**MATRIZES**

1) Se $A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$, verifique a propriedade $AB = BA = O_{3\times3}$.

2) (UNICAMP) Sendo $a$ um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então $A^{2017}$ é igual a:
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Calcule o valor de $M^{2020}$ dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4) (UFC) A matriz quadrada $M$, de ordem $n > 1$, satisfaz a equação $M^2 = M - I$, onde $I$ é a matriz identidade de ordem $n > 1$. Determine, em termos de $M$ e $I$, a matriz $M^{2003}$.

5) (IIT) Determinar uma matriz $Q$ de ordem 3 que satisfaça $P^{10} - Q = I$, em que $I$ é a matriz identidade de ordem 3 e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

6) (ITA) Seja $A = (a_{ij})_{5x5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1)$, $1 \leq i, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:
   I. Os elementos de cada linha $i$ formam uma progressão aritmética de razão $2^i$.
   II. Os elementos de cada coluna $j$ formam uma progressão geométrica de razão 2.
   III. $tr(A)$ é um número primo.
   É (são) verdadeira(s):
   a) Apenas I
   b) Apenas I e II
   c) Apenas II e III
   d) Apenas I e III
   e) I, II e III

7) (EFOMM) Para descrever um código que permite transformar uma palavra P de três letras em um vetor $w \in \mathbb{R}^3$, inicialmente, escolhe-se uma matriz 3x3. Por exemplo, nossa matriz-código será

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da correspondência $A \to 1$, $B \to 2$, $C \to 3$, $D \to 4, \ldots, X \to 22$, $Z \to 23$, a palavra P é transformada em um vetor $v$ do $\mathbb{R}^3$. Em seguida, o código da palavra P é obtido pela operação $w = Av$. Por exemplo, a palavra MAR corresponde ao vetor $v = (12,1,17)$, a qual é codificada com $w = Av = (26,56,19)$. Usando o processo acima para decodificar $w = (64,107,29)$, teremos:

a) $(18,14,11)$ | SOL
b) $(12,5,11)$ | MEL
c) $(12,1,20)$ | MAU
d) $(11,20,1)$ | LUA
e) $(20,21,1)$ | UVA

8) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = \begin{cases} -j^i, & \text{se } i = j \\ (-i)^j, & se\ i \neq j \end{cases}$. A inversa da matriz $A$ é:

a) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

# A HORA DO BIZU

9) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $B^T A + BA^T$.

10) Sejam $A$ e $B$ matrizes $n$ x $n$, com $B$ simétrica. Considere as seguintes afirmações:

I. $AB + BA^T$ é simétrica
II. $(A + A^T + B)$ é simétrica
III. $ABA^T$ é simétrica

É correto afirmar que:

a) Apenas I é verdadeira
b) Apenas II é verdadeira
c) Apenas III é verdadeira
d) Apenas I e III são verdadeiras
e) Todas são verdadeiras

11) Podemos representar os pontos do plano cartesiano como matrizes-coluna, da forma $(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Podemos transformar vetores no plano usando uma aplicação denominada *transformação linear*. Assim, por meio da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ podemos obter um vetor $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Usando a matriz $R = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\operatorname{sen} 60° \\ \operatorname{sen} 60° & \cos 60° \end{bmatrix}$:

a. Encontre a transformada do vetor $(1,1)$
b. Sendo $v = (1,1)$, calcule $R^2 v$ e $R^3 v$. Qual é o significado das matrizes $R^2$ e $R^3$?
c. Os vértices de um quadrado ABCD são, no sentido anti-horário, dados por $A = (0,0)$, $B = (3,4)$, $C = (x, y)$ e $D = (a, b)$. Determine $a + b$.

12) Se $A$ e $B$ são matrizes inversíveis de ordem $n$ que satisfazem $AXB = P$, podemos afirmar que:

a) $X = A^{-1}PB^{-1}$
b) $X = B^{-1}A^{-1}P$
c) $X = A^{-1}B^{-1}P$
d) $X = A^{-1}PB^{-1}$
e) $X = A^{-1}P^{-1}B^{-1}$

13) Dadas as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$, determine a matriz B quadrada de ordem 2 que satisfaz $B = P^{-1}AP$.

14) Determine os valores de $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ é or gonal.

15)(IME) Sejam $A, B$ e $C$ matrizes $5 \times 5$, com elementos reais. Denotando-se por $A^T$ a matriz transposta de $A$:

a. Mostre que, se $AA^T = 0$, então $A = 0$
b. Mostre que, se $BAA^T = CAA^T$, então $BA = CA$.