor de Matemática do autor, lecionou em Maceió.

I. Atividades extras

◆ Capítulo 1 • Ciclo trigonométrico – 1ª volta

Exercícios

1. Determine a medida do raio de uma circunferência cujo comprimento é π m.

2. Calcule, em grau, a medida de um arco de:

a) $\frac{5\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{3\pi}{5}$ rad

3. O pêndulo de um relógio de parede descreve um ângulo de 60°, e sua extremidade percorre um arco $\overset{\frown}{AB}$. Calcule o comprimento desse arco, sabendo que o pêndulo tem 0,60 m de comprimento.

4. Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5 h 40 min?

5. Em relação aos eixos x e y e em relação à origem O, encontre os arcos simétricos dos arcos de medida:

a) $\frac{4\pi}{5}$ rad **b)** 320°

6. Coloque em ordem decrescente os valores de $\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}$, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$, $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$ e $\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$.

7. Calcule o valor da expressão $\dfrac{\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}}{\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}}$.

8. Classifique em verdadeiras ou falsas as expressões.

a) sen 150° = sen 90° + sen 60°

b) cos (90° + 60°) = cos 90° + cos 60°

c) tg 240° = tg 120° + tg 120°

9. Sendo $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e α um arco do QIV, determine:

a) sen α **b)** tg α

10. Calcule o valor de y tal que $y = \cos x + \text{sen}\,x$, sabendo que $\text{tg}\,x = -1$ e que o arco x pertence ao 2º quadrante.

11. Resolva as equações, com $x \in [0, 2\pi]$.

a) $2 \cdot \text{sen}\,x + \sqrt{3} = 0$ **b)** $3 \cdot \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0$

◆ Resoluções

1. $2\pi \cdot r = \pi \Rightarrow r = \frac{\pi}{2\pi} \Rightarrow r = 0{,}5$

O raio mede 0,5 m.

2. a) $\left.\begin{array}{l} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rad} \\ x \text{ ——— } \frac{5\pi}{3} \text{ rad}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{5\pi}{3}} \Rightarrow x = 300°$

Então, $\frac{5\pi}{3}$ rad = 300°.

b) $\left.\begin{array}{l} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rad} \\ x \text{ ——— } \frac{3\pi}{5} \text{ rad}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{5}} \Rightarrow x = 108°$

Então, $\frac{3\pi}{5}$ rad = 108°.

3. $\left.\begin{array}{l} 360° \text{ — } 2\pi \cdot 0{,}60 \\ 60° \text{ — } x\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{60° \cdot 2\pi \cdot 0{,}60}{360°} \Rightarrow x \simeq 0{,}628$

O pêndulo descreve um arco de aproximadamente 0,628 m.

4. A medida do menor ângulo formado pelos ponteiros é igual a $90° - \alpha$.

$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ min — } 30° \\ 40 \text{ min — } \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 20°$

$90 - \alpha = 90° - 20° = 70°$

O menor ângulo formado pelos ponteiros mede 70°.

5. a) eixo x:

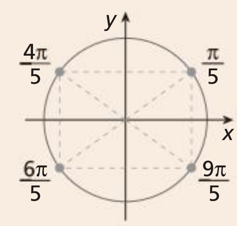
$2\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

eixo y:

$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

origem:

$\pi + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$



b) eixo x:

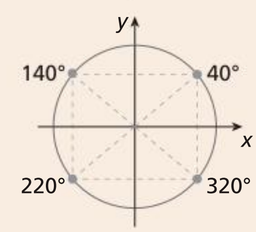
360° − 320° = 40°

eixo y:

(360° − 320°) + 180° = 220°

origem:

320° − 180° = 140°



6. Como $\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$, então:

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} > \text{sen}\,\frac{3\pi}{4} > \text{sen}\,\frac{\pi}{6} > \text{sen}\,\frac{5\pi}{3}$

7. $\dfrac{\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}}{\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 2$

8. a) Falsa, pois:

sen 150° = sen 90° + sen 60°

$\frac{1}{2} \neq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Falsa, pois:

cos (90° + 60°) = cos 90° + cos 60°

cos 150° = cos 90° + cos 60°

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0 + \frac{1}{2}$

c) Verdadeira, pois:

tg 240° = tg (180° + 60°)

tg 240° = tg 240°

$\sqrt{3} = \sqrt{3}$

9. a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in$ QIV

$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

Como $\alpha \in$ QIV, temos $\text{sen}\,\alpha = -\frac{4}{5}$.

b) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. $y = \cos x + \text{sen } x$; $\text{tg } x = -1$; $x \in \text{QII}$

$\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \text{sen } x = -\cos x$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$(-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

Como $x \in \text{QII}$, temos $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Então, $\text{sen } x = -\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto:

$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 0$

11. **a)** $2 \cdot \text{sen } x + \sqrt{3} = 0$

$\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Os arcos cujo seno é $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ medem $\dfrac{4\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{3}$.

Então:

- $\text{sen } x = \text{sen } \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$
- $\text{sen } x = \text{sen } \dfrac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{3}$

Portanto, $S = \left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $3 \cdot \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Os arcos cuja tangente é $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ medem $\dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{7\pi}{6}$.

Assim:

- $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$
- $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{8\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3}$

Portanto, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

Capítulo 2 • Funções trigonométricas

Exercícios

1. Verifique quais dos pares de arcos a seguir são côngruos.

a) $\dfrac{5\pi}{8}$ rad e $\dfrac{25\pi}{8}$ rad **c)** $\dfrac{7\pi}{6}$ rad e $\dfrac{31\pi}{6}$ rad

b) 225° e 2.025° **d)** $\dfrac{12\pi}{5}$ rad e $\dfrac{30\pi}{5}$ rad

2. Represente a expressão geral dos arcos de medida:

a) $\dfrac{13\pi}{6}$ **b)** 785°

3. Dada a função f, tal que $f(x) = 2 + \text{sen } x$, construa o gráfico e determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude.

4. Determine os valores reais de a para que exista $x \in \mathbb{R}$, tal que $\text{sen } x = \dfrac{5a + 2}{3}$.

5. Identifique o quadrante e calcule o valor do seno de:

a) $-\dfrac{23\pi}{6}$ **b)** 4.455°

6. Sendo $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \cos x$, construa o gráfico de f e determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude de f.

7. Determine os valores de a, de modo que exista $x \in \mathbb{R}$, tal que $\cos x = \dfrac{5 - 2a}{3}$.

8. Identifique o quadrante e calcule o valor do cosseno de:

a) $\dfrac{15\pi}{4}$ **b)** $-2.010°$

9. Dada a função f, tal que $f(x) = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, construa o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período de f.

10. Identifique o quadrante e calcule o valor da tg de:

a) $-\dfrac{20\pi}{3}$ **b)** 1.230°

11. Dados $f(x) = -2 \cdot \text{sen } \dfrac{x}{2}$ e $g(x) = 2 \cdot \cos \dfrac{x}{2}$, faça o que se pede.

a) Construa os gráficos de f e g em um mesmo plano cartesiano.

b) Analisando os gráficos do item **a**, determine os valores de x, em que $f(x) = g(x)$.

Resoluções

1. **a)** $\dfrac{25\pi}{8}$ rad $= 2\pi + \dfrac{9\pi}{8}$ rad $\equiv \dfrac{9\pi}{8}$ rad $\neq \dfrac{5\pi}{8}$ rad

Portanto, não são arcos côngruos.

b) $2.025° = 5 \cdot 360° + 225° \equiv 225°$

Portanto, são arcos côngruos.

c) $\dfrac{31\pi}{6}$ rad $= 4\pi + \dfrac{7\pi}{6}$ rad $\equiv \dfrac{7\pi}{6}$ rad

Portanto, são arcos côngruos.

d) $\dfrac{30\pi}{5}$ rad $= 6\pi$ rad $\equiv 0$ rad $\neq \dfrac{12\pi}{5}$ rad

Portanto, não são arcos côngruos.

2. **a)** $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi \equiv \dfrac{\pi}{6}$

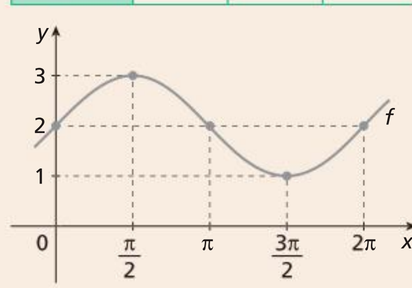
Portanto, a expressão geral é $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $785° = 65° + 2 \cdot 360° \equiv 65°$

Logo, a expressão geral é $65° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $f(x) = 2 + \text{sen } x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	−1	0
2 + sen x	2	3	2	1	2



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [1, 3]$

Período $= 2\pi$

Amplitude $= 1$

4. $-1 \leqslant \dfrac{5a + 2}{3} \leqslant 1$

I. $-1 \leqslant \dfrac{5a + 2}{3} \Rightarrow -5 \leqslant 5a \Rightarrow -1 \leqslant a$

II. $\dfrac{5a + 2}{3} \leqslant 1 \Rightarrow 5a \leqslant 1 \Rightarrow a \leqslant \dfrac{1}{5}$

Portanto, $-1 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{5}$, com $a \in \mathbb{R}$.

5. **a)** $-\dfrac{23\pi}{6} = -2\pi + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6} \in \text{QI}$

$\text{sen}\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

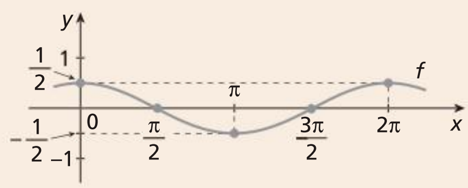
b) $4.455° = 12 \cdot 360° + 135° \equiv 135° \in \text{QII}$

$\text{sen } 4.455° = \text{sen } 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

6. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\frac{1}{2} \cdot \cos x$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



$D(f) = \mathbb{R}$ Período $= 2\pi$

$\text{Im}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ Amplitude $= \frac{1}{2}$

7. $-1 \leqslant \frac{5 - 2a}{3} \leqslant 1$

I. $-1 \leqslant \frac{5 - 2a}{3} \Rightarrow -8 \leqslant -2a \Rightarrow a \leqslant 4$

II. $\frac{5 - 2a}{3} \leqslant 1 \Rightarrow -2a \leqslant -2 \Rightarrow a \geqslant 1$

Portanto, $1 \leqslant a \leqslant 4$, $a \in \mathbb{R}$.

8. a) $\frac{15\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4} \in$ QIV

$\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

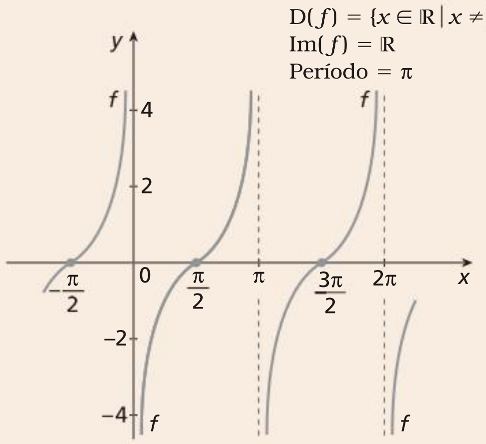
b) $-2.010° = -6 \cdot 360° + 150° \equiv 150° \in$ QII

$\cos(-2.010°) = \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$x + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{R}\}$
$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
Período $= \pi$



10. a) $-\frac{20\pi}{3} = -8\pi + \frac{4\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} \in$ QIII

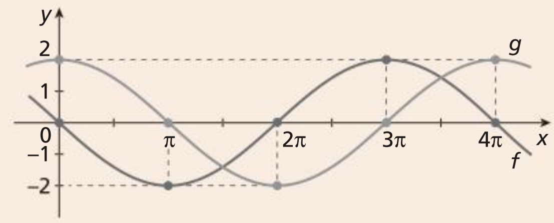
$\text{tg}\left(-\frac{20\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

b) $1.230° = 3 \cdot 360° + 150° \equiv 150° \in$ QII

$\text{tg}\,1.230° = \text{tg}\,150° \equiv -\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. a)

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$	0	-2	0	2	0
$2\cos\frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2



b) $f(x) = g(x)$, para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

◆ Capítulo 3 • Complementos de Trigonometria

Exercícios

1. Um triângulo equilátero de lado medindo $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm está inscrito em uma circunferência de raio r. Determine o raio da circunferência.

2. Em um trapézio isósceles $MNPQ$, a base maior mede 32 cm, o lado não paralelo mede 20 cm, e o ângulo entre eles mede 60°. Calcule a medida das diagonais desse trapézio.

3. Sendo $\text{sen}\, x = -\frac{5}{13}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule:

a) cossec x **b)** cotg x **c)** sec x

4. Simplifique a expressão $y = \frac{\text{tg}\, x + \text{sen}\, x}{\text{cotg}\, x \cdot \sec x + \text{cotg}\, x}$

5. Calcule o valor de $y = \text{sen}\, x + 4 \cdot \cos x$, sabendo que $\sec x = \frac{5}{4}$ e que $x \in$ QI.

6. Sabendo que $\text{cotg}\, x = a + 2$ e que $\text{cossec}^2\, x = 8a + 2$, determine o(s) valor(es) de a.

7. Determine o conjunto solução da equação $2 \cdot \cos x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$.

8. Calcule o valor de x, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, tal que:
$2 \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$

9. Prove que:

a) $\sec(\pi - x) = -\sec x$

b) $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$

c) $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\, x$

d) $\text{cotg}(2\pi - x) = -\text{cotg}\, x$

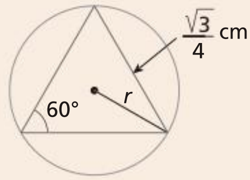
10. Calcule o valor de:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **b)** $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ **c)** $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Resoluções

1. Aplicando a lei dos senos:



$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\text{sen}\,60°} = 2r \Rightarrow r = 0{,}25$$

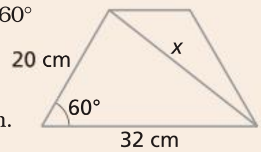
Logo, o raio da circunferência é 0,25 cm.

2. $x^2 = 32^2 + 20^2 - 2 \cdot 32 \cdot 20 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 1.024 + 400 - 640$

$x = 28$

Logo, as diagonais medem 28 cm.



3. $\text{sen}\ x = -\frac{5}{13}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

a) $\text{cossec}\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x} = \frac{1}{-\frac{5}{13}} = -\frac{13}{5}$

b) Como $\text{sen}^2\ x + \cos^2\ x = 1$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos:

$\cos\ x = -\frac{12}{13}$. Então:

$$\text{cotg}\ x = \frac{\cos\ x}{\text{sen}\ x} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

c) $\sec\ x = \frac{1}{\cos\ x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$

4. $y = \frac{\text{tg}\ x + \text{sen}\ x}{\text{cotg}\ x \cdot \sec\ x + \text{cotg}\ x}$

$$y = \frac{\frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} + \text{sen}\ x}{\text{cotg}\ x \cdot (\sec\ x + 1)} = \frac{\text{sen}\ x \cdot (\sec\ x + 1)}{\text{cotg}\ x \cdot (\sec\ x + 1)}$$

$$y = \text{sen}\ x \cdot \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} \Rightarrow y = \text{sen}\ x \cdot \text{tg}\ x$$

5. $\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sec x} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$

$\text{sen}^2\ x + \cos^2\ x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}\ x = \pm\frac{3}{5}$

Como $x \in$ QI, $\text{sen}\ x = \frac{3}{5}$.

$y = \text{sen}\ x + 4 \cdot \cos x \Rightarrow y = \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{19}{5}$

6. Sabemos que $\text{cotg}\ x = a + 2$ e $\text{cossec}^2\ x = 8a + 2$.

$1 + \text{cotg}^2\ x = \text{cossec}^2\ x$

$1 + (a + 2)^2 = 8a + 2 \Rightarrow 1 + a^2 + 4a + 4 = 8a + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ ou $a = 1$

7. $2 \cdot \cos x + 1 = 0$

$2 \cdot \cos\ x = -1 \Rightarrow \cos\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\ x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ \cos\ x = \cos\frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

8. $2 \cdot \cos^2\ x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

$\cos x \cdot \left(2 \cdot \cos x - \sqrt{3}\right) = 0$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou} \\ \cos x = \cos\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$2 \cdot \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou} \\ \cos x = \cos\frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

No intervalo $[0, 2\pi]$, x vale $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{11\pi}{6}$.

9. a) $\sec(\pi - x) = -\sec x$

$$\sec(\pi - x) = \frac{1}{\cos(\pi - x)} = \frac{1}{\cos\pi \cdot \cos x + \text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}\ x} =$$

$$= \frac{1}{(-1)\cos x + 0 \cdot \text{sen}\ x} = -\frac{1}{\cos x} = -\sec\ x$$

Portanto, $\sec(\pi - x) = -\sec x$.

b) $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

Portanto, $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec\ x$.

c) $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\ x$. Usando $\text{tg}(a + b)$, temos:

$$\text{tg}(\pi + x) = \frac{\text{tg}\,\pi + \text{tg}\ x}{1 - \text{tg}\,\pi \cdot \text{tg}\ x} = \frac{0 + \text{tg}\ x}{1 - 0} = \text{tg}\ x$$

Portanto, $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\ x$.

d) $\text{cotg}(2\pi - x) = \frac{1}{\text{tg}(2\pi - x)} = \frac{1}{\frac{\text{tg}\,2\pi - \text{tg}\ x}{1 + \text{tg}\,2\pi \cdot \text{tg}\ x}} =$

$$= \frac{1}{\frac{0 - \text{tg}\ x}{1 + 0 \cdot \text{tg}\ x}} = -\frac{1}{\text{tg}\ x} = -\text{cotg}\ x$$

Portanto, $\text{cotg}(2\pi - x) = -\text{cotg}\ x$.

10. a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \text{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) =$

$$= \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

c) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) =$

$$= \frac{\text{tg}\frac{\pi}{4} - \text{tg}\frac{\pi}{6}}{1 + \text{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \text{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{9 - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \mathbf{2} - \sqrt{3}$$

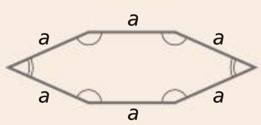
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

◆ Capítulo 4 • Superfícies poligonais, círculo e áreas

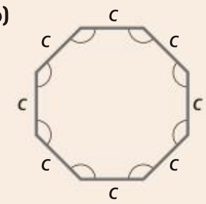
Exercícios

1. Observe os polígonos abaixo e verifique se são regulares ou não. Justifique sua resposta.

a)



b)



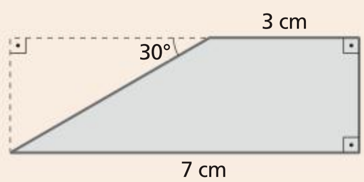
2. Determine o raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero de lado medindo 5 dm.

3. Determine a razão entre as medidas dos apótemas de um triângulo equilátero e de um hexágono regular inscritos na mesma circunferência.

4. Determine a área do triângulo que tem dois lados que medem 5 cm e 2 cm, entre os quais se forma um ângulo que mede 30°.

5. O lado de um losango mede 130 mm. Calcule sua área, sabendo que a medida de sua diagonal maior é 240 mm.

6. Determine a área do trapézio representado abaixo.



7. Quanto mede a superfície do tampo de uma mesa de forma hexagonal cujo lado mede 40 cm?

8. Para a apresentação de uma peça de teatro no colégio, foi montado um palco no formato de um semicírculo. Determine a área ocupada pelo palco, sabendo que o diâmetro do semicírculo mede 10 m. (*Use*: $\pi = 3{,}14$)

◆ Resoluções

1. O polígono do item **b** é regular, pois todos os lados são congruentes e todos os ângulos internos são congruentes.

2. $\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow 5 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

Logo, o raio é $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ dm.

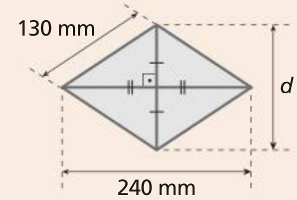
3. Razão: $\dfrac{a_3}{a_6} = \dfrac{\dfrac{r}{2}}{\dfrac{r\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4. A área de um triângulo qualquer, sendo dados dois lados de medidas a e c e ângulo β formado por eles, é $A = \dfrac{a \cdot c \cdot \text{sen } \beta}{2}$. Então:

$A = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot \text{sen } 30°}{2} \Rightarrow A = \dfrac{2 \cdot 5}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 2{,}5$

Portanto, a área do triângulo é 2,5 cm².

5. A área do losango é dada por $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{240}{2}\right)^2 = 130^2 \Rightarrow \dfrac{d^2}{4} = 130^2 - 120^2$

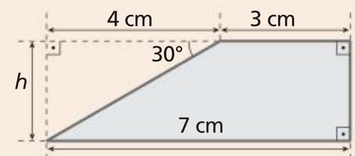
$d^2 = 4 \cdot 2.500 \Rightarrow d^2 = 10.000 \Rightarrow d = 100$

Assim, temos:

$A = \dfrac{240 \cdot 100}{2} \Rightarrow A = 12.000$

Logo, a área do losango é 12.000 mm² ou 120 cm².

6. A área é dada por $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$.



Cálculo da altura:

$\text{tg } 30° = \dfrac{\text{cateto oposto a } 30°}{\text{cateto adjacente a } 30°}$

$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{4} \Rightarrow h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$A = \dfrac{(7 + 3)}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

Logo, a área do trapézio é $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm².

7. Usando a fórmula da área de superfícies poligonais regulares, temos:

$p = \dfrac{\ell \cdot 6}{2} \Rightarrow \dfrac{40 \cdot 6}{2} = 120$

$a_6 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \dfrac{40 \cdot \sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

Área $= p \cdot a \Rightarrow A = 120 \cdot 20\sqrt{3} = 2.400\sqrt{3}$

Portanto, a superfície da mesa tem $2.400\sqrt{3}$ cm².

8. A área do palco é dada por: $\dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$

$D = 10 \Rightarrow r = \dfrac{D}{2} \Rightarrow r = 5$

$A = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2} \Rightarrow A = \dfrac{3{,}14 \cdot 25}{2} \Rightarrow A = 39{,}25$

Logo, a área ocupada pelo palco é 39,25 m².

◆ Capítulo 5 • Introdução à Geometria espacial

Exercícios

1. Responda às questões.
a) Quantas retas passam por um único ponto?
b) Quantas retas passam por dois pontos distintos?

2. Classifique cada uma das proposições em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
a) Existem infinitas retas distintas no espaço.
b) Por uma reta passa um único plano.
c) Um plano contém infinitos pontos.
d) Três pontos não colineares são sempre coplanares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
   a) Duas retas reversas são coplanares.
   b) Duas retas concorrentes são coplanares.
   c) Duas retas paralelas, não coincidentes, são reversas.
   d) Se $r \cap s = \{\ \}$, então r e s são retas paralelas não coincidentes ou reversas.

4. Dados dois planos distintos, α e β, paralelos entre si, que são interceptados por um terceiro plano, δ, demonstre que as intersecções são paralelas. Este exercício pode ser feito em dupla.

5. Sabendo que a distância de um ponto W a um plano ϕ é 24 cm e que sua projeção ortogonal W' sobre ϕ é o centro de uma circunferência contida nesse plano, se a distância de W a qualquer ponto da circunferência é 30 cm, qual é o raio dessa circunferência?

6. Seja um diedro de medida 65°. De um ponto P externo ao diedro, traçamos duas semirretas perpendiculares às faces do diedro. Qual é a medida do ângulo determinado pelas semirretas?

Resoluções

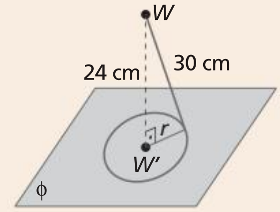
1. a) infinitas b) uma única reta

2. a) verdadeira
   Dado um plano α, pelo postulado P3 existe um ponto P, $P \notin \alpha$. Pelo postulado P2, o plano α tem infinitos pontos. Assim, sejam $Q_1 \in \alpha$ e $Q_2 \in \alpha$ tais que $Q_1 \neq Q_2$. Como $P \notin \alpha$, temos $P \neq Q_1$ e $P \neq Q_2$. Logo, pelo postulado P4, existem as retas $\overleftrightarrow{PQ}_1$ e $\overleftrightarrow{PQ}_2$. Por construção, os pontos P, Q_1 e Q_2 não são colinares; logo, $\overleftrightarrow{PQ}_1 \neq \overleftrightarrow{PQ}_2$. Desse modo, há infinitas retas $\overleftrightarrow{PQ}_n$ distintas no espaço.
   b) falsa
   Pelo postulado P8, sabemos que a intersecção de dois planos distintos é uma reta. Logo, por uma reta passam pelo menos dois planos distintos.
   c) verdadeira
   Pelo postulado P2, toda reta e todo plano são conjunto de infinitos pontos.
   d) verdadeira
   Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano; logo, são sempre coplanares.

3. a) falsa
   Pela definição, se duas retas são reversas, não existe um mesmo plano que as contenha. Logo, retas reversas não são coplanares.
   b) verdadeira
   Pelo teorema 3, se duas retas são concorrentes em determinado ponto, elas determinam um único plano.
   c) falsa
   Pelo teorema 2, duas retas paralelas, não coincidentes, determinam apenas um plano. Como retas reversas não são coplanares, então duas retas paralelas não coincidentes não são reversas.
   d) verdadeira
   Um par de retas pode ser paralelo, reverso ou concorrente, e apenas as retas paralelas não coincidentes e as reversas não têm nenhum ponto em comum.

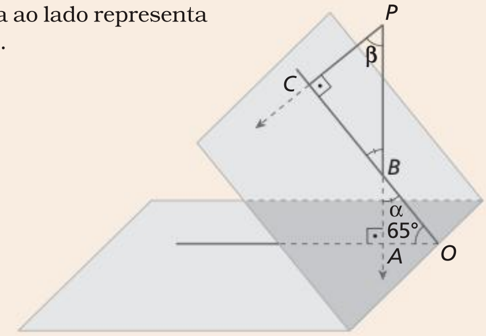
4. Justificativa:
   - Como α e β são interceptados pelo plano δ, existe uma reta s contida em $\alpha \cap \delta$ e uma reta r contida em $\beta \cap \delta$. Desse modo, r e s são coplanares.
     Como $\alpha /\!/ \beta$, temos $\alpha \cap \beta = \{\ \}$; logo, como $s \subset \alpha$ e $r \subset \beta$, temos $s \cap r = \{\ \}$.
   - Se r e s são coplanares e não têm ponto comum, então elas são retas paralelas.

5. Com base nas informações do enunciado, é possível elaborar o esquema abaixo.



Representando a medida do raio da circunferência por r, temos:
$30^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 900 - 576 \Rightarrow r^2 = 324 \Rightarrow r = 18$
Logo, o raio da circunferência mede 18 cm.

6. O esquema ao lado representa a situação.



Considerando que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 65°, temos:
$\alpha + 65° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 25°$
Como os ângulos $O\hat{B}A$ e $P\hat{B}C$ são opostos pelo vértice, o ângulo $P\hat{B}C$ mede 25°. Assim:
$\beta + 90° + 25° = 180° \Rightarrow \beta = 65°$
Logo, o ângulo $B\hat{P}C$ formado pelas semirretas mede 65°.

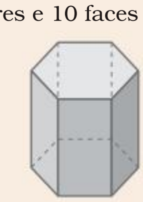
Capítulo 6 • Poliedros

Exercícios

1. Quantas faces tem um poliedro convexo de 20 arestas, sabendo que o número de vértices é igual ao de faces?

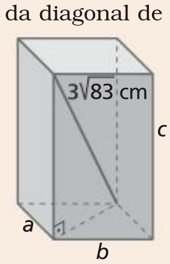
2. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem seis faces quadrangulares e 10 faces triangulares.

3. Represente uma possível planificação do sólido ao lado.



4. A soma das medidas das arestas de um cubo é 108 cm. Encontre a medida de cada aresta, da diagonal de uma face e da diagonal desse cubo.

5. Considere o paralelepípedo reto-retângulo ao lado. Sabendo que sua diagonal mede $3\sqrt{83}$ cm, determine as medidas a, b e c indicadas, tendo em vista que são proporcionais aos números 3, 5 e 7.



6. Determine a área total e o volume, em litro, de uma embalagem de leite longa-vida cuja forma lembra um paralelepípedo reto-retângulo de arestas medindo 0,95 dm, 0,65 dm e 1,7 dm.

7. Determine a área total e o volume de um prisma hexagonal regular cujas dimensões são: aresta da base 8 cm e altura 15 cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. Encontre o volume de um prisma de 18 m de aresta lateral e cuja base é um trapézio isósceles com base menor medindo 8 m, base maior medindo 14 m e altura de 4 m.

9. Considere uma pirâmide de base quadrada. Calcule a medida do apótema da base e do apótema da pirâmide, sabendo que a aresta da base e a altura da pirâmide medem, respectivamente, 12 cm e 8 cm.

10. Seja uma pirâmide regular de base triangular com área da base igual a $12\sqrt{3}$ cm^2. Calcule o volume dessa pirâmide, sabendo que sua altura é $2\sqrt{2}$ cm.

11. Calcule a área da base de uma pirâmide cuja altura é 10 dm e cujo volume é 120 dm^3.

12. Em um tetraedro regular de aresta igual a 12 cm. Determine:
a) sua altura.
b) sua área total.
c) seu volume.

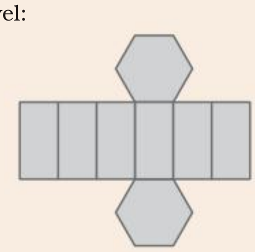
13. A área da base de uma pirâmide é igual a 900 dm^2. Uma secção paralela à base, exatamente a 6 cm do vértice, tem área igual a 81 cm^2. Calcule a altura da pirâmide.

Resoluções

1. $V + F - 2 = A$; $V = F$
$F + F - 2 = 20 \Rightarrow 2F = 22 \Rightarrow F = 11$
Logo, o poliedro tem 11 faces.

2. $A = \dfrac{6 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 27$
$V + 16 - 2 = 27 \Rightarrow V = 13$
Portanto, o poliedro tem 13 vértices.

3. resposta possível:



4. Como um cubo é um hexaedro, ele tem 12 arestas. Logo:
$12a = 108 \Rightarrow a = 9$
Calculando a diagonal da face e a diagonal do cubo, obtemos, respectivamente: $f = 9\sqrt{2}$ e $d = 9\sqrt{3}$
Portanto, cada aresta mede 9 cm, a diagonal da face mede $9\sqrt{2}$ cm e a do cubo mede $9\sqrt{3}$ cm.

5. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow 3\sqrt{83} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (I)
$\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7} \Rightarrow b = \dfrac{5a}{3}$ e $c = \dfrac{7a}{3}$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$$3\sqrt{83} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{5a}{3}\right)^2 + \left(\frac{7a}{3}\right)^2} \Rightarrow 747 = a^2 + \left(\frac{5a}{3}\right)^2 + \left(\frac{7a}{3}\right)^2 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 9a^2 + 25a^2 + 49a^2 = 6.723 \Rightarrow 83a^2 = 6.723 \Rightarrow a = 9$
Assim, $b = 15$ e $c = 21$.
Logo, as medidas a, b e c são, respectivamente, 9 cm, 15 cm e 21 cm.

6. $A_{total} = 2 \cdot (0{,}95 \cdot 0{,}65 + 0{,}95 \cdot 1{,}7 + 0{,}65 \cdot 1{,}7)$
$A_{total} = 6{,}675$
$V = 0{,}95 \cdot 0{,}65 \cdot 1{,}7 = 1{,}04975$
Assim, a área total da superfície do paralelepípedo reto-retângulo é 6,675 dm^2, e o volume, 1,04975 dm^3.
Como 1 dm^3 = 1 ℓ, o volume, em litro, é 1,04975 ℓ.

7. $A_{total} = 6 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 8^2\sqrt{3}}{4}$
$A_{total} = 720 + 192\sqrt{3} \Rightarrow A_{total} = 48\left(15 + 4\sqrt{3}\right)$
$V = \dfrac{6 \cdot 8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 \Rightarrow V = 1.440\sqrt{3}$
Logo, a área total do prisma é $48\left(15 + 4\sqrt{3}\right)$ cm^2 e o volume é $1.440\sqrt{3}$ cm^3.

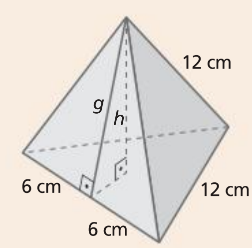
8. $A_{base} = \dfrac{(8 + 14)4}{2} \Rightarrow A_{base} = 44$
$V = 44 \cdot 18 \Rightarrow V = 792$
Logo, o volume do prisma é 792 m^3.

9. Representando o apótema da base por m:
$m = \dfrac{12}{2} = 6$
Representando o apótema da pirâmide por g:
$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$
Logo, o apótema da base e o apótema da pirâmide medem, respectivamente, 6 cm e 10 cm.

10. $V = \dfrac{12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = 8\sqrt{6}$
O volume dessa pirâmide é $8\sqrt{6}$ cm^3.

11. $V = \dfrac{A_{base} \cdot \text{altura}}{3} \Rightarrow 120 = \dfrac{A_{base} \cdot 10}{3} \Rightarrow A_{base} = 36$
Então, a área da base da pirâmide é 36 dm^2.

12. a) Observando a figura, vamos determinar o valor de g e depois de h:
$12^2 = 6^2 + g^2 \Rightarrow g = 6\sqrt{3}$
Assim:
$\left(6\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
Então, $h = 4\sqrt{6}$.
A altura do tetraedro mede $4\sqrt{6}$ cm.



b) Como o tetraedro é regular, suas faces são triângulos equiláteros congruentes. Assim:
$A_{total} = 4 \cdot \dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}$
Logo, a área total é $144\sqrt{3}$ cm^2.

c) $V = \dfrac{\dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{6}}{3} = 144\sqrt{2}$
Portanto, o volume é $144\sqrt{2}$ cm^3.

13. Considerando H a altura da pirâmide, temos:
$\dfrac{81}{900} = \left(\dfrac{6}{H}\right)^2 \Rightarrow H^2 = \dfrac{900 \cdot 36}{81} \Rightarrow H = 20$
Logo, a pirâmide tem 20 cm de altura.

Capítulo 7 • Corpos redondos

Exercícios

1. Represente a planificação de um cilindro reto de 4 cm de altura e base com 3 cm de diâmetro. Em seguida, calcule:
a) a área da base.
b) a área lateral.
c) a área da secção meridiana.
d) a área total.

2. A altura de um cilindro equilátero é 20 cm. Calcule a área da superfície desse cilindro.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. Sabendo que a diagonal do quadrilátero que representa a secção meridiana de um cilindro reto mede 20 cm e que o raio da base do cilindro é 6 cm, determine a altura e o volume desse cilindro.

4. Em um cone de revolução com 15 m de altura e geratriz de comprimento 17 m, calcule:
   a) o raio da base.
   b) a área da base.
   c) a área lateral.
   d) a área total.

5. A altura de um cone circular reto é 24 cm. Calcule o raio da base e o comprimento da geratriz, sabendo que a área total é 360π cm^2 e o volume é 800π cm^3.

6. Sabendo que as áreas lateral e total de um cone circular reto são, respectivamente, 135π m^2 e 216π m^2, determine o volume desse cone.

7. Sejam um cone e um cilindro cujas bases são congruentes. Sabendo que o raio da base é 5 dm e a altura do cilindro é 13 dm, determine a altura do cone para que os dois sólidos tenham o mesmo volume.

8. Considere o trapézio *ABCD*, retângulo em *A* e *D*, no qual as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem, respectivamente, 7 dm e 13 dm, e o lado oblíquo $\overline{BQ}$ mede 10 dm. Determine a área total e o volume do sólido obtido pela rotação desse trapézio em relação ao lado $\overline{AD}$.

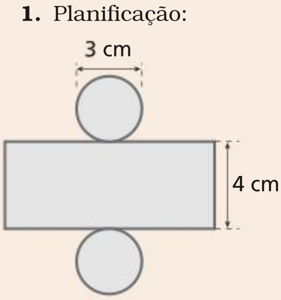
9. A área de um círculo máximo de uma esfera é 100π cm^2. Calcule a área da superfície e o volume dessa esfera.

10. Considere uma superfície esférica de área 144π dm^2. Sobre essa superfície foi determinado um fuso esférico de 60°. Calcule a área desse fuso.

11. A área da superfície de uma esfera é 64π cm^2. Determine:
   a) o diâmetro dessa esfera.
   b) o comprimento da circunferência máxima.
   c) a área do círculo máximo.

Resoluções

1. Planificação:



a) $A_{base} = \pi r^2$
$A_{base} = \pi \cdot (1,5)^2 = 2,25\pi$
Logo, a área da base é $2,25\pi$ cm^2.

b) $A_{lateral} = 2\pi rh$
$A_{lateral} = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 4 = 12\pi$
Logo, a área lateral é 12π cm^2.

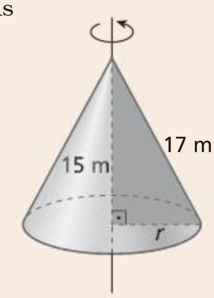
c) $A_{secção} = 2rh$
$A_{secção} = 2 \cdot 1,5 \cdot 4 = 12$
Logo, a área da secção é 12 cm^2.

d) $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 2,25\pi + 12\pi = 16,5\pi$
Logo, a área total é $16,5\pi$ cm^2.

2. No cilindro equilátero, a altura é igual a duas vezes o raio; portanto: $r = \dfrac{20}{2}$ cm $= 10$ cm
$A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$
$A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 400\pi$
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 100\pi + 400\pi = 600\pi$
Logo, a área total é 600π cm^2.

3. Se o raio é 6 cm, então o diâmetro é 12 cm.
A diagonal da secção meridiana mede 20 cm; então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$20^2 = 12^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 400 - 144 \Rightarrow h = 16$
$V = 5\pi r^2 \cdot h \Rightarrow \pi \cdot 6^2 \cdot 16 = 576\pi$
Portanto, o cilindro tem 16 cm de altura e volume igual a 576π cm^3.

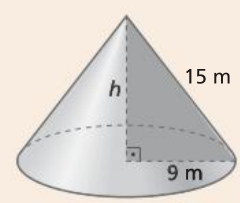
4. **a)** Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:
$17^2 = 15^2 + r^2$
$r^2 = 17^2 - 15^2$
$r^2 = 289 - 225$
$r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$
Assim, o raio é 8 m.



b) $A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$
Logo, a área da base é 64π m^2.
c) $A_{lateral} = \pi rg = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi$
Então, a área lateral é 136π m^2.
d) $A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 64\pi + 136\pi = 200\pi$
Portanto, a área total é 200π m^2.

5. $h = 24$ cm
$A_{total} = \pi r(r + g) \Rightarrow \pi r(r + g) = 360\pi$ (I)
$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow \dfrac{\pi r^2 \cdot 24}{3} = 800\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow 8r^2 = 800 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$\pi \cdot 10(10 + g) = 360\pi \Rightarrow 10 + g = 36 \Rightarrow g = 26$
Logo, o raio é 10 cm, e a geratriz mede 26 cm.

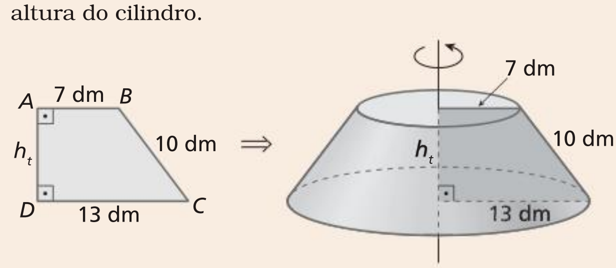
6. $A_{lateral} = 135\pi \Rightarrow \pi rg = 135\pi$ (I)
$A_{total} = \pi r(r + g)$
$\pi r(r + g) = 216\pi$
$\pi r^2 + \pi rg = 216\pi$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$\pi r^2 + 135\pi = 216\pi$
$\pi r^2 = 81\pi \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9$



Substituindo o valor de ***r*** em (I), obtemos:
$\pi rg = 135\pi \Rightarrow 9g = 135 \Rightarrow g = 15$
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado:
$15^2 = 9^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow h^2 = 225 - 81 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$
$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow V = \dfrac{\pi \cdot 9^2 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 324\pi$
Logo, o volume é 324π m^3.

7. $V_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot 13 = 325\pi$
$V_{cone} = V_{cilindro} \Rightarrow \dfrac{\pi \cdot 5^2 h}{3} = 325\pi \Rightarrow \dfrac{\pi \cdot 25h}{3} = 325\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow 25h = 975 \Rightarrow h = 39$
Portanto, a altura do cone é 39 dm, ou seja, o triplo da altura do cilindro.

8.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 10(13 + 7) \Rightarrow 10\pi \cdot 20 = 200\pi$
$A_{\text{base maior}} = \pi \cdot 13^2 = 169\pi$
$A_{\text{base menor}} = \pi \cdot 7^2 = 49\pi$
$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base maior}} + A_{\text{base menor}}$
$A_{\text{total}} = 200\pi + 169\pi + 49\pi = 418\pi$
Para calcular o volume, primeiro temos de calcular a altura do tronco, representada por h_t:
$10^2 = 6^2 + h_t^2 \Rightarrow h_t^2 = 64 \Rightarrow h_t = 8$

$$V = \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot (13^2 + 13 \cdot 7 + 7^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot 309 = 824\pi$$

Logo, a área total é 418π dm² e o volume é 824π dm³.

9. $A_{\text{círculo}} = \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$
$A_{\text{superfície}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} = \frac{4.000\pi}{3}$$
Portanto, a área da superfície esférica é 400π cm² e o volume é $\frac{4.000\pi}{3}$ cm³.

10. $A_{\text{superfície}} = 144\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 144\pi \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$
$$A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°} = \frac{36\pi \cdot 60°}{90°} = 24\pi$$
Logo, a área do fuso esférico é 24π dm².

11. **a)** $A_{\text{superfície}} = 4\pi r^2 \Rightarrow 4\pi r^2 = 64\pi \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$
Logo, o diâmetro é 8 cm.
b) $C = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$
O comprimento da circunferência máxima é 8π cm.
c) $A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$
Assim, a área do círculo máximo é 16π cm².

Capítulo 8 • Matrizes e determinantes

Exercícios

1. Escreva a matriz B, conforme lei de formação:
$$B = (b_{ij})_{4 \times 4}, \text{ em que } b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \neq j \\ i^2 - j, \text{ se } i = j \end{cases}$$

2. Determine os valores de a e b de forma que as matrizes A e B sejam iguais.
$$A = \begin{pmatrix} a - b & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2a + b \end{pmatrix}$$

3. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, na qual
$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i \leq j \\ i \cdot j, \text{ se } i > j \end{cases}.$$
Determine o elemento que pertence à 2ª linha e à 3ª coluna e o elemento que pertence à 3ª linha e à 2ª coluna da matriz A.

4. Dadas as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
determine: $(A + B) - (A + C)$

5. Sendo $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, determine as matrizes X e Y, tais que:
$$\begin{cases} 3X - Y = M + 3N \\ X + Y = 3M - N \end{cases}$$

6. Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determine a matriz X, sabendo que:

a) $M \cdot X = I_2$ **b)** $M \cdot X = M$

7. Calcule pela regra de Sarrus o valor de cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix}$

Resoluções

1. $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$
Aplicando a lei de formação, obtemos:
$b_{11} = 1^2 - 1 = 0$ $b_{12} = 1 + 2 = 3$
$b_{13} = 1 + 3 = 4$ $b_{14} = 1 + 4 = 5$
$b_{21} = 2 + 1 = 3$ $b_{22} = 2^2 - 2 = 2$
$b_{23} = 2 + 3 = 5$ $b_{24} = 2 + 4 = 6$
$b_{31} = 3 + 1 = 4$ $b_{32} = 3 + 2 = 5$
$b_{33} = 3^2 - 3 = 6$ $b_{34} = 3 + 4 = 7$
$b_{41} = 4 + 1 = 5$ $b_{42} = 4 + 2 = 6$
$b_{43} = 4 + 3 = 7$ $b_{44} = 4^2 - 4 = 12$
$$\text{Portanto, } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:
$$\begin{cases} a - b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema, obtemos $a = 4$ e $b = 0$.

3. Aplicando a lei de formação, obtemos:
$a_{23} = 2 - 3 = -1$
$a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

4. $(A + B) - (A + C) = A + B - A - C = B - C$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

5. $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
Resolvendo o sistema, temos:
$$\begin{cases} 3X - Y = M + 3N \\ X + Y = 3M - N \end{cases}$$
$4X = 4M + 2N$
$$X = \frac{4M + 2N}{4} \Rightarrow X = M + \frac{1}{2}N$$
$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$X + Y = 3M - N \Rightarrow Y = 3M - N - X$
$$Y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$Y = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

6. a) $M \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2a + c & -2b + d \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, temos os sistemas:

(I) $\begin{cases} -2a + c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} -2b + d = 0 \\ b - 2d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos:

(I) $a = -\frac{2}{3}$ e $c = -\frac{1}{3}$

(II) $b = -\frac{1}{3}$ e $d = -\frac{2}{3}$

Logo, $X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b) $M \cdot X = M \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Da igualdade, temos os sistemas:

(I) $\begin{cases} -2a + c = -2 \\ a - 2c = 1 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} -2b + d = 1 \\ b - 2d = -2 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos:

(I) $a = 1$ e $c = 0$

(II) $b = 0$ e $d = 1$

Logo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. a)

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

$-3 \quad 8 \quad 0 \qquad 3 \quad 12 \quad 0$

$(3 + 12) - (-3 + 8) = 10$

b)

$$\begin{array}{ccc|cc} 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 10 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 11 & 5 & 8 \end{array}$$

$315 \quad 240 \quad 264 \qquad 231 \quad 300 \quad 288$

$(231 + 300 + 288) - (315 + 240 + 264) = 0$

Capítulo 9 • Sistemas lineares

Exercícios

1. Verifique quais das equações abaixo são lineares.

a) $x + 2y + z = 4$

b) $3x^2 + 2y = 7$

c) $4xy + 2x + 3y = 8$

d) $3x + 2y + 4z + t - 2 = 0$

2. Determine o valor de m, sabendo que o terno $(2m, 3, m - 1)$ é solução da equação $x - 3y + 2z = 1$.

3. Para que valores de m e n os sistemas (I) e (II) têm a mesma solução?

(I) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 2x - y = m \\ 3x + 2y = n \end{cases}$

4. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x - y = -9 \end{cases}$

5. Determine o valor de m e n, de modo que $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + my = n \end{cases}$ tenha solução real.

6. Essa atividade pode ser feita em dupla. Desenhe em um plano cartesiano duas retas r e s e um ponto P, em que $P \in r$ e $P \notin s$. Troque seu desenho com o de um colega e obtenha, se possível, um ponto Q, $Q \neq P$, de maneira que:

a) as equações das retas r e $\overleftrightarrow{PQ}$ formem um SPI.

b) as equações das retas r e $\overleftrightarrow{PQ}$ formem um SPD.

c) as equações das retas s e $\overleftrightarrow{PQ}$ formem um SPD.

d) as equações das retas s e $\overleftrightarrow{PQ}$ formem um SI.

e) as equações das retas r e $\overleftrightarrow{PQ}$ formem um SI.

7. Determine os valores de a e b, de modo que o sistema a seguir seja homogêneo.

$$\begin{cases} 3x - y = a - 4 \\ 2x - 3y = b^2 - a \end{cases}$$

8. Resolva a equação matricial abaixo.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

9. Escalone, resolva os sistemas e classifique-os.

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Resoluções

1. a) Sim. Todas as incógnitas têm expoente 1.

b) Não. Apresenta uma incógnita com expoente 2.

c) Não. Apresenta um termo xy.

d) Sim. Todas as incógnitas têm expoente 1.

2. $x - 3y + 2z = 1$

$2m - 3 \cdot 3 + 2(m - 1) = 1$

$2m - 9 + 2m - 2 = 1 \Rightarrow 4m = 12 \Rightarrow m = 3$

Logo, o valor de m é 3.

3. Aplicando o método da adição para resolver (I), temos:

$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 12x - 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$

Substituindo x por 3 em $3x - y = 9$, obtemos:

$3 \cdot 3 - y = 9 \Rightarrow y = 0$

Portanto, $S = \{(3, 0)\}$.

Substituindo x por 3 e y por 0 em (II), obtemos:

$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 0 = m \Rightarrow m = 6 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = n \Rightarrow n = 9 \end{cases}$

Portanto, $m = 6$ e $n = 9$.

4. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow y = 4$

Substituindo y por 4 em $x + y = 5$, obtemos:

$x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$

Portanto, o sistema é SPD.

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -12 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0$

Existem infinitos pares de valores de x e y que satisfazem a equação $0x + 0y = 0$.
Portanto, o sistema é SPI.

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ -3x + 3y = 27 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 33$

Não há nenhum par de valores de x e y que satisfaça a equação $0x + 0y = 33$.
Portanto, o sistema é SI.

5. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + my = n \end{cases}$

Da primeira equação, temos:

$3x = 7 - 2y \Rightarrow x = \dfrac{7 - 2y}{3}$

Substituindo o valor de x na segunda equação, temos:

$6 \cdot \dfrac{(7 - 2y)}{3} + my = n$

$14 - 4y + my = n \Rightarrow (m - 4)y = n - 14$

Para o sistema ter solução real, devemos ter:
$m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$

6. As respostas são pessoais. No entanto, podemos observar que:

a) Q deve ser um ponto de r.

b) Q deve ser um ponto fora de r.

c) $\overleftrightarrow{PQ}$ não pode ser paralela a s.

d) $\overleftrightarrow{PQ}$ deve ser paralela a s.

e) Não é possível obter Q.

7. Como o sistema é homogêneo, temos:
$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$
$b^2 - a = 0 \Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$
Portanto, $a = 4$ e $b = 2$ ou $a = 4$ e $b = -2$.

8. Escrevendo o sistema correspondente à equação matricial e aplicando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - 2b = 10 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$$
$$7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo em $3a - b = 5$, obtemos:
$3 \cdot 2 - b = 5 \Rightarrow b = 1$
Portanto, $S = \{(2, 1)\}$.

9. a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Substituímos a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira por 2.
Substituímos a terceira equação pela soma dela com a primeira.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da segunda equação por -1.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $z = -2$.
Substituindo z por -2 na segunda equação, obtemos $y = 7$. E substituindo y por 7 e z por -2 na primeira equação, obtemos $x = 20$.
Portanto, $S = \{(20, 7, -2)\}$, e o sistema é possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Dividimos a primeira equação por 2.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Substituímos a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira por -4.
Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da primeira por -3.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ -7y - z = -2 \\ -\frac{7}{2}y - \frac{1}{2}z = -4 \end{cases}$$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da segunda por $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ \frac{7}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \\ 0y + 0z = -3 \end{cases}$$

Não existem números reais para y e z tal que $0y + 0z = -3$.
Portanto, $S = \{\ \}$, e o sistema é impossível (SI).

◆ Capítulo 10 • Análise combinatória

Exercícios

1. Considere uma prova com seis questões de múltipla escolha. Cada questão possui cinco alternativas de resposta; portanto, para resolver a prova, os alunos deverão assinalar apenas uma alternativa por questão.

a) Para determinar o número de gabaritos possíveis para essa prova, o coordenador da escola decidiu montar uma árvore de possibilidades. Você considera essa opção de resolução a forma mais simples de resolver o problema?

b) Escreva outra opção de resolução para essa questão.

c) Determine o número de gabaritos possíveis para essa prova, usando o método que julgar mais simples.

2. Uma escola vai disponibilizar na internet as notas das avaliações dos alunos. Para ter acesso às suas notas, cada aluno receberá uma senha diferente. Considerando que a escola tem 1.200 alunos no total, resolva os itens a seguir.

a) Se a senha for composta de 3 algarismos, será possível elaborar uma senha diferente para cada aluno?

b) Se a resposta do item **a** foi não, pense em uma estratégia para resolver esse problema.

3. Quantos números de cinco algarismos podemos formar?

4. Calcule o valor de n em cada caso.

a) $\dfrac{5! \cdot 9!}{3! \cdot 8!} = n$ **b)** $\dfrac{(n + 1)!}{(n - 1)!} = 420$

5. Simplifique as expressões abaixo.

a) $\dfrac{n!}{(n - 1)!\,(n - 1)}$ **b)** $\dfrac{(n + 1)!\,(n + 2)}{(n + 3)!}$

6. Quantos números de cinco algarismos distintos podemos formar?

7. Quantos números de cinco algarismos distintos terminados em 2 podemos formar?

8. Quantos números de cinco algarismos podemos escrever com 1, 3, 5, 7, 9 sem repetição?

9. Com a palavra CADERNO:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos começam com C e terminam com O?
c) quantos começam com consoante?
d) quantos terminam com vogal?
e) quantos contêm as letras D e E, juntas, nessa ordem?
f) quantos contêm as letras D e E juntas?

10. De quantos modos diferentes podemos pintar as faces laterais e a base de uma pirâmide heptagonal, usando oito cores diferentes, de tal modo que as cores não sejam repetidas?

11. Mara precisa criar uma senha para se inscrever em um *site* na internet. A senha deve ser composta de duas letras distintas, dentre as 26 do nosso alfabeto, e quatro algarismos sem repetição. De quantas maneiras diferentes ela pode criar essa senha?

12. Em um campeonato de futebol com apenas um turno, participarão 32 times. Quantos jogos serão realizados?

13. Em uma festa de confraternização entre amigos, todos se cumprimentaram com um abraço. Quantas pessoas compareceram, sabendo que o número de abraços foi 105?

Resoluções

1. a) Espera-se que os alunos percebam que esse não é o método de resolução mais simples.
b) Pode-se usar o princípio multiplicativo.
c) Sendo seis questões com cinco alternativas cada, pelo princípio multiplicativo, temos:
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15.625$
Logo, existem 15.625 gabaritos possíveis para essa prova.

2. a) Como pode haver repetição de algarismos, pelo princípio multiplicativo, temos: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$
Portanto, poderão ser elaboradas 1.000 senhas distintas. Como a escola tem 1.200 alunos, não será possível dar uma senha distinta para cada aluno.

b) Resposta possível: a senha pode ser composta de três letras; assim, considerando o alfabeto com 26 letras, pelo princípio multiplicativo, temos:
$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17.576$
Assim, poderão ser elaboradas 17.576 senhas.

3. Pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90.000$
Podemos formar 90.000 números com cinco algarismos.

4. a) $n = \dfrac{5! \cdot 9!}{3! \cdot 8!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 9 \cdot 8!}{3! \cdot 8!} = 5 \cdot 4 \cdot 9 = 180$

b) $\dfrac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 420 \Rightarrow (n+1)n = 420$
$n^2 + n = 420 \Rightarrow n^2 + n - 420 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$\Delta = 1.681$
$n = 20$ ou $n = -21$
Como $n = -21$ não serve, temos apenas $n = 20$.

5. a) $\dfrac{n!}{(n-1)!\,(n-1)} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)} = \dfrac{n}{n-1}$

b) $\dfrac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)!} = \dfrac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)(n+2)(n+1)!} = \dfrac{1}{n+3}$

6. Pelo processo multiplicativo: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27.216$
Logo, é possível formar 27.216 números com cinco algarismos distintos.

7. Pelo processo multiplicativo: $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 2.668$
Logo, é possível formar 2.668 números terminados em 2 com cinco algarismos.

8. Permutando os cinco algarismos sem repetição, temos:
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Podemos formar 120 números com algarismos distintos.

9. a) $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, podemos formar 5.040 anagramas.

b) C $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}$ O

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Logo, podemos formar 120 anagramas.

c) $\underbrace{\_\_}_{\text{4 opções: C, D, R, N}}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

$4 \cdot P_6 = 4 \cdot 6! = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.880$
Logo, podemos formar 2.880 anagramas.

d) $\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \underbrace{\_\_}_{\text{3 opções: A, E, O}}$

$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.160$
Logo, são 2.160 anagramas.

e) DE __ __ __ __ __

$P_6 = 6! = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
Logo, podemos formar 720 anagramas.

f) DE __ __ __ __ __

ED __ __ __ __ __

$P_2 \cdot P_6 = 2! \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.440$
Logo, podemos formar 1.440 anagramas.

10. Para pintar a base, temos oito possibilidades.
Para pintar as faces laterais, temos sete cores. Assim:
$8 \cdot (PC)_7 = 8 \cdot \dfrac{7!}{7} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7} = 5.760$
A pirâmide pode ser pintada de 5.760 modos diferentes.

11. $A_{26,\,2} \cdot A_{10,\,4} \Rightarrow \dfrac{26!}{24!} \cdot \dfrac{10!}{6!} = \dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{24!} \cdot \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} =$
$= 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3.276.000$
Mara pode criar 3.276.000 senhas diferentes.

12. Sabendo que em um turno cada time jogará apenas uma vez com cada um dos outros, temos:
$C_{32,\,2} = \dfrac{32!}{30! \cdot 2!} = \dfrac{32 \cdot 31}{2} = 496$
Logo, serão realizados 496 jogos.

13. $C_{n,\,2} = 105 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 105$
$n(n-1) = 210 \Rightarrow n^2 - n = 210 \Rightarrow n^2 - n - 210 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$n = 15$ ou $n = -14$ (não serve)
Logo, compareceram 15 pessoas.

II. Resoluções e comentários

Capítulo 1

Ciclo trigonométrico – 1ª volta

Inicia-se esse capítulo com o conceito de arco em uma circunferência, seu comprimento e sua medida angular, em grau e em radiano. Em seguida, apresenta-se o ciclo trigonométrico e desenvolvem-se os conceitos de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico, tomando como base as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, estudadas no volume do 1º ano. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se a relação fundamental da Trigonometria. Também são estudadas equações trigonométricas na primeira volta da circunferência trigonométrica.

Os conceitos estudados nesse capítulo servem de base para o desenvolvimento de outros capítulos: por exemplo, para estudar as funções trigonométricas (capítulo 2 deste volume) ou para escrever um número complexo na forma trigonométrica (volume do 3º ano).

Resoluções e comentários

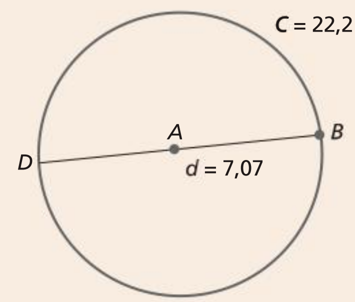
Caso tenha disponíveis computadores com um *software* de Geometria interativa, seria interessante realizar com os alunos uma atividade para verificar experimentalmente que a razão entre o comprimento C de uma circunferência e seu diâmetro d é constante.

Para isso, no *software*, podemos seguir alguns procedimentos:

1. Traçar uma circunferência de centro A passando por um ponto qualquer B.

2. Traçar um diâmetro da circunferência. Para isso, é necessário traçar uma reta passando pelos pontos A e B; essa reta interceptará a circunferência em B e em um ponto D; depois, basta traçar o segmento $\overline{BD}$, que é um diâmetro da circunferência.
Orientar os alunos a esconder alguns elementos da construção (a maioria dos *softwares* possui essa função), para que ela não fique muito poluída visualmente.

3. Em seguida, com a ferramenta de medição de comprimentos, medir o comprimento C da circunferência e seu diâmetro d (medida do segmento $\overline{BD}$). Dependendo do *software*, o modo de realizar essas medições pode ser diferente; em alguns, por exemplo, para medir o comprimento da circunferência é necessário separá-la em arcos e medir esses arcos.
Chamar a atenção dos alunos para o fato de as medidas estarem atreladas aos pontos, ou seja, quando mexemos os pontos para modificar o raio, as medidas também se modificam.



ADILSON SECCO

4. Na maioria dos *softwares*, há a possibilidade de realizar operações com as medidas calculadas. Nesse caso, usando a ferramenta adequada, calcular $\frac{C}{d}$.

5. Mover os pontos A e B para ver o que acontece com a razão calculada. Com esses procedimentos, verifica-se experimentalmente que essa razão é constante e aproximadamente igual a 3,14.

Exercícios propostos

1. **a)** $\begin{array}{ccc} \text{radiano} & & \text{grau} \\ \pi & — & 180 \\ \frac{5\pi}{4} & — & x \end{array} \Rightarrow x = 225°$

b) $\begin{array}{ccc} \text{radiano} & & \text{grau} \\ \pi & — & 180 \\ \frac{7\pi}{6} & — & x \end{array} \Rightarrow x = 210°$

c) $\begin{array}{ccc} \text{radiano} & & \text{grau} \\ \pi & — & 180 \\ \frac{\pi}{2} & — & x \end{array} \Rightarrow x = 90°$

2. **a)** $\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & — & \pi \\ 30 & — & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & — & \pi \\ 60 & — & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ rad

c) $\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & — & \pi \\ 120 & — & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ rad

d) $\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & — & \pi \\ 150 & — & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ rad

e) $\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & — & \pi \\ 210 & — & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ rad

f)

$$\begin{array}{ccc} \text{grau} & & \text{radiano} \\ 180 & \text{——} & \pi \\ 240 & \text{——} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} \text{circunferência} & & \text{grau} \\ 1 & \text{——} & 360 \\ \frac{2}{5} & \text{——} & x \end{array} \Rightarrow x = 144°$$

$$\begin{array}{ccc} \text{circunferência} & & \text{radiano} \\ 1 & \text{——} & 2\pi \\ \frac{2}{5} & \text{——} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$$

4. a) O relógio é dividido em 12 horas.
Então, a cada hora, o ponteiro percorre um ângulo de:
$360° : 12 = 30°$
Das 13 h às 17 h, temos 4 horas. Logo, o ponteiro das horas percorrerá: $4 \cdot 30° = 120°$
Em radiano, essa medida é equivalente a: $4 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$
Portanto, esse ponteiro das 13 h às 17 h percorre 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ rad.

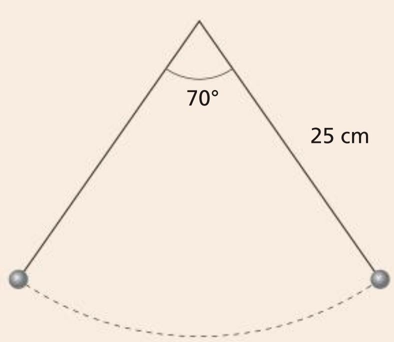
b) Sendo x a distância percorrida das 13 h às 17 h, calculamos:

$$\begin{array}{ccc} \text{medida (grau)} & & \text{comprimento (cm)} \\ 360 & \text{——} & 2\pi \cdot 7 \\ 120 & \text{——} & x \end{array}$$

$$x = \frac{120 \cdot 2\pi \cdot 7}{360} \simeq \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7}{3} \simeq 14{,}65$$

Logo, a extremidade do ponteiro percorre aproximadamente 14,65 cm.

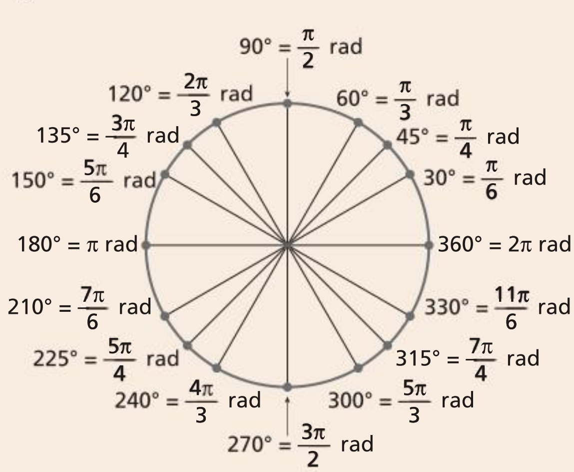
5.



$$\begin{array}{ccc} \text{medida (grau)} & & \text{comprimento (cm)} \\ 360 & \text{——} & 2\pi r \\ 70 & \text{——} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 25}{360} \Rightarrow x \simeq 30{,}5$$

Logo, o pêndulo descreve um arco de aproximadamente 30,5 cm.

6. e **7.**



8. a) A: $180° - 20° = 160°$
B: $180° + 20° = 200°$
C: $360° - 20° = 340°$

b) A: $2\pi - \frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$
B: $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$
C: $\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

9. a) $250° - 180° = 70°$

b) $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi - 11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

10. a) Como sen 215° < 0 e sen 280° < 0, temos:
sen 215° · sen 280° > 0

b) $\left.\begin{array}{l} \cos 50° > 0 \\ \cos 325° > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\cos 50° + \cos 325°) > 0 \quad \text{(I)}$

$\left.\begin{array}{l} \cos 215° < 0 \\ \cos 145° < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\cos 215° + \cos 145°) < 0 \quad \text{(II)}$

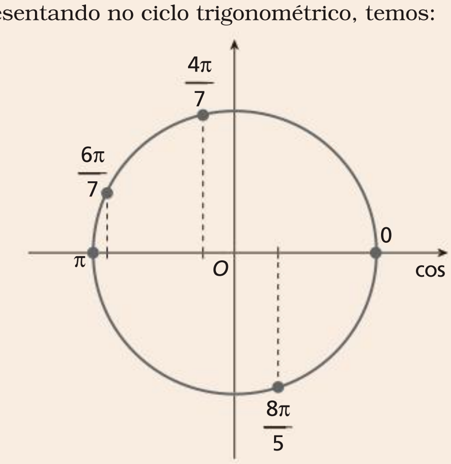
De (I) e (II), temos:
$(\cos 50° + \cos 325°) \cdot (\cos 215° + \cos 145°) < 0$

11. $\frac{4\pi}{7}$ rad $= \frac{4 \cdot 180°}{7} \simeq 103°$

$\frac{6\pi}{7}$ rad $= \frac{6 \cdot 180°}{7} \simeq 154°$

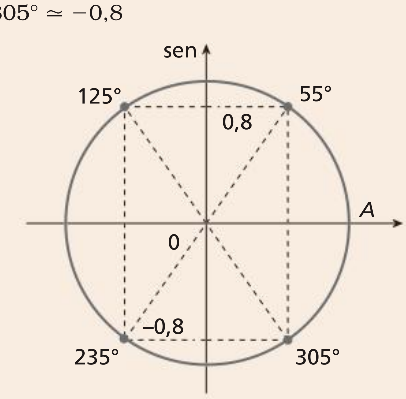
$\frac{8\pi}{5}$ rad $= \frac{8 \cdot 180°}{5} = 288°$

Representando no ciclo trigonométrico, temos:



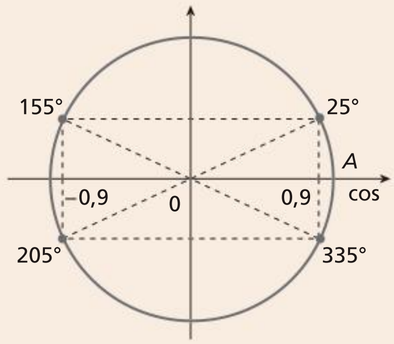
Observando o eixo dos cossenos, concluímos que:
$\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

12. a) sen 125° ≃ 0,8
b) sen 235° ≃ −0,8
c) sen 305° ≃ −0,8



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

13. **a)** $\cos 155° \simeq -0{,}9$
b) $\cos 205° \simeq -0{,}9$
c) $\cos 335° \simeq 0{,}9$



14. **a)** $\text{sen}\ \alpha = -\text{sen}\ 27° \simeq -0{,}45$
b) $\text{sen}\ \beta = -\text{sen}\ 130° = -\text{sen}\ 50° \simeq -0{,}77$
c) $\text{sen}\ \theta = -\text{sen}\ 260° = -(-\text{sen}\ 80°) \simeq 0{,}98$

15. $\cos \alpha = -\cos 48° \simeq -0{,}67$
$\cos \beta = -\cos 110° = -(-\cos 70°) \simeq 0{,}34$
$\cos \theta = -\cos 260° = -(-\cos 80°) \simeq 0{,}17$

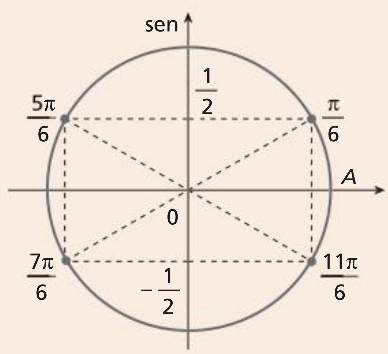
16.

$\text{sen}\ \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\text{sen}\ \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\text{sen}\ \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{sen}\ \dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$



17. **a)** $\text{sen}\ 2\pi + \cos 2\pi + \text{sen}\ \pi + \cos \pi =$
$= 0 + 1 + 0 - 1 = 0$

b) $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} - \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{2} + \cos \dfrac{\pi}{2} - \cos \dfrac{3\pi}{2} =$
$= 1 - (-1) + 0 - 0 = 2$

c) $\text{sen}\ \dfrac{2\pi}{3} - \text{sen}\ \dfrac{11\pi}{6} - \cos \dfrac{5\pi}{3} + \cos \dfrac{5\pi}{6} =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d) $\dfrac{\cos \dfrac{\pi}{2} - \cos \dfrac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{6}} = \dfrac{0 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

18. Com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, obtemos:
a) $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{9} \simeq 0{,}342$
b) $\text{sen}\ \dfrac{2\pi}{9} \simeq 0{,}643$
c) $\text{sen}\ \dfrac{3\pi}{9} \simeq 0{,}866$

19. **a)** $2 \cdot \text{sen}\ \dfrac{\pi}{9} \simeq 2 \cdot 0{,}342 = 0{,}684$

$\text{sen}\ \dfrac{2\pi}{9} \simeq 0{,}643$

Logo: $2 \cdot \text{sen}\ \dfrac{\pi}{9} \neq \text{sen}\ \dfrac{2\pi}{9}$

Portanto, a igualdade é falsa.

b) $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{9} + \text{sen}\ \dfrac{2\pi}{9} \simeq 0{,}342 + 0{,}643 = 0{,}985$

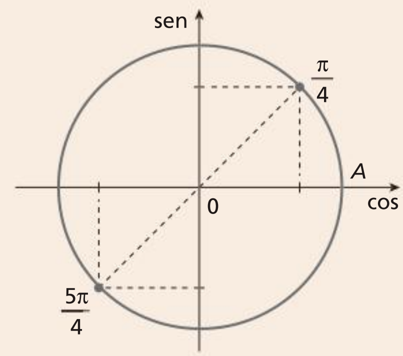
$\text{sen}\ \dfrac{3\pi}{9} = 0{,}866$

Logo: $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{9} + \text{sen}\ \dfrac{2\pi}{9} \neq \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{9}$

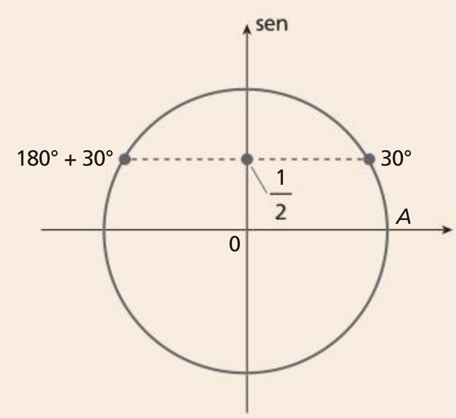
Portanto, a igualdade é falsa.

Comentário: Com a verificação de casos particulares, os alunos são estimulados a concluir que o seno da soma de duas medidas não é igual à soma dos senos dessas mesmas medidas.

20. Nos 1º e 3º quadrantes, temos seno e cosseno com mesmo sinal.
- No 1º quadrante: $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{4} = \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- No 3º quadrante: $\text{sen}\ \dfrac{5\pi}{4} = \cos \dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

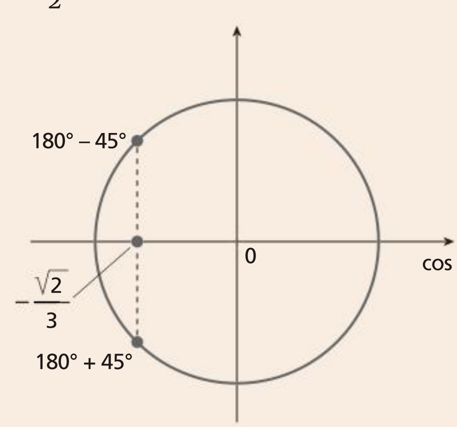


21. **a)** Observando o ciclo trigonométrico e lembrando que $\text{sen}\ 30° = \dfrac{1}{2}$, concluímos que há dois arcos que satisfazem a equação:



$\text{sen}\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$ ou $x = 150°$

b)



$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 135°$ ou $x = 225°$

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos resolver equações trigonométricas simples.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

22. **a)** $\left.\begin{array}{l}\text{tg } 40° > 0\\ \text{tg } 220° > 0\end{array}\right\} \Rightarrow (\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) > 0 \quad \text{(I)}$

$\left.\begin{array}{l}\text{tg } 315° < 0\\ \text{tg } 165° < 0\end{array}\right\} \Rightarrow (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°) < 0 \quad \text{(II)}$

De (I) e (II), vem:

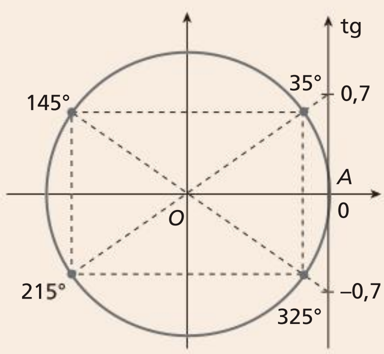
$(\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) \cdot (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°) < 0$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{tg } \dfrac{4\pi}{6} = \text{tg } \dfrac{2\pi}{3} < 0\\ \text{tg } \dfrac{5\pi}{4} = \text{tg } \dfrac{\pi}{4} > 0\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \text{tg } \dfrac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \dfrac{5\pi}{4} < 0$

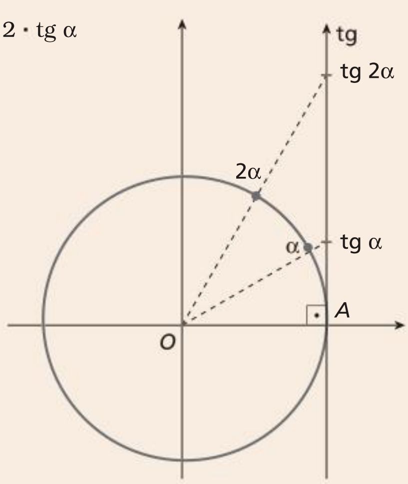
Logo: $\dfrac{2 \cdot \text{tg } \dfrac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \dfrac{5\pi}{4}}{-2} > 0$

23. $\text{tg } \alpha = \text{tg } 42° \simeq 0{,}90$
$\text{tg } \beta = \text{tg } 160° = -\text{tg } 20° \simeq -0{,}36$
$\text{tg } \theta = \text{tg } 260° = \text{tg } 80° \simeq 5{,}67$

24. **a)** $\text{tg } 145° \simeq -0{,}7$
b) $\text{tg } 215° \simeq 0{,}7$
c) $\text{tg } 325° \simeq -0{,}7$



25. $\text{tg } 2\alpha \neq 2 \cdot \text{tg } \alpha$



Exemplo:

$\text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2 \cdot \text{tg } 30° = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg } 60° = \sqrt{3}$

Logo, $\text{tg } 60° \neq 2 \cdot \text{tg } 30°$.

Comentário: Essa questão leva os alunos a verificar, agora de modo mais abrangente, que não há proporcionalidade entre as medidas de um ângulo e os respectivos valores da tangente.

26. **a)** $\text{tg } \alpha = \dfrac{0{,}55}{0{,}84}$ é menor que 1.

b) $\text{tg } \alpha = \dfrac{0{,}55}{0{,}84} \simeq 0{,}65$ é menor que 1.

c) $\cos \alpha > 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$; então, α pertence ao 1º quadrante.

d) $(\pi - \alpha) \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (\pi - \alpha) < 0$
$(\pi + \alpha) \in$ 3º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (\pi + \alpha) > 0$
$(2\pi - \alpha) \in$ 4º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (2\pi - \alpha) < 0$

e) $\text{tg } (\pi - \alpha) \simeq -0{,}65$
$\text{tg } (\pi + \alpha) \simeq 0{,}65$
$\text{tg } (2\pi - \alpha) \simeq -0{,}65$

Comentário: Esse exercício proporciona a diversidade de aplicação dos conceitos estudados: pede aos alunos que façam uma estimativa; calculem e comparem o resultado com o valor estimado; localizem o quadrante de um arco conhecendo os valores de seno, cosseno e tangente; e apliquem as relações de simetria para tangente.

27. $\cos^2 x + \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{25}{169} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{12}{13}$

Como x pertence ao 1º quadrante, temos $\cos x > 0$.

Logo, $\cos x = \dfrac{12}{13}$.

28. **a)** $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow (0{,}8)^2 + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } x = \pm 0{,}6$
Como x pertence ao 4º quadrante, temos $\text{sen } x < 0$.
Logo, $\text{sen } x = -0{,}6$.

b) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{-0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg } x = -0{,}75$

29. **a)** $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3 \cdot \text{sen } \alpha}{4}$

Como $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\dfrac{3 \cdot \text{sen } \alpha}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \dfrac{9 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{16} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{25 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{16} = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

Como α pertence ao 3º quadrante, temos:

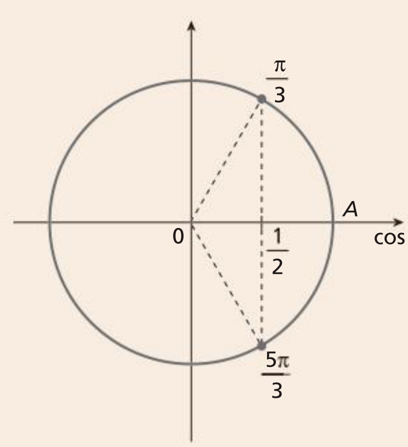
$\text{sen } \alpha = -\dfrac{4}{5} = -0{,}8$

b) $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{-\dfrac{4}{5}}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = -0{,}6$

30. Para um arco de medida α, a relação fundamental da Trigonometria sempre é válida: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Como $(0{,}8)^2 + (0{,}4)^2 = 0{,}64 + 0{,}25 = 0{,}89$, não são possíveis as igualdades $\text{sen } \alpha = 0{,}8$ e $\cos \alpha = 0{,}4$.

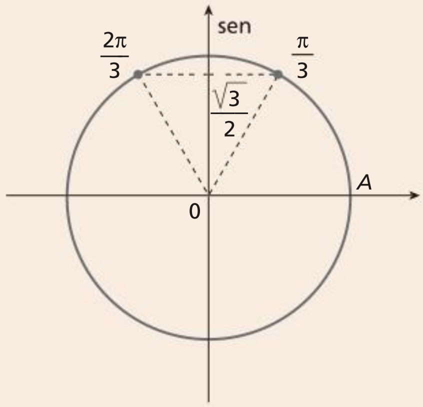
31. **a)**



$\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ rad ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

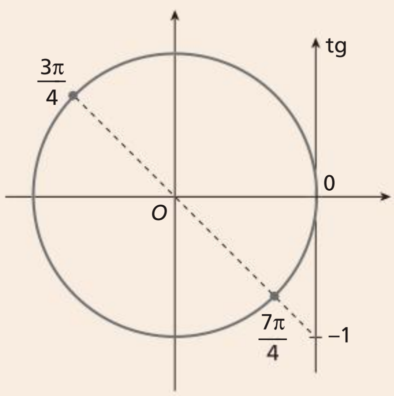
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b)



$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

c)



$\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ rad ou $x = \frac{7\pi}{4}$ rad

d) $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

e) $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

32. a) $\text{sen } x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0$

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ \text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores possíveis para x são 0, π rad, 2π rad ou $\frac{3\pi}{2}$ rad.

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\cos x(2 \cdot \text{sen } x - 1) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 2 \cdot \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Os valores possíveis de x são $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad e $\frac{3\pi}{2}$ rad.

c) $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$

Sendo $\cos x = y$, temos:

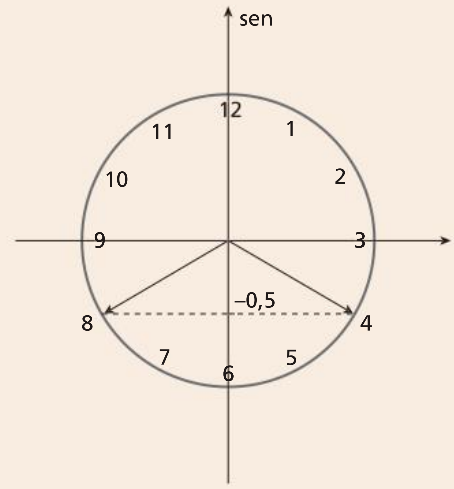
$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Assim:

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$

Os possíveis valores de x são 0 rad e 2π rad.

33.



O relógio estará indicando 16 h ou 20 h (4 h ou 8 h).

34. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

Assim, $x = \frac{3\pi}{2}$ rad.

Exercícios complementares

1. $\frac{360}{x} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{15,7} \Rightarrow x = 225°$

2. $\frac{360°}{300°} = \frac{2\pi r}{200} \Rightarrow r = \frac{360 \cdot 100}{300 \cdot \pi} \Rightarrow r \simeq 38,22$

Logo, o raio mede, aproximadamente, 38,22 m.

3.

grau	radiano
180	π
140	x

$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{9}$ rad

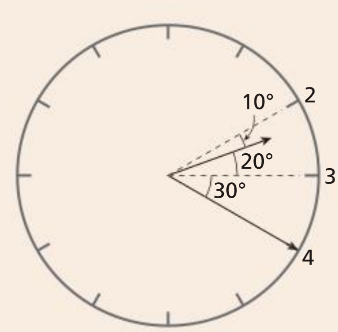
4.

medida (radiano)	comprimento (cm)
2π	$2\pi \cdot 5$
α	7

$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi \cdot 7}{2\pi \cdot 5} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{5}$

Logo, o ângulo central α mede 1,4 rad.

5. Cada hora determina um ângulo de 30°, porém, como já se passaram 20 minutos da hora cheia, ou seja, $\frac{1}{3}$ da hora, o ponteiro das horas percorreu 10°.



Logo, o menor ângulo formado pelos ponteiros mede: (20° + 30°) = 50°

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6.

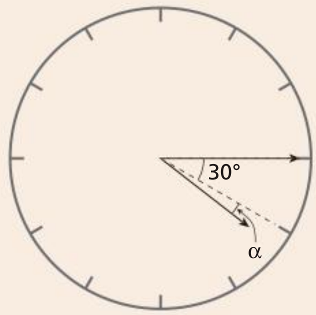
medida (grau)		tempo (min)
30	—	60
α	—	15

$\alpha = \dfrac{30 \cdot 15}{60} =$

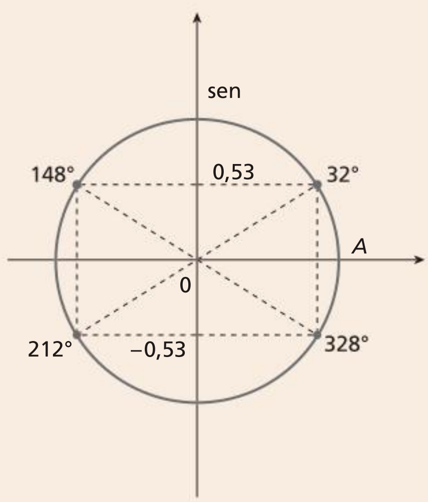
$= \dfrac{450}{60} = 7°30'$

$\alpha + 30° = 7°30' + 30° =$
$= 37°30'$

Assim, o menor ângulo formado pelos ponteiros mede 37°30'.

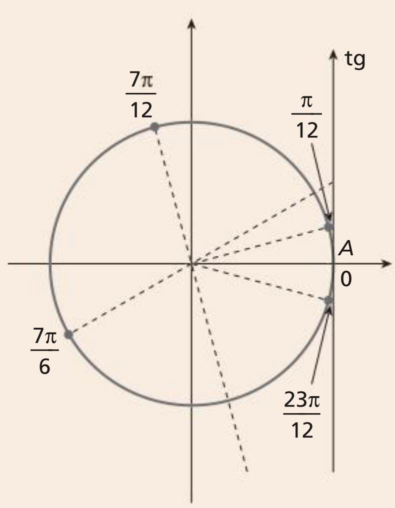


7.



a) sen 148° = sen 32° = 0,53
b) sen 212° = −sen 32° = −0,53
c) sen 328° = −sen 32° = −0,53

8.



Em ordem decrescente:

$\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{6},\ \text{tg}\,\dfrac{\pi}{12},\ \text{tg}\,\dfrac{23\pi}{12},\ \text{tg}\,\dfrac{7\pi}{12}$

9. Q: 144°

grau		radiano
180	—	π
144	—	a

$\Rightarrow a = \dfrac{4\pi}{5}$ rad

P: 180° − 144° = 36°

grau		radiano
180	—	π
36	—	x

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{5}$ rad

R: 36° + 180° = 216°

grau		radiano
180	—	π
216	—	y

$\Rightarrow y = \dfrac{6\pi}{5}$ rad

S: 360° − 36° = 324°

grau		radiano
180	—	π
324	—	z

$\Rightarrow z = \dfrac{9\pi}{5}$ rad

10. a) $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3} - \cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\dfrac{2\pi}{3} - \text{tg}\,\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{6}$

11. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

Como θ pertence ao 3º quadrante, temos $\cos\theta < 0$.

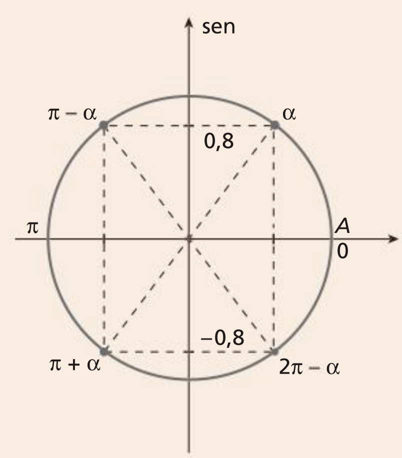
Logo, $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Assim:

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{6}}{6}}{-\dfrac{\sqrt{30}}{6}} \Rightarrow$

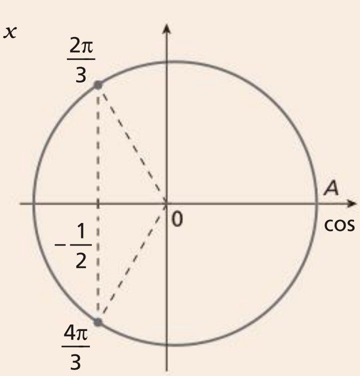
$\Rightarrow \text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

12.



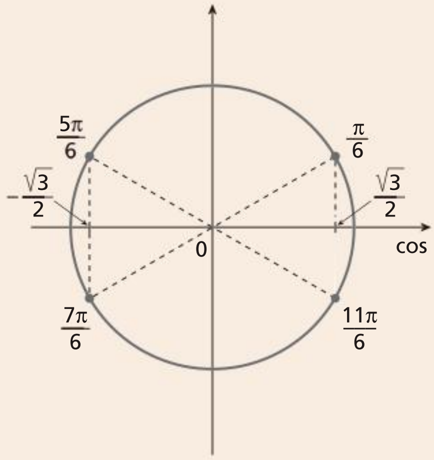
a) sen ($\pi - \alpha$) = sen α = 0,8
b) sen ($\pi + \alpha$) = −sen α = −0,8
c) sen ($2\pi - \alpha$) = −sen α = −0,8

13. Os arcos de medida x que têm cosseno igual a $-\dfrac{1}{2}$, para $0 < x < 2\pi$, são $\dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{4\pi}{3}$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

14. $\frac{3}{4} - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$



Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

15. $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Sendo $\cos x = y$, temos:

$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $y = -1$

Assim:

$\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ ou $x = \pi$

Logo, a soma das raízes é:

$\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{\pi + 5\pi + 3\pi}{3} = \frac{9\pi}{3} = 3\pi$

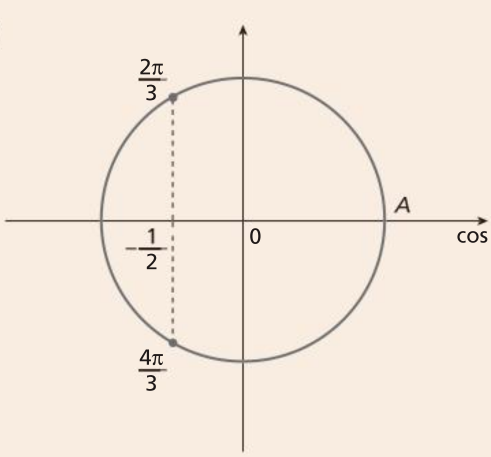
16. **a)** O valor mínimo para sen x é -1; e o valor máximo é 1. Ou seja: $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

b) O valor mínimo para $2 \cdot \text{sen } x$ é -2; e o valor máximo é 2. Ou seja: $-2 \leqslant 2 \cdot \text{sen } x \leqslant 2$

c) O valor mínimo para $y = 1 + 2 \cdot \text{sen } x$ é -1; e o valor máximo é 3. Ou seja: $-1 \leqslant 1 + 2 \cdot \text{sen } x \leqslant 3$ ou, ainda, $-1 \leqslant y \leqslant 3$

Comentário: Esse exercício trabalha introdutoriamente a ideia que será usada, no próximo capítulo, para determinar a imagem de uma função trigonométrica.

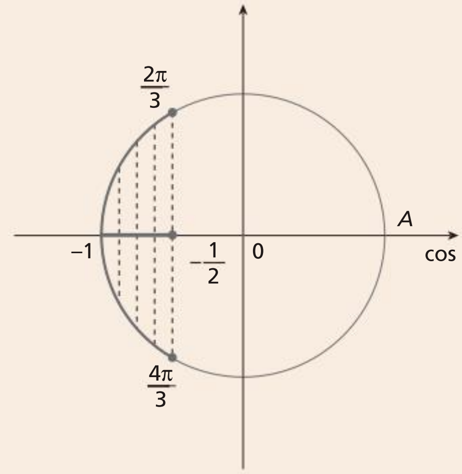
17. **a)**



$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b)



$\cos x \leqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}$

Autoavaliação

1.

medida (grau)		comprimento (cm)
360	—	$2\pi \cdot 12$
230	—	x

$x = \frac{120 \cdot 2\pi \cdot 12}{360} = 8\pi$

Portanto, $x \simeq 25$ cm.

alternativa d

2.

grau		radiano
180	—	π
210	—	x

$x = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$

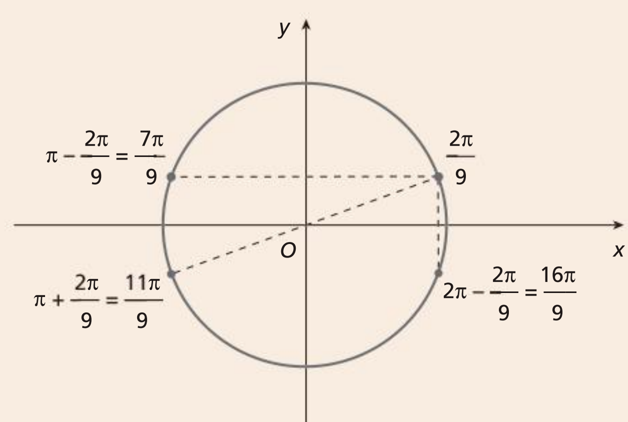
alternativa c

3. $\frac{6\pi}{12} < \frac{11\pi}{12} < \frac{12\pi}{12} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{11\pi}{12} < \pi$

Logo, um arco de $\frac{11\pi}{12}$ rad pertence ao 2º quadrante.

alternativa b

4. Observe a figura abaixo.



Os arcos simétricos de $\frac{2\pi}{9}$ rad, respectivamente aos eixos x e y e à origem O, medem $\frac{16\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$ e $\frac{11\pi}{9}$.

alternativa b

5. a) $\left.\begin{array}{l}\text{sen } 210° < 0\\ \cos 150° < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } 210° + \cos 150° < 0$

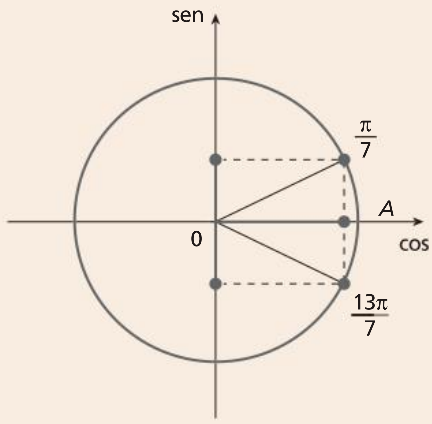
b) $\left.\begin{array}{l}\text{tg } 150° < 0\\ \text{tg } 225° > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg } 150° \cdot \text{tg } 225° < 0$

c) $\left.\begin{array}{l}\cos 270° = 0\\ \text{sen } 125° > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \cos 270° \cdot \text{sen } 125° = 0$

d) $\left.\begin{array}{l}\text{sen } 240° < 0\\ \cos 110° < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } 240° \cdot \cos 110° > 0$

alternativa d

6.

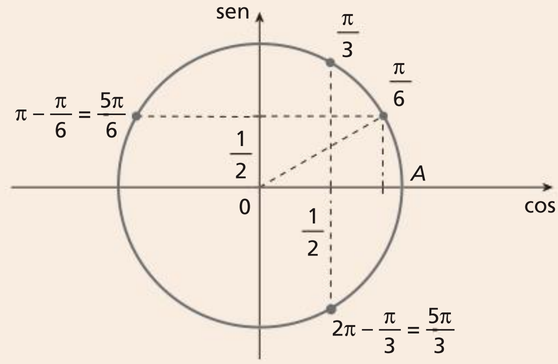


Observando o ciclo trigonométrico, concluímos que:

$\text{sen } \frac{13\pi}{7} = -\text{sen } \frac{\pi}{7}$ e $\cos \frac{13\pi}{7} = \cos \frac{\pi}{7}$

alternativa c

7. Observe a figura abaixo.



O seno de $\frac{\pi}{6}$ é igual a cosseno de $\frac{5\pi}{3}$ e a seno de $\frac{5\pi}{6}$

alternativa a

8. $\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, \alpha + (0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2\, \alpha = 0{,}36 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm 0{,}6$

Como α pertence ao 4º quadrante, temos $\text{sen } \alpha = -0{,}6$.

Assim: $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg } \alpha = -0{,}75$

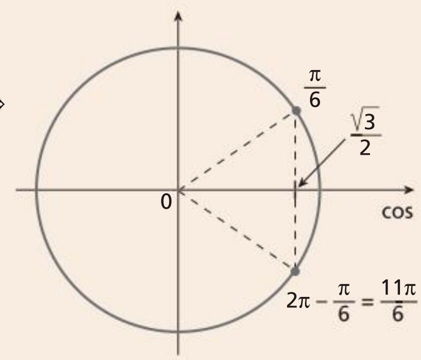
alternativa a

9.

$2 \cdot \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

alternativa d



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 2

Funções trigonométricas

Nesse capítulo, são estudadas as funções trigonométricas e algumas de suas aplicações nas diversas áreas de conhecimento.

Para isso, ampliamos o estudo do ciclo trigonométrico, antes abordado apenas na primeira volta, para infinitas voltas, por meio da função de Euler.

Também trabalhamos a construção de gráficos por meio de transformações geométricas. Esse trabalho é muito útil para funções obtidas pela mudança de variável.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) Analisando alguns pontos do gráfico, verificamos que:
$f(-2) = f(2) = f(6)$

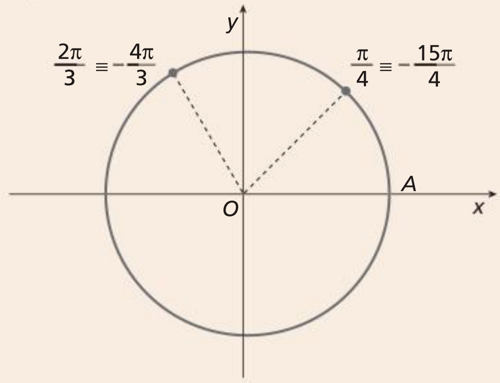
Como a função é periódica, observamos que:
$f(x) = f(x + 4)$
Logo, o período p da função é 4.

b) Com procedimento análogo ao do item **a**, temos:
$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3)$
$f(x) = f(x + 2) \Rightarrow p = 2$

c) Com procedimento análogo ao do item **a**, temos:
$f(-1{,}5) = f(1{,}5) = f(4{,}5)$
$f(x) = f(x + 3) \Rightarrow p = 3$

2. Analisando os gráficos, concluímos que:
a) valor mínimo: 0; valor máximo: 2
b) valor mínimo: -1; não tem máximo
c) valor mínimo: 8; valor máximo: 12

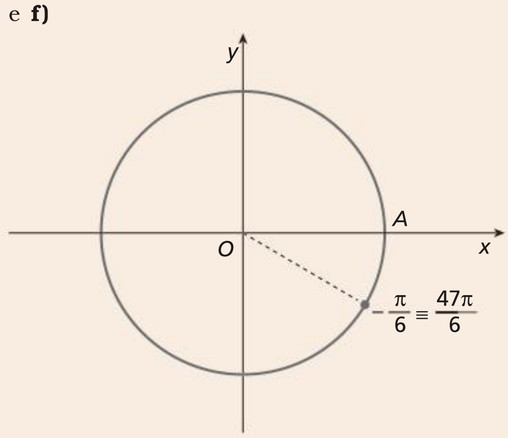
3. a), **b)**, **c)** e **d)**



$$-\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{15\pi}{4} \equiv -\frac{15\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4}$$

e) e **f)**



$$-\frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} + 8\pi = \frac{47\pi}{6}$$

4. a) Uma expressão geral dos arcos côngruos a 60° é: $60° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ é:

$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $385° = 25° + 360° \equiv 25°$

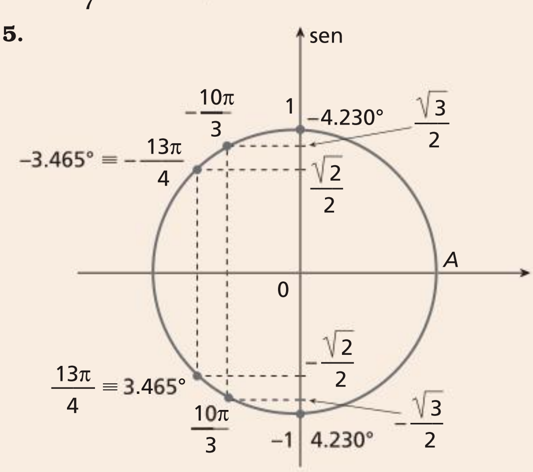
Uma expressão geral dos arcos côngruos a 385° é: $25° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{25\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + 2\pi \equiv \frac{11\pi}{7}$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{25\pi}{7}$ é:

$\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

a) sen 3.465° = sen 225° = $-$sen 45° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen $\frac{13\pi}{4}$ = sen $\frac{5\pi}{4}$ = $-$sen $\frac{\pi}{4}$ = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen 4.230° = sen 270° = -1

d) sen $\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$ = sen $\frac{2\pi}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) sen ($-$3.465°) = sen 135° = sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) sen $\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$ = sen $\frac{3\pi}{4}$ = sen $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) sen ($-$4.230°) = sen 90° = 1

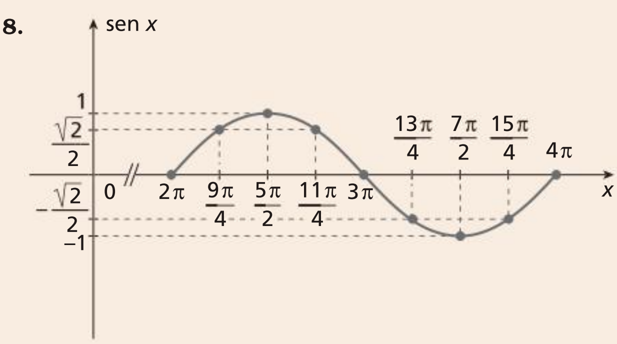
h) sen $\frac{10\pi}{3}$ = sen $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ = $-$sen $\frac{2\pi}{3}$ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Observando os valores no exercício anterior, podemos generalizar:

- sen ($-\alpha$) = $-$sen α
- sen α = $-$sen ($-\alpha$)

7. Sabemos que os valores da função $f(x)$ = sen x variam no intervalo $[-1, 1]$.
Assim:
$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 2k - 3 \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \leqslant 2k \leqslant 4 \Rightarrow 1 \leqslant k \leqslant 2$

8.



9. a) O gráfico obtido usando o *software* aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28.

b) amplitude = $\frac{2-0}{2} = 1$

c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, 2]$

d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de f é o gráfico de g deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Comentário: Esse exercício leva os alunos a fazer a leitura de um gráfico e a identificar os conceitos de domínio, imagem, amplitude e período. Além disso, é trabalhada a ideia de translação do gráfico, em função no parâmetro k, na função $f(x) = k +$ sen x.

10. $f(t) = 2.500 + 1.215 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

O número máximo ocorre quando sen $\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$:

$f(x)_{máx.} = 2.500 + 1.215 \cdot 1 = 3.715$

Portanto, o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa é 3.715.

11. $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

a) A altura máxima é atingida pela maré quando seno assume seu valor máximo (1):

$h_{máx.} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

A altura mínima é atingida pela maré quando seno assume seu valor mínimo (−1):

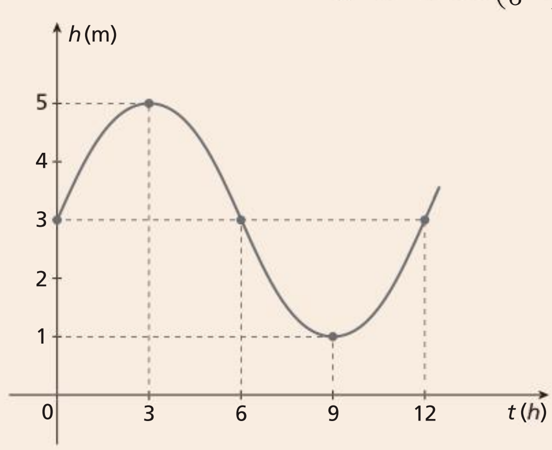
$h_{mín.} = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$

Logo, a altura máxima atingida pela maré é 5 m e a mínima é 1 m.

b) Atribuindo alguns valores a t, obtemos:

t	$h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$
0	$h(0) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,(0) =$ $= 3 + 2 \cdot 0 = 3$
3	$h(3) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ $= 3 + 2 \cdot 1 = 5$
6	$h(6) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,(\pi) =$ $= 3 + 2 \cdot 0 = 3$
9	$h(9) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$ $= 3 + 2 \cdot (-1) = 1$
12	$h(12) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,(2\pi) =$ $= 3 + 2 \cdot 0 = 3$

Assim, esboçamos o gráfico de $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$:



c) Podemos observar, no gráfico esboçado na resposta ao item **b**, que a maré alta ocorre para $t = 3$. Além disso, observamos que, a partir de $t = 12$, o ciclo se reinicia. Logo, a altura máxima atingida pela maré ocorre novamente para $t = 15$.

Como $t = 0$ representa meio-dia (12 h), concluímos que a maré alta ocorre às 15 h e às 3 h.

Analogamente, concluímos que a maré baixa ocorre para $t = 9$ e $t = 21$, ou seja, às 21 h e às 9 h.

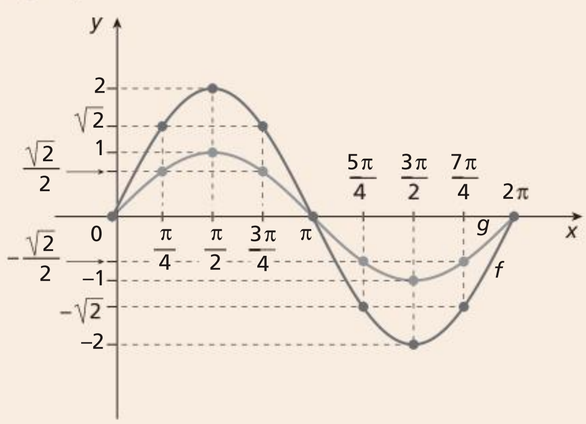
d) Pelo gráfico, concluímos que a maré alta se repete de 12 h em 12 h.

Comentário: Esse exercício e o exercício anterior mostram a aplicação dos conceitos estudados na modelagem de uma situação contextualizada.

12. a)

x	sen x	$2 \cdot$ sen x
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	−1	−2
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
2π	0	0

b) e **c)**

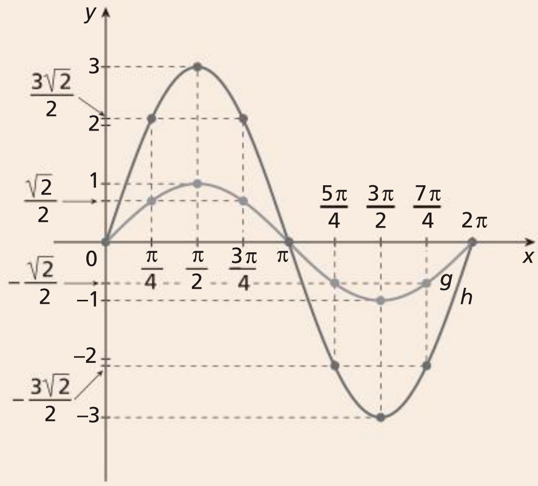


d) A amplitude da função g mede 1 e a amplitude da função f mede 2, ou seja, a amplitude da função f é o dobro da amplitude da função g.

e)

x	sen x	$3 \cdot$ sen x
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	−1	−3
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
2π	0	0

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



A amplitude da função h mede 3 e a amplitude da função g mede 1, ou seja, a amplitude da função h é o triplo da amplitude da função g.

Para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen } x$, em que k é um número real positivo, a amplitude do gráfico de i será igual a k vezes o valor da medida da amplitude do gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

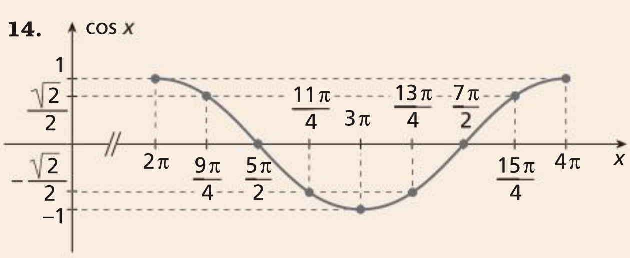
Comentário: Esse é um exercício de investigação sobre o parâmetro k na função dada por $i(x) = k \cdot \text{sen } x$. Os alunos iniciam a investigação pela construção do gráfico em casos particulares. Se necessário, proponha outros casos antes de eles formularem uma hipótese. Se achar conveniente, explore esse exercício em um *software* de construção de gráficos, que possibilita a visualização de vários casos particulares, facilitando a generalização.

13. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots + \cos 78x + \cos 80x =$

$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi + \ldots + \cos 20\pi =$

$= 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \ldots + 0 - 1 + 0 + 1 = 0$

14.



15. Observando o gráfico, temos:

a) $g(0) = g(2\pi)$

Como a função é periódica, temos: $g(x) = g(x + 2\pi)$

O período p da função g é 2π.

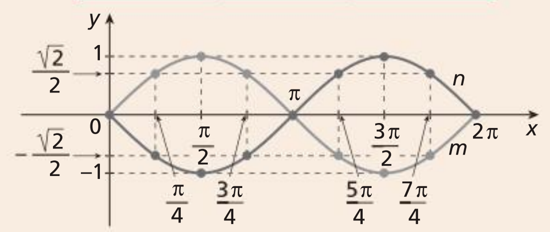
b) amplitude $= \frac{2 - 0}{2} = 1$

c) $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = [0, 2]$

d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

16. Vamos construir um quadro com os valores de x, sen x e $-$sen x, considerando $0 \leq x \leq 2\pi$.

x	sen x	$-$sen x
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	0	0



Comentário: Espera-se que os alunos concluam que, assim como os gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $h(x) = -\cos x$, os gráficos das funções $m(x) = \text{sen } x$ e $n(x) = -\text{sen } x$ são simétricos em relação ao eixo x.

17. $n(t) = 6.380 + 5.900 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right)$

O pico da doença deu-se quando cosseno assumiu seu valor máximo, ou seja, para $\cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right) = 1$:

$6.380 + 5.900 \cdot 1 = 12.280$

Portanto, ocorreram 12.280 casos nessa determinada região.

Sabemos que o valor máximo de cosseno ocorre para os arcos de 0, 2π, 4π, ...; então:

- $\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 0 \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{\pi} = 1$
- $\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 2\pi \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 12\pi \Rightarrow t = \frac{13\pi}{\pi} = 13$

Logo, como t varia de 1 a 12 (de acordo com os meses do ano), concluímos que o pico da doença ocorreu em janeiro.

18. a) Observando o gráfico, temos: $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Como a função é periódica, temos: $h(x) = h(x + \pi)$

O período p da função h é π.

b) Observando o gráfico, concluímos que as assíntotas passam em: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im(h) =]-\infty, +\infty[$

19. Espera-se que os alunos concluam que $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ são simétricos em relação ao eixo x.

20. • Para $x = 0$, temos:

$f(0) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

Logo, a função f é representada pela curva em vermelho. Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de f é o gráfico da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidade para a esquerda.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

- Para $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

  $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$

  Logo, a função g é representada pela curva em azul.
  Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de g é o gráfico da função cosseno transladado $\frac{\pi}{4}$ unidade para a direita.

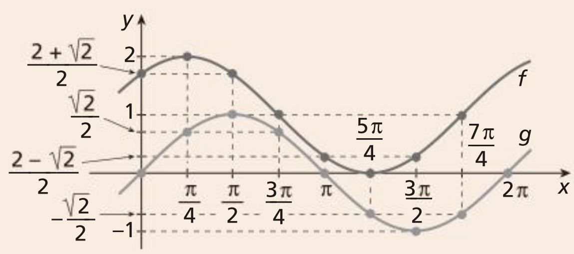
21. Vamos partir da função original $g(x) = \text{sen } x$:

- 1º passo: $\text{sen } x \rightarrow \text{sen }\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

  O gráfico de g sofrerá uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda sobre o eixo x.
- 2º passo: $\text{sen }\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 1 + \text{sen }\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

  O gráfico da função translada 1 unidade para cima.
  O novo conjunto imagem será $\text{Im}(f) = [0, 2]$.

Construindo o gráfico, temos:



O domínio, o período e a amplitude de f são os mesmos de g:
$D(f) = \mathbb{R}$, $p = 2\pi$ e a amplitude é 1.

22. Espera-se que os alunos percebam que:

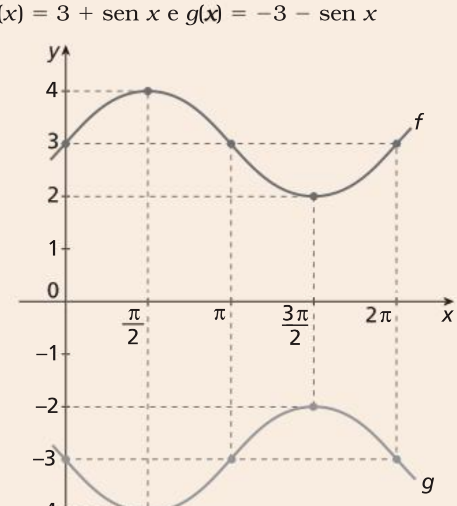
- a amplitude do gráfico é 2. Logo, $b = 2$;
- o gráfico está deslocado 2 unidades para cima em relação ao gráfico $g(x) = 2 \cdot \cos x$. Logo, $a = 2$.

***Outro modo*:**
Também podemos resolver esse exercício algebricamente:

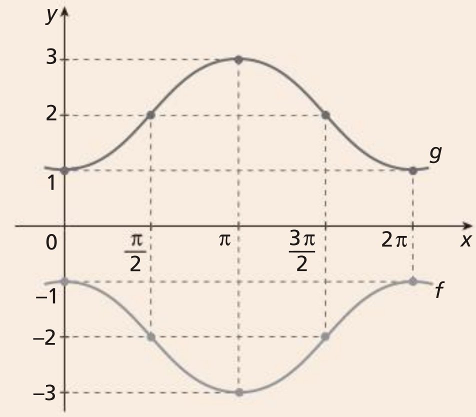
- Pelo gráfico, temos que $f(0) = 4$. Assim:
  $f(0) = a + b \cdot \cos 0$
  $4 = a + b \cdot 1$
  $a + b = 4$ (I)
- Pelo gráfico, temos também que $f(\pi) = 0$. Assim:
  $f(\pi) = a + b \cdot \cos \pi$
  $0 = a + b \cdot (-1)$
  $a = b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $a = 2$ e $b = 2$.

23. **a)** $f(x) = 3 + \text{sen } x$ e $g(x) = -3 - \text{sen } x$



b) $f(x) = -2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$



- Espera-se que os alunos percebam que, dada uma função inicial, ao multiplicar sua lei por -1, as ordenadas negativas tornam-se positivas e as positivas tornam-se negativas. Por isso, seu gráfico será refletido, no plano cartesiano, em relação ao eixo x.

Comentário: *Softwares* para a construção de gráficos são ferramentas cada vez mais indispensáveis no processo de ensino-aprendizagem, pois ampliam as fronteiras do aprendizado, permitindo aos alunos que vão além da construção em si de um gráfico específico para a construção de "famílias" de gráficos.

24. **a)** $f(x) = 3 \cdot \text{sen } 2x$

Partindo da função $g(x) = \text{sen } x$, temos:

- 1º passo: $\text{sen } x \rightarrow \text{sen } 2x$

  O novo período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- 2º passo: $\text{sen } 2x \rightarrow 3 \cdot \text{sen } 2x$

  A nova amplitude é igual a 3.

Quando multiplicamos g por 3, sua imagem passa a ser $[-3, 3]$.
Então, $\text{Im}(f) = [-3, 3]$.
O domínio de f é o mesmo de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 5 + 2 \cdot \cos 3x$

Partindo da função $g(x) = \cos x$, temos:

- 1º passo: $\cos x \rightarrow \cos 3x$

  O novo período é $p = \frac{2\pi}{3}$.
- 2º passo: $\cos 3x \rightarrow 2 \cdot \cos 3x$

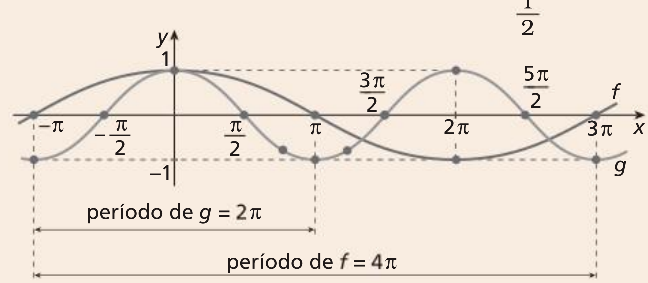
  A nova amplitude é igual a 2.
- 3º passo: $2 \cdot \cos 3x \rightarrow 5 + 2 \cdot \cos 3x$

  Ocorre translação de 5 unidades para cima.

Após o 2º passo, o conjunto imagem da função g passa a ser $[-2, 2]$. Após o 3º passo, o conjunto imagem passa a ser $[3, 7]$. Logo, $\text{Im}(f) = [3, 7]$.
O domínio de f é o mesmo de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.

25. **a)** $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

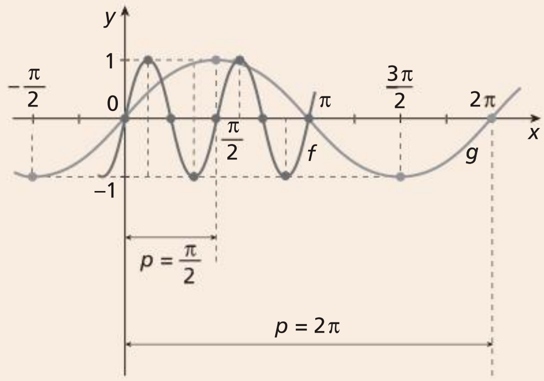
Partimos da função $g(x) = \cos x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com período $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

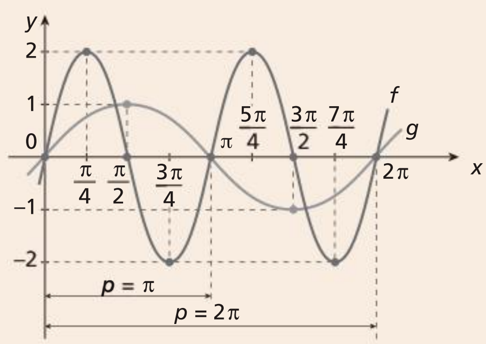
b) $f(x) = \text{sen } 4x$

Partimos da função $g(x) = \text{sen } x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com período $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.



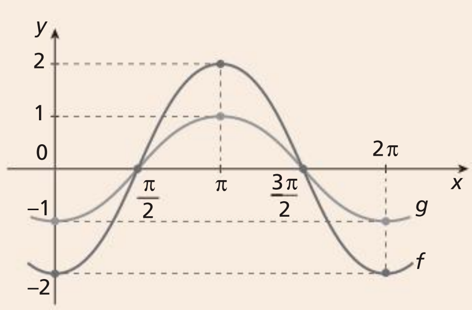
c) $f(x) = 2 \cdot \text{sen } 2x$

Partimos da função $g(x) = \text{sen } x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f cujo período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e a amplitude é 2.



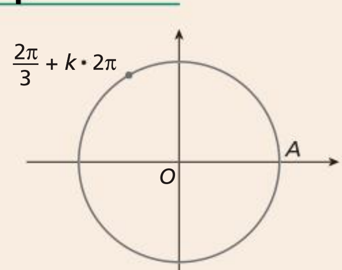
d) $f(x) = -2 \cdot \cos x = 2 \cdot (-\cos x)$

Partimos da função $g(x) = -\cos x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com amplitude 2. Observe que o período não sofre mudança.

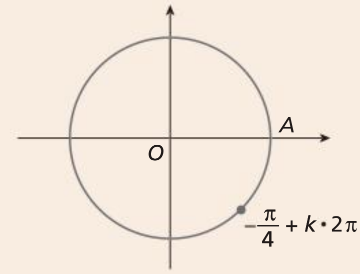


Exercícios complementares

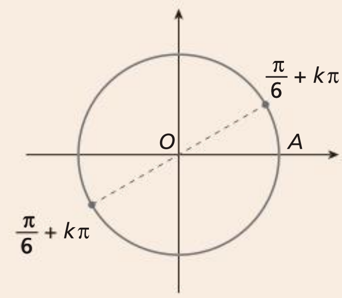
1. a)



b)



c)



2. a) $855° = 135° + 2 \cdot 360° \equiv 135°$

Assim, a expressão pedida é:

$135° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi \equiv \frac{\pi}{3}$

Assim, a expressão pedida é:

$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. A função seno varia de -1 a 1. A função $f(x) = -\text{sen } 10x$ também varia de -1 a 1. Então, podemos escrever:

$-1 \leqslant -\text{sen } 10x \leqslant 1$

Adicionando 4 a todos os membros, temos:

$-1 + 4 \leqslant 4 - \text{sen } 10x \leqslant 1 + 4 \Rightarrow 3 \leqslant 4 - \text{sen } 10x \leqslant 5$

Logo, o menor valor da expressão é 3 e o maior é 5.

4. $A(t) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{6}$

Em 2025, temos $t = 15$ anos.

$A(15) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi \cdot 15}{6}$

Temos: $\frac{15\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$

Assim:

$A(15) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$

$A(15) = 1.050$

Portanto, a quantidade de algas nessa baía, em janeiro de 2025, será 1.050 toneladas.

5. $f(x) = 900 - 800 \cdot \text{sen } \frac{x \cdot \pi}{12}$

Observando a lei da função, concluímos que o número máximo de clientes ocorre quando $\text{sen } \frac{x \cdot \pi}{12} = -1$.

E concluímos que o número mínimo de clientes ocorre quando $\text{sen } \frac{x \cdot \pi}{12} = 1$.

Assim:

$f(x)_{\text{máx.}} = 900 - 800 \cdot (-1) = 900 + 800 = 1.700$

$f(x)_{\text{mín.}} = 900 - 800 \cdot (1) = 900 - 800 = 100$

Portanto:

$f(x)_{\text{máx.}} - f(x)_{\text{mín.}} = 1.700 - 100 = 1.600$

alternativa e

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

6. De acordo com o enunciado, quando a produção é abundante, os preços são mais baixos.
Então, o mês de produção máxima de um produto ocorre quando a função $P(x)$ atinge seu valor mínimo.

$P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$

Observando a lei dessa função, concluímos que $P(x)$ é mínimo quando cosseno atinge seu valor mínimo, ou seja, quando $\cos\left(\frac{\pi \cdot x - \pi}{6}\right) = -1$. Isso ocorre para arcos de medida π, 3π, 5π, ...
Então:

$\frac{\pi \cdot x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow \pi \cdot x - \pi = 6\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{\pi} = 7$

Portanto, $P(x)$ é mínimo para $x = 7$, ou seja, no mês de julho.
alternativa d

7. $f(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi t}{6}$

Para determinar o primeiro momento do dia em que a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio, igualamos $f(t)$ a 5:

$3 + 2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi t}{6} = 5 \Rightarrow \text{sen}\ \frac{\pi t}{6} = 1$

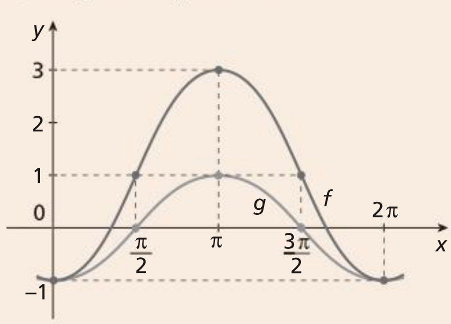
Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen $x = 1$ para $x = \frac{\pi}{2}$.
Então:

$\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 3$

Portanto, a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio pela primeira vez no dia às 3 horas.

8. **a)** $f(x) = 1 - 2 \cdot \cos x = 1 + 2 \cdot (-\cos x)$
Partindo da função $g(x) = -\cos x$, temos:
- 1º passo: $-\cos x \rightarrow 2 \cdot (-\cos x)$
  A nova amplitude é 2.
- 2º passo: $2 \cdot (-\cos x) \rightarrow 1 + 2 \cdot (-\cos x)$

O gráfico da função é transladado 1 unidade para cima.
Assim, esboçamos o gráfico de f:

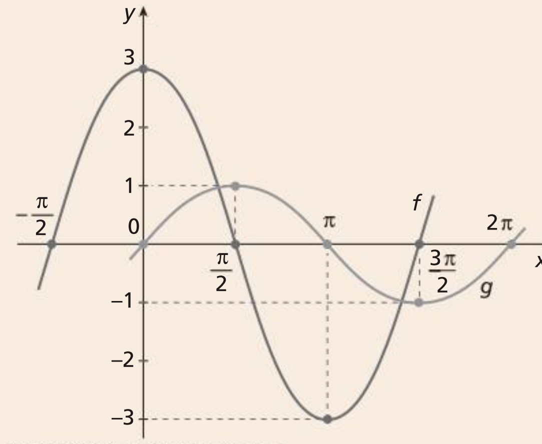


Logo, temos Im(f) = [−1, 3], D(f) = ℝ e $p = 2\pi$.

b) $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Partindo da função $g(x) = \text{sen}\ x$, temos:
- 1º passo: $\text{sen}\ x \rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
  O gráfico de g ficará transladado $\frac{\pi}{2}$ unidade para a esquerda sobre o eixo x.
- 2º passo: $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 3 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
  A função terá nova amplitude igual a 3.
  Assim, a nova imagem será [−3, 3].

Portanto:



O domínio e o período de f são iguais aos de g, ou seja, D(f) = ℝ e $p = 2\pi$.

9. **a)** Sim. No intervalo dado, cos x (curva verde) é sempre negativo.
b) Não. No intervalo dado, sen x (curva azul) é sempre decrescente, mas, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, sen x é positivo.
c) Não. No intervalo dado, tg x (curva alaranjada) é sempre crescente, mas, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, tg x é negativa.
d) Pelos gráficos, observamos que sen x = tg x no ponto em que $x = \pi$ (ponto de cruzamento entre as curvas azul e laranja). As coordenadas desse ponto são $(\pi, 0)$.
e) Pelos gráficos, observamos que:
- cos x = sen x no ponto de cruzamento entre a curva verde e a curva azul. Esse ponto está no intervalo em que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;
- tg x = cos x no ponto de cruzamento entre a curva alaranjada e a curva verde. Esse ponto está no intervalo em que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Portanto, no intervalo considerado, o ponto em que cos x = sen x tem abscissa maior que a abscissa do ponto em que tg x = cos x.

10. Inicialmente, observamos que todos os pontos do gráfico têm ordenada nula ou positiva. Lembrando que a função modular tem essa característica, podemos montar um quadro com alguns valores de x que constam no gráfico.

x	$\lvert \text{sen}\ x \rvert$	$\lvert \cos x \rvert$
0	0	$\lvert 1 \rvert = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\lvert 1 \rvert = 1$	0
π	0	$\lvert -1 \rvert = 1$
$\frac{3\pi}{2}$	$\lvert -1 \rvert = 1$	0
2π	0	$\lvert 1 \rvert = 1$

No gráfico, observamos que $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(\pi) = 1$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ e $f(2\pi) = 1$.

Assim, concluímos que $f(x) = \lvert \cos x \rvert$.
alternativa d

Comentário: Verificar a necessidade de recordar o conceito de função modular.

Autoavaliação

1. $\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \equiv \frac{4\pi}{3}$

alternativa c

2. $\frac{22\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + \frac{20\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + 4\pi \equiv \frac{2\pi}{5}$

Logo, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

alternativa c

3. Observamos, no gráfico, que o período da função é 0,75. Portanto, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é 0,75 s.

alternativa d

4. A função seno é periódica, pois $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi)$ e seu período é 2π.

alternativa b

5. Seja $f(x) = a + b \cdot \cos (cx + d)$.

A amplitude é $\frac{1}{2}$; então, $b = \frac{1}{2}$.

O gráfico está transladado $\frac{1}{2}$ unidade para cima; logo, $a = \frac{1}{2}$.

O período é 2π; então, $c = 1$.

Em relação ao gráfico de cos x, o gráfico está transladado $\frac{\pi}{2}$ unidade para a direita. Então, $d = -\frac{\pi}{2}$.

Logo, $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

alternativa a

6. A amplitude corresponde ao número que multiplica $\text{sen } (x + \pi)$.

Como $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen } (x + \pi)$, a amplitude é 3.

alternativa a

7. A imagem da função $g(x) = \cos (2x + 1)$ é o conjunto $[-1, 1]$.

A imagem da função $h(x) = 2 \cdot \cos (2x + 1)$ é o conjunto $[-2, 2]$. Portanto, a imagem da função $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos (2x + 1)$ é o conjunto $[1, 5]$.

alternativa d

8. $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

alternativa b

9. $m(t) = 4.500 + 3.400 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{60}$

A massa é máxima quando:

$\text{sen } \frac{\pi t}{60} = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{60} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 30$

$m(t)_{\text{máx.}} = 4.500 + 3.400 \cdot 1 = 7.900$

A massa é mínima quando:

$\text{sen } \frac{\pi t}{60} = -1 \Rightarrow \frac{\pi t}{60} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 90$

$m(t)_{\text{mín.}} = 4.500 + 3.400 \cdot (-1) = 1.100$

Tempo decorrido: $90 - 30 = 60$

alternativa c

Pesquisa e ação

Essa atividade possui uma abordagem tecnológica, além de ser interdisciplinar.

A opção pela construção de vídeos estimula a criatividade e coloca os alunos diante de duas situações: o trabalho do cineasta, no sentido da criação do roteiro e da execução das cenas; e o uso do computador, uma ferramenta fundamental no mundo de hoje.

Com relação à interdisciplinaridade, é interessante estabelecer parcerias com os professores de Física, Biologia e Geografia. O professor de Física poderá contribuir com os grupos que se propuserem a elaborar vídeos sobre Acústica ou sobre Astronomia. O professor de Biologia poderá auxiliar no tema migração de aves e piracema. Em Geografia, o professor poderá colaborar com a discussão dos desastres naturais ocorridos em consequência dos desequilíbrios provocados pelo ser humano na natureza.

Com relação a programas para edição de vídeos, existem muitos disponíveis em versões gratuitas e também comercializadas.

Compreensão de texto

1. a) De acordo com o texto, som é uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico.

b) O som é causado por uma vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão de acordo com o meio à sua volta.

c) Segundo o texto, o som é audível para o ser humano quando as variações ocorrem entre 20 e 20.000 vezes por segundo.

2. O gráfico do som senoidal é determinado a partir do gráfico da função seno. Portanto, o único gráfico que representa um som senoidal é o que consta no item **c**.

alternativa c

3. $\Delta p = 1{,}48 \text{ sen } (1{,}07\pi x - 334\pi t)$

A variação máxima de pressão ocorre quando $\text{sen } (1{,}07\pi x - 334\pi t) = 1$. Então:

$\Delta p_{\text{máx.}} = 1{,}48 \cdot 1 = 1{,}48$

Portanto, $\Delta p_{\text{máx.}} = 1{,}48$ pascal.

4. a) Respostas possíveis: construção civil; banda de *rock*; decolagem de avião a jato a 50 m; decolagem de foguete a 50 m.

b) No caso de secadores de cabelo, a média do nível de ruído é cerca de 80 decibéis; nos liquidificadores e aspiradores de pó, geralmente a média do nível de ruídos está na faixa entre 80 e 90 decibéis.

c) resposta pessoal

d) resposta pessoal

Comentário: Se possível, finalizar a atividade com uma conversa coletiva sobre o assunto. Espera-se, com essa atividade, sensibilizar os alunos em relação aos danos causados por ruídos excessivos. Além disso, conscientizá-los sobre a importância da colaboração de cada cidadão com atitudes individuais, como falar baixo dentro de uma sala de aula ou de espetáculos, regular seu automóvel periodicamente ou ouvir música em volume mais baixo.

Capítulo 3

Complementos de Trigonometria

Os conceitos estudados nos capítulos anteriores serão usados para o desenvolvimento desse capítulo. Para a aplicação da lei dos senos e dos cossenos, usaremos as razões trigonométricas para ângulos agudos e obtusos. E, para a resolução de equações trigonométricas em $\mathbb{R}$, utilizaremos o conceito de arcos côngruos nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica. Também ampliaremos o conceito de razão trigonométrica, definindo secante, cossecante e cotangente. Finalmente, serão desenvolvidas as fórmulas de adição de arcos, que serão ferramentas necessárias, por exemplo, em Geometria analítica, para a determinação do ângulo formado entre duas retas.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) $180° - 80° - 30° = 70°$

$$\frac{6}{\text{sen } 70°} = \frac{y}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 80°}$$

$$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 70°} \simeq \frac{6 \cdot 0{,}98}{0{,}94} \Rightarrow x \simeq 6{,}3$$

$$y = \frac{6 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 70°} \simeq \frac{6 \cdot 0{,}5}{0{,}94} \Rightarrow y \simeq 3{,}2$$

Logo, $x \simeq 6{,}3$ cm e $y \simeq 3{,}2$ cm.

b) $\frac{4}{\text{sen } 60°} = \frac{3}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{sen } x \simeq \frac{3 \cdot 0{,}87}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x \simeq 0{,}6525$

Pela tabela dada, obtemos: $x \simeq 40°$

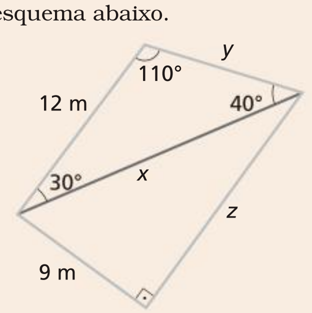
$180° - 60° - 40° = 80°$

Assim: $\frac{4}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{y}{\text{sen } 80°}$

$$y \simeq \frac{4 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{4 \cdot 0{,}98}{0{,}87} \simeq 4{,}5$$

Logo, $x \simeq 40°$ e $y \simeq 4{,}5$ m.

2. a) Observe o esquema abaixo.



Aplicando a lei dos senos no triângulo obtusângulo, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 110°} = \frac{12}{\text{sen } 40°}$$

$$x \simeq \frac{12 \cdot 0{,}94}{0{,}64} \Rightarrow x \simeq 17{,}6$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Logo, a distância entre a casa e a entrada é aproximadamente 17,6 metros.

b) Aplicando a lei dos senos, vamos descobrir a distância entre a entrada e o pomar:

$$\frac{17{,}6}{\text{sen } 110°} = \frac{y}{\text{sen } 30°}$$

$$y \simeq \frac{17{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}94} \simeq 9{,}4$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

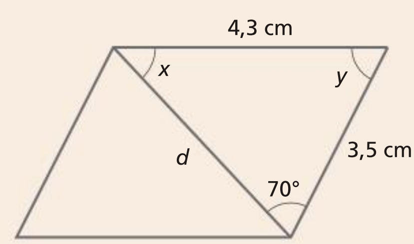
$z^2 = (17{,}6)^2 - 9^2 \Rightarrow z \simeq 15{,}1$

caminho 1: $12 + 9{,}4 = 21{,}4$

caminho 2: $9 + 15{,}1 = 24{,}1$

Portanto, o caminho 1 é o mais curto.

3.



$$\frac{d}{\text{sen } y} = \frac{4{,}3}{\text{sen } 70°} = \frac{3{,}5}{\text{sen } x}$$

$$\text{sen } x \simeq \frac{3{,}5 \cdot 0{,}94}{4{,}3} \simeq 0{,}77 \Rightarrow x \simeq 50°$$

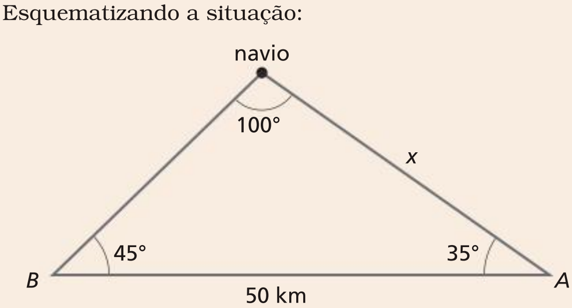
$y \simeq 180° - 50° - 70° \Rightarrow y \simeq 60°$

$$\frac{d}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{3{,}5}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \frac{d}{0{,}87} \simeq \frac{3{,}5}{0{,}77} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \simeq \frac{0{,}87 \cdot 3{,}5}{0{,}77} \Rightarrow d \simeq 3{,}95$$

Logo, a medida aproximada da diagonal é 3,95 cm.

4. Esquematizando a situação:



Sabemos que sen 100° = sen 80°.

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen } 100°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x \simeq \frac{50 \cdot 0{,}71}{0{,}98} \simeq 36{,}2$$

Assim, a distância entre o navio e o primeiro ponto de observação é aproximadamente 36,2 km.

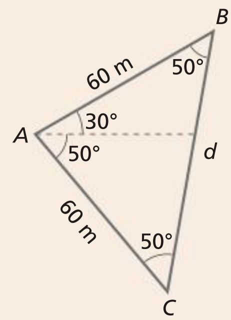
5. Velocidade: 0,2 m/s

Em 5 minutos, ou seja, em 300 segundos, cada nadador percorre: $300 \cdot 0{,}2 \text{ m} = 60 \text{ m}$

Como o triângulo ABC é isósceles, temos:

$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 50°$

Aplicando a lei dos senos, temos:



$$\frac{60}{\text{sen } 50°} = \frac{d}{\text{sen } 80°}$$

$$d \simeq \frac{60 \cdot 0{,}98}{0{,}77} \simeq 76{,}36$$

Logo, a distância entre os nadadores será, aproximadamente, 76,36 m.

6. a) $y^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 30°$

$y^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 \simeq 25{,}6$

Portanto, $y \simeq 5{,}1$ cm.

b) $x^2 = 2{,}5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 3 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 6{,}25 + 9 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 \simeq 22{,}75$

Portanto, $x \simeq 4{,}8$ cm.

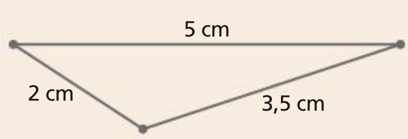
7. $x^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cos 135°$

$x^2 = 64 + 121 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x^2 \simeq 309{,}08$

Portanto, $x \simeq 17{,}6$ cm.

8. a)



b) Pelo esboço, concluímos que o triângulo é obtusângulo.

c) $5^2 = 2^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3{,}5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 = 4 + 12{,}25 - 14 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

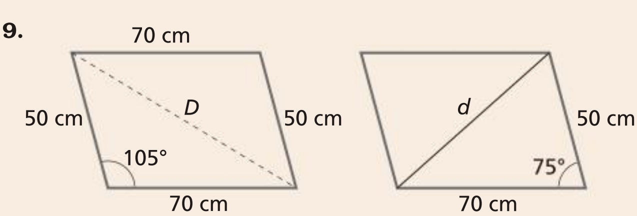
$\Rightarrow 25 - 4 - 12{,}25 = -14 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 8{,}75 = -14 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{8{,}75}{14} = -\frac{5}{8}$

Como $\cos \alpha < 0$, concluímos que o ângulo α é obtuso e, portanto, o triângulo é obtusângulo.

9.



Sabemos que $\cos 105° = -\cos 75°$.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$D^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 105° \Rightarrow D \simeq 96$

$d^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 75° \Rightarrow d \simeq 74{,}7$

As diagonais medem, aproximadamente, 96 cm e 74,7 cm.

10. Sabemos que: 1 nó = 1.852 m/h = 1,852 km/h

Ao meio-dia, os navios viajaram 4 horas.

Então:

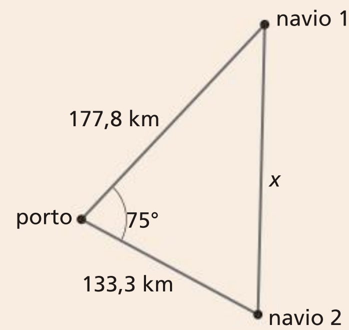
Navio 1:

- Velocidade (km/h): $24 \cdot 1{,}852 = 44{,}448$
- Distância percorrida (km): $4 \cdot 44{,}448 \simeq 177{,}8$

Navio 2:

- Velocidade (km/h): $18 \cdot 1{,}852 = 33{,}336$
- Distância percorrida (km): $4 \cdot 33{,}336 \simeq 133{,}3$

Representando a situação ao meio-dia, temos:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 177{,}8^2 + 133{,}3^2 - 2 \cdot 177{,}8 \cdot 133{,}3 \cdot \cos 75°$

$x \simeq 192{,}6$

Portanto, a distância entre os navios ao meio-dia é, aproximadamente, 192,6 km.

11. a) $\sec \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$

b) $\sec 135° = \frac{1}{\cos 135°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$

c) $\text{cossec } 150° = \frac{1}{\text{sen } 150°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

d) $\text{cotg } \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\text{sen } \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

e) $\text{cossec } 240° = \frac{1}{\text{sen } 240°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{cotg } 330° = \frac{\cos 330°}{\text{sen } 330°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

12. a) $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{7}{16} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{3}{4}$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos $\cos x = -\frac{3}{4}$.

b) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

c) $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

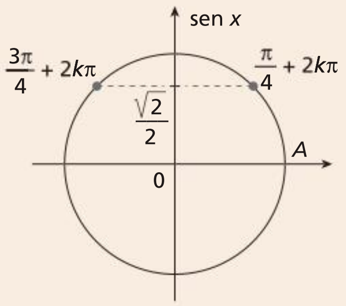
d) $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

e) $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

13. **a)** $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

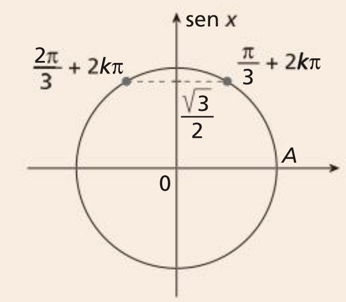
No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo seno vale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$.



Logo, no universo real temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$

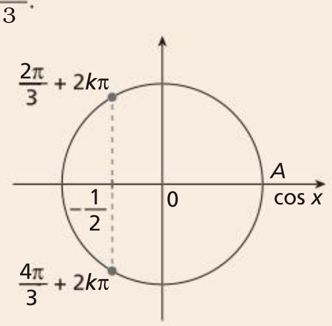


Portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

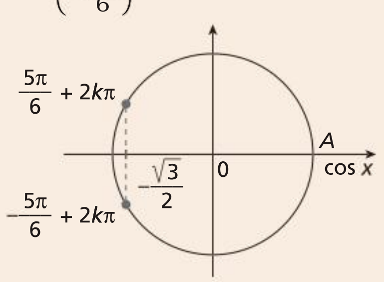
No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $-\dfrac{1}{2}$ são $\dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{4\pi}{3}$.



Logo, no universo real temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) $\cos x = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

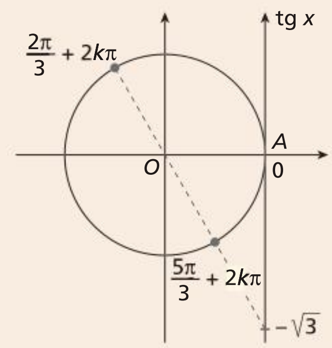


Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Os arcos cuja tangente vale $-\sqrt{3}$, considerando o intervalo $[0, 2\pi]$, são $\dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{5\pi}{3}$.

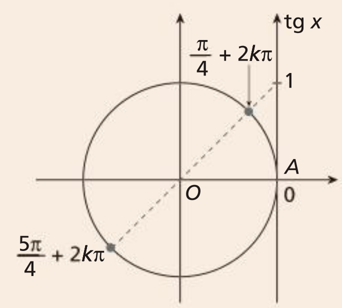


Observe que: $\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + \pi$

Logo, no universo real temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

f) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{4}$



Observe que: $\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \pi$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

14. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ são $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$.

Assim, temos:

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{23\pi}{12} + 2k\pi$

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{19\pi}{12} + 2k\pi$

Portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

15. $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0$ ou $\cos x = 0$

No universo real, temos:

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

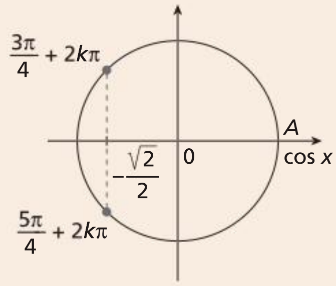
$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Da união das soluções, concluímos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

16. $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



ADILSON SECCO

Logo, uma resposta possível é: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentário: Esse exercício proporciona a reversibilidade do estudo, ou seja, a oportunidade de elaborar uma equação a partir de uma solução conhecida.

17. a) sen 75° = sen (45° + 30°)

sen 75° = sen 45° · cos 30° + sen 30° · cos 45°

$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b) cos 75° = cos (45° + 30°)

cos 75° = cos 45° · cos 30° − sen 45° · sen 30°

$\cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) sen 165° = sen (120° + 45°)

sen 165° = sen 120° · cos 45° + sen 45° · cos 120°

$\text{sen } 165° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\text{sen } 165° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) cos 285° = cos (240° + 45°)

cos 285° = cos 240° · cos 45° − sen 240° · cos 45°

$\cos 285° = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 285° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

18. a) Vamos mostrar que tg 15° ≠ tg 45° − tg 30°:

$\text{tg } 15° = \text{tg } (45° - 30°) = \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°}$

$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$

$\text{tg } 45° - \text{tg } 30° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$

Como $2 - \sqrt{3} \neq \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$, concluímos que:

tg 15° ≠ tg 45° − tg 30°

b) Vamos mostrar que tg 60° − tg 45° ≠ tg 15°:

$\text{tg } 60° - \text{tg } 45° = \sqrt{3} - 1$

$\text{tg } 15° = \text{tg } (60° - 45°) = \frac{\text{tg } 60° - \text{tg } 45°}{1 + \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°}$

$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$

Como $\sqrt{3} - 1 \neq 2 - \sqrt{3}$, concluímos que:

tg 60° − tg 45° ≠ tg 15°

Comentário: Analogamente ao boxe **Reflita** da página 84, por meio de cálculo direto, em caso particular, os alunos são levados a concluir que não é válida a afirmação genérica de que a tangente da diferença de dois ângulos é igual à diferença das tangentes desses ângulos.

19. a) cos 105° = cos (60° + 45°)

cos 105° = cos 60° · cos 45° − sen 60° · sen 45°

$\cos 105° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 105° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

b) $\text{cossec } 15° = \frac{1}{\text{sen } 15°} = \frac{1}{\text{sen } (60° - 45°)}$

$\text{cossec } 15° = \frac{1}{\text{sen } 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 45° \cdot \cos 60°}$

$\text{cossec } 15° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$

$\text{cossec } 15° = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}$

$\text{cossec } 15° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

c) $\text{cotg } 75° = \frac{1}{\text{tg } 75°} = \frac{1}{\text{tg } (45° + 30°)}$

$\text{cotg } 75° = \frac{1}{\frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°}} = \frac{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°}{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}$

$\text{cotg } 75° = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$

$\text{cotg } 75° = 2 - \sqrt{3}$

d) $\sec 105° = \frac{1}{\cos 105°} = \frac{1}{\cos (60° + 45°)}$

$\sec 105° = \frac{1}{\cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45°}$

$\sec 105° = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\sec 105° = \frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$

20. a) $\text{tg } \frac{7\pi}{12} = \text{tg } \left(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \text{tg } \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\text{tg } \frac{7\pi}{12} = \frac{\text{tg } \frac{\pi}{3} + \text{tg } \frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg } \frac{\pi}{3} \cdot \text{tg } \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}$

$\text{tg } \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = -\sqrt{3} - 2$

b) $\text{tg } \left(\frac{17\pi}{12}\right) = \text{tg } \left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = \text{tg } \left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$\text{tg } \left(\frac{17\pi}{12}\right) = \text{tg } \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\text{tg } \left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{\text{tg } \frac{\pi}{6} + \text{tg } \frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg } \frac{\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{\pi}{4}}$

$\text{tg } \frac{17\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}$

$\text{tg } \frac{17\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

21. **a)** $\cos(\pi + x) = -\cos x$

Desenvolvendo o 1º membro, temos:

$\cos(\pi + x) = \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cdot \cos x - \underbrace{\operatorname{sen} \pi \cdot \operatorname{sen} x}_{0}$

$\cos(\pi + x) = (-1) \cdot \cos x = -\cos x$

Como desenvolvendo o 1º membro obtivemos uma expressão idêntica à expressão do 2º membro, podemos concluir que a igualdade $\cos(\pi + x) = -\cos x$ é verdadeira.

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Desenvolvendo o 1º membro da igualdade, temos:

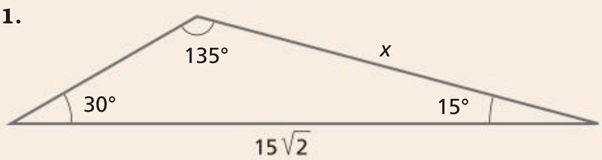
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1} \cdot \cos x - \underbrace{\operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{2}}_{0}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$

Como obtivemos uma expressão idêntica à expressão do 2º membro, podemos concluir que a igualdade $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ é verdadeira.

Exercícios complementares

1.

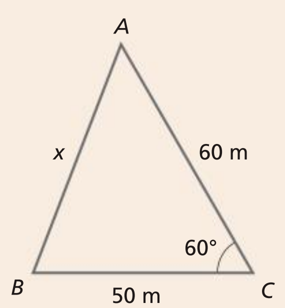


Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{15\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135°} \Rightarrow x = \frac{15\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 15$$

Portanto, $x = 15$ cm.

2.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 60^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos 60°$

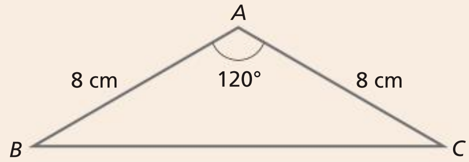
$x^2 = 3.600 + 2.500 - 6.000 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 3.100$

$x = 10\sqrt{31} \simeq 55{,}7$

Portanto, a distância entre os edifícios A e B é aproximadamente 55,7 m.

3.



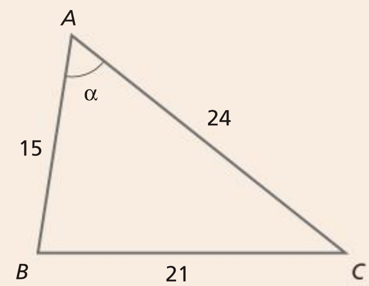
$(BC)^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 120°$

$(BC)^2 = 128 - 128 \cdot (-0{,}5)$

$(BC)^2 = 192 \Rightarrow BC = \sqrt{192} \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$

Portanto, a medida do lado $\overline{BC}$ é $8\sqrt{3}$ cm.

4.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$21^2 = 15^2 + 24^2 - 2 \cdot 15 \cdot 24 \cdot \cos\alpha$

$441 = 225 + 576 - 720 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$

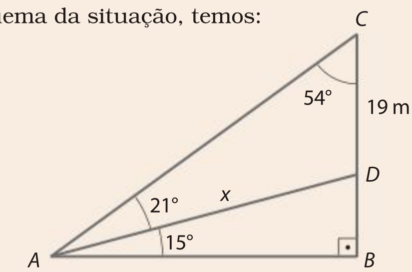
Portanto, a medida do ângulo formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo é 60°.

5. Fazendo um esquema da situação, temos:

med$(\hat{A}) = 36°$

med$(\hat{B}) = 90°$

med$(\hat{C}) = 54°$



Aplicando a lei dos senos no $\triangle ACD$, temos:

$$\frac{19}{\operatorname{sen} 21°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 54°} \Rightarrow x \simeq \frac{19 \cdot 0{,}81}{0{,}36} \simeq 42{,}75$$

A distância entre o topógrafo e a base da torre é, aproximadamente, 42,75 m.

6. $\operatorname{cossec}\frac{\pi}{2} \cdot \sec \pi + \operatorname{tg} 2\pi \cdot \sec\frac{\pi}{4} =$

$= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot \sec\frac{\pi}{4} = -1$

7. **a)** Se $\cos x = \frac{1}{3}$, então:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{8}{9}$

Como x é um arco do 1º quadrante, temos:

$\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

c) $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

d) $\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

8. **a)** $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$

Então: $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Então:

$x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou

$x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

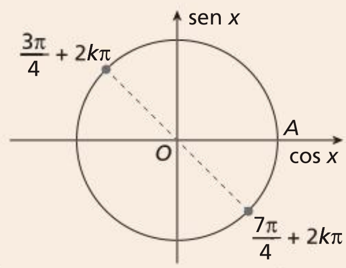
c) $\text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Então:

$x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9. $\text{sen}\ x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\text{sen}\ x$



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. a) $\text{sen}\ 15° = \text{sen}\ (45° - 30°)$

$\text{sen}\ 15° = \text{sen}\ 45° \cdot \cos 30° - \text{sen}\ 30° \cdot \cos 45°$

$\text{sen}\ 15° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\ 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 165° = \cos(120° + 45°)$

$\cos 165° = \cos 120° \cdot \cos 45° - \text{sen}\ 120° \cdot \text{sen}\ 45°$

$\cos 165° = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 165° = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

c) $\text{tg}\ 75° = \text{tg}\ (30° + 45°)$

$\text{tg}\ 75° = \dfrac{\text{tg}\ 30° + \text{tg}\ 45°}{1 - \text{tg}\ 30° \cdot \text{tg}\ 45°}$

$\text{tg}\ 75° = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}}$

$\text{tg}\ 75° = 2 + \sqrt{3}$

11. $\cos 75° = \cos(30° + 45°)$

$\cos 75° = \cos 30° \cdot 45° - \text{sen}\ 30° \cdot \text{sen}\ 45°$

$\cos 75° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\text{sen}\ 105° = \text{sen}\ (60° + 45°)$

$\text{sen}\ 105° = \text{sen}\ 60° \cdot \cos 45° + \text{sen}\ 45° \cdot \cos 60°$

$\text{sen}\ 105° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$\text{sen}\ 105° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Então:

$\cos 75° - \text{sen}\ 105° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} =$

$= \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. a) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{16}{25}$

Como x é um arco do 1º quadrante, temos: $\text{sen}\ x = \dfrac{4}{5}$

b) $\text{tg}\ x = \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}\ x = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$

c) $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ x$

$\cos 2x = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{9}{25} - \dfrac{16}{25}$

$\cos 2x = -\dfrac{7}{25}$

d) $\text{sen}\ 2x = \text{sen}\ (x + x) = \text{sen}\ x \cdot \cos x + \text{sen}\ x \cdot \cos x$

$\text{sen}\ 2x = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{25} + \dfrac{12}{25}$

$\text{sen}\ 2x = \dfrac{24}{25}$

e) $\text{tg}\ 2x = \dfrac{\text{sen}\ 2x}{\cos 2x} \Rightarrow \text{tg}\ 2x = \dfrac{24}{25} \cdot \left(-\dfrac{25}{7}\right) = -\dfrac{24}{7}$

13. a) Aplicando a lei dos senos, temos:

$\dfrac{36}{\text{sen}\ 45°} = \dfrac{18\sqrt{6}}{\text{sen}\ \beta} \Rightarrow \text{sen}\ \beta = \dfrac{18\sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

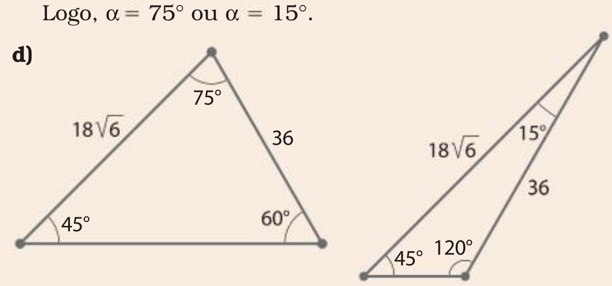
b) $\text{sen}\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60°$ ou $\beta = 120°$

c) $\alpha = 180° - (45° + 60°) = 75°$ ou

$\alpha = 180° - (45° + 120°) = 15°$

Logo, $\alpha = 75°$ ou $\alpha = 15°$.

d)



14. a) $\text{sen}\ 2\alpha = \text{sen}\ (\alpha + \alpha) = \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha + \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ 2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

c) $\text{tg}\ 2\alpha = \text{tg}\ (\alpha + \alpha) = \dfrac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \alpha}$

Logo, $\text{tg}\ 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$, obedecidas as condições para a existência da tangente.

15. $\cos(x + \pi) = \cos x \cdot \cos\pi - \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ \pi = -\cos x$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cdot \cos 2\pi - \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ 2\pi = \cos x$

$\cos(x + 3\pi) = \cos x \cdot \cos 3\pi - \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ 3\pi = -\cos x$

e assim por diante.

Então, a sequência

$[\cos x, \cos(x + \pi), \cos(x + 2\pi), \cos(x + 3\pi), \ldots]$, com $x \neq k\pi$, pode ser escrita da seguinte forma:

$(\cos x, -\cos x, \cos x, -\cos x, \ldots)$, com $x \neq k\pi$

Ou seja, a sequência é uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo igual a $\cos x$ e razão -1.

Comentário: Essa questão, de caráter intradisciplinar, retoma o conceito de PG.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

1. $\dfrac{6}{\text{sen } 44°} = \dfrac{y}{\text{sen } 36°} = \dfrac{x}{\text{sen } 100°}$

$x = \dfrac{6 \cdot \text{sen } 100°}{\text{sen } 44°} \simeq \dfrac{6 \cdot 0{,}98}{0{,}69} \Rightarrow x \simeq 8{,}5$

$y = \dfrac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°} \simeq \dfrac{6 \cdot 0{,}59}{0{,}69} \Rightarrow y \simeq 5{,}1$

Logo, $x \simeq 8{,}5$ cm e $y \simeq 5{,}1$ cm.

alternativa d

2. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$(AB)^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 20°$

$(AB)^2 \simeq 144 + 64 - 180{,}5$

$(AB)^2 \simeq 27{,}5$

$AB \simeq 5{,}25$

alternativa c

3. Se sen $x = \dfrac{3}{5}$, então cossec $x = \dfrac{5}{3}$.

Assim:

$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{3}$

alternativa b

4. Se $\cos x = \dfrac{1}{4}$ e x pertence ao 1º quadrante, então sen $x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

$\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

alternativa a

5. $2 \cdot \text{sen } x - 2 = 0$

$\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

alternativa b

6. $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou

$2x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Logo, $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

alternativa b

7. $\text{sen } 15° = \text{sen } (60° - 45°)$

$\text{sen } 15° = \text{sen } 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 45° \cdot \cos 60°$

$\text{sen } 15° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$\text{sen } 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$\cos 105° = \cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45°$

$\cos 105° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

alternativa d

8. Se sen $x = \dfrac{1}{4}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, então $\cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

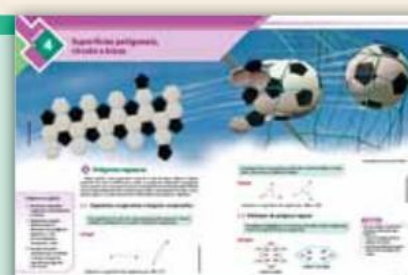
$\text{sen } 2x = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

$\text{sen } 2x = 2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$

alternativa b

Capítulo 4

Superfícies poligonais, círculo e áreas



Esse capítulo retoma e aprofunda alguns conceitos de Geometria vistos no Ensino Fundamental, como as definições de polígono regular e de circunferência e o cálculo da área de algumas superfícies poligonais. Esses conceitos de Geometria plana servirão de base para o estudo da Geometria espacial nos capítulos seguintes.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. Em um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio $r = 2$ cm, temos:

$a_3 = \dfrac{r}{2} \Rightarrow a_3 = 1$

$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 2\sqrt{3}$

Portanto, as medidas do apótema e do lado desse triângulo são 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm, respectivamente.

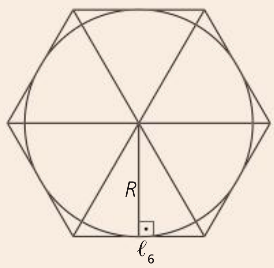
Comentário: Essa questão pode ser aproveitada para que os alunos façam outras descobertas além da pedida, por exemplo, a relação entre o apótema e a altura do triângulo equilátero: a medida do apótema é igual à terça parte da medida da altura do triângulo. Na Geometria, estudamos que essa é uma propriedade do baricentro do triângulo, que divide cada mediana na razão 1 : 3.

2. a) $R = \dfrac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \dfrac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell_6 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = 2 \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} R \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} R$



c) $P = 6 \cdot \ell_6 = \dfrac{6 \cdot 2\sqrt{3}R}{3} \Rightarrow P = 4\sqrt{3}R$

Comentário: Para a resolução dessa questão, basta um esboço do desenho que apresente as diagonais do hexágono que passam pelo centro da circunferência e um raio da circunferência por um ponto de tangência.

Pode-se, porém, aproveitar a atividade para trabalhar a construção pedida usando adequadamente os instrumentos de Desenho geométrico. Caso os alunos apresentem dificuldade com essas construções, pode ser necessária uma orientação prévia para a elaboração do hexágono regular circunscrito. Pode-se usar um procedimento com os seguintes passos:

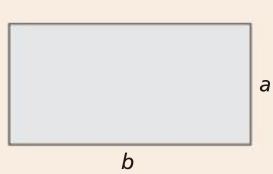
- traçar uma circunferência e uma reta ***r*** que passe pelo centro ***O*** dela;
- com o transferidor, construir 6 ângulos centrais de 60° a partir da reta *r*;
- com uma régua apoiada em um esquadro, traçar por *O* a perpendicular à reta *r*, obtendo um ponto ***P*** na circunferência;
- por *P* traçar uma paralela à reta *r* obtendo um ponto *A* em um dos lados de um dos ângulos de 60°;
- com centro em *O* e raio $\overline{OA}$, obter nos outros lados dos ângulos de 60° os pontos *B*, *C*, *D*, ***E*** e ***F***, vértices do hexágono pedido;
- traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

Após os alunos terem feito o desenho pedido, é interessante que eles comparem geometricamente as medidas pedidas.

3. $2a + 2b = 12$

$a + b = 6$ (I)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$



Substituindo em (I), obtemos:

$a + 2a = 6 \Rightarrow a = 2$ e $b = 4$

Área $= a \cdot b = 2 \cdot 4 = 8$

Logo, a área do retângulo é 8 m².

4. Como $\overline{BC} \,/\!/\, \overline{AG} \,/\!/\, \overline{EF}$ e $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CE} \,/\!/\, \overline{GF}$, os polígonos *DCBA* e *DEFG* são paralelogramos.

$A_{DEFG} = 2 \cdot A_{\triangle DEG}$

$A_{\triangle DEG} = \dfrac{30 \cdot 78 \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$

$A_{DEFG} = 30 \cdot 78 \cdot \text{sen}\,\alpha$

$A_{DCBA} = 2 \cdot A_{\triangle ADC}$

$A_{\triangle ADC} = \dfrac{26 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$

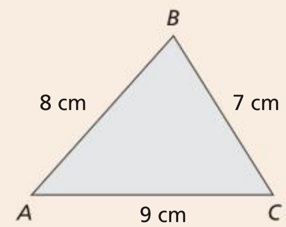
$A_{DCBA} = 26 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,\alpha$

$\dfrac{A_{DEFG}}{A_{DCBA}} = \dfrac{30 \cdot 78 \cdot \text{sen}\,\alpha}{26 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,\alpha} = 9$

Comentário: Essa questão pode ser explorada com os seguintes questionamentos:

- Os paralelogramos *DEFG* e *DCBA* são semelhantes?
- No caso de serem semelhantes, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre os lados correspondentes?
- Para resolver essa questão, é necessário que os paralelogramos sejam semelhantes?

5.



$p = \dfrac{8 + 7 + 9}{2} = 12$

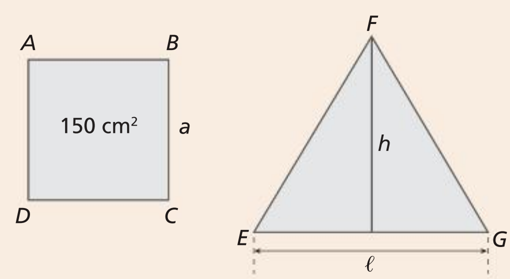
$A_{\triangle ABC} = \sqrt{12(12 - 8) \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 9)}$

$A_{\triangle ABC} = 12\sqrt{5}$

Logo, a área do triângulo *ABC* é $12\sqrt{5}$ cm².

Comentário: Dada a diversidade de caminhos para se determinar a área de uma superfície triangular, essa questão faz com que os alunos procurem identificar o meio ou a fórmula mais conveniente em relação às informações do enunciado.

6.



$A_{ABCD} = 150 \Rightarrow a^2 = 150 \Rightarrow a = 5\sqrt{6}$

Seja *d* a medida da diagonal do quadrado. Assim:

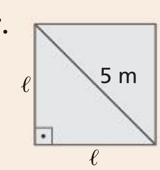
$d = a\sqrt{2} = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{12} = 10\sqrt{3} = h$

$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 20$

$A_{\triangle EFG} = \dfrac{20 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$

Logo, a área do triângulo é $100\sqrt{3}$ cm².

7.



$\ell\sqrt{2} = 5 \Rightarrow \ell = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$A_{\text{quadrado}} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12{,}5$

Logo, a área do quadrado é 12,5 m².

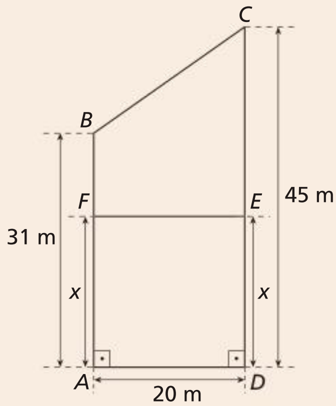
8. $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(10 + 5) \cdot 10}{2} = 75$

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{10 \cdot 10}{2} = 50$

A área do trapézio é 75 m² e a do triângulo é 50 m².

Comentário: Além da resolução por cálculo numérico com o emprego da fórmula, os alunos também podem decompor mentalmente o quadrado *ABCD*, cuja área é 100 m², em quatro triângulos retângulos. Assim, podem perceber que o trapézio *AMCD* tem área igual a $\dfrac{3}{4}$ da área de *ABCD* e a área do triângulo *CDM* corresponde a $\dfrac{1}{2}$ da área de *ABCD*.

9.



$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{trapézio}}$

$A_{ADEF} = A_{BCEF}$

$x \cdot 20 = \dfrac{(31 - x + 45 - x)20}{2}$

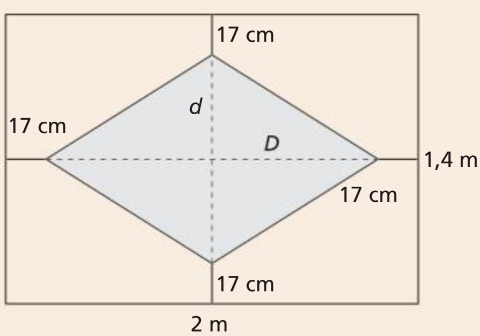
$2x = 76 - 2x$

$4x = 76$

$x = 19$

Portanto, a distância do vértice à cerca deve ser 19 m.
alternativa b

10.



$d = 1{,}4\text{ m} - 2 \cdot 0{,}17\text{ m} = 1{,}06\text{ m} = 106\text{ cm}$

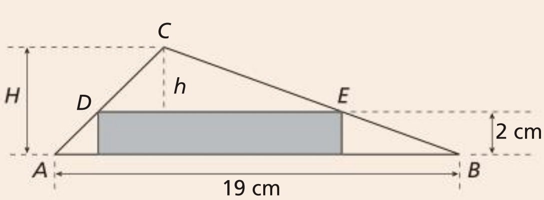
$D = 2\text{ m} - 2 \cdot 0{,}17\text{ m} = 1{,}66\text{ m} = 166\text{ cm}$

$A_{\text{losango}} = \dfrac{d \cdot D}{2} = 8.798\text{ cm}^2$

A área do losango é 8.798 cm².

Comentário: Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que pesquisem as especificações legais da construção da bandeira brasileira.

11.



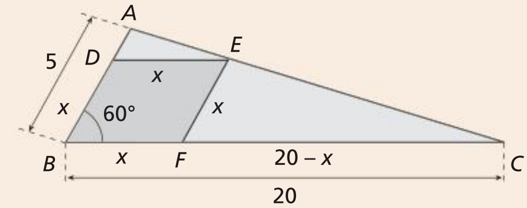
O triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *DEC*.
Sendo *H* a altura do triângulo *ABC* e *h* a altura do triângulo *DEC*, temos:

$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{H}{h} \Rightarrow \dfrac{19}{DE} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow DE = 11{,}4$

Logo: $A_{\text{retângulo}} = 2 \cdot 11{,}4 = 22{,}8$

Portanto, a área do retângulo é 22,8 cm².

12.



$\triangle ADE \sim \triangle EFC$

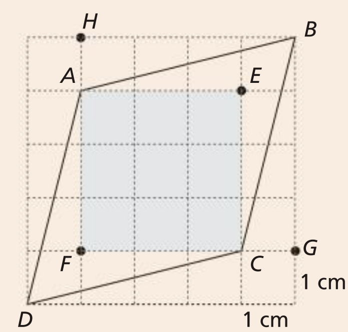
$\dfrac{x}{20 - x} = \dfrac{5 - x}{x} \Rightarrow x^2 = 100 - 25x + x^2 \Rightarrow x = 4$

A área do losango *DEFB* é 2 vezes a área do triângulo *BDF*:

$A_{DEFB} = \dfrac{2 \cdot x \cdot x \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{16 \cdot \sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Portanto, o lado do losango mede 4 m e sua área é $8\sqrt{3}\text{ m}^2$.

13.



Observe que:

$A_{ABCD} = A_{AECF} + 2 \cdot A_{ABCE}$

AECF é um quadrado: $A_{AECF} = 3 \cdot 3 = 9$

$A_{ABCE} = A_{HFGB} - 2 \cdot A_{BCG} - A_{AECF} = 4^2 - 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 1}{2} - 9 = 3$

$A_{ABCD} = 9 + 2 \cdot 3 = 15$

Logo, a área do losango é 15 cm².

Comentário: Os alunos podem ser desafiados a buscar resoluções diferentes da apresentada acima. Por exemplo, podem subtrair da área do quadrado maior 4 vezes A_{BCG} e, depois, subtrair 2 cm², correspondente à área de 2 quadradinhos (superior esquerdo e inferior direito).

14. $a_3 = \dfrac{r}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$\ell_3 = r\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow \ell_3 = 6$

$A_3 = p \cdot a = 9 \cdot \sqrt{3}$

Logo, a área do triângulo é $9\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

15. A soma das áreas dos triângulos (área da região laranja da estrela) é igual à área do hexágono.

$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \dfrac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$

Mas: $a_6 = \dfrac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \dfrac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Assim:

$$A_{\text{hexágono}} = \dfrac{6 \cdot \dfrac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3} \cdot a_6}{3}}{2} = 2 \cdot (a_6)^2 \cdot \sqrt{3}$$

$A_{\text{hexágono}} = 72\sqrt{3}$

Logo, a área da região laranja da estrela é $72\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

Comentário: Mais do que a aplicação correta de fórmulas, é importante que os alunos estabeleçam estratégias de resolução de problemas. Esta é uma oportunidade de aplicar a decomposição do hexágono central em 6 triângulos equivalentes aos das “pontas” da estrela.

16. De acordo com o enunciado, temos: $\dfrac{a_6}{a_4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a_4 = \dfrac{\ell_4}{2}$ e $a_6 = \dfrac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\ell_6}{\ell_4} = \frac{\frac{2a_6}{\sqrt{3}}}{2a_4} = \frac{a_6}{a_4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6 \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4 \cdot \ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{\ell_6}{\ell_4} \cdot \frac{a_6}{a_4} =$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

A razão entre a área do hexágono e a do quadrado é $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

17. A medida da diagonal do quadrado é $\ell\sqrt{2}$. Como são 3 quadrados, temos:

$$\ell\sqrt{2} = \frac{1{,}20}{3} = 0{,}4 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$A_{\text{quadrados}} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{quadrados}} = 0{,}24$$

Logo, a área do mosaico é 0,24 m².

Chamando de x o valor que o artesão recebeu pelo trabalho, temos:

1 m² ——— R$ 500,00

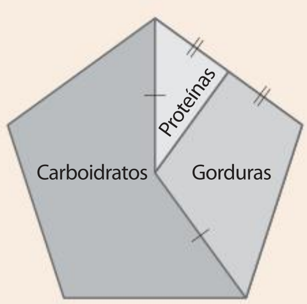
0,24 m² ——— x

$\Rightarrow x = 500 \cdot 0{,}24 = 120$

Portanto, o artesão recebeu R$ 120,00 pelo trabalho.

18. Um pentágono regular pode ser decomposto em 5 triângulos isósceles (T_i) congruentes, tendo um lado coincidente com um lado do pentágono e dois lados como raios da circunferência circunscrita. A área de cada um desses triângulos corresponde a 20% da área do pentágono.

Se dividirmos um desses triângulos pela altura relativa à base, obtemos um triângulo retângulo (T_r) cuja área corresponde à metade da área do triângulo isósceles, ou seja, corresponde a 10% da área do pentágono.



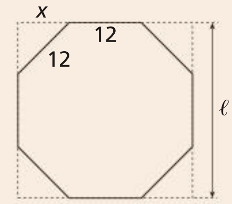
Observando as figuras do enunciado, percebemos que no pentágono:

- as proteínas estão representadas por um T_i de área igual a 10% da área do pentágono;
- as gorduras estão representadas por um T_i mais T_r, ou seja, por 20% + 10% (= 30%) da área do pentágono;
- os carboidratos estão representados por três T_{is}, ou seja, por 3 · 20% (= 60%) da área do pentágono.

Portanto, o pentágono é a figura do enunciado que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos.

alternativa c

19.



A medida do apótema do octógono (a_8) corresponde à metade da medida do lado do quadrado.

$x^2 + x^2 = 12^2 \Rightarrow 2x^2 = 144 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$

$\ell = 6\sqrt{2} + 12 + 6\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}$

$$a_8 = \frac{12\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2} = 6\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Portanto, a medida do apótema do octógono é $6\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm.

Comentário: Essa questão proporciona aos alunos a comparação entre as medidas dos apótemas do quadrado e do octógono.

20. $A_{\text{coroa}} = \pi(R_2)^2 - \pi(R_1)^2 = 75\pi \Rightarrow \pi((R_2)^2 - 25) =$
$= 75\pi \Rightarrow (R_2)^2 = 100 \Rightarrow R_2 = 10$

Portanto, $R_2 = 10$ cm.

alternativa e

21. $A_1 = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \dfrac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \dfrac{8A_1}{\pi}$

Analogamente: $b^2 = \dfrac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \dfrac{8A_3}{\pi}$

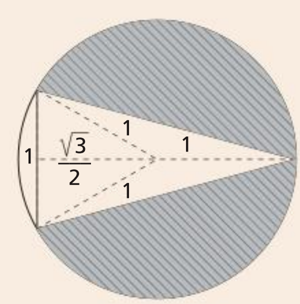
Do triângulo retângulo, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{\cancel{8}A_3}{\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{8}A_1}{\cancel{\pi}} + \frac{\cancel{8}A_2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$$

Assim, $A_1 + A_2 = A_3$.

Comentário: Essa questão pode ser muito bem explorada com uma discussão em grupo sobre o teorema de Pitágoras. Assim, os alunos podem perceber uma ampliação dele.

22. Vamos considerar as medidas da figura em centímetro.



A área da região hachurada é igual à área do círculo menos a área do triângulo isósceles menos a área do segmento circular.

$A_{\text{círculo}} = \pi$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

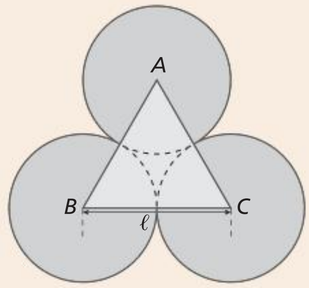
$$A_{\text{segmento}} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A_{\text{laranja}} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi - 3}{6}$$

Logo, a área da região pintada de laranja é $\dfrac{5\pi - 3}{6}$ cm².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

23.



raio de cada círculo: $r = \dfrac{\ell}{2}$

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

Portanto, $r = \sqrt{2}$.

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot A_{\text{círculo}} - 3 \cdot A_{\text{setor circular}}$

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$

$A_{\text{setor circular}} = \dfrac{\pi r^2}{6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot 2\pi - 3 \cdot \dfrac{\pi}{3} = 5\pi$

A área da região pintada de azul é 5π cm².

Comentário: Caso considere conveniente, essa atividade pode ser mais explorada pedindo aos alunos que calculem a área da região situada entre as 3 circunferências. Essa área pode ser obtida pela diferença entre a área do triângulo *ABC* e a da semicircunferência, que é igual a $2\sqrt{3} - \pi$.

Exercícios complementares

1. raio da circunferência inscrita:

$R = \dfrac{\ell_4}{2} \Rightarrow R = \dfrac{10}{2} \Rightarrow R = 5$

raio da circunferência circunscrita:

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{\ell_4}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \dfrac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$

Assim, o raio da circunferência inscrita e o da circunscrita são 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm, respectivamente.

2. $a_6 = \dfrac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$

$A_6 = 6 \cdot \dfrac{\ell_6 \cdot a_6}{2} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \dfrac{6 \cdot \ell_6 \cdot \dfrac{\ell_6\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\sqrt{3} = 3 \cdot (\ell_6)^2\sqrt{3} \Rightarrow (\ell_6)^2 = \dfrac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ell_6)^2 = 4 \Rightarrow \ell_6 = 2$

Como $\ell_6 = r$, temos $r = 2$ cm.

3. $p = \dfrac{7 + 9 + 8}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$

Temos: $A_{\text{triângulo}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$

A área do triângulo é $12\sqrt{5}$ cm².

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 12\sqrt{5} = \dfrac{8 \cdot h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{12\sqrt{5}}{4} \Rightarrow h = 3\sqrt{5}$

Logo, a altura relativa ao lado de 8 cm desse triângulo mede $3\sqrt{5}$ cm.

4. $A_{\text{cozinha}} = 300 \cdot 200 = 60.000$

$A_{\text{cerâmica}} = 20^2 = 400$

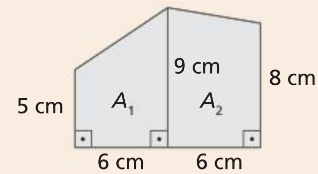
A área da cozinha é 60.000 cm² e a de cada peça de cerâmica é 400 cm².

Sendo n o número de peças de cerâmica, temos:

$n = \dfrac{A_{\text{cozinha}}}{A_{\text{cerâmica}}} = \dfrac{60.000}{400} = 150$

Logo, são necessárias 150 peças de cerâmica.

5. a) A_1: trapézio



$A_1 = \dfrac{(9+5) \cdot 6}{2} = 42$

A_2: trapézio

$A_2 = \dfrac{(9+8) \cdot 6}{2} = 51$

$A_{\text{total}} = 42 + 51 = 93$

Logo, a área da figura é 93 cm².

b) $A_{\text{quadrado}} = 6^2 = 36$

$p_{\text{triângulo}} = \dfrac{5+6+7}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$

$A_{\text{total}} = 36 + 6\sqrt{6} = 6\left(6 + \sqrt{6}\right)$

Logo, a área da figura é $6\left(6 + \sqrt{6}\right)$ m².

6. Como os triângulos *BAC* e *MNC* são semelhantes, vamos encontrar a razão de semelhança k: $\dfrac{AC}{NC} = 2 = k$

Assim, a razão entre as áreas é: $k^2 = 2^2 = 4$

Considerando A a área do triângulo *MNC* e A_C a área a ser calçada, obtemos:

$\dfrac{A_C + A}{A} = k^2 \Rightarrow \dfrac{A_C + A}{A} = 4 \Rightarrow A_C = 3A$

alternativa e

7. Pelo enunciado, temos:

Área do retângulo = $260 \cdot 400$

$x \cdot 26 = 4\%$ de $260 \cdot 400$

$x \cdot 26 = \dfrac{4}{100} \cdot 260 \cdot 400$

$x = \dfrac{4 \cdot 260 \cdot 4}{26}$

$x = 160$

alternativa d

8. $(\ell_4)^2 = 64 \Rightarrow \ell_4 = 8$

Logo, $DC = 8$ cm.

O triângulo *DMC* é semelhante ao triângulo *PMQ*; assim:

$\dfrac{DC}{PQ} = \dfrac{DM}{PM}$

Como $DM = 2 \cdot PM$, temos: $\dfrac{8}{PQ} = \dfrac{2 \cdot PM}{PM} \Rightarrow PQ = 4$

$A_{\text{losango}} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16$

Logo, a área do polígono *MQNP* é 16 cm².

9. As semicircunferências que estão do lado de fora do quadrado encaixam-se perfeitamente nos espaços em branco dentro do quadrado; portanto, a área da figura sombreada é igual à área do quadrado de lado ℓ_4 e diagonal $15\sqrt{2}$ cm.

Assim:

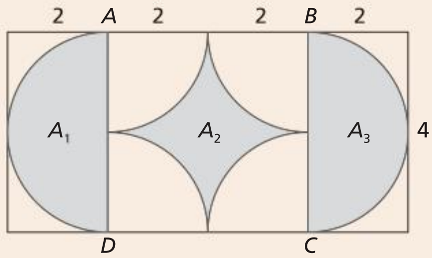
$\ell_4\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 15$

$A_{\text{quadrado}} = (\ell_4)^2 = 15^2 = 225$

Logo, a área da figura é 225 cm².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10.



$A_1 = A_3$

$A_1 = \dfrac{A_{\text{círculo}}}{2} \Rightarrow A_1 = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{2} \Rightarrow A_1 = 2\pi$

$A_3 = 2\pi$

$A_2 = A_{\square ABCD} - 4 \cdot \dfrac{A_{\text{círculo}}}{4} \Rightarrow A_2 = 4^2 - \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_2 = 16 - 4\pi$

$A_1 + A_2 + A_3 = 2\pi + 2\pi + 16 - 4\pi$

Assim, $A_1 + A_2 + A_3 = 16$.

alternativa c

11. As regiões alaranjadas interiores ao quadrado *ABCD* e exteriores ao quadrado *MNPQ* encaixam-se perfeitamente nos espaços em branco do quadrado *MNPQ*. Assim, a área da região alaranjada é igual à área do quadrado *MNPQ*. O dobro do raio dos arcos de circunferência é igual às medidas das diagonais do quadrado *MNPQ*; então, temos:

$d = \ell_4\sqrt{2} \Rightarrow 4 = \ell_4\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell_4 = 2\sqrt{2}$

$A_{MNPQ} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$

Logo, a área da região alaranjada é 8 cm².

12. A área da piscina retangular é dada por $50 \cdot 24$, ou seja, 1.200 m².

A área da nova piscina é dada por:

$A = 3 \cdot \dfrac{60° \cdot 3 \cdot R^2}{360°} = \dfrac{3 \cdot R^2}{2}$, em que $\mathbb{R} \in \mathbb{N}$

Então, devemos ter:

$\dfrac{3 \cdot R^2}{2} < 1.200 \Rightarrow R^2 < \dfrac{2 \cdot 1.200}{3} \Rightarrow R < 20\sqrt{2}$

Como $20\sqrt{2} \simeq 28,28$, o maior valor possível para R é 28.

alternativa b

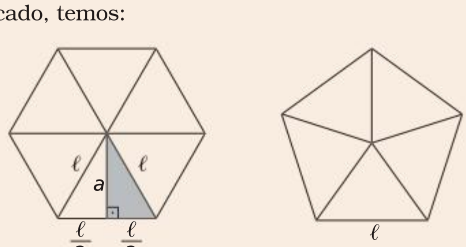
13.

Pizza 1:	Pizza 2:
Diâmetro: 40 cm	Diâmetro: 35 cm
Área: 400π cm²	Área: $306,25\pi$ cm²
Preço: R$ 40,00	Preço: x

$x = \dfrac{306,25\pi \cdot 40}{400\pi} \Rightarrow x = 30,625$

Logo, o preço de uma pizza cujo diâmetro é 35 cm deve ser aproximadamente R$ 30,63.

14. A quantidade de couro necessária para confeccionar a bola de futebol será dada pela soma das áreas dos polígonos. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado, temos:



$\ell^2 = (a_6)^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2$

$(a_6)^2 = \ell^2 - \dfrac{\ell^2}{4}$

$\dfrac{3\ell^2}{4} = (a_6)^2$

$\ell^2 = \dfrac{4(a_6)^2}{3}$

Como $a_6 = 3,8$ (apótema do hexágono), temos:

$\ell = \sqrt{\dfrac{4 \cdot (3,8)^2}{3}} \Rightarrow \ell \simeq 4,39$

A área do hexágono é dada por:

$A_6 = 6 \cdot \dfrac{\ell \cdot a_6}{2} \Rightarrow A_6 = 6 \cdot \dfrac{4,39 \cdot 3,80}{2} \Rightarrow A_6 \simeq 50,046$

A área do pentágono é dada por:

$A_5 = 5 \cdot \dfrac{\ell \cdot a_5}{2} \Rightarrow A_5 = 5 \cdot \dfrac{4,39 \cdot 4,20}{2} \Rightarrow A_5 \simeq 46,095$

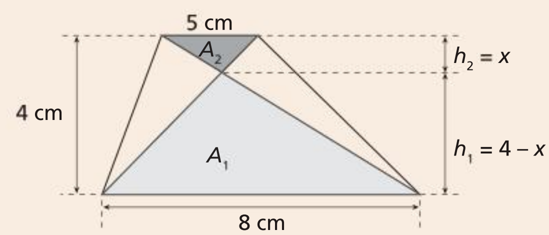
Logo, a área total será:

$A_T = 20 \cdot A_6 + 12 \cdot A_5$

$A_T \simeq 20 \cdot 50,046 + 12 \cdot 46,095 = 1.554,06$

Portanto, a quantidade de couro necessária para confeccionar uma bola de futebol é, aproximadamente, 1.554,06 cm².

15.



Os triângulos de áreas A_1 e A_2 são semelhantes, então:

$\dfrac{5}{8} = \dfrac{h_2}{h_1} \Rightarrow \dfrac{5}{8} = \dfrac{x}{4 - x} \Rightarrow x = \dfrac{20}{13}$

Assim: $h_1 = \dfrac{20}{13}$ cm e $h_2 = \dfrac{32}{13}$ cm

Então:

$A_1 = \dfrac{8}{2} \cdot \dfrac{32}{13} = \dfrac{128}{13}$

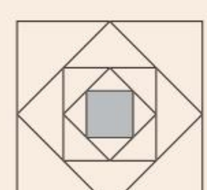
$A_2 = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{20}{13} = \dfrac{50}{13}$

$A_1 - A_2 = \dfrac{78}{13} = 6$

Portanto, a diferença entre as áreas A_1 e A_2 é 6 cm².

16. Se o 1º quadrado tem área 4, a medida de seu lado é $\ell_{1^{\circ}} = 2$ e sua diagonal mede $2\sqrt{2}$. A medida do lado do 2º quadrado é a metade da medida da diagonal do 1º quadrado, ou seja, $\ell_{2^{\circ}} = \sqrt{2}$.

Analogamente, temos $\ell_{3^{\circ}} = 1$.



Assim, as medidas dos lados dos quadrados formam uma PG de 1º termo 2 e razão $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo: $\ell_{5^{\circ}} = 2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 2 \cdot \dfrac{2^2}{2^4} = \dfrac{1}{2}$

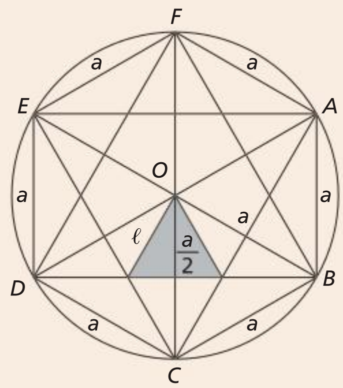
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Área do 5º quadrado:

$$A = (\ell_{5^o})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 0{,}25$$

Logo, a área do 5º quadrado é 0,25 cm².

17. Observe a figura.



Se a é a medida do lado do hexágono $ABCDEF$, então o raio da circunferência também mede a.

Observe ainda que, no triângulo destacado, temos:

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \ell = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Assim, as áreas A_H e A_K são tais que:

$$A_H = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_K = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Logo: $\dfrac{A_H}{A_K} = \dfrac{\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 3$

alternativa c

Comentário: Assim como em outras questões, os alunos também podem resolver essa questão por meio da decomposição dos hexágonos em triângulos retângulos. Basta traçar pelo centro O, paralelas aos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{EC}$, dividindo o hexágono de área H em 36 triângulos retângulos congruentes, dos quais 12 formam o hexágono de área K.

Logo: $\dfrac{\text{área } H}{\text{área } K} = \dfrac{36}{12} = 3$

Autoavaliação

1. Observando os polígonos, verificamos que o polígono I e o polígono V são regulares.
alternativa d

2. No quadrado, temos: $\ell_4 = 2a_4$

No triângulo equilátero, temos: $\ell_3 = 2a_3\sqrt{3}$

No hexágono regular, temos: $\ell_6 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a_6$

No octógono regular, temos:

$\ell_8 = 2a_8 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$

alternativa b

3. Observando as alternativas, verificamos que a correta é a **d**.
alternativa d

4. $A_4 = 4 \cdot \dfrac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$ e $A_6 = 6 \cdot \dfrac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$

Como o quadrado e o hexágono têm o mesmo perímetro, então: $4\ell_4 = 6\ell_6$

Assim:

$$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\dfrac{6\ell_6 \cdot a_6}{2}}{\dfrac{4\ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{a_6}{a_4}$$

alternativa a

5. $A_{ACEG} = 1 \cdot 2 = 2$

A área do retângulo $ACEG$ é 2 cm².

$A_{AEG} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$

A área do triângulo AEG é 1 cm².

$A_{ABEG} = \dfrac{(2 + 1) \cdot 1}{2} = 1{,}5$

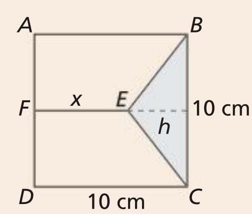
A área do trapézio $ABEG$ é 1,5 cm².

$A_{BDFH} = \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$

A área do losango $BDFH$ é 1 cm².

alternativa c

6.



$h = 10 - x$

$A_{EBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$

$A_{EBC} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - x)$

$A_{EBC} = 5 \cdot (10 - x)$

$A_{ABEF} = \dfrac{(x + 10)5}{2}$

$A_{ABEF} = 2 \cdot A_{EBC}$

$\dfrac{(x + 10)5}{2} = 2 \cdot 5(10 - x)$

$x + 10 = 40 - 4x$

$x = 6$

Logo, a medida de $\overline{FE}$ é 6 cm.

alternativa d

7. $A_{\text{verde}} = \dfrac{1}{4} \cdot A_{\text{coroa}} = \dfrac{1}{4}\pi\left[R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2\right] = \dfrac{3\pi R^2}{16}$

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

Logo:

$\dfrac{A_{\text{verde}}}{A_{\text{círculo}}} = \dfrac{3}{16}$

alternativa a

Pesquisa e ação

Essa atividade poderá ser desenvolvida em parceria com o professor de Educação artística. Caso julgue necessário, também poderá ser solicitada a participação do professor de História, contextualizando o trabalho no tempo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A pesquisa sobre o tema facilita a visualização das imagens e permite aos alunos descobrir novas culturas. A influência árabe, tanto em Portugal quanto na Espanha, criou a cultura dos azulejos e mosaicos. A seguir, indicamos alguns *sites* interessantes sobre o tema:

- <http://cvc.instituto-camoes.pt/conhecer/exposicoes virtuais/a-arte-do-azulejo-em-portugal.html> (Acesso em: 10 jan. 2015.)

  O *site* traz a exposição virtual "A arte do azulejo em Portugal", iniciativa do Instituto Camões em parceria com o Museu Nacional do Azulejo. A exposição apresenta réplicas de azulejos de várias épocas, bem como algumas peças originais de artistas contemporâneos.

- <http://www.belasartes.br/revistabelasartes/downloads/artigos/2/arq_e_arte_decorativa_do_azulejo_no_brasil.pdf> (Acesso em: 10 jan. 2015.)

  O *link* traz o artigo "Arquitetura e arte decorativa do azulejo no Brasil", da profª Me. Liliane Simi Amaral. O texto aborda a história da utilização do azulejo na arquitetura brasileira, herança trazida pelos portugueses na época da colonização, desde o uso como revestimento de fachadas, de pisos, de paredes e painéis até como fonte de expressão artística e plástica.

O mosaico composto dos azulejos criados pelos alunos deverá ocupar uma área que permita sua observação.

Capítulo 5

Introdução à Geometria espacial

Apresentando as noções primitivas e os postulados da Geometria, esse capítulo permite trabalhar a dedução lógica por meio de demonstrações de teoremas.

O estudo das posições relativas – entre retas, entre planos ou entre reta e plano – e das ideias de paralelismo e perpendicularismo é imprescindível para o trabalho com poliedros e corpos redondos nos capítulos seguintes.

No volume do 3º ano, o estudo das posições relativas terá o viés da Geometria analítica.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. Consideremos dois pontos distintos A e B.
Além desses dois pontos, podemos considerar infinitos outros pontos não colineares com A e B. Assim, cada trio de pontos não colineares determina um plano e, portanto, obtemos infinitos planos que passam por dois pontos distintos.
Se os três pontos distintos forem não colineares, pelo postulado P6 eles determinarão um único plano.
Se os três pontos distintos forem colineares, infinitos planos passarão por eles.

2. Consideremos os pontos A, B, C e D não coplanares.
Por serem não coplanares, A, B, C e D são não colineares.
Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano.
Então, podemos determinar quatro planos com esses pontos:
- plano determinado pelos pontos A, B e C;
- plano determinado pelos pontos A, B e D;
- plano determinado pelos pontos B, C e D;
- plano determinado pelos pontos A, C e D.

Assim, temos quatro possibilidades:
I) Os quatro pontos são colineares. Logo, existem infinitos planos que os contêm.
II) Dos quatro pontos, três são colineares. Logo, existe um só plano que os contém.
III e IV) Dos quatro pontos, não há três colineares. Logo, existe um plano α determinado por três desses pontos, segundo dois casos:
- o quarto ponto pertence ao plano α; logo, existe um só plano que contém os quatro pontos;
- o quarto ponto não pertence ao plano α; logo, não existe nenhum plano que contenha os quatro pontos.

3. Considerando os pontos A, B, C e D, com A, B e C nunca colineares, podemos formar as seguintes retas:
$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$
Portanto, seis retas são determinadas por esse conjunto de pontos.

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano (postulado P6) e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Considerando três pontos em que os pés de uma mesa de três pernas tocam o chão, esses pontos determinam um único plano (postulado P6). Assim, a mesa de três pernas está sempre firme.
Agora, considerando quatro pontos em que os pés de uma mesa de quatro pernas tocam o chão, esses pontos podem determinar mais de um plano (por exemplo, o caso visto no exercício 2) ou podem determinar um único plano, caso os quatro pontos considerados sejam coplanares.
Portanto, a mesa de quatro pernas pode, às vezes, não estar firme.

Comentário: Após a resolução dessa questão, é interessante perguntar aos alunos se o fato de a mesa de três pernas nunca ficar manca implica que seu tampo estará sempre na horizontal quando colocada em pé em um chão plano e horizontal.

Esse questionamento vai além da determinação de um plano por três pontos distintos e não colineares. Também coloca em pauta o conceito de paralelismo entre planos.

6. **a)** Verdadeira, pois duas retas são reversas quando não existe um mesmo plano que as contenha.

b) Falsa, pois duas retas reversas não são coplanares.

c) Falsa, pois duas retas paralelas são sempre coplanares.

d) Verdadeira, pois dois planos são paralelos se coincidem ou se não têm nenhum ponto comum.

7. **a)** Falsa; considere dois planos paralelos α e β e duas retas r e s tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

Nesse caso, ou r e s são paralelas, ou r e s são reversas. Portanto, duas retas reversas podem estar em planos paralelos.

b) Verdadeira; sabemos que r é paralela a s e que s é paralela a t e queremos mostrar que r é paralela a t.

Duas retas r e s são paralelas ($r /\!/ s$) quando são coincidentes ($r \equiv s$) ou quando têm intersecção vazia ($r \cap s = \varnothing$) e são coplanares.

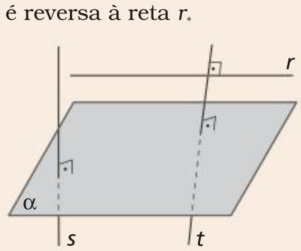
Há três casos a considerar:

- $r \equiv s$ e $s \equiv t$
  Nesse caso, as três retas são coincidentes; logo, r é paralela a t.
- $r \equiv s$ e $s \cap t = \varnothing$ ou $r \cap s = \varnothing$ e $s \equiv t$
  Nesse caso, r e t têm intersecção vazia; logo, r é paralela a t.
- $r \cap s = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$
  Consideremos os planos α (determinado por r e s) e β (determinado por s e t). A intersecção de α e β é a reta s.
  Seja P um ponto da reta t.
  Por ser um ponto de t, P é um ponto de β, mas não de s (pois $s \cap t = \varnothing$). Como só os pontos de s pertencem a β e também a α, concluímos que P não pertence a α; logo, P também não pertence a r. Se um ponto qualquer de t não pertence a r, então $r \cap t = \varnothing$, ou seja, r é paralela a t.

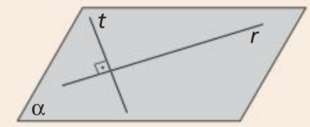
c) Falsa; se uma reta e um plano têm um ponto em comum, a reta r pode ser secante a α.

8. **a)** Falsa. Considere uma reta t, perpendicular a um plano α por um ponto P, e duas retas r e s de α, concorrentes em P. Assim, r e s são duas retas perpendiculares a uma mesma reta t, e r e s não são paralelas.

b) Falsa, pois, se uma reta r e um plano α são paralelos, toda reta perpendicular ao plano α ou é perpendicular à reta r, ou é reversa à reta r.



c) Falsa, pois, se uma reta r está contida em um plano α, existe pelo menos uma reta t perpendicular a r que está contida em α.



d) Verdadeira, pois, se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

Comentário: Nessa questão, assim como nas questões 6 e 7, podemos explorar, por meio de esquemas ou de representações com objetos, a verificação das afirmações, propiciando aos alunos a oportunidade de desenvolver a habilidade da visão espacial.

9. Por um ponto R fora de $\overleftrightarrow{KM}$, traçamos uma paralela a $\overleftrightarrow{KM}$ passando por P.

Como $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{KM}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$.

Como $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$ e $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$.

Como $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{QS} /\!/ \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PS}$.

Então $\overleftrightarrow{RP} \perp \alpha$, pois é perpendicular a, pelo menos, duas retas de α.

Como $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{KM}$ e $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$, temos que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$.

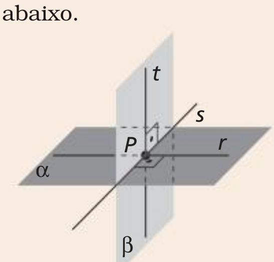
10. **a)** Não, são perpendiculares.

b) Não, $\overline{HG}$ é paralelo ao plano (EFN).

c) Não, são concorrentes.

d) Sim, pois $\overline{EF} \subset EFN \cap EHG$.

11. **a)** Veja a figura abaixo.



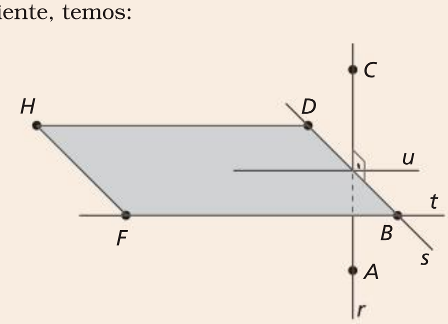
Como os planos α e β são perpendiculares, então β possui uma reta t perpendicular ao plano α.

Como a reta t é perpendicular a α e à reta r no ponto P, temos que a reta r é perpendicular à reta t e à reta s de intersecção entre os planos α e β.

Como a reta r é perpendicular a duas retas no plano β, então r é perpendicular ao plano β.

b) resposta pessoal

12. Representando o plano $(HFBD)$ e a diagonal $\overline{AC}$ de forma conveniente, temos:



Sabemos que, se r e t são retas ortogonais, u é paralela à reta t e perpendicular à reta r.

Como $\overline{AC}$ é a diagonal do quadrado $ABCD$, então $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{DB}$ (que é a outra diagonal do quadrado $ABCD$).
Como $\overline{AC} \subset r$ e $\overline{DB} \subset s$, concluímos que $r \perp s$.
Como $r \perp u$ e $r \perp s$, o teorema fundamental do perpendicularismo garante que r é perpendicular ao plano $(HFBD)$.
Logo, $\overline{AC}$ é perpendicular ao plano $(HFBD)$.

13. Como R, T e V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, então:

- $\overline{TV}$ é paralelo a $\overline{AC}$;
- $\overline{TR}$ é paralelo a $\overline{AB}$;
- $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano (RTV).

Como $\overline{PA}$ é perpendicular aos planos α, β e (RTV), temos que esses planos são paralelos entre si.
Logo, o plano (RTV) é paralelo a β.

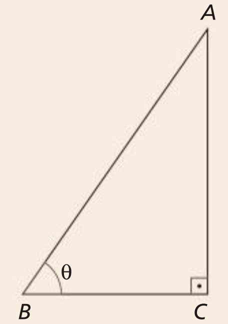
14. **a)** Não, pode resultar em um ponto ou em um segmento de reta.
b) Não, pode resultar em um ponto também.
c) Não, pode resultar em uma reta, em uma semirreta ou em uma parábola.
d) Não, pode resultar em um triângulo ou em um segmento de reta.
e) Sim, quando existe um raio da circunferência tal que sua reta suporte é perpendicular ao plano de projeção.
alternativa e

Comentário: Esse tipo de atividade tem caráter formativo e exige dos alunos um exercício de imaginação. Avaliar a conveniência de passar uma atividade análoga, em formato de gincana ou desafio, para que cada grupo proponha a outro grupo a visualização da projeção ortogonal de três ou quatro formas geométricas em um plano α. Uma variação dessa atividade é cada grupo apresentar uma figura, que seria a projeção de outra, em um plano α, e propor a outro grupo que descubra uma figura geométrica geradora da figura dada em α.

15. **a)** A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ é 2 cm.
b) A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ é 2 cm.
c) A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é igual à distância entre os pontos F e C, podendo ser calculada assim:
$(FC)^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
$FC = \sqrt{29}$
Logo, a distância entre as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é $\sqrt{29}$ cm.
d) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (HGF) é zero, pois $\overleftrightarrow{EF}$ está contida no plano (HGF).
e) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (ABC) é 5 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos E e A.
f) A distância entre os planos (EHD) e (FGC) é 3 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos E e F.
g) Os planos (ABC) e (HGF) são paralelos, e a distância entre eles é $CG = FB = EA = HD = 5$ cm.

16. Consideremos os seguintes semiplanos: E_1 contido no plano (MQK), E_2 contido no plano (MTK), E_3 contido no plano (MRK) e E_4 contido no plano (MPK). Assim, temos os seguintes diedros:
$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$.
Todos os diedros têm origem $\overleftrightarrow{MK}$.

17. Representando a situação, temos:



Queremos determinar a medida do ângulo ABC.
No triângulo ABC, temos:

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB}$$

Como $AB = 2 \cdot (BC)$, temos:

$$\cos\theta = \frac{BC}{2BC} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Logo, o ângulo ABC mede 60°.

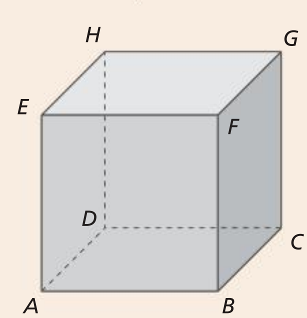
18. **a)** Sim, pois, se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, temos que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem ao plano (ABC), que é perpendicular à aresta do diedro. Portanto, $B\hat{A}C$ é um ângulo plano.
b) Não, pois, de acordo com o enunciado do exercício, não podemos garantir que as medidas dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ são iguais.

Exercícios complementares

1. Se $A \in r$, então só existe uma reta paralela a r, que é a própria reta r.
Se $A \notin r$, pelo postulado P5 (postulado de Euclides), por um ponto A fora da reta r, passa somente uma reta paralela a r.
Portanto, em ambos os casos, existe uma única reta paralela.

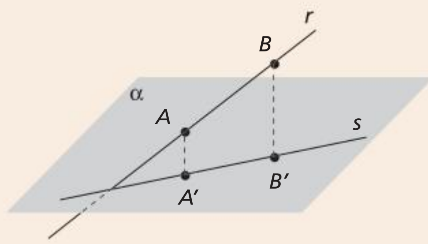
2. **a)** reversas
b) paralelas
c) perpendiculares
d) paralelos
e) perpendiculares
f) perpendiculares

3. A afirmação **a** é falsa, pois os dois planos podem se interceptar.
Como exemplo, consideremos a representação do cubo abaixo.
Nele, a reta $\overleftrightarrow{EH}$ é paralela aos planos (ABC) e (CBF), que se interceptam na reta $\overleftrightarrow{BC}$.

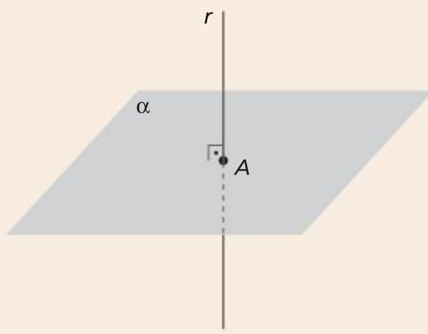


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

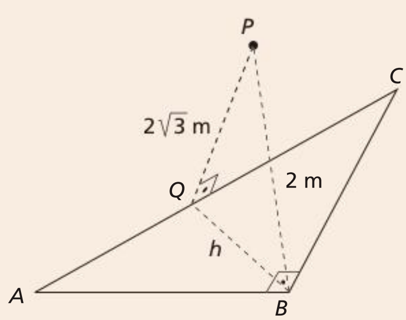
4. • Reta r não perpendicular ao plano α:
A projeção ortogonal é uma reta (s).



• Reta r perpendicular ao plano α, com $r \cap \alpha = \{A\}$:
A projeção ortogonal é um ponto (A).



5. Representando a situação, temos:



Usando h para representar a medida da altura $\overline{BQ}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PQB, obtemos:

$2^2 + h^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$

$h = 2\sqrt{2}$

Logo, a medida da altura h é $2\sqrt{2}$ m.

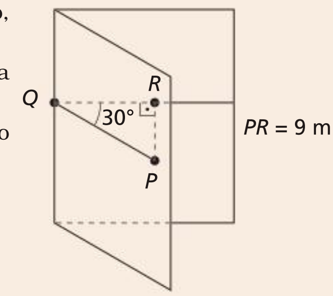
6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser:

- um segmento, se o plano que contém a circunferência é perpendicular ao plano de projeção;
- uma elipse, se o plano da circunferência é concorrente não perpendicular ao plano de projeção;
- uma circunferência congruente, se o plano da circunferência é paralelo ao plano de projeção.

A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

7. Se a reta está contida em um plano, a distância entre a reta e o plano é zero.

8. Representando a situação, temos a figura ao lado. Queremos determinar a distância PQ.
No triângulo retângulo PQR, temos:



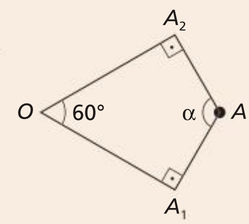
$\text{sen } 30° = \dfrac{PR}{PQ}$

$PQ = \dfrac{PR}{\text{sen } 30°}$

$PQ = \dfrac{9}{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \dfrac{2}{1} = 18$

Logo, esse ponto dista 18 m da aresta do diedro.
Comentário: Esta é uma das muitas questões de Geometria espacial cuja resolução pode ser reduzida à Geometria plana. É importante que os alunos verifiquem a necessidade do uso da Trigonometria para chegar à distância pedida.

9. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

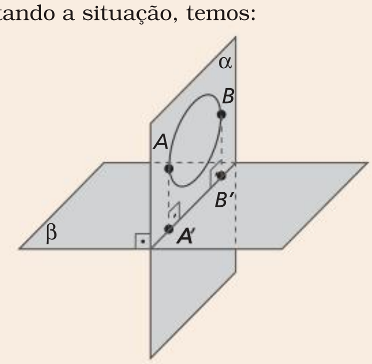


$60° + 90° + 90° + \alpha = 360°$

$\alpha = 120°$

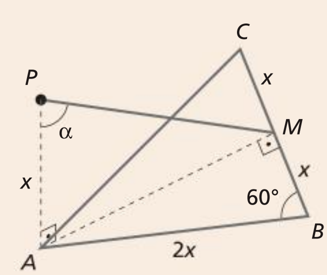
Logo, a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$ é 120°.

10. Representando a situação, temos:



Nesse caso, a projeção ortogonal é um segmento de reta $\overline{A'B'}$ de mesma medida que o diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência.

11. Representando a situação, temos:



Representando AP por x e AB por $2x$, queremos determinar a medida do ângulo α.
Os triângulos ABM e PAM são retângulos.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABM, temos:

$(AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2$

$4x^2 = x^2 + (AM)^2$

$(AM)^2 = 3x^2$

$AM = x\sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

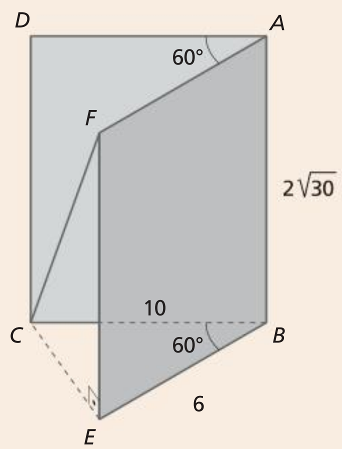
No triângulo retângulo *PAM*, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AM}{PA} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$$

Logo, a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$ é 60°.

Comentário: A resolução dessa atividade exige dos alunos a construção de um "enunciado gráfico", com a transposição do texto para uma figura geométrica. Além disso, trabalha intradisciplinarmente a Geometria plana e a Trigonometria.

12.



Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle CBE$, temos:

$CE^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60°$

$CE^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$

$CE^2 = 76$

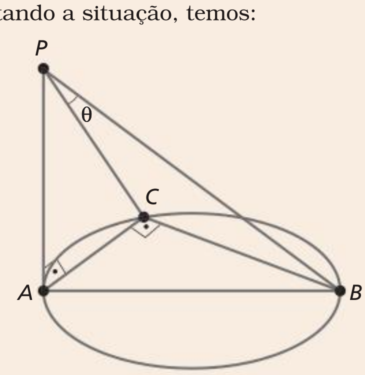
$\overline{EF}$ é perpendicular ao plano (*CBE*), então o $\triangle EFC$ é retângulo em $\hat{E}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$CF^2 = \left(2\sqrt{30}\right)^2 + 76 \Rightarrow CF^2 = 196 \Rightarrow CF = 14$

Logo, a distância entre os vértices *C* e *F* é 14 unidades de comprimento.

13. Representando a situação, temos:



a) Se $C = A$, obtemos $\overline{BC} \equiv \overline{BA}$ e $\overline{PC} \equiv \overline{PA}$.

Como $\overline{PA}$ é perpendicular a $\overline{BA}$, pois $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano da circunferência, obtemos $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{BC}$.

Se $C \not\equiv A$, o ângulo $A\hat{C}B$ é reto, pois o triângulo *ABC* está inscrito em um círculo de diâmetro $\overline{AB}$, e pela propriedade 6 do perpendicularismo podemos afirmar que $\overline{PC}$ é perpendicular a $\overline{BC}$.

Então, as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Se *C* é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos $BC = AC$.

Como $AB = 8$, temos $BC = 4\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(PB)^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow PB = 8\sqrt{2}$

Então:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{BC}{PB} = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = 30°$.

Autoavaliação

1. Retas paralelas e retas reversas não têm nenhum ponto comum.
alternativa c

2. As retas paralelas são coplanares, e as reversas são não coplanares.
alternativa a

3. $r \perp s$ e $s \subset \alpha$
r é ortogonal a t e $t \subset \alpha$
Então, existe uma reta u paralela a t e perpendicular a r e $u \subset \alpha$.
$r \perp t$ e $r \perp u$, então $r \perp \alpha$
alternativa b

4. $\alpha // r$ e $\alpha // s$; então:
- $r // s$ ou
- r é concorrente com s ou
- r é perpendicular a s ou
- r é reversa a s

alternativa b

5. Se a reta r é não perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é uma reta; se a reta r é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r é um ponto.
alternativa d

6. A distância entre *A* e *C* é a diagonal do retângulo *ABCD* de lados *AB* = 4 cm e *CB* = 2 cm.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$

Portanto, a distância entre os pontos *A* e *C* é $2\sqrt{5}$ cm.

alternativa d

7. A distância entre o ponto *A* e o plano (*BCF*) é *AB* = 4 cm.
alternativa b

8. A distância entre o ponto *A* e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é a diagonal *AH* do quadrado *ADEH*.

$AH = 2\sqrt{2}$ cm

alternativa a

9. O ponto *A* pertence ao plano (*DHE*); logo, a distância entre eles é zero.
alternativa d

10. Se o ângulo entre uma reta r e um plano α é nulo, então:
- a reta r está contida em α ($r \cap \alpha = r$) ou
- a reta r é paralela a α ($r \cap \alpha = \varnothing$)

alternativa d

11. A figura representa um diedro.
alternativa c

Capítulo 6

Poliedros

Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos são alguns dos objetivos desse capítulo, que enfoca a análise do prisma e da pirâmide.

O estudo da planificação da superfície de um poliedro e de seus elementos proporciona o trabalho concomitante da Geometria plana (iniciado no capítulo 4, "Superfícies poligonais, círculo e áreas") e da Geometria espacial.

O cálculo de áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros, trabalhado em diversos problemas, possibilita a atribuição de significado aos conceitos estudados.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. O poliedro tem 5 faces; portanto, é um pentaedro.

2. O poliedro tem 7 faces; portanto, é um heptaedro.

3. Analisando o sólido representado, encontramos:
14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

4. **a)** Poliedro não convexo.
O poliedro tem 8 faces quadrangulares e 2 faces octogonais (a da frente e a de trás); então, o número de arestas é dado por: $(8 \cdot 4 + 2 \cdot 8) : 2 = 24$
A cada vértice chegam 3 arestas, e em cada aresta há 2 vértices; então: $V = (24 : 3) \cdot 2 = 16$
Assim, $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$.

b) Poliedro convexo.
O poliedro tem 9 faces: 5 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.
Então, o número de arestas é dado por:
$(5 \cdot 4 + 4 \cdot 3) : 2 = 16$
Aplicando a relação de Euler, obtemos o número de vértices: $V + F - A = 2 \Rightarrow V = 16 - 9 + 2 \Rightarrow V = 9$
Assim, $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$.

5.

Poliedro	V	F	A	$V + F - A = 2$
I	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
II	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$

Logo, os dois poliedros satisfazem a relação de Euler.
Comentário: É interessante mostrar aos alunos que os dois poliedros dados, embora tenham formas bastante diferentes, são octaedros.

6. Sim; temos:
$F = 6 \cdot 3 + 2 = 20$
$A = 3 \cdot 18 = 54$
$V = 2 \cdot 18 = 36$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$V + F - A = 2 \Rightarrow 36 + 20 - 54 = 2 \Rightarrow 2 = 2$
Portanto, o poliedro satisfaz a relação de Euler.

7. Temos um poliedro com 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares e queremos calcular o número de vértices. Assim:
$F = 2 + 5 \Rightarrow F = 7$
$A = \dfrac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} \Rightarrow A = 15$
$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 15 - 7 + 2 \Rightarrow V = 10$
Portanto, o poliedro tem 10 vértices.

8. **a)** O poliedro I é côncavo ou não convexo, pois apresenta reentrâncias.
b) Ambos possuem o mesmo número de faces: $F = 12$
c) Ambos possuem o mesmo número de vértices: $V = 10$
d) Ambos possuem o mesmo número de arestas: $A = 20$
e) $V + F - A = 2$
$10 + 12 - 20 = 2$
Portanto, ambos os poliedros satisfazem a relação de Euler.

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos comparar dois poliedros, um convexo e outro não convexo, os quais têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e o mesmo número de faces, além de verificar a validade da relação de Euler.

9. $A = V + 6$
$V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - (V + 6) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow F = 6 + 2 \Rightarrow F = 8$
Portanto, o número de faces do poliedro é 8.

10. $V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - 2 = A$
$11 + (x + x + 1) - 2 = (3 \cdot x + 4 \cdot x + 5 \cdot 1) : 2$
$2 \cdot (11 + 2x + 1 - 2) = (7x + 5)$
$2 \cdot (2x + 10) = 7x + 5$
$4x + 20 = 7x + 5$
$4x - 7x = 5 - 20$
$-3x = -15$
$x = 5$
Assim, o número de faces é dado por:
$x + x + 1 = 5 + 5 + 1 = 11$

11. $V + F - A = 2 \Rightarrow 10 + F - 20 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow F = 2 + 10 \Rightarrow F = 12$
Sendo x o número de faces triangulares e y o número de faces quadrangulares, temos:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \dfrac{(3x + 4y)}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -36 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases}$$
$$y = 4$$

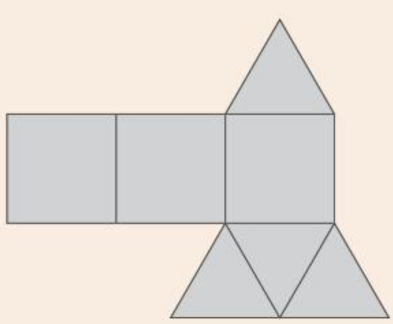
Assim: $x + 4 = 12 \Rightarrow x = 8$

Logo, são 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.
Comentário: Nessa questão, após a aplicação da relação de Euler, é importante que os alunos percebam a necessidade da aplicação de conceitos algébricos adquiridos anteriormente.

12. Pelo enunciado, temos $V = 9$.
Seja n o número de faces triangulares e $(n + 1)$ o número de faces quadrangulares; assim:
$F = n + n + 1 = 2n + 1$
$A = \dfrac{3n + 4(n + 1)}{2}$
Aplicando a relação de Euler, temos:
$V + F - A = 2$
$V + F - 2 = A$
$9 + 2n + 1 - 2 = \dfrac{3n + 4n + 4}{2}$
$18 + 4n - 2 = 7n + 4$
$n = 4$
Assim:
$F = 4 + 5 = 9$
$A = \dfrac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4}{2} = 16$
Portanto, o poliedro tem 4 faces triangulares, 5 faces quadrangulares, totalizando 9 faces, e 16 arestas.

13. Um poliedro regular de faces pentagonais tem 12 faces. Como foram retiradas 3, restaram 9. O poliedro completo tinha $(5 \cdot 12) : 2$ arestas, ou seja, 30 arestas. Como foram retiradas 3, restaram 27. Aplicando a relação de Euler, no poliedro completo, encontramos o número de vértices:
$V = 2 - F + A \Rightarrow V = 2 - 12 + 30 \Rightarrow V = 20$
Como foi retirado 1, restaram 19.
Logo, a superfície poliédrica que restou tem 27 arestas, 9 faces e 19 vértices.
Comentário: É interessante que os alunos sejam levados a concluir que o poliedro regular com faces pentagonais é o dodecaedro.

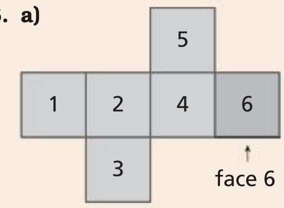
14. a) resposta possível:



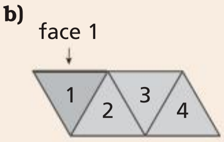
b) resposta pessoal
Espera-se que os alunos elaborem planificações diferentes.

15. $A = \dfrac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$
$F = 8$
$V + F - A = 2$
$V + 8 - 18 = 2 \Rightarrow V = 12$
Portanto, o poliedro tem 18 arestas e 12 vértices.

16. a)



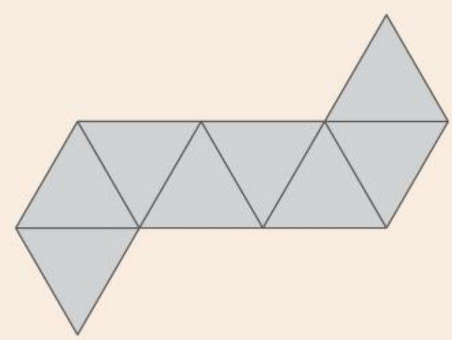
b)



Comentário: Avaliar a conveniência de, na planificação do cubo, propor aos alunos que renumerem as faces de modo que a soma dos números de quaisquer duas faces opostas seja constante. Uma resposta possível é obtida com a troca de lugar dos números 2 e 3 e dos números 4 e 6.

17. Vamos calcular o número de arestas da figura:
$A = \dfrac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 4}{2} = \dfrac{24 + 16}{2} = 20$
$F = 4 + 4 + 4 = 12$
Aplicando a relação de Euler, obtemos:
$V + F - A = 2$
$V + 12 - 20 = 2$
$V = 10$
Assim:
$V + A = 10 + 20 = 30$
Portanto, a soma do número de arestas e do número de vértices da figura é 30.

18. resposta possível:



19. a) Sabemos que $d = a\sqrt{3}$; assim:
$d = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d = 15$
Logo, a diagonal mede 15 cm.

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2} =$
$= \sqrt{\dfrac{36 + 9 + 16}{4}} = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$
Logo, a diagonal mede $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$ cm.

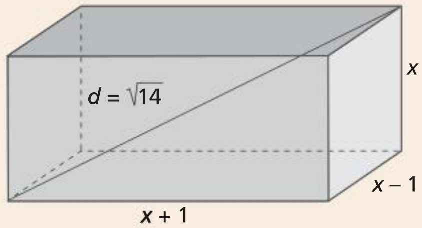
20. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 4^2 + 7^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 65} \Rightarrow 9 \cdot 10 = a^2 + 65 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 90 - 65 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5$
Logo, a vale 5 cm.

21. a) Como $d = x\sqrt{3}$, temos:
$d = x\sqrt{3}$

b) Como $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, temos:
$d = \sqrt{(3t)^2 + t^2 + (2t)^2} \Rightarrow d = t\sqrt{14}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

22. Vamos representar os três números inteiros consecutivos por $x - 1$, x e $x + 1$.



Como $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, temos:

$d^2 = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 + x^2$
$14 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2$
$3x^2 = 12$
$x^2 = 4$
$x = 2$

Portanto, as medidas das três arestas são 1 cm, 2 cm e 3 cm.

Comentário: Avaliar a conveniência de relembrar os alunos da representação prática, $x - 1$, x, $x + 1$, dos elementos de uma PA de razão 1 e pedir a eles que verifiquem a conexão entre os conceitos algébricos e geométricos. É possível também discutir com os alunos que as medidas das arestas podem ser representadas por x, $x + 1$ e $x + 2$.

23. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12} = k \Rightarrow x = 3k,\ y = 4k$ e $z = 12k$

Assim:

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$130 = \sqrt{9k^2 + 16k^2 + 144k^2}$

$130 = \sqrt{169k^2}$

$130 = 13k$
$k = 10$

Então, $x = 30$, $y = 40$ e $z = 120$.

Portanto, as medidas das arestas são 30 cm, 40 cm e 120 cm.

Comentário: Observação análoga à recomendação apresentada no comentário do exercício 22, porém com relação a números diretamente proporcionais.

24. Observe que o $\triangle ABH$ é retângulo em $\hat{B}$.

Logo, $S = \frac{1}{2}b \cdot h$, em que BH e AB podem ser considerados b e h, respectivamente.

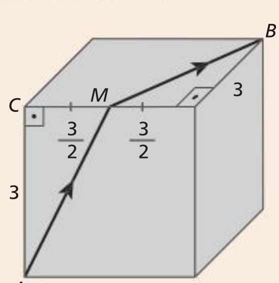
Assim:

$BH = d = 4\sqrt{2}$
$AB = \ell = 4$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$

Portanto, a área do triângulo ABH é $8\sqrt{2}$ cm².

25. a) Considere as medidas apresentadas na figura em centímetro.



$AM = MB$

$AM^2 = CM^2 + AC^2$

$AM^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2$

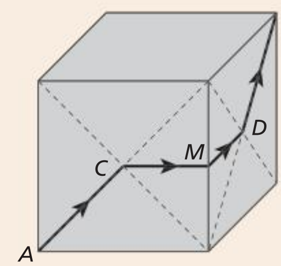
$AM^2 = \frac{45}{4}$

$AM = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$AM + MB = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$

Portanto, a medida do caminho de A a B é $3\sqrt{5}$ cm.

b) Seja d a medida da diagonal de cada face e a a medida da aresta do cubo.



$AC = DB = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$CM = MD = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$

$AC + CM + MD + DB =$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 + 3\sqrt{2}$

Portanto, a medida do caminho de A a B é $3\left(\sqrt{2} + 1\right)$ cm.

26. $AJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal de uma face)

$AE = a = 20$

O $\triangle AEJ$ é retângulo em $\hat{A}$. Assim:

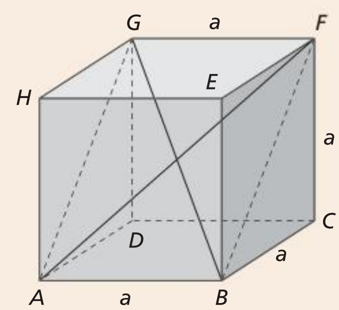
$EJ^2 = AJ^2 + AE^2$

$EJ^2 = \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 20^2$

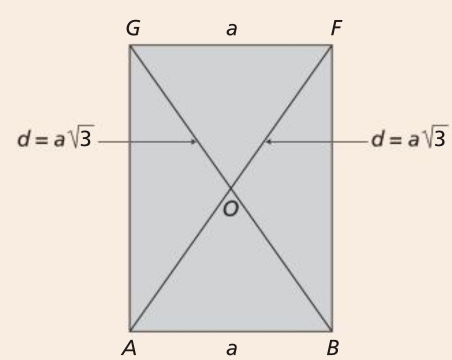
$EJ^2 = 200 + 400$
$EJ^2 = 600$
$EJ = 10\sqrt{6}$

Portanto, o segmento $\overline{EJ}$ mede $10\sqrt{6}$ cm.

27.



O plano que contém as duas diagonais é $ABFG$.



O ponto O divide o segmento $\overline{AF}$ ao meio; então, $OF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Se as diagonais fossem perpendiculares, o $\triangle OGF$ seria retângulo e, portanto, poderíamos aplicar o teorema de Pitágoras. Assim:

$OG^2 + OF^2 = GF^2$

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2$

$2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} = a^2$

$\frac{a^2 \cdot 3}{2} = a^2$ (sentença falsa)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Portanto, o $\triangle OGF$ não é retângulo em O, e as diagonais não se cruzam perpendicularmente.

Comentário: Avaliar a conveniência de a resolução ser feita em grupo. Após fazer o desenho, espera-se que os alunos observem que a questão espacial foi reduzida a um problema de Geometria plana em que é possível aplicar o teorema de Pitágoras.

28. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
alternativa d

Comentário: Questões como essa demandam visão espacial, perspicácia e imaginação, habilidades que favorecem uma proposta de jogo. Pode ser desdobrada em uma atividade em grupo na qual cada aluno, com criatividade, constrói um poliedro ou uma planificação de poliedro com faces ilustradas, diferentes umas das outras. Feito isso, cada um troca sua representação com um colega de outro grupo e verifica quem consegue resolver primeiro a questão. É importante salientar a cooperação na atividade em grupo. Essa sugestão também é válida para a questão 29.

29. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
alternativa b

30. $A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot (ab + ac + bc) =$
$= 2 \cdot (20 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 10 \cdot 15) =$
$= 2 \cdot 650 = 1.300$

Logo, será necessário 1.300 cm² de papelão.

Comentário: Nesse caso, é interessante que os alunos percebam a importância do uso dos poliedros nas produções industriais e nas construções presentes na sociedade em que vive.

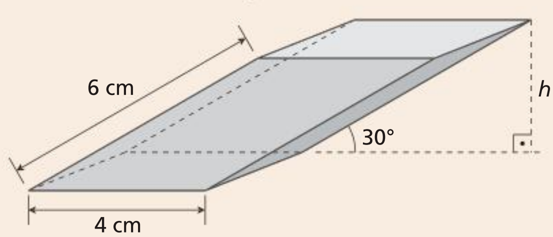
31. a) $A_{base} = \dfrac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

$A_{lateral} = 6 \cdot b \cdot h = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

Logo, a área total é $21\sqrt{3}$ m².

b)



ADILSON SECCO

O prisma tem base quadrada. Assim:

$A_{base} = 4^2 = 16$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{6} \Rightarrow h = 3$

Assim:

$A_{lateral} = 4 \cdot A_{paralelogramo} = 4 \cdot b \cdot h =$
$= 4 \cdot (4 \cdot 3) = 48$

Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 16 + 48 = 80$

Logo, a área total é 80 cm².

Comentário: Aqui os alunos têm a possibilidade de perceber a diferença entre os cálculos das alturas do prisma reto e do prisma oblíquo e a necessidade da aplicação da Trigonometria.

32. Como o maior segmento, cujas extremidades são vértices de um cubo, é a diagonal do cubo, e o menor é a aresta, o cubo de superfície de menor área é o B, porque, tendo diagonal de mesma medida da aresta do A e diagonal de mesma medida da face do C, ele terá menor aresta que os outros e, portanto, a superfície de menor área.

Comentário: De maneira diversificada, essa atividade retoma e propõe aos alunos o mesmo questionamento do boxe **Reflita** da página 111 do livro do aluno.

33. Dados:

$\begin{cases} A_{lateral} = 300 \text{ cm}^2 \\ \text{medida da aresta da base} = \text{medida da aresta lateral} = x \end{cases}$

Assim:

$A_{lateral} = 3 \cdot x \cdot x \Rightarrow 300 = 3x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \sqrt{100} \Rightarrow x = 10$

$A_{base} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 25\sqrt{3} + 300$

$A_{total} = 300 + 50\sqrt{3} = 50\left(6 + \sqrt{3}\right)$

Portanto, a área total é $50\left(6 + \sqrt{3}\right)$ cm².

34. a) Como $A_{total} = 6 \cdot a^2$, temos, em unidades de área:

Cubo I: $A_{total} = 6 \cdot 1^2 = 6$
Cubo II: $A_{total} = 6 \cdot 2^2 = 24$
Cubo III: $A_{total} = 6 \cdot 3^2 = 54$
Cubo IV: $A_{total} = 6 \cdot 4^2 = 96$

b) medida da aresta $= a \Rightarrow A_{total} = 6a^2$
medida da aresta $= 2a \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot 6a^2$
medida da aresta $= 3a \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot (3a)^2 = 9 \cdot 6a^2$

Portanto, quando a medida da aresta dobra, a área total fica multiplicada por 4, ou seja, quadruplica, e, quando a medida da aresta triplica, a área total fica multiplicada por 9.

c) Em um cubo de arestas medindo 2, cabem 8 cubos de aresta unitária, pois: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
Em um cubo de arestas medindo 3, cabem 27 cubos de aresta unitária, pois: $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 27$
Em um cubo de arestas medindo 4, cabem 64 cubos de aresta unitária, pois: $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 64$

35. $A_{base} = \dfrac{(7{,}5 + 10) \cdot 5}{2} = 43{,}75$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 43{,}75 \cdot 32 = 1.400$

Assim:

$1.400 \cdot 10{,}5 = 14.700$

Portanto, a massa da barra será 14.700 g.

Comentário: Além de verificar a importância da aplicação do volume na indústria, os alunos têm a oportunidade de comparar a relação entre medidas de volume e medidas de massa.

36. $A_{total} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow 216 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = \dfrac{216}{6} \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = 6$

$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 6^3 \Rightarrow V_{cubo} = 216$

Logo, o volume do cubo é 216 m³.

37. $A_{\text{base tanque}} = 15 \cdot 20 \Rightarrow A_{\text{base tanque}} = 300$

$V_{\text{peça de metal}} = 300 \cdot 0{,}35 \Rightarrow V_{\text{peça de metal}} = 105$

Logo, o volume da peça de metal é 105 cm^3.

38. $V_{\text{cubo}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 4^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = 64$

$V_{\text{prisma vertical}} = 1^2 \cdot 4 = 4$

$V_{\text{prisma horizontal}} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

$V_{\text{cubo (intersecção dos cubos)}} = 1^3 = 1$

Assim:

$V_{\text{sólido restante}} = 64 - 4 - 4 + 1 = 57$

Portanto, o volume do sólido restante é 57 cm^3.

39. $A_{\text{paralelepípedo}} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{\text{cubo}} = 6x^2$

$A_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{cubo}}$

$2(ab + ac + bc) = 6x^2$

$2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 6x^2$

$15 + 21 + 35 = 3x^2$

$x^2 = \dfrac{71}{3}$

$x = \sqrt{\dfrac{71}{3}}$

Assim:

$d_{\text{cubo}} = x\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{71}$

Portanto, a diagonal do cubo mede $\sqrt{71}$ unidades de comprimento.

40. Sabemos que:

$$\begin{cases} V = a \cdot b \cdot c = 240 & \text{(I)} \\ a \cdot c = 48 \Rightarrow a = \dfrac{48}{c} & \text{(II)} \\ b \cdot c = 30 \Rightarrow b = \dfrac{30}{c} & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$a \cdot b \cdot c = 240 \Rightarrow \dfrac{48}{c} \cdot \dfrac{30}{c} \cdot c = 240 \Rightarrow c = 6$

Assim:

$a = \dfrac{48}{6} = 8$ e $b = \dfrac{30}{6} = 5$

Logo:

$A_{\text{total}} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{\text{total}} = 2 \cdot (8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 5 \cdot 6)$

$A_{\text{total}} = 236$

Portanto, a área total da superfície do paralelepípedo é 236 cm^2.

41. Sabemos que:

$$\begin{cases} h = 8 \\ A_{\text{total}} = 3 \cdot A_{\text{lateral}} \end{cases}$$

Assim:

$3a \cdot \left(2h + a\sqrt{3}\right) = 3 \cdot 6 \cdot a \cdot h$

$3a \cdot \left(2 \cdot 8 + a\sqrt{3}\right) = 18 \cdot a \cdot 8$

$3a \cdot \left(16 + a\sqrt{3}\right) = 144a$

$48a + 3a^2\sqrt{3} - 144a = 0$

$3\sqrt{3}a^2 - 96a = 0$

$3a \cdot \left(\sqrt{3}a - 32\right) = 0$

$a = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

$A_{\text{base}} = \dfrac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = 512\sqrt{3}$

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 512\sqrt{3} \cdot 8 = 4.096\sqrt{3}$

Portanto, o volume do prisma é $4.096\sqrt{3}$ cm^3.

42. Para que a vara seja a maior possível, ela deverá ter o comprimento da diagonal do cubo; assim:

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo, $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ m.

$V_{\text{cubo}} = a^3 = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

Logo, $V_{\text{cubo}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ m^3.

Como 1 dm^3 = 1 ℓ, temos:

$V_{\text{cubo}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}\ m^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{\text{cubo}} = \dfrac{8.000\sqrt{3}}{9}\ dm^3 \Rightarrow V_{\text{cubo}} = \dfrac{8.000\sqrt{3}}{9}\ \ell$

Comentário: Analogamente à questão 35, após a resolução os alunos podem ser levados a uma reflexão sobre a relação entre medidas de volume e medidas de capacidade.

43. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow a = \dfrac{2b}{3} \\ \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} \Rightarrow c = \dfrac{4b}{3} \end{cases}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4\sqrt{29}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 16 \cdot 29 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2b}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\dfrac{4b}{3}\right)^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4b^2}{9} + b^2 + \dfrac{16b^2}{9} = 464 \Rightarrow b = \sqrt{144} \Rightarrow b = 12$

Assim:

$a = \dfrac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow a = 8$ e $c = \dfrac{4 \cdot 12}{3} \Rightarrow c = 16$

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 8 \cdot 16 + 12 \cdot 16)$

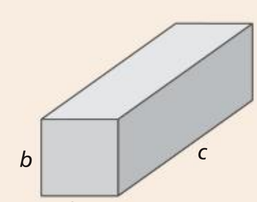
$A_{\text{paralelepípedo}} = 832$

Portanto, a área do paralelepípedo é 832 cm^2.

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 1.536$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 1.536 cm^3.

44. Um cubo de aresta 4 cm é composto de 64 cubinhos com arestas de 1 cm. Consideremos um paralelepípedo de dimensões a, b e c formado por esses 64 cubinhos.



ADILSON SECCO

Os divisores de 64 (possíveis valores de a, b e c) são: 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Como $a \cdot b \cdot c = 64$, há somente 7 paralelepípedos formados pelos 64 cubinhos cujas dimensões e área total são dadas no quadro abaixo.

a	1	1	1	1	2	2	4
b	1	2	4	8	2	4	4
c	64	32	16	8	16	8	4
A_{total}	258	196	168	160	136	112	96

a) O paralelepípedo de menor área tem, portanto, dimensões 4 cm, 4 cm e 4 cm.

b) O paralelepípedo de maior área tem dimensões 1 cm, 1 cm e 64 cm.

45. Como o cubo tem 2 cm de aresta, temos:

a) $V_{cubo} = a^3 = 2^3 = 8$

Assim, $V_{cubo} = 8\ cm^3$.

b) $A_{cubo} = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$

Assim, $A_{cubo} = 24\ cm^2$.

c) $V_{cubo} = a^3$; se dobrar a medida da aresta:

$V_{cubo} = (2a)^3 = 8 \cdot a^3$

Então, o volume fica multiplicado por 8.

d) $A_{cubo} = 6 \cdot a^2$; se dobrar a medida da aresta:

$A_{cubo} = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$

Então, a área fica multiplicada por 4.

Comentário: Avaliar a conveniência de propor uma questão inversa da proposta no item **c**: "O que ocorre com a medida x da aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de outro cubo de aresta a?".

Espera-se que os alunos concluam que $x = a\sqrt[3]{2}$.

Seria, então, interessante comentar com eles que essa questão, sobre a duplicação do cubo, quando proposta para resolução usando régua e compasso, constituiu um dos três problemas mais famosos da história da Matemática, chamado "problema deliano". Diz-se que sua origem remonta à época da morte de Péricles por uma peste que dizimou um quarto da população de Atenas, e que teria sido proposto pelo oráculo de Apolo em Delos a uma delegação de atenienses como uma forma de acabar com o surto da doença. Para mais informações, consultar a obra *História da Matemática*, de Carl B. Boyer. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 64 e 65. Caso seja possível, o professor de História pode ser convidado a participar a fim de tornar a atividade interdisciplinar.

46. Se uma pirâmide tem uma base de 8 vértices, então ela tem 16 arestas, sendo 8 arestas da base e 8 arestas laterais. Ela tem, ainda, 1 vértice fora da base, totalizando 9 vértices. Assim, aplicando a relação de Euler, temos:

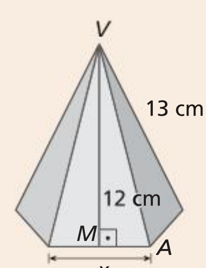
$V + F - A = 2 \Rightarrow 9 + F - 16 = 2 \Rightarrow F = 9$

Logo, essa pirâmide tem 9 faces.

47. Se uma pirâmide tem n faces laterais, então ela tem $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices.

48. Apenas as planificações (I) e (II) são de superfícies de pirâmides.

49. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMV, obtemos:



$13^2 = 12^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 169 = 144 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = 25 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10$

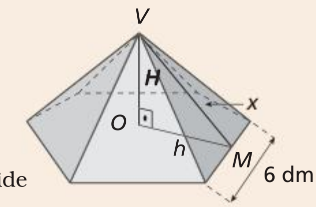
Logo, a aresta da base mede 10 cm.

Comentário: Essa questão pode oferecer aos alunos a oportunidade de retomar as fórmulas dos apótemas dos polígonos e verificar a relação entre arestas e apótemas.

50. Como $H = 4$ dm e $\ell = 6$ dm, temos:

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OVM, temos:



$x^2 = H^2 + h^2$

$x^2 = 16 + \frac{36 \cdot 3}{4}$

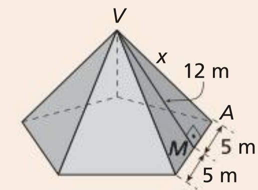
$x^2 = 16 + 27$

$x^2 = 43$

$x = \sqrt{43}$

Logo, o apótema da pirâmide mede $\sqrt{43}$ dm.

51. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMV, temos:



$x^2 = 12^2 + 5^2$

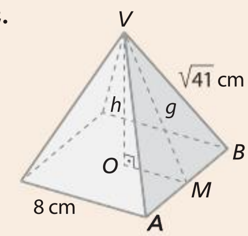
$x^2 = 144 + 25$

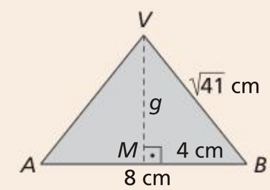
$x^2 = 169$

$x = 13$

Portanto, a aresta lateral da pirâmide mede 13 m.

52.





Aplicando o teorema de Pitágoras:

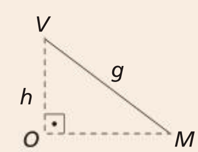
- No triângulo VMB:

$\left(\sqrt{41}\right)^2 = g^2 + 4^2$

$g^2 = 41 - 16$

$g = \sqrt{25}$

$g = 5$



$m = \frac{8}{2} = 4$

- No triângulo VOM:

$g^2 = h^2 + m^2$

$5^2 = h^2 + 4^2$

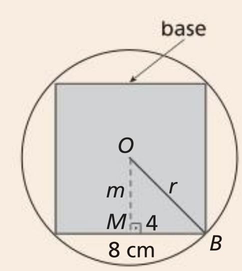
$h = \sqrt{25 - 16} = 3$

- No triângulo OMB:

$r^2 = m^2 + 4^2$

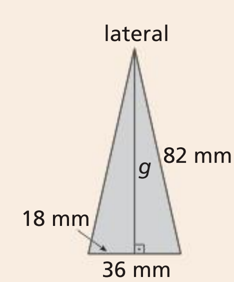
$r = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$r = 4\sqrt{2}$



Assim, $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm.

53. $g^2 = 82^2 - 18^2$



$g^2 = 6.724 - 324$

$g^2 = \sqrt{6.400}$

$g = 80$

$A_{lateral} = 3 \cdot \frac{80 \cdot 36}{2} = 4.320$

$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36^2\sqrt{3}}{4}$

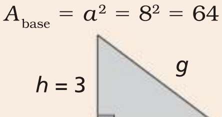
$A_{base} = 324\sqrt{3}$

$A_{total} = 324\sqrt{3} + 4.320$

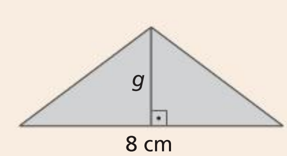
$A_{total} = 108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$

Portanto, a área total da superfície da pirâmide é $108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm².

54. $A_{base} = a^2 = 8^2 = 64$



$m = \frac{8}{2} = 4$

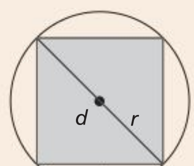


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$g^2 = h^2 + m^2$
$g^2 = 3^2 + 4^2$
$g = \sqrt{9 + 16}$
$g = 5$
$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot g}{2} = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 80$
$A_{\text{total}} = 64 + 80 \Rightarrow A_{\text{total}} = 144$
Logo, a área da base é 64 cm², a área lateral é 80 cm² e a área total é 144 cm².

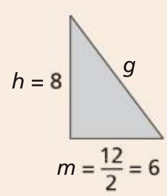
55. Como $A_{\text{total tetraedro}} = 16\sqrt{3}$ cm², temos:
$A_{\text{total tetraedro}} = 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$
Logo, a medida da aresta é 4 cm.

56. Como $r = 6\sqrt{2}$, temos que a diagonal da base mede:
$2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$
Como $d = a\sqrt{2}$, temos:
$12\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 12$
$A_{\text{base}} = a^2 = 12^2 = 144$
A área da base é 144 cm².

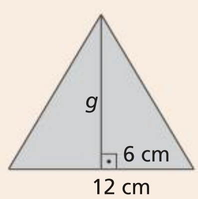


base da pirâmide

$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} \Rightarrow g = 10$



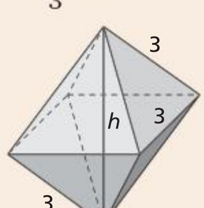
$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \dfrac{12 \cdot g}{2}$
$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \dfrac{12 \cdot 10}{2}$
$A_{\text{lateral}} = 240$
A área lateral é 240 cm².
$A_{\text{total}} = 144 + 240 = 384$
Logo, a área total da superfície é 384 cm².



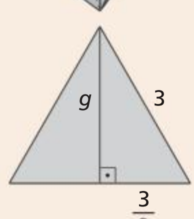
57. $A_{\text{base}} = a^2 = 6^2 = 36$
$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = 48$
Logo, o volume da pirâmide é 48 cm³.

58. $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \dfrac{8\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
Logo, o volume do tetraedro é $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³.

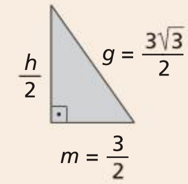
59. $A_{\text{total}} = 8 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$A_{\text{total}} = 8 \cdot \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4}$
$A_{\text{total}} = 18\sqrt{3}$



$3^2 = g^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$
$g^2 = 9 - \dfrac{9}{4}$
$g = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



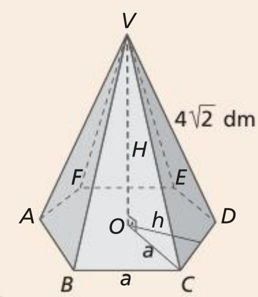
Altura do octaedro:
$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$
$\dfrac{h^2}{4} = \dfrac{27}{4} - \dfrac{9}{4}$
$\dfrac{h}{2} = \sqrt{\dfrac{18}{4}}$
$h = 3\sqrt{2}$



O octaedro é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares. Assim:
$A_{\text{base pirâmide}} = a^2 = 3^2 \Rightarrow A_{\text{base pirâmide}} = 9$
$V_{\text{octaedro}} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
Portanto, a área total da superfície do octaedro é $18\sqrt{3}$ cm² e o volume é $9\sqrt{2}$ cm³.

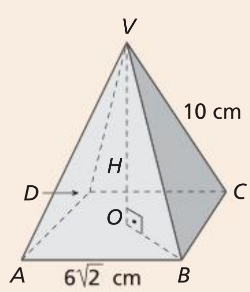
60. $A_{\text{base}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\text{base}} = 9\sqrt{3}$
$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3}$
Portanto, o volume da pirâmide é $24\sqrt{3}$ cm³.

61. $P_{\text{base}} = 24$ dm
$a = \dfrac{24}{6} = 4$
O $\triangle VOC$ é retângulo em O, e seus lados medem H, a e $4\sqrt{2}$ dm.
$VC^2 = OC^2 + H^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 = 4^2 + H^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow H^2 = 16 \Rightarrow H = 4$

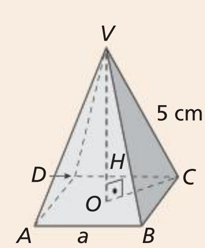


$A_{\text{base}} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{16 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$
$V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}$
Logo, o volume da pirâmide é $32\sqrt{3}$ dm³.

62. O $\triangle OVB$ é retângulo em O. Como OB é a metade da medida da diagonal do quadrado $ABCD$, temos:
$OB = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$
$VB = 10$
$10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$
$A_{\text{base}} = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 36 \cdot 2 = 72$
$V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H =$
$= \dfrac{1}{3} \cdot 72 \cdot 8 = 192$
Portanto, o volume da pirâmide é 192 cm³.



63. $4a = 12\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$
$OC = \dfrac{d}{2} = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3$
Como o $\triangle VOC$ é retângulo em O, temos:
$VC^2 = VO^2 + OC^2$
$25 = H^2 + 3^2$
$H^2 = 16$
$H = 4$
$A_{\text{base}} = a^2 = 18$



$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4$

$V = 24$

Logo, o volume da pirâmide é 24 cm³.

64. **a)** $A_{base} = a^2 = 4^2 = 16$

Logo, a área da base da pirâmide é 16 cm².

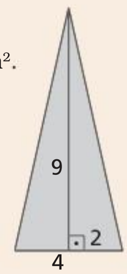
b) $A_{lateral} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 9}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{lateral} = 72$

Logo, a área lateral é 72 cm².

c) $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 16 + 72 = 88$

Logo, a área total da pirâmide é 88 cm².



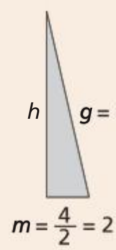
d) $g^2 = h^2 + m^2$

$9^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = 81 - 4$

$h = \sqrt{77}$

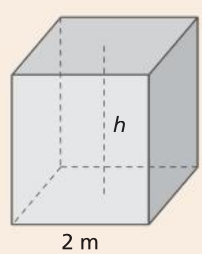
Logo, a altura da pirâmide é $\sqrt{77}$ cm.

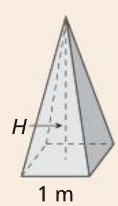


e) $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{pirâmide} = 16\frac{\sqrt{77}}{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³.

65.





$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 2^2 \cdot h$

$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot H}{3} = \frac{1^2 \cdot H}{3}$

$V_{prisma} = V_{pirâmide}$

$4h = \frac{H}{3} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{12}{1}$

A razão entre as alturas do prisma e da pirâmide é, portanto, 1 para 12.

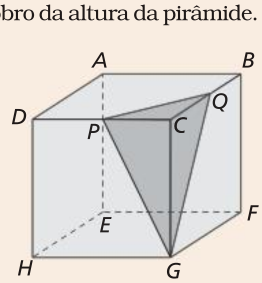
66. $V_{prisma} = 6 \cdot V_{pirâmide}$ e A_{base} iguais.

$A_{base} \cdot h = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H$

$h = 2 \cdot H$

Portanto, a altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. A pirâmide *PQCG* tem um triedro trirretangular em que o triângulo *PQC* pode ser considerado base e $\overline{CG}$ altura da pirâmide.



$A_{base} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$ e

$h = 10$

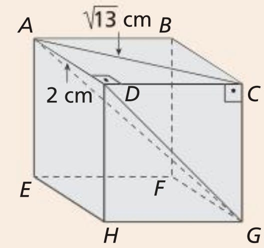
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot 10 = \frac{125}{3}$

Portanto, o volume da pirâmide *PQCG* é $\frac{125}{3}$ cm³.

Comentário: Na resolução dessa questão, espera-se que os alunos percebam a diversidade de conceitos a serem utilizados para chegar ao volume.

68. Temos:



$AC = \sqrt{13}$ cm

$AD = 2$ cm

$CG = 3$ cm

No $\triangle ADC$:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$13 = 2^2 + DC^2$

$DC = 3$

$\overline{CG}$ é perpendicular ao plano que contém o $\triangle ADC$; logo, pode ser considerado altura da pirâmide *ADCG*, com base no triângulo *ADC*.

$A_{base} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ e $h = 3$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 3$

Portanto, o volume da pirâmide *ACDG* é 3 cm³.

69. $V_{prisma} = A_{base} \cdot H$

$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot H}{3}$

$V_{ABCDE} = V_{prisma} - V_{CEFC}$

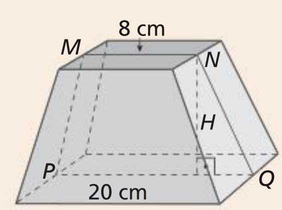
$V_{ABCDE} = A_{base} \cdot H - \frac{A_{base} \cdot H}{3} = \frac{2A_{base} \cdot H}{3}$

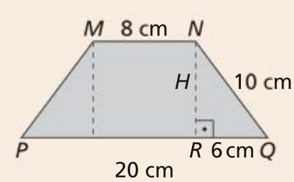
$\frac{V_{ABCDE}}{V_{DEFC}} = \frac{\frac{2}{3}A_{base} \cdot H}{\frac{A_{base} \cdot H}{3}} = \frac{2}{1}$

Portanto, a razão entre os volumes de *ABCDE* e *DEFC* é 2 para 1.

Comentário: Esta é uma forma diversificada de os alunos trabalharem a ideia e confirmarem o fato de que o volume de uma pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma de mesma base e de mesma altura.

70.

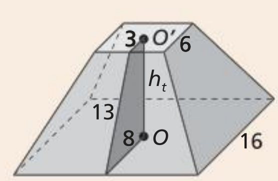


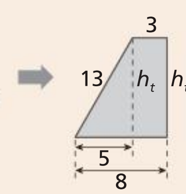


No $\triangle NQR$, temos: $10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$

Logo, a altura do tronco é 8 cm.

71.

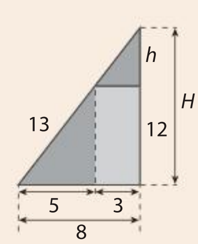




$13^2 = h_t^2 + 5^2 \Rightarrow h_t^2 = 169 - 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_t = \sqrt{144} \Rightarrow h_t = 12$

Os triângulos em destaque são semelhantes; logo:



$\frac{h}{12} = \frac{3}{5} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 12}{5} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$

$H = h_t + h = 12 + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$

Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

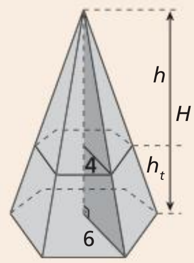
$\Rightarrow V_t = \left(\frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot \frac{96}{5} - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \frac{36}{5}\right) =$

$= \frac{24.576 - 1.296}{15} = 1.552$

Logo, a altura do tronco é 12 cm e o volume é 1.552 cm³.

72. Sabemos que:

$\begin{cases} a_1 = 4 \text{ m} \\ a_2 = 6 \text{ m} \\ V_{\text{tronco}} = 342\sqrt{3} \text{ m}^3 \end{cases}$



$A_b = 6 \cdot \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$

$A_B = 6 \cdot \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$

O volume do tronco é dado por:

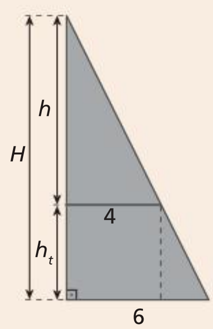
$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 342\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot H - \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 342 \cdot 3 = 54 \cdot H - 24 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot h$ (I)

Pela figura ao lado, temos:



$\frac{h}{H} = \frac{4}{6} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot \frac{2}{3}H \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \frac{1.026}{38} \Rightarrow H = 27$

Assim, $h = 18$.

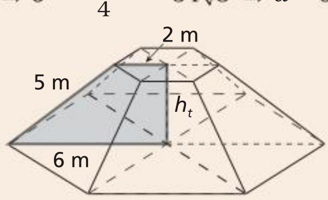
Como $h_t = H - h$, temos:

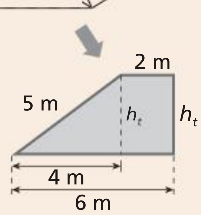
$h_t = 27 - 18 \Rightarrow h_t = 9$

Logo, a altura do tronco é 9 m.

73. $A_b = 6\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

$A_B = 54\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$

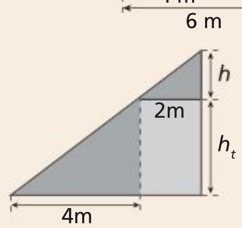




$5^2 = h_t^2 + 4^2$

$h_t = \sqrt{25 - 16}$

$h_t = 3$



Pela figura, temos:

$\frac{h}{h_t} = \frac{2}{4} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot 3}{4} \Rightarrow h = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$H = h_t + h \Rightarrow H = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

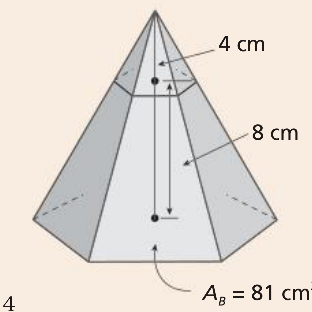
Assim:

$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_t = 78\sqrt{3}$

Portanto, o volume do tronco é $78\sqrt{3}$ m³.

74. $\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_b}{A_B}$



$\left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{A_b}{81}$

$\frac{1}{9} = \frac{A_b}{81}$

$A_b = 9$

$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h$

$V_t = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4$

$V_t = 312$

Logo, o volume do tronco é 312 cm³.

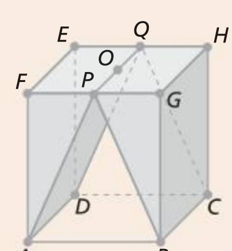
Exercícios complementares

1. Pela figura, observamos 4 faces triângulares, mas a parte de trás é simétrica à parte da frente; então, há mais 4 faces triangulares; portanto, ao todo, temos 8 faces triangulares. Observamos também 3 faces quadradas, 2 nas laterais e 1 na face superior. Como o poliedro é simétrico, temos uma face quadrada na parte inferior e mais duas na parte de trás. Ao todo, há 6 faces quadradas.
alternativa b

2. **a)** não convexo **c)** convexo
b) convexo

3. O número de faces do poliedro é 14 (8 + 6), em que 8 faces são triangulares, então 24 lados (8 · 3), e 6 faces são octogonais, então 48 lados (6 · 8). Assim, o número de arestas é dado por: (24 + 48) : 2 = 36
Aplicando a relação de Euler, temos o número de vértices:
$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 36 - 14 + 2 \Rightarrow V = 24$
Portanto, o poliedro tem 24 vértices.

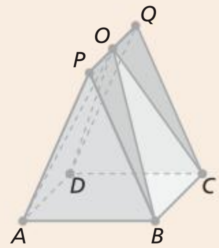
4. Observe a figura abaixo.



Após os cortes, partindo de *O* em direção às retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, obtemos dois prismas triangulares congruentes: *AFPQED* e *BGPQHC*

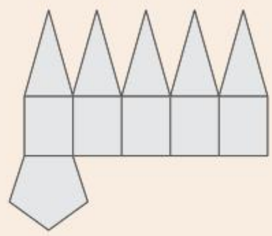
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Agora, com os cortes de O em direção às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, temos:



Formando dois tetraedros congruentes: *ABOP* e *CDOQ*.
Logo, os sólidos descartados são iguais dois a dois.
alternativa e

5. resposta possível:



Comentário: Analogamente às questões 14 e 18 dos exercícios propostos, após o traçado da planificação, compará-lo com os dos colegas, verificando a possibilidade de diferentes planificações.

6. $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{8 \cdot 2}{2} \cdot 5 \Rightarrow V = 40$

Assim, o volume de madeira necessário é 40 cm³.

7. $A_{base} = 25 \cdot 25 = 625$

$A_{lateral} = 4 \cdot 25 \cdot 50 = 5.000$

$A_{base} + A_{lateral} = 625 + 5.000 = 5.625$

Logo, a área a ser forrada é 5.625 cm².

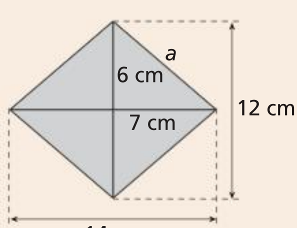
Seja x o menor comprimento de tecido, então:

$x = \dfrac{5.625}{50}$

Portanto, $x = 112{,}5$ cm ou $x = 1.125$ m.

alternativa e

8.



Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = 6^2 + 7^2$

$a = \sqrt{36 + 49} \Rightarrow a = \sqrt{85}$

Assim:

$A_{base} = \dfrac{12 \cdot 14}{2} \Rightarrow A_{base} = 84$

$A_{lateral} = 4 \cdot b \cdot h = 4 \cdot \sqrt{85} \cdot 6 = 24\sqrt{85}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 84 + 24\sqrt{85}$

$A_{total} = 24\left(7 + \sqrt{85}\right)$

Logo, a área total da superfície do paralelepípedo é $24\left(7 + \sqrt{85}\right)$ cm².

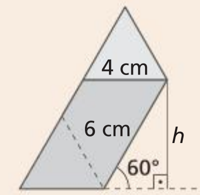
9. $A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{96}{6} \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$

$V_{cubo} = (a + x)^3 = 125 \Rightarrow (4 + x)^3 = 5^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + x = 5 \Rightarrow x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$

Portanto, a aresta deve ser aumentada em 1 m.

10. O prisma tem como base um triângulo equilátero; assim:



$A_{base} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

Cálculo da altura h:

$\text{sen } 60° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

Logo:

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 36$

Portanto, o volume do prisma é 36 cm³.

11. Como $a = 20$, $b = 25$ e $c = 6 \cdot 1{,}5 = 9$, temos:

$A_{papel} = 1{,}2 \cdot 2 \cdot (20 \cdot 25 + 20 \cdot 9 + 25 \cdot 9)$

$A_{papel} = 2{,}4 \cdot (500 + 180 + 225)$

$A_{papel} = 2{,}4 \cdot 905$

$A_{papel} = 2.172$

Logo, o balconista gastará 2.172 cm² de papel.

12. Perímetro da base: 60 m

$\ell = \dfrac{60}{4} \Rightarrow \ell = 15$

$A_{base} = 15^2 = 225$

$V_{reservatório} = A_{base} \cdot h = 225 \cdot 35 = 7.875$

60% de 7.875 = 4.725

Assim: 7.875 − 4.725 = 3.150

Logo, restam 3.150 m³ do reservatório.

13. Sendo S, em centímetro, a soma das dimensões a, b e c do paralelepípedo reto-retângulo, temos:

$S = a + b + c \Rightarrow S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow$

$\Rightarrow S^2 = 21 + 28 \Rightarrow S = 7$

alternativa a

14. $h = 2\sqrt{5}$

$A_{base} = \dfrac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{2} = 10$

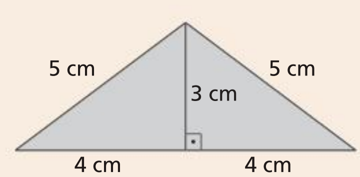
$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{5} = \dfrac{20\sqrt{5}}{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³.

15. O volume do tetraedro é igual ao volume do cubo de aresta 3 menos 4 vezes o volume de um tetraedro trirretângulo, ou seja: $3^3 - 4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9$

alternativa c

16.



$A_B = \dfrac{8 \cdot 3}{2} \Rightarrow A_B = 12$

$\dfrac{A_b}{A_B} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{A_b}{12} = \dfrac{3^2}{9^2} \Rightarrow A_b = \dfrac{4}{3}$

$V_{nova\ pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot 3 = \dfrac{4}{3}$

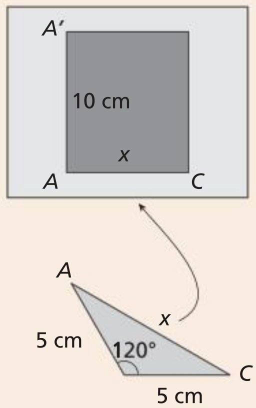
Logo, o volume da nova pirâmide é $\dfrac{4}{3}$ cm³.

17. **a)** $A_{\text{base}} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{5^2\sqrt{3}}{4} = 37{,}5\sqrt{3}$

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 37{,}5\sqrt{3} \cdot 10 = 375\sqrt{3}$

Logo, o volume do prisma é $375\sqrt{3}$ cm³.

b)



$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 50 - 50 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$x^2 = 50 + 25$

$x = \sqrt{75}$

$x = 5\sqrt{3}$

Assim:

Área $= 10 \cdot x = 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$

Logo, a área da secção é $50\sqrt{3}$ cm².

18. $A_{\text{base}} = 96\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{96\sqrt{3} \cdot 4}{6\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{64} \Rightarrow a = 8$

Apótema da base:

$m^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow m = \sqrt{64 - 16} \Rightarrow m = 4\sqrt{3}$

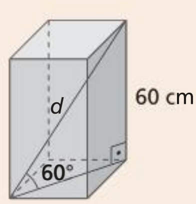
Como $h = m$, temos $h = 4\sqrt{3}$.

Assim:

$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot a \cdot h = 6 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$

Portanto, a área lateral do prisma é $192\sqrt{3}$ cm².

19.



$\text{tg } 60° = \dfrac{60}{d} \Rightarrow d = \dfrac{60}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = 20\sqrt{3}$

Como $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

$20\sqrt{3} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = 10\sqrt{6}$

Assim:

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h = \left(10\sqrt{6}\right)^2 \cdot 60 = 36.000$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 36.000 cm³.

20. Pelo enunciado, temos:

- a, b e c estão em uma PG: $b^2 = a \cdot c$ (I)
- $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
  $a^2 + b^2 + c^2 = 91$ (II)
- $4a + 4b + 4c = 52$
  $a + b + c = 13$ (III)

De (III), temos: $a + c = 13 - b$

Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos:

$(a + c)^2 = (13 - b)^2$

$a^2 + c^2 + 2ac = 13^2 + b^2 - 26b$ (IV)

De (II), temos: $a^2 + c^2 = 91 - b^2$

Substituindo (I) e (II) em (IV), obtemos:

$91 - b^2 + 2ac = 169 + b^2 - 26b$

$91 - b^2 + 2b^2 = 169 + b^2 - 26b$

$26b = 78$

$b = 3$

Assim:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = b^2 \cdot b$

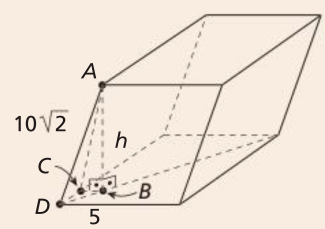
$V = b^3$

$V = 27$

Logo, o volume do sólido é 27 cm³.

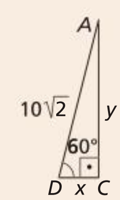
Comentário: Essa questão, assim como a questão 22 dos exercícios propostos com relação à PA, leva os alunos a retomar o conceito de PG e a desenvolver uma resolução algébrica um pouco mais sofisticada que a de questões anteriores.

21.

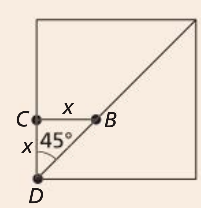


$\text{sen } 60° = \dfrac{y}{10\sqrt{2}} \Rightarrow y = 5\sqrt{6}$

$\cos 60° = \dfrac{x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$



$CD = CB = x = 5\sqrt{2}$

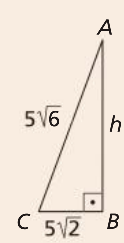


$h^2 = \left(5\sqrt{6}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2$

$h^2 = 150 - 50$

$h^2 = 100$

$h = 10$



Assim:

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h$

$V_{\text{paralelepípedo}} = 5^2 \cdot 10$

$V_{\text{paralelepípedo}} = 250$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 250 cm³.

Autoavaliação

1. Entre as figuras, o poliedro é a figura do item **a**, pois as demais figuras são corpos redondos.
alternativa a

2. 80 faces triangulares: 240 lados $(80 \cdot 3)$
12 faces pentagonais: 60 lados $(12 \cdot 5)$
Logo, o número de arestas é dado por:
$(240 + 60) : 2 = 150$
Assim, como $V + F - A = 2$, temos:
$V + 92 - 150 = 2$
$V = 150 - 92 + 2$
$V = 60$
alternativa b

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

3. $A = \dfrac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = 16$

$F = 4 + 5 = 9$

$V + F - A \neq 2$

$V + 9 - 16 \neq 2$

$V \neq 9$

alternativa d

4. $F = 12$

$A = \dfrac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{2} = 21$

$V + F - A = 2$

$V + 12 - 21 = 2$

$V = 11$

alternativa d

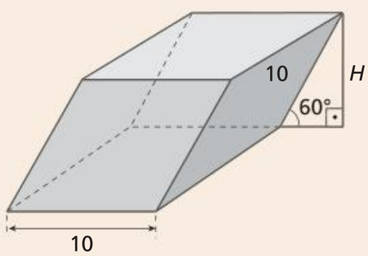
5. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

alternativa c

6.

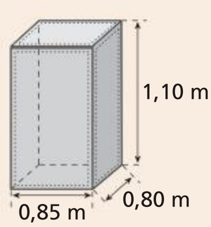


$\text{sen } 60° = \dfrac{H}{10} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{H}{10} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$

$V = A_{\text{base}} \cdot H = 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}$

alternativa c

7.



Se a espessura é 5 cm, devemos tirar 10 cm de cada dimensão externa para calcular o volume. Assim:

$0{,}85\text{ m} - 0{,}1\text{ m} = 0{,}75\text{ m} = 7{,}5\text{ dm}$

$0{,}80\text{ m} - 0{,}1\text{ m} = 0{,}7\text{ m} = 7\text{ dm}$

$1{,}10\text{ m} - 0{,}1\text{ m} = 1{,}0\text{ m} = 10\text{ dm}$

$V = 7{,}5\text{ dm} \cdot 7\text{ dm} \cdot 10\text{ dm} = 525\text{ dm}^3$

Como $1\text{ dm}^3 = 1\ \ell$, temos $525\ \ell$.

alternativa c

8. $A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

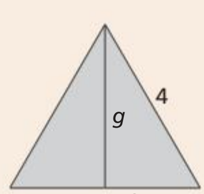
$A_{\text{total}} = 8\sqrt{3}$

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$V_{\text{prisma}} = 3$

alternativa d

9.

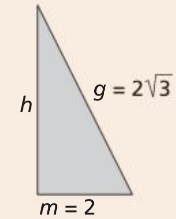


$4^2 = g^2 + 2^2$

$g = \sqrt{16 - 4}$

$g = \sqrt{12}$

$g = 2\sqrt{3}$



$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + 2^2$

$h = \sqrt{12 - 4}$

$h = \sqrt{8}$

$h = 2\sqrt{2}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow V = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

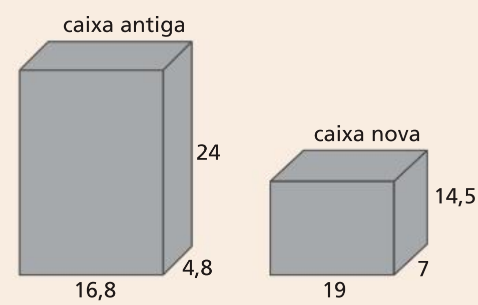
alternativa b

Pesquisa e ação

Essa atividade trabalha conceitos matemáticos de capacidade e área em uma proposta interdisciplinar com Biologia e Geografia, no que se refere à discussão de sustentabilidade, reciclagem e consumo. Com Língua Portuguesa, pode-se fazer uma parceria na construção do texto publicitário. Você, professor, pode incentivar os alunos na criação de embalagens inusitadas, fugindo das mais tradicionais (os paralelepípedos reto-retângulos).

Compreensão de texto

1.



$A_{\text{antiga}} = 2 \cdot (16{,}8 \cdot 4{,}8 + 16{,}8 \cdot 24 + 4{,}8 \cdot 24) = 1.198{,}08$

$V_{\text{antiga}} = 16{,}8 \cdot 4{,}8 \cdot 24 = 1.935{,}36$

$A_{\text{nova}} = 2 \cdot (19 \cdot 7 + 19 \cdot 14{,}5 + 7 \cdot 14{,}5) = 1.020$

$V_{\text{nova}} = 19 \cdot 7 \cdot 14{,}5 = 1.928{,}5$

Caixa antiga: 1.198,08 cm²; 1.935,36 cm³, respectivamente; caixa nova: 1.020 cm²; 1.928,5 cm³, respectivamente. A caixa nova realmente utiliza menos papel-cartão e, apesar de a capacidade ser menor, ela comporta 1 kg de detergente em pó.

2. **a)** 13,89 milhões de metros quadrados

b) Na confecção de cada caixa nova são utilizados 1.020 cm², ou seja, 0,102 m².
Logo: $13.890.000 : 0{,}102 \simeq 136.000.000$
Portanto, poderiam ser produzidas aproximadamente 136 milhões de caixas.

3. Algumas medidas são: embalagens menores com produtos concentrados, venda de produtos em refil, uso de materiais reciclados etc.

4. **a)** Podem ser reciclados papéis, plásticos, vidros e metais.

b) Cooperativas de catadores; indústrias relacionadas ao material que vai ser reciclado; setores da tecnologia.

c) Geração de emprego e de renda por meio da criação de cooperativas de catadores; redução dos gastos das indústrias com a aquisição de matérias-primas; preservação ambiental por meio da redução da exploração de recursos naturais e diminuição das áreas destinadas a aterros sanitários.

5. resposta pessoal

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 7

Corpos redondos

Complementando o estudo dos sólidos geométricos, esse capítulo apresenta os corpos redondos — com destaque para o cilindro, o cone e a esfera — e seus elementos.
Os alunos terão a oportunidade de resolver situações-problema que envolvem o cálculo da área da superfície e o cálculo do volume de corpos redondos.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh$
$A_{\text{secção meridiana}} = 2rh$
$\dfrac{A_{\text{lateral}}}{A_{\text{secção meridiana}}} = \dfrac{2\pi rh}{2rh} = \pi$
Portanto, a razão pedida é igual a π.
Comentário: É interessante que os alunos verifiquem se a razão é válida para todos os cilindros. Podem-se utilizar valores numéricos para fazer uma comparação com os colegas, ou seja, verificar na prática.

2. $A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h) \Rightarrow A_{\text{total}} = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 0{,}5) \Rightarrow A_{\text{total}} = 3\pi$
Portanto, a área total da superfície do comprimido é 3π cm².

3. Cálculo da altura: $h = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$
Assim:
$A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 10\pi) = (100\pi^2 + 50\pi)$
Portanto, a área total da superfície do cilindro é $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm².

4. Sejam A, x e y, respectivamente, a área, a medida da base e a altura da secção meridiana.
Como a base do cilindro tem 2 cm de raio, temos $x = 4$ cm.
Assim: $A = x \cdot y \Rightarrow 20 = 4 \cdot y \Rightarrow y = 5$
Como a altura da secção meridiana é igual à altura do cilindro, temos: $y = h = 5$.
E, portanto:
$A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 5) = 28\pi$
Logo, a área total da superfície do cilindro é 28π cm².

5. Como $h = \dfrac{3}{2} \cdot r$ e $A_{\text{lateral}} = 108\pi$ cm², temos:
$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh \Rightarrow 108\pi = 2\pi \cdot r \cdot \dfrac{3}{2} \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$
$h = \dfrac{3}{2} \cdot r \Rightarrow h = \dfrac{3}{2} \cdot 6 \Rightarrow h = 9$
Logo, a altura é 9 cm, e o raio é 6 cm.

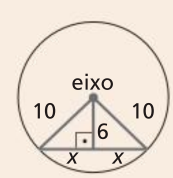
6. Sendo A_1 a área da superfície externa da peça e A_2 a área da superfície interna da peça, temos:
$A_{1_{\text{base}}} = \pi(r_1)^2 = 10^2\pi = 100\pi$
$A_{2_{\text{base}}} = \pi(r_2)^2 = 5^2\pi = 25\pi$
$A_{\text{base da peça}} = 100\pi - 25\pi = 75\pi$
Como são duas bases, temos: $2 \cdot 75\pi = 150\pi$
$A_{1_{\text{lateral}}} = 2\pi r_1 h = 2\pi \cdot 10 \cdot 30 = 600\pi$
$A_{2_{\text{lateral}}} = 2\pi r_2 h = 2\pi \cdot 5 \cdot 30 = 300\pi$
Assim:
$A_{\text{total da peça}} = 150\pi + 600\pi + 300\pi = 1.050\pi$
Logo, a área total da superfície da peça é 1.050π cm².

7. Como $h = 2$ cm, temos:
$\pi(r + 4)^2 h = \pi r^2(h + 4) \Rightarrow 2\pi(r + 4)^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r^2 + 8r + 16) = 3r^2 \Rightarrow r^2 - 4r - 8 = 0$
Assim:
$r = \dfrac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$
Portanto, como $r > 0$, temos $r = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
Logo, o raio da base do cilindro inicial é $\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$ cm.

8. Como o cilindro é equilátero, $h = 2r$.
$A_{\text{total}} = 2A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$
$A_{\text{base}} = \pi r^2$
$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$
Assim:
$A_{\text{total}} = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$
Como $A_{\text{total}} = 24\pi$, temos:
$24\pi = 6\pi r^2 \Rightarrow r = 2$
$h = 2r = 4$
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$
Logo, o volume do cilindro é 16π dm³.

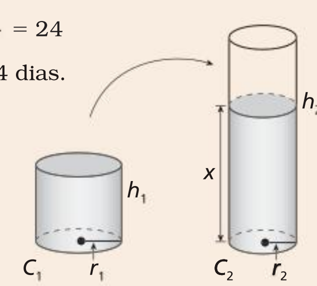
9. $r = 1$ mm
$h = 10$ cm $= 100$ mm
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 100 = 314$
Assim, o volume é 314 mm³.
314 mm³ = 0,314 dm³ = 0,314 mℓ
Logo, cabe 0,314 mℓ de tinta no reservatório da caneta.

10. De acordo com o esquema, temos:
$b_{\text{secção}} = 2x$
$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x = 8$
$A_{\text{secção}} = b_{\text{secção}} \cdot h$
$80 = 16 \cdot h$
$h = 5$
$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi$
Logo, o volume do cilindro é 500π cm³.



11. Como $r = 20$ cm e $h = 60$ cm, temos:
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 60 = 74.400$
Logo, o volume do botijão é 74.400 cm³.
74.400 cm³ = 74,400 dm³ = 74,400 ℓ
Duração do gás: $\dfrac{74{,}400}{3{,}1} = 24$
Portanto, o gás durará 24 dias.

12. Sendo C_1 o cilindro cheio de líquido e C_2 o cilindro para o qual o líquido será transferido, em que x é a altura que o líquido atingirá, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$r_1 = 10$ cm
$h_1 = 40$ cm
$r_2 = 6$ cm
$h_2 = 125$ cm
$V_{\text{cilindro } C_1} = \pi(r_1)^2 h_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 4.000\pi$
$4.000\pi = \pi(r_2)^2 x \Rightarrow 4.000\pi = \pi \cdot 6^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{4.000}{36} \Rightarrow x = \dfrac{1.000}{9}$

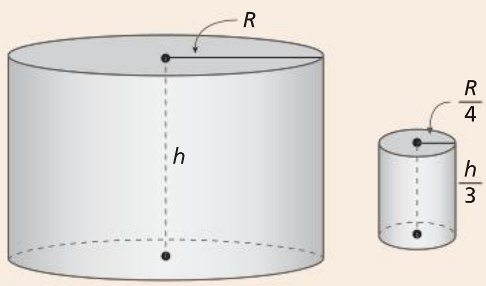
Portanto, o líquido transferido atingirá $\dfrac{1.000}{9}$ cm no cilindro C_2.

h_2 ——— 125 cm
x ——— $\dfrac{1.000}{9}$ cm

$x = \dfrac{1.000 \cdot h_2}{9 \cdot 125} = \dfrac{8}{9} h_2$

Logo, o líquido transferido ocupará $\dfrac{8}{9}$ da altura do novo cilindro.

13. Os cilindros da figura representam os recipientes.



ADILSON SECCO

Considerando V o volume do recipiente maior e v o volume do recipiente menor, temos:
$V = \pi R^2 h$ e $v = \dfrac{\pi R^2}{16} \cdot \dfrac{h}{3} = \dfrac{\pi R^2 h}{48}$
$\dfrac{V}{v} = \dfrac{\pi R^2 h}{\dfrac{\pi R^2 h}{48}} \Rightarrow V = 48v$
Logo, serão necessários 48 recipientes menores.

14. Sendo r o raio da cisterna, V o volume de água consumido e H a altura que a água baixará, temos:
$r = 0{,}5$ m $= 5$ dm
$V = 310\ \ell = 310$ dm³
$V = \pi r^2 H \Rightarrow 310 = 3{,}1 \cdot 5^2 H \Rightarrow 100 = 25H \Rightarrow H = 4$
Logo, o nível de água baixará 4 dm, ou seja, 40 cm.

15. Calculando a área e a capacidade de cada tanque e a relação entre elas, temos:
Tanque I: $A_I = \pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$
$V_I = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$
$\dfrac{A_I}{V_I} = \dfrac{24\pi}{24\pi} = 1$
Tanque II: $A_{II} = \pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$
$V_{II} = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi$
$\dfrac{A_{II}}{V_{II}} = \dfrac{32\pi}{32\pi} = 1$
Tanque III: $A_{III} = \pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi$
$V_{III} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi$
$\dfrac{A_{III}}{V_{III}} = \dfrac{48\pi}{72\pi} = \dfrac{2}{3}$
Logo, o tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade é o III.

alternativa d

16. Sendo α a medida do ângulo central, temos:
$\alpha = \dfrac{2\pi r}{g} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2 \cdot 180° \cdot 10}{60} \Rightarrow \alpha = 60°$

17. $\alpha = \dfrac{2\pi r}{g} \Rightarrow 60° = \dfrac{2 \cdot 180° \cdot r}{g} \Rightarrow$
$\Rightarrow g = \dfrac{360° r}{60°} \Rightarrow g = 6r$
Sendo C o comprimento da circunferência da base e g a medida da geratriz do cone, a razão k é:
$k = \dfrac{C}{g} \Rightarrow k = \dfrac{2\pi r}{6r} \Rightarrow k = \dfrac{\pi}{3}$

18. $\alpha = \dfrac{2\pi r}{g} \Rightarrow 120° = \dfrac{2 \cdot 180° \cdot 10}{g} \Rightarrow$
$\Rightarrow g = \dfrac{3.600°}{120°} \Rightarrow g = 30$
$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 30^2 - 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{800} \Rightarrow h = 20\sqrt{2}$
Logo, a altura do cone é $20\sqrt{2}$ cm.

19. O cone formado por um semicírculo é equilátero. Assim, como $g = 2r$, temos:
$g = 2r \Rightarrow 20 = 2r \Rightarrow r = 10$
Portanto, o cone tem 10 cm de raio.
A secção meridiana é um triângulo equilátero de lado 20 cm. A distância do vértice até a mesa é a altura do triângulo equilátero.
$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$
Logo, a distância do vértice até a mesa será $10\sqrt{3}$ cm.

20. **a)** $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g = \sqrt{225} \Rightarrow g = 15$
$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$
$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 9 \cdot (9 + 15) = 216\pi$
Logo, a área lateral é 135π cm² e a área total é 216π cm².
b) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 26^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \sqrt{100} \Rightarrow r = 10$
$A_{\text{lateral}} = \pi rg = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$
$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi$
Então, a área lateral é 260π cm² e a área total é 360π cm².

21. Supondo que cada chapéu é da forma de um cone reto sem a base, para calcular a quantidade total de papel usado para confeccionar todos os chapéus fazemos: $34 \cdot A_{\text{lateral cone}}$
Sendo $h = 12$ cm e $r = 8$ cm, temos:
$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 8^2 \Rightarrow g = \sqrt{208} \Rightarrow g = 4\sqrt{13}$
Logo:
$34 \cdot A_{\text{lateral}} = 34 \cdot \pi rg = 34 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 4\sqrt{13} = 1.088\pi\sqrt{13}$
Portanto, são necessários $1.088\pi\sqrt{13}$ cm² de papel para fazer todos os chapéus.

22. A altura e o raio do cilindro são iguais à altura e ao raio do cone nele inscrito. Então:
$h_{\text{cone}} = 5$ cm e $r_{\text{cone}} = 2$ cm
$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow g = \sqrt{29}$
Área total da superfície do cone:
$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 2 \cdot \left(2 + \sqrt{29}\right) = 2\pi\left(2 + \sqrt{29}\right)$
Portanto, a área total da superfície do cone é $2\pi\left(2 + \sqrt{29}\right)$ cm².

23. O cone é equilátero com $r = 5$ cm e $g = 10$ cm.

$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{total} = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow A_{total} = 75\pi$

Portanto, a área total da superfície é 75π cm².

24. Como $A_{lateral} = 600\pi$ cm² e $g = 30$ cm, temos:

$A_{lateral} = 600\pi = \pi r g \Rightarrow 600\pi = \pi \cdot r \cdot 30 \Rightarrow r = 20$

Assim:

$A_{total} = \pi r^2 + A_{lateral} = \pi \cdot 20^2 + 600\pi = 1.000\pi$

Portanto, a área total da superfície é 1.000π cm².

25. $\text{tg } 30° = \dfrac{h}{10} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{10} \Rightarrow h = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 10^2 + \left(\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 = 100 + \dfrac{300}{9} \Rightarrow g^2 = \dfrac{1.200}{9} \Rightarrow g = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

$A_{lateral} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot \dfrac{20\sqrt{3}}{3} = \dfrac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

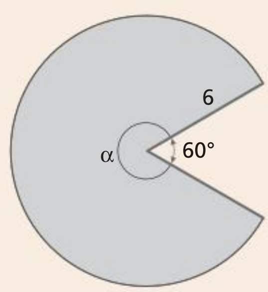
Portanto, a área lateral do cone é $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}\pi$ cm².

26. Vamos determinar o comprimento C deste arco cujo ângulo central α é 300°.

360° —— $2\pi \cdot 6$

300° —— C

$C = \dfrac{300°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6 = 10\pi$



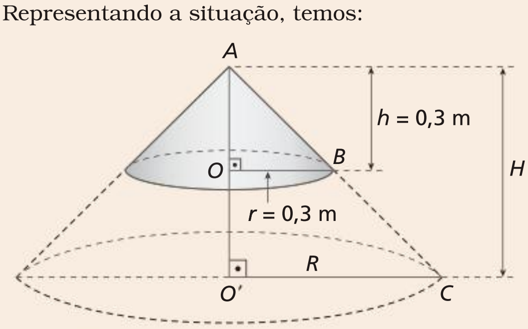
Como o comprimento da circunferência da base é $2\pi r$, temos:

$2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5$

Portanto, o raio da base do cone é 5 cm.

Comentário: Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que desenhem e recortem três setores circulares de mesmo raio e ângulo central medindo α: um com α menor que 180°, outro com α igual a 180° e outro com α maior que 180°. Para cada setor recortado, após unirem os lados do ângulo central, pedir a eles que comparem os respectivos raios r da base do cone com a geratriz g deles. Espera-se que eles percebam que os raios terão, respectivamente, $r < 2g$, $r = 2g$ e $r > 2g$.

27. Representando a situação, temos:



Sendo R o raio da forma circular iluminada pelo lustre:

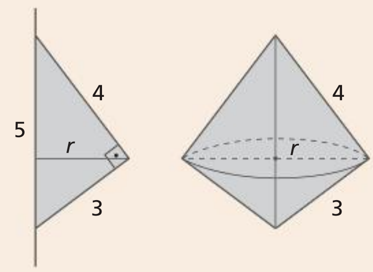
$\pi R^2 = 6{,}25\pi \Rightarrow R = 2{,}5$

Os triângulos AOB e $AO'C$ são semelhantes; então:

$\dfrac{h}{H} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow H = \dfrac{R \cdot h}{r} = \dfrac{2{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}3} \Rightarrow H = 2{,}5$

Logo, o lustre deve ser pendurado a 2,5 m do chão.

28.



$r \cdot 5 = 4 \cdot 3 \Rightarrow r = \dfrac{12}{5}$

A área da superfície do sólido é dada pela soma das áreas laterais de dois cones; assim:

$A_{L_1} = \pi r g_1 = \pi \cdot \dfrac{12}{5} \cdot 4 = \dfrac{48\pi}{5}$

$A_{L_2} = \pi r g_2 = \pi \cdot \dfrac{12}{5} \cdot 3 = \dfrac{36\pi}{5}$

$A = A_{L_1} + A_{L_2}$

$A = \dfrac{48\pi}{5} + \dfrac{36\pi}{5} = \dfrac{84\pi}{5}$

Portanto, a área da superfície do sólido é $\dfrac{84\pi}{5}$ dm².

29. $V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 18\sqrt{2}\pi = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{18\sqrt{2}\pi}{3\pi} \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow g = \sqrt{81} \Rightarrow g = 9$

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 9) = 36\pi$

Portanto, a área total da superfície do cone é 36π cm².

30. O lápis é composto de um cone e um cilindro.

- Cone: raio $r_1 = \dfrac{1}{2}$ cm e altura $h_1 = 1$ cm
- Cilindro: raio $r_2 = \dfrac{1}{2}$ cm e altura $h_2 = 15$ cm

Então:

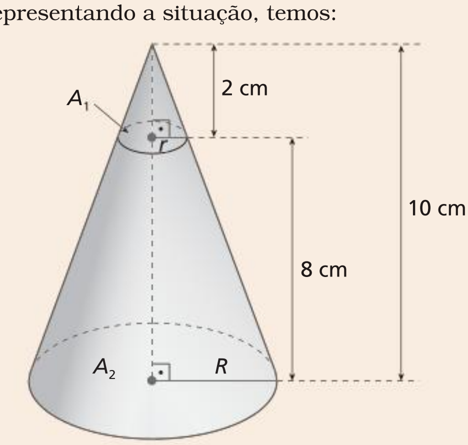
$V_{cone} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r_1)^2 \cdot h_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \dfrac{1}{12}\pi$

$V_{cilindro} = \pi \cdot (r_2)^2 \cdot h_2 = \pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 15 = \dfrac{15}{4}\pi$

$V_{lápis} = V_{cone} + V_{cilindro} = \dfrac{1}{12}\pi + \dfrac{15}{4}\pi = \dfrac{23\pi}{6}$

Portanto, o volume do lápis é $\dfrac{23}{6}\pi$ cm³.

31. Representando a situação, temos:



Para calcular o raio R do cone, temos:

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{10} \Rightarrow R = 5r$ (I)

Sabemos que:

$A_2 = A_1 + 216\pi \Rightarrow \pi R^2 = \pi r^2 + 216\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = r^2 + 216$ (II)

Substituindo R por $5r$ em (II), obtemos:

$25r^2 = r^2 + 216 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

Assim:

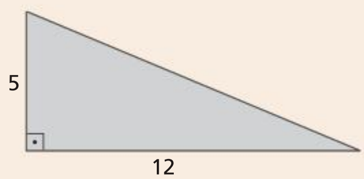
$R = 5 \cdot 3 = 15$

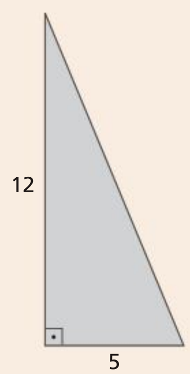
O volume do cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 750\pi$$

Portanto, o volume do cone é 750π cm³.

32. a)





$$V_1 = \frac{1}{3}\pi(r_1)^2 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5$$

Logo, $V_1 = 240\pi$ cm³.

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi(r_2)^2 h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12$$

Logo, $V_2 = 100\pi$ cm³.

Assim:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{240\pi \text{ cm}^3}{100\pi \text{ cm}^3} = \frac{240}{100} = 240\%$$

Portanto, a razão percentual entre V_1 e V_2 é 240%.

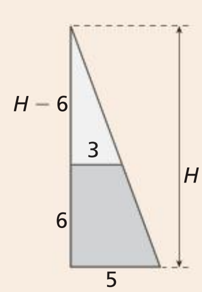
b) Para o triângulo retângulo de catetos que medem x e y, temos: $V_1 = \frac{1}{3}\pi y^2 x$ e $V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

Portanto:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi y^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2 y} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$$

Comentário: Essa é uma questão que pode ser explorada e ampliada pedindo aos alunos que elaborem um quadro em que se represente o cálculo da razão $\frac{V_1}{V_2}$, atribuindo para y os valores $2x$, $3x$, $4x$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ e $\frac{x}{4}$.

33. Observe a figura ao lado.



Considerando a proporção $\frac{H}{5} = \frac{H-6}{3}$, temos

$H = 15$ cm.

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior. Assim:

$V_{tronco} = V_M - V_m$

$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot (15 - 6)$

$V_{tronco} = 125\pi - 27\pi = 98\pi$

Portanto, o volume do tronco de cone é 98π cm³.

34. $A_1 = \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{16} \Rightarrow r = 4$

$A_2 = \pi R^2 = 36\pi \Rightarrow$

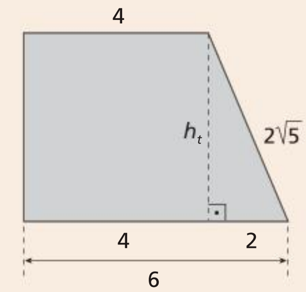
$\Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6$

$g_t = (h_t)^2 + 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(h_t\right)^2 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (h_t)^2 = 20 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_t = \sqrt{16} \Rightarrow h_t = 4$



Considerando que H é a altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção:

$$\frac{H}{6} = \frac{H-4}{34} \Rightarrow H = 12$$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:

$V_{tronco} = V_M - V_m$

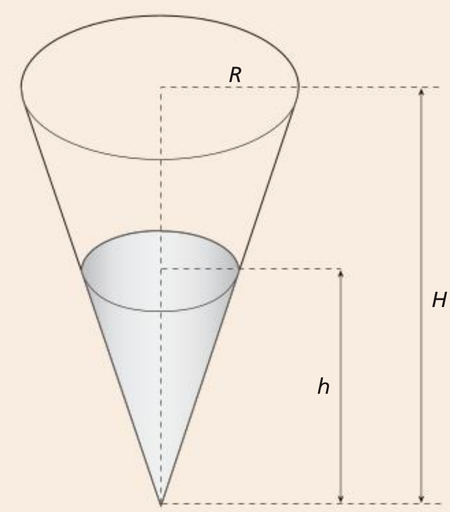
$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8$

$V_{tronco} = 144\pi - \frac{128}{3}\pi$

$V_{tronco} = \frac{304\pi}{3}$

Portanto, o volume do tronco é $\frac{304\pi}{3}$ cm³.

35.



$H = 4R$

Como h é metade de H, temos:

$h = 2R$

Sendo V o volume de água que havia na taça cheia e V' o volume de água que restou na taça, temos:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{4R}{2R}\right)^3$$

$$\frac{V}{V'} = 8$$

$$V' = \frac{V}{8}$$

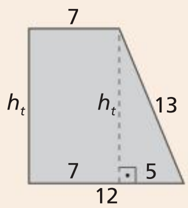
Cálculo do volume da água bebida: $V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8}V$

Portanto, foram bebidos $\frac{7}{8}$ da quantidade de água que havia na taça.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Comentário: É interessante pedir aos alunos uma estimativa do resultado antes de eles resolverem esse exercício. Certamente muitos se mostrarão surpresos com o resultado, o que deverá gerar interesse pela continuidade do estudo desse tema.

36. Para calcular a altura da peça (h_t), temos:



$13^2 = (h_t)^2 + 5^2$

$h_t = \sqrt{144}$

$h_t = 12$

Considerando que H é a altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção:

$$\frac{H}{12} = \frac{H - 12}{7} \Rightarrow H = \frac{144}{5}$$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:

$V_{\text{tronco de cone}} = V_M - V_m$

$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot \frac{84}{5}$

$V_{\text{tronco de cone}} = 1.108\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 12$

$V_{\text{cilindro}} = 588\pi$

Logo:

$V_{\text{peça}} = V_{\text{tronco de cone}} - V_{\text{cilindro}}$

$V_{\text{peça}} = 1.108\pi - 588\pi$

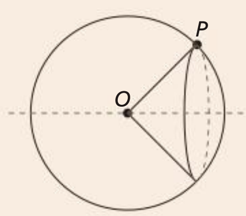
$V_{\text{peça}} = 520\pi$

Portanto, o volume da peça é 520π cm^3.

37. **a)** circunferência

b) superfície lateral de um cone

c) superfície esférica



Comentário: Essa questão é interessante, pois proporciona aos alunos a oportunidade de imaginar a obtenção de formas geométricas por meio da rotação de outros elementos geométricos.

38. $V_{\text{queijo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4.000\pi}{3}$

$V_{\text{cilindro}} = \frac{4.000\pi}{3} \Rightarrow \pi \cdot 10^2 h = \frac{4.000\pi}{3} \Rightarrow h = \frac{40}{3}$

Portanto, a altura da panela é $h = \frac{40}{3}$ cm.

39. Se as superfícies são externas, temos:

$d = r_1 + r_2$

Se uma superfície for interna à outra, teremos dois casos:

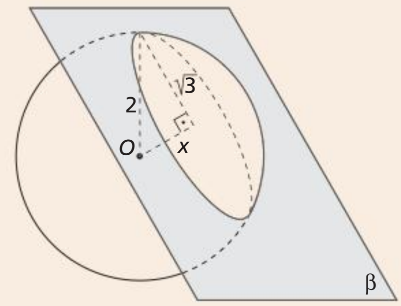
- $r_1 \geqslant r_2 \Rightarrow d = r_1 - r_2$
- $r_2 \geqslant r_1 \Rightarrow d = r_2 - r_1$

Logo, a distância entre O_1 e O_2 é $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$.

40. $(r_1)^2 = 3^2 - 1 \Rightarrow (r_1)^2 = 9 - 1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{8} \Rightarrow r_1 = 2\sqrt{2}$

Portanto, o raio r_1 do círculo é $2\sqrt{2}$ cm.

41.



Assim:

$2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2$

$x^2 = 4 - 3$

$x^2 = 1$

$x = 1$

Logo, a distância entre o plano β e o centro da esfera é 1 cm.

42. **a)** $A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$

Portanto, a área da superfície esférica é 36π cm^2 e o volume da esfera é 36π cm^3.

b) Como a esfera tem 18 cm de diâmetro, temos, $r = 9$ cm. Assim:

$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 324\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 972\pi$

Portanto, a área da superfície esférica é 324π cm^2 e o volume da esfera é 972π cm^3.

43. A altura e o comprimento do paralelepípedo são iguais a $4r$, a largura é igual a $2r$ e r é o raio de cada esfera. Portanto:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 4r \cdot 4r \cdot 2r = 32r^3$

Como o volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3, temos:

$\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

Logo:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 32 \cdot 1^3 \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 32$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 32 cm^3.

Comentário: Pode-se ampliar essa questão pedindo aos alunos que calculem a quantidade mínima de centímetros quadrados de papelão necessária para uma indústria de embalagens fabricar uma caixa que contenha quatro bolas do tamanho dessas esferas.

44. Como $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$, temos:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 45°}{90°} = 18\pi$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 45°}{270°} = 36\pi$

Portanto, a área do fuso esférico é 18π cm^2 e o volume da cunha esférica é 36π cm^3.

45. Cada gomo pode ser considerado uma cunha esférica segundo um ângulo de medida $\frac{360°}{12} = 30°$.

A medida da superfície total de cada gomo é igual à área do círculo da face lateral mais a área do fuso esférico. Assim:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30°}{90°} = \frac{\pi r^2}{3}$

$A_{\text{lateral}} = \pi r^2$

$A_{\text{total}} = \frac{\pi r^2}{3} + \pi r^2 = \frac{4\pi r^2}{3}$

Portanto, a medida da superfície total de cada gomo será $\frac{4\pi r^2}{3}$ unidades de área.

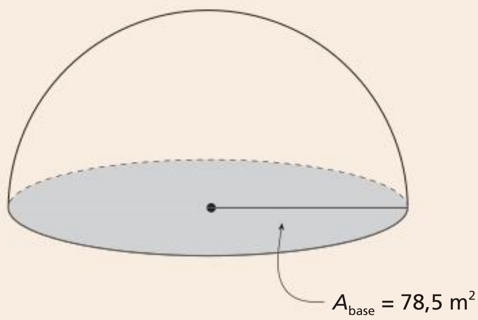
46. $V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°} = \frac{\pi \cdot 1^3 \cdot \alpha}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{3}$

Como a cunha esférica tem 1 m³ de volume, temos:

$1 = \frac{2\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

Assim, o ângulo que determina a cunha esférica mede $\frac{3}{2}$ radiano.

47. A estrutura coberta em forma de um hemisfério é um fuso esférico segundo um ângulo de 180°.



$A_{base} = \pi r^2 = 78{,}5 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 180°}{90°} = 50\pi \simeq 157$

Logo, foram utilizados, aproximadamente, 157 m² de lona na cobertura toda.

48. Vamos determinar o volume de sorvete que cabe em um copinho de acordo com o descrito no enunciado.

$V_{copinho} = \frac{1}{3} A_B h$, em que $A_B = \pi \cdot 2^2$ e $h = 10$

$V_{copinho} = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 \cdot 10 = \frac{40\pi}{3}$

Duas conchas semiesféricas de sorvete equivalem a uma bola esférica de sorvete. Portanto, vamos determinar o volume de uma bola.

$V_{bola} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$

Como $\frac{32\pi}{3} < \frac{40\pi}{3}$, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta.

Exercícios complementares

1. Sendo C_A a circunferência da base do barril A e C_B a circunferência da base do barril B, temos:

$C_A = 2a = 2\pi R$ e $C_B = a = 2\pi r$

Portanto: $R = \frac{a}{\pi}$ e $r = \frac{a}{2\pi}$

Assim:

$V_A = a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{\pi}$

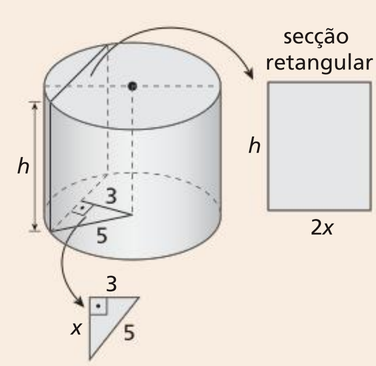
$V_B = 2a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{2\pi}$

Portanto, $V_A = 2V_B$.

alternativa a

Comentário: Avaliar a conveniência de ampliar essa questão substituindo o fator 2 por *k*. Assim, como os barris seriam construídos com chapas retangulares de dimensões *a* e *ka*, espera-se que os alunos concluam que $V_A = k \cdot V_B$.

2.



$x^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow x = 4$

Sendo A_s a área da secção retangular e A_b a área da base do cilindro, temos:

$A_s = A_b \Rightarrow 2x \cdot h = 25\pi \Rightarrow h = \frac{25\pi}{2 \cdot 4} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{25\pi}{8}$

Como $\boldsymbol{h}$ também é a altura do cilindro, temos:

$V = \frac{25}{8}\pi \cdot \pi \cdot 25 \Rightarrow V = \frac{625\pi^2}{8}$

Logo, o volume do cilindro é $\frac{625\pi^2}{8}$ cm³.

3. **a)** Pelo enunciado, temos: $x = 3y$ e $V_{cilindro} = 243$ cm³

Assim:

$243 = x \cdot \pi \cdot y^2 \Rightarrow 243 = 3y \cdot 3 \cdot y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^3 = 243 \Rightarrow y = \sqrt[3]{27} \Rightarrow y = 3$

$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 3 \Rightarrow x = 9$

Logo, $x = 9$ e $y = 3$.

b) Pelo enunciado, temos: $x = y + 10$ e $A_{lateral} = 450$ cm²

Assim:

$450 = x \cdot 2 \cdot 3y \Rightarrow 450 = 6 \cdot (y + 10) \cdot y \Rightarrow$

$\Rightarrow 75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = 5$ ou $y_2 = -15$ (não convém)

$x = y + 10 \Rightarrow x = 5 + 10 = 15$

Logo, $y = 5$ e $x = 15$.

4. $V_{lata} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{lata} = \pi \cdot 4^2 \cdot 19 \Rightarrow V_{lata} \simeq 954{,}6$

Assim, o volume da lata é, aproximadamente, 954,6 cm³.

Então, $V_{lata} \simeq 954{,}6$ mℓ, pois 1 cm³ = 1 mℓ.

$V_{ar} \simeq 954{,}6 - 900 \Rightarrow V_{ar} \simeq 54{,}6$

Portanto, o volume de ar contido na lata é, aproximadamente, 54,6 mℓ.

5. O volume pedido é a diferença entre o volume total e o volume do cone. Assim:

$V_T - V_C = \frac{2}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 2x = \frac{4\pi x^3}{3}$

alternativa b

6. Como $135° = \frac{3\pi}{4}$, temos:

$g = \frac{2\pi \cdot 10}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{80}{3}$

$h^2 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 - 10^2 \Rightarrow h^2 = \frac{6.400 - 900}{9} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{55}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{10\sqrt{55}}{3} \Rightarrow V = \frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$

Portanto, o volume do cone é $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm³.

7. Sendo $\boldsymbol{R}$ o raio do cone maior e $\boldsymbol{r}$ o raio do cone menor, temos a proporção $\frac{20}{R} = \frac{16}{r}$ se $r = R \cdot \frac{16}{20}$. Assim, a relação entre o volume do cone menor e o volume do cone maior (volume total) é:

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$$\frac{V_m}{V_T} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R \cdot \frac{16}{20}\right)^2 \cdot 16}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 20} = \frac{16^3}{20^3} =$$

$$= \left(\frac{16}{20}\right)^3 = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1.000} = 51{,}2\%$$

Portanto, o volume do copo ocupado pela espuma equivale a 48,8% do volume total, aproximadamente 50%.
alternativa c

8. Temos a proporção:

$$\frac{160°}{360°} = \frac{C_{cone}}{C_{setor}} = \frac{2\pi r}{2\pi 18} \Rightarrow r = 18 \cdot \frac{4}{9} = 8$$

Portanto, o raio da base do cone é 8 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela geratriz, pelo raio e pela altura do cone, temos:

$h^2 + 8^2 = 18^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{65} \Rightarrow h \simeq 16$

alternativa d

9. Prolongando a altura e a geratriz do tronco, obtemos dois cones: C_1, que contém o tronco, e C_2, complementar do tronco com relação a C_1. Se H é a altura de C_1 e h é a altura de C_2, temos a proporção:

$$\frac{h}{2} = \frac{H}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H$$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume de C_2 de C_1. Assim:

$$V_{tronco} = V_{C_1} - V_{C_2} = \frac{1}{3} \cdot \pi 3^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi 2^2 \cdot \frac{2}{3}H = \frac{19}{9}\pi H$$

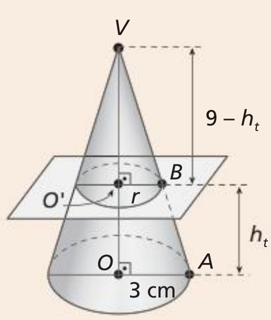
Como $V_{tronco} = 20\pi$, temos:

$$\frac{19}{9}\pi H = 20\pi \Rightarrow H = \frac{180}{19}$$

Portanto: $h_{tronco} = H - \frac{2}{3}H = \frac{1}{3}H = \frac{60}{19}$

Logo, a altura do tronco de cone é $\frac{60}{19}$ m.

10. Pelo enunciado, podemos construir uma figura. Observe:



ADILSON SECCO

Como os triângulos VOA e $VO'B$ são semelhantes, temos:

$$\frac{9 - h_t}{r} = \frac{9}{3} \Rightarrow h_t = 9 - 3r \text{ (I)}$$

Entretanto, devemos ter:

$$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{cone maior}}$$

$$V_{\text{cone maior}} = \frac{3}{2} \cdot V_{\text{tronco de cone}}$$

$$V_{\text{cone menor}} = V_{\text{cone maior}} - V_{\text{tronco de cone}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{cone maior}}$$

$$V_{\text{cone maior}} = 3 \cdot V_{\text{cone menor}}$$

Assim:

$$\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 9 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (9 - h_t)$$

$$h_t = 9 - \frac{27}{r^2} \quad \text{(II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $r = \sqrt[3]{9}$ cm e $h_t = 9 - 3\sqrt[3]{9}$ cm.
Assim, a altura do cone menor, ou seja, a distância do vértice ao plano paralelo à base, é $9 - h_t$, que é igual a $9 - \left(9 - 3\sqrt[3]{9}\right)$, ou seja, $3\sqrt[3]{9}$ cm.

11. $V_{\text{cunha esférica}} = \dfrac{972\pi \cdot 30°}{360°} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = 81\pi$

Assim, o volume da cunha esférica é 81π cm³.

12. $r^2_{\text{secção}} = 17^2 - 8^2 \Rightarrow r_{\text{secção}} = 15$

$A_{\text{secção}} = \pi \cdot 15^2 \Rightarrow A_{\text{secção}} = 225\pi$

Logo, a área da secção é 225π cm².

13. $r^2_{\text{secção}} = 15^2 - 8^2 \Rightarrow r_{\text{secção}} = \sqrt{161}$

$A_{\text{secção}} = \pi r^2_{\text{secção}} = \pi \cdot \left(\sqrt{161}\right)^2$

$A_{\text{secção}} = 161\pi$

Portanto, a área da secção é 161π cm².

14. Considerando que *densidade* · *volume* = *massa*, temos:

$$v = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\left(\frac{10{,}5}{2}\right)^3 + \pi \cdot 0{,}7^2 \cdot 50 = \frac{3.283}{8}\pi$$

Então, calculando o produto $d \cdot v$, temos:

$$m = d \cdot v = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot \frac{3.283}{8}\pi\text{ cm} =$$

$$= 10.060{,}05\text{ g} \simeq 10\text{ kg}$$

alternativa e

15. $V_{\text{cilindro}} = V_{\text{cubo}}$

$\pi r^2 h = 9^3 \quad$ (I)

$A_{\text{lateral cilindro}} = A_{\text{total do cubo}}$

$2\pi r \cdot h = 6 \cdot 9^2 \Rightarrow h = \dfrac{6 \cdot 81}{2\pi r} \quad$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{486}{2\pi r} = 729 \Rightarrow r = \frac{729}{243} \Rightarrow r = 3$$

Logo:

$$h = \frac{486}{6\pi} = \frac{81}{\pi}$$

Assim:

$$A_{\text{total cilindro}} = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{81}{\pi} = (486 + 18\pi)$$

Logo, a área total da superfície é $(486 + 18\pi)$ cm².

16. A PA é: $(\underbrace{h - x}_{\text{raio}},\ \underbrace{h}_{\text{altura}},\ \underbrace{h + x}_{\text{geratriz}})$

$(h + x)^2 = h^2 + (h - x)^2$

$h^2 + 2hx + x^2 = h^2 + h^2 - 2hx + x^2$

$h^2 - 4hx = 0$

$h(h - 4x) = 0$

$h = 4x$ ou $h = 0$ (não convém)

Entretanto, o volume do cone é 12π cm³; então:

$$12\pi = \frac{1}{3}\pi(h - x)^2 \cdot h$$

Substituindo h por $4x$ nessa equação, obtemos:

$36 = (3x)^2 \cdot 4x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

Logo, $h = 4$ cm.

Então, a PA é (3, 4, 5).

17. $V_{\text{tronco}} = \dfrac{\pi h_t}{3}(11^2 + 11 \cdot 2 + 2^2)$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h_t$

Como $V_{\text{tronco}} = V_{\text{cilindro}}$, obtemos:

$$\pi r^2 \cdot h_t = \frac{\pi h_t}{3} \cdot (147) \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$$

Logo, o diâmetro do cilindro é 14 m.

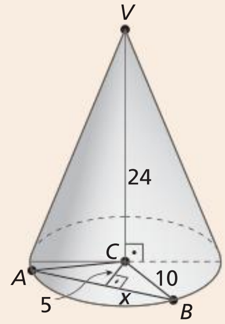
18. O raio *r* da esfera é metade da diagonal *d* do cubo. Assim:

$r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow V_{\text{esfera}} = 32\pi\sqrt{3}$

Portanto, o volume da esfera é $32\pi\sqrt{3}$ m³.

19.



$x^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

$A_{\text{triângulo } ABC} = 25\sqrt{3}$

$V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{triângulo } ABC} \cdot h$

$V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 24$

$V_{\text{tetraedro}} = 200\sqrt{3}$

alternativa a

20. $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4.500\pi$

Assim:

95% de $4.500\pi = \dfrac{95}{100} \cdot 4.500\pi = 4.275\pi$

Logo, o volume de água é 4.275π cm³.

21. $V_{\text{tronco de cone}} = \dfrac{\pi \cdot 6}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 168$

Assim, o volume máximo de líquido que a xícara pode conter é 168 cm³.

alternativa a

22. $V_{\text{pião}} = \dfrac{V_{\text{esfera}}}{2} + V_{\text{cone}}$

$V_{\text{pião}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 + \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$V_{\text{pião}} = \dfrac{32}{3}\pi$

Assim, o volume de cada pião é $\dfrac{32}{3}\pi$ cm³.

23. Vamos determinar os volumes dos dois tipos de taça.

- A taça da figura 1 tem a forma de uma semiesfera; logo:

  $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi 3^3}{2} = 18\pi$

- A taça da figura 2 tem a forma de um cone; assim:

  $\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h = 3\pi h$

Para ter volumes iguais, basta igualar os volumes das taças; então: $18\pi = 3\pi h \Rightarrow h = 6$

alternativa b

24. $V_{\text{fatia}} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \alpha}{360°} = \dfrac{\pi \cdot 25^2 \cdot 30 \cdot 30°}{360°} = 1.562{,}5\pi$

Assim, o volume de cada fatia é $1.562{,}5\pi$ cm³.

Autoavaliação

1. $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 6 = 120\pi$

Assim, a área da superfície lateral do cilindro é 120π cm².

alternativa b

2. No cilindro equilátero, temos $h = 2r$. Assim:

$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} =$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h =$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$

alternativa d

3. $A_{\text{lateral}} = \pi rg$

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g^2 = 225 \Rightarrow g = 15$

$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

Assim, a área da superfície lateral do cone é 135π cm².

alternativa a

4. Como $r = 3 \cdot h$, temos:

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (3h)^2 \cdot h =$

$= \pi \cdot 9h^2 \cdot h = 9\pi h^3$

alternativa a

5. Como $g = 2r$, temos $r = \dfrac{g}{2}$. Assim:

$A_{\text{total}} = \pi r(r + g)$

$A_{\text{total}} = \pi \cdot \dfrac{g}{2} \cdot \left(\dfrac{g}{2} + g\right) = \dfrac{3\pi g^2}{4}$

alternativa b

6. $A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$

alternativa b

7. $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \pi^3 = \dfrac{4}{3}\pi^4$

alternativa a

8. $V_A = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

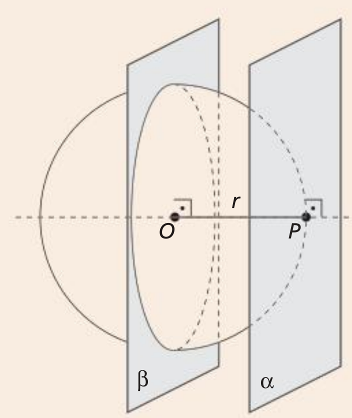
$V_B = \dfrac{1}{3}\pi(2r)^2 h = \dfrac{4\pi r^2 h}{3}$

Assim, $V_B = 4V_A$.

Na embalagem B cabe o quádruplo do conteúdo da embalagem A.

alternativa d

9.



Pela observação da figura, concluímos que a distância entre os planos α e β é *r*.

10. $12 \cdot A_{\text{bola maior}} = x \cdot A_{\text{bola menor}}$

$12 \cdot 4\pi(2r)^2 = x \cdot 4\pi r^2$

$48 \cdot 4\pi r^2 = x \cdot 4\pi r^2$

$x = 48$

Logo, podem-se fazer 48 bolas menores.

alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Capítulo 8

Matrizes e determinantes

Esse capítulo tem por objetivo identificar e classificar uma matriz, realizar operações com matrizes, além de calcular o determinante de uma matriz quadrada.
O estudo de matrizes e determinantes subsidia, entre outras aplicações, a resolução de equações matriciais.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) 1×3 (uma linha e três colunas)
b) 3×1 (três linhas e uma coluna)
c) 2×1 (duas linhas e uma coluna)
d) 2×2 (duas linhas e duas colunas)

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, obtemos:

$a_{11} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
$a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$
$a_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$
$a_{14} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$
$a_{21} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$
$a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$
$a_{23} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$
$a_{24} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$
$a_{31} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$
$a_{32} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$
$a_{33} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15$
$a_{34} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

- Quando $i = j$, temos:
  $b_{11} = 1^2 - 1 = 0$ $b_{22} = 2^2 - 1 = 3$
- Quando $i \neq j$, temos:
  $b_{12} = 3 \cdot 2 = 6$ $b_{31} = 3 \cdot 1 = 3$
  $b_{21} = 3 \cdot 1 = 3$ $b_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

- Para $i = j$, temos:
  $a_{11} = |-6| = 6$; $a_{22} = 7$; $a_{33} = 9$
- Para $i + j = 4$
  $a_{13} = 3$; $a_{22} = 7$; $a_{31} = -7$

5. Resposta possível:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$, observe:

$a_{11} = 1 = 1^1$ $a_{21} = 2 = 2^1$ $a_{31} = 3 = 3^1$
$a_{12} = 1 = 1^2$ $a_{22} = 4 = 2^2$ $a_{32} = 9 = 3^2$
$a_{13} = 1 = 1^3$ $a_{23} = 8 = 2^3$ $a_{33} = 27 = 3^3$
$a_{14} = 1 = 1^4$ $a_{24} = 16 = 2^4$ $a_{34} = 81 = 3^4$

Assim, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$.

Comentário: Avaliar a conveniência de propor um desafio entre duplas de alunos em que um cria, por meio de uma lei de formação, uma matriz para outro descobrir que lei é essa e vice-versa.

6. Não, pois elas não são do mesmo tipo.
A primeira é do tipo 5×1 (matriz coluna) e a segunda é do tipo 1×5 (matriz linha).

Comentário: Uma questão simples, mas que mostra um fato curioso: embora ambas sejam formadas pelos mesmos números, as matrizes dadas são diferentes.

7. Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:

$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ -a + 3b = 8 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3c - 2d = 3 \\ -2c + d = -1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:
$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

8. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = \frac{1}{1} = 1$; $a_{12} = \frac{1}{2}$; $a_{21} = \frac{2}{1} = 2$;

$a_{22} = \frac{2}{2} = 1$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diagonal principal:
$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1^2 = 3$
$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$
$a_{33} = 2 \cdot 3 + 3^2 = 15$

Diagonal secundária:

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3^2 = 11$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1^2 = 7$

Portanto, os elementos 3, 8 e 15 estão na diagonal principal e 11, 8 e 7, na diagonal secundária.

10. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

- Para $i = j$:

$b_{11} = 1 + 1 = 2$

$b_{22} = 2 + 2 = 4$

$b_{33} = 3 + 3 = 6$

$b_{44} = 4 + 4 = 8$

- Para $i \neq j$:

$b_{14} = 1 - 4 = -3$

$b_{23} = 2 - 3 = -1$

$b_{32} = 3 - 2 = 1$

$b_{41} = 4 - 1 = 3$

Calculando o produto dos elementos de cada diagonal, obtemos:

- diagonal principal: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$
- diagonal secundária: $(-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 = 9$

Portanto, a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, é $384 - 9 = 375$.

11. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz quadrada de ordem 2)

Se $\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

- $k^2 = 1 \Rightarrow k = +1$ ou $k = -1$
- $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $-k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $k = 1$

Portanto, o valor de k é 1.

12. $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 16 \\ 9 & 27 & 9 \end{pmatrix}$$

Portanto, o traço da matriz é igual a $1 + 4 + 9 = 14$.

13. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

c) $(A + B) + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Não é possível adicionar essas matrizes, pois elas não são do mesmo tipo.

Comentário: Nessa questão, pode-se pedir aos alunos que aproveitem para testar as propriedades da adição de matrizes.

14. a) $B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A - (B + I_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $B - (A + 0_2) = B - A =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. a) $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. a) c_{22} é elemento da matriz $C = A + B$; logo, pode ser representado por $c_{22} = a_{22} + b_{22}$. Calculando os elementos a_{22} e b_{22}, temos:

$a_{22} = 2^2 + 2^2 = 8$ e $b_{22} = 3 \cdot 2 = 6$

Assim: $c_{22} = 8 + 6 = 14$

Espera-se que os alunos percebam que não é necessário determinar todos os elementos das matrizes A e B, pois c_{22} indica a soma dos elementos a_{22} e b_{22}.

b) Não existe, pois, para qualquer elemento da matriz A, $a_{ij} \geqslant 2$ e, para qualquer elemento da matriz B, $b_{ij} \geqslant 3$. Portanto, qualquer elemento da matriz $C = A + B$ é tal que $c_{ij} \geqslant 5$.

Caso os alunos apresentem dúvidas, pode-se construir as matrizes A e B por meio da lei de formação de cada uma e, em seguida, calcular a soma das matrizes. Assim, eles poderão verificar que qualquer elemento da matriz C é maior ou igual a 5.

Comentário: Nessa questão, é interessante que os alunos percebam a possibilidade de encontrar separadamente os elementos pedidos e efetuar as somas sem a necessidade de construir as matrizes em questão.

17. a) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \cdot (A + B) = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right] =$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix}$

d) $2 \cdot A - (B + C) =$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

e) $2 \cdot (A - C) + 3 \cdot (B - A) =$

$$= 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] + 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

f) $B + C - 2 \cdot I_2 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

18. A única igualdade matricial falsa é a apresentada no item **d**, pois $6 \cdot (A + B) \neq 6A + B$.

Vejamos: $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + 6 \cdot B$

Caso os alunos apresentem dúvidas, pode-se exemplificar criando as matrizes A e B e mostrando que $6 \cdot (A + B) \neq 6 \cdot A + B$.

Sugestão: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$6 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] \neq 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

19. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + \cancel{2Y} = \cancel{2A} - 2B \\ -3X - \cancel{2Y} = -\cancel{2A} + B \end{cases}$$

$$X = -B$$

Como $2X + Y = A - B$, então:

$2 \cdot (-B) + Y = A - B \Rightarrow Y = A + B$

Assim: $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

20. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 12 & 0 + 4 \\ 1 - 6 & 0 + 2 \\ 0 + 3 & 0 - 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ não é possível

Espera-se que os alunos percebam que o número de colunas da matriz B é diferente do número de linhas da matriz A; logo, não é possível calcular o produto $B \cdot A$.

c) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 2 - 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -20 + (-4) \\ -10 + (-2) \\ 6 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

e) $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 0 \\ -6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 28 \\ 2 - 14 \\ 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

21. $\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 - 3y \\ 2x - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -6 - 3y = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{7}{3} \\ 2x - 6 = -5 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto: $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{7}{3}$

22. Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$A \cdot X + B + (-B) = C + (-B) \Rightarrow A \cdot X = C - B$

Calculando $C - B$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Então: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot X_{m \times n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz que a multiplica tem duas colunas;
- a matriz X ter uma coluna, pois o produto das matrizes tem uma coluna.

Portanto:

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Resolvendo a equação $A \cdot X = C - B$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ 3a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -b = -8 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = 8 \text{ e } a = -3$$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

23. $X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois o produto das matrizes tem duas linhas;
- a matriz X ter duas colunas, pois a matriz que a multiplica tem duas linhas.

Portanto: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Teremos, então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a + 5b & 2a + b \\ 3c + 5d & 2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes e resolvendo os sistemas, obtemos:

- $\begin{cases} 3a + 5b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$
- $\begin{cases} 3c + 5d = 5 \\ 2c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ e } d = 1$

Logo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observando a matriz X obtida, podemos concluir que é a matriz identidade.

Espera-se que os alunos percebam que a matriz identidade é a matriz tal que $X \cdot A = A$, ou seja, é o elemento neutro na multiplicação de matrizes.

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos a percepção de que a matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação entre as matrizes.

24. Resposta possível:

Vamos supor que $A = (4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A \cdot I_1 = (4) \cdot (1) = (4)$

$$B \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Os produtos obtidos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

Espera-se que os alunos percebam que o produto de qualquer matriz pela matriz identidade (I), em qualquer ordem, é a própria matriz.

Comentário: Pode-se testar se o objetivo dessa questão foi atingido pedindo aos alunos que, sem efetuar a multiplicação, obtenham os produtos $M \cdot I_2$ e $I_2 \cdot M$, em que a matriz M tem ordem 2 e $m_{11} = x$, $m_{12} = y$, $m_{21} = z$ e $m_{22} = w$.

25. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 200 \\ 3 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 200 \\ 1 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 6 \cdot 200 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.850 \\ 2.150 \\ 1.800 \end{pmatrix}$$

A gráfica que apresentou o menor custo foi a C.

b) $(0{,}25 \;\; 0{,}45 \;\; 0{,}30) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2{,}15 \;\; 2{,}70 \;\; 4{,}60)$

O custo unitário médio que a agência teve em cada tipo de impressão foi de: PB R\$ 2,15, CK R\$ 2,70 e CKX R\$ 4,60.

26. a) $\det A = |2| = 2$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5$

c) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & -8 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$\det C = -12 - (-3 - 8) = -1$

27. a) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$(8 + 0 + 0) - (8 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

b) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{cccccc} & a & 0 & a & a & 0 \\ & 0 & c & 0 & 0 & c \\ & b & 0 & b & b & 0 \\ abc & 0 & 0 & abc & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$(acb) - (acb) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

28. $\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3$

$\begin{vmatrix}5&3\\8&2\end{vmatrix} = 5\cdot 2 - 3\cdot 8 = -14$

$\begin{vmatrix}7&2\\5&1\end{vmatrix} = 7\cdot 1 - 2\cdot 5 = -3$

Então:

$\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5&3\\8&2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}7&2\\5&1\end{vmatrix} = 3 + (-14) - (-3) = -8$

29. a) $A\cdot B = \begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&4\\-1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&10\\-4&-20\end{pmatrix}$

Então:

$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix}1&10\\-4&-20\end{vmatrix} =$

$= 1\cdot(-20) - 10\cdot(-4) = 20$

b) $B\cdot A = \begin{pmatrix}0&4\\-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12&16\\4&-7\end{pmatrix}$

Então:

$\det(B\cdot A) = \begin{vmatrix}-12&16\\4&-7\end{vmatrix} =$

$= (-7)\cdot(-12) - 16\cdot 4 = 20$

c) $\det A = \begin{vmatrix}2&-1\\-3&4\end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-1)\cdot(-3) = 5$

$\det B = \begin{vmatrix}0&4\\-1&-2\end{vmatrix} = 0 - 4\cdot(-1) = 4$

Então: $\det A\cdot\det B = 5\cdot 4 = 20$

30. a) $A + B = \begin{pmatrix}-1&3\\7&4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&1\\-3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\4&4\end{pmatrix}$

Então: $\det(A+B) = \begin{vmatrix}1&4\\4&4\end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 4\cdot 4 = -12$

b) $A = \begin{bmatrix}-1&3\\7&4\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix}-1&3\\7&4\end{vmatrix} =$

$= -1\cdot 4 - 3\cdot 7 = -25$

Então: $3\cdot\det A = 3\cdot(-25) = -75$

c) $3\cdot A = 3\cdot\begin{pmatrix}-1&3\\7&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&9\\21&12\end{pmatrix}$

Então:

$\det 3A = \begin{vmatrix}-3&9\\21&12\end{vmatrix} = -3\cdot(12) - 9\cdot 21 = -225$

d) $\det A + \det B = \begin{vmatrix}-1&3\\7&4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&1\\-3&0\end{vmatrix} =$

$= -1\cdot 4 - 3\cdot 7 + 0 - 1\cdot(-3) = -22$

31. a) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 0&0&0&0&0\\ a&b&c&a&b\\ d&e&f&d&e \end{array}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 0$

Assim, obtemos:

$0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0, pois uma matriz com uma linha de zeros tem determinante igual a zero.

b) • Caso em que uma linha é "o dobro de outra linha":

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a&b&c&a&b\\ 2a&2b&2c&2a&2b\\ d&e&f&d&e \end{array}$$

$2bcd \quad 2ace \quad 2abf \qquad 2abf \quad 2bcd \quad 2ace$

Assim, obtemos:

$(2abf + 2bcd + 2ace) - (2bcd + 2ace + 2abf) = 0$

Logo, uma matriz em que uma linha é o "dobro de outra linha" tem determinante igual a zero.

• Caso em que uma linha é "o triplo de outra linha":

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a&b&c&a&b\\ 3a&3b&3c&3a&3b\\ d&e&f&d&e \end{array}$$

$3bcd \quad 3ace \quad 3abf \qquad 3abf \quad 3bcd \quad 3ace$

Assim, obtemos:

$(3abf + 3bcd + 3ace) - (3bcd + 3ace + 3abf) = 0$

Então, uma matriz em que uma linha é o "triplo de outra linha" tem determinante igual a zero.

c) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix}3a&3b\\c&d\end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3\cdot(ad - bc)$

$\begin{vmatrix}a&3b\\c&3d\end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3\cdot(ad - bc)$

Portanto, se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma fila triplicada, seu valor triplica.

d) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix} = ad - bc$

Logo, o determinante de uma matriz de ordem 2 é igual ao da matriz obtida dessa, trocando-se as linhas por colunas.

e) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

$\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

Então, os determinantes que têm linhas ou colunas permutadas são opostos.

f) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a&0&0&a&0\\ 0&b&0&0&b\\ 0&0&c&0&0 \end{array}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \qquad abc \quad 0 \quad 0$

Assim, obtemos:

$(abc + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = abc$

Portanto, o determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Comentário: Essa é uma questão importante para validar a estratégia de promover a oportunidade de os alunos descobrirem por si, ou em grupo, certas propriedades dos determinantes.

32. $\det I_1 = |1| = 1$ $\qquad \det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

Assim, obtemos:

$\det I_3 = (1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1$

O determinante de I_4 deve ser 1.

Espera-se que os alunos percebam que o determinante da matriz identidade é sempre 1.

Comentário: Após a resolução da questão, que é uma ampliação do exercício **31**, conduzir os alunos à dedução de que o determinante da matriz identidade será sempre 1.

Exercícios complementares

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, temos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0 \qquad b_{11} = \dfrac{3 \cdot (1-1)}{1+1} = 0$

$a_{12} = 1 - 2 = -1 \qquad b_{12} = \dfrac{3 \cdot (1-2)}{1+2} = -1$

$a_{21} = 2 - 1 = 1 \qquad b_{21} = \dfrac{3 \cdot (2-1)}{2+1} = 1$

$a_{22} = 2 - 2 = 0 \qquad b_{22} = \dfrac{3 \cdot (2-2)}{2+2} = 0$

Portanto: $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, temos:

$a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{11} = 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2$

$a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{12} = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1$

$a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{13} = 2 \cdot 1 - 3 + 1 = 0$

$a_{21} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{21} = 2 \cdot 2 - 1 + 1 = 4$

$a_{22} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{22} = 2 \cdot 2 - 2 + 1 = 3$

$a_{23} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{23} = 2 \cdot 2 - 3 + 1 = 2$

$a_{31} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{31} = 2 \cdot 3 - 1 + 1 = 6$

$a_{32} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{32} = 2 \cdot 3 - 2 + 1 = 5$

$a_{33} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{33} = 2 \cdot 3 - 3 + 1 = 4$

Agora, vamos calcular: $X = 2 \cdot A - 3 \cdot B$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. Com base na tabela I, podemos construir a matriz A tal que:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

E, pela tabela II, podemos construir a matriz B tal que:

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculando $A \cdot B$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz C, devemos observar que a ordem desejada é:

$C = \begin{bmatrix} \text{Noruega} \\ \text{Marrocos} \\ \text{Escócia} \\ \text{Brasil} \end{bmatrix}$

Portanto: $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

alternativa c

4. **a)** Errado, pois a quantidade de produto do tipo P_2 vendido pela loja L_2 é 10 (2ª linha e 2ª coluna).

b) Errado, pois a quantidade de produto do tipo P_1 vendido pela loja L_3 é 20 (1ª linha e 3ª coluna).

c) Errado, pois a soma das quantidades de produtos P_3 vendidos pelas três lojas é 39 (12 + 16 + 11).

d) Errado, pois a soma das quantidades de produtos P_i vendidos por L_i, com $i = 1, 2, 3, \ldots$, é 141 (30 + 19 + 20 + 15 + 10 + 8 + 12 + 16 + 11).

e) Correto.

alternativa e

5. Temos:

$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

a) $H_{3\times 2}$, $S_{2\times 5}$ e $(H \cdot S)_{3\times 5}$

b) $H \cdot S = \begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$

O produto nos dá o total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

c) Na segunda-feira são produzidos 62 itens B e na quinta-feira são produzidos 27 itens C.

6. a) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} x & 3 & x & x & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & x & 1 & 2 \end{array}$$
$$4x \quad 2x \quad 6x \qquad 4x^2 \quad 3 \quad 4x$$

Assim, obtemos:

$(4x^2 + 3 + 4x) - (4x + 2x + 6x) = 5$

Portanto:

$4x^2 - 8x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 - \sqrt{6}}{2}$ ou $x = \dfrac{2 + \sqrt{6}}{2}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ x & 2 & 4 & x & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$
$$4 \quad 0 \quad -3x \qquad 0 \quad 12 \quad 2x$$

Assim, obtemos:

$(12 + 2x) - (4 - 3x) = 5x + 8$

Calculando o segundo determinante:

$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3x) - (-1) \cdot 0 = 6x$

Assim:

$(5x + 8) - (6x) = 6 \Rightarrow x = 2$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$

Calculando $(\det A)^n$ como um número inteiro positivo, temos:

$(\det A)^n = 1^n = 1$

8. $A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 1 & 3y + 5 \\ 2x + \frac{2}{3} & 2y + \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$\begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ 3y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ e $y = -\dfrac{5}{3}$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

9. a) Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$X - 3B + (+3B) = I_3 + (3B) \Rightarrow X = I_3 + 3B$

Então:

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) Temos $X = I_3 + 3B$, então:

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

10. a) medida da base: $5 - 1 = 4$

medida da altura: $4 - 1 = 3$

$A_{ABC} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$

Portanto, a área é 6 unidades de área.

b) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$
$$2 \quad 4 \quad 5 \qquad 1 \quad 2 \quad 20$$

Assim, temos:

$D = (1 + 2 + 20) - (2 + 4 + 5) = 12$

Calculando $A_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |D|$, temos:

$A_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |12| = 6$

Portanto, a área é 6 unidades de área.

Comentário: Essa atividade, subsidiada pelo exercício **R9**, antecipa, em caráter intradisciplinar, conceito a ser estudado em Geometria analítica, no volume do 3º ano.

11. $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Multiplicando M por uma constante $k > 0$, temos:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 4k \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix}$

Calculando $|D|$ para as coordenadas expressas nessa nova matriz pela regra de Sarrus, temos:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & 0 & 1 & 2k & 0 \\ 4k & 3k & 1 & 4k & 3k \end{array}$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 6k^2$$

Assim, temos:

$D = 6k^2$

Para calcular a área desse novo triângulo $A'B'C'$, devemos encontrar:

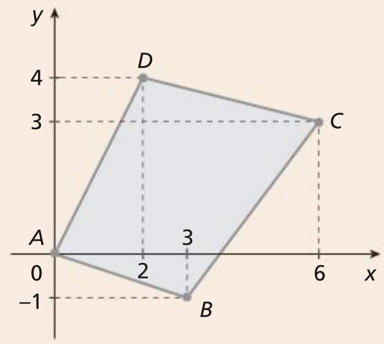
$A_{A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot |D|$

$A_{A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot 6k^2$

$A_{A'B'C'} = 3k^2$

alternativa d

12.



ADILSON SECCO

Para calcular a área do quadrilátero *ABCD*, vamos encontrar as áreas dos triângulos *ABC* e *ACD*.

- Para o triângulo *ABC*:

  Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & 6 & 3 \end{array}$$

$$-6 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 9$$

  Assim, temos:

  $D = 9 - (-6) = 15$

  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |15| = 7{,}5$

- Para o triângulo *ACD*:

  Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

$$6 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 24$$

  Assim, temos:

  $D = 24 - 6 = 18$

  $A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |18| = 9$

Para encontrar a área do quadrilátero, basta somar as áreas dos triângulos:

$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = 7{,}5 + 9 = 16{,}5$

Portanto, a área do quadrilátero *ABCD* é 16,5 unidades de área.

Comentário: Essa atividade é uma ampliação do exercício **10**, portanto de caráter intradisciplinar com a Geometria analítica, a ser estudada no volume do 3º ano.

Autoavaliação

1. Se uma matriz possui o número de linhas igual ao número de colunas, ela é uma matriz quadrada.
Como a matriz é de ordem 2, ou seja, é do tipo 2 × 2, essa matriz é quadrada.
alternativa b

2. De acordo com a definição, só podemos adicionar ou subtrair matrizes de mesmo tipo.
alternativa c

3. Para $4 \cdot A \cdot B = \boldsymbol{X}$, temos:

$4 \cdot A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = X_{m \times n}$

Assim, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz $\boldsymbol{X}$ tenha duas linhas e duas colunas.

Para $4 \cdot B \cdot A = \boldsymbol{Y}$, temos:

$4 \cdot B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = Y_{m \times n}$

Portanto, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz $\boldsymbol{Y}$ tenha três linhas e três colunas.

Logo, os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são, respectivamente, dos tipos 2 × 2 e 3 × 3.
alternativa d

4. As matrizes são diagonais, pois os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.
alternativa d

5. Na multiplicação de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.
alternativa a

6. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$

$(3 \times 2) \cdot (2 \times 4) = (3 \times 4)$
alternativa a

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade comutativa.
alternativa c

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$

alternativa d

9. Se $\det A \neq 0$, não se pode afirmar que a matriz é uma matriz linha, nem que é matriz nula e nem que é matriz diagonal.
alternativa d

10. Considerando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, obtemos $\det A = ad - bc$.

Vamos examinar as situações dadas nas alternativas.

- $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

  $\det(-A) = (-a) \cdot (-d) - (-b) \cdot (-c) = ad - bc$

  Logo: $\det(-A) = \det A = 5$

- $\frac{A}{10} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{c}{10} & \frac{d}{10} \end{bmatrix}$

  $\det \frac{A}{10} = \frac{a}{10} \cdot \frac{d}{10} - \frac{b}{10} \cdot \frac{c}{10} = \frac{1}{100} \cdot (ad - bc)$

  Então: $\det \frac{A}{10} = \frac{1}{100} \cdot 5 = 0{,}05 \neq 0{,}5$

- $2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$

  $\det 2A = 2a \cdot 2d - 2b \cdot 2c = 4 \cdot (ad - bc)$

  Logo: $\det 2A = 4 \cdot 5 = 20$

alternativa d

Capítulo 9

Sistemas lineares

Esse capítulo tem por objetivos: representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares; reconhecer e classificar sistemas lineares; apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa; e aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1. a) Substituindo x por 1, y por 3 e z por 2 na equação dada, obtemos $2 \cdot 1 + 3 + 3 \cdot 2 = 11$, que é uma sentença verdadeira.
Logo, o terno ordenado (1, 3, 2) é solução da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

b) Substituindo x, y e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 11$; portanto, a equação linear não é satisfeita.
Logo, o terno ordenado (2, 2, 2) não é solução da equação $2x + y + 3z = 11$.

2. Para que o par ordenado (3, k) seja solução da equação dada, devemos ter:
$2x + 3y = 12$
$2 \cdot 3 + 3 \cdot k = 12$
$6 + 3k = 12$
$k = 2$
Logo, se $k = 2$, o par (3, k) é solução da equação $2x + 3y = 12$.

3. Respostas possíveis:
Os ternos (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2) são soluções da equação $2a + 3b - c = 0$.

4. Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x - 3y = 1$, obtemos: $3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$, que é uma sentença verdadeira.
Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x + 3y = 5$, obtemos: $3 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 5$, que também é uma sentença verdadeira.
Logo, $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das duas equações dadas.

5. Para o ponto $A = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, temos:

$a \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + b = 1$ (I)

Para o ponto $B = (1, 2)$, temos:
$a \cdot 1 + b = 2$ (II)
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (−3) e adicionando as duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{-a} - 3b = -3 \\ \cancel{a} + b = 2 \end{cases}$$
$$-2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \text{ e } a = \frac{3}{2}$$

Logo, $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

6. Temos: $(2x + y) \cdot (-x + 3y) = 0$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \underset{\times(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} \cancel{2x} + y = 0 \\ \cancel{-2x} + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow y = 0$ e $x = 0$
Então, $S = \{(0, 0)\}$.
Comentário: Convém comentar com os alunos que uma equação do tipo $A \cdot B = 0$ tem solução igual à solução do sistema $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$.

7. A reta r passa pelos pontos (2, 0) e (0, −1); então:
$m \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$
A reta s passa pelos pontos (6, 0) e (0, 1); então:
$0 + n \cdot 1 = 6 \Rightarrow n = 6$
O ponto P pertence à reta r e à reta s; logo, suas coordenadas constituem a solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 6y = 6 \end{cases} \underset{\times(-1)}{\Rightarrow} \begin{cases} \cancel{x} - 2y = 2 \\ \cancel{-x} - 6y = -6 \end{cases}$$
$$-8y = -4 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ e } x = 3$$

Portanto, $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $m = 1$ e $n = 6$.

8. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

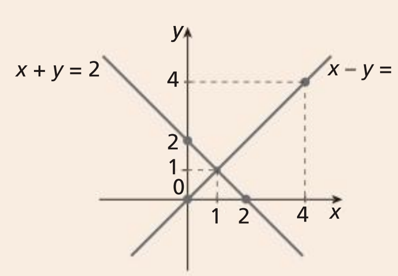
a) Respostas possíveis:
Para $x - y = 0$: (0, 0), (1, 1), (−2, −2)
Para $x + y = 2$: (1, 1), (2, 0), (0, 2)

b) $x - y = 0$

x	y
0	0
4	4

$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0



ADILSON SECCO

c) A solução do sistema é o ponto de intersecção das retas, ou seja, $S = \{(1, 1)\}$.
Comentário: Avaliar a conveniência de explorar mais o exercício pedindo aos alunos que tracem, no plano cartesiano, uma reta paralela ao eixo y pelo ponto (3, 0). Em seguida,

eles devem identificar que ponto dessa reta é solução da primeira equação do sistema e que ponto dela é solução da segunda equação. Por fim, devem verificar que as coordenadas desses pontos satisfazem as respectivas equações.

9. Sendo x o número de meninas e y o número de meninos, obtemos:

$$\begin{cases} 2(x-5) = y \\ y - 7 = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2x} - y = 10 \\ -\cancel{2x} + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 14$ e $x = 12$

Assim, $x + y = 26$.

Portanto, no total, 26 alunos faziam prova nessa sala.

10. Chamando de x o tipo de leite com 2% de gordura e y o tipo com 4% de gordura, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x \cdot \dfrac{2}{100} + y \cdot \dfrac{4}{100} = \dfrac{80 \cdot 2{,}5}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 80 \\ 2x + 4y = 200 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -160 \\ \cancel{2x} + 4y = 200 \end{cases} \Rightarrow 2y = 40 \Rightarrow y = 20 \text{ e } x = 60$$

Portanto, foram misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.

11. a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$ e $y = 0$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(3, 0)\}$, isto é, o sistema tem uma única solução.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

A segunda equação é equivalente à primeira (basta multiplicar todos os termos da primeira para obter a segunda). Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0), (0, −3), (5, 2), (−3, −6) e (−1,5; −4,5). Note que essas soluções são do tipo $(3 + k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{3x} - 3y = 9 \\ -\cancel{3x} + 3y = 9 \end{cases}$$

$0x + 0y = 18 \Rightarrow 0 = 18$ (sentença falsa)

Não há valores para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$, o sistema é impossível (SI).

d) $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$

O sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Ou seja, as duas equações são idênticas. Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0) e (5, 2). Note que essas soluções são do tipo $(3 + k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

Comentário: Esse exercício pode ser ampliado se for pedido aos alunos que representem os sistemas geometricamente e, desse modo, enfatiza-se a opção desta obra por uma abordagem na qual são relacionadas sistematicamente as resoluções algébricas com as geométricas.

12. $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ kz = 0 \end{cases}$

a) Se $k = 0$, temos um SPI.

Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, as infinitas soluções do sistema são da forma $(2, 3, \alpha)$.

b) Se $k \neq 0$, temos um sistema possível e determinado cuja solução para o sistema é (2, 3, 0).

13. a) Multiplicando a primeira equação por (−2) e a segunda equação por 3, obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{12x} - \cancel{6y} = -2a \\ \cancel{12x} + \cancel{6y} = 15 \end{cases}$$

$0x + 0y = -2a + 15$

Ou seja, o sistema só é possível e indeterminado se:

$-2a + 15 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{15}{2}$

Para $a = \dfrac{15}{2}$, temos: $\begin{cases} 6x + 3y = \dfrac{15}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Para $y = k$, temos: $4x + 2k = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5 - 2k}{4}$

Assim, o conjunto solução do sistema pode ser dado por

$S = \left\{\left(\dfrac{5 - 2k}{4}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Do item **a**, podemos observar que uma linha é múltipla da outra. Assim, podemos concluir que não existe um valor de a que torne o sistema possível e determinado.

Comentário: Essa atividade pode ser mais bem explorada se, após a resolução, for pedido aos alunos que calculem os valores de a que tornam o sistema impossível. Espera-se que eles concluam que a deve ser diferente de $\dfrac{15}{2}$.

14. $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, (1, 2) é solução de S_1.

Como S_1 e S_2 devem ser sistemas equivalentes, então (1, 2) também deve ser solução de S_2.

Substituindo x por 1 e y por 2 em S_2, obtemos:

$$\begin{cases} m = 3 \cdot 1 - 2 \\ n = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Logo, os sistemas S_1 e S_2 serão equivalentes para $m = 1$ e $n = 3$.

15. Como o sistema é homogêneo, temos:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ 2a + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Logo, $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$.

16. a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

17. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

18. **a)** $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

19. Substituindo x por $\frac{1}{2}$ e y por $\frac{1}{5}$ na equação matricial dada, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \\ 6 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Portanto, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial dada.

20. **a)** Substituindo x, y e z por 1, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença falsa.

Logo, (1, 1, 1) não é solução da equação matricial dada.

b) Substituindo x, y e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Logo, (0, 0, 0) é solução da equação matricial dada.

c) Substituindo x por (-3), y por 1 e z por 2, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Logo, $(-3, 1, 2)$ é solução da equação matricial dada.

d) Substituindo x por 3, y por (-1) e z por (-2), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Portanto, $(3, -1, -2)$ é solução da equação matricial dada.

e) Substituindo x por (-1), y por 1 e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença falsa.

Logo, $(-1, 1, 0)$ não é solução da equação matricial dada.

Portanto, os ternos das alternativas **b**, **c** e **d** são soluções da equação dada.

21. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

Portanto, $S = \{(2, 8)\}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \Rightarrow y = 2 \text{ e } x = 6 - 2 - 3 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

Portanto, $S = \{(1, 2, 3)\}$.

Comentário: Convém retomar essa questão quando abordar sistema escalonado. Comentar, então, com os alunos que as equações matriciais, como as que aparecem nessa questão, isto é, do tipo $A_{n \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$, em que os elementos de A são dados por $a_{ij} = 0$, se $i > j$, são associadas a sistemas na forma escalonada.

22. $S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$

$S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 1$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

O sistema correspondente a essa equação é:

$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, encontramos o conjunto solução $S = \{(2, 1)\}$.

Substituindo x por 2 e y por 1 em

$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, obtemos:

$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2m + 5 \\ 8 - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 5 = 0 \\ 8 - n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{2} \\ n = 3 \end{cases}$

Portanto, para que essas equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes, devemos ter $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$.

24. Temos: $S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(G)} \\ y + 2z = 0 & \text{(H)} \\ 6z = 6 & \text{(I)} \end{cases}$

Pela equação (I):
$6z = 6 \Rightarrow z = 1$
Substituindo z por 1 na equação (H), obtemos:
$y = -2 \cdot 1$
$y = -2$
Substituindo z por 1 e y por (-2) na equação (G), obtemos:
$-x - 2 \cdot (-2) - 1 = 1$
$x = 2$
Logo, a solução de S_3 é $(2, -2, 1)$.
Substituindo x por 2, y por (-2) e z por 1 nos sistemas S_1 e S_2, obtemos:

$S_1 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 & \text{(verdadeira)} \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -2 & \text{(verdadeira)} \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 3 & \text{(verdadeira)} \end{cases}$

$S_2 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 & \text{(verdadeira)} \\ -2 + 2 \cdot 1 = 0 & \text{(verdadeira)} \\ -4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 6 & \text{(verdadeira)} \end{cases}$

Logo, $(2, -2, 1)$ é solução de S_1 e S_2 também.

25. **a)** Temos: $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \\ 2y = -2 \end{cases}$

Da 2ª equação, obtemos $y = -1$.
Substituindo y por (-1) na primeira equação, obtemos $x = 2$.
Logo, $S = \{(2, -1)\}$, e temos um sistema possível e determinado (SPD).

b) Temos: $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Se o sistema admite solução com $z = k$, com k real, temos:

$\begin{cases} 3x - y + k = 3 \\ y - k = 0 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = k$.
Substituindo o valor k em y na primeira equação, obtemos:
$3x - k + k = 3 \Rightarrow x = 1$
Portanto, a solução do sistema será do tipo $(1, k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.
Logo, o sistema é SPI.

c) Temos: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + z = 3 \\ -4z = 4 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $z = -1$.
Substituindo z por (-1) na segunda equação, obtemos:
$-2y - 1 = 3 \Rightarrow y = -2$
Substituindo y por (-2) e z por (-1) na primeira equação, obtemos:
$x - 2 + 1 = 2 \Rightarrow x = 3$
Portanto, $S = \{(3, -2, -1)\}$, e o sistema é SPD.

d) Temos: $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

Se o sistema admite solução com $z = k$, k real, temos:

$\begin{cases} x + 2y - k = -2 \\ y + 3k = 1 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = 1 - 3k$.
Substituindo y por $(1 - 3k)$ na primeira equação, obtemos:
$x + 2(1 - 3k) - k = -2$
$x + 2 - 6k - k = -2$
$x = 7k - 4$
Portanto, $S = \{(7k - 4, 1 - 3k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$, e o sistema é SPI.

26. **a)** Temos: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.
Assim, temos o sistema original escalonado:

$\begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -9 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = 3$.
Substituindo y por 3 na primeira equação, obtemos $x = 2$.
Logo, $S = \{(2, 3)\}$.

b) Temos: $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

Para simplificar, escrevemos o sistema equivalente:

$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.
Assim, temos o sistema original escalonado:

$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 8y = -8 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = -1$.
Substituindo y por (-1) na primeira equação, obtemos $x = 3$.
Logo, $S = \{(3, -1)\}$.

c) Temos: $\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

Escrevendo o sistema de forma equivalente, temos:

$\begin{cases} x + 6y = 2 \\ 4x - 2y = 34 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Multiplicamos a primeira equação por (-4) e a adicionamos à segunda.
Assim, temos o sistema original escalonado:

$\begin{cases} x + 6y = 2 \\ -26y = 26 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos $y = -1$.
Substituindo y por (-1) na primeira equação, obtemos $x = 8$.
Logo, $S = \{(8, -1)\}$.

d) Temos: $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.
Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ -5y = 15 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = -3$.

Substituindo y por (-3) na primeira equação, obtemos $x = -1$.

Logo, $S = \{(-1, -3)\}$.

27. a) Temos: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-5) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -2y = -6 \\ -3y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ -y = -3 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 3)\}$, e o sistema é SPD.

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Adicionamos a primeira equação à terceira.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Como pela segunda equação obtemos $y = \dfrac{1}{3}$ e, pela terceira, obtemos $y = -2$, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

c) Temos: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por (-1) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ 0z = 1 \end{cases}$$

Como a terceira equação é uma sentença falsa, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

d) Temos: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 0z = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + z + y = 1 \\ z + y = 0 \\ -y = -2 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo y por 2 na segunda equação, obtemos $z = -2$.

Substituindo y por 2 e z por (-2) na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 2, -2)\}$, e o sistema é SPD.

e) Temos: $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por 2 e a adicionamos à segunda.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 5y - z = 9 \end{cases}$$

Se o sistema admite solução com $z = k$, k real, temos:

$$\begin{cases} -x + 2y - k = -2 \\ 5y - k = 9 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \dfrac{9 + k}{5}$ e substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \dfrac{28 - 3k}{5}$.

Logo, seu conjunto solução é do tipo

$S = \left\{\left(\dfrac{28 - 3k}{5}, \dfrac{9 + k}{5}, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

f) Temos: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-5) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-6) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

A segunda e a terceira equações são idênticas. Então, podemos escrever o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

Se o sistema admite solução com $z = k$, k real, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{17 - 4k}{3}$ e, substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \frac{k - 5}{3}$.

Logo, o conjunto solução é do tipo

$S = \left\{\left(\frac{k-5}{3}, \frac{17-4k}{3}, k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

Exercícios complementares

1. Substituindo x por 2 e y por k na equação dada, obtemos:

$3k \cdot 2 - k \cdot k + 40 = 0$

$-k^2 + 6k + 40 = 0$

$k = 10$ ou $k = -4$

2. Usando n para representar o número de residências e x para representar o número de recenseadores, obtemos:

$$\begin{cases} x \cdot 102 = n \\ x \cdot 100 = n - 60 \end{cases}$$

$100x = 102x - 60$

$2x = 60$

$x = 30$

Substituindo x por 30 na primeira equação, temos:

$n = 30 \cdot 102$

$n = 3.060$

Logo, há 3.060 residências na cidade.

3. Usando r_A para representar o raio de atendimento da delegacia A, r_B para o raio de B e r_C para o raio de C, temos:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ r_A + r_C = 16 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à segunda:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ -r_B + r_C = -2 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$$

Adicionamos a segunda equação à terceira:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ -r_B + r_C = -2 \\ 2r_C = 10 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $r_C = 5$.

Substituindo r_C por 5 na segunda equação, obtemos $r_B = 7$. Substituindo r_B por 7 na primeira equação, obtemos $r_A = 11$.

Logo, os raios de atendimentos das delegacias A, B e C são, respectivamente, 11 km, 7 km e 5 km.

4. Substituindo x por $2m$ e y por $(-m)$ no sistema dado, obtemos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2m - (-m) = -5 \\ 3m \cdot 2m - (-m) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m = -5 \\ 6m^2 + m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 \text{ ou } m = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Logo, $m = -1$.

5. Chamando de a o preço do sabão da marca A, b o preço do sabão da marca B e c o preço do sabão da marca C, temos:

$$\begin{cases} a = \frac{b + c}{2} \\ 2a + b + c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - \cancel{b} - \cancel{c} = 0 \\ 2a + \cancel{b} + \cancel{c} = 14 \end{cases}$$

Adicionando as equações, temos:

$4a = 14$

$a = \frac{7}{2} = 3{,}50$

O preço de três pacotes de 1 kg do sabão da marca A seria $3 \cdot$ R\$ 3,50, ou seja, R\$ 10,50.

alternativa b

6. $$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações, obtemos uma solução para o sistema: $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$

Para que essa solução seja única, ela deve ser válida para a terceira equação também.

Então, substituindo x por $\frac{1}{3}$ e y por 1 na terceira equação, obtemos:

$k \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow \frac{k}{3} = 3 \Rightarrow k = 9$

7. Sejam x, y e z as quantidades de maçãs, peras e laranjas, respectivamente; então:

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ \frac{x}{50} + \frac{y}{60} + \frac{z}{100} = 140 \\ 20 \cdot \left(\frac{x}{50}\right) + 40 \cdot \left(\frac{y}{60}\right) + 10 \cdot \left(\frac{z}{100}\right) = 3.300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ 6x + 5y + 3z = 42.000 \\ 12x + 20y + 3z = 99.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 & \text{(I)} \\ -y - 3z = -18.000 & \text{(II)} \\ -33z = -165.000 & \text{(III)} \end{cases}$$

(III) $z = 5.000$

(II) $-y - 3 \cdot 5.000 = -18.000 \Rightarrow y = 3.000$

(I) $x + 3.000 + 5.000 = 10.000 \Rightarrow x = 2.000$

Portanto, estão sendo transportadas 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas.

8. Usando m e t para representar, respectivamente, o número de manhãs e o número de tardes que durou a viagem e considerando que a viagem teve tantas manhãs quantas tardes, então:

- $m = t$
- número de manhãs com chuva $= m - 6$
- número de tardes com chuva $= t - 3$

Assim:

$$\begin{cases} m = t & \text{(I)} \\ (m - 6) + (t - 3) = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$m - 6 + m - 3 = 5 \Rightarrow m = 7$

Logo, $t = 7$.

Portanto, a viagem durou 7 dias.

alternativa b

9. Substituindo y por 0 no sistema dado, obtemos:

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 0 = 0 \\ x + \lambda \cdot 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + 1)x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $x = 3$.

Substituindo x por 3 na primeira equação, obtemos:

$(\lambda + 1) \cdot 3 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

10. No ponto $A(2, 5)$, temos:

$f(2) = a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad \text{(I)}$

No ponto $B(-3, 1)$, temos:

$f(-3) = a \cdot (-3) + b = 1 \Rightarrow -3a + b = 1 \quad \text{(II)}$

Das equações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -3a + b = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação, membro a membro, por (-1) e adicionando-a à primeira, temos:

$$\begin{cases} 2a + \cancel{b} = 5 \\ 3a - \cancel{b} = -1 \end{cases}$$
$$5a \quad = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \text{ e } b = \frac{17}{5}$$

Logo, a lei da função polinomial do 1º grau é

$f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$.

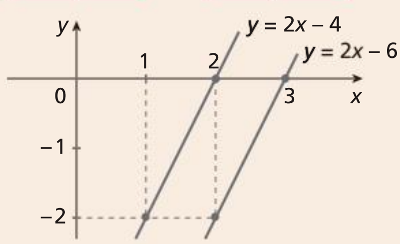
Comentário: A igualdade $y = ax + b$ pode representar uma equação linear ou a lei de formação de uma função afim. No primeiro caso, o coeficiente a está associado à inclinação da reta; no segundo caso, o mesmo coeficiente está relacionado com a taxa de variação da função. Independentemente do significado dessa igualdade, a representação gráfica no plano cartesiano é dada pela mesma reta.

11. a) $y = 2x - 6$

x	y
2	−2
3	0

$y = 2x - 4$

x	y
1	−2
2	0



ADILSON SECCO

b) Os gráficos do item **a** são duas retas paralelas, ou seja, não apresentam pontos em comum. Logo, o conjunto solução do sistema formado pelas equações é $S = \varnothing$.

Comentário: A classificação de um sistema linear 2×2 composto de duas equações apresentadas na forma $y = ax + b$ pode ser feita comparando o valor do coeficiente a nas duas equações e, em seguida, o valor do coeficiente b.

12. Montando o sistema de acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} 4A + 6B + 6C + 2D = 50 \text{ (I)} \\ 4A + B + 2C + 3D = 21 \text{ (II)} \\ 2A + 3B + 3C + D = 24 \text{ (III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (III) por (-2) e adicionando-a à equação (I), temos:

$$\begin{cases} \cancel{4A} + \cancel{6B} + \cancel{6C} + \cancel{2D} = 50 \\ -\cancel{4A} - \cancel{6B} - \cancel{6C} - \cancel{2D} = -48 \\ \hline \qquad 0 = 2 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

alternativa a

13. a) Temos: $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por (-2) e adicionando-a à segunda equação e obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{2x} - 10y = -6 \\ \cancel{2x} - \ 3y = \ 5 \end{cases}$$
$$-13y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{13} \text{ e } x = \frac{34}{13}$$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD), e

$S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$.

b) Temos: $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + \quad y = 4 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 2, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 4 \text{ (SPI)}$$

Se o sistema admite solução $x = \alpha$, α real, obtemos o valor de $y = 4 - 2\alpha$.

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI), e $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

14. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ (falso)} \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

alternativa c

15. O sistema dado é um sistema homogêneo. Logo, admite, pelo menos, a solução trivial (0, 0, 0).

Para escalonar o sistema, escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - \ y + \ z = 0 \\ 3x + 2y - 12z = 0 \\ 2x - 3y + \ 5z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x - y + \ z = 0 \\ \quad 5y - 15z = 0 \\ \quad -y + \ 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\left(\frac{1}{5}\right)$ e a adicionamos à terceira.

Assim, o sistema original escalonado é: $\begin{cases} x - y + \ z = 0 \\ \quad 5y - 15z = 0 \end{cases}$

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos $y = 3\alpha$ e $x = 2\alpha$.

Portanto, $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

16. a) $\begin{cases} x + 2y \qquad = 1 \\ \quad 3y + 3z = -1 \\ \quad -y \qquad = 2 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $y = -2$.

Substituindo y por (-2) na segunda equação, obtemos $z = \frac{5}{3}$ e, na primeira equação, obtemos $x = 5$.

Logo, $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} u + x + y + z = 6 \\ \quad -x - y + z = 0 \\ \qquad -y + z = 1 \\ \qquad\quad -z = -3 \end{cases}$

Da quarta equação, obtemos $z = 3$.

Substituindo z por 3 na terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo z por 3 e y por 2 na segunda equação, obtemos $x = 1$.
Substituindo z por 3, y por 2 e x por 1 na primeira equação, obtemos $u = 0$.
Logo, $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$.

c) $\begin{cases} a + 2b + c = 10 \\ a + b - c = -1 \\ 2a - 3b + 2c = 13 \end{cases}$

Adicionando o oposto do dobro da primeira equação à terceira, obtemos $b = 1$.
Em seguida, substituindo b na primeira e segunda equações e adicionando a primeira à segunda, obtemos $a = 3$.
Finalmente, substituindo a e b na segunda equação, obtemos $c = 5$.
Logo, $S = \{(3, 1, 5)\}$.

17. De acordo com o enunciado, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 14 = \dfrac{i}{i + 12} \cdot 42 \\ d = \dfrac{i}{i + 12} \cdot 60 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 14(i + 12) = 42i & \text{(I)} \\ d(i + 12) = 60i & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $14(i + 12) = 42i \Rightarrow 14i + 168 = 42i \Rightarrow i = \dfrac{168}{28} = 6$

Substituindo i por 6 em (II), obtemos:

$d(i + 12) = 60i \Rightarrow d(6 + 12) = 60 \cdot 6 \Rightarrow d = \dfrac{360}{18} = 20$

Portanto, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem de 20 miligramas do medicamento X.
alternativa b

18. Seja x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha-de-caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas elas em quilograma.

a) Considerando que o quilograma do amendoim custa R$ 5,00, o da castanha-de-caju custa R$ 20,00 e o da castanha-do-pará custa R$ 16,00, temos:
$5x + 20y + 16z = 5{,}75$ (I)
Como cada lata deve conter meio quilograma da mistura, temos:
$x + y + z = \dfrac{1}{2}$
$2x + 2y + 2z = 1$ (II)
Como a quantidade de castanha-de-caju deve ser um terço da soma das quantidades das outras duas, temos:
$y = \dfrac{x + z}{3}$
$x - 3y + z = 0$ (III)
Com as equações (I), (II) e (III), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

b) No sistema obtido no item **a**, trocando de lugar a primeira e a terceira equações, temos:

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 & \text{(I)} \\ 2x + 2y + 2z = 1 & \text{(II)} \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-2) e adicionando à equação (II); em seguida, multiplicando a equação (I) por (-5) e adicionando à equação (III), temos:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 8y + 0z = 1 \\ 0x + 35y + 11z = 5{,}75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 8y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 11z = 1{,}375 \end{cases}$$

Assim, podemos obter $z = 0{,}125$, $y = 0{,}125$ e $x = 0{,}25$.
Logo, a quantidade de amendoim é 0,250 kg ou 250 g, a de castanha-de-caju é 0,125 kg ou 125 g e a de castanha-do-pará é 0,125 kg ou 125 g.

Comentário: Nessa atividade e em outras, igualmente contextualizadas, é interessante observar a importância do estudo de sistemas como instrumento da resolução de problemas do dia a dia.

19. $\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$

Dividimos a primeira equação por 2.

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}t = 2 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.
Adicionamos a primeira equação à quarta.

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}t = 2 \\ -\dfrac{15}{2}y - \dfrac{1}{2}z - \dfrac{5}{2}t = -1 \\ 2y + z = 0 \\ \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{5}{2}t = 8 \end{cases}$$

Adicionamos a segunda equação à quarta.

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}t = 2 \\ -\dfrac{15}{2}y - \dfrac{1}{2}z - \dfrac{5}{2}t = -1 \\ 2y + z = 0 \\ -7y = 7 \end{cases}$$

Da quarta equação, obtemos $y = -1$.
Substituindo y por (-1) na terceira equação, obtemos $z = 2$.
Substituindo y por (-1) e z por 2 na segunda equação, obtemos $t = 3$.
Finalmente, substituindo y por -1, z por 2 e t por 3 na primeira equação, obtemos $x = 1$.
Logo, $S = \{(1, -1, 2, 3)\}$.

20. $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = (2^3)^{y+1} \\ (3^2)^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{3y+3} \\ 3^{2y} = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 3 \\ 2y = x - 9 \end{cases}$

Reescrevendo esse último sistema de forma conveniente:

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -9 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -9 \end{cases}$$
$$-y = -6 \Rightarrow y = 6 \text{ e } x = 21$$

Logo, $S = \{(21, 6)\}$.

21. $\begin{cases} \dfrac{2}{u} + \dfrac{3}{v} = 8 \\ \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v + 3u = 8vu \\ v - u = -vu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = uv \\ 3u + 2v = 8uv \end{cases}$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

$$\begin{cases} u - v = uv \\ 5v = 5uv \end{cases}$$

Sabendo que $u \neq 0$ e $v \neq 0$, obtemos:

$u = 1$ e $v = \dfrac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{\left(1, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

22. Como o sistema é possível e não admite uma solução trivial, então SPD ou SPI e $k \neq 0$.
Multiplicando a terceira equação do sistema por 2, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = k \\ 3x + 2y + 5z = k \\ 2x + y + 4z = 2k^2 \end{cases}$$

Para que o sistema seja SPI, devemos ter, temos:
$2k^2 = k \Rightarrow 2k = 1$ (pois $k \neq 0$)

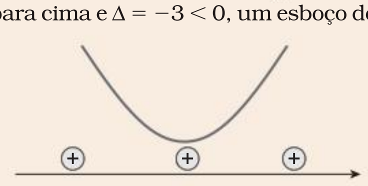
Logo, $k = \dfrac{1}{2}$.

23. a) $\begin{cases} x - my = 1 - m \\ (1 + m)x + y = 1 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos o valor de y:
$(1 + m)x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - (1 + m)x$
Substituindo y na primeira equação, temos:
$x - m[1 - (1 + m)x] = 1 - m$
$x - m + mx + m^2x = 1 - m$
$x(m^2 + m + 1) = 1$
Se $m^2 + m + 1 \neq 0$, x terá um único valor para cada número real m:

$$x = \frac{1}{m^2 + m + 1}$$

Vamos considerar a função quadrática
$f(m) = m^2 + m + 1$.
Como a parábola, que é gráfico de f, tem concavidade voltada para cima e $\Delta = -3 < 0$, um esboço do gráfico é:



ADILSON SECCO

Isso significa que $f(m)$ nunca se anula, ou seja, para cada valor real de m, x é único. Consequentemente, y e o par (x, y), solução do sistema, também são únicos.

b) Para que o valor de x seja o maior possível, $f(m)$ deve ter um valor mínimo. Isso ocorre quando m assume o valor da abscissa do vértice da parábola, gráfico de f.

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

Autoavaliação

1. Somente a equação $y - z = 0$ compõe um sistema linear 2×3 com $2x + 2y = 2$.
alternativa a

2. A solução de um sistema linear 2×2 possível e determinado são as coordenadas do ponto de intersecção entre duas retas concorrentes.
alternativa e

3. A solução do primeiro sistema é $(4, 1)$. Substituindo x por 4 e y por 1 na primeira equação do segundo sistema, obtemos:
$2 \cdot 4 + 1 = a \Rightarrow a = 9$
alternativa c

4. Todo sistema linear homogêneo é SPD ou SPI.
alternativa a

5. $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$
alternativa d

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

alternativa b

7. No primeiro sistema, vamos trocar as equações de lugar para que a primeira tenha 1 como coeficiente de x.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

Escalonando o sistema obtido, obtemos o segundo sistema dado.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ -y - 5z = -17 \\ -6y - 8z = -35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$$

Portanto, os sistemas são equivalentes.
alternativa b

8. $\begin{cases} A + B = 55 \Rightarrow B = 55 - A \\ A + C = 50 \Rightarrow C = 50 - A \\ B + C = 45 \end{cases}$

Substituindo na terceira equação:
$55 - A + 50 - A = 45$
$-2A = -60$
$A = 30$
Assim, $B = 25$ e $C = 20$.
$A + B + C = 75$
Portanto, a soma dos preços dos artigos A, B e C é R\$ 75,00.
alternativa c

9. Representando cada preço pela letra inicial do nome de cada peça, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\ell + 2f = 130 \\ 2\ell + 2c = 256 \\ 1\ell + 1f + 1c = 143 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \ell + f + c = 143 \\ -2f = -30 \\ -2c = -156 \end{cases}$$

De $-2c = -156$, obtemos $c = 78$.
Portanto, o preço unitário da colcha é R\$ 78,00.
alternativa c

Compreensão do texto

1. Energia, carboidratos, proteínas e gorduras totais.

2. **a)** O sistema tem 4 equações e 6 incógnitas.
   b) No sistema, cada equação corresponde a um nutriente, e cada incógnita, a um alimento (x_1 representa o arroz, x_2 representa o feijão, x_3 representa o frango, x_4 representa o suco, x_5 representa o pão e x_6 representa a margarina).

3. Como temos apenas 4 equações para 6 incógnitas, podemos dizer que o sistema é possível e indeterminado.
   alternativa b

4. $$\begin{cases} x_1 - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0{,}19 \\ x_2 + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8{,}05 \\ x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9{,}16 \\ x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11{,}60 \end{cases} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \end{cases}$$

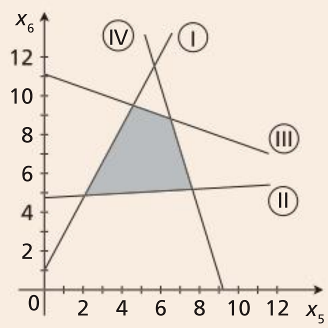
5. Temos: $$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \quad \text{(I)} \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \quad \text{(II)} \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \quad \text{(III)} \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

   (I)
   $x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6$
   $0{,}17x_6 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - x_1$
   $x_6 = \dfrac{0{,}19 + 0{,}33x_5 - x_1}{0{,}17}$
   $x_6 \simeq 1{,}94x_5 + 1{,}12 - \dfrac{x_1}{0{,}17}$
   Como sabemos que $x_1 \geqslant 0$, então, quanto maior x_1, menor x_6. Assim, x_6 é máximo quando $x_1 = 0$. Logo, $x_6 \leqslant 1{,}94x_5 + 1{,}12$.

   (II)
   $x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6$
   $1{,}68x_6 = 0{,}07x_5 + 8{,}05 + x_2$
   $x_6 = \dfrac{0{,}07x_5 + 8{,}05 + x_2}{1{,}68}$
   $x_6 \simeq 0{,}04x_5 + 4{,}79 + \dfrac{x_2}{1{,}68}$
   Temos $x_2 \geqslant 0$, então, quanto maior x_2, maior x_6. Assim, x_6 é mínimo quando $x_2 = 0$. Logo, $x_6 \geqslant 0{,}04x_5 + 4{,}79$.

   (III)
   $x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6$
   $0{,}83x_6 = -0{,}25x_5 + 9{,}16 - x_3$
   $x_6 = \dfrac{-0{,}25x_5 + 9{,}16 - x_3}{0{,}83}$
   $x_6 \simeq -0{,}30x_5 + 11{,}04 - \dfrac{x_3}{0{,}83}$
   Como $x_3 \geqslant 0$, se x_3 aumenta, x_6 diminui. Então, x_6 é máximo quando $x_3 = 0$. Portanto, $x_6 \leqslant -0{,}30x_5 + 11{,}04$.
   (IV)
   $x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6$
   $0{,}45x_6 = -1{,}24x_5 + 11{,}60 - x_4$
   $x_6 = \dfrac{-1{,}24x_5 + 11{,}60 - x_4}{0{,}45}$
   $x_6 \simeq -2{,}76x_5 + 25{,}78 - \dfrac{x_4}{0{,}45}$
   Já que $x_4 \geqslant 0$, quanto maior x_4, menor x_6. Assim, x_6 é máximo se $x_4 = 0$. Portanto, $x_6 \leqslant -2{,}76x_5 + 25{,}78$.
   Assim, as inequações são:
   $x_6 \leqslant 1{,}94x_5 + 1{,}12$
   $x_6 \geqslant 0{,}04x_5 + 4{,}79$
   $x_6 \leqslant -0{,}30x_5 + 11{,}04$
   $x_6 \leqslant -2{,}76x_5 + 25{,}78$

6. Temos:
   $$\begin{cases} x_6 \leqslant 1{,}94x_5 + 1{,}12 \quad \text{(I)} \\ x_6 \geqslant 0{,}04x_5 + 4{,}79 \quad \text{(II)} \\ x_6 \leqslant -0{,}30x_5 + 11{,}04 \quad \text{(III)} \\ x_6 \leqslant -2{,}76x_5 + 25{,}78 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$
   Fazendo um esboço dos quatro gráficos encontramos a figura a seguir, em que a parte mais escura representa a intersecção das quatro inequações, ou seja, o conjunto solução do sistema:



ADILSON SECCO

   alternativa d

7. Se $x_5 = 5$ e $x_6 = 6$, substituindo esses valores nas equações $$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \end{cases}$$, encontramos:
   $x_1 = 0{,}19 + 0{,}33 \cdot 5 - 0{,}17 \cdot 6 = 0{,}82$
   $x_2 = -8{,}05 - 0{,}07 \cdot 5 + 1{,}68 \cdot 6 = 1{,}68$
   $x_3 = 9{,}16 - 0{,}25 \cdot 5 - 0{,}83 \cdot 6 = 2{,}93$
   $x_4 = 11{,}60 - 1{,}24 \cdot 5 - 0{,}45 \cdot 6 = 2{,}7$
   Sendo x_1 o arroz, multiplicando o valor encontrado por 50 g (quantidade de referência na tabela), a dieta deve conter $0{,}82 \cdot 50$ g = 41 g.
   x_2 representa o feijão; a quantidade, em grama, de feijão a ser consumido na dieta deve ser de $1{,}68 \cdot 30$ g = 50,4 g.
   Analogamente, a quantidade, em grama, de frango deve ser $2{,}93 \cdot 80$ g = 234,4 g e a de suco, em mℓ, deve ser $2{,}7 \cdot 200$ mℓ = 540 mℓ.

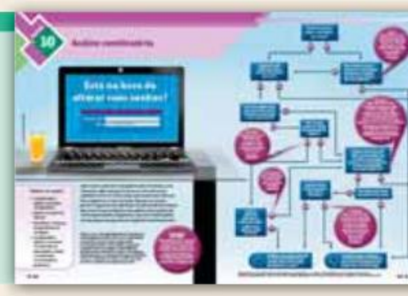
8. • Resposta pessoal. *Energia* ou *valor energético*: energia produzida pelo corpo que provém dos carboidratos, das proteínas e das gorduras totais; é expresso em quilocaloria (kcal) ou em quilojoule (kJ).
   Carboidratos: fazem parte dos chamados energéticos e sua principal função é fornecer energia imediata para as células do corpo, principalmente as do cérebro; encontrados em maior quantidade em massas, arroz, açúcar, mel, pães, farinhas, tubérculos (como batata, mandioca e inhame) e doces em geral.

Proteínas: são chamadas construtores, pois têm a função de construir e manter órgãos, tecidos e células, sendo as principais responsáveis pela formação de massa muscular; encontradas em carnes, ovos, leite e derivados e nas leguminosas (feijões, soja e ervilha).
Gorduras totais: referem-se à soma das gorduras, de origem tanto animal (saturadas) quanto vegetal (insaturadas); principais fontes de energia no corpo, também pertencem ao grupo dos *energéticos* e ajudam na absorção e no transporte das vitaminas lipossolúveis (A, D, E e K), na composição das membranas celulares e no equilíbrio térmico do organismo.

- Resposta pessoal. *Gorduras saturadas*: presentes em alimentos de origem animal, como carnes, toucinho, pele de frango, queijos, leite integral, iogurtes, manteiga e requeijão.
Gorduras trans: encontradas em produtos industrializados que utilizam gordura vegetal hidrogenada (combinada com o hidrogênio) em seu preparo, como margarina, cremes vegetais, biscoitos, sorvetes, *snacks* (salgadinhos prontos), produtos de panificação, alimentos fritos e lanches salgados.
- Resposta pessoal. *Fibras alimentares*: auxiliam no metabolismo geral, atuando sobretudo na digestão e no funcionamento do intestino; promovem diversos benefícios, como redução do colesterol total, redução do mau colesterol (LDL), aumento do bom colesterol (HDL), redução dos triglicerídios e redução da hiperglicemia (controle do diabetes); presentes em diversos alimentos de origem vegetal, como frutas, hortaliças, feijões e alimentos integrais.
Sódio: regula os fluidos extracelulares e o volume plasmático, participa da condução dos impulsos nervosos e das contrações musculares; presente no sal de cozinha e em alimentos industrializados.
- Resposta possível: Uma dieta saudável deve dar preferência a produtos com baixas %VD para gorduras saturadas (que contribuem para a obesidade e aumentam o risco de doenças cardiovasculares), gorduras trans (além de desnecessárias ao nosso organismo, colaboram para a elevação do colesterol e, portanto, para o aumento do risco de doenças cardiovasculares) e sódio (que promove aumento da pressão arterial) e com altas %VD para fibras alimentares.
- resposta pessoal

Capítulo 10

Análise combinatória



O objetivo desse capítulo é compreender e aplicar o princípio fundamental da contagem, identificar a natureza dos problemas de contagem e empregar na resolução desses problemas os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação.

Resoluções e comentários

Exercícios propostos

1.
- E_1(escolha de um tipo de macarrão): 3 possibilidades
- E_2(escolha de um tipo de molho): 2 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 = 6$
Logo, podem ser preparadas 6 opções de pratos diferentes de macarronada.

2. Para ir da cidade A à cidade B há 3 possibilidades e da cidade B à C há 4 possibilidades.
Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 4 = 12$
Então, o percurso ABC pode ser feito de 12 modos diferentes.
Comentário: Observar que essa é uma questão que frequentemente ocorre em empresas que fazem uso da logística, como na elaboração de uma planilha de operação da frota de caminhões de recolhimento do lixo de uma cidade.

3. 12 cavalos podem ganhar o 1º prêmio, e 11 cavalos (todos os cavalos menos o que ganhar o 1º prêmio) podem ganhar o 2º prêmio.
Pelo princípio multiplicativo: $12 \cdot 11 = 132$
Logo, o 1º e o 2º prêmios podem ser distribuídos de 132 maneiras.

4. ___ ___ ___ ___

10 possibilidades
10 possibilidades
10 possibilidades
9 possibilidades: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9)

Pelo princípio multiplicativo: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 9.000$
Logo, há 9.000 números com 4 algarismos.
Comentário: Nessa questão, é importante que os alunos percebam que o zero não pode ser usado no primeiro algarismo, pois o número ficaria apenas com três algarismos. É também importante que percebam que pela grande quantidade de possibilidades não convém fazer a árvore de possibilidades e, sim, aplicar o princípio multiplicativo.

5. $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}$
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Logo, 5 livros podem ser colocados lado a lado em uma prateleira de 120 maneiras distintas.

6. letras: ___ ___ ___ ___ algarismos: ___ ___ ___

- 8 possibilidades
- 9 possibilidades
- 9 possibilidades (não pode ser zero)
- 23 possibilidades
- 24 possibilidades
- 25 possibilidades
- 25 possibilidades (não pode ser *z*)

Pelo princípio multiplicativo:

$25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 223.560.000$

Podem ser criadas, portanto, 223.560.000 diferentes senhas de acesso ao *site*.

Comentário: Ao resolver essa questão, os alunos devem perceber que a escolha de uma senha depende da quantidade de dígitos (caracteres alfanuméricos) usados. O número de dígitos de uma senha pode dificultar as chances de ela ser descoberta.

7. a) ___ ___ ___

- 6 possibilidades
- 6 possibilidades
- 9 possibilidades: (não pode começar por zero)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$

Logo, podem ser formados 180 números de 3 dígitos.

b) ___ ___ ___

- 4 possibilidades
- 5 possibilidades
- 5 possibilidades: (não pode começar por zero)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$

Logo, podem ser formados 100 números de 3 dígitos sem repetir os algarismos.

8. ___ ___ ___ ___

- 2 possibilidades
- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 4 possibilidades: (1, 3, 5 e 7)

Pelo princípio multiplicativo: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

Logo, podemos formar 96 números.

9.
- E_1 (escolha da resposta para a 1ª questão): 3 possibilidades
- E_2 (escolha da resposta para a 2ª questão): 3 possibilidades
- E_3 (escolha da resposta para a 3ª questão): 3 possibilidades
- E_4 (escolha da resposta para a 4ª questão): 3 possibilidades
- E_5 (escolha da resposta para a 5ª questão): 3 possibilidades
- E_6 (escolha da resposta para a 6ª questão): 3 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$

Logo, o cartão pode ser preenchido de 729 maneiras diferentes.

10. 1ª equipe: $\underset{6}{\_\_}\ \underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{1}{\text{melhor}}$

2ª equipe: $\underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}\ \underset{1}{\text{melhor}}$

Pelo princípio multiplicativo: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Logo, o técnico pode formar os times de 720 maneiras distintas.

11. 1 bandeira hasteada: $\underset{5}{\_\_}$

2 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}$

3 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}$

4 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}$

5 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{\_\_}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}$

Total $= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$

Portanto, podem ser enviadas 325 mensagens distintas.

12.
- Com 1 sinal: 2
- Com 2 sinais: $2 \cdot 2 = 4$
- Com 3 sinais: $2^3 = 8$
- Com 4 sinais: $2^4 = 16$

Logo, podemos representar 30 letras distintas $(2 + 4 + 8 + 16)$.

13. Números de 5.000 a 5.999:

$\underline{5}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_} \Rightarrow \text{total} = 1.000$

Números de 6.000 a 6.999:

$\underline{6}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_} \Rightarrow \text{total} = 1.000$

Números de 5.000 a 5.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underline{5}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_} \Rightarrow \text{total} = 729$

Números de 6.000 a 6.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underline{6}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_} \Rightarrow \text{total} = 729$

Total de números que contêm o algarismo 3:

$1.000 + 1.000 - 729 - 729 = 542$

Logo, 542 números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3.

Comentário: É interessante reforçar a estratégia usada nesta resolução, ou seja, para encontrar a quantidade de números que contêm o algarismo 3, basta subtrair do total a quantidade de números que não contêm nenhum 3.

14. Considerando as duas primeiras letras de um nome:

___ ___

- 26 possibilidades
- 26 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades para as duas primeiras letras de um nome é: $26 \cdot 26 = 676$

Como a escola tem 677 alunos, pelo menos 2 alunos têm as mesmas duas letras iniciais de seus nomes.

Comentário: Avaliar a conveniência de dar uma dica aos alunos: se essa escola tivesse 367 alunos, então, necessariamente, pelo menos dois alunos aniversariam na mesma data.

15. código de área: ___ ___ ___ prefixo: ___ ___ ___ linha: ___ ___ ___ ___

não pode ser 0 ou 1

a) $\underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}$

Pelo princípio multiplicativo: $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$

Logo, existem 800 diferentes códigos de área.

b) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\quad \underset{8}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}$

$8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$

Logo, existem 640 prefixos para esse código de área.

c) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\quad \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{3}\quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 9.999}$

Logo, são possíveis 9.999 números de linha.

d) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\quad \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{10}{\_}\quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{9.999}$

$8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 6.399.360$

Logo, são possíveis 6.399.360 diferentes números de telefone de 7 dígitos dentro desse código de área.

e) $\underset{8}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\quad \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{10}{\_}\quad \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{9.999}$

$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 5.119.488.000$

Logo, são possíveis 5.119.488.000 números de telefone de 10 dígitos nesse país.

16. a) $\dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

b) $\dfrac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!} = \dfrac{\cancel{3!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{6!}} = \dfrac{7}{4}$

17. a) $\dfrac{5!}{5} = \dfrac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$

b) $\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 1} = \dfrac{5}{2} \cdot 4!$

c) $\dfrac{7! - 5!}{4} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 5 \cdot 4!}{4} = \dfrac{5 \cdot 4!(42 - 1)}{4} =$

$= \dfrac{205}{4} \cdot 4!$

18. a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 30$

$\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30$

$n \cdot (n-1) = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos:

$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)

Logo, $n = 6$.

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$

$\dfrac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 72$

$(n+1) \cdot n = 72$

$n^2 + n - 72 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:

$n = 8$ ou $n = -9$ (não convém)

Logo, $n = 8$.

19. $\underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Logo, as 6 letras podem ser escritas de 720 maneiras diferentes.

20. $\underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}$

$5! = 120$

Logo, os portões podem ser pintados de 120 maneiras.

21. Começando com 4:

$\underline{4}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}\ \underset{2}{\underline{2 \text{ ou } 6}}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Começando com 5:

$\underline{5}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}\ \underset{3}{\underline{2, 4 \text{ ou } 6}}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Começando com 6:

$\underline{6}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}\ \underset{2}{\underline{2 \text{ ou } 4}}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Total $= 12 + 18 + 12 = 42$

Logo, podem ser formados 42 números pares.

22. Como a palavra SABER é formada por 5 letras diferentes, temos:

$P_5 = 5! = 120$

Logo, a palavra SABER possui 120 anagramas.

23.
- Temos 2 possibilidades de escolher uma vogal. Tendo escolhido essa vogal, sobram 4 letras para serem permutadas.
  Então, o número de anagramas que começam por vogal é:
  $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$
- Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante que comece o anagrama e 2 possibilidades de escolher uma consoante que termine o anagrama. Tendo escolhido essas consoantes, sobram 3 letras para serem permutadas.
  Então, o número de anagramas que começam e terminam por consoante é:
  $3 \cdot P_3 \cdot 2 = 3 \cdot 3! \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$

Portanto, temos 48 anagramas que começam por vogal e 36 anagramas que começam e terminam por consoante.

24. Vamos permutar 8 letras com a repetição de 3 letras R e 2 letras A.

$P_8^{3,2} = \dfrac{8!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{40.320}{6 \cdot 2} = 3.360$

Logo, a palavra CARREIRA tem 3.360 anagramas.

25. Como as mulheres devem ficar juntas, vamos considerar que há um grupo com três mulheres e que essas três mulheres podem se posicionar de P_3 maneiras.

Tendo escolhido a posição do grupo de mulheres, sobram 5 homens que irão permutar com esse grupo, ou seja, será uma permutação de 6 elementos (5 homens e 1 grupo de mulheres).

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$

Portanto, as pessoas dessa fila podem se posicionar de 4.320 maneiras diferentes, de modo que as mulheres fiquem juntas.

26. Devemos permutar 6 bandeiras, sendo 2 vermelhas e 3 azuis. Então:

$P_6^{2,3} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{720}{2 \cdot 6} = 60$

Podemos emitir 60 sinais diferentes.

27. a) $P_{12} = 12! = 479.001.600$

b) $P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 103.680$

Portanto, se não houver restrições os livros poderão ser arrumados de 479.001.600 maneiras, mas se os livros de uma mesma matéria tiverem de ficar juntos haverá 103.680 maneiras de arrumá-los.

28. a) A sequência pode ser representada assim:

$$\underbrace{\boxed{A}}_{1}\cdot\underbrace{\boxed{B}}_{1}\cdot\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_3} = 1 \cdot 1 \cdot 3! = 6$$

Logo, teremos 6 sequências de etapas.

b) A e B devem ficar juntas; isso pode ocorrer de 2 maneiras. E também é necessário permutar o conjunto AB e as demais etapas, ou seja, permutar 4 elementos.
Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:
$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$
Portanto, temos 48 sequências de etapas.

29. A soma procurada (S) tem P_5 parcelas: $P_5 = 5! = 120$
Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 24 vezes (número de permutações dos algarismos nas outras ordens).

DM	UM	C	D	U
1	2	3	4	5
2	1	3	4	5
1	3	2	4	5
2	3	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	2	3	4	1
2	5	3	4	1

Ocorre o mesmo com as outras ordens. Então, a soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$$\underbrace{(5 + 5 + \dots + 5)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + \dots + 4)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(3 + 3 + \dots + 3)}_{24 \text{ vezes}} +$$
$$+ \underbrace{(2 + 2 + \dots + 2)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{24 \text{ vezes}} =$$
$$= 24 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 360$$

Assim:
$S = 360\text{ U} + 360\text{ D} + 360\text{ C} + 360\text{ UM} + 360\text{ DM}$
$S = 360 + 3.600 + 36.000 + 360.000 + 3.600.000$
$S = 3.999.960$
Portanto, a soma é 3.999.960.

30. Temos 10 objetos; vamos considerar que atribuiremos a cada um deles um número, de acordo com a caixa em que ele será colocado. Assim, deveremos ter 5 números 1 (pois 5 objetos devem ser colocados na caixa 1), 3 números 2 e 2 números 3. Então, a quantidade de modos de distribuir esses números entre os objetos é dada pela permutação de 10 números com 5 repetições do 1, 3 repetições do 2 e 2 repetições do 3):

$$P_{10}^{5,\,3,\,2} = = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2.520$$

Logo, podemos guardar os 10 objetos nas 3 caixas de 2.520 modos.

31. Para se locomover de A para B, a pessoa deverá deslocar-se 4 vezes para a direita (D) e 2 vezes para baixo (B), em qualquer ordem; assim, a quantidade de caminhos diferentes possíveis pode ser dada pela permutação de 6 letras em que 4 são D e 2 são B:

$$P_6^{4,\,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Para se locomover de B para C, a pessoa deverá deslocar-se 2 vezes para a direita e 4 vezes para baixo, assim:
$P_6^{4,\,2} = 15$

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de caminhos diferentes possíveis para ir de A para C é: $15 \cdot 15 = 225$
Portanto, são possíveis 225 caminhos diferentes.

32. $A_{5,\,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 60$
Logo, 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares de 60 modos diferentes.

33. $A_{10,\,2} = \dfrac{10!}{(10-2)!} = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$
Logo, há 90 possíveis resultados da eleição.

34. $A_{5,\,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$
Logo, há 60 possíveis resultados para as 3 primeiras colocações.

35. $A_{20,\,2} = \dfrac{20!}{(20-2)!} = \dfrac{20!}{18!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$
Logo, há 380 possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares.

36. $A_{x,\,2} = 156$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 156 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 156 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - x - 156 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$x = 13$ ou $x = -12$ (não convém, pois $x \geqslant 2$)
Logo, $x = 13$.

37. $A_{6,\,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = 30$
Logo, uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 30 maneiras diferentes.

38. $A_{10,\,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
Então, há 720 possíveis segredos.
Se uma pessoa levar 10 segundos em cada um dos possíveis segredos, vai gastar 7.200 segundos ($720 \cdot 10$), ou seja, 2 horas para testar todos os possíveis segredos.
Comentário: Uma variação desse exercício pode ser feita considerando que o disco do cofre tem, no lugar dos algarismos, as 26 letras de nosso alfabeto. Espera-se que os alunos concluam que seriam necessárias 43 horas e 20 minutos.

39. $A_{5,\,3} \cdot A_{3,\,2} = \dfrac{5!}{(5-3)!} \cdot \dfrac{3!}{(3-2)!} = 60 \cdot 6 = 360$
Logo, o número de sequências numéricas será 360.

40. $C_{15,\,10} = \dfrac{15!}{10! \cdot (15-10)!} = \dfrac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003$
Logo, ele poderá escolher as 10 questões de 3.003 formas.

41. Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois de seus vértices não consecutivos.
Sendo d o número de diagonais de um polígono de n lados e n vértices, temos:
$C_{n,\,2} =$ nº de diagonais + nº de lados
$d = C_{n,\,2} - n$

$$d = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n \Rightarrow d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n$$

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Comentário: Essa questão permite um trabalho intradisciplinar com Geometria plana.

42. $C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{4!}} = 35$

Podem ser formadas 35 comissões diferentes.

43. $C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} = 45$

Foram trocados 45 apertos de mão.

44. $C_{6,2} \cdot C_{6,3} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 15 \cdot 20 = 300$

Portanto, há 300 possibilidades de comissão.

45. $C_{5,2} \cdot C_{10,3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = 10 \cdot 120 = 1.200$

Podemos formar 1.200 conjuntos diferentes de 5 elementos com 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos.

46. $\underline{S}$ $\underline{U}$ $\underline{C}$ $\underline{E}$ SS $\underline{O}$

Como queremos grupos de 3 letras distintas, devemos considerar as combinações formadas com as letras S, U, C, E e O:

$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$

Logo, podem ser constituídos 10 grupos de 3 letras distintas.

São 2 consoantes e 3 vogais e, portanto, não há grupos sem vogal.

47. 1, 2, 3, 4, ..., 15

Temos nesse grupo 8 números ímpares e 7 números pares.

$C_{8,5} \cdot C_{7,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 56 \cdot 35 = 1.960$

Logo, podem ser escolhidos 1.960 diferentes grupos de 8 números.

48. Em um baralho de 52 cartas, há 13 cartas de espadas.

$C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{10!}} = 286$

Logo, podem ser selecionados 286 grupos de 3 cartas de espadas.

49. Vamos combinar 8 bolas tomadas 3 a 3 e retirar o número de combinações das 3 bolas vermelhas, tomadas 3 a 3.

$C_{8,3} - C_{3,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 0!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{5!}} - 1 = 56 - 1 = 55$

Logo, o número de maneiras diferentes de retirar 3 bolas, de modo que não saiam somente bolas vermelhas, é 55.

50. Para formar os triângulos, devemos escolher 2 pontos dos 7 de uma reta e 1 ponto dos 4 da outra, ou 1 ponto dos 7 de uma reta e 2 pontos dos 4 da outra.

$C_{7,2} \cdot C_{4,1} + C_{7,1} \cdot C_{4,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 4 + 7 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$

$= 21 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 84 + 42 = 126$

Portanto, podem ser formados 126 triângulos.

51. $C_{53,6} = \frac{53!}{47! \cdot 6!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot \overset{17}{\cancel{51}} \cdot \overset{10}{\cancel{50}} \cdot 49 \cdot \cancel{48}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} =$

$= 22.957.480$

O jogador pode escolher 6 números de 22.957.480 maneiras.

Comentário: Seria interessante propor uma pesquisa sobre os tipos de loterias existentes. Pode-se sortear um tipo de loteria para cada grupo e pedir aos alunos que calculem a chance que uma aposta simples tem de ser a vencedora no respectivo jogo. Provavelmente haverá surpresa entre os alunos ao verificarem que a chance de sucesso em loterias é bastante remota.

Exercícios complementares

1.
- E_1 (escolha da entrada): 3 possibilidades
- E_2 (escolha do prato principal): 2 possibilidades
- E_3 (escolha da sobremesa): 4 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Logo, são 24 opções.

2. Estação de partida: 11 possibilidades

Estação de chegada: 10 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $11 \cdot 10 = 110$

Logo, são necessários 110 tipos de bilhete.

3. $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

Logo, o pódio pode ser formado com 3 pilotos de 720 maneiras diferentes.

4. $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$

Logo, podem ser formados 60 números inteiros distintos.

5. $C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Portanto, são 10 as possíveis escolhas.

Comentário: Essa questão permite uma atividade interdisciplinar com Química. O cálculo matemático indica que as escolhas possíveis dos ternos são 10, porém convém consultar o professor de Química para saber quais das escolhas levam realmente a um novo produto químico.

6. $C_{7,3} \cdot C_{5,2} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 35 \cdot 10 = 350$

Podem ser formados 350 grupos.

7. $C_{8,5} \cdot C_{9,7} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot \frac{9!}{7! \cdot (9-7)!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 56 \cdot 36 = 2.016$

A seleção pode ser feita de 2.016 maneiras.

8. $P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

Se as bolas forem colocadas em fila, há 56 resultados possíveis.

9. $C_{n,2} = 28 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 28 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow n = 8$ ou $n = -7$ (não convém)

Logo, $n = 8$.

Estavam na festa 8 amigos.

10. O professor pode ministrar as aulas das seguintes maneiras:
- 8, 8 e 4 aulas → 3 maneiras
- 6, 6 e 8 aulas → 3 maneiras

Então: $3 + 3 = 6$

alternativa b

11. $\boxed{\text{Centena}}\ \boxed{\text{Dezena}}\ \boxed{\text{Unidade}}$

Unidade: 2 possibilidades: (2 ou 4)
Dezena: 4 possibilidades
Centena: 3 possibilidades

Então: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$
Logo, poderemos formar 24 números pares com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 sem repetição.

12. Se um número é par, termina com 2.

___ ___ 2

6 possibilidades
6 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos: $6 \cdot 6 = 36$
São 36 possibilidades de números pares com 3 algarismos entre 1, 2, 3, 5, 7 e 9.
Precisamos excluir desse conjunto os números que têm 3 algarismos iguais e os que têm todos os algarismos distintos, para que tenhamos a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais. Assim:

- O único que tem os 3 algarismos iguais é 222. Portanto, 1 número.
- Os números com os 3 algarismos distintos e pares totalizam: $5 \cdot 4 = 20$

Logo, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é dada por: $36 - 1 - 20 = 15$
alternativa c

13. Para João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila sem que haja um corredor entre eles, devemos ter:

- os dois sentados nas poltronas da esquerda: 2 possibilidades (P_2);
- ou os dois sentados nas poltronas do meio: 6 possibilidades (P_3);
- ou os dois sentados nas poltronas da direita: 2 possibilidades (P_2).

Logo, eles podem ocupar duas poltronas dessa fila, sem que haja um corredor entre eles, de 10 modos.
alternativa d

14. Chamando de n o número de cores de papéis para confeccionar as embalagens, se a combinação de n cores, 2 a 2, produz 30 embalagens diferentes, significa que:
$A_{n,\,2} = 30$
$\dfrac{n!}{(n-2)!} = 30$
$n \cdot (n - 1) = 30$
$n^2 - n - 30 = 0$
$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)
Logo, $n = 6$.
O número de cores diferentes é 6.
alternativa c

15. Descartando as ordens simétricas, temos:

$\boxed{A}\ \underbrace{\text{BCDEF}}_{P_5}\ \boxed{A}$

$\dfrac{P_5}{2} = \dfrac{5!}{2} = \dfrac{120}{2} = 60$

O tempo gasto em cada sequência é 1 min 30 s = 90 s.
Assim, o tempo mínimo necessário será:
$(60 \cdot 90)$ s = 5.400 s = 90 min
alternativa b

16. Podemos iluminar essa sala com:

- 1 lâmpada acesa: 5 possibilidades (P_5^4);
- ou 2 lâmpadas acesas: 10 possibilidades ($P_5^{2,3}$);
- ou 3 lâmpadas acesas: 10 possibilidades ($P_5^{2,3}$);
- ou 4 lâmpadas acesas: 5 possibilidades (P_5^4);
- ou 5 lâmpadas acesas: 1 possibilidade (P_5^5).

Logo, o total de modos para iluminar essa sala é 31.

17. Inicialmente, devemos considerar a quantidade possível de escolhas de 2 homens e 2 mulheres entre os 5 homens e as 4 mulheres disponíveis:

$C_{5,\,2} \cdot C_{4,\,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 60$

Para cada um desses 60 grupos de 2 homens e 2 mulheres, as duplas mistas podem ser escolhidas de 2 formas diferentes; logo: $2 \cdot 60 = 120$
Portanto, as equipes podem ser selecionadas de 120 maneiras.

18. A quantidade de sucos diferentes que a fábrica produz é dada por:

$2 \cdot (5 + C_{5,\,2}) = 30$

$C_{5,\,2}$: duplo
5: simples
2: açúcar ou adoçante

alternativa a

19. **a)** $P_6 = 6! = 720$
$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5! = 120$
É possível formar 720 números, e 120 iniciam com o algarismo 1.

b) A quantidade de números que começam com os algarismos 1, 2, 3 ou 4 é $4 \cdot P_5 = 480$. Como o número 512.346 é o primeiro que inicia com o algarismo 5, sua posição é 481ª.
A quantidade de números que iniciam com o algarismo 1 é $1 \cdot P_5 = 120$; a quantidade que começa com o algarismo 2 é $1 \cdot P_5 = 120$; logo, o número 312.456 ocupa a posição 241 e o número que ocupa a posição 242 é 312.465.

20. Temos de permutar os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e contar quantas senhas são menores que a de número 75.913.

- Números que começam com os algarismos 1, 3 ou 5:

$\underbrace{\boxed{1, 3 \text{ ou } 5}}_{3}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}_{P_4}$

$3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$

- Números cujo primeiro algarismo é 7 e o segundo é 1 ou 3:

$\boxed{7}\ \underbrace{\boxed{1 \text{ ou } 3}}_{2}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}_{P_3}$

$2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

- Números cujo primeiro algarismo é 7, o segundo é 5 e o terceiro é 1 ou 3:

$\boxed{7}\ \boxed{5}\ \underbrace{\boxed{1 \text{ ou } 3}}_{2}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}}_{P_2}$

$2 \cdot 2! = 2 \cdot 2 = 4$

Assim, a quantidade de números menores que 75.913 é dada por:

$72 + 12 + 4 = 88$

Portanto, a ordem de chamada do candidato de número 75.913 é 89.

alternativa e

21. $(\log_3 n)! = 24 \Rightarrow (\log_3 n)! = 4! \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 n = 4 \Rightarrow n = 3^4 \Rightarrow n = 81$

Logo, $S = \{81\}$.

Comentário: Essa questão requer uma abordagem intradisciplinar com logaritmo. Convém verificar se há necessidade prévia de revisar o conceito.

22. $\underbrace{12}_{\text{presidente}} \cdot \underbrace{11}_{\text{vice-presidente}} \cdot \underbrace{C_{10,\,3}}_{\text{supervisores}} = 132 \cdot 120 = 15.840$

Logo, há 15.840 maneiras de compor uma comissão.

23. Como 2 das 5 atividades estão vinculadas a determinados horários fixos (13 h e 17 h), o aposentado deve sempre realizar a atividade das 13 h (levar o neto para a escola) antes da atividade das 17 h (pegar o neto na escola). Assim, considerando a realização da atividade das 13 h, temos o seguinte esquema para a ordem das atividades:

$\boxed{13\text{ h}}\ \underset{4}{\_\_}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_} \rightarrow$ 24 maneiras

não pode ser a atividade das 17 h

$\underset{3}{\_\_}\ \boxed{13\text{ h}}\ \underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_} \rightarrow$ 18 maneiras

não pode ser a atividade das 17 h

$\underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \boxed{13\text{ h}}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_} \rightarrow$ 12 maneiras

$\underset{3}{\_\_}\ \underset{2}{\_\_}\ \underset{1}{\_\_}\ \boxed{13\text{ h}}\ \boxed{17\text{ h}} \rightarrow$ 6 maneiras

Somando os resultados, temos:

$24 + 18 + 12 + 6 = 60$

Logo, o aposentado pode realizar as atividades em ordem diferente de 60 maneiras.

alternativa b

24. Como todas as empresas devem ser contratadas, uma delas receberá 2 trabalhos. Podemos escolher o conjunto de 2 trabalhos dados a uma mesma empresa de $C_{4,\,2}$ modos distintos. Esse conjunto de 2 trabalhos com os outros 2 trabalhos restantes podem ser distribuídos para as 3 empresas de P_3 modos. Assim:

$C_{4,\,2} \cdot P_3 = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$

Portanto, os trabalhos podem ser distribuídos de 36 maneiras distintas.

alternativa c

25. A quantidade de maneiras de se escolher 2 letras entre a, b e c é dada por: $C_{3,\,2} = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Para escolher, entre as 7 letras restantes, as outras 2 letras para formar o anagrama, temos:

$C_{7,\,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$

Assim, a quantidade de maneiras de se formar um conjunto de 4 letras escolhidas entre as 10 primeiras letras do alfabeto com 2 das letras a, b e c é: $3 \cdot 21 = 63$

Como no anagrama leva-se em consideração a ordem, para cada um desses conjuntos de 4 letras, teremos P_4 anagramas. Logo: $P_4 \cdot 63 = 4! \cdot 63 = 1.512$

Portanto, podemos formar 1.512 anagramas.

alternativa d

Autoavaliação

1. 

$3 \cdot 4 = 12$

Logo, existem 12 maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B.

alternativa c

2. $\underset{9}{\_\_} \cdot \underset{9}{\_\_} \cdot \underset{8}{\_\_} \cdot \underset{7}{\_\_} = 9^2 \cdot 56$

Portanto, existem $9^2 \cdot 56$ números naturais de 4 algarismos que não têm algarismos repetidos.

alternativa b

3. $6! = 6 \cdot 5!$

alternativa d

4. $P_4 = 4! = 24$

Logo, são possíveis 24 classificações nessa prova.

alternativa d

5. PAPAGAIO

$P_8^{2,\,3} = \dfrac{8!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3.360$

Portanto, há 3.360 anagramas da palavra PAPAGAIO.

alternativa d

6. Uma reta passará por 2 pontos desses 15. O número de retas será $C_{15,\,2}$.

alternativa c

7. $C_{5,\,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Logo, há 10 possibilidades de escolha da dupla.

alternativa b

8. Combinações são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante.

alternativa c

Pesquisa e ação

Essa atividade aborda uma aplicação de análise combinatória aliada ao uso de tecnologia. Os *QR Codes* estão presentes em propagandas, em codificações de *sites*, *games*, entre outros conteúdos.

Em uma etapa da atividade, na do debate sobre o que foi decifrado, poderão surgir alguns dados diferentes sobre o *QR Code*; assim, se achar conveniente, aborde com os alunos a importância de fontes confiáveis na pesquisa sobre qualquer tema.

Se preferir, poderá comparar o código de barras tradicional com o *QR Code*, para que os alunos possam compreender a ampliação das combinações realizadas. Além disso, o uso do celular como dispositivo decodificador é bastante interessante.

ISBN 978-85-16-10505-1