MATEMÁTICA

organizadora Fernanda Cesar Bonafini

BUP

ALWAYS LEARNING

PEARSON

PÁGINA EM BRANCO

MATEMÁTICA

PÁGINA EM BRANCO

MATEMÁTICA

Organizadora
Fernanda Cesar Bonafini
Doctoral Student – The Pennsylvania State University

PEARSON

Respeite o direito autoral

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Coordenação de produção editorial: Silvana Afonso e Thelma Babaoka
Editora de desenvolvimento: Bruna Toscano
Editor de texto: Sérgio Nascimento
Editor assistente: Marcos Guimarães
Coordenadora de texto: Thelma Guimarães
Redação: Rafael Mileo
Preparação: Thaís Richter
Revisão: Norma Gusukuma
Capa: Alexandre Mieda
Projeto gráfico e diagramação: Casa de Ideias

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática. -- São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2012.

ISBN 978-85-64574-41-0

1. Matemática – Estudo e ensino.

11-09683 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

2011
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Rua Nelson Francisco, 26 – Limão
CEP: 02712-100, São Paulo – SP
Fone: (11) 2178-8686 – Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearson.com

SUMÁRIO

Apresentação VI
Prefácio VIII

Unidade 1 **Introdução à algebra** 1
Objetivos de aprendizagem 1
Temas 1
Introdução 2
Conjuntos numéricos e os números reais 3
Radiciação e potenciação 12
Polinômios e fatoração 16
Expressões fracionárias 25

Unidade 2 **Equações e inequações** 33
Objetivos de aprendizagem 33
Temas 33
Introdução 33
Equações 34
Inequações 44

Unidade 3 **Funções** 55
Objetivos de aprendizagem 55
Temas 55
Introdução 56
Funções e suas propriedades 56
Funções do primeiro e segundo graus 70
Funções polinomiais 78
Funções exponenciais 88

Unidade 4 **Introdução ao cálculo** 105
Objetivos de aprendizagem 105
Temas 105
Introdução 106
Derivada e integral de uma função 106
Integral de uma função 114

APRESENTAÇÃO

Nos catálogos de livros universitários, há vários títulos cuja primeira edição saiu há 40, 50 anos ou até mais. São livros que, graças à identificação da edição na capa (e somente a ela), têm sua idade revelada. E, ao contrário do que muitos podem imaginar, isso não é um problema. Pelo contrário, trata-se de obras conhecidas, adotadas em diversas instituições de ensino, usadas por estudantes dos mais diferentes perfis e reverenciadas pelo que representam para o ensino.

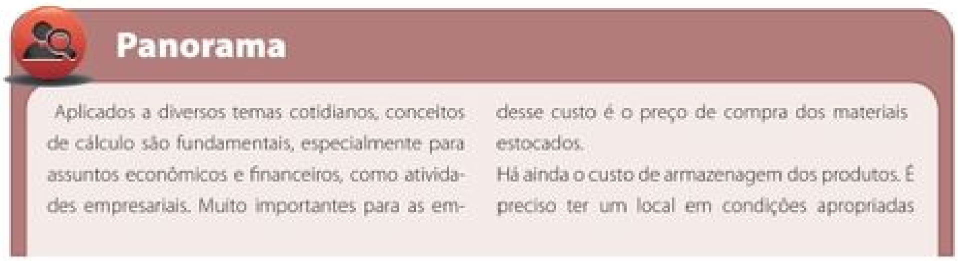
Qual o segredo de sucesso desses livros? O que eles têm de diferente de vários outros que, embora tenham tido boa aceitação em um primeiro momento, não foram tão longe? Em poucas palavras, esses livros souberam se adaptar às novas realidades ao longo do tempo, entendendo as mudanças pelas quais a sociedade – e, consequentemente, as pessoas – passava e as novas necessidades que se apresentavam.

Para que isso fique mais claro, vamos pensar no seguinte: a maneira como as pessoas aprendiam matemática na década de 1990 é igual ao modo como elas aprendem hoje? Embora os alicerces da disciplina permaneçam os mesmos, a resposta é: não! Nesse intervalo de tempo, ocorreram mudanças significativas – a Internet se consolidou, os celulares se popularizaram, redes sociais surgiram etc. E todas essas mudanças repercurtiram no modo de vida das pessoas, que se tornou mais rápido e desafiador, mudando os fundamentos do processo de ensino/aprendizagem.

Foi com base nisso que nasceu a Bibliografia Universitária Pearson (BUP). Concisos sem serem rasos e simples sem serem simplistas, os livros que compõem essa série são baseados na premissa de que, para atender sob medida às necessidades tanto dos alunos de graduação como das instituições de ensino – independentemente de eles estarem envolvidos com ensino presencial ou a distância –, é preciso um processo amplo e flexível de construção do saber, que leve em conta a realidade em que vivemos.

Assim, as obras apresentam de maneira clara os principais conceitos dos temas propostos, trazendo exatamente aquilo que o estudante precisa saber complementado com aprofundamentos e discussões para reflexões. Além disso, possuem uma estrutura didática que propõe uma dinâmica única, a qual convida o leitor a levar para seu dia a dia os aspectos teóricos apresentados. Veja como isso funciona na prática:

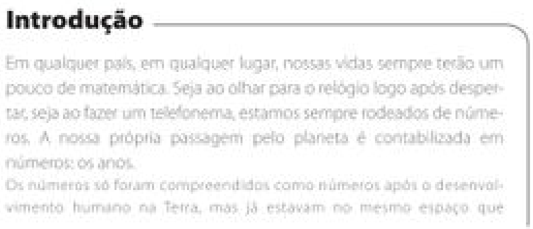
A seção “Panorama” aprofunda os tópicos abordados ao mostrar como eles funcionam na prática, promovendo interessantes reflexões.


Panorama

Aplicados a diversos temas cotidianos, conceitos de cálculo são fundamentais, especialmente para assuntos econômicos e financeiros, como atividades empresariais. Muito importantes para as em- desse custo é o preço de compra dos materiais estocados.

Há ainda o custo de armazenagem dos produtos. É preciso ter um local em condições apropriadas

Ao longo do livro, o leitor se depara com vários hipertextos. Classificados como “Saiba mais”, “Exemplo”, “Fique atento” e “Link”, esses hipertextos permitem ao aluno ir além em suas pesquisas, oferecendo-lhe amplas possibilidades de aprofundamento.


Introdução

Em qualquer país, em qualquer lugar, nossas vidas sempre terão um pouco de matemática. Seja ao olhar para o relógio logo após despertar, seja ao fazer um telefonema, estamos sempre rodeados de números. A nossa própria passagem pelo planeta é contabilizada em números: os anos.

Os números só foram compreendidos como números após o desenvolvimento humano na Terra, mas já estavam no mesmo espaço que

A *linguagem dialógica* aproxima o estudante dos temas abordados, eliminando qualquer obstáculo para seu entendimento e incentivando o estudo.

A *diagramação* contribui para que o estudante registre ideias e faça anotações, interagindo com o conteúdo.

Todas essas características deixam claro que os livros da Bibliografia Universitária Pearson constituem um importante aliado para estudantes conectados e professores objetivos – ou seja, para o mundo de hoje – e certamente serão lembrados (e usados) por muito tempo.

Boa leitura!

PREFÁCIO

O livro *Matemática* é mais uma obra da série Bibliografia Universitária Pearson (BUP). Ele foi criado especificamente para atender o público brasileiro que inicia seus estudos em cálculo diferencial e integral. O texto se baseia em uma linguagem dialógica, aproximando o estudante dos temas abordados e procurando eliminar qualquer obstáculo para entendimento do conteúdo. Ao longo de toda a obra, as definições são abordadas de maneira intuitiva e com forte relação com o cotidiano, ocasionando que a leitura se torne muito agradável.

O livro está dividido em quatro unidades. Na primeira é feita uma introdução à álgebra, passando por conjuntos numéricos, radiciação, potenciação, polinômios, fatoração e expressões fracionárias. A Unidade 2 enfoca o uso de equações e inequações. É na Unidade 3 que são feitos os estudos de funções e suas propriedades, abrangendo os conceitos de funções do primeiro e segundo graus, funções polinomiais e funções exponenciais. A última unidade apresenta, de maneira objetiva, uma introdução ao cálculo, percorrendo os principais conceitos de derivação e integração.

O leitor perceberá que essa obra apresenta de maneira clara e concisa os principais conceitos dos temas propostos, trazendo exatamente aquilo que o estudante precisa saber e complementando com discussões para reflexões. Além disso, o livro possui uma estrutura didática dinâmica que convida o leitor a levar para seu dia a dia os aspectos teóricos aqui apresentados.

Em termos de estrutura, em cada capítulo o leitor encontrará hipertextos que chamam a atenção para algo importante ou ainda que possibilitam que se aprofunde em suas pesquisas. A diagramação contribui para que o estudante registre suas ideias e interaja com o material. Ao final de cada unidade, o leitor encontrará uma seção chamada *Panorama*, a qual busca aprofundar os tópicos abordados em uma aplicação prática, convidando-o à reflexão.

Para o professor, este é um livro fácil de se utilizar em sala de aula, tanto em ambientes presenciais como virtuais. O livro o apoiará na definição de conceitos e aplicações de noções matemáticas, tão importantes para o dia a dia dos estudantes. Por fim, espera-se que de alguma maneira esta obra possa contribuir para acrescentar algo de novo aos não iniciados em cálculo.

Bons estudos!

Fernanda Cesar Bonafini
Doctoral Student – The Pennsylvania State University

UNIDADE 1

Introdução à algebra

Objetivos de aprendizagem

- Entender como os números reais são representados.
- Reconhecer a ordem na reta e a notação de intervalo.
- Utilizar potenciação e radiciação.
- Saber fatorar polinômios.
- Saber como simplificar expressões fracionárias.

Temas

- **1 – Conjuntos numéricos e os números reais**
  Para começar, você vai aprender o que são conjuntos numéricos e números reais. Seja para contar as horas, ou para mudar o canal na televisão, você usa números regularmente no seu dia a dia. Agora, você vai aprender um pouquinho mais sobre eles.
- **2 – Radiciação e potenciação**
  Certamente você já escutou a palavra *potência* alguma vez na sua vida. Potência, no dicionário, pode ter o significado de força, mas é também uma operação matemática bastante utilizada. O oposto dela é a radiciação. Neste tema, você vai conhecer mais sobre essas operações.
- **3 – Polinômios e fatoração**
  Você já ouviu falar em polinômios? Eles são uma classe de funções matemáticas simples e infinitamente diferenciáveis, muito utilizadas em análises numéricas. A palavra pode ser complicada, mas neste tema você vai perceber que os polinômios não são nenhum bicho de sete cabeças.
- **4 – Expressões fracionárias**
  Você já comeu uma fatia de pizza alguma vez na sua vida, certo? Você sabe o que ela representa do todo da pizza? Uma fração. Neste tema, vamos aprender a transformar frações complexas em expressões simples.

Introdução

Em qualquer país, em qualquer lugar, nossas vidas sempre terão um pouco de matemática. Seja ao olhar para o relógio logo após despertar, seja ao fazer um telefonema, estamos sempre rodeados de números. A nossa própria passagem pelo planeta é contabilizada em números: os anos.

Os números só foram compreendidos como números após o desenvolvimento humano na Terra, mas já estavam no mesmo espaço que hoje ocupamos. Eles estavam, por exemplo, na fórmula da água ou nos componentes químicos da atmosfera. A matemática depende do ser humano para ser bem compreendida como matemática. Números não seriam números, não fosse nossa inteligência.

No dia a dia, utilizamos os números para abstrair objetos sem nos preocuparmos em entender a matemática mais profundamente. Sabemos diferenciar uma laranja de 10 laranjas, mas não sabemos dizer, assim, "de bate-pronto", o que é um número racional e um número irracional. Conjuntos de números, então, parecem uma realidade distante da nossa. Só parecem...

Os números naturais – aqueles que começam com 0 e sempre andam nas casas positivas – surgiram porque o homem precisava deles para compreender melhor o mundo a sua volta. A distância entre dois pontos no espaço, por exemplo, pode ser calculada com números naturais. O tempo só pode ser estimado com números naturais.

A ciência dos números, isto é, a matemática, é hoje conhecimento básico necessário na vida de qualquer pessoa, independentemente de raça, religião ou nacionalidade.

Para o nível de desenvolvimento atingido pelo homem nos tempos atuais, é preciso cada vez mais um conhecimento aprofundado de matemática. Não conte nos dedos, porque eles vão lhe faltar, mas nas próximas páginas você vai aprender muito mais sobre os números. Você nunca esteve tão próximo deles como agora!

Conjuntos numéricos e os números reais

Representação dos números reais

Você sabe o que é um número real?

Números reais podem ou não ser escritos na forma decimal. Exemplos: -8, 0, 1,75, 2,333..., 8/5, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{16}$ e π.

Conheça alguns subconjuntos importantes que fazem parte dos números reais:

- *números naturais* – {0, 1, 2, 3,...}
- *números inteiros* – {...,−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,...}
- *números racionais* e *números irracionais* (exemplos a seguir).

As chaves { } são utilizadas para descrever conjuntos com seus *elementos*.

Um *número* é *racional* quando pode ser escrito como uma razão a/b de dois números inteiros, onde $b \neq 0$. Podemos usar a *notação de conjunto com propriedade* para descrever os números racionais:

$$\left\{\frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \text{ são inteiros, e } b \neq 0\right\}$$

Um número racional pode ter uma quantidade finita de casas após a vírgula, como $7/4 = 1{,}75$, ou ter uma quantidade infinita de casas, como em $4/11 = 0{,}363636... = 0{,}\overline{36}$ (Exemplo 1.1).

A barra sobre o 36 indica quais dígitos se repetem.

Você sabe o que caracteriza um *número irracional*?

Para ser irracional, um número real não pode ter um bloco de dígitos que se repete indefinidamente. Exemplo: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ e $\pi = 3{,}14159265...$

Exemplo

1.1 Análise das formas decimais de números racionais

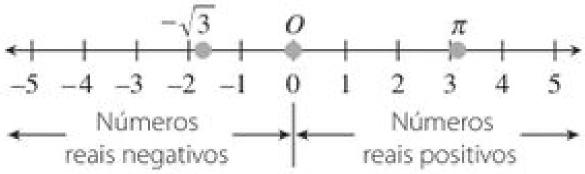
Determine a forma decimal de $\frac{1}{16}$, $\frac{55}{27}$ e $\frac{1}{17}$

Solução

$\frac{1}{16} = 0{,}0625$ e $\frac{55}{27} = 2{,}037037037...$

$\frac{1}{17} \cong 0{,}0588235294$. O símbolo $\cong$ significa "é aproximadamente igual a". O resultado da divisão $\frac{1}{17}$ é um número racional, porque possui um bloco que se repete infinitamente.

Figura 1.1 A reta de números reais.



Para representar os números reais, marcamos o número real 0, a *origem*, em uma reta horizontal. *Números positivos* estão à direita da origem e *números negativos*, à esquerda, como na Figura 1.1.

A ordem na reta e a notação de intervalo

O conjunto dos números reais é *ordenado*. Você pode comparar uma dupla de números reais diferentes usando desigualdades, isto é, dizendo que um é "menor que" ou "maior que" o outro.

Ordem dos números reais

Sejam a e b dois números reais quaisquer.

Símbolo	Definição	Leitura
$a > b$	$a - b$ é positivo	a é maior que b
$a < b$	$a - b$ é negativo	a é menor que b
$a \geq b$	$a - b$ é positivo ou zero	a é maior ou igual a b
$a \leq b$	$a - b$ é negativo ou zero	a é menor ou igual a b

Os símbolos $>$, $<$, $\geq$ e $\leq$ são *símbolos de desigualdade.*

Se $a > b$, você sabe onde a está em relação a b, na linha dos números reais?

À direita de b na reta dos números reais. Podemos comparar dois números reais quaisquer devido à seguinte propriedade importante desses números.

Lei da tricotomia

Somente uma das seguintes expressões é verdadeira: $a < b$, $a = b$ ou $a > b$, independentemente dos valores de a e b.

Veja nos exemplos 1.2 e 1.3 como desigualdades podem ser usadas para descrever *intervalos* de números reais.

Exemplo

1.2 Interpretação das desigualdades

Descreva e represente graficamente os intervalos de números reais para as desigualdades.

(a) $x < 3$ **(b)** $-1 < x \leq 4$

Solução

(a) A desigualdade $x < 3$ descreve todos os números reais menores que 3 (Figura 1.2a).

(b) A *dupla desigualdade* $-1 < x \leq 4$ representa todos os números reais entre -1 e 4, excluindo -1 e incluindo 4 (Figura 1.2b).

Exemplo

1.3 Descrição das desigualdades

Escreva os intervalos de números reais usando desigualdade e represente graficamente.

(a) Os números reais entre -4 e $-0{,}5$.

(b) Os números reais maiores ou iguais a zero.

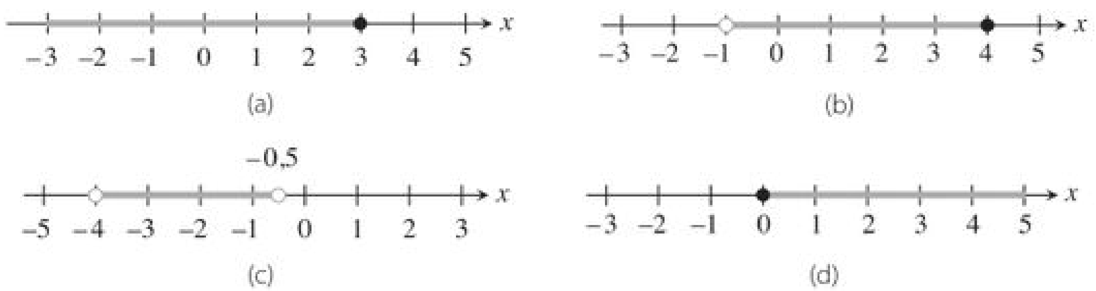
Solução

(a) $-4 < x < -0{,}5$ (Figura 1.2c). **(b)** $x \geq 0$ (Figura 1.2d).

Nas representações gráficas das desigualdades, bolas vazias correspondem a < e > e bolas cheias a ≤ e ≥ (Figura 1.2).

Você percebe como desigualdades definem *intervalos* sobre a reta real? É possível usar uma notação exemplificada por [2, 5] para descrever um *intervalo limitado* que representa o conjunto $\{x \in R \,/ 2 \leq x \leq 5\}$. Além de limitado, esse intervalo é *fechado* porque contém os extremos 2 e 5.

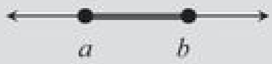
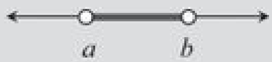
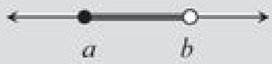
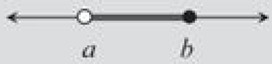
Figura 1.2 Nas representações gráficas das desigualdades, bolas vazias correspondem a < e > e bolas cheias a ≤ e ≥.



Existem quatro tipos de intervalos limitados.

Intervalos limitados de números reais

Sejam a e b números reais com $a < b$.

Notação de intervalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
$[a, b]$	Fechado	$a \leq x \leq b$	
$]a, b[$	Aberto	$a < x < b$	
$[a, b[$	Fechado à esquerda e aberto à direita	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	Aberto à esquerda e fechado à direita	$a < x \leq b$	

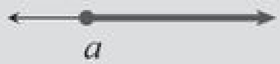
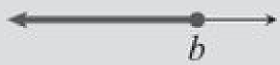
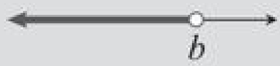
Os números a e b são os *extremos* de cada intervalo.

O símbolo ∞ expressa infinito. Notações de intervalos podem vir com – ou $+\infty$. Você pode escrever o intervalo $x < 2$ com o *intervalo infinito* $]-\infty, 2[$. Este intervalo é *aberto*, pois não contém seu extremo 2.

A notação de intervalo $]-\infty, \infty[$ representa, portanto, todo o conjunto dos números reais. Os símbolos $-\infty$ (*infinito negativo*) e $+\infty$ (*infinito positivo*) permitem usar a notação de intervalo para intervalos não limitados e não são números reais. Existem quatro tipos de *intervalos não limitados* (ou intervalos infinitos).

Intervalos não limitados de números reais

Sejam a e b números reais.

Notação de intervalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
$[a, +\infty[$	Fechado	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	Aberto	$x > a$	
$]-\infty, b]$	Fechado	$x \leq b$	
$]-\infty, b[$	Aberto	$x < b$	

Cada intervalo tem exatamente um extremo que é a ou b.

Exemplo

1.4 Conversão entre intervalos e desigualdades

Converta a notação de intervalo para desigualdade ou vice-versa. Encontre os extremos e verifique se o intervalo é limitado, seu tipo e a representação gráfica.

(a) $[-6, 3[$ **(b)** $]-\infty, -1[$ **(c)** $-2 \leq x \leq 3$

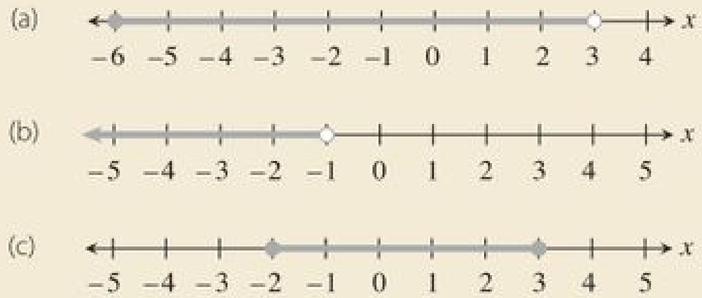
Solução

(a) O intervalo $[-6, 3[$ corresponde a $-6 \leq x < 3$, é limitado e é do tipo fechado à esquerda e aberto à direita (veja a Figura 1.3a). Os extremos são -6 e 3.

(b) O intervalo $]-\infty, -1[$ corresponde a $x < -1$, não é limitado e é aberto (veja a Figura 1.3b). O extremo é somente -1.

(c) A desigualdade $-2 \leq x \leq 3$ corresponde a um intervalo fechado e limitado, dado por $[-2, 3]$ (veja a Figura 1.3c). Os extremos são -2 e 3.

Figura 1.3 Representações gráficas dos intervalos de números reais do Exemplo 1.4.



Propriedades básicas da álgebra

Talvez você ainda não tenha percebido, mas a álgebra faz parte do seu dia a dia. A álgebra envolve *variáveis*, como letras ou outros símbolos, para representar números reais. Uma *constante* é uma letra ou símbolo (por exemplo, -2, 0, $\sqrt{3}$, π) que representa um número real específico. *Expressão algébrica* é a combinação de variáveis e constantes envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potências e raízes.

As operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão são representadas pelos símbolos +, –, × (ou •) e ÷ (ou /), respectivamente. Adição e multiplicação são as operações primárias. Subtração e divisão são definidas em termos da adição e multiplicação.

Subtração: $a - b = a + (-b)$

Divisão: $\dfrac{a}{b} = a \times \left(\dfrac{1}{b}\right), b \neq 0$

A *inversa aditiva* ou *oposto* de b é $-b$, e a *inversa multiplicativa* ou *recíproca* de b é $1/b$. As inversas aditivas nem sempre são números negativos. A de 5 é o número negativo -5. Porém, o oposto de -3 é o número positivo 3.

As seguintes propriedades são válidas para números reais, variáveis e expressões algébricas.

Propriedades da álgebra

Sejam u, v e w números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. Propriedade comutativa
Adição: $u + v = v + u$
Multiplicação: $uv = vu$

2. Propriedade associativa
Adição:
$(u + v) + w = u + (v + w)$
Multiplicação: $(uv)w = u(vw)$

3. Propriedade do elemento neutro
Adição: $u + 0 = u$
Multiplicação: $u \cdot 1 = u$

4. Propriedade do elemento inverso
Adição: $u + (-u) = 0$
Multiplicação: $u \dfrac{1}{u} = 1, u \neq 0$

5. Propriedade distributiva
Multiplicação com relação à adição:
$u(v + w) = uv + uw$
$(u + v)w = uw + vw$

Multiplicação com relação à subtração:
$u(v - w) = uv - uw$
$(u - v)w = uw - vw$

Na propriedade distributiva, você vê a *forma fatorada* das expressões algébricas ao lado esquerdo do sinal =. À direita, está a *forma expandida*.

Exemplo

1.5 Uso da propriedade distributiva

(a) Escreva a forma expandida de $(a + 2)x$.

(b) Escreva a forma fatorada de $3y - by$.

Solução

(a) $(a + 2)x = ax + 2x$

(b) $3y - by = (3 - b)y$

Abaixo você vê propriedades da inversa aditiva, assim como exemplos para ilustrar seu significado.

Propriedades da inversa aditiva

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

Propriedade	Exemplo
1. $-(-u) = u$	$-(-3) = 3$
2. $(-u)v = u(-v) = -(uv)$	$(-4)3 = 4(-3) = -(4 \cdot 3) = -12$
3. $(-u)(-v) = uv$	$(-6)(-7) = 6 \cdot 7 = 42$
4. $(-1)u = -u$	$(-1)5 = -5$
5. $-(u + v) = (-u) + (-v)$	$-(7 + 9) = (-7) + (-9) = -16$

Potenciação com expoentes inteiros

Você sabe o que é elevar um número à segunda potência? A potenciação é usada para diminuir produtos de fatores que se repetem.

$$(-3)(-3)(-3)(-3) = (-3)^4 \quad \text{e} \quad (2x + 1)(2x + 1) = (2x + 1)^2$$

Notação exponencial

Sejam a um número real, uma variável ou uma expressão algébrica e n um número inteiro positivo. Então,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}},$$

onde n é o *expoente*, a é a *base* e a é a ***n**-ésima potência de a* (lê-se "a elevado a n").

As expressões mostradas no Exemplo 1.6 têm o mesmo valor, mas bases diferentes:

Exemplo

1.6 Identificação da base

(a) Em $(-3)^5$, a base é -3.

(b) Em -3^5, a base é 3.

Abaixo você conhece as propriedades básicas da potenciação. Preste atenção nos exemplos!

Propriedades da potenciação

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas e m e n números inteiros. Todas as bases são consideradas diferentes de zero.

Propriedade	Exemplo
1. $u^m u^n = u^{m+n}$	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
2. $\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$	$\dfrac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$
3. $u^0 = 1$	$8^0 = 1$
4. $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$	$y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$
5. $(uv)^m = u^m v^m$	$(2z)^5 = 2^5 z^5 = 32z^5$
6. $(u^m)^n = u^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2\cdot 3} = x^6$
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^7 = \dfrac{a^7}{b^7}$

Exemplo

1.7 Simplificação de expressões envolvendo potências

(a) $(2ab^3)(5a^2b^5) = 10(aa^2)(b^3b^5) = 10a^3b^8$

(b) $\dfrac{u^2v^{-2}}{u^{-1}\,v^3} = \dfrac{u^2u^1}{v^2v^3} = \dfrac{u^3}{v^5}$

(c) $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{-3} = \dfrac{(x^2)^{-3}}{2^{-3}} = \dfrac{x^{-6}}{2^{-3}} = \dfrac{2^3}{x^6} = \dfrac{8}{x^6}$

Notação científica

A distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, 149.597.870,691 quilômetros. É um número gigantesco, não é? É para casos assim que existe a notação científica. Ela ajuda a expressar números muito grandes ou muito pequenos. No caso desse número, por exemplo, em notação científica ficaria assim: 149.597.870,691 km $\cong$ 1,5 $\times$ 10^8 km.

O expoente positivo 8 indica que o número original tem 8 casas decimais para a direita.

A massa de uma molécula de oxigênio é de aproximadamente 0,000 000 000 000 000 000 000 053 gramas. Em notação científica, é igual a 5,3 $\times$ 10^{-23} g.

O expoente negativo -23 indica que, ao mover a vírgula do número decimal 23 casas para a esquerda, temos a forma original do número.

Link

Para mais detalhes, acesse <www.tutorbrasil.com.br/estudo_mate matica_online/conjun tos/conjuntos.php>.

Saiba mais

A história dos números naturais e o estado do zero

Você sabia que o número 2 surgiu antes do 1, e o 1 veio antes do 0? As palavras utilizadas para a contagem de objetos foram o primeiro passo para a invenção dos números naturais. Uma abstração seguinte foi identificar o 1. O zero só teve seu próprio numeral em 700 a.C., inventado pelos babilônios. O primeiro estudo esquemático dos números é atribuído aos filósofos gregos Pitágoras e Arquimedes. O conjunto dos números naturais só foi desenvolvido no século XIX, por Giuseppe Peano.

Exemplo

1.8 Conversão da notação científica

(a) $2{,}375 \times 10^8 = 237.500.000$

(b) $0{,}000000349 = 3{,}49 \times 10^{-7}$

Exemplo

1.9 Uso da notação científica

Simplifique $\dfrac{(370.000)\,(4.500.000.000)}{18.000}$

Solução

$$\frac{(370.000)\ (4.500.000.000)^{*}}{18.000} = \frac{(3{,}7 \times 10^{5})\ (4{,}5 \times 10^{9})}{1{,}8 \times 10^{4}}$$

* Vale observar que os parênteses serviram apenas para separar os números que são valores altos. (N.T.)

Radiciação e potenciação

Você sabe o que são radicais? Se $b^2 = a$, então b é a *raiz quadrada* de a. Por exemplo, 2 e −2 são raízes quadradas de 4 porque $2^2 = (-2)^2 = 4$. Da mesma maneira, se $b^3 = a$, então b é a *raiz cúbica* de a. Por exemplo, 2 é a raiz cúbica de 8 porque $2^3 = 8$.

DEFINIÇÃO Raiz *n*-ésima de um número real

Sejam n um número inteiro maior que 1 e a e b números reais.

1. Se $b = a$, então b é uma *raiz n-ésima* de a.
2. Se a tem uma raiz n-ésima, então a *principal raiz n-ésima* de a é aquela com o mesmo sinal de a.
   A principal raiz n-ésima de a é denotada pela *expressão com o radical* $\sqrt[n]{a}$. O inteiro positivo n é o *índice* do radical e a é o *radicando*.

Se $2^n = 8$, então 2 é a raiz cúbica real de 8. Logo, você pode perceber que qualquer número real tem apenas uma raiz n-ésima real quando n é ímpar. Se n é par, números reais positivos têm duas raízes n-ésimas reais e números reais negativos não têm raízes n-ésimas reais. Exemplo: $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ e −16 não tem raiz quarta real. Se $n = 2$, você pode omitir o número 2 da raiz quadrada.

Exemplo

1.10 Verificação das raízes *n*-ésimas principais

(a) $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

(b) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ porque $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

(c) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$ porque $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

(d) $\sqrt[4]{-625}$ não é um número real porque o índice 4 é par e o radicando -625 é negativo (*não* existe número real cuja quarta potência seja negativa).

Propriedades dos radicais

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas e m e n números positivos inteiros maiores que 1. Vamos supor que todas as raízes sejam números reais e todos os denominadores não sejam zero.

Propriedade	Exemplo
1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m \cdot n]{u}$	$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$	$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} \lvert u \rvert & \text{para } n \text{ par} \\ u & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

Simplificação de expressões com radicais

Muitas técnicas de simplificação e raízes de números reais não são mais usadas devido à utilização das calculadoras. No entanto, vamos mostrar com exemplos o que podemos fazer em alguns casos sem o uso delas.

Exemplo

1.11 Remoção de fatores dos radicandos

(a)
$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$$

(b)
$$\sqrt{18x^5} = \sqrt{9x^4 \cdot 2x} = \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x} = 3x^2\sqrt{2x}$$

(c) $\sqrt[4]{x^4y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4}$
$= |xy|$

(d) $\sqrt[3]{-24y^6} = \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3}$
$= -2y^2\sqrt[3]{3}$

Racionalização

Racionalização é o processo de reescrever frações de forma que o denominador fique sem radicais. Quando o denominador tem a forma $\sqrt[n]{u^k}$, você pode multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$, pois

$$\sqrt[n]{u^k} \times \sqrt[n]{u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^k \times u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^{k+n-k}} = \sqrt[n]{u^n} = u$$

Exemplo

1.12 Racionalização

(a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$

(c) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$

Potenciação com expoentes racionais

Você já aprendeu nas seções anteriores como manipular expressões exponenciais com expoentes inteiros. Por exemplo, $x^3 \cdot x^4 = x^7$; $(x^3)^2 = x^6$; $x^5/x^2 = x^3$; $x^{-2} = 1/x^2$, e assim por diante. Os expoentes podem ser também números racionais. Como definir, por exemplo, $x^{1/2}$? Você pode aplicar as mesmas regras que aplicamos para expoentes inteiros a expoentes racionais.

DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Sejam u um número real, variável ou expressão algébrica e n um inteiro maior que 1. Então

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais, então

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \text{e} \qquad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

O numerador de um expoente racional é a *potência* para a qual a base está elevada e o denominador é o índice da *raiz*.

Exemplo

1.13 Conversão de radicais para potências e vice-versa

(a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$ (b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

(c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$ (d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

Se cada fator aparece somente uma vez, você pode qualificar a expressão com potência como simplificada.

Exemplo

1.14 Simplificação de expressões com potências

(a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

(b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

O Exemplo 1.15 sugere como simplificar uma soma ou diferença de radicais.

Exemplo

1.15 Simplificação de expressões com radicais

(a) $$2\sqrt{80} - \sqrt{125} = 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} = 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

(b) $$\sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} = \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} = 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y} = (2|x| - |y|)\sqrt{y}$$

Links

Para mais detalhes, acesse <www.blogviche.com.br/2006/03/25/radiciacao/> e <www.blogviche.com.br/2006/02/23/potenciacao/>.

Resumo dos procedimentos usados para simplificar expressões com radicais:

1. Remover fatores dos radicais (Exemplo 1.11).
2. Eliminar radicais de denominadores e denominadores dos radicandos (Exemplo 1.12).
3. Combinar somas e diferenças dos radicais (Exemplo 1.15).

Saiba mais

A radiciação

Há divergências sobre a origem do símbolo da radiciação, a raiz quadrada $\sqrt{\ }$. Algumas fontes descrevem o árabe Al-Qalasadi (1421-1486) como o inventor. Outros acreditam que o primeiro a utilizar a raiz foi o matemático alemão Christoff Rudolff.

Polinômios e fatoração

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Você sabe o que é um *polinômio*? É qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e $a \neq 0$. Os números $a_{n-1}, \dots, a_1$, a_0 são números reais chamados *coeficientes*.

O *grau do polinômio* é n e o *coeficiente principal* é o número real a_n.

Monômios, *binômios* e *trinômios* têm um, dois e três termos, respectivamente. Um polinômio escrito com as potências de x na ordem decrescente está na *forma padrão*.

Termos semelhantes são termos do polinômio que têm a mesma variável, cada uma elevada à mesma potência.

Exemplo

1.16 Adição e subtração de polinômios

(a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

(b) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - x + 2)$

Solução

(a) Agrupamos termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$(2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x + (-5x)) + (-1 + 3)$$
$$= 3x^3 - x^2 - x + 2$$

(b) Agrupamos termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$(0 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (3x - (-x)) + (-4 - 2)$$
$$= -2x^3 + 3x^2 + 4x - 6$$

Para *expandir o produto* de dois polinômios, você pode utilizar a propriedade distributiva, como segue:

$$\begin{aligned}(3x + 2)(4x - 5) &= \\ &= 3x(4x - 5) + 2(4x - 5) \\ &= \underbrace{(3x)(4x)}_{} - \underbrace{(3x)(5)}_{} + \underbrace{(2)(4x)}_{} - \underbrace{(2)(5)}_{} \\ &= \underset{\substack{\text{produto dos}\\ \text{primeiros}\\ \text{termos}}}{12x^2} - \underset{\substack{\text{produto dos}\\ \text{termos}\\ \text{externos}}}{15x} + \underset{\substack{\text{produto}\\ \text{dos termos}\\ \text{internos}}}{8x} - \underset{\substack{\text{produto}\\ \text{dos}\\ \text{últimos}\\ \text{termos}}}{10}\end{aligned}$$

Os termos externos e internos são semelhantes e podem ser adicionados como na expressão a seguir:

$$(3x + 2)(4x - 5) = 12x^2 - 7x - 10$$

Para multiplicar dois polinômios, você precisa multiplicar um termo de um polinômio por todos os termos do outro. Organizar os polinômios na forma padrão, um sobre o outro, de modo que os termos iguais fiquem alinhados verticalmente, é uma forma de resolver a multiplicação, como no Exemplo 1.17.

Exemplo

1.17 Multiplicação de polinômios na forma vertical

Escreva $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)$ na forma padrão.

Solução

$$\begin{array}{rrrrr}
x^2 & -\ 4x & +\ 3 & & \\
x^2 & +\ 4x & +\ 5 & & \\
\hline
x^4 - 4x^3 + 3x^2 & & & & \\
4x^3 - 16x^2 + 12x & & & & \\
5x^2 - 20x + 15 & & & & \\
\hline
x^4 + 0x^3 - 8x^2 - 8x + 15 & & & &
\end{array}$$

Assim,

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15$$

Produtos notáveis

Produtos notáveis são úteis quando, por exemplo, precisamos fatorar polinômios.

Alguns produtos notáveis

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. **Produto de uma soma e uma diferença**:
   $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$
2. **Quadrado de uma soma de dois termos**:
   $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
3. **Quadrado de uma diferença de dois termos**:
   $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$
4. **Cubo de uma soma de dois termos**:
   $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
5. **Cubo de uma diferença de dois termos**:
   $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

Exemplo

1.18 Uso dos produtos notáveis

Faça a expansão dos produtos:

(a) $(3x + 8)(3x - 8) = (3x)^2 - 8^2$
$= 9x^2 - 64$

(b) $(5y - 4)^2 = (5y)^2 - 2(5y)(4) + 4^2$
$= 25y^2 - 40y + 16$

(c) $(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y)$
$+ 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3$
$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

Fatoração de polinômios usando produtos notáveis

Quando você escreve um polinômio como um produto de dois ou mais *fatores polinomiais*, está *fatorando um polinômio*. Se o polinômio não puder ser fatorado usando coeficientes inteiros, é um *polinômio irredutível*. Se estiver escrito como um produto de seus fatores irredutíveis, está *fatorado completamente*.

$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4)$ e
$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$

Esses exemplos estão fatorados completamente (pode ser mostrado que $x^2 + 1$ é irredutível). Mas $x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$ não está fatorado completamente porque $(x^2 - 9)$ não é irredutível. De fato,

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ e
$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$

Agora o polinômio está fatorado completamente.

Para fatorar um polinômio, o primeiro passo que você precisa dar é remover e colocar em evidência fatores comuns de seus termos, como no Exemplo 1.19.

Exemplo

1.19 Colocação dos fatores comuns em evidência

(a) $2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$

(b) $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2)$

Para ajudar a fatorar a expressão algébrica, você precisa reconhecer a forma expandida dos cinco produtos notáveis. A forma mais fácil de identificar é a diferença de dois quadrados.

Exemplo

1.20 Fatoração da diferença de dois quadrados

(a) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2$
$= (5x + 6)(5x - 6)$

(b) $4x^2 - (y + 3)^2 = (2x)^2 - (y + 3)^2$
$= [2x + (y + 3)][2x - (y + 3)]$
$= (2x + y + 3)(2x - y - 3)$

Um trinômio quadrado perfeito é o quadrado de um binômio. Você pode ver uma das duas formas abaixo. O primeiro e o último termo são quadrados de u e v, e o termo central é duas vezes o produto de u e v. Os sinais da operação antes do termo central e no binômio são os mesmos.

Exemplo

1.21 Fatoração de trinômios quadrados perfeitos

(a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2$
$= (3x + 1)^2$

(b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$
$= (2x - 3y)^2$

Observe agora a soma e a diferença de dois cubos (mais dois casos de produtos notáveis).

Mesmos sinais

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$$

Sinais opostos

Mesmos sinais

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$

Sinais opostos

Exemplo

1.22 Fatoração da soma e da diferença de dois cubos

(a) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$
$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

(b) $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3$
$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

Fatoração de trinômios

Para fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ como um produto de binômios com coeficientes inteiros, você precisa fatorar os inteiros a e c.

Fatores de a

$$ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square)$$

Fatores de c

Como o número de fatores de a e c é finito, é possível listar todos os possíveis fatores binomiais. Então, você pode checar cada possibilidade até encontrar um par que funcione (se nenhum par funcionar, então o trinômio é irredutível), como no Exemplo 1.23.

Exemplo

1.23 Fatoração de um trinômio com coeficiente principal igual a 1

Fatore $x^2 + 5x - 14$.

Solução

O único par de fatores do coeficiente principal é 1 e 1. Os pares de fatores de 14 são 1 e 14, como também 2 e 7. Eis as quatro possíveis fatorações do trinômio:

$$(x+1)(x-14) \qquad (x-1)(x+14)$$
$$(x+2)(x-7) \qquad (x-2)(x+7)$$

Ao comparar a soma dos produtos dos termos externos e internos da forma fatorada com o termo central do trinômio, vemos que o correto é:

$$x^2+5x-14=(x-2)(x+7)$$

Com a prática você verá que não é necessário listar todos os possíveis fatores binomiais. Muitas vezes, podemos testar as possibilidades mentalmente.

Você pode estender a técnica dos Exemplos 1.23 e 1.24 para trinômios com duas variáveis, como no Exemplo 1.25.

Exemplo

1.24 Fatoração de um trinômio com coeficiente principal diferente de 1

Fatore $35x^2-x-12$.

Solução

Os pares de fatores do coeficiente principal são 1 e 35, como também 5 e 7. Os pares de fatores de 12 são 1 e 12, 2 e 6, como também 3 e 4. As possíveis fatorações precisam ser da forma:

$$(x-{*})(35x+?) \qquad (x+{*})(35x-?)$$
$$(5x-{*})(7x+?) \qquad (5x+{*})(7x-?)$$

onde * e ? são um dos pares de fatores de 12. Como os dois fatores binomiais têm sinais opostos, existem seis possibilidades para cada uma das quatro formas, um total de 24 possibilidades ao todo. Se você tentar, mental e sistematicamente, deverá encontrar que

$$35x^2-x-12=(5x-3)(7x+4)$$

Exemplo

1.25 Fatoração de trinômios em *x* e *y*

Fatore $3x^2 - 7xy + 2y^2$.

Solução

A única maneira de obter $-7xy$ como o termo central é com $3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - ?y)(x - ?y)$.

Os sinais nos binômios precisam ser negativos porque o coeficiente de y^2 é positivo e o coeficiente do termo central é negativo. Conferindo as duas possibilidades, $(3x - y)(x - 2y)$ e $(3x - 2y)(x - y)$, temos que

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - y)(x - 2y)$$

Fatoração por agrupamento

Note que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Se um polinômio com quatro termos é o produto de dois binômios, você pode colocar o termo comum em evidência duas vezes, agrupar os termos e fatorar.

Exemplo

1.26 Fatoração por agrupamento

(a) $$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 6x - 2 &= (3x^3 + x^2) - (6x + 2) \\ &= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1) \\ &= (3x + 1)(x^2 - 2) \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2ac - 2ad + bc - bd &= (2ac - 2ad) + (bc - bd) \\ &= 2a(c - d) + b(c - d) \\ &= (c - d)(2a + b) \end{aligned}$$

Algumas fórmulas importantes de álgebra

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$u^m u^n = u^{m+n}$

$\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$

$u^0 = 1$

$u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$

$(uv)^m = u^m v^m$

$(u^m)^n = u^{mn}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$

$\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \ (v \neq 0)$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u}$

$(\sqrt[n]{u})^n = u$

$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$

$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$

$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$

$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$

$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$

Produtos notáveis e fatoração de polinômios

$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$

$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$

$(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$

Expressões fracionárias

Domínio de uma expressão algébrica

Você sabe o que é uma *expressão fracionária* ou fração? É um quociente de duas expressões algébricas. Se o quociente pode ser escrito como a razão de dois polinômios, então a expressão fracionária é uma *expressão racional*. Abaixo você vê um exemplo de cada uma dessas expressões:

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

Você saberia diferenciar os dois exemplos de equações? O primeiro é uma expressão fracionária, mas não é uma expressão racional. O segundo é tanto uma expressão fracionária como racional. Polinômios são definidos para todos os números reais, mas algumas expressões algébricas não são definidas para alguns números reais. O conjunto dos números reais para os quais uma expressão algébrica é definida é o domínio da *expressão algébrica*.

Exemplo

1.27 Verificação do domínio de expressões algébricas

(a) $3x^2 - x + 5$ **(b)** $\sqrt{x-1}$ **(c)** $\frac{x}{x-2}$

Solução

(a) O domínio de $3x^2 - x + 5$, como de qualquer polinômio, é o conjunto de todos os números reais.

(b) Como a raiz quadrada está definida para números reais não negativos, ,então devemos ter $x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Em notação de intervalo, o domínio é $[1, +\infty[$.

(c) Como não existe divisão por zero, então devemos ter $x - 2 \neq 0$, isto é, $x \neq 2$. O domínio é todo o conjunto dos números reais, com exceção do 2.

Simplificação de expressões racionais

Se u, v e z são números reais, variáveis ou expressões algébricas, desde que z seja diferente de 0, você pode escrever expressões racionais na forma mais simples usando

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$$

Para escrever a expressão racional (ou número racional) na *forma reduzida*, você precisa fatorar o numerador e o denominador em fatores primos, conforme o Exemplo 1.28.

Exemplo

1.28 Simplificação de expressões racionais

Escreva $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida. Verifique o domínio.

Solução

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)}$$

$$= \frac{x}{x + 3}, \quad x \neq 3 \text{ e } x \neq -3$$

Veja que x não pode ser -3, mas é preciso condicionar também que x seja $\neq 3$ porque 3 não está no domínio da expressão racional original.

Se tiverem o mesmo domínio e os mesmos valores para todos os números no domínio, expressões racionais são *equivalentes*. A forma reduzida precisa ter o mesmo domínio que a expressão racional original, razão que nos levou a adicionar a restrição $x \neq 3$ para a forma reduzida no Exemplo 1.28.

Operações com expressões racionais

Duas frações são *iguais*, $\frac{u}{v} = \frac{z}{w}$, se, e somente se, $uw = vz$.

Operações com frações

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Todos os denominadores são considerados como diferentes de zero.

Operação	Exemplo
1. $\frac{u}{v} + \frac{w}{v} = \frac{u + w}{v}$	$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2 + 5}{3} = \frac{7}{3}$
2. $\frac{u}{v} + \frac{w}{z} = \frac{uz + vw}{vz}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$

3. $\dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{w}{z} = \dfrac{uw}{vz}$ $\qquad \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$

4. $\dfrac{u}{v} \div \dfrac{w}{z} = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{uz}{vw}$ $\qquad \dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

5. Para subtração, substitua "+" por "−" em 1 e 2.

Exemplo

1.29 Multiplicação e divisão de expressões racionais

(a) $\dfrac{(2x^2 + 11x - 21)}{(x^3 + 2x^2 + 4x)} \cdot \dfrac{(x^3 - 8)}{(x^2 + 5x - 14)}$

$= \dfrac{(2x - 3)\cancel{(x + 7)}}{x\cancel{(x^2 + 2x + 4)}} \cdot \dfrac{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 + 2x + 4)}}{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x + 7)}} = \dfrac{2x - 3}{x}, \quad x \neq 2,$

$x \neq -7, \quad x \neq 0$

(b) $\dfrac{(x^3 + 1)}{(x^2 - x - 2)} \div \dfrac{(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 4)}$

$= \dfrac{(x^3 + 1)(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)}$

$= \dfrac{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x^2 - x + 1)}(x - 2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 - x + 1)}}$

$= x - 2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$

Exemplo

1.30 Soma de expressões racionais

$\dfrac{x}{3x - 2} + \dfrac{3}{x - 5} = \dfrac{x(x - 5) + 3(3x - 2)}{(3x - 2)(x - 5)} = \dfrac{x^2 - 5x + 9x - 6}{(3x - 2)(x - 5)}$

$= \dfrac{x^2 + 4x - 6}{(3x - 2)(x - 5)}$

Fique atento

Vale observar que a expressão $x^2 + 4x - 6$ é um polinômio primo; não é possível fatorá-lo.

Você pode encontrar o *mínimo múltiplo comum* de polinômios, se os denominadores das frações têm fatores comuns.

O mínimo múltiplo comum é o produto de todos os fatores primos nos denominadores.

Exemplo

1.31 Redução ao mesmo denominador (mínimo múltiplo comum)

Escreva a seguinte expressão como uma fração na forma reduzida

$$\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4}$$

Solução

Os denominadores fatorados são $x(x - 2)$, x e $(x - 2)(x + 2)$, respectivamente. O menor denominador comum é $x(x - 2)(x + 2)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4} \\
&\quad = \frac{2}{x(x-2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-2)(x+2)} \\
&\quad = \frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{3x}{x(x-2)(x+2)} \\
&\quad = \frac{2(x+2) + (x-2)(x+2) - 3x}{x(x-2)(x+2)} \\
&\quad = \frac{2x + 4 + x^2 - 4 - 3x}{x(x-2)(x+2)} \\
&\quad = \frac{x^2 - x}{x(x-2)(x+2)} \\
&\quad = \frac{x(x-1)}{x(x-2)(x+2)} \\
&\quad = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}, \quad x \neq 0,\ x \neq -2 \text{ e } x \neq 2
\end{aligned}$$

Expressões racionais compostas

Para trabalhar mais facilmente uma expressão algébrica complicada, você precisará, às vezes, transformar primeiro a expressão. Para simplificar *frações compostas*, que têm frações nos numeradores e denominadores, você precisa, em primeiro lugar, escrever numerador e denominador como frações simples. Em seguida, você deve inverter e multiplicar. Se tomar forma de uma expressão racional, então a expressão é escrita na forma reduzida ou na forma mais simples, conforme o Exemplo 1.32.

Exemplo

1.32 Simplificação de frações compostas

$$\frac{3-\frac{7}{x+2}}{1-\frac{1}{x-3}}=\frac{\frac{3(x+2)-7}{x+2}}{\frac{(x-3)-1}{x-3}}$$

$$=\frac{\frac{3x-1}{x+2}}{\frac{x-4}{x-3}}$$

$$=\frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)},\quad x\neq 3,\ x\neq -2 \text{ e } x\neq 4$$

Multiplicar o numerador e o denominador pelo mínimo múltiplo comum de todas as frações da expressão é uma segunda maneira de simplificar frações compostas. Veja a seguir.

Use o mínimo múltiplo comum para simplificar a fração composta

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

Solução

O menor denominador comum das quatro frações no numerador e denominador é a^2b^2.

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)a^2b^2}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{ab^2-a^2b}$$

$$=\frac{(b+a)(b-a)}{ab(b-a)}$$

$$=\frac{b+a}{ab},\ a\neq b$$

Link

Para mais detalhes, acesse <www.alunosonline.com.br/matematica/fatoracao-de-polinomios.html>.

Saiba mais

As frações

No mês de julho, as águas do rio Nilo inundavam grandes pedaços de terra às suas margens, fertilizando os campos. Em setembro, quando as águas baixavam, as terras, concedidas a privilegiados agricultores pelo faraó egípcio Sesóstris, precisavam ser remarcadas. Os agrimensores mediam os terrenos com cordas esticadas. Nem sempre essa medida cabia inteira nos lados do terreno. Esse problema só foi resolvido quando os egípcios criaram um novo número: o número fracionário.

Exercícios de fixação

1. Defina o que é a representação dos números reais.
2. Diferencie números racionais de irracionais.
3. O que é um intervalo limitado de números reais?
4. O que é um intervalo aberto?
5. O que é um intervalo fechado?
6. O que é uma variável?
7. O que é uma constante?
8. Diferencie uma inversa aditiva de uma inversa multiplicativa.
9. O que é uma raiz quadrada?
10. O que é uma raiz cúbica?
11. O que é uma raiz *n*-ésima?
12. O que são índice e radicando de uma raiz?
13. O que é a racionalização?
14. O que é um polinômio em *x*?
15. O que é o grau de um polinômio?
16. O que é o coeficiente principal de um polinômio?
17. O que são termos semelhantes?
18. O que é fatorar um polinômio?
19. O que é uma expressão fracionária?
20. O que é uma expressão racional?
21. O que é o domínio de uma expressão algébrica?
22. O que é a forma reduzida de uma expressão?
23. O que é uma fração composta?

Panorama

Aplicados a diversos temas cotidianos, conceitos de cálculo são fundamentais, especialmente para assuntos econômicos e financeiros, como atividades empresariais. Muito importantes para as empresas, os "estoques", por exemplo, representam a quantidade de produtos armazenados para vendas futuras.

Se não tiverem produtos à disposição, as empresas ficam sem a sua fonte principal de receita. Para as empresas, manter produtos em estoques é uma questão de segurança. Mas o que você talvez não saiba é que manter estoques envolve um custo para as empresas. Um componente fundamental desse custo é o preço de compra dos materiais estocados.

Há ainda o custo de armazenagem dos produtos. É preciso ter um local em condições apropriadas para abrigá-los. Ter esse local, organizá-lo e mantê-lo também envolve custos.

Entre os mercados nos quais o custo de estoque é de extrema importância, destacamos o mercado de varejo (supermercados, lojas de móveis, de roupas etc.).

Aplicando os conceitos de cálculo desta primeira unidade, imagine a seguinte situação: um varejista precisa determinar o custo *C* de aquisição e armazenagem de *x* unidades de seu produto para vendas futuras.

$$C(x) = \frac{150.000}{x} + 5x$$

Exercícios

1. Escreva o custo como uma única fração.

2. Se foram adquiridos 300 produtos, determine o custo de aquisição e armazenagem.

3. Como *x* representa a quantidade de produtos, qual conjunto de números reais melhor representa *x*: a) números naturais, b) números inteiros, c) números racionais, d) números irracionais?

4. O gerente de custos verificou no sistema que o custo de aquisição e armazenagem deste mês, até agora, está em R$ 2.457,14. Quantas unidades temos armazenadas no estoque que estão gerando esse custo?

Recapitulando

Números. Você os conhece desde muito pequeno, talvez antes mesmo de se reconhecer como pessoa. Mas, nesta unidade, você aprendeu um pouco mais sobre eles. Já sabe, por exemplo, diferenciar números reais, naturais, racionais e irracionais.

Você aprendeu ainda o que são intervalos abertos e fechados. Já sabe o que são variáveis e constantes de expressões algébricas. Além disso, já sabe reconhecer operações com raízes quadradas e potenciações.

As operações mais simples, como multiplicação, adição e subtração, nesta unidade, ficaram mais complexas para você, porque foram aplicadas em polinômios. Aliás, antes desta unidade, você já sabia o que eram polinômios? Agora você já aprendeu até a fazer a fatoração deles...

Por último, você conheceu as expressões fracionárias. Certamente, você já conhecia as frações. Fatias de pizza, por exemplo, são frações de um todo. Nesta unidade, porém, o assunto ficou mais complexo. Você precisou aprender a operar expressões fracionárias. Achou difícil? Fique tranquilo(a). Com um pouco de treino, você tira de letra...

UNIDADE 2

Equações e inequações

Objetivos de aprendizagem

- Entender o que é uma equação.
- Resolver equações algebricamente e através de gráficos.
- Conhecer as inequações.
- Solucionar inequações não lineares com uma variável.

Temas

- **1 – Equações**
  Para começar, você vai aprender o que é uma equação e quais os tipos de equações existentes na matemática. Para fixar as informações, soluções de equações serão apresentadas.
- **2 – Inequações**
  Neste tema você vai conhecer o que é uma inequação. A diferença entre equações e inequações ficará mais clara com a solução de exercícios de inequações.

Introdução

"Liberdade, igualdade e fraternidade". Você certamente já ouviu esse jargão da Revolução Francesa do século XVIII. Na sociedade atual, apesar do reconhecimento às singularidades de cada um, a igualdade perante a lei é um princípio básico fundamental para a manutenção da ordem social.
Carregada de significado social, a expressão "igualdade" do lema francês está cheia de conteúdo matemático. Termo comparativo básico da língua portuguesa, a expressão "igual a" é parte principal das equações matemáticas. Não há equação sem expressão de igualdade. Por exemplo, "2 + 2 são 4" significa, na realidade, "$2 + 2 = 4$". As primeiras equações matemáticas estavam presentes em documentos egípcios muito antigos. Reescritos em 1650 a.C.

pelo matemático Ahmes, os papiros conhecidos como papiros de Rhind continham operações simples, como somas, multiplicações e... a igualdade.

Hoje, mais de 3.000 anos e muitas revoluções depois, as equações matemáticas estão muito mais complexas. Tão complexas que surgiram novos formatos de expressões matemáticas: as inequações.

Apesar de complexa, a matemática atual continua usando um princípio básico: o da lógica. A lógica norteia todas as atividades humanas. Há uma lógica nas línguas, nas equações e até mesmo nas revoluções.

A palavra *equação* vem do latim *equatione*, que significa equacionar, igualar, pesar. Se equação significa igualar, inequação certamente significa o contrário. Isso é raciocinar de forma lógica.

Inequações indicam diferenças entre operações matemáticas distintas. Para serem diferentes matematicamente, certas operações só podem ser maiores ou menores que outras. Portanto, ao contrário das equações, as inequações não utilizam o sinal "=", mas sim os sinais ">" (maior que) e "<" (menor que).

Se você conseguiu enxergar lógica no raciocínio apresentado nesta introdução, certamente vai achar esta unidade muito simples. Vamos lá!

Equações

Definição e propriedades

Você sabe o que é uma *equação*? É uma afirmativa de igualdade entre duas expressões.

Propriedades	
Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas.	
1. Reflexiva	$u = u$.
2. Simétrica	Se $u = v$ então $v = u$.
3. Transitiva	Se $u = v$ e $v = w$ então $u = w$.
4. Adição	Se $u = v$ e $w = z$ então $u + w = v + z$.
5. Multiplicação	Se $u = v$ e $w = z$ então $u \cdot w = v \cdot z$.

Resolução de equações

Solucionar uma equação em x é encontrar um valor de x para o qual a equação é verdadeira. Na prática, significa encontrar todos os valores de x para os quais a equação é verdadeira.

Exemplo

2.1 Verificação de uma solução

Prove que $x = -2$ é uma solução da equação $x^3 - x + 6 = 0$

Solução

$(-2)^3 - (-2) + 6 \stackrel{?}{=} 0$

$-8 + 2 + 6 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

Equações lineares com uma variável

Uma equação linear é a equação mais básica da álgebra.

DEFINIÇÃO Equação linear em x

Uma *equação linear em x* é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax + b = 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Das duas equações a seguir, você sabe qual é linear e qual não é?

1. $2z - 4 = 0$
2. $3u^2 - 12 = 0$

A equação 1 é linear na variável z, enquanto a equação 2 não é linear na variável u. Uma equação linear em uma variável tem, exatamente, uma solução. Para resolver uma equação linear, você pode transformá-la numa equação equivalente cuja solução é óbvia. Duas ou mais equações são *equivalentes* se tiverem a mesma solução. As equações $2z - 4 = 0$, $2z = 4$ e $z = 2$ são todas equivalentes.

Operações para equações equivalentes

Uma equação equivalente é obtida se uma ou mais das seguintes operações são aplicadas.

Operação	Equação dada	Equação equivalente
1. Combinar termos semelhantes, simplificar frações e remover símbolos por meio de agrupamento.	$2x + x = \frac{3}{9}$	$3x = \frac{1}{3}$
2. Aplicar a mesma operação em ambos os lados.		
(a) Adicionar (-3).	$x + 3 = 7$	$x = 4$
(b) Subtrair $(2x)$.	$5x = 2x + 4$	$3x = 4$
(c) Multiplicar por uma constante diferente de zero (1/3).	$3x = 12$	$x = 4$
(d) Dividir por uma constante diferente de zero (3).	$3x = 12$	$x = 4$

Os próximos exemplos ilustram como usar equações equivalentes para resolver equações lineares.

Exemplo

2.2 Resolvendo equações lineares

Resolva $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$.

Solução

$$2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$$
$$4x - 6 + 3x + 3 = 5x + 2$$
$$7x - 3 = 5x + 2$$
$$2x = 5$$
$$x = 2{,}5$$

Para conferir o desenvolvimento algébrico, você pode utilizar uma calculadora para substituir x por 2,5 na equação original. Como você pode ver, os dois lados da equação são iguais.

Se envolver frações, é preciso encontrar o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações, multiplicando ambos os lados da igualdade pelo valor encontrado.

Resolva $\frac{5y - 2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$.

Solução

Os denominadores são 8, 1 e 4. O mínimo múltiplo comum é 8.

$$\frac{5y-2}{8} = 2 + \frac{y}{4}$$

$$8\left(\frac{5y-2}{8}\right) = 8\left(2 + \frac{y}{4}\right)$$

$$8 \cdot \frac{5y-2}{8} = 8 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{y}{4}$$

$$5y - 2 = 16 + 2y$$

$$5y = 18 + 2y$$

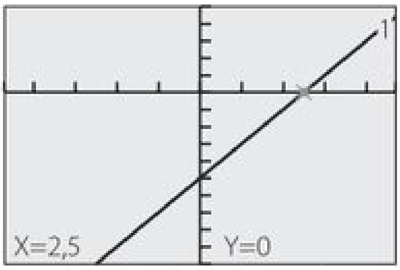
$$3y = 18$$

$$y = 6$$

Solução de equações por meio de gráficos

A equação $y = 2x - 5$ pode ser usada para resolver a equação $2x - 5 = 0$ (em x). A solução da equação é $x = 5/2$. Portanto, o par ordenado $(5/2, 0)$ é a solução de $y = 2x - 5$. A Figura 2.1 confirma isso, pois sugere que o ponto por onde a reta intercepta o eixo x seja o par ordenado $(5/2, 0)$.

Figura 2.1 Gráfico de $y = 2x - 5$.



$[-4,7; 4,7]$ por $[-10, 5]$

Graficamente, para resolver a equação é preciso encontrar os valores de x onde a reta intercepta o eixo horizontal x. Você pode chamar esses valores de x raízes. Muitas técnicas gráficas podem ser usadas para encontrar esses valores.

Exemplo

2.3 Resolução gráfica e algébrica

Resolva a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$ gráfica e algebricamente

Solução algébrica Neste caso, podemos fatorar para encontrar valores exatos.

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$(2x + 1)(x - 2) = 0$

Podemos concluir que

$2x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$

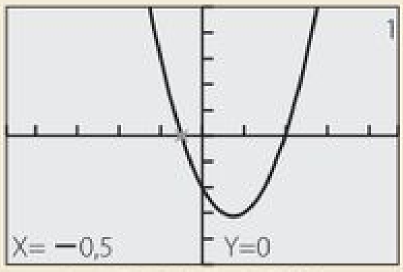
Ou seja,

$x = -1/2$ ou $x = 2$

Assim, $x = -1/2$ e $x = 2$ são as soluções exatas da equação original.

Solução gráfica Encontrar os valores por onde o gráfico de $y = 2x^2 - 3x - 2$ intercepta o eixo x (Figura 2.2). Usamos o gráfico para ver que (–0,5; 0) e (2, 0) são pontos do gráfico que estão no eixo x. Assim, as soluções dessa equação são $x = -0,5$ e $x = 2$. Respostas obtidas graficamente são realmente aproximações, embora em geral elas sejam aproximações muito boas.

Figura 2.2 O gráfico de $y = 2x^2 - 3x - 2$.



[−4,7; 4,7] por [−5, 5]

O procedimento dado pela solução algébrica usada no Exemplo 2.3 é um caso especial da seguinte propriedade importante:

Propriedade do fator zero
Sejam a e b números reais.   Se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Solução de equações quadráticas

Equações lineares ($ax + b = 0$) e equações quadráticas são dois membros da família de equações polinomiais.

DEFINIÇÃO Equação quadrática em x

Uma *equação quadrática em* x é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

A técnica algébrica usada no Exemplo 2.1 é a fatoração. Equações quadráticas da forma $(ax + b)^2 = c$ são fáceis de resolver, como ilustramos no Exemplo 2.4.

Exemplo

2.4 Solução por meio de raízes quadradas

Resolva $(2x - 1)^2 = 9$ algebricamente

Solução

$(2x - 1)^2 = 9$

$2x - 1 = \pm 3$

$2x = 4$ ou $2x = -2$

$x = 2$ ou $x = -1$

Toda equação quadrática pode ser escrita na forma $(x + b)^2 = c$. O procedimento que você precisa executar é o de *completar o quadrado*.

Completando o quadrado

Para resolver $x^2 + bx = c$ por meio do procedimento de *completar o quadrado*, adicionamos $(b/2)^2$ em ambos os lados da equação e fatoramos o lado esquerdo da nova equação.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

Para resolver a equação quadrática completando o quadrado, você precisa dividir ambos os lados pelo coeficiente de x^2, completando o quadrado, como segue no Exemplo 2.5.

Exemplo

2.5 Resolução pelo procedimento de completar o quadrado

Resolva $4x^2 - 20x + 17 = 0$ pelo procedimento de completar o quadrado.

Solução

$$4x^2 - 20x + 17 = 0$$
$$x^2 - 5x + \frac{17}{4} = 0$$
$$x^2 - 5x = -\frac{17}{4}$$

Completando o quadrado na equação

$$x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{17}{4} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 2$$
$$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{2}$$
$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{2}$$

$x = \frac{5}{2} + \sqrt{2} \cong 3{,}91$ ou $x \cong \frac{5}{2} - \sqrt{2} \cong 1{,}09$

O procedimento do Exemplo 2.5 pode ser aplicado para a equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0$ para construir a fórmula a seguir:

Fórmula quadrática (conhecida como Fórmula de Bhaskara)

As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, são dadas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo

2.6 Resolução usando a fórmula quadrática (de Bhaskara)

Resolva a equação $3x^2 - 6x = 5$

Solução

Em primeiro lugar, subtraímos 5 em ambos os lados da equação para colocar na forma $ax^2 + bx + c = 0$: $3x^2 - 6x - 5 = 0$. Podemos observar que $a = 3$, $b = -6$ e $c = -5$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

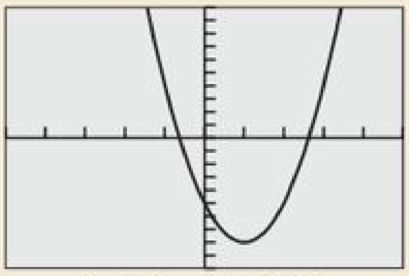
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6}$$

$$x = \frac{6 + \sqrt{96}}{6} \cong 2{,}63 \quad \text{ou} \quad x = \frac{6 - \sqrt{96}}{6} \cong -0{,}63$$

O gráfico de $y = 3x^2 - 6x - 5$ na Figura 2.3 mostra que os valores por onde passa o eixo x são aproximadamente $-0{,}63$ e $2{,}63$.

Figura 2.3 O gráfico de $y = 3x^2 - 6x - 5$.



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

Resolução algébrica de equações quadráticas

Existem quatro caminhos básicos para resolver equações quadráticas algebricamente.

1. **Fatoração** (veja o Exemplo 2.3)
2. **Extração de raízes quadradas** (veja o Exemplo 2.4)

Link

Para mais detalhes, acesse <www.exatas.mat.br/equacao1.htm http://www.mephost.com/br/matematica/s6-int-equacao-simples.htm>.

3. Procedimento de completar o quadrado (veja o Exemplo 2.5)

4. Uso da fórmula quadrática (conhecida como fórmula de Bhaskara) (veja o Exemplo 2.6)

Soluções aproximadas das equações por meio de gráfico

A solução da equação $x^3 - x - 1 = 0$ é o valor de x que faz o valor de $y = x^3 - x - 1$ igual a zero. O Exemplo 2.7 ilustra a construção de gráfico em calculadora adequada para encontrar tais valores de x.

Exemplo

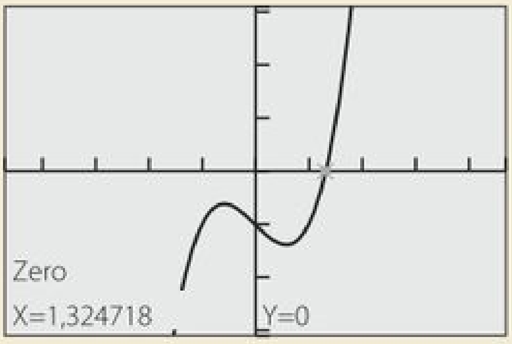
2.7 Resolução gráfica

Resolva a equação $x^3 - x - 1 = 0$ graficamente.

Solução

A Figura 2.4 sugere que $x = 1{,}324718$ é a solução que procuramos.

Figura 2.4 O gráfico de $y = x^3 - x - 1$.



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]

Quando resolver equações graficamente, você pode usar soluções aproximadas e não soluções exatas. Mas qual o critério de aproximação que você deve utilizar?

Critério sobre soluções aproximadas

Nas aplicações, devemos aproximar para um valor que seja razoável para o contexto do problema. Em quaisquer outras situações, devemos aproximar a variável com pelo menos duas casas decimais após a vírgula.

Com esse critério sobre aproximações você pode, então, concluir a solução encontrada no Exemplo 2.7 como aproximadamente 1,32.

Às vezes, você pode reescrever uma equação e resolvê-la graficamente por meio da identificação dos *pontos de intersecção* de dois gráficos. Um ponto (a, b) é um ponto de intersecção se ele pertence, por exemplo, aos dois gráficos envolvidos.

Vamos ilustrar esse procedimento com a equação do valor absoluto no Exemplo 2.8.

Exemplo

2.8 Resolução pelo encontro das intersecções (em gráficos)

Resolva a equação $|2x - 1| = 6$

Solução

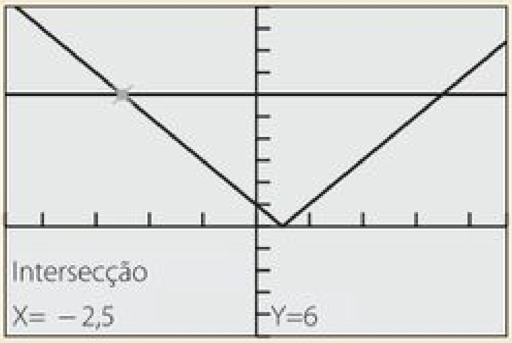
A Figura 2.5 sugere que o gráfico $y = |2x - 1|$ em forma de "V" intersecciona duas vezes o gráfico da linha horizontal $y = 6$. Os dois pontos da intersecção têm as coordenadas $(-2,5; 6)$ e $(3,5; 6)$. Isso significa que a equação original tem duas soluções: $-2,5$ e $3,5$.

Você pode usar a álgebra para encontrar soluções exatas. Os números reais que têm valor absoluto igual a 6 são -6 e 6. Assim, se $|2x - 1| = 6$, então

$$2x - 1 = 6 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -6$$

$$x = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Figura 2.5 Os gráficos de $y = |2x - 1|$ e $y = 6$.



[−4,7; 4,7] por [−5, 10]

Inequações

Inequações lineares com uma variável

Você certamente já usou expressões como *maior que* e *menor que* em seu dia a dia. Na matemática, essas expressões são *inequações*, fórmulas que usam desigualdades para descrever a ordem dos números sobre a reta dos números reais.

DEFINIÇÃO Inequação linear em x

Uma *inequação linear em x* pode ser escrita na forma

$$ax + b < 0,\ ax + b \leq 0,\ ax + b > 0 \text{ ou } ax + b \geq 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Para *resolver uma inequação em x*, você precisa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O *conjunto solução* representa um grupo de valores de x que satisfazem a inequação. Quando você encontra o conjunto solução, *resolveu* a inequação.

Propriedades das inequações

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas e c um número real.

1. Transitiva Se $u < v$ e $v < w$ então $u < w$.

2. Adição Se $u < v$, então $u + w < v + w$.
Se $u < v$ e $w < z$ então $u + w < v + z$.

3. Multiplicação Se $u < v$ e $c > 0$ então $uc < vc$.
Se $u < v$ e $c < 0$ então $uc > vc$.

As propriedades acima são verdadeiras se o símbolo $<$ é substituído por $\leq$. Existem propriedades similares para $>$ e $\geq$.

Fique atento

A multiplicação (ou divisão) de uma inequação por um número positivo preserva a desigualdade. A multiplicação (ou divisão) de uma inequação por um número negativo inverte a desigualdade.

Você pode resolver inequações pelo método de inequações equivalentes, cujas soluções são óbvias. Duas ou mais inequações são equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução, formado sempre por um intervalo de números reais. Você pode apresentar o conjunto solução através de uma representação gráfica da reta real.

Exemplo

2.9 Resolução de uma inequação linear e representação gráfica do conjunto solução

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

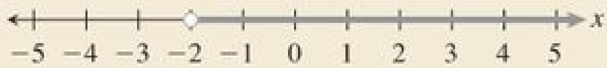
Solução

O mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações é 12.

$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$	
$12 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) > 12 \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{3}\right)$	Multiplicando pelo mínimo múltiplo comum 12
$4x + 6 > 3x + 4$	Simplificando
$x + 6 > 4$	Subtraindo $3x$
$x > -2$	Subtraindo 6

O conjunto solução é o intervalo $]-2, +\infty[$. Sua representação gráfica é mostrada na Figura 2.6.

Figura 2.6 O gráfico do conjunto solução da inequação no Exemplo 2.9.



Duas inequações podem ser combinadas em uma *inequação dupla*, cujo conjunto solução é a desigualdade dupla com x isolado como termo central.

Exemplo

2.10 Resolução de uma inequação dupla

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução.

$$-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$$

Solução

$-3 < \dfrac{2x + 5}{3} \leq 5$

$-9 < 2x + 5 \leq 15$ Multiplicação por 3

$-14 < 2x \leq 10$ Subtração de 5

$-7 < x \leq 5$ Divisão por 2

O conjunto solução é o conjunto de todos os números reais maiores que –7 e menores ou iguais a 5. Em notação de intervalo, a solução é o conjunto]–7, 5]. Sua representação gráfica é mostrada na Figura 2.7.

Figura 2.7 O gráfico do conjunto solução da inequação dupla no Exemplo 2.10.

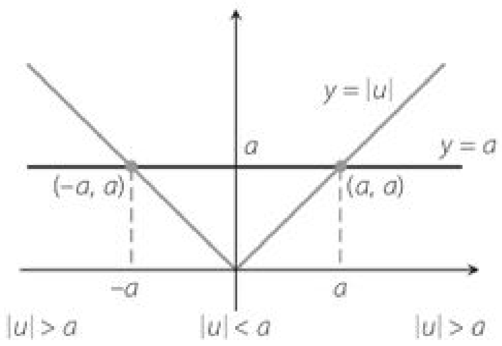
Solução de inequações com valor absoluto

Se u é uma expressão algébrica em x e a é um número real com $a \geq 0$, você deve conhecer duas regras básicas para resolver inequações com valor absoluto.

1. Se $|u| < a$, então u está no intervalo $]-a, a[$, isto é,
$$|u| < a \quad \text{se, e somente se,} \quad -a < u < a$$
2. Se $|u| > a$, então u está no intervalo $]-\infty, -a[$, ou $]a, +\infty[$, isto é,
$$|u| > a \quad \text{se, e somente se,} \quad u < -a \text{ ou } u > a$$

As desigualdades $<$ e $>$ podem ser substituídas por $\leq$ e $\geq$, respectivamente (Figura 2.8).

Figura 2.8 Gráficos de $y = a$ e $y = |u|$.



A solução de $|u| < a$ está representada pela parte do eixo horizontal correspondente à região onde os valores x dos pontos do gráfico de $y = |u|$ estão abaixo do gráfico de $y = a$. A solução de $|u| > a$ está representada pela parte do eixo horizontal correspondente à região onde os valores x dos pontos do gráfico de $y = |u|$ estão acima do gráfico de $y = a$.

Exemplo

2.11 Resolução de uma inequação com valor absoluto

Resolva $|3x - 2| \geq 5$.

Solução

A solução desta inequação com valor absoluto consiste nas soluções das duas desigualdades.

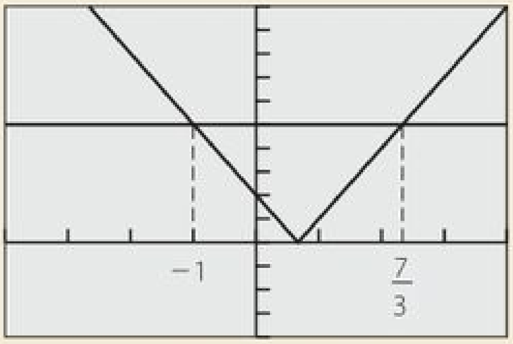
$3x - 2 \leq -5$	ou	$3x - 2 \geq 5$	
$3x \leq -3$	ou	$3x \geq 7$	Adição de 2
$x \leq -1$	ou	$x \geq \dfrac{7}{3}$	Divisão por 3

A solução consiste em todos os números que estão em um ou em outro dos dois intervalos $]-\infty, -1] \cup [7/3, +\infty[$. A notação "U" é lida como "união".

A Figura 2.9 mostra que os pontos do gráfico $y = |3x - 2|$ que estão acima ou sobre os pontos do gráfico de $y = 5$ são tais que os valores de x são menores ou iguais a -1, como também são maiores ou iguais a 7/3.

Figura 2.9 Gráficos de $y = |3x - 2|$ e $y = 5$.

Uma observação: a união de dois conjuntos *A* e *B*, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a *A*, a *B* ou a ambos.



[−4, 4] por [−4, 10]

Solução de inequações quadráticas

Para solucionar uma inequação quadrática como $x^2 - x - 12 > 0$, você precisa resolver a equação quadrática correspondente $x^2 - x - 12 = 0$. Finalmente, precisa determinar os valores de x para os quais o gráfico de $y = x^2 - x - 12$ está acima do eixo horizontal x (uma vez que a desigualdade é maior que 0).

Exemplo

2.12 Resolução de uma inequação quadrática

Resolva $x^2 - x - 12 > 0$

Solução

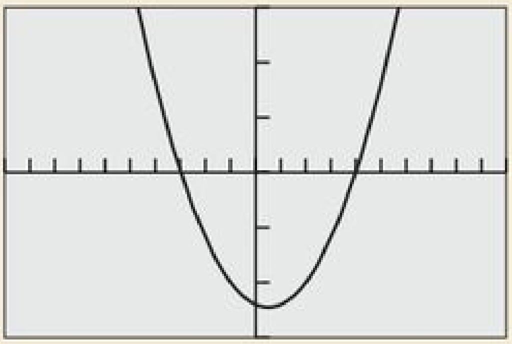
Em primeiro lugar, você precisa resolver a equação correspondente $x^2 - x - 12 = 0$.

$x^2 - x - 12 = 0$
$(x - 4)(x + 3) = 0$
$x - 4 = 0$ ou $x + 3 = 0$
$x = 4$ ou $x = -3$

As soluções da equação de segundo grau são −3 e 4. Porém, essas não são as soluções da inequação original porque 0 > 0 é falso. A Figura 2.10 mostra que os pontos sobre o gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que estão acima do eixo horizontal x são tais que os valores de x estão à esquerda de −3 ou à direita de 4.

A solução da inequação original é $]-\infty, -3[\ \cup\ ]4, +\infty[$.

Figura 2.10 O gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que cruza o eixo x em $x = -3$ e $x = 4$.



[−10, 10] por [−15, 15]

Para o caso de uma inequação quadrática que envolva o símbolo ≤, você pode utilizar como solução da inequação as soluções da equação quadrática correspondente.

Exemplo

2.13 Resolução de uma inequação quadrática

Resolva $2x^2 + 3x \leq 20$.

Solução

Em primeiro lugar, subtraímos 20 dos dois lados da inequação para obter $2x^2 + 3x - 20 \leq 0$.

Depois, resolvemos a correspondente equação quadrática $2x^2 + 3x - 20 = 0$.

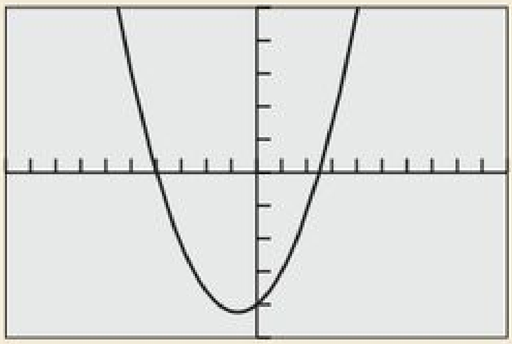
$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$(x + 4)(2x - 5) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0$$

$$x = -4 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$$

As soluções da correspondente equação quadrática são –4 e 5/2 = 2,5. Você pode verificar que são também soluções da inequação.

A Figura 2.11 mostra que os pontos do gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$ que estão abaixo do eixo horizontal x são tais que os valores de x estão entre –4 e 2,5. A solução da inequação original é dada pelo intervalo [–4; 2,5]. Usamos o intervalo fechado, pois –4 e 2,5 são também soluções da inequação.

Figura 2.11 O gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$ cuja parte que está abaixo do eixo x são pontos tais que os respectivos valores de x obedecem à inequação dupla $-4 < x < 2,5$.



[−10, 10] por [−25, 25]

Algumas inequações quadráticas não têm solução, conforme o Exemplo 2.14 abaixo.

Exemplo

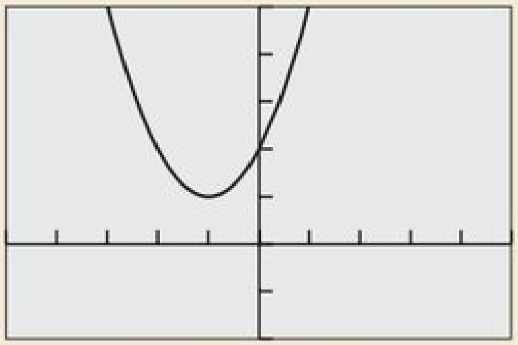
2.14 Inequação quadrática sem solução

Resolva $x^2 + 2x + 2 < 0$.

Solução

A Figura 2.12 mostra que o gráfico de $y = x^2 + 2x + 2$ está acima do eixo horizontal x para todos os valores de x. Assim, a inequação $x^2 + 2x + < 0$ *não* tem solução. Ela é dada por um conjunto vazio.

Figura 2.12 Os valores de $y = x^2 + 2x + 2$ não são negativos.



$[-5, 5]$ por $[-2, 5]$

Aproximação de soluções para inequações

Você pode resolver uma inequação como a do Exemplo 2.15 com raízes do correspondente gráfico, determinando os valores de x para os quais o gráfico está acima ou sobre o eixo horizontal x.

Exemplo

2.15 Resolução de uma inequação cúbica

Resolva $x^3 + 2x^2 - 1 \geq 0$ graficamente.

Solução

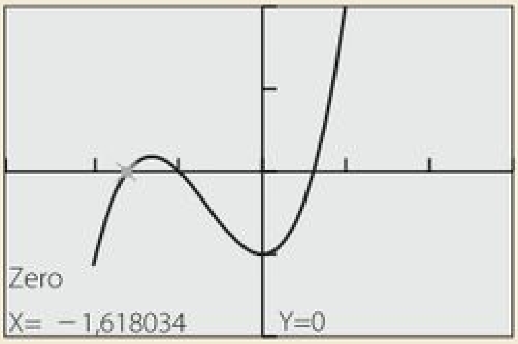
Você pode usar o gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ como na Figura 2.13 para mostrar que as soluções da equação correspondente $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ são aproximadamente $-1{,}62$, -1 e $0{,}62$. Os pontos do gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ que estão sobre e acima do eixo horizontal de x são aqueles cujos valores x estão entre $-1{,}62$ e -1 (incluindo os extremos), como também a direita de $0{,}62$ (incluindo o extremo também).

A solução da inequação é $[-1{,}62; -1] \cup [0{,}62; +\infty[$. Vale observar que as soluções da equação também fazem parte das soluções da inequação.

Links

Para mais detalhes, acessse <www.somatematica.com.br/fundam/inequacoes2.php> e <evandropromat.webnode.com/representa%C3%A7%C3%A3o%20grafica%20de%20uma%20inequa%C3%A7%C3%A3o%20do%201%C2%BA%20grau%20/>.

Figura 2.13 O gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ apresenta os pontos que estão acima do eixo horizontal x com seus valores de x entre dois números negativos ou à direita de um número positivo.



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

Saiba mais

Há muitos itens educacionais sobre inequações disponíveis em livrarias, inclusive DVDs. A seguir, uma sugestão de vídeo para você aprender um pouco mais sobre inequações.

Inequações do 1º grau. SBJ Produções.

Exercícios de fixação

1. O que é uma equação?

2. Quais são as propriedades de uma equação?

3. O que é uma solução de uma equação em x?

4. Como pode ser escrita uma equação linear em x?

5. O que são equações equivalentes?

6. Como escrever uma equação quadrática em x?

7. Escreva a fórmula de Bhaskara.

8. Quais os caminhos para resolver equações quadráticas?

9. Escreva uma inequação linear em x.

10. O que é um conjunto solução?

11. Quais as propriedades das inequações?

12. O que são inequações equivalentes?

13. Defina uma inequação linear.

14. O que é uma inequação dupla?

15. Escreva um exemplo de inequação quadrática.

Panorama

Você certamente utiliza desigualdades em inúmeras aplicações no seu dia a dia. "Fulano é maior que ciclano", por exemplo, é uma desigualdade.

Segundo a Organização Mundial de Saúde, um índice de massa corpórea considerado adequado para um adulto no peso ideal precisa ser maior ou igual a 18,5 e menor ou igual a 25 ($18{,}5 \leq IMC \leq 25$).

O nível de produção de um fabricante de tênis também pode ser mensurado através de desigualdades, por exemplo: ruim, quando menor do que 2.000 unidades por semana (ruim < 2.000); regular, quando maior do que 2.000 e menor do que 3.000 (2.000 < regular < 3.000); bom, quando maior do que 3.000 e menor do que 5.000 (3.000 < bom < 5.000); excelente, quando maior do que 5.000 unidades por semana (excelente > 5.000).

Você vai ver agora uma aplicação mais complexa do nível de produção de uma empresa.

Em uma fábrica verificamos que o custo operacional mensal é de R$ 1.800,00, o custo de produção de x unidades de um certo produto é de R$ 4,00 por unidade. Durante o mês de setembro, o custo total da produção variou entre o máximo de R$ 5.400,00 e o mínimo de R$ 2.000,00.

Exercícios

1. Estabeleça uma inequação para o custo total da produção.
2. Determine o número máximo e mínimo de unidades produzidas durante um mês.
3. Escreva uma equação em x imaginando que o custo total de produção do mês seja de R$ 3.000,00.
4. Determine o valor de x para um custo total mensal de R$ 1.800.

Recapitulando

Você aprendeu nesta unidade que uma equação é uma afirmativa de igualdade entre duas expressões matemáticas. Equações são: reflexivas, simétricas, transitivas, de adição e de multiplicação.

Inequações, ao contrário, são afirmações de desigualdade entre expressões matemáticas. As propriedades de inequações são as mesmas das equações, exceto pelas propriedades reflexiva e simétrica.

Enquanto equações usam o símbolo "=", inequações usam símbolos como "<" ou ">". Lembra a diferença? Equações tentam encontrar os valores das incógnitas através de igualdades. Já as inequações fazem o mesmo processo através de desigualdades.

Se $2 + x = 4$, x é = a 2. Isso é uma equação. Se $2 + x < 4$, x é < 2, então este exemplo é uma inequação. Fácil, né?

Funções

Objetivos de aprendizagem

- Entender o que é função e notação.
- Entender o que é domínio e imagem.
- Perceber a diferença entre funções crescentes e decrescentes.
- Reconhecer funções de primeiro grau, de segundo grau, polinomiais e exponenciais.
- Entender gráficos de todos os quatro tipos de funções.
- Extrair raízes das funções polinomiais.

Temas

- **1 – Funções e suas propriedades**
  Imagem é aquilo que você vê no espelho, certo? Em matemática, não! Neste tema, você vai aprender o que é imagem, notação, domínio e funções. Assim como os números podem crescer ou decrescer, as funções também podem.
- **2 – Funções do primeiro e segundo graus**
  Você sabia que as funções podem ser classificadas em diversas categorias? Algumas delas são: funções de 1º grau e de 2º grau, polinomiais e exponenciais. Neste tema, você vai aprender um pouco mais sobre as características de cada uma.
- **3 – Funções polinomiais**
  Como você já sabe identificar as diferenças nas categorias das funções matemáticas, agora vamos detalhar um pouco de uma delas: as funções polinomiais. O que é preciso fazer para encontrar raízes de funções polinomiais é um dos detalhes que você vai aprender neste tema.
- **4 – Funções exponenciais**
  Como as operações de exponenciação, as funções exponenciais têm uma base e uma potência. Bom, disso provavelmente você já desconfiava. O que talvez você não saiba é que as funções exponenciais

podem ser representadas graficamente. Neste tema, você vai aprender isso e muito mais.

Introdução

Se você tivesse uma empresa, como faria para calcular lucros ou prejuízos no final de um ano? Certamente, para fazer isso, você não utilizaria disciplinas como geografia ou história, mas iria precisar muito de matemática.

Dentro da matemática, as funções são bastante utilizadas para cálculos de resultados de exercícios empresariais. Mas por quê?

Porque as funções permitem que você utilize dados de entrada como custos fixos, custos variáveis, preço de venda unitário, por exemplo, para estimar as receitas e despesas. Com as informações de entrada, é possível gerar resultados esclarecedores para qualquer empresa.

Não é somente para empresas, no entanto, que as funções são úteis. As funções exponenciais, por exemplo, podem ser muito utilizadas para a estimativa de populações de animais.

Um caso emblemático é o de uma população de coelhos que cresce em uma ilha em que há alimentos em abundância e não há predadores. Certamente, a curva do crescimento dela será exponencialmente ascendente.

Na ponta inversa, está o decaimento de material radioativo na atmosfera após um acidente nuclear. A lei de decaimento radioativo prevê como o número nuclear não decaído de uma dada substância diminuirá com o passar do tempo.

Se você entende a lógica das funções exponenciais acima apresentadas, certamente vai tirar de letra as demais funções. A hora de aprender começa agora...

Funções e suas propriedades

Definição de função e notação

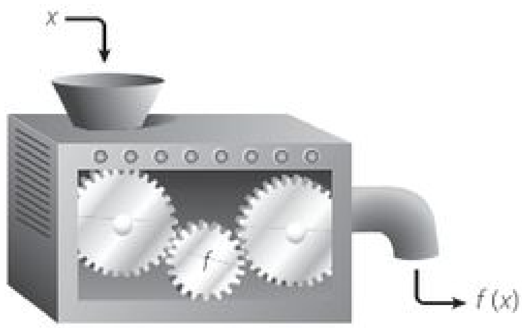
Você sabe o que são variáveis quantitativas? São os itens que compõem as fórmulas matemáticas.

DEFINIÇÃO Função, conjunto domínio (ou domínio) e conjunto imagem (ou imagem)

Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma lei que associa para todo elemento em A um único elemento em B. O conjunto A é o *domínio* da função e o conjunto B, com os valores produzidos por essa associação, é o conjunto *imagem*. Mas podem ocorrer associações diferentes? Sim. A função de um conjunto A pode estar em um conjunto C, de modo que C não seja o conjunto imagem, mas um conjunto que contenha a imagem. Nessa situação, C leva o nome de contradomínio.

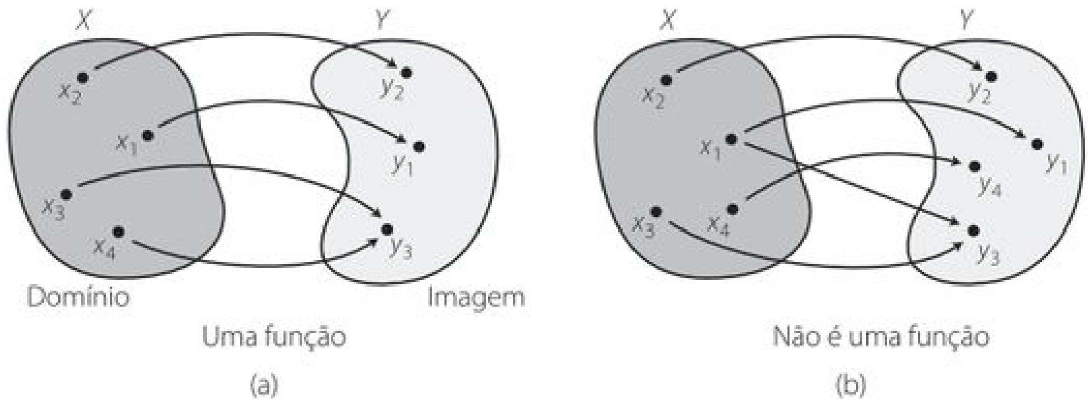
Você sabe ser intuitivo? Sim? Então pense em uma função como uma máquina, na qual os valores x do domínio são colocados dentro da máquina (que faz papel da função) para produzir os valores y da imagem. Para indicar que y vem de uma função de x, usamos a *notação de função* de Euler, dada por $y = f(x)$ (você pode ler *"y igual a f de x"* ou *"o valor de f em x"*). Aqui, x é a *variável independente* e $y = f(x)$ é a *variável dependente* (Figura 3.1).

Figura 3.1 Um diagrama de uma "máquina" para compreender função.



Uma relação entre os elementos do domínio e os elementos da imagem: você pode ver uma função dessa maneira também. A Figura 3.2(a) mostra uma função que relaciona elementos do domínio X com os elementos da imagem Y. A Figura 3.2(b) apresenta uma relação que não é de uma função, uma vez que a regra de que o elemento x_1 associa a um único elemento de Y não ocorre.

Figura 3.2 O diagrama em (a) retrata uma relação de X em Y, que é uma função. O diagrama em (b) retrata uma relação de X em Y, que não é uma função.



A unicidade do valor da imagem é muito importante para você entender o seu comportamento. Saber que $f(2) = 8$ e, posteriormente, verificar que $f(2) = 4$ é uma contradição. O que acontece é que jamais teremos uma função definida por uma fórmula ambígua como $f(x) = 3x \pm 2$.

Exemplo

3.1 Verificação se é ou não uma função

A fórmula $y = x^2$ define y como uma função de x?

Solução

Sim, y é uma função de x. De fato, podemos escrever a fórmula com a notação $f(x) = x^2$. Quando um número x é substituído na função, o quadrado de x será o resultado e não existe ambiguidade quanto ao que significa o quadrado de x.

Outra forma de observar funções é graficamente. O *gráfico da função $y = f(x)$* é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$, com x pertencente ao domínio de f. Você pode visualizar os valores do domínio sobre o eixo horizontal x, como também os valores da imagem sobre o eixo vertical y, tomando como referência os pares ordenados (x, y) do gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo

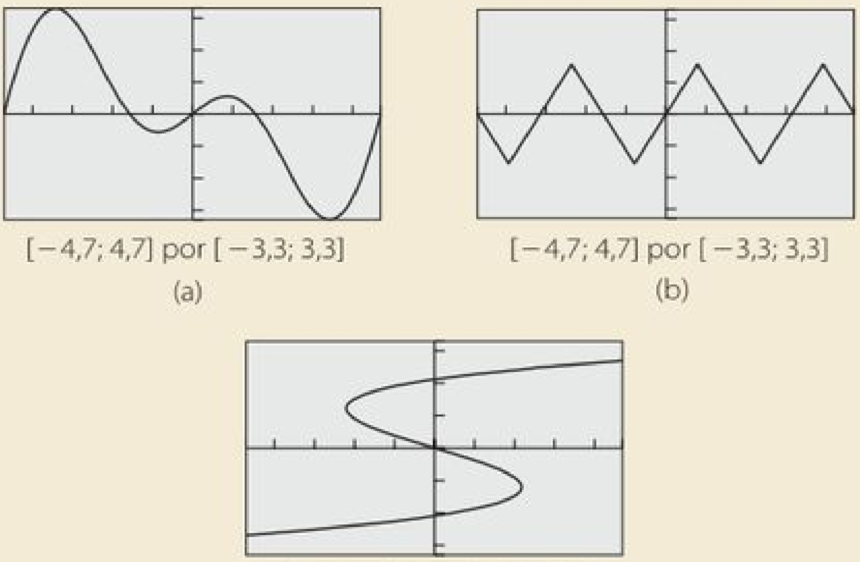
3.2 Verificação se é ou não uma função

Dos três gráficos mostrados na Figura 3.3, qual *não* é gráfico de uma função? Como você pode explicar?

Solução

O gráfico em (c) não é gráfico de uma função. Por exemplo, existem três pontos no gráfico com a coordenada $x = 0$, de modo que não existe um *único* valor de y para esse valor $x = 0$. Podemos verificar que isso ocorre para outros valores de x (aproximadamente entre –2 e 2). Os outros dois gráficos não apresentam esse problema, já que nenhuma linha vertical (imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto. Gráficos que passam por esse *teste da linha vertical* são gráficos de funções (Figura 3.3).

Figura 3.3 Um destes não é gráfico de função (Exemplo 3.2).



[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]
(a)

[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]
(b)

[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]
(c)

Teste da linha vertical

Um gráfico (conjunto de pontos (x, y)) no plano cartesiano define y como uma função de x se, e somente se, nenhuma linha vertical (nem que seja imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto.

Domínio e imagem

Você já aprendeu que uma função pode ser definida algebricamente por meio da regra (ou lei) em termos da variável x do domínio. A regra, no entanto, não nos fornece todas as informações sem que seja definido o domínio. Por exemplo, você pode definir o volume de uma esfera como uma função do seu raio pela fórmula:

$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ (Observe que temos "V de r" e não "$V \cdot r$")

Essa *fórmula* está definida para todos os números reais, mas a *função* volume não está definida para valores negativos de r. Assim, se a nossa intenção é estudar a função volume, podemos restringir o domínio para todo $r \geq 0$.

Observação

A menos que você tenha um modelo (como o citado agora) que necessita de um domínio restrito, deve assumir que o domínio de uma função definida por uma expressão algébrica é o mesmo que o domínio da própria expressão algébrica.

Exemplo

3.3 Verificação do domínio de uma função

Encontre o domínio de cada função:

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$

(c) $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$, onde $A(s)$ é a área de um triângulo equilátero com lados de comprimento s.

Solução

Solução algébrica

(a) A expressão dentro do radical não pode ser negativa. Como devemos ter $x + 3 \geq 0$, então $x \geq -3$. O domínio de f é o intervalo $[-3, +\infty[$.

(b) A expressão dentro do radical não pode ser negativa; portanto, $x \geq 0$. Também, o denominador de uma fração não pode ser zero; portanto, $x \neq 5$.

O domínio de g é o intervalo [0, +∞[com o número 5 removido, o qual podemos escrever como a *união* de dois intervalos, da seguinte maneira: [0, 5[U]5, +∞[.

(c) A expressão algébrica tem como domínio todos os números reais, mas pelo que a função representa, s não pode ser negativo. O domínio de A é o intervalo [0, +∞[.

Suporte gráfico

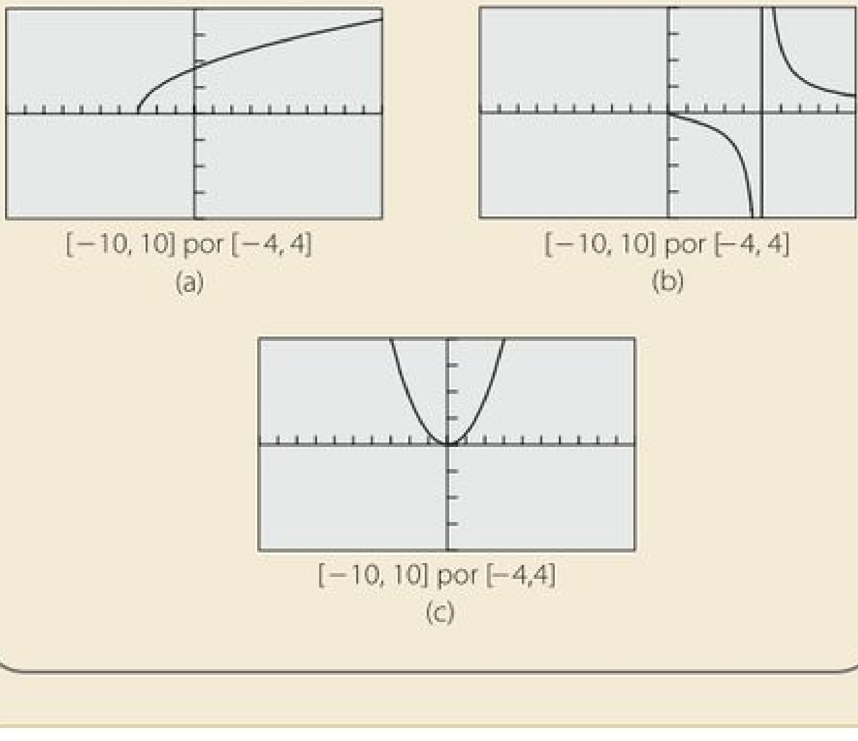
Podemos justificar algebricamente nossas respostas em (a) e (b) a seguir. Uma calculadora que faz gráfico ou um software não fornece pontos com valores de x impossíveis de efetuar contas.

(a) Observe que o gráfico de $y = \sqrt{x + 3}$ (veja a Figura 3.4a) mostra pontos somente para $x \geq -3$, como era esperado.

(b) O gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$ (veja a Figura 3.4b) mostra pontos somente para $x \geq 0$, como era esperado, mas mostra uma reta vertical que corta o eixo x em $x = 5$. Esta reta não faz parte da representação gráfica, é apenas uma maneira de mostrar que o 5 não está no domínio.

(c) O gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} s^2$ (veja a Figura 3.4c) mostra o domínio não restrito da expressão algébrica: conjunto de todos os números reais. Essa é a conclusão a que chegamos somente observando a função e o que ela significa, pois até então podemos não saber que s é o comprimento do lado do triângulo.

Figura 3.4 Gráficos das funções do Exemplo 3.3.



[−10, 10] por [−4, 4]
(a)

[−10, 10] por [−4, 4]
(b)

[−10, 10] por [−4,4]
(c)

Você pode ter mais dificuldade para encontrar algebricamente a imagem de uma função do que para encontrar o domínio, embora, graficamente, as identificações de domínio e imagem sejam similares. Para encontrar o *domínio,* olhamos para os *valores no eixo horizontal x,* que são as primeiras coordenadas dos pontos do gráfico; para encontrar a *imagem,* olhamos para os *valores no eixo vertical y,* que são as segundas coordenadas dos pontos do gráfico. Podemos utilizar os recursos algébricos e gráficos novamente.

Exemplo

3.4 Verificação da imagem de uma função

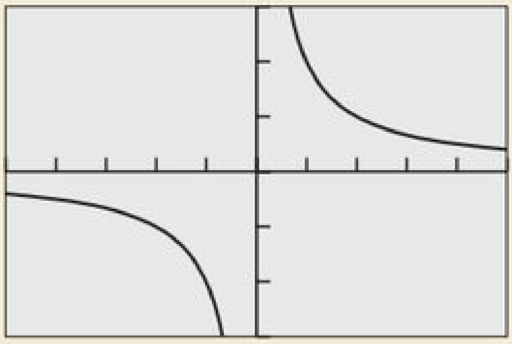
Encontre a imagem da função $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

Solução

Solução gráfica

O gráfico de $y = \dfrac{2}{x}$ é mostrado na Figura 3.5.

Figura 3.5 O gráfico de $y = \dfrac{2}{x}$.



$[-5, 5]$ por $[-3, 3]$

O gráfico não está definido para $x = 0$, o que já era previsto, uma vez que o denominador da função não pode ser 0. Vemos também que a imagem é o conjunto de todos os números reais diferentes de zero.

Solução algébrica

Confirmamos que 0 não está na imagem ao tentar resolver $\dfrac{2}{x} = 0$. (A proposta é verificar se existe algum valor de x tal que $\dfrac{2}{x}$ seja 0.)

$$\frac{2}{x} = 0$$

$$2 = 0 \cdot x$$

$$2 = 0$$

Como a equação $2 = 0$ não é verdade, $\frac{2}{x} = 0$ não tem solução e, assim, $y = 0$ não está na imagem. Mas como sabemos que todos os outros números reais estão na imagem? Seja k um outro número real qualquer (diferente de zero) e vamos resolver $\frac{2}{x} = k$:

$$\frac{2}{x} = k$$

$$2 = k \cdot x$$

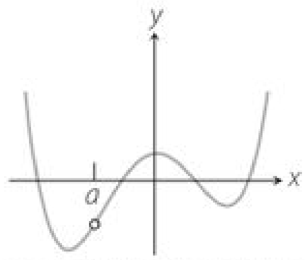
$$x = \frac{2}{k}$$

Como podemos ver, não existe problema em encontrar valores de x (que depende de k) e a imagem é, de fato, dada por $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Continuidade de uma função

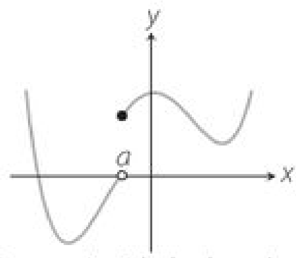
Uma das mais importantes propriedades da maioria das funções que modelam o comportamento de ocorrências do mundo real é o fato de elas serem *contínuas*. Graficamente falando, uma função é contínua num ponto se o gráfico não apresenta falha (do tipo quebra, pulo...) naquele ponto. Você pode ver o conceito com poucos gráficos (veja a Figura 3.6):

Observe cada caso individualmente. Esse gráfico é contínuo em todo x. Note que o gráfico não tem quebra. Isso significa que, se estamos estudando o comportamento da função f para valores de x próximos a qualquer número real a, podemos assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$.



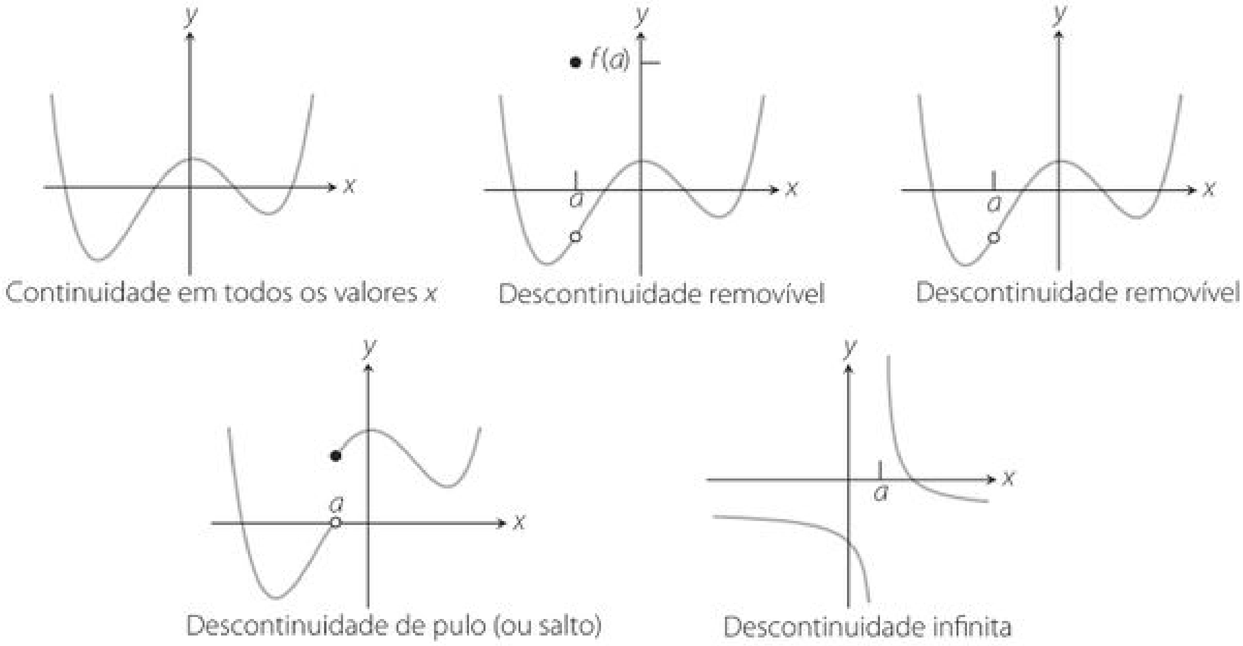
Descontinuidade removível

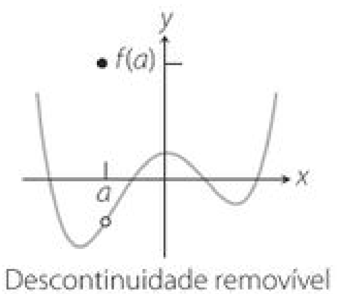
Esse gráfico é contínuo exceto para o "buraco" em $x = a$. Se estamos estudando o comportamento dessa função f para valores de x próximos de a, *não* podemos assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$. Nesse caso, $f(x)$ é menor que $f(a)$ para x próximo de a. Isso é chamado de *descontinuidade removível* porque o gráfico pode ser "remendado" (ou "consertado") redefinindo $f(a)$.



Descontinuidade de pulo (ou salto)

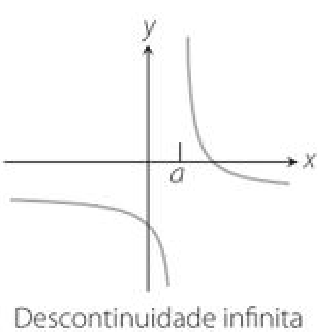
Figura 3.6 Alguns casos de pontos de descontinuidade.





Esse gráfico tem também uma *descontinuidade removível* em $x = a$. Se estamos estudando o comportamento dessa função f para valores de x próximos de a, continuamos sem poder assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$ porque, nesse caso, $f(a)$ não existe. É removível porque poderíamos definir $f(a)$ completando o "buraco" e fazer f contínua em a.

Aqui está uma descontinuidade que não é removível. É uma *descontinuidade de pulo* porque existe mais que um "buraco" em $x = a$; existe um *pulo* (ou *salto*) nos valores da função que fazem o espaço impossível de completar com um simples ponto $(a, f(a))$.

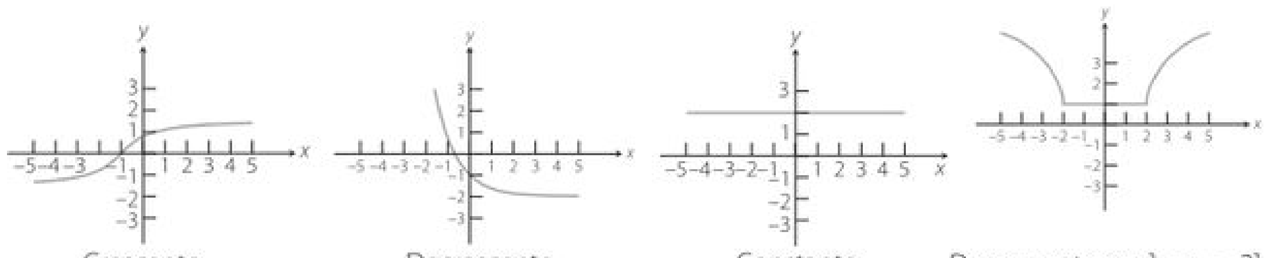


Essa é uma função com uma *descontinuidade infinita* em $x = a$. Não é possível fazer nada do que citamos anteriormente.

Funções crescentes e decrescentes

Outro conceito de função que você vai entender de forma fácil graficamente é a propriedade de ser crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo. Ilustramos o conceito com poucos gráficos (veja a Figura 3.7):

Figura 3.7 Exemplos de funções crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo.



DEFINIÇÃO Funções crescente, decrescente e constante sobre um intervalo

Uma função f é *crescente* sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente crescente.

Uma função f é *decrescente* sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente decrescente.

Uma função f é *constante* sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação nula em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ · (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$).

Exemplo

3.5 Análise do comportamento de uma função crescente/decrescente

Para cada função, verifique os intervalos nos quais ela é crescente, como também decrescente.

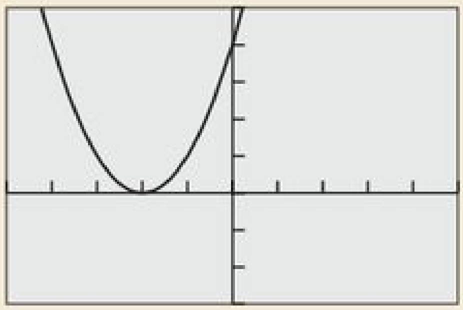
(a) $f(x) = (x + 2)^2$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Solução

Solução gráfica

(a) Você vê no gráfico da Figura 3.8 que f é decrescente sobre o intervalo $]-\infty, 2]$ e crescente sobre o intervalo $[-2, +\infty[$ (observe que incluímos -2 nos dois intervalos; isso não acarreta contradição porque falamos de funções crescente ou decrescente sobre *intervalos* e -2 não é um intervalo).

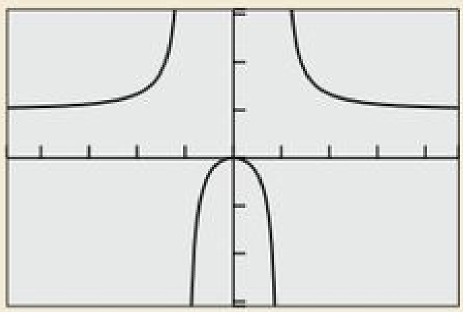
Figura 3.8 A função $f(x) = (x + 2)^2$.



$[-5, 5]$ por $[-3, 5]$

(b) Você vê no gráfico da Figura 3.9 que g é crescente sobre o intervalo $]-\infty, -1[$, crescente novamente sobre $]-1, 0]$, decrescente sobre $[0, 1[$ e decrescente novamente sobre o intervalo $]1, +\infty[$.

Figura 3.9 A função $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.



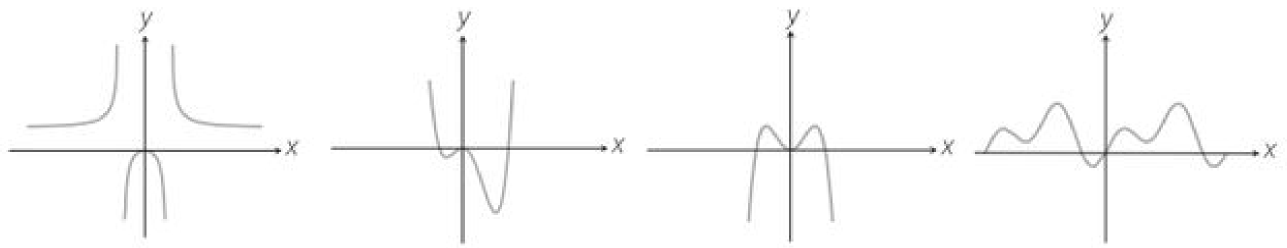
$[-4,7; 4,7]$ por $[-3,1; 3,1]$

Vale observar que fizemos algumas suposições sobre os gráficos. Como sabemos que os gráficos não retornam ao eixo x em algum lugar que não aparece nas representações? Vamos desenvolver algumas maneiras para responder à questão, porém a teoria a esse respeito é estudada em cálculo.

Funções limitadas

Você pode entender o conceito de *função limitada* tanto gráfica como algebricamente. Veremos a definição algébrica após introduzirmos o conceito com alguns gráficos típicos (veja a Figura 3.10).

Figura 3.10 Alguns exemplos de gráficos limitados e não limitados superior e inferiormente.



Não limitado superiormente
Não limitado inferiormente

Não limitado superiormente
Limitado inferiormente

Limitado superiormente
Não limitado inferiormente

Limitado

DEFINIÇÃO Limite inferior, limite superior da função e função limitada

Uma função f é *limitada inferiormente* se existe algum número b que seja menor ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número b, este é chamado de *limite inferior* de f.
Uma função f é *limitada superiormente* se existe algum número B que seja maior ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número B, este é chamado de *limite superior* de f.
Uma função f é *limitada* se é limitada das duas formas, superior e inferiormente.

Exemplo

3.6 Verificação do limite de função

Identifique se cada função é limitada inferiormente, limitada superiormente ou limitada.

(a) $w(x) = 3x^2 - 4$ **(b)** $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

Solução

Solução gráfica

Os dois gráficos são demonstrados na Figura 3.11. Você pode ver que *w* é uma função limitada inferiormente e que *p* é uma função limitada.

Verificação

Você confirma se *w* é uma função limitada inferiormente encontrando o limite inferior, como se segue:

$$x^2 \geq 0$$

$$3x^2 \geq 0$$

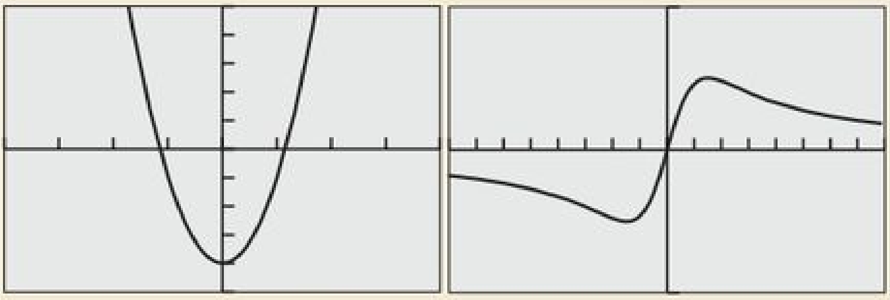
$$3x^2 - 4 \geq 0 - 4$$

$$3x^2 - 4 \geq -4$$

Assim, -4 é o limite inferior para $w(x) = 3x^2 - 4$.

A verificação se *p* é uma função limitada fica para você como um exercício (Figura 3.11).

Figura 3.11 Os gráficos para o exemplo 3.6. Quais são limitados e quais são esses limites?



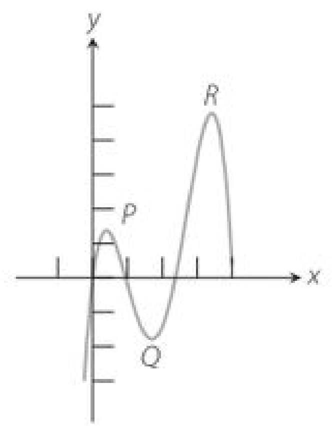
[−4, 4] por [−5, 5]
(a)

[−8, 8] por [−1, 1]
(b)

Extremos local e absoluto

Muitos gráficos são caracterizados pelos "altos e baixos" quando mudam o comportamento de crescimento para decrescimento e vice-versa. Os valores extremos da função (ou *extremo local*) podem ser caracterizados como *máximo local* ou *mínimo local*. A distinção pode ser verificada facilmente pelo gráfico. A Figura 3.12 mostra um gráfico com três extremos locais: máximo local nos pontos *P* e *R*, além de mínimo local em *Q*.

Figura 3.12



Este é outro conceito mais fácil de ver graficamente do que descrever algebricamente. Observe que um máximo local não tem de ser o valor máximo de uma função; ele precisa ser somente um valor máximo da função para x pertencente a *algum* intervalo pequeno. Já mencionamos que o melhor método para analisar comportamento crescente e decrescente envolve ferramentas de cálculo. O mesmo vale para extremos locais. É suficiente você compreender esses conceitos por meio do gráfico, embora uma confirmação algébrica possa ser necessária quando você aprender mais sobre funções específicas.

DEFINIÇÃO Extremos local e absoluto

Um *máximo local* de uma função f é o valor $f(c)$ que é maior ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é maior ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o *valor máximo* (ou *máximo absoluto*) de f.

Um *mínimo local* de uma função f é o valor $f(c)$ que é menor ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é menor ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o *valor mínimo* (ou *mínimo absoluto*) de f.

Extremos locais são chamados também de *extremos relativos*.

Link

Para mais detalhes, acesse <pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Fun%C3%A7%C3%B5es>.

Saiba mais

A criação do termo *função* é atribuída ao alemão Gottfried Leibniz, que usou a palavra para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, inclinação ou um ponto qualquer situado sobre ela. Leibniz e Isaac Newton são considerados os pais do cálculo moderno, em particular o desenvolvimento da integral e regra do produto. Genial, Leibniz também desenvolveu trabalhos nos campos da lei, religião, política, história, literatura, lógica, metafísica e filosofia.

Exemplo

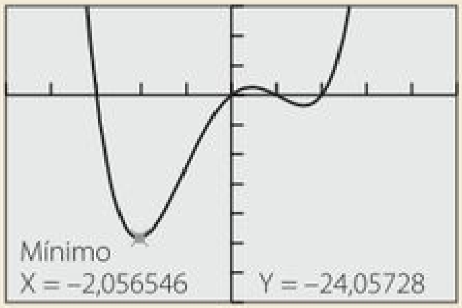
3.7 Identificação de extremos locais

Verifique se $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ tem máximo local ou mínimo local. Caso isso ocorra, encontre cada valor máximo ou mínimo local, além do valor de x para o qual isso ocorre.

Solução

O gráfico de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$ (veja a Figura 3.13) sugere que existem dois valores mínimos locais e um valor máximo local. Usamos uma calculadora que faz gráfico para aproximarmos o mínimo local como −24,06 (que ocorre quando temos $x \cong -2{,}06$) e −1,77 (que ocorre quando temos $x \cong 1{,}60$). De maneira similar, identificamos o máximo local como aproximadamente 1,32 (que ocorre quando $x \cong 0{,}46$).

Figura 3.13 O gráfico de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$.



[−5, 5] por [−35, 15]

(a)

Funções do primeiro e segundo graus

Função polinomial

Você já aprendeu em unidades anteriores o que são polinômios. Agora vai aprender o que são funções polinomiais.

DEFINIÇÃO Função polinomial

Seja n um número inteiro não negativo e sejam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ números reais com $a_n \neq 0$. A função dada por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é uma *função polinomial de grau n*. O *coeficiente principal* é a_n. A função zero dada por $f(x) = 0$ é uma função polinomial. Ela não tem grau nem coeficiente principal.

Você já sabe reconhecer, então, uma função polinomial? Funções polinomiais são definidas e contínuas sobre todos os números reais.

Exemplo

3.8 Verificação se as funções são polinomiais

Quais dos seguintes exemplos são funções polinomiais? Para aqueles que são funções polinomiais, defina o grau e o coeficiente principal. Para os que não são, justifique.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x - \frac{1}{2}$ **(b)** $g(x) = 6x^{-4} + 7$

(c) $h(x) = \sqrt{9x^4 + 16x^2}$ **(d)** $k(x) = 15x - 2x^4$

Solução

(a) f é uma função polinomial de grau 3 e com coeficiente principal 4.

(b) g não é uma função polinomial por causa do expoente –4.

(c) h não é uma função polinomial porque ela não pode ser simplificada na forma polinomial. Observe que $\sqrt{9x^4 + 16x^2} \neq 3x^2 + 4x$.

(d) k é uma função polinomial de grau 4 e com coeficiente principal –2.

A função zero e todas as funções constantes são polinomiais. Algumas outras funções familiares são também polinomiais, como mostradas a seguir.

Funções polinomiais de grau indefinido ou de grau baixo		
Nome	**Forma**	**Grau**
Função zero	$f(x) = 0$	Indefinido
Função constante	$f(x) = a \ (a \neq 0)$	0
Função do primeiro grau	$f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$	1
Função do segundo grau	$f(x) = ax^2 + bx + c$	2

Funções do primeiro grau e seus gráficos

Uma *função do primeiro grau* é uma função polinomial de grau 1 e, assim, tem a forma:

$f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes e $a \neq 0$

Se, em vez de a, utilizarmos m como o coeficiente principal e considerarmos a notação $y = f(x)$, então essa equação passa a ser familiar, pois representa uma reta inclinada dada por:

$$y = mx + b$$

O coeficiente angular m de uma reta não vertical que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A equação da reta que passa pelo ponto $(x_1\ y_1)$ e tem coeficiente angular m é $y - y_1 = m\ (x - x_1)$. Essa é a *equação geral da reta*.

Retas verticais não são gráficos de funções porque elas falham no teste da linha vertical. Uma reta no plano cartesiano é o gráfico de uma função do primeiro grau se, e somente se, ela é uma *reta inclinada* ou uma reta horizontal.

Exemplo

3.9 Verificação da lei de uma função do primeiro grau

Encontre a lei para a função do primeiro grau f tal que $f(-1) = 2$ e $f(3) = -2$.

Solução

Solução algébrica

Você precisa encontrar uma reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -2)$. O coeficiente angular é

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} -1$$

Usando esse valor m e as coordenadas de $(-1, 2)$, a equação é dada por:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= -1(x - (-1)) \\ y - 2 &= -x - 1 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

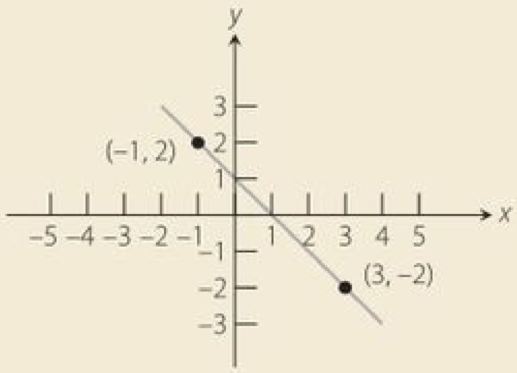
Convertendo para a notação de função, temos a lei procurada:

$$f(x) = -x + 1$$

Suporte gráfico

Você pode fazer o gráfico de $y = -x + 1$ e observar que este inclui os pontos $(-1, 2)$ e $(3, -2)$. (Veja a Figura 3.14.)

Figura 3.14 O gráfico de $y = -x + 1$ passa por $(-1, 2)$ e $(3, -2)$.



Confirmação numérica

Usando $f(x) = -x + 1$, provamos que $f(-1) = 2$ e $f(3) = -2$:
$f(-1) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$ e $f(3) = -3 + 1 = -2$

A *taxa média de variação* de uma função $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, com $a \neq b$, é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A função do primeiro grau definida para todos os números reais tem uma taxa média de variação constante, diferente de zero, entre quaisquer dois pontos sobre seu gráfico.

Quando a função está definida para valores de x que sejam maiores ou iguais a zero, então podemos dizer que o valor inicial da função é dado por $f(0)$. Nesse caso, se $f(0) = b$, então o início do gráfico está no ponto $(0, b)$, localizado no eixo vertical y.

Ela é chamada simplesmente de *taxa de variação* da função do primeiro grau. O coeficiente angular m na fórmula $f(x) = mx + b$ é a taxa de variação da função do primeiro grau.

Características de uma função do primeiro grau	
	Caracterização
Definição	Polinomial de grau 1
Algébrico	$f(x) = mx + b$ ($m \neq 0$)
Gráfico	Reta inclinada com coeficiente angular m e intersecção no eixo y dado por b
Analítico	Função com taxa de variação m constante diferente de zero: f é crescente se $m > 0$ e decrescente se $m < 0$

Funções do segundo grau e seus gráficos

Uma *função do segundo grau* (também conhecida como função quadrática) é uma função polinomial de grau 2 da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$. Você pode observar que o gráfico de toda função do segundo grau é uma parábola de concavidade para cima ou para baixo, porque é derivado do gráfico da função $f(x) = x^2$ por uma sequência de translações, reflexões, "esticamentos" e "encolhimentos".

Exemplo

3.10 Transformação da função $f(x) = x^2$

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = x^2$ em um gráfico da função dada. Esboce o gráfico manualmente.

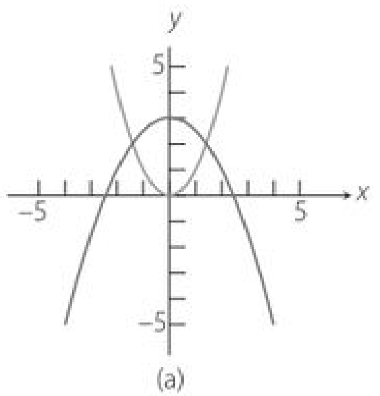
(a) $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ **(b)** $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$

Solução

(a) O gráfico de $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ é obtido "encolhendo" verticalmente o gráfico de $f(x) = x^2$ por meio da multiplicação pelo fator 1/2, refletindo o gráfico resultante com relação ao eixo horizontal x e transladando o gráfico refletido três unidades de medida para cima. Veja a Figura 3.15(a).

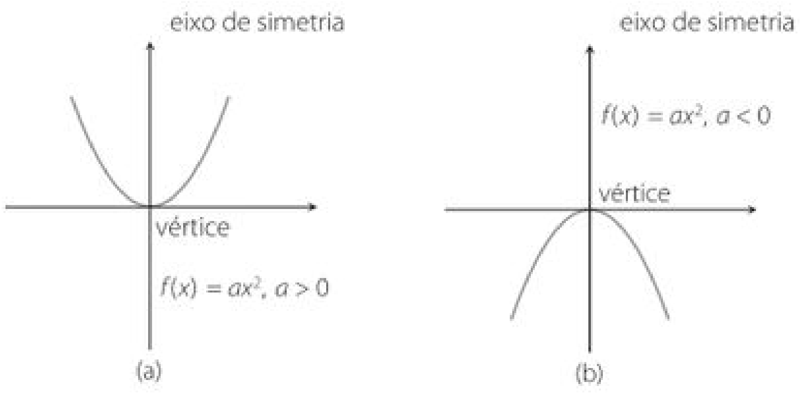
(b) O gráfico de $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ é obtido "esticando" verticalmente o gráfico de $f(x) = x^2$ por meio da multiplicação pelo fator 3 e transladando o gráfico resultante duas unidades para a esquerda e uma unidade para baixo. Veja a Figura 3.15(b).

Figura 3.15 O gráfico de $f(x) = x^2$ mostrado com (a) $g(x) = -(1/2)x^2 + 3$ e (b) $h(x) = 3(x + 2)^2 - 1$.



O gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$, é uma parábola com concavidade para cima. Quando $a < 0$, o gráfico é uma parábola com concavidade para baixo. Independentemente do sinal de a, o eixo vertical y é a reta de simetria para o gráfico de $f(x) = ax^2$. A reta de simetria para uma parábola é seu *eixo de simetria*. O ponto sobre a parábola que cruza seu eixo de simetria é o *vértice* da parábola. Pelo fato de uma função do segundo grau ser sempre uma parábola com concavidade para cima ou para baixo, seu vértice é sempre o ponto mais baixo ou o ponto mais alto da parábola. O vértice de $f(x) = ax^2$ é sempre a origem, como pode ser visto na Figura 3.16.

Figura 3.16 O gráfico de $f(x) = ax^2$ para (a) $a > 0$ e (b) $a < 0$.



Expandindo $f(x) = a(x - h)^2 + k$ e comparando os coeficientes resultantes com a *forma quadrática padrão* $ax^2 + bx + c$, onde os expoentes de x são organizados em ordem decrescente, você obtém fórmula para h e k.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-h)^2 + k \\ &= a(x^2 - 2hx + h^2) + k \\ &= ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Como $b = -2ah$ e $c = ah^2 + k$ na última linha desenvolvida anteriormente, você tem $h = -b/2a$ e $k = c - ah^2$. Usando essas fórmulas, qualquer função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita na forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

Essa é a *forma canônica* para uma função do segundo grau, o que torna fácil a identificação do vértice e o eixo de simetria do gráfico da função.

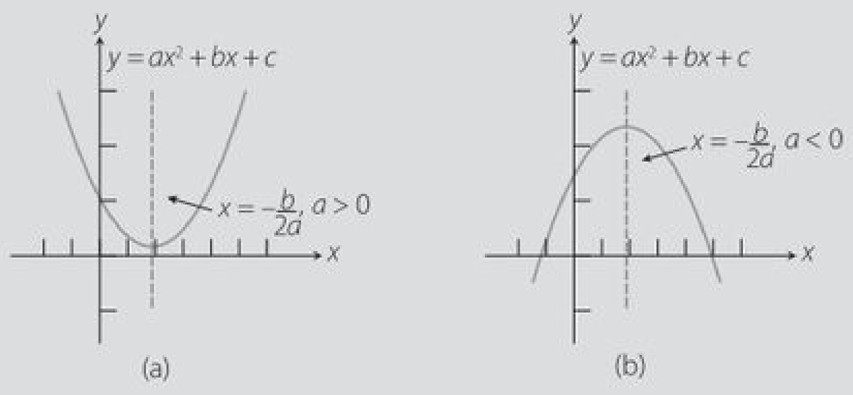
Forma canônica de uma função do segundo grau

Qualquer função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, pode ser escrita na *forma canônica*.

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

O gráfico de f é uma parábola com vértice (h, k) e eixo de simetria $x = h$, onde $h = -b/2a$ e $k = c - ah^2$. Se $a > 0$, então a parábola tem concavidade para cima; se $a < 0$, então a parábola tem concavidade para baixo (veja a Figura 3.17).

Figura 3.17 O vértice está em $x = -b/2a$, cujo valor descreve o eixo de simetria.



O valor de k também é conhecido como $\dfrac{-(b^2 + 4ac)}{2a}$

Exemplo

3.11 Verificação do vértice e do eixo de simetria de uma função do segundo grau

Use a forma canônica de uma função do segundo grau para encontrar o vértice e o eixo de simetria do gráfico de $f(x) = 6x - 3x^2 - 5$. Reescreva a equação na forma canônica.

Solução

A forma polinomial padrão de f é $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$.

Assim, $a = -3$, $b = 6$ e $c = -5$, e as coordenadas do vértice são

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-3)} = 1 \text{ e}$$

$$k = f(h) = f(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = -2$$

$k = f(h)$, pois é a segunda coordenada de um ponto cuja primeira coordenada é h.

A equação do eixo de simetria é $x = 1$, o vértice é $(1, -2)$ e a forma canônica de f é

$$f(x) = -3\,(x - 1)^2 + (-2)$$

Exemplo

3.12 Uso de álgebra para descrever o gráfico de uma função do segundo grau

Utilize o recurso de completar o quadrado de uma expressão algébrica para descrever o gráfico de $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$. Confira sua resposta graficamente.

Solução

Solução algébrica

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 12x + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x) + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x + () - ()) + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x + (2^2) - (2^2)) + 11 \\ &= 3(x^2 + 4x + 4) - 3(4) + 11 \\ &= 3(x + 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

O gráfico de f é uma parábola de concavidade para cima com vértice $(-2, -1)$, eixo de simetria $x = -2$ e que cruza o eixo x nos valores dados aproximadamente por $-2{,}5777$ e $-1{,}423$. Os valores exatos das raízes são $x = -2 \pm \sqrt{3}/3$

Link

Para mais detalhes, acesse <www.algosobre.com.br/matematica/funcoes-constante-1-e-2-grau.html>.

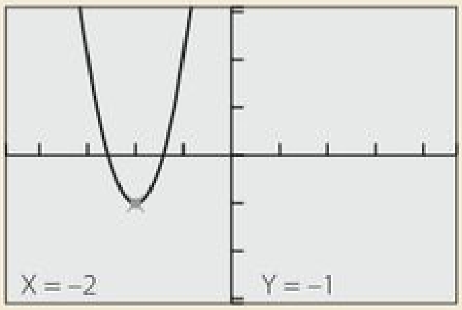
Saiba mais

Você já conheceu Leibniz, o criador das funções, mas não conheceu sua trajetória. Ele ingressou na escola de Direito da Universidade de Leipzig em 1663. Formulou um modelo teórico precursor da computação moderna: todo raciocínio passou a ser redutível a uma combinação ordenada de elementos, como números, palavras, sons ou cores. Leibniz criou ainda uma máquina de calcular capaz de fazer as quatro operações. Em 1700, Leibniz organizou a Academia de Ciências da Prússia, da qual foi o primeiro presidente.

Solução gráfica

O gráfico na Figura 3.18 mostra esses resultados.

Figura 3.18 Os gráficos de $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$ e $f(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ são os mesmos.



[– 4,7; 4,7] por [– 3,1; 3,1]

Características de uma função do segundo grau

	Caracterização
Definição	polinomial de grau 2
Algébrico	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $a(x - h)^2 + k$ $(a \neq 0)$
Gráfico	parábola com vértice (h, k) e eixo de simetria $x = h$; a concavidade é para cima se $a > 0$, e para baixo se $a < 0$; o valor onde corta o eixo vertical y é a intersecção $y = f(0) = c$, e as raízes são os valores que passam pelo eixo horizontal x, que são $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Funções polinomiais

Você já viu que uma função polinomial de grau zero é uma função constante e o gráfico é uma reta horizontal paralela ao eixo x. Uma função polinomial de grau 1 é uma função do primeiro grau, seu gráfico é uma reta inclinada. Uma função polinomial de grau 2 é uma função do segundo grau, seu gráfico é uma parábola. Considere agora funções polinomiais de graus mais altos. Estas incluem as *funções cúbicas* (polinomiais de grau 3) e *funções* *quárticas* (polinomiais de grau 4). Já vimos que uma função polinomial de grau n pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0$$

Abaixo você pode ver algumas definições importantes associadas às funções polinomiais e a essa equação.

DEFINIÇÃO O vocabulário dos polinômios

Cada monômio na soma ($a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_0) é um termo do polinômio.

Uma função polinomial escrita nessa forma, com termos apresentando graus descendentes, está na *forma-padrão*.

As constantes a_n, a_{n-1}, ... , a_0 são os *coeficientes* do polinômio.

O termo $a_n x^n$ é o *termo principal* e a_0 é o termo constante.

No Exemplo 3.13, você vê que o termo constante a_0 de uma função polinomial p é tanto o valor inicial da função $p(0)$, como o valor por onde o gráfico corta o eixo vertical y (este último também é chamado de intercepto).

Exemplo

3.13 Transformações no gráfico das funções monomiais

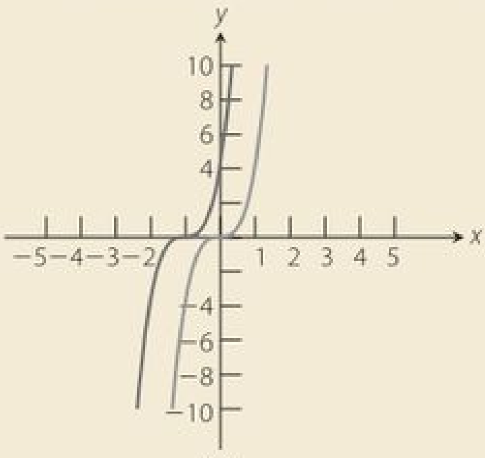
Descreva como transformar o gráfico de uma função monomial $f(x) = a_n x^n$ em um gráfico da função dada. Esboce o gráfico transformado e verifique a resposta, se possível, em calculadora com esse recurso. Calcule a localização do intercepto (valor por onde o gráfico passa no eixo vertical y) até mesmo como forma de conferir o gráfico transformado.

(a) $g(x) = 4(x + 1)^3$ **(b)** $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$

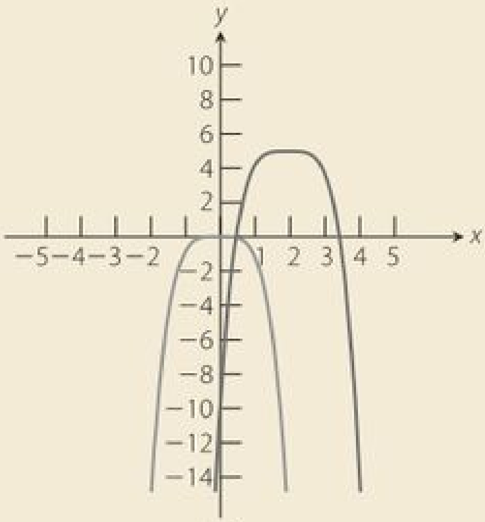
(a) Você pode obter o gráfico de $g(x) = 4(x + 1)^3$ apenas transladando o gráfico de $f(x) = 4x^3$ uma unidade para a esquerda, como mostrado na Figura 3.19(a). O intercepto do gráfico de g é $g(0) = 4(0 + 1)^3$, que coincide com o valor observado no gráfico transformado.

(b) Você pode obter o gráfico de $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ apenas transladando o gráfico de $f(x) = -x^4$ duas unidades para a direita e cinco unidades para cima, como mostrado na Figura 3.19(b). O intercepto do gráfico de h é $h(0) = -(0 - 2)^4 + 5 = -16 + 5 = -11$, que coincide com o valor observado no gráfico transformado.

Figura 3.19 (a) Os gráficos de $g(x) = 4(x + 1)^3$ e $f(x) = 4x^3$.
(b) Os gráficos de $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ e $f(x) = -x^4$.



(a)



(b)

No Exemplo 3.14, você vê o que pode acontecer quando funções monomiais são combinadas para obter funções polinomiais. Os polinômios resultantes *não* são meras translações de funções monomiais.

Exemplo

3.14 Combinações de gráficos de funções monomiais

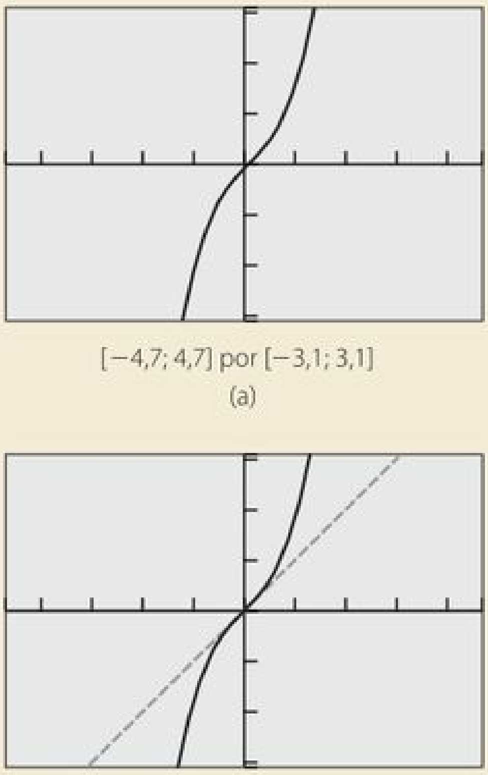
Represente graficamente a função polinomial, localize seus extremos e raízes e explique como está relacionada com as funções monomiais utilizadas para a sua construção.

(a) $f(x) = x^3 + x$ (b) $g(x) = x^3 - x$

Solução

(a) O gráfico de $f(x) = x^3 + x$ é demonstrado na Figura 3.20(a). A função f é crescente sobre $]-\infty, +\infty[$ e não possui extremos (nem valor máximo nem valor mínimo). A função fatorada é $f(x) = x(x^2 + 1)$ e possui raiz em $x = 0$.

Figura 3.20 O gráfico de $f(x) = x^3 + x$ (a) sozinha e (b) com a função $y = x$.

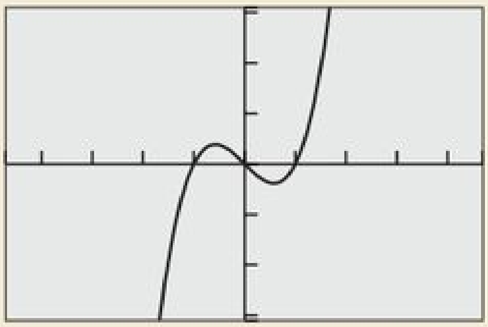


[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]
(a)

[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]
(b)

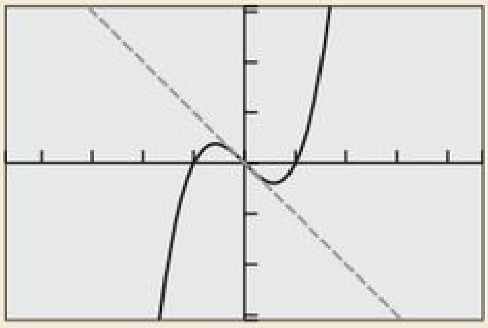
(b) O gráfico de $g(x) = x^3 - x$ é demonstrado na Figura 3.21(a). A função g tem um máximo local dado por $\cong 0{,}38$ quando $x \cong -0{,}58$ e um mínimo local dado por $\cong -0{,}38$ quando $x \cong 0{,}58$. A função fatorada é $g(x) = x(x + 1)(x - 1)$ e tem raízes em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. A forma geral do gráfico é muito parecida com o gráfico do seu termo principal, que é x^3, mas, próxima da origem, a função g se comporta como o outro termo dado por $-x$, como vemos na Figura 3.21(b). A função g é ímpar, assim como cada parcela, isto é, cada monômio.

Figura 3.21 O gráfico de $g(x) = x^3 - x$ (a) sozinha e (b) com a função $y = -x$.



$[-4,7; 4,7]$ por $[-3,1; 3,1]$

(a)



$[-4,7; 4,7]$ por $[-3,1; 3,1]$

(b)

Toda função polinomial está definida e é contínua para todos os números reais. Além de os gráficos serem sem quebra, pulo nem buraco, eles também não têm "bicos". Gráficos típicos de funções cúbicas e quárticas são demonstrados nas figuras 3.22 e 3.23.

Imagine retas horizontais passando através dos gráficos nas figuras 3.22 e 3.23, como se fossem o eixo horizontal x. Cada intersecção corresponde a uma raiz da função. Podemos concluir que funções cúbicas têm, no máximo, três raízes, e as funções quárticas têm, no máximo, quatro raízes. As funções cúbicas apresentam, no máximo, dois extremos locais, e as funções quárticas, três extremos locais. Essas observações generalizam o resultado:

Figura 3.22 Gráficos de quatro funções cúbicas típicas: (a) dois com coeficiente principal positivo e (b) dois com coeficiente principal negativo.

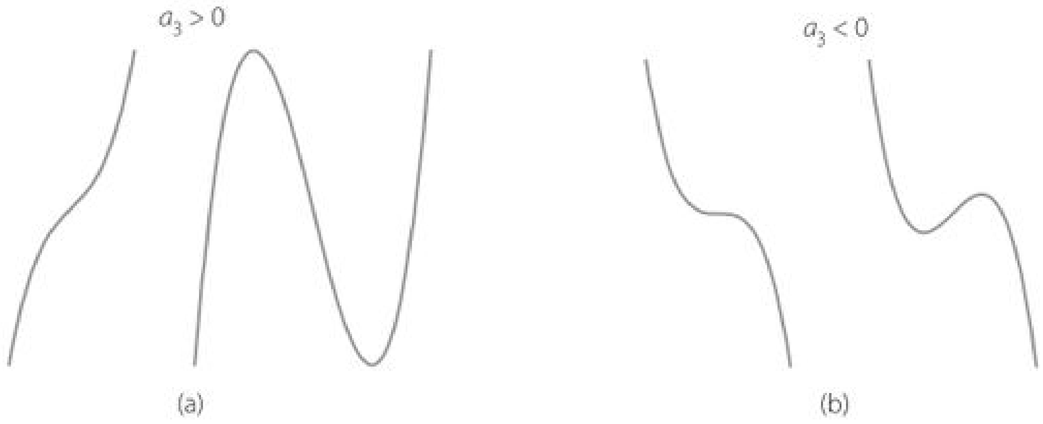
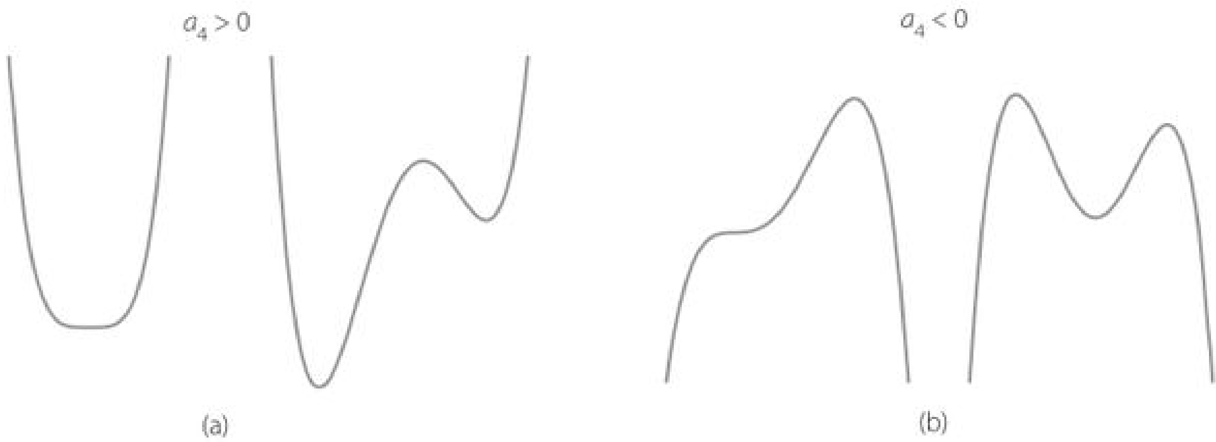


Figura 3.23 Gráficos de quatro funções quárticas típicas: (a) dois com coeficiente principal positivo e (b) dois com coeficiente principal negativo.



TEOREMA Extremos locais e raízes de funções polinomiais

Uma função polinomial de grau n tem, no máximo, $n - 1$ extremos locais e, no máximo, n raízes.

Raízes das funções polinomiais

Encontrar as raízes de uma função f é equivalente a encontrar os valores de x por onde o gráfico de $y = f(x)$ passa no eixo horizontal x, que são as soluções da equação $f(x) = 0$. Uma ideia é fatorar a função polinomial, como você pode ver a seguir.

Exemplo

3.15 Raízes de uma função polinomial

Encontre as raízes da função $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

Solução

Solução algébrica

Resolvemos a equação $f(x) = 0$ fatorando:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$
$$x(x^2 - x - 6) = 0$$
$$x(x - 3)(x + 2) = 0$$

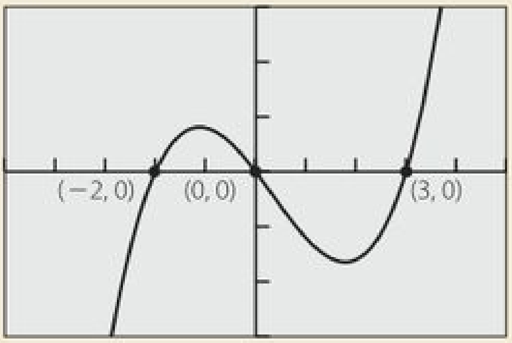
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

As raízes de f são 0, 3 e -2.

Solução gráfica

Você pode usar uma calculadora com esse recurso ou esboçar manualmente. Confira na Figura 3.24.

Figura 3.24 O gráfico de $y = x^3 - x^2 - 6x$.



[−5, 5] por [−15, 15]

Se uma função polinomial f é apresentada na forma fatorada, cada fator $(x - k)$ corresponde a uma raiz $x = k$, e se k é um número real, então o par ordenado $(k, 0)$ é um ponto por onde o gráfico passa no eixo horizontal x, conforme você pôde visualizar no Exemplo 3.15.

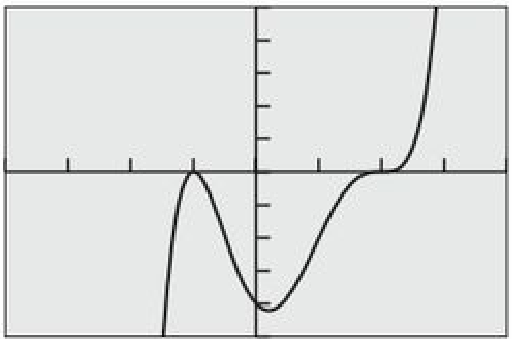
Quando o fator é repetido, como na função $f(x) = (x - 2)^3(x - 1)^2$, você pode considerar que a função polinomial tem uma *raiz repetida*. A função f tem duas raízes repetidas. O fator $x - 2$ ocorre três vezes, então 2 é uma raiz de *multiplicidade* 3. De maneira similar, -1 é uma raiz de multiplicidade 2. A definição seguinte generaliza esse conceito.

DEFINIÇÃO Multiplicidade de uma raiz de uma função polinomial

Se f é uma função polinomial e $(x - c)^m$ é um fator de f, mas $(x - c)^{m-1}$ não é, então c é uma raiz de *multiplicidade m* de f.

Uma raiz de multiplicidade $m \geq 2$ é uma *raiz repetida*. Observe na Figura 3.25 que o gráfico de $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$ *encosta* no eixo horizontal x no par ordenado $(-1, 0)$ e cruza o mesmo eixo no par ordenado $(2, 0)$. Isso também pode ser generalizado.

Figura 3.25 O gráfico de $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$.



$[-4, 4]$ por $[-10, 10]$

Raízes de multiplicidade ímpar e par

Se uma função polinomial f tem uma raiz real c de multiplicidade ímpar, então o gráfico de f cruza o eixo horizontal x em $(c, 0)$ e o valor de f muda de sinal em $x = c$.

Se uma função polinomial f tem uma raiz real c de multiplicidade par, então o gráfico de f não cruza o eixo horizontal x em $(c, 0)$ e o valor de f não muda de sinal em $x = c$.

No Exemplo 3.15, nenhuma das raízes é repetida. Em virtude disso, cada raiz tem multiplicidade 1 (que é ímpar), o gráfico da função polinomial cruza o eixo horizontal x e tem mudança de sinal em todas as raízes (Figura 3.24). Saber onde o gráfico cruza e onde ele não cruza o eixo horizontal x é importante no momento de esboçar gráficos e resolver inequações.

Exemplo

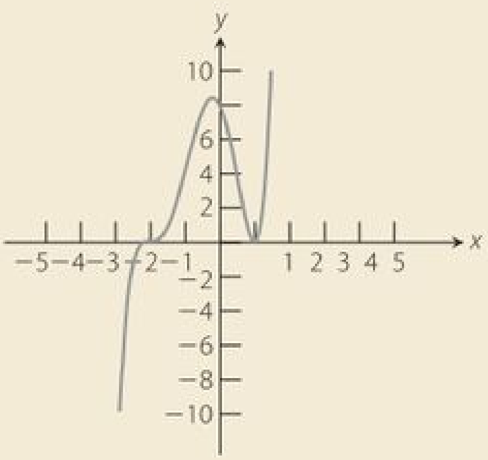
3.16 Esboço do gráfico de um polinômio fatorado

Verifique o grau e relacione as raízes da função $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)^2$. Verifique a multiplicidade de cada raiz e se o gráfico cruza o eixo horizontal x na raiz analisada. Esboce o gráfico da função.

Solução

O grau de f é 5 e as raízes são $x = -2$ e $x = 1$. O gráfico cruza o eixo x em $x = -2$, pois a multiplicidade é 3 (que é ímpar). O gráfico não cruza o eixo x em $x = 1$, pois a multiplicidade é 2 (que é par). Observe que os valores de f são positivos para $x > 1$, como também para $-2 < x < 1$; agora, para $x < -2$, os valores de f são negativos. Você pode conferir o esboço do gráfico na Figura 3.26.

Figura 3.26 O gráfico de $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)^2$.

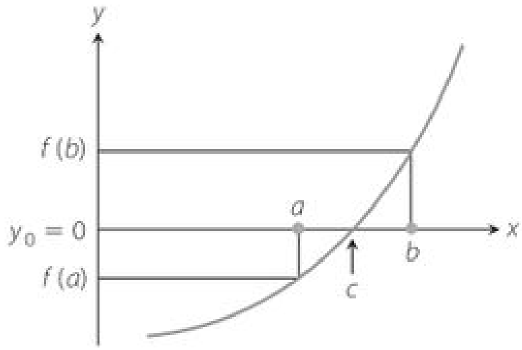


O *teorema do valor intermediário* diz que a mudança de sinal da função implica a existência de raiz real dessa função.

TEOREMA Teorema do valor intermediário

Se a e b são números reais com $a < b$ e se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então f assume todos os valores reais entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, se y_0 está entre $f(a)$ e $f(b)$, então $y_0 = f(c)$ para algum número c em $[a, b]$. Em particular, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos (isto é, um é positivo e o outro é negativo), então $f(c) = 0$ para algum número c em $[a, b]$. Veja a Figura 3.27.

Figura 3.27 Se $f(a) < 0 < f(b)$, então existe uma raiz $x = c$ entre a e b.



Exemplo

3.17 Uso do teorema do valor intermediário

Explique por que uma função polinomial de grau ímpar tem ao menos uma raiz real.

Solução

Seja f uma função polinomial de grau ímpar. Como o grau é ímpar, o teste do termo principal nos diz que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Assim, existem números reais a e b com $a < b$ e tais que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. Pelo fato de toda função polinomial ser definida e contínua para todos os números reais, f é contínua também no intervalo $[a, b]$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário, $f(c) = 0$ para algum número c em $[a, b]$ e, assim, c é uma raiz real de f.

Link

Para mais detalhes, acesse <www.brasilescola.com/matematica/funcao-polinomial.htm>.

Saiba mais

Você sabia que a autoria das funções polinomiais de 1º a 4º grau é incerta? Os italianos Niccolò Tartaglia e Girolamo Cardano disputam o posto. Tartaglia ganhou uma competição para resolver as equações cúbicas. Cardano publicou primeiro a solução, mesmo tendo jurado que não faria isso. Pobre, Tartaglia – que significa *gago* em italiano – ficou gago por um golpe de um soldado francês em seu rosto. Como não conhecia seu nome pela família paterna, decidiu adotar o nome que o destino lhe dera.

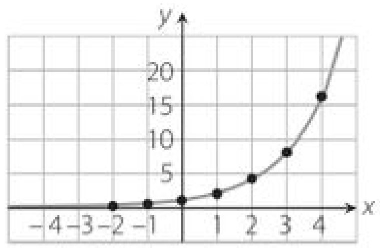
Funções exponenciais

Gráficos de funções exponenciais

Você pode perceber que as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ envolvem uma base e uma potência, porém com características diferentes:

- Para $f(x) = x^2$, a base é a variável x e o expoente é a constante 2; f é tanto uma *função potência* como uma função monomial conhecida.
- Para $g(x) = 2^x$, a base é a constante 2 e o expoente é a variável x; g é uma *função exponencial*. Veja a Figura 3.28.

Figura 3.28 Esboço de $g(x) = 2^x$.



DEFINIÇÃO Funções exponenciais

Sejam a e b constantes reais, uma *função exponencial* em x é uma função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = a \cdot b^x$$

onde a é diferente de zero, b é positivo e $b \neq 1$. A constante a é o *valor* de f quando $x = 0$ e b é a *base*.

Para reconhecer uma função exponencial, você precisa conhecer suas características. Funções exponenciais estão definidas e são contínuas para todos os números reais.

Exemplo

3.18 Identificação de funções exponenciais

(a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com um valor a igual a 1 e base igual a 3.

(b) $g(x) = 6x^{-4}$ *não* é uma função exponencial porque a base x é uma variável e o expoente é uma constante; g é uma função potência.

(c) $h(x) = -2 \cdot 1{,}5^x$ é uma função exponencial, com um valor a igual a -2 e base igual a 1,5.

(d) $k(x) = 7 \cdot 2^{-x}$ é uma função exponencial, com um valor a igual a 7 e base igual a 1/2, pois $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$.

(e) $q(x) = 5 \cdot 6^{\pi}$ *não* é uma função exponencial porque o expoente é uma constante; q é uma função constante.

Exemplo

3.19 Cálculo dos valores de uma função exponencial para alguns números racionais

Para $f(x) = 2^x$, temos:

(a) $f(4) = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

(b) $f(0) = 2^0 = 1$

(c) $f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

(d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

(e) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2^{-3/2} = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}35355\ldots$

Não existe propriedade de potenciação para expressar o valor de uma função exponencial quando o expoente é *irracional*. Por exemplo, se $f(x) = 2^x$, então $f(\pi) = 2^{\pi}$, porém você sabe o que 2^{π} significa? O que você pode fazer são apenas aproximações, como mostra a Tabela 3.1:

Tabela 3.1 Valores de $f(x) = 2^x$ para números racionais aproximando π por 3,14159265.

x	3	3,1	3,14	3,141	3,1415	3,14159
2^x	8	8,5...	8,81...	8,821...	8,8244...	8,82496...

Exemplo

3.20 Identificação da lei de uma função exponencial a partir de alguns valores tabelados

Determine fórmulas para as funções exponenciais **g** e **h**, cujos valores são dados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 Alguns valores para duas funções exponenciais.

x	$g(x)$		$h(x)$	
-2	$4/9$		128	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
-1	$4/3$		32	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
0	4		8	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
1	12		2	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
2	36		$1/2$	

Solução

Como g é uma função exponencial, então $g(x) = a \cdot b^x$. Como $g(0) = 4$, então o valor de a é igual a 4. Como $g(1) = 4 \cdot b^1 = 12$, então a base b é igual a 3. Assim,

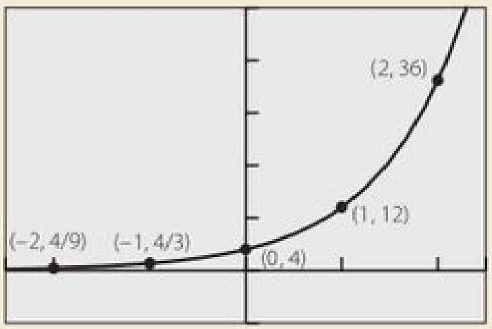
$$g(x) = 4 \cdot 3^x$$

Como h é uma função exponencial, então $h(x) = a \cdot b^x$. Como $h(0) = 8$, então o valor de a é igual a 8. Como $h(1) = 8 \cdot b^1 = 2$, então a base b é igual a 1/4. Assim,

$$h(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

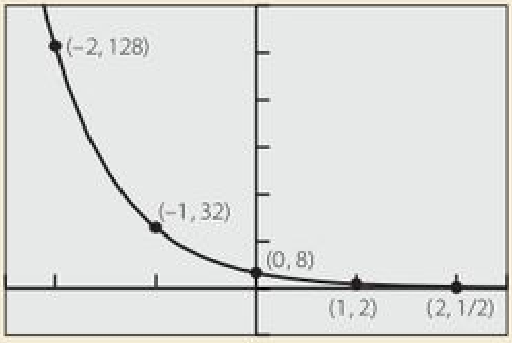
A Figura 3.29 mostra os gráficos dessas funções, e os pontos destacados são os pares ordenados mostrados na Tabela 3.2.

Figura 3.29 Gráficos de (a) $g(x) = 4 \cdot 3^x$ e (b) $h(x) = 8 \cdot (1/4)^x$.



[–2,5; 2,5] por [–10, 50]

(a)



[−2,5; 2,5] por [−25, 150]
(b)

Na Tabela 3.2, você pode verificar que os valores da função $g(x)$ crescem com fator de multiplicação igual a 3 e os da função $h(x)$ decrescem com fator de multiplicação igual a 1/4. Além disso, a variação dos valores de x é de uma unidade, e o fator de multiplicação é a base da função exponencial. Esse padrão generaliza todas as funções exponenciais, como vemos na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 Valores para uma função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$.

x	$a \times b^x$	
−2	ab^{-2}	
		$\times b$
−1	ab^{-1}	
		$\times b$
0	a	
		$\times b$
1	ab	
		$\times b$
2	ab^2	

Na Tabela 3.3 vemos que, quando x cresce uma unidade, o valor da função é multiplicado pela base b. Essa relação acarreta a seguinte *fórmula recursiva*.

Crescimento e decrescimento exponencial

Para qualquer função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ e qualquer número real x,

$$f(x + 1) = a \cdot b^{(x+1)}$$

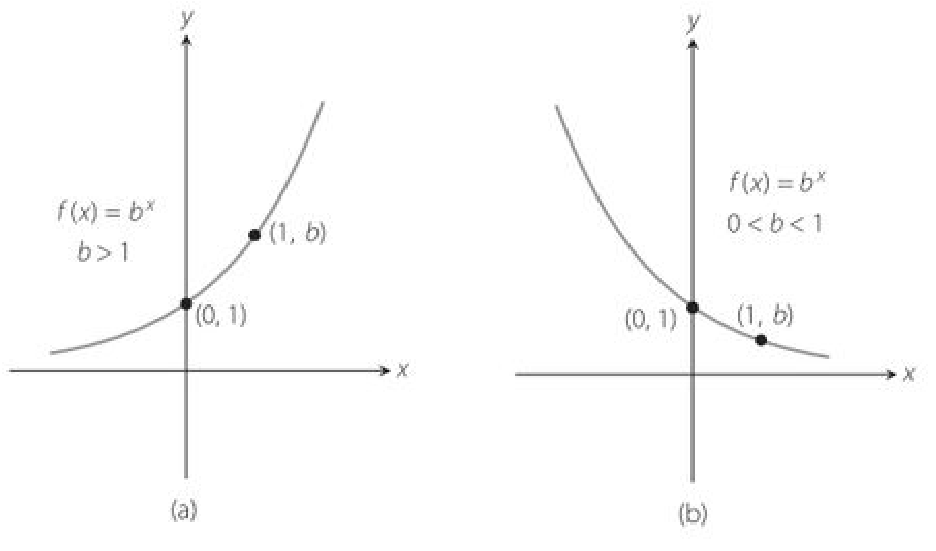
Se $a > 0$ e $b > 1$, então a função f é crescente e é uma *função de crescimento exponencial*. A base b é o seu *fator de crescimento*.

Se $a > 0$ e $b < 1$, então a função f é decrescente e é uma *função de decaimento exponencial*. A base b é o seu *fator de decaimento*.

No Exemplo 3.20, g é uma função de crescimento exponencial e h é uma função de decaimento exponencial. Quando x cresce por 1, $g(x) = 4 \cdot 3^x$ cresce pelo fator 3 e $h(x) = 8 \cdot (1/4)^x$ decresce pelo fator 1/4. A base de uma função exponencial nos diz se a função é crescente ou decrescente. Vamos resumir o que aprendemos sobre funções exponenciais com um valor de a igual a 1.

Funções exponenciais $f(x) = b^x$

Figura 3.30 Gráficos de $f(x) = b^x$ para (a) $b > 1$ e (b) $0 < b < 1$.



Observe o que você pode fazer também com as funções exponenciais.

Exemplo

3.21 Transformação de funções exponenciais

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = 2^x$ no gráfico da função dada.

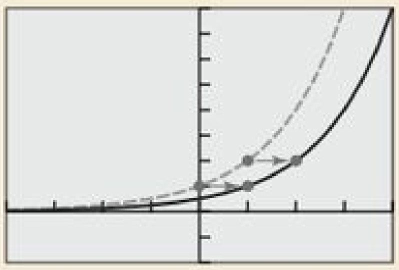
(a) $g(x) = 2^{x-1}$ **(b)** $h(x) = 2^{-x}$ **(c)** $k(x) = 3 \cdot 2^x$

(a) O gráfico de $g(x) = 2^{x-1}$ é obtido transladando o gráfico de $f(x) = 2^x$ uma unidade para a direita (Figura 3.31a).

(b) Podemos obter o gráfico de $h(x) = 2^{-x}$ refletindo o gráfico de $f(x) = 2^x$ com relação ao eixo vertical y (Figura 3.31b). Como $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$, então podemos pensar em h como uma função exponencial com um valor de a igual a 1 e uma base igual a 1/2.

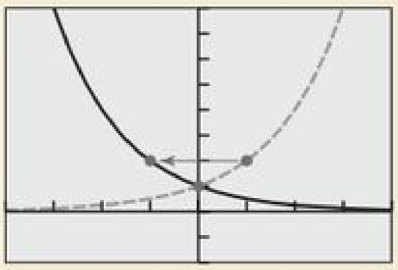
(c) Podemos obter o gráfico de $k(x) = 3 \cdot 2x$ esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = 2x$ pelo fator 3 (Figura 3.31c).

Figura 3.31 O gráfico de $f(x) = 2^x$ com (a) $g(x) = 2^{x-1}$, (b) $h(x) = 2^{-x}$ e (c) $k(x) = 3 \cdot 2^x$.



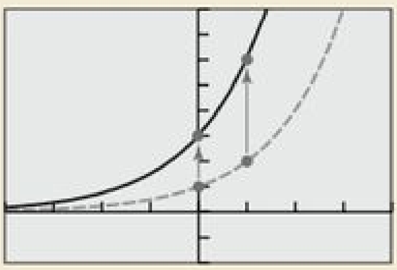
[– 4, 4] por [–2, 8]

(a)



[– 4, 4] por [–2, 8]

(b)



[– 4, 4] por [–2, 8]

(c)

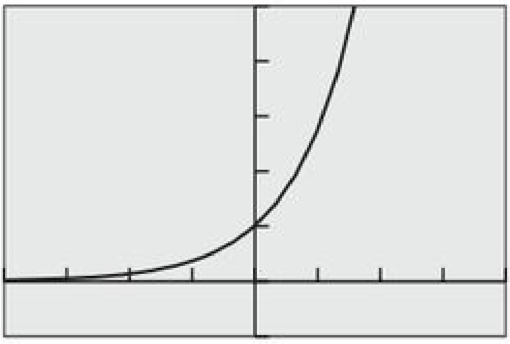
A base da função dada pelo número *e*

A função $f(x) = e^x$ é uma função de crescimento exponencial. Vamos fazer um resumo também para essa função exponencial.

Função exponencial $f(x) = e^x$

Domínio: conjunto de todos os números reais
Imagem: $]0, +\infty[$
É contínua
É crescente para todo valor de x do domínio
Não é simétrica
Limitada inferiormente, mas não superiormente
Não tem extremos locais
Assíntota horizontal: $y = 0$
Não tem assíntotas verticais
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Figura 3.32 O gráfico de $f(x) = e^x$.



[−4, 4] por [−1, 5]

Como $f(x) = e^x$ é crescente, então é uma função de crescimento exponencial; logo $e > 1$. Mas o que é o número e?

A letra e é a inicial do último nome de Leonhard Euler (1707-1783), que foi quem introduziu a notação. Como $f(x) = e^x$ tem propriedades especiais de cálculo que simplificam muitas contas, então e é a *base natural* da função exponencial, que é chamada de *função exponencial natural* (Figura 3.32).

DEFINIÇÃO A base natural e

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Você não pode calcular o número irracional e diretamente, mas, usando essa definição, pode obter aproximações cada vez melhores para e, como mostrado na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 Aproximações para a base natural e.

x	1	10	100	1.000	10.000	100.000
$(1 + 1/x)^x$	2	2,5...	2,70...	2,716...	2,7181...	2,71826...

É comum as pessoas estarem mais interessadas na função exponencial $f(x) = e^x$ e variações dessa função do que no número irracional e. De fato, *qualquer* função exponencial pode ser expressa em termos da base natural e.

TEOREMA Funções exponenciais e a base e

Qualquer função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ pode ser reescrita como

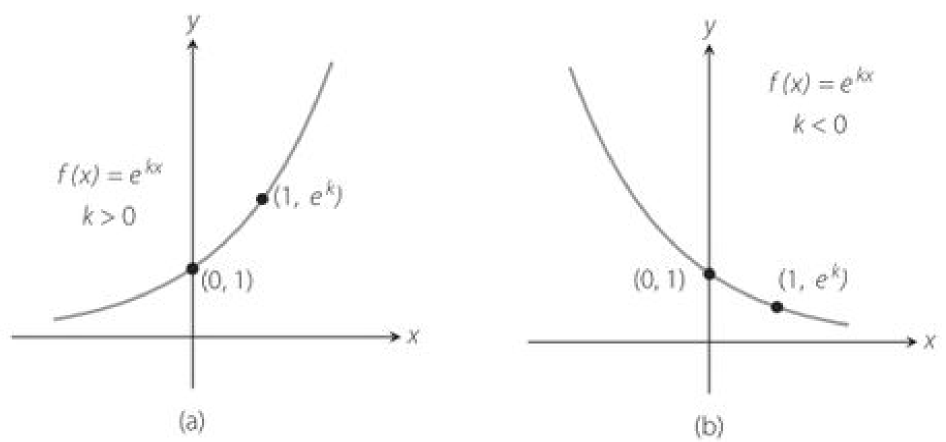
$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

para uma constante k sendo um número real apropriadamente escolhido.

Se $a > 0$ e $k > 0$, então $f(x) = a \cdot e^{kx}$ é uma função de crescimento exponencial (veja a Figura 3.33a).

Se $a > 0$ e $k < 0$, então $f(x) = a \cdot e^{kx}$ é uma função de decaimento exponencial (veja a Figura 3.33b).

Figura 3.33 Gráficos de $f(x) = e^{kx}$ para (a) $k > 0$ e (b) $k < 0$.



Exemplo

3.22 Transformação de funções exponenciais

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = e^x$ no gráfico da função dada.

(a) $g(x) = e^{2x}$ **(b)** $h(x) = e^{-x}$ **(c)** $k(x) = 3e^x$

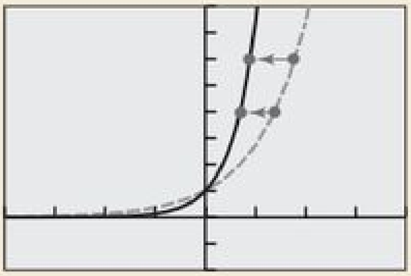
Solução

(a) O gráfico de $g(x) = e^{2x}$ é obtido encolhendo horizontalmente o gráfico de $f(x) = e^x$ por meio do fator 2 (Figura 3.34a).

(b) Podemos obter o gráfico de $h(x) = e^{-x}$ refletindo o gráfico de $f(x) = e^x$ com relação ao eixo vertical y (Figura 3.34b).

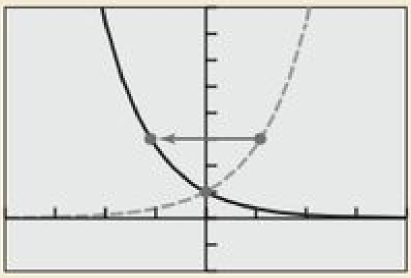
(c) Podemos obter o gráfico de $k(x) = 3 \cdot e^x$ esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = e^x$ pelo fator 3 (Figura 3.34c).

Figura 3.34 O gráfico de $f(x) = e^x$ com $g(x) = e^{2x}$, (b) $h(x) = e^{-x}$ e (c) $k(x) = 3e^x$.



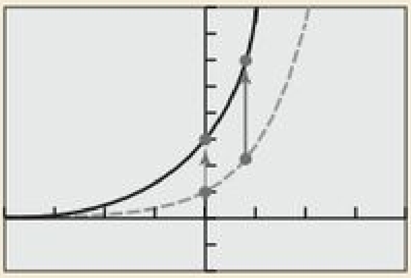
$[-4, 4]$ por $[-2, 8]$

(a)



$[-4, 4]$ por $[-2, 8]$

(b)



$[-4, 4]$ por $[-2, 8]$

(c)

Funções de crescimento logístico

Uma função de crescimento logístico mostra seu comportamento a uma taxa crescente e não é limitada superiormente. A limitação acaba existindo por razões de capacidade física ou de volume máximo. Com isso, devido às situações reais, a função de crescimento é limitada tanto inferior como superiormente por assíntotas horizontais.

DEFINIÇÃO Funções de crescimento logístico

Sejam a, b, c e k constantes positivas, com $b < 1$. Uma *função de crescimento logístico* em x é uma função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \text{ ou } f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-kx}}$$

onde a constante c é o *limite de crescimento*.

Modelos de crescimento e decaimento exponencial

Modelos de crescimento e decaimento exponencial são utilizados em situações nas quais o crescimento ou decrescimento é proporcional ao tamanho atual da quantidade de interesse. Populações de animais, bactérias e átomos radioativos são alguns exemplos.

Exemplo

3.23 Modelagem do crescimento de bactérias

Suponha uma cultura de 100 bactérias localizadas num objeto, de modo que o número de bactérias dobra a cada hora. Conclua quando esse número chegará em 350.000 unidades.

Solução

Modelo

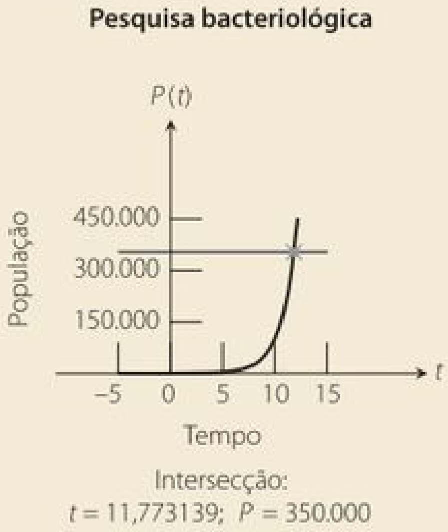
$200 = 100 \cdot 2$	Total de bactérias após 1 hora
$400 = 100 \cdot 2^2$	Total de bactérias após 2 horas
$800 = 100 \cdot 2^3$	Total de bactérias após 3 horas
...	
$P(t) = 100 \cdot 2^t$	Total de bactérias após t horas

Assim, a função $P(t) = 100 \cdot 2^t$ representa a população de bactérias t horas após a verificação inicial no objeto.

Solução gráfica

A Figura 3.35 mostra que a função da população intersecciona $y = 350.000$ quando $t \cong 11,77$.

Figura 3.35 Crescimento exponencial de uma população de bactérias.



O número de átomos de um elemento específico que se modifica de um estado radioativo para um estado não radioativo é uma fração fixada por unidade de tempo. O processo é chamado de *decaimento radioativo*. O tempo que leva para que metade da amostra mude de estado é chamado de *meia-vida* da substância radioativa.

Você percebe, então, que as funções de decaimento exponencial modelam a quantidade de uma substância radioativa presente em uma amostra, por exemplo?

Exemplo

3.24 Modelagem do decaimento radioativo

Suponha que a meia-vida de uma certa substância radioativa é de 20 dias e que existem 5 gramas presentes inicialmente. Encontre o tempo até existir 1 grama da substância.

Solução

Modelo

Se t é o tempo em dias, o tempo de meias-vidas será $t/20$.

$$\frac{5}{2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{20/20} \qquad \text{Gramas após 20 dias}$$

$$\frac{5}{4} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{40/20} \qquad \text{Gramas após } 2 \cdot 20 = 40 \text{ dias}$$

$$\vdots$$

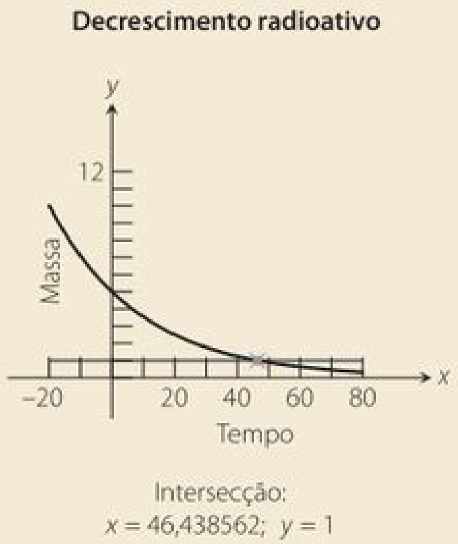
$$f(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} \qquad \text{Gramas após } t \text{ dias}$$

Assim, a função $f(t) = 5 \cdot 0{,}5^{t/20}$ modela a massa, em gramas, da substância radioativa no tempo t.

Solução gráfica

A Figura 3.36 mostra que o gráfico de $f(t) = 5 \cdot 0{,}5^{t/20}$ intersecciona $y = 1$ quando $t \cong 46{,}44$.

Figura 3.36 Decaimento radioativo.



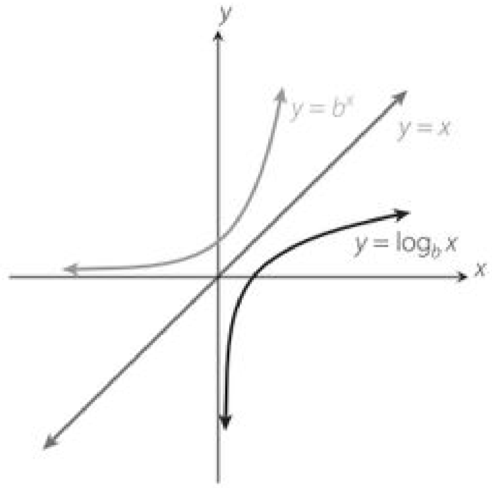
Interpretação

Existirá 1 grama da substância radioativa após, aproximadamente, 46,44 dias, ou seja, cerca de 46 dias e 11 horas.

Funções logarítmicas

Uma função exponencial $f(x) = b^x$ tem uma inversa que também é função. Essa inversa é a *função logarítmica de base b*, denotada por $\log_b x$, isto é, se $f(x) = b^x$ com $b > 0$ e $b \neq 1$, então $f^{-1}(x) = \log_b x$. Veja a Figura 3.37.

Figura 3.37 A função exponencial e sua inversa, que é a função logarítmica (no caso de função crescente).



Essa transformação nos diz que um *logaritmo está vinculado a uma potência, ou seja, é um expoente da potência*. Com isso, podemos desenvolver expressões logarítmicas usando nossos conhecimentos sobre potenciação.

Transformação entre a forma logarítmica e a forma exponencial

Se $x > 0$ e $0 < b \neq 1$, então

$$y = \log_b(x) \text{ se, e somente se, } b^y = x.$$

Exemplo

3.25 Cálculo de logaritmos

(a) $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

(b) $\log_3 \sqrt{3} = 1/2$ porque $3^{1/2} = \sqrt{3}$

(c) $\log_5 1/25 = -2$ porque $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

(d) $\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$

(e) $\log_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$

Link

Para mais detalhes, acesse <www.brasilescola.com/matematica/funcao-polinomial.htm>.

Você pode generalizar os resultados observados no Exemplo 3.25.

Propriedades básicas dos algoritmos

Para $x > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$ e y um número real qualquer.

$\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$
$\log_b b = 0$ porque $b^1 = b$
$\log_b b^y = y$ porque $b^y = b^y$
$b^{\log_b x} = x$ porque $\log_b x = \log_b x$

Observe que, em geral, nas situações práticas, as bases dos logaritmos são quase sempre maiores que 1.

Saiba mais

O matemático suíço Leonhard Euler, criador da função de crescimento exponencial, foi tão importante para seu país que sua foto já estampou a nota de 10 francos suíços no passado. O pai de Euler desejava que seu filho estudasse teologia e seguisse carreira religiosa. Inicialmente, Leonhard até estudou filosofia, mas um amigo de seu pai, o matemático Johann Bernoulli, descobriu seu talento matemático. Se o pai de Euler não tivesse um amigo, hoje a matemática talvez não fosse como é...

Essas propriedades nos dão suporte para calcular logaritmos e algumas expressões exponenciais. Você vê, a seguir, exemplos que já apareceram no Exemplo 3.25, mas agora com destaque para algumas das propriedades listadas anteriormente.

Exemplo

3.26 Cálculo de logaritmos

(a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(b) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{1/2} = 1/2$
(c) $6^{\log_6 11} = 11$

As funções logarítmicas são inversas das funções exponenciais. Com as propriedades citadas, você pode compreender os cálculos apresentados na Tabela 3.5, tanto para $f(x) = 2^x$ como para $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Tabela 3.5 Uma função exponencial e sua inversa.

x	$f(x) = 2^x$	x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
-3	1/8	1/8	-3
-2	1/4	1/4	-2
-1	1/2	1/2	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

Exercícios de fixação

1. Defina o que é função.
2. O que é o domínio de uma função?
3. O que é a imagem de uma função?
4. Defina a notação de uma função.
5. O que é a variável independente de uma função?
6. O que é a variável dependente de uma função?
7. Defina o que é função crescente.
8. Defina o que é função decrescente.
9. Defina o que é função constante.
10. Defina uma função limitada.
11. O que são máximo local e mínimo local?
12. O que são máximo absoluto e mínimo absoluto?
13. O que é uma função polinomial?
14. Qual o coeficiente principal de uma função de *n* graus?
15. O que é uma função de primeiro grau?
16. Quais as características de uma função de primeiro grau?
17. O que é função de segundo grau?
18. Quais as características de uma função de segundo grau?
19. O que é um eixo de simetria de uma função do segundo grau?
20. O que é o vértice de uma função de uma função do segundo grau?
21. Qual a forma quadrática padrão?
22. Qual a forma canônica de uma função do segundo grau?
23. O que são funções polinomiais?
24. O que são funções cúbicas?
25. O que são funções quárticas?
26. O que é um termo de um polinômio?
27. Escreva a forma padrão de uma função polinomial.
28. Quais os coeficientes de um polinômio?
29. Qual o termo principal de um polinômio?
30. O que é a raiz de uma função polinomial?
31. O que é a multiplicidade de uma raiz de uma função polinomial?
32. O que é raiz repetida?
33. O que são funções exponenciais?
34. O que é uma função de crescimento exponencial?
35. O que é uma função de decaimento exponencial?
36. O que é a base natural *e*?

Panorama

Você pode não perceber à primeira vista, mas as funções do primeiro grau estão intimamente relacionadas com a sua vida.

A matemática é fundamental para as empresas. Mensurar custos, estimar vendas e auferir lucros são atividades empresariais básicas que precisam da matemática. As funções do primeiro grau, que você conheceu nesta unidade, também podem ser muito úteis nesse sentido.

Funções do primeiro grau têm o formato $f(x) = ax + b$, sendo que a sempre precisa ser diferente de 0. Se você trouxer essa equação para uma empresa, pode perceber que, com ela, é possível calcular a função dos custos de produção.

Os custos de produção normalmente dependem de dois fatores: custos variáveis e custos fixos. Os variáveis dependem da quantidade produzida. Os fixos, não. Você percebe onde cada um se encaixa na função mencionada: a = custos variáveis por unidade; x = quantidade produzida e b = custos fixos. Fácil, né?

Por exemplo, uma pequena e tradicional confeitaria de São Paulo vende sonhos por R$ 3,00 a unidade. A confeitaria tem um custo fixo (aluguel, contas de água, luz e telefone) de R$ 300,00 por dia. Além disso, a matéria-prima e a mão de obra custam diariamente para o proprietário R$ 1,50.

Sabendo que a receita é dada por preço vezes quantidade e o custo total é custo fixo mais custo variável, responda às questões a seguir.

a) Você seria capaz de escrever a receita diária e o custo diário do proprietário?

b) Quantas unidades esse microempresário deve vender para obter um equilíbrio entre receitas e despesas?

c) Sabendo-se que o lucro pode ser dado por receita menos custo, qual seria a expressão matemática para o lucro diário do proprietário?

d) Se o proprietário vende 250 sonhos diariamente, está tendo lucro ou prejuízo?

e) O proprietário está planejando aumentar as instalações da confeitaria. Para isso ele precisaria ter um lucro diário de R$ 450,00. Quantos sonhos a confeitaria deveria vender por dia para obter esse lucro?

Recapitulando

Uma empresa lucra dependendo do quanto sua receita é maior do que seus custos de produção. Você consegue entender isso facilmente, não é? Se você conseguiu associar isso à matemática ensinada nesta unidade, a missão do livro foi cumprida.

As funções servem justamente para simplificar. Você deve estar se perguntando: como funções podem facilitar o cálculo do lucro de empresas? Simples, as funções colocam o lucro em função da produtividade.

Se $f(x) = ax + b$, sendo a o custo de produção unitário, b o custo fixo de produção e x a quantidade total produzida, $f(x)$ é a função dos custos totais de produção. Então, para ter lucro, você já sabe que precisa vender o total de unidades x por um valor que seja suficiente para exceder os seus custos de produção.

Portanto, a função $f(x)$ representa o custo em função da quantidade x de produtos produzidos. A aplicação acima é simples, certo? Mas há muitas funções mais complicadas, conforme você pôde ver nos temas anteriores.

UNIDADE 4

Introdução ao cálculo

Objetivos de aprendizagem

- Aprender a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea.
- Saber o que é reta tangente a um gráfico.
- Conhecer o que é uma derivada e as regras da derivação.
- Aprender o que é uma integral.
- Entender a diferença entre integral definida e indefinida de uma função.
- Conhecer as regras da integração.

Temas

- **1 – Derivada de uma função**
  Você sabe que um automóvel ou um ônibus viaja sempre a uma determinada velocidade, certo? Neste tema, você vai entender o que é velocidade, aprendendo também a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea. Vai conhecer ainda as retas derivadas e as regras de derivação.
- **2 – Integral de uma função**
  Você certamente está acostumado a ouvir a palavra *integral*. Alimentos como pão ou arroz podem ser integrais. Mas na matemática a palavra *integral* tem outro significado. Aqui, neste tema, você vai entender o que é uma integral para a matemática, conhecendo a diferença entre integral definida e indefinida. Ah! E vai aprender também quais são as regras de integração...

Introdução

Você conhece o verbo *derivar*? Um dos significados de *derivar*, segundo o *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*, é "ser proveniente de". Nesta unidade, você vai conhecer as derivadas das funções. Além disso, vai entender o que é uma integral – que, na prática, é a inversa da derivada.

As funções são equações que dependem de variáveis. Se $y = f(x)$, y vai variar em função de x. É possível calcular, então, a taxa média de variação de x com relação a y em determinados intervalos.

Usando limites, podemos desenvolver a definição para a taxa *instantânea* de y com relação a x no valor de $x = a$. Essa taxa de variação instantânea é chamada de *derivada*, ou seja, derivada da função $y = f(x)$, quando $x = a$.

Seja uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Escolha um valor qualquer x_1 no primeiro subintervalo, x_2 no segundo e assim por diante. Calcule $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots f(x_n)$, multiplique cada valor por Δx e faça a soma dos produtos. A notação da soma dos produtos é

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

O *limite* dessa soma quando n tende para $+\infty$ é a solução do problema da área e também a solução para o problema da distância percorrida. Esse limite, caso exista, é chamado de *integral definida*.

Parece complicado demais entender o que é uma derivada e uma integral, assim, apenas com palavras. Nas próximas páginas, você vai compreender melhor, com exemplos, o que é cada um desses itens.

Derivada de uma função

Velocidade média e velocidade instantânea

Você sabe o que é *velocidade média*? É o valor da variação da posição de um objeto (ou dizemos variação do espaço percorrido) dividido pelo valor da variação do tempo, como você vê no Exemplo 4.1.

Exemplo

4.1 Cálculo da velocidade média

Um automóvel viaja 200 quilômetros em 2 horas e 30 minutos. Qual é a velocidade média desse automóvel depois de transcorrido esse tempo?

Solução

A velocidade média é o valor da variação da posição (200 quilômetros) dividido pelo valor da variação do tempo (2,5 horas). Se denotarmos a posição por s e o tempo por t, temos:

$$\text{Velocidade média} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200 \text{ quilômetros}}{2{,}5 \text{ horas}} = 80 \text{ quilômetros por hora}$$

Você consegue perceber que a velocidade média não informa a rapidez do automóvel em um momento qualquer durante o intervalo de tempo. Ele pode ter rodado a uma velocidade constante de 80 quilômetros por hora durante todo o tempo ou aumentado, diminuído e até mesmo parado a velocidade momentaneamente várias vezes durante a viagem. Veremos a seguir o conceito de velocidade instantânea.

Exemplo

4.2 Cálculo da velocidade instantânea

Uma bola desce uma rampa tal que sua distância s do topo da rampa após t segundos é exatamente t^2 centímetros. Qual é sua velocidade instantânea após t segundos?

Solução

Poderíamos tentar responder a essa questão calculando a velocidade média sobre intervalos de tempo cada vez menores.

Sobre o intervalo [3; 3,1]:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3{,}1)^2 - 3^2}{3{,}1 - 3} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1 \text{ centímetros por segundo}$$

Sobre o intervalo [3; 3,05]:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3{,}05)^2 - 3^2}{3{,}05 - 3} = \frac{0{,}3025}{0{,}05} = 6{,}05 \text{ centímetros por segundo}$$

Continuando esse processo, poderíamos eventualmente concluir que a *velocidade instantânea* é de 6 centímetros por segundo. Portanto, podemos ver *diretamente* o que está acontecendo com o quociente (que resulta na velocidade média) por meio do que chamamos de *limite* da velocidade média sobre o intervalo [3, t] quando t se aproxima de 3 (esse limite estuda a tendência da velocidade média à medida que t se aproxima de 3).

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 3}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{t\to 3}\frac{t^2-3^2}{t-3}\\
&= \lim_{t\to 3}\frac{(t+3)(t-3)}{t-3}\\
&= \lim_{t\to 3}(t+3)\cdot\frac{t-3}{t-3}\\
&= \lim_{t\to 3}(t+3) \qquad \text{Desde que temos } t\neq 3\text{, então } \frac{t-3}{t-3}=1\\
&= 6
\end{aligned}$$

Note que *t não é igual a 3*, mas está se *aproximando* de 3 como um limite, o que nos permite fazer o cancelamento no Exemplo 4.2. Se t fosse igual a 3, o desenvolvimento feito nos levaria a uma conclusão incorreta, que é a de que $0/0 = 6$. A diferença entre igualar a 3 e se aproximar de 3 como um limite é sutil, mas importantíssima do ponto de vista algébrico.

Não é simples a definição algébrica formal de um limite. Temos utilizado a ideia intuitiva e podemos usar o seguinte resultado, digamos, *informal*.

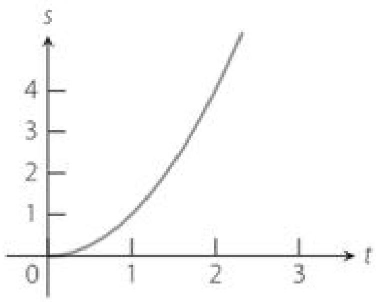
DEFINIÇÃO Limite em *a*

Quando escrevemos "$\lim_{x\to a} f(x) = L$", temos de fato que $f(x)$ se aproxima de L na medida em que x se aproxima de a.

Retas tangentes a um gráfico

Observe a Figura 4.1 a seguir. Se ligar os pontos (1,1) e (2,4) com uma reta, você constrói uma *reta secante* ao gráfico. Você pode encontrar a tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo horizontal x, ou seja, encontrar a inclinação da reta (esse ângulo é definido da reta, no sentido horário, até o eixo horizontal x). Observe que essa conta pode ser feita com o cálculo da velocidade média da bola no intervalo de tempo [1, 2].

Figura 4.1 O gráfico de $s = t^2$ mostra a distância s percorrida pela bola na rampa (como no Exemplo 4.2) como uma função do tempo transcorrido t.



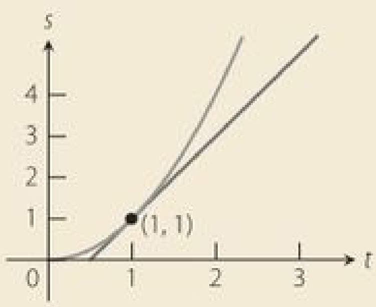
Essa conclusão é importante. Se $(a, s(a))$ e $(b, s(b))$ são dois pontos do gráfico, então a *velocidade média* sobre o intervalo $[a, b]$ pode ser interpretada como a *inclinação* da reta contendo esses dois pontos. De fato, designamos as quantidades com os símbolos $\Delta s/\Delta t$.

Exemplo

4.3 Cálculo da inclinação de uma reta tangente

Use limites para encontrar a inclinação da reta tangente ao gráfico de $s = t^2$ no ponto (1,1).

Figura 4.2 A reta tangente ao gráfico de $s = t^2$ no ponto (1,1).



Solução

Usaremos as mesmas ideias já utilizadas no Exemplo 4.2.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{t\to 1}\frac{t^2-1^2}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t-1)}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}(t+1)\cdot\frac{t-1}{t-1}\\
&= \lim_{t\to 1}(t+1) \qquad \text{Desde que temos } t\neq 1\text{, então } \frac{t-1}{t-1}=1\\
&= 2
\end{aligned}$$

Se comparar os exemplos 4.2 e 4.3, você pode ver que os métodos, tanto para resolver o problema da reta tangente como para resolver o problema da velocidade instantânea, são os mesmos.

A derivada

Se $y = f(x)$ é uma função *qualquer*, então podemos dizer como y varia quando x varia.

DEFINIÇÃO Taxa média de variação

Se $y = f(x)$, então a *taxa média de variação* de y com relação a x sobre o intervalo $[a, b]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, esta é a inclinação da *reta secante* que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Usando limites, podemos desenvolver a definição para a taxa *instantânea* de y com relação a x no valor de $x = a$. Essa taxa de variação instantânea é chamada de *derivada*, ou seja, derivada da função $y = f(x)$ quando $x = a$.

DEFINIÇÃO Derivada em um ponto

A derivada da função f em x = a, denotada por $f'(a)$ (lê-se 'f linha de a'), pode ser definida através do limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que o limite exista.

Geometricamente, representa a inclinação da *reta tangente* ao gráfico de f e que passa pelo ponto $(a, f(a))$.

Se você considerar $x = a + h$, então fazer x se aproximar de a é o mesmo que fazer h tender a 0.

DEFINIÇÃO Derivada em um ponto

A *derivada da função f em x = a*, denotada por $f'(a)$ (lê-se 'f linha de a'), é

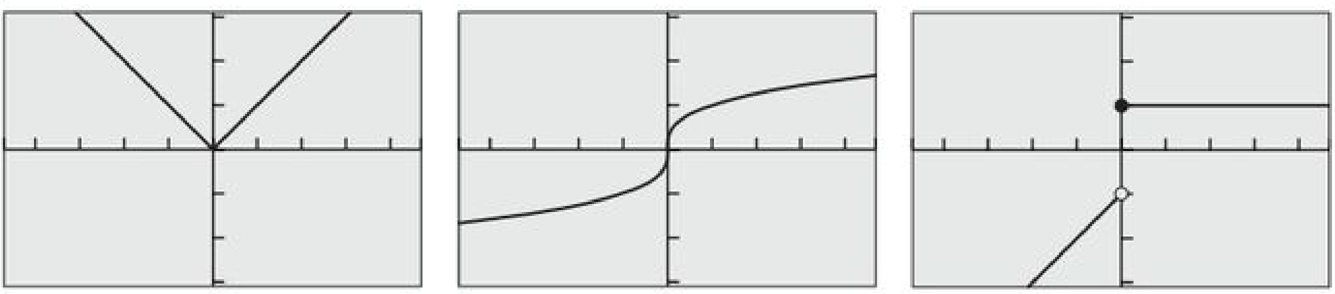
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

desde que o limite exista.

Pelo fato de a derivada de uma função em um ponto poder ser vista geometricamente como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ passando pelo próprio ponto, a derivada pode não existir, uma vez que essa reta tangente pode não estar bem definida.

A Figura 4.3 mostra três casos para os quais $f(0)$ existe, mas $f'(0)$ não.

Figura 4.3 Exemplos de funções definidas em $x = 0$, mas sem a derivada em $x = 0$.



[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(a)
$f(x) = |x|$ tem um gráfico com inclinação não definida em $x = 0$.

[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(b)
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ tem um gráfico com uma reta tangente vertical em $x = 0$.

[–4,7; 4,7] por [–3,1; 3,1]
(c)
$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

Exemplo

4.4 Cálculo da derivada em um ponto

Encontrar $f'(4)$ se $f(x) = 2x^2 - 3$.

Solução

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(4+h)^2 - 3 - (2\cdot 4^2 - 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(16+8h+h^2) - 32}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{16h + 2h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (16 + 2h) \qquad \frac{h}{h} = 1, \text{ desde } h \neq 0 \\
&= 16
\end{aligned}
$$

A derivada também pode ser definida como uma função de x. Essa função, chamada função derivada, tem como domínio o conjunto de todos os valores do domínio de f, para os quais f tem derivada, isto é, f é diferenciável. A função f' pode ser definida adaptando a definição que já vimos para $x = a$.

DEFINIÇÃO Derivada de uma função $f(x)$

Se $y = f(x)$, então a *derivada da função f com relação a x* é a função f', cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para todos os valores de x onde o limite existe.

O Exemplo 4.5 mostra uma notação que você pode encontrar quando o assunto é a derivada de uma função.

Exemplo

4.5 Cálculo da derivada de uma função (com apresentação de outra notação)

(a) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = x^2$, isto é, encontre $\frac{dy}{dx}$ se $y = x^2$.

(b) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \frac{1}{x}$, isto é, encontre $\frac{dy}{dx}$ se $y = \frac{1}{x}$.

Solução

(a)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x + h) \qquad \frac{h}{h} = 1, \text{ desde que } h \neq 0 \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Assim, $f'(x) = 2x$, isto é, $\frac{dy}{dx} = 2x$

(b)
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Assim, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, isto é, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$

Link

Para mais detalhes, acesse <www.somatematica.com.br/superior/derivada.php>.

Regras de derivação

Você já aprendeu a definição de derivada de uma função. No entanto, vale informar que existem regras de derivação de função cujo objetivo é tornar mais fácil todo o procedimento desenvolvido aqui. Todos os resultados podem ser demonstrados, porém vamos citar somente algumas funções seguidas das respectivas derivadas.

Função constante:

$f(x) = k$

$f'(x) = 0$

Função diferença:

$f(x) = u(x) - v(x)$

$f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Função potência:

$f(x) = x^{\alpha}$, e α uma constante

$f'(x) = \alpha \cdot x^{(\alpha - 1)}$

Função produto:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Função soma:

$f(x) = u(x) + v(x)$

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Função produto com um dos fatores constante (dizemos constante multiplicada por função):

$f(x) = k \cdot v(x)$

$f'(x) = k \cdot v'(x)$

Função quociente:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, v(x) \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Função exponencial:

$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$

$f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Função logarítmica

$f(x) = \log_a x, x \in \,]0, +\infty[, a > 0$ e $a \neq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Saiba mais

A criação da derivada é atribuída a Pierre de Fermat. Diante de sua resistência em escrever obras, suas anotações sobre a derivada foram registradas em correspondências trocadas com seus amigos matemáticos Gassendi, Huygens e Mersenne. Fermat concebeu o conceito de que a área sob uma curva poderia ser vista como o limite das somas das áreas do retângulo.

Integral de uma função

Com as informações da velocidade de um objeto e do tempo transcorrido, você pode calcular a distância percorrida. Os exemplos a seguir mostram isso.

Exemplo

4.6 Cálculo da distância percorrida (com uma velocidade constante)

Um automóvel viaja a uma velocidade constante de 80 km/h durante 2 horas e 30 minutos. Qual é a distância percorrida pelo automóvel?

Solução

Distância = velocidade • tempo = 80 • 2,5 = 200 quilômetros

Exemplo

4.7 Cálculo da distância percorrida (com uma velocidade média)

Um automóvel viaja a uma velocidade média de 80 km/h durante 2 horas e 30 minutos. Qual é a distância percorrida pelo automóvel?

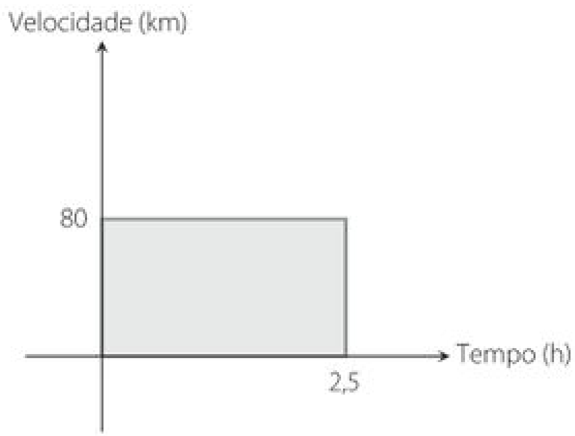
Solução

Δs = Velocidade média • Δt = 80 • 2,5 = 200 quilômetros

Você pode perceber que, dada a velocidade média sobre um intervalo de tempo, é possível encontrar facilmente a distância percorrida. Suponha uma função velocidade $v\ (t)$ que nos forneça a velocidade instantânea como uma função variando com relação ao tempo. Como você pode usar a função que dá a velocidade instantânea para encontrar a distância percorrida no intervalo de tempo?

Observe a Figura 4.4. Você pode perceber que a área do retângulo sombreado resulta no mesmo valor obtido com a multiplicação entre a distância percorrida e o tempo transcorrido.

Figura 4.4 Velocidade constante do Exemplo 4.1 em função do tempo.



Agora, suponha que a função velocidade varie constantemente como uma função do tempo, como mostrado na Figura 4.5.

Figura 4.5 Velocidade variando no intervalo de tempo [*a*, *b*].

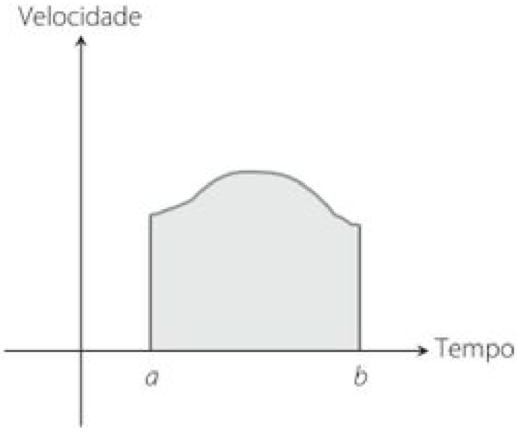
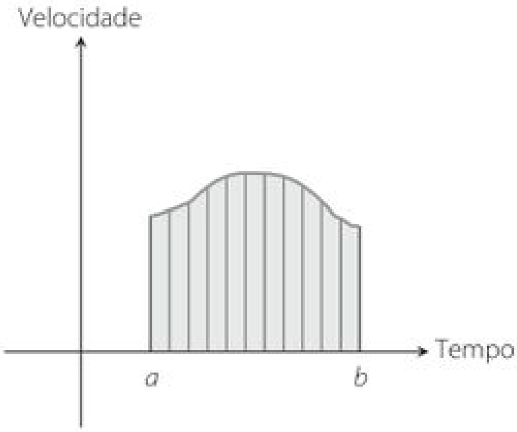


Figura 4.6 A região sob a chuva partida em fatias.



De modo análogo, seria a área sob a curva entre os valores a e b o valor da distância percorrida? A resposta é sim. Faça o seguinte: divida o intervalo de tempo em muitos pequenos intervalos, cada um com uma velocidade praticamente constante, de tão estreito que é esse intervalo. Cada fatia, por ser estreita, parece um retângulo. Veja a Figura 4.6. A soma das áreas desses retângulos, apresentada na Figura 4.6, resulta, então, num valor aproximado da área sob a curva e acima do eixo horizontal. Veja o Exemplo 4.8.

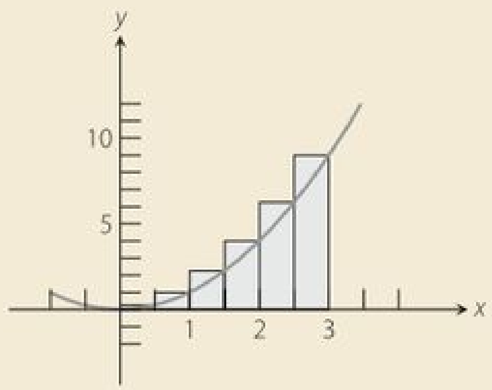
Exemplo

4.8 Cálculo aproximado da área com retângulos

Use os seis retângulos da Figura 4.7 para aproximar a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2$ sobre o intervalo [0, 3].

Solução

Figura 4.7 Parte do gráfico de $f(x) = x^2$ com a área sob a curva partida em aproximadamente seis retângulos.



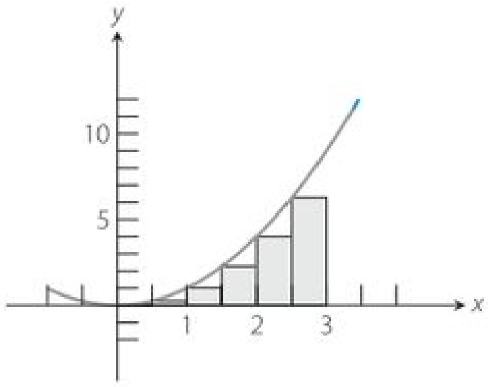
A base de cada retângulo é 1/2. A altura é determinada pela função aplicada no valor do extremo direito de cada intervalo no eixo *x*. As áreas dos seis retângulos e a área total estão calculadas na tabela a seguir.

Subintervalo	Base do retângulo	Altura do retângulo	Área do retângulo
[0, 1/2]	1/2	$f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$	(1/2)(1/4) = 0,125
[1/2, 1]	1/2	$f(1) = (1)^2 = 1$	(1/2)(1) = 0,500
[1, 3/2]	1/2	$f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4$	(1/2)(9/4) = 1,125
[3/2, 2]	1/2	$f(2) = (2)^2 = 4$	(1/2)(4) = 2,000
[2, 5/2]	1/2	$f(5/2) = (5/2)^2 = 25/4$	(1/2)(25/4) = 3,125
[5/2, 3]	1/2	$f(3) = (3)^2 = 9$	(1/2)(9) = 4,500
		Área total:	11,375

Os seis retângulos resultam em aproximadamente 11,375 unidades quadradas para a área sob a curva de 0 até 3.

Pelo fato de ter considerado o valor de *x* que está no extremo direito de cada subintervalo, você está superestimando a área sob a curva citada. Se tivesse considerado o valor de *x* que está no extremo esquerdo de cada subintervalo, então estaria subestimando o valor de área, como vemos na Figura 4.8.

Figura 4.8 As alturas dos retângulos são determinadas pela função aplicada nos valores extremos à *esquerda* de cada subintervalo.



Nesse caso, a área resulta em aproximadamente 6,875 unidades quadradas. A média entre as duas aproximações é de 9,125 unidades quadradas, que é uma boa estimativa para a verdadeira área de 9 unidades quadradas (esse resultado 9 é obtido com ferramentas do próprio cálculo diferencial e integral). Se o processo de partir em retângulos cada vez mais estreitos continuasse, você não teria mais um número finito de retângulos (cuja soma das áreas resulta num valor aproximado da área sob a curva), mas infinitos retângulos (cuja soma das áreas resulta no valor exato da área sob a curva). Isso dá o suporte para a definição da integral de uma função.

A integral definida e indefinida

Seja uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Escolha um valor qualquer x_1 no primeiro subintervalo, x_2 no segundo e assim por diante. Calcule $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ... $f(x_n)$, multiplique cada valor por Δx e faça a soma dos produtos. A notação da soma dos produtos é

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

O *limite* dessa soma quando n tende para $+\infty$ é a solução do problema da área e também a solução para o problema da distância percorrida. Esse limite, caso exista, é chamado de *integral definida*.

OBSERVAÇÃO

A soma da forma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, onde x_1 está no primeiro subintervalo, x_2 está no segundo e assim por diante, é chamada soma de Riemann, em homenagem a Georg Riemann (1826–1866), que determinou as funções para as quais tais somas têm limite quando n tende para $+\infty$.

DEFINIÇÃO Integral definida

Seja f uma função definida sobre o intervalo $[a, b]$ e seja $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ como definida anteriormente. A integral definida de f sobre $[a, b]$ denotada por $\int_a^b f(x)\, dx$ é dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

desde que o limite exista. Se o limite existe, então você pode considerar que f é *integrável* sobre $[a, b]$.

Sobre a notação da integral definida

A notação se iguala com a notação sigma da soma para a qual o limite é aplicado. O "Σ" no limite se transforma no estilizado "S" para "soma". O "Δx" torna-se "dx" e "$f(x_i)$" torna-se simplesmente "$f(x)$", afinal você está somando todos os valores $f(x)$ pertencentes ao intervalo, sendo desnecessários, então, os subscritos.

Uma definição informal para limite no infinito é

DEFINIÇÃO Limite no infinito

Quando se escreve '$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$', isso significa que $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L, na medida em que x assume valores arbitrariamente grandes.

Os exemplos a seguir utilizarão recursos da geometria para cálculo das áreas de figuras geométricas.

Exemplo

4.9 Cálculo de uma integral

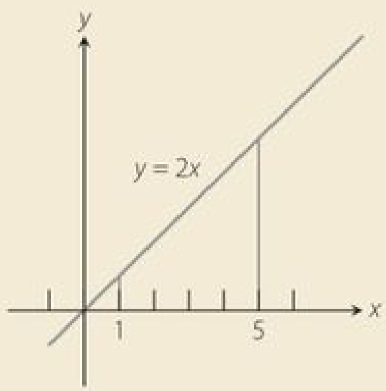
Calcule $\int_2^5 2x\,dx$.

Solução

Essa integral será a área sob a reta que é o gráfico de $y = 2x$ sobre o intervalo [1, 5]. O gráfico na Figura 4.9 mostra que esta é a área de um trapézio. Assim,

$$\int_2^5 2x\,dx = 4\left(\frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 5}{2}\right) = 24$$

Figura 4.9



Exemplo

4.10 Cálculo de uma integral

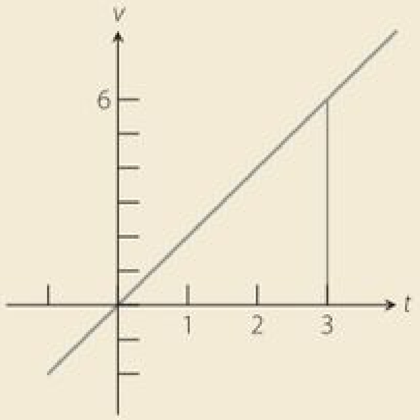
Suponha uma bola rolando e descendo uma rampa, tal que sua velocidade após t segundos é sempre $2t$ centímetros por segundo. Qual a distância que ela percorrerá nos três primeiros segundos?

Solução

A distância percorrida será a mesma que a área sob o gráfico da velocidade $v(t) = 2t$, sobre o intervalo [0, 3]. O gráfico é mostrado na Figura 4.10. Desde que

a região seja triangular, você pode encontrar a área $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2}$.
A distância percorrida nos três primeiros segundos, portanto, é de 9 centímetros.

Figura 4.10



Você pode definir a integral de uma função $f(x)$ sem especificar qual é o intervalo de x considerado. O resultado disso é uma função, chamada primitiva, adicionada de uma constante C.

DEFINIÇÃO Integral indefinida

Seja f uma função. A integral indefinida de f denotada por $\int f(x)\,dx$ é dada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

de modo que a derivada de $F(x) + C$ seja $f(x)$.

Regras de integração

Você já viu como funciona a integral de uma função pela definição. No entanto, vale informar que existem regras de integração de função, cujo objetivo é tornar mais fácil o procedimento desenvolvido. Todos os resultados podem ser demonstrados, mas você vai aprender apenas alguns casos de integral de função, seguidos

Links

Para mais detalhes, acesse <www.ctec.ufal.br/professor/enl/aurb006/apostilas/apostila_integrais.pdf> e <ecalculo.if.usp.br/integrais/def_integral/def_integral.htm>.

Saiba mais

Cunhado por Johann Bernoulli (1667–1748) e publicado primeiro por seu irmão mais velho Jakob Bernoulli (1654–1705), o termo *integral* surgiu como consequência do teorema fundamental do cálculo, de Newton e Leibniz. Antes, as integrais eram consideradas simplesmente derivadas "inversas". Isaac Newton publicou uma tabela de integrais, e, ao mesmo tempo, Johann Bernoulli desenvolveu procedimentos matemáticos para a integração de todas as funções racionais.

dos respectivos resultados. Observe que todas as regras aparecem com uma parcela C do lado direito; essa parcela representa uma constante qualquer, cuja derivada é 0.

Conheça a seguir as propriedades de integrais indefinidas, ou seja, propriedades das integrais sem determinação do intervalo real a que esteja fazendo referência.

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

$$\int (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

Algumas regras:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ para } n \neq -1$$

$$\int k\, dx = k \cdot x + C$$

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln\ x\ + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exercícios de fixação

1. Defina velocidade média.
2. Defina velocidade instantânea.
3. Exemplifique a taxa média de variação em uma função.
4. Exemplifique o que é derivada de uma função.
5. Descreva algumas regras de derivação.
6. Defina o que é integral definida e indefinida.
7. Descreva algumas regras de integração.

Panorama

Aplicação de derivadas

Com o que aprendeu nesta unidade, você consegue perceber que as derivadas, que são complementos de funções, também podem ser muito úteis para o cálculo dos custos de uma empresa. Você já havia compreendido que os custos podem variar em função da quantidade de unidades produzidas, ou seja, as funções são ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas para o cálculo dos custos empresariais.

Se as funções podem ser usadas, certamente as derivadas também têm uma utilidade para o cálculo de custos. Veja o exemplo a seguir:

Uma empresa de tecnologia está fabricando *tablets* no Brasil. A gerência determinou que o custo total diário (em dólares) para produzir os *tablets* é de $C(x) = 0{,}0002x^3 - 0{,}04x^2 + 30x + 7.500$, onde x é igual ao número de *tablets* produzidos. Sabe-se que o custo marginal é quanto os custos totais aumentam pela produção de uma unidade adicional do produto. Os custos totais aumentam à medida que produzimos mais unidades. Matematicamente, o custo marginal pode ser entendido como a derivada do custo total.

Exercícios

1. Você saberia calcular a expressão matemática do custo marginal para o caso acima?
2. Qual é o custo marginal quando a produção diária for de $x =$ 200, 300, 500 e 900?

Recapitulando

Nesta unidade, você conheceu as derivadas das funções. Aprendeu também o que são integrais, as inversas das derivadas. Em seguida, você viu que as funções são equações que dependem de variáveis. Y varia em função de x, se $y = f(x)$. Você aprendeu, ainda, como calcular a taxa média de variação de *x* com relação a *y* em determinados intervalos.

Conheceu também os limites de funções, por meio dos quais é possível definir taxas *instantâneas* de *y* com relação a *x*, quando $x = a$. A taxa de variação instantânea é justamente a *derivada*, ou seja, derivada da função $y = f(x)$, quando $x = a$.

Você viu também que, se $y = f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em *n* subintervalos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Basta definir valores para cada subintervalo, calcular as funções para cada subintervalo, multiplicar cada valor por Δx e somar os produtos.

Por fim, você viu que o *limite* da soma quando o número de intervalos tende ao infinito é a solução para o problema da área, assim como para o problema da distância percorrida. Viu ainda que o limite, caso exista, é chamado de *integral definida*.

Fácil? Talvez não, mas basta insistir em reler a unidade que em pouco tempo você conseguirá aprender...

PÁGINA EM BRANCO

PÁGINA EM BRANCO

[Administração]

MATEMÁTICA

organizadora **Fernanda Cesar Bonafini**

Baseados na premissa de que o ensino atual exige um processo flexível de construção do saber, os livros que compõem a Bibliografia Universitária Pearson são concisos sem serem rasos e simples sem serem simplistas. Para tanto, eles apresentam os principais conceitos dos temas propostos em uma estrutura didática única, com linguagem dialógica, diagramação diferenciada e hipertextos, entre outros elementos.

Em *Matemática*, isso não é diferente. Nele, tópicos como polinômios e fatoração, inequações e funções exponenciais – que, dependendo da abordagem, podem parecer complicados – são apresentados de um ponto de vista inusitado que, ao mostrar como as coisas funcionam na prática, possibilita ao leitor um processo intensivo (e real) de aprendizagem.

ISBN 978-85-64574-41-0
9 788564 574410

www.pearson.com.br