Bernoulli
Sistema de Ensino

Bernoulli Resolve

6V | Volume 4 | Matemática

SUMÁRIO

Frente A

Módulo 13:	Função Modular	3
Módulo 14:	Função Exponencial	7
Módulo 15:	Equações e Inequações Exponenciais	9
Módulo 16:	Logaritmos	12

Frente B

Módulo 13:	Sistema Cartesiano e Ponto	15
Módulo 14:	Estudo Analítico da Reta	20
Módulo 15:	Posições Relativas e Distância de Ponto a reta	24
Módulo 16:	Áreas e Teoria Angular	27

Frente C

Módulo 13:	Prismas	32
Módulo 14:	Cilindros	37
Módulo 15:	Pirâmides	41
Módulo 16:	Cones	46

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

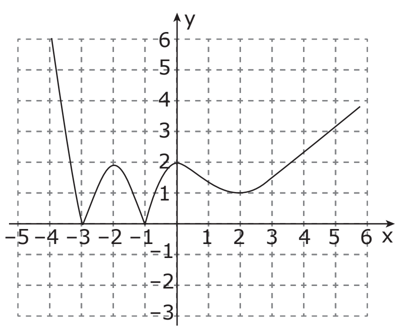
MÓDULO – A 13

Função Modular

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: O gráfico da equação modular |f(x)| = 1 é dado por:



Logo, temos 5 pontos de interseção entre as funções |f(x)| e y = 1.

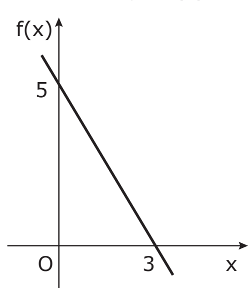
Portanto, a equação dada possui 5 raízes.

Questão 02 – Letra B

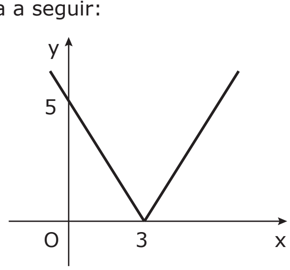
Comentário: A função modular refere-se ao valor absoluto de um número. Ou seja, são valores apenas positivos, logo um gráfico nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.

Questão 03 – Letra E

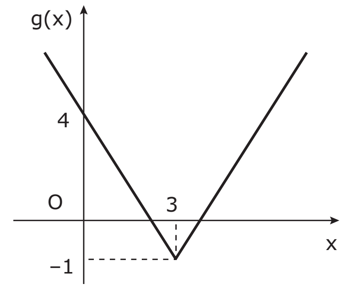
Comentário: O gráfico da função f(x) é:



"Refletindo" a parte do gráfico que possui imagem negativa, em relação ao eixo x, obtemos o gráfico da função |f(x)|, conforme figura a seguir:



"Deslocando" o gráfico uma unidade para baixo, obtemos o gráfico da função g(x) = |f(x)| – 1.



Portanto, o gráfico correto é o da alternativa E.

Questão 04 – Letra D

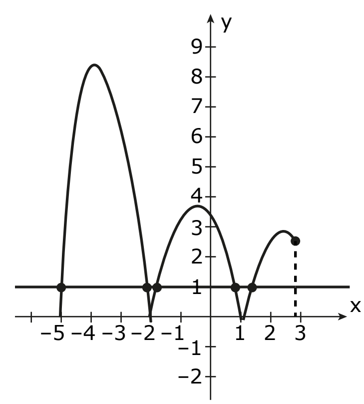
Comentário: Sendo D(x) o domínio de f(x):

$1 - |x| \geq 0 \Rightarrow 1 - |x| \geq 0 \ \Rightarrow \ |x| \leq 1 \ \Rightarrow \ -1 \leq x \leq 1$

$D(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Questão 05 – Letra D

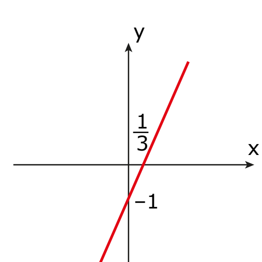
Comentário: A função |P(x)| = 1, no intervalo [–5; 2,7] possui a seguinte curva:



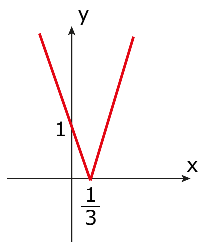
Ao traçar a reta y = 1, observe que teremos 5 interseções com |P(x)| no intervalo dado. Logo, o número de raízes de |P(x)| = 1 é 5.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Considere a função g(x) = 3x – 1, que é identificada como uma reta que passa pelos pontos (0, –1) e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.



Agora, para termos o gráfico da função $f(x) = |3x - 1|$, basta efetuarmos uma reflexão em torno do eixo x da parte do gráfico que possui ordenada negativa:



Esse gráfico, portanto, corresponde à alternativa D.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Resolvendo a inequação:

$|3x + 10| = |5x + 2| \Rightarrow$

(I) $3x + 10 = 5x + 2 \Rightarrow x = 4$

(II) $-3x - 10 = 5x + 2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

(III) $3x + 10 = -5x - 2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

(IV) $-3x - 10 = -5x - 2 \Rightarrow x = 4$

Temos que $x_1 = 4$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$. Logo,

$$|x_1 - x_2| = \left|4 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{11}{2}.$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Sabendo que $|x|^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e fazendo $|x| = k$, temos:

$k^2 - 5k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$ ou $k = -1$

Para $k = 6 \Rightarrow |x| = 6 \Rightarrow x = \pm 6$

Para $k = -1 \Rightarrow |x| = -1$ (Absurdo)

Usando as relações de Girard, encontramos os valores de **a** e **b** da equação $x^2 - ax - b = 0$. Assim:

$x_1 + x_2 = a \Rightarrow -6 + 6 = a \Rightarrow a = 0$

$x_1 . x_2 = -b \Rightarrow -6 . 6 = -b \Rightarrow b = 36$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Pela definição de módulo:

$$f(x) = |x + 1| + 2 = \begin{cases} x + 1 + 2 = x + 3, \text{ se } x \geq -1 \\ -x - 1 + 2 = -x + 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

Perceba que a mudança de lei da função ocorre em $x = -1$ e o gráfico corta o eixo y em $y = 3$, sendo o ramo da direita crescente. Logo, a alternativa A é a correta.

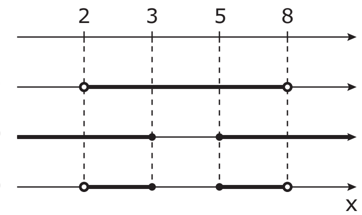
Questão 02 – Letra E

Comentário:

$|x - 5| < 3 \Rightarrow -3 < x - 5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8$ (I)

$$|x - 4| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 \leq -1 \\ \text{ou} \\ x - 4 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \text{ou} \\ x \geq 5 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Interseção das soluções:



As soluções inteiras são 3, 5, 6 e 7, cuja soma é 21.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Igualando as duas funções, temos:

$2|x^2 - 4| = (x - 2)^2 \Rightarrow$

$|x^2 - 4| = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2} \Rightarrow$

$|x^2 - 4| = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$

Daí,

$x^2 - 4 = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 \Rightarrow$

$\dfrac{x^2}{2} + 2x - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow x_1 = -6$ ou $x_2 = 2$

ou

$x^2 - 4 = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 2 \Rightarrow$

$\dfrac{3x^2}{2} - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64 \Rightarrow x_3 = -\dfrac{2}{3}$ ou $x_4 = 2 = x_2$

Dessa forma, temos 3 pontos.

Questão 04 – Letra C

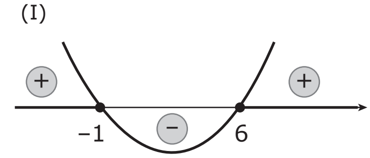
Comentário: Resolvendo a inequação:

$|x| . |x - 5| \geq 6 \Rightarrow |x^2 - 5x| - 6 \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ -x^2 + 5x - 6 \geq 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

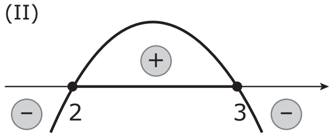
Fazendo o estudo do sinal, temos:

(I)



$x \leq -1$ ou $x \geq 6$

(II)



$2 \leq x \leq 3$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Pela definição de módulo:

$$f(x) = |-x+1| = \begin{cases} -x+1, \text{ se } x \leq 1 \\ x-1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Logo, a raiz de f(x) é 1 (corta o eixo das abscissas em x = 1) e a função tem dois trechos, sendo o da esquerda decrescente e o da direita, crescente.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Resolvendo a inequação, temos:

$-2 \leq |x - 4| + 1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq |x - 4| \leq 1$

Separando em dois casos:

(I) $|x - 4| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 4 \leq 1 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$

(II) $|x - 4| \geq -3$, verdade para todo $x \in \mathbb{R}$.

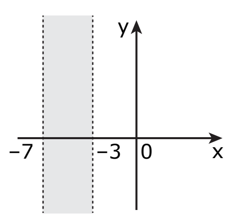
Assim, o conjunto solução da inequação é o intervalo [3, 5].

Logo, a + b = 3 + 5 = 7.

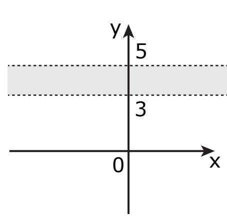
Questão 07 – Letra E

Comentário: Resolvendo cada uma das desigualdades separadamente, temos:

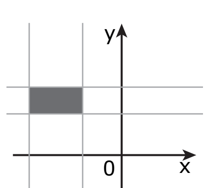
I. $|x + 5| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x + 5 \leq 2 \Rightarrow -7 \leq x \leq -3$



II. $|y - 4| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y - 4 \leq 1 \Rightarrow 3 \leq y \leq 5$



Assim, I ∩ II:



Questão 08 – Letra A

Comentário: $y = |x|^2 - 5|x| + 6$

Fazendo |x| = k, temos:

$y = k^2 - 5k + 6$

Suas raízes são k = 2 e k = 3.

Para $k = 2 \Rightarrow |x| = 2$, ou seja, $x = \pm 2$.

Para $k = 3 \Rightarrow |x| = 3$, ou seja, $x = \pm 3$.

Portanto, a função se anula para quatro valores de **x**, o que faz da alternativa A a verdadeira.

Observação: Análise das demais alternativas:

Alternativa B: A função $y = k^2 - 5k + 6$ possui vértice de coordenadas (k, y) iguais a $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Porém, para $k = \frac{5}{2}$, temos $x = \pm\frac{5}{2}$. Logo, há dois pontos de mínimo: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. (Falsa)

Alternativa C: Conforme visto anteriormente, a função se anula em virtude de quatro valores de **x**, e não somente devido a dois valores. (Falsa)

Alternativa D: A função é par, pois f(−x) = f(x) para qualquer **x** real. (Falsa)

Questão 09 – Letra E

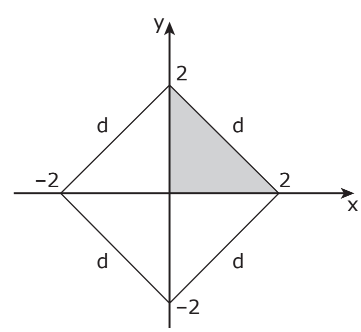
Comentário:

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow x + y = 2$.

Se $x \geq 0$ e $y < 0 \Rightarrow x - y = 2$.

Se $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow -x - y = 2$.

Se $x < 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 2$.



Temos um quadrado de lado **d** que pode ser expresso por: $d^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow d = 2\sqrt{2}$

Logo, o perímetro 2p será dado por $2p = 4d = 8\sqrt{2}$.

Questão 10 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir, que ilustra a região formada, a partir da definição de módulo:

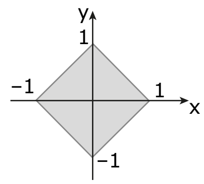
Se $x \geq 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow x + y = 1$.

Se $x \geq 0$ e $y < 0 \Rightarrow x - y = 1$.

Se $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow -x - y = 1$.

Se $x < 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 1$.

MATEMÁTICA



Perceba que se trata de um losango de diagonais medindo 2 cm.

Logo, a área **S** é tal que $S = \frac{2\,.\,2}{2} = 2\ \text{cm}^2$.

Questão 11

Comentário: f(2x) = |1 − x| fazendo 2x = y, temos que $x = \frac{y}{2}$.

Assim: $f(y) = \left|1 - \frac{y}{2}\right|$, ou seja, podemos, agora, dizer que $f(x) = \left|1 - \frac{y}{4}\right|$.

Fazendo f(x) = 2, temos:

$$\left|1 - \frac{y}{4}\right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{y}{4} = 2 \\ \text{ou} \\ 1 - \frac{y}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \Rightarrow x = -2 \\ \text{ou} \\ y = 12 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

Questão 12 – Letra C

Comentário: Analisando cada uma das proposições:

I. Incorreta. O gráfico é simétrico em relação ao eixo y, logo a função é par.

II. Incorreta. Contraexemplo: f(1) = f(−1) = 0.

III. Correta.

IV. Incorreta. f(x) também é crescente para os valores entre −1 e 0.

V. Correta. f(f(−1)) = f(0) = 1 e f(f(1) = f(0) = 1.

Questão 13 – Letra B

Comentário: A equação da reta pode ser reescrita como $y = \frac{3x}{2}$. A lei de f(x), pela aplicação da definição de módulo, é tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1,\ x > 0 \\ -x^2 + 1,\ x < 0 \end{cases}$$

f(x) não está definida em x = 0. Encontrando as soluções de y = f(x):

- $x > 0$:

  $x^2 - 1 = \frac{3x}{2} \Rightarrow$

  $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$
- $x < 0$:

  $-x^2 + 1 = \frac{3x}{2} \Rightarrow$

  $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -3$

Por fim, calculando a distância **d** entre os pontos (2, 3) e (−2, −3):

$$d = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [3-(-3)]^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Questão 14 – Letra A

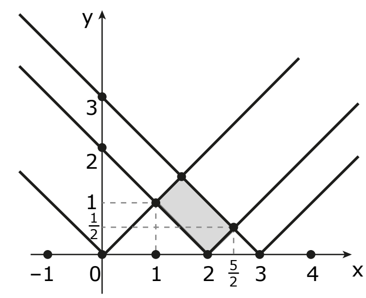
Comentário: Encontrando a interseção entre as funções:

f(x) e g(x): |x| = |x − 2| ⇒ −x = x − 2 ⇒ x = 1 ⇒ y = 1

f(x) e h(x): $|x| = |x-3| \Rightarrow -x = x - 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

g(x) e h(x): $|x-2| = |x-3| \Rightarrow -x+2 = x-3 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Veja a figura a seguir:



O polígono formado será um retângulo, cujo quarto vértice é a interseção de g(x) com o eixo x, ou seja, (2, 0). Seus lados podem ser encontrados através da distância de ponto a ponto:

$$d_1 = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, a área do retângulo é $\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ u.a.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como o número |Y − 2| + 4 encontra-se a 10 unidades da reta real, temos que:

$$\begin{cases} |Y-2| + 4 = -10 \\ \text{ou} \\ |Y-2| + 4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Y-2| = -14 \text{ (absurdo)} \\ \text{ou} \\ |Y-2| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} Y - 2 = -6 \\ \text{ou} \\ Y - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = -4 \\ \text{ou} \\ Y = 8 \end{cases}$$

Como **Y** é natural, então temos que Y = 8.

Observe que 8 é divisor de 56.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 19

Comentário: Como o passo 2 foi repetido apenas uma vez, vamos chamar o resultado $|x_0 - 1|$ de **y**, e este será o novo valor de entrada.

Logo, se o processo chegou ao fim com este valor, temos necessariamente que:

$$|y-1| = 6 \Rightarrow \begin{cases} y-1=6 \\ \text{ou} \\ y-1=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7 \\ \text{ou} \\ y=-5 \end{cases}$$

Porém, como y = $|x_0 - 1|$, é impossível termos y = –5; então, concluímos que:

$$|x_0-1| = 7 \Rightarrow \begin{cases} x_0-1=7 \\ \text{ou} \\ x_0-1=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=8 \\ \text{ou} \\ x_0=-6 \end{cases}$$

Como ambos os valores são reais, temos dois valores possíveis para o dado de entrada x_0.

MÓDULO – A 14

Função Exponencial

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: Igualando B(t) = 810, temos:

$$1\cancel{0} \,.\, 3^{t-1} = 81\cancel{0} \Rightarrow$$
$$3^{t-1} = 3^4 \Rightarrow$$
$$t-1 = 4 \Rightarrow$$
$$t = 5 \text{ horas}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Para t = 4, temos:

$$f(t) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow$$

$$f(4) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{4}{2}} = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{2} \Rightarrow$$

$$f(4) = 30 + \frac{1\,750}{49} = 65{,}7$$

Logo, passados 4 minutos, a temperatura da bebida é de aproximadamente 66 °C.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Como os pontos (a, c) e (b, d) pertencem a uma função exponencial, c = 2^a e d = 2^b.

$$\text{Para } x = \frac{a+b}{2}, \text{ temos:}$$

$$y = 2^{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow y = (2^{a+b})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$y = (2^a \,.\, 2^b)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = (c.d)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{cd}$$

Portanto, $P = \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{cd}\right)$, ou seja, a ordenada do ponto **P** é $\sqrt{cd}$.

Questão 04 – Letra B

Comentário:

$$f(t) = K \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$

Fazendo f(t) = 2 e K = 128, temos:

$$2 = 128 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2 = 2^7 \,.\, 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{-6} = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow$$

$$-\frac{t}{2} = -6 \Rightarrow t = 12 \text{ horas.}$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Sendo f(x) = 2^{-2x}, temos que:

$$f\left(\frac{3a}{2}-1\right) - f\left(\frac{3a}{2}\right) = 2^{-2\left(\frac{3a}{2}-1\right)} - 2^{-2\left(\frac{3a}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$2^{-3a+2} - 2^{-3a} = 2^{-3a}\left(2^2-1\right) = 3\,.\,2^{-3a} = 3f\left(\frac{3}{2}a\right)$$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Seja **N** a função definida por N(t) = 100 . 2^{3t}, em que N(t) é o número de microrganismos **t** horas após o início do experimento.

Portanto, o tempo necessário para que a população de 100 micro-organismos passe a ser de 3 200 indivíduos é tal que

$$3\,200 = 100 \,.\, 2^{3t} \Rightarrow 2^{3t} = 2^5 \Rightarrow t = \frac{5}{3}\text{h, ou seja, 1 h 40 min.}$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: A área do trapézio ABCD é dada por:

$$\frac{f(2)+f(1)}{2} \cdot (2-1) = \frac{2^2+2^1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ u.a.}$$

Questão 08 – Letra C

Comentário:

P(t) = $\alpha.4^{\lambda t}$

Para t = 0, temos P(0) = $\alpha.4^0 = \alpha$.

Para t = 4, temos P(4) = $\alpha.4^{4\lambda} = 3\alpha \Rightarrow 4^{4\lambda} = 3$.

Para t = 8, temos P(8) = $\alpha.4^{8\lambda} = \alpha(4^{4\lambda})^2 = \alpha.3^2 = 9\alpha$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário:

N(0) = 100 $\Rightarrow$ 100 = $N_0e^{k.0} \Rightarrow N_0$ = 100 > 0

N(50) = 8 $\Rightarrow$ 50 = $100e^{k.8} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k.8} \Rightarrow$ k < 0

Portanto, N_0 > 0 e k < 0.

Questão 02 – Letra C

Comentário: De acordo com o enunciado, a cada divisão celular que acontece na mitose, há o dobro da quantidade de células-filhas presentes na divisão anterior. Logo, em **x** divisões há 2^x células-filhas.

Como **x** é a quantidade de divisões, com $x \neq 0$, este deve ser um número natural. Com isso, 2^x também será um número natural.

MATEMÁTICA

Questão 03 – Letra C

Comentário: Pelo gráfico, temos que f(1) = 0,2, dessa forma:

$a^1 = 0,2 \Rightarrow$

$a = 0,2$

Agora, para x = –0,5, temos:

$$y = 0,2^{-0,5} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

Questão 04 – Letra C

Comentário: O valor inicial é dado por V(0) = 1 000, dessa forma, para encontrar o tempo **t** para que o montante seja 2 000, temos:

$$1\,\cancel{000}\,.\,2^{0,0625t} = 2\,\cancel{000} \Rightarrow$$

$$0,0625t = 1 \Rightarrow \; t = \frac{10\,000}{625} = 16 \text{ anos}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: De acordo com as informações, temos:

$$N(10) = \frac{N_0}{4} \Rightarrow \frac{N_0}{4} = N_0.2^{k.10} \Rightarrow 2^{10k} = 2^{-2} \Rightarrow k = -5^{-1}.$$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Sabendo que no tempo inicial (t = 0) a substância é de 800 g, então:

$Q(t) = k.2^{-0,5t} \Rightarrow$

$800 = k.2^{-0,5.0} \Rightarrow k = 800$

Se a quantidade dessa substância foi reduzida a 25% do valor inicial, temos:

$\frac{1}{4}\,.\,800 = 800\,.\,2^{-0,5t} \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^{-0,5t} \Rightarrow$

$4^{-1} = 2^{-0,5t} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-0,5t} \Rightarrow -2 = -0,5t \Rightarrow t = 4$

Portanto, o tempo necessário é de 4 horas.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Avaliando a função para t = 0 e t = 3, temos:

$$N(0) = 400 \Rightarrow C.A^0 = 400 \Rightarrow C = 400$$
$$N(3) = 50 \Rightarrow 400.A^3 = 50 \Rightarrow$$
$$A^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Assim, N(4) é dado por:

$$N(4) = 400\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 400.\frac{1}{16} = 25$$

Questão 08 – Letra D

Comentário:

Do gráfico, temos:

$2^b = 2\,.\,2^a \Rightarrow 2^b = 2^{1+a} \Rightarrow b = 1 + a$

$2^c = \frac{2^a}{4} \Rightarrow 2^c = 2^{a-2} \Rightarrow c = a - 2$

Logo, os valores de **b** e **c** são, respectivamente, a + 1 e a – 2.

Questão 09

Comentário: Para calcular a área do retângulo ABCD, precisamos encontrar as coordenadas dos vértices.

Pelo gráfico, temos que D(0, 8).

O ponto **C** é a interseção de **f** e **g**, então:

$2^{x+1} = 8 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

Logo, C(2, 8).

O ponto **A** é a interseção de **f** e **h** , então:

$2^{x+1} = k \Rightarrow 2^{0+1} = k \Rightarrow k = 2$

Logo, A(0, 2) e B(2, 2).

Assim, a área **S** do retângulo é dada por:

$S = (x_B - x_A).(y_C - y_B) = (2 - 0)(8 - 2) = 12$ u.a.

Questão 10 – Letra A

Comentário: O número de vítimas em moto em 2012 é dado por 0,4 . 60 000 = 24 000 = N_0. Assim, o número previsto de vítimas em moto em 2015 é dado para t = 3, cujo valor é dado pelo cálculo a seguir:

$$N(3) = 24\,000\left(1,2\right)^3 \Rightarrow N(3) = 24\,000\,.\,1,728 = 41\,472$$

Questão 11 – Letra A

Comentário: Pelas alternativas, percebe-se que M(t) é do tipo $M(t) = 2^{at+b}$, em que **a** e **b** são constantes reais. Sabe-se, pelo gráfico, que M(0) = 16 e M(150) = 4. Substituindo estes dados na lei de M(t):

$$M(0) = 16 \Rightarrow 2^{a.0+b} = 16 \Rightarrow 2^b = 2^4 \Rightarrow b = 4$$

$$M(150) = 4 \Rightarrow 2^{150.a+4} = 4 = 2^2 \Rightarrow 150a + 4 = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{75}$$

Logo, $M(t) = 2^{4-\frac{t}{75}}$.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Perceba que $q(0) = q_0\,.\,2^{-0,2\,.\,0} = q_0$. Assim, o tempo **t** para o qual $q(t) = \frac{q_0}{4}$ é dado por:

$$q(t) = q_0.2^{-0,2t} = \frac{q_0}{4} \Rightarrow$$

$$q_0.2^{-0,2t} = \frac{q_0}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^{-0,2t} \Rightarrow$$

$$2^{-2} = 2^{-0,2t} \Rightarrow -2 = -0,2t \Rightarrow t = 10 \text{ meses}$$

Questão 13 – Letra E

Comentário: Pelos dados do enunciado, sabe-se que v(0) = 3 (em milhões) e v(1) = 4,5. Substituindo estes dados na lei da exponencial fornecida no enunciado, temos:

$$v(0) = 3 \Rightarrow n.k^0 = 3 \Rightarrow n = 3$$

$$v(1) = 4,5 \Rightarrow 3.k^1 = 4,5 \Rightarrow k = 1,5$$

$$v(t) = 3\,.\,1,5^t$$

Logo, o número de aparelhos vendidos em fevereiro, v(2), é tal que $v(2) = 3\,.\,1,5^2 = 3\,.\,2,25 = 6,75$ milhões.

Questão 14 – Letra D

Comentário: A população do país, no ano de 2011 (considerada a atual pela questão), corresponde a 15,3 milhões de habitantes. Assim:

$P(2011) = 15\ 300\ 000 = m.n^{2011-2011} \Rightarrow$

$15\ 300\ 000 = m$

Sendo a taxa anual de crescimento igual a 2%,

$P(2012) = 1{,}02\ .\ 15\ 300\ 000 \Rightarrow$

$P(2012) = 15\ 606\ 000.$

Retomando a função, temos:

$P(2012) = 15\ 300\ 000.n^{2012-2011} \Rightarrow$

$15\ 606\ 000 = 15\ 300\ 000.n \Rightarrow$

$n = 1{,}02$

Logo, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{15\ 300\ 000}{1{,}02} = 1{,}5\ .\ 10^7.$

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário:

$f(t) = b.a^t \Rightarrow$

$f(0) = b.a^0 \Rightarrow 60\ 000 = b$

$f(1) = 60\ 000\ .\ a^1 \Rightarrow$

$54\ 000 = 60\ 000\ .\ a \Rightarrow$

$a = \dfrac{54\,000}{60\,000} = \dfrac{9}{10}$

Logo, para t = 2:

$f(2) = 60\ 000\ .\left(\dfrac{9}{10}\right)^2 \Rightarrow f(2) = 48\ 600$ reais

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: De acordo com o gráfico e os dados da questão, temos:

$y(t) = a^{t-1}$

$y(0) = 0{,}5 = a^{0-1} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} = a^{-1} \Rightarrow a = 2$

Quando as mudas foram plantadas, elas tinham 0,5 m e, ao crescerem 7,5 m, atingirão 8 metros de altura. Assim, para y(t) = 8, temos:

$y(t) = 2^{t-1}$

$8 = 2^{t-1} \Rightarrow 2^3 = 2^{t-1} \Rightarrow$

$3 = t - 1 \Rightarrow t = 4$ anos

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O salário de um profissional da empresa com 2 anos de tempo de serviço será determinado quando t = 2, que será, portanto, igual a:

$s(2) = 1\ 800\ .\ (1{,}03)^2 = 1\ 909{,}62$

Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O número de bactérias de uma cultura é dado por $N(t) = N_0.2^{\frac{t}{12}}$, em que o tempo **t** é medido em horas.

Assim, após 6 dias, ou seja, 144 horas, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por:

$N(144) = N_0.2^{\frac{144}{12}} = N_0.2^{12} = 4\ 096.N_0$

MÓDULO – A 15

Equações e Inequações Exponenciais

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Resolvendo a equação:

$5^{3x+1} = 625 = 5^4 \Rightarrow$

$3x + 1 = 4 \Rightarrow$

$x = 1$

Logo, o conjunto solução é S = {1}.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Pelo fato da função exponencial ser injetiva:

$(2^x)^{x-1} = 4 = 2^2 \Rightarrow$

$x(x - 1) = 2 \Rightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$

Logo, a soma das raízes da equação é 2 + (–1) = 1.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Resolvendo a equação:

$5^{x^2-6x+5} = 1$

Reescrevendo o segundo lado da igualdade:

$5^{x^2-6x+5} = 5^0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow S = \{1; 5\}$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Igualando a função com a população de bactérias, tem-se que:

$$160 = 5 \,.\, 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \; 32 = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow$$

$$2^5 = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \frac{t}{3} = 5 \Rightarrow t = 15 \text{ horas}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Pelo fato de a função exponencial ser injetiva:

$$2^{x^2 - 14} = \frac{1}{1\,024} = 2^{-10} \Rightarrow$$

$$x^2 - 14 = -10 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \; x = \pm 2$$

Logo, a soma das soluções é 2 + (–2) = 0.

Questão 06 – Letra A

Comentário: Igualando a função à quantidade de reprodução:

$$6{,}4 \,.\, 10^{10} = 10^9 \,.\, 4^{3t} \Rightarrow$$

$$4^{3t} = \frac{6{,}4 \,.\, 10^{10}}{10^9} \Rightarrow$$

$$4^{3t} = 64 = 4^3 \Rightarrow$$

$$3t = 3 \;\Rightarrow\; t = 1 \text{ hora}$$

Questão 07 – Letra D

Comentário: Para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B, o tempo **t** é igual a:

$$10 \,.\, 2^{t-1} + 238 = 2^{t+2} + 750 \Rightarrow 10 \,.\, 2^{t-1} - 2^{t+2} = 512 \Rightarrow$$

$$2^{t-1}(10 - 2^3) = 2^9 \Rightarrow 2^{t-1} \,.\, 2 = 2^9 \Rightarrow$$

$$2^{t-1} = 2^8 \Rightarrow t - 1 = 8 \Rightarrow t = 9 \text{ horas}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Resolvendo a equação:

$$\left(4^x\right)^2 = 16 \,.\, 2^{x^2} \Rightarrow$$

$$4^{2x} = 4^2 \,.\, (4^{\frac{1}{2}})^{x^2} \Rightarrow$$

$$4^{2x} = 4^2 \,.\, 4^{\frac{x^2}{2}} = 4^{\frac{x^2}{2}+2} \Rightarrow$$

$$2x = \frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Logo, $x^x = 2^2 = 4$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Dado c(t) = 200 . 3^{kt}, com $k = \frac{1}{12}$, o tempo necessário para que haja 1 800 bactérias nessa cultura pode ser calculado por c(t) = 1 800. Assim:

$$1\,800 = 200 \,.\, 3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow 9 = 3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow 3^2 = 3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow$$

$$\frac{t}{12} = 2 \Rightarrow t = 24 \text{ horas} \in [12, 36]$$

Questão 02 – Letra D

Comentário:

$$2x - 1 + 2x + 1 + 2x = 7 \Rightarrow \frac{2^x}{2} + 2x \,.\, 2 + 2x = 7 \Rightarrow$$

$$2x \,.\left(\frac{1}{2} + 2 + 1\right) = 7 \Rightarrow 2x \,.\, \frac{7}{2} = 7 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Logo, a raiz da equação é um número maior ou igual a 1.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Ao resolver a inequação, devemos atentar ao fato de que a base é maior que 1 e, portanto, após a aplicação da injetividade da exponencial, o sinal da desigualdade deve ser mantido.

$$M^{x^3 - 1} \leq M^{x^2 - 1}$$

$$x^3 - 1 \leq x^2 - 1$$

$$x^3 - x^2 \leq 0$$

$$x^2(x - 1) \leq 0 \Rightarrow x - 1 \leq 0$$

$$x \leq 1$$

Podemos ver que x^2, para qualquer **x** real, não é negativo. Logo, s =]–∞; 1].

Questão 04 – Letra A

Comentário: Fazendo a seguinte mudança de variável: $y = 2^x$, teremos que:

$$4^x + 2^5 = 3 \,.\, 2^{x+2} = 3 \,.\, 2^x \,.\, 2^2 = 12 \,.\, 2^x$$

$$4^x - 12 \,.\, 2^x + 32 = 0$$

$$y^2 - 12y + 32 = 0 \Rightarrow y = 8 \text{ ou } y = 4$$

Se y = 8,

$$2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Se y = 4,

$$2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, a soma das raízes são 3 + 2 = 5.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Resolvendo a equação:

$$3^{x-1} + 4 \,.\, 3^x + 3^{x+1} = 22\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\frac{3^x}{3} + 4 \,.\, 3^x + 3^x \,.\, 3 = 22\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\frac{3^x}{3} + 7 \,.\, 3^x = \frac{22 \,.\, 3^x}{3} = 22\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$3^x = 3\sqrt{3} = 3 \,.\, 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Portanto, a solução é um racional positivo não inteiro.

Questão 06 – Letra A

Comentário: Igualando as funções, temos:

$$h(x) = s(x) \Rightarrow \; 2^x + 1 = 2^{x+1} \Rightarrow \; 2^x + 1 = 2^x \,.\, 2 \Rightarrow \; 2 \,.\, 2^x - 2^x = 1 \Rightarrow$$

$$x = 0 \text{ e } y = h(0) = 2^0 + 1 = 2$$

Logo, a interseção das funções é o ponto (0, 2). A soma de suas coordenadas é 2, e esse ponto pertence à reta y = x + 2.

Questão 07 – Letra D

Comentário: $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$

i) Da primeira equação, temos:

$4^{x+y} = 32 \Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^5 \Rightarrow$

$2x + 2y = 5$ (I)

ii) Da segunda equação, temos:

$3^{y-x} = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{y-x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y - x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$-2x + 2y = 1$ (II)

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$, temos que $x = 1$ e $y = \frac{3}{2}$.

Portanto, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Questão 08 – Letra E

Comentário: Fazendo a seguinte mudança de variável: $y = 2^x$, teremos que:

$2 . 8^x + 4^x - 2^x = 0 \Rightarrow$

$2y^3 + y^2 - y = 0 \Rightarrow$

$y(2y^2 + y - 1) = 0 \Rightarrow y = 0$

ou

$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $y = -1$

se $y = 0 \Rightarrow 2^x = 0 \nexists x \in \mathbb{R}$

se $y = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \nexists x \in \mathbb{R}$

se $y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$

Logo, a solução da equação é racional inteiro negativo.

Questão 09 – Letra C

Comentário:

$m(0) = ca^{-k \cdot 0} \Rightarrow$

$m(0) = c$

Sabemos que, em 10 anos, a massa se reduz a 0,2c, ou seja, $m(10) = 0{,}2c$. Assim:

$m(10) = ca^{-k \cdot 10} \Rightarrow$

$0{,}2c = ca^{-10k} \Rightarrow$

$a^{-10k} = 0{,}2$

Em 20 anos, a massa será dada por:

$m(20) = c.a^{-20k} \Rightarrow$

$m(20) = c.\underbrace{\left(a^{-10k}\right)}_{0{,}2}{}^2 \Rightarrow$

$m(20) = c.(0{,}2)^2 \Rightarrow$

$m(20) = 0{,}04c$

A massa ficará reduzida a 4% de m_0.

Questão 10 – Letra D

Comentário: Resolvendo a equação:

$9^x - 9^{x-1} = 1\,944$

$9^x - 9^x . 9^{-1} = 1\,944$

$9^x - \frac{9^x}{9} = \frac{8 . 9^x}{9} = 1\,944$

$9^x = 3^{2x} = \frac{1\,944 . 9}{8} \Rightarrow 3^{2x} = 243 . 9 \Rightarrow 3^{2x} = 3^5 . 3^2 \Rightarrow$

$3^{2x} = 3^7 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow$

$x = \frac{7}{2}$

Logo, $m = 7$ e $n = 2 \Rightarrow m - n = 5$.

Questão 11 – Letra E

Comentário: Resolvendo cada umas das inequações, temos:

- $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq 5^{-4x}$

  $(5^{-1})^{x^2} \leq 5^{-4x} \Rightarrow$

  $5^{-x^2} \leq 5^{-4x} \Rightarrow$

  $-x^2 \leq -4x \Rightarrow$

  $-x^2 + 4x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$ ou $x \geq 4$ (I)

- $x^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{5}$ (II)

Logo, $I \cap II = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} \leq x \leq 0\}$.

Questão 12 – Letra B

Comentário: Sejam R_0, PIB_0 e P_0, respectivamente, a renda *per capita*, o PIB e a população do país hoje. Assim, daqui a 20 anos, o PIB será $(1 + i)^{20}.PIB_0$, e a população, $(1{,}02)^{20} . P_0$, em que **i** é a taxa pedida.

Assim:

$R = 2 . R_0 \Rightarrow$

$\frac{(1+i)^{20} . PIB_0}{(1{,}02)^{20} . P_0} = 2.\frac{PIB_0}{P_0} \Rightarrow$

$(1+i)^{20} = 2(1{,}02)^{20} \Rightarrow$

$i = \sqrt[20]{2 . (1{,}02)^{20}} - 1 \Rightarrow i = 1{,}02 . \sqrt[20]{2} - 1 \Rightarrow i \cong 1{,}02 . 1{,}035 - 1 \Rightarrow$

$i \cong 5{,}6\%$

Questão 13 – Letra C

Comentário: Resolvendo o sistema de equações:

$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 . 2^{x-1} + 6 = 2 . 3^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ -2 . 3^y + \frac{3}{2}2^x = -6 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \cancel{2 . 3^y} - 2 . 2^x = 2 \\ \cancel{-2 . 3^y} + \frac{3}{2}2^x = -6 \end{cases} \Rightarrow -\frac{2^x}{2} = -4 \Rightarrow x = a = 3$

$3^y - 2^x = 1 \Rightarrow 3^y - 8 = 1 \Rightarrow y = b = 2$

Logo, $\frac{(a - 3b)(b - a)}{3(b + a)} = \frac{(3 - 2 . 3)(2 - 3)}{3(2 + 3)} = \frac{1}{5}$.

Questão 14 – Letra D

Comentário:

Passageiros em **B**:

$$\frac{2^k}{2} + 2^{\frac{k}{2}} = 2^{k-1} + 2^{\frac{k}{2}}$$

Passageiros em **C**:

$$\frac{2^{k-1} + 2^{\frac{k}{2}}}{2} + 2^{\frac{k}{2}} = 2^{k-2} + 2^{\frac{k-2}{2}} + 2^{\frac{k}{2}} = 28$$

$$2^{\frac{k}{2}} = \sqrt{2^k} = y$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{3y}{2} - 28 = 0 \Rightarrow \; y^2 + 6y - 112 \Rightarrow$$

$$y = 8 \Rightarrow \; k = 6 \Rightarrow \; N = 64$$

Logo, **N** é divisor de 128.

Questão 15 – Letra E

Comentário:

$$\begin{cases} 3^x \,.\, 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+3y} = 3^2 \\ y^2.\left(y + \frac{2}{3}x\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ e } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -2 \text{ e } y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Logo, $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$ é um ponto do 2º quadrante e (2, 0) é um ponto do eixo x.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: A população de bactérias após 20 minutos será dada quando $t = \frac{1}{3}$ h, ou seja:

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \,.\, 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 40 \,.\, 2 = 80$$

Portanto, após esse período de tempo, a população de bactérias terá duplicado.

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Montando a equação resultante dos dados do problema, temos:

$600 = 760.e^{-0,0002.h}$

Tomando o logaritmo neperiano de ambos os lados da equação e aplicando a propriedade segundo a qual

log (a.b) = log a + log b, obtemos:

$\ln 600 = \ln 760 + \ln e^{-0,0002.h} \Rightarrow 6,40 = 6,63 - 0,0002.h \Rightarrow$

$0,0002.h = 0,23 \Rightarrow h = 1\,150$ m

MÓDULO – A 16

Logaritmos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: Pelo enunciado, temos que:

$\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

Substituindo o valor encontrado de **x** na equação, temos: $4^2 - 54 + 5 = 1$

Portanto, $\log_2 1 = 0$.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Desenvolvendo a expressão dada, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow \; x = 8$$

Assim, $\sqrt[3]{x} + x^2 = \sqrt[3]{8} + 8^2 = 66$.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Fazendo x = 12,5, temos:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0,08 \,.\, 12,5 \Rightarrow \;\; \log\left(\frac{L}{15}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{L}{15} = 10^{-1} \Rightarrow \; \frac{L}{15} = \frac{1}{10} \Rightarrow L = 1,5 \text{ lúmens.}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Pela definição

$$\log_x (x + 6) = 2 \Rightarrow x^2 = x + 6$$

Ou seja,

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = 3$ ou $x = -2$

Porém, como a base de um logaritmo deve ser positiva, a solução $x = -2$ não convém. Dessa maneira, a única solução é $x = 3$, que é um número primo.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Usando as propriedades de logaritmo, temos que:

$\log_3 x + \log_9 x = 1 \Rightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x = 1 \Rightarrow$

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 1 \Rightarrow \log_3 x(1 + \frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow$

$$\log_3 x = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

Questão 06 – Letra C

Comentário: Pela definição do operador #, teremos que:

$10 \# (-5) = 10^2 - (-5)^2 + \log(10 + (-5)) \Rightarrow$

$10 \# (-5) = 100 - 25 + \log 5 \Rightarrow$

$10 \# (-5) = 75 + \log \frac{10}{2} = 75 + \log 10 - \log 2 \Rightarrow$

$10 \# (-5) = 76 - \log 2 \Rightarrow$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Sabendo que $\log_c a + \log_c b = \log_c (a.b)$ para **a**, **b** e **c** reais positivos e $c \neq 1$, temos:

$\log_x (x + 3) + \log_x (x - 2) = 2 \Rightarrow$

$\log_x [(x + 3)(x - 2)] = 2 \Rightarrow$

$x^2 = (x + 3)(x - 2) \Rightarrow$

$x^2 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x = 6$

Portanto, x = 6 é a única solução real da equação.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Desenvolvendo cada um dos valores, temos:

$\log 0,2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0,3 - 1 = -0,7$

$\log 20 = \log 2 . 10 = \log 2 + \log 10 = 0,3 + 1 = 1,3$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Seja **x** o número digitado inicialmente na calculadora, temos:

$5.(\log 5.x) = 10 \Rightarrow \log 5x = 2 \Rightarrow 5x = 10^2 \Rightarrow x = 20$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Inicialmente, havia $N_0 = 10$ bactérias, e, após 60 minutos, havia N(60) = 50 bactérias, em que $N(t) = N_0 . 2^{at} = 10 . 2^{at}$ representa o número de bactérias após **t** minutos. Assim:

$N(60) = 50 = 10 . 2^{a.60} \Rightarrow$

$5 = 2^{60a} \Rightarrow$

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 2^{60a} = 60a.\log 2 \Rightarrow$

$\log 10 - \log 2 = 60a.\log 2 \Rightarrow$

$0,7 = 18a \Rightarrow$

$a = \frac{7}{180}$

O tempo de geração é tempo **t** para o qual N(t) = 20 (dobro da cultura inicial).

$20 = 10 . 2^{\frac{7t}{180}} \Rightarrow$

$2 = 2^1 = 2^{\frac{7t}{180}} \Rightarrow$

$t = \frac{180}{7} \cong 26 \text{ minutos}$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo o valor de **x**, temos:

$x = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27 \Rightarrow x = \log_2 3 . 9 . 27 = \log_2 27^2 \Rightarrow$

$2^x = 27^2 = 729$

$2^9 = 512 \leq 729 = 2^x \leq 1\,024 = 2^{10}$

Logo, $9 \leq x \leq 10$.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Substituindo os valores do enunciado na fórmula e considerando **t** em semanas, temos:

$28 = (100 - 20).\left(\frac{1}{2}\right)^t + 20 \Rightarrow 80.(2^{-1})^t = 8 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{10} \Rightarrow$

$\log_2 2^{-t} = \log_2 \frac{1}{10} \Rightarrow -t.\log_2 2 = \log_2 10^{-1} \Rightarrow t = \log_2 10$

Mas: $\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 \Rightarrow \log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^4 \Rightarrow$

$3 < \log_2 10 < 4$

Logo, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será entre três e quatro semanas.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Sendo **x** o tempo para o qual $T(x) = \frac{T_0}{10}$, temos:

$T(x) = \frac{T_0}{10} = T_0.(0,5)^{0,1x} \Rightarrow \frac{1}{10} = 10^{-1} = (0,5)^{0,1x} = (2)^{-0,1x} \Rightarrow$

$\log 10^{-1} = \log (2)^{-0,1x} \Rightarrow -1 = -0,1x.\log 2 = -0,03x \Rightarrow$

$x = \frac{1}{0,03} \Rightarrow x \cong 33,3$

Logo, deve-se esperar 34 dias para que o nível de toxicidade do lago volte ao nível inicial.

Questão 06 – Letra C

Comentário: De acordo com os dados do problema, temos:

$T(t) = (T_0 - T_{AR}) . 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$

$140 = (740 - 40) . 10^{-\frac{t}{12}} + 40 \Rightarrow 100 = 700 . 10^{-\frac{t}{12}} \Rightarrow 10^{-\frac{t}{12}} = \frac{1}{7} \Rightarrow$

$\log 10^{-\frac{t}{12}} = \log 7^{-1} \Rightarrow -\frac{t}{12} = -\log (7) \Rightarrow$

$t = 12.\log (7)$ minutos.

Questão 07 – Letra A

Comentário: Seja P(t) a produção, **t** anos após 1987, e P_0 a produção inicial (em 1987). Temos que $P(t) = P_0.1,08^t$.

Quadruplicando a produção de 1987: $P(t) = 4.P_0$.

$4P_0 = P_0.1,08^t \Rightarrow 4 = 1,08^t \Rightarrow \log 4 = \log (1,08)^t \Rightarrow$

$\log 2^2 = t.\log \left(\frac{108}{100}\right) \Rightarrow 2.\log 2 = t[\log (2^2 . 3^3) - \log 100] \Rightarrow$

$2.\log 2 = t[2.\log 2 + 3.\log 3 - \log 10^2] \Rightarrow$

$2.0,30 = t[2 . 0,30 + 3 . 0,48 - 2] \Rightarrow$

$0,60 = t.0,04 \Rightarrow t = 15$ anos (após 1987)

Logo, temos que 1987 + 15 = 2002.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Como em 1 hora há 60 minutos, temos:

$B(60) = -30.\log_3 81 + 150 = -30.\log_3 3^4 + 150 \Rightarrow$

$B(60) = -120 + 150 = 30$

Como o aumento foi de 30%, o total de bactérias após 1 hora será dado por 1,3 . 250 = 325.

Questão 09 – Letra E

Comentário: Sabendo que $\log_a b^c = c.\log_a b$, $\log_a a = 1$ e $\log_a b > \log_a c \Rightarrow b > c$, com **a**, **b** e **c** reais positivos e $a \neq 1$, temos:

$n = f(10) + f(11) + f(12) \Rightarrow$

$n = \log_{1\,319} 10^2 + \log_{1\,319} 11^2 + \log_{1\,319} 12^2 \Rightarrow$

$n = \log_{1\,319} (10 \,.\, 11 \,.\, 12)^2 \Rightarrow n = 2.\log_{1\,319} (1\,320)$

Portanto,

$n = 2.\log_{1\,319} (1\,320) > 2.\underbrace{\log_{1\,319} (1\,319)}_{1} \Rightarrow n > 2$

Questão 10 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo $\log_{abc} x$, temos:

$$\log_{abc} x = \frac{\log_x x}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x abc} \Rightarrow$$

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} \Rightarrow$$

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}} \Rightarrow$$

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{15 + 10 + 6}{30}} = \frac{1}{\frac{31}{30}} = \frac{30}{31}$$

Questão 11 – Letra B

Comentário: Deseja-se que as coordenadas do ponto **A** sejam iguais. Assim:

$\log_{10} (x + 1) + 1 = \log_{10} (x^2 + 35)$

$\log (x + 1) + \log 10 = \log (x^2 + 35)$

$\log [10.(x + 1)] = \log (x^2 + 35)$

$10x + 10 = x^2 + 35$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$x = 5$

Questão 12 – Letra A

Comentário: Resolvendo a equação, temos que:

$$\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x \Rightarrow$$

$$\log_2 x^{\frac{2}{3}} - \log_2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$$

Questão 13 – Letra D

Comentário: Vamos mudar $\log_A B = 2$ e $\log_C A = \frac{3}{5}$ para a base **B**. Assim:

$$\frac{\log_B B}{\log_B A} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\log_B A} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \log_B A \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\log_B A}{\log_B C} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5.\log_B A}{3} = \log_B C \quad \text{(II)}$$

Substituindo I em II, temos:

$$\log_B C = \frac{5.\frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

Questão 14 – Letra A

Comentário: Como a função logarítmica é injetiva, aplicando o logaritmo na base 10 em ambos os lados da igualdade do enunciado, chegamos a uma expressão equivalente à anterior. Usando as propriedades de logaritmo:

$$Q = 15 \,.\, \left(\frac{1}{10}\right)^{2t} = 15 \,.\, 10^{-2t}$$

$\log Q = \log 15 \,.\, 10^{-2t}$

$\log Q = \log 15 + \log 10^{-2t}$

$\log Q - \log 15 = -2t$

$$t = \frac{\log 15 - \log Q}{2} = \frac{1}{2} \,.\, \log \frac{15}{Q}$$

$$t = \log \sqrt{\frac{15}{Q}}$$

Questão 15 – Letra C

Comentário: Uma das propriedades de logaritmos é $\log_c a + \log_c b = \log_c a.b$. Assim:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) =$$

$$\log_{10}\left[\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}. \ldots .\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right] = \log_{10}\left[\frac{1}{100}\right] = \log_{10} [10^{-2}] = -2$$

Questão 16 – Letra B

Comentário: Primeiramente, perceba que $Q(0) = Q_0.e^{0.(-0,023)} = Q_0$.

Assim, deseja-se saber o tempo **t** para o qual $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$. Logo:

$Q(t) = Q_0.e^{-0,023t} \Rightarrow$

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0.e^{-0,023t} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} = e^{-0,023t} \Rightarrow$$

$\ln\left(2^{-1}\right) = -\ln 2 = \ln\left(e^{-0,023t}\right) = -0,023t \Rightarrow$

$-0,69 = -0,023t \Rightarrow$

$t = 30$ dias.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Devemos ter P ≤ 400 (prestação menor ou igual a R$ 400,00). Então $\frac{5\,000\,.\,1{,}013^n\,.\,0{,}013}{(1{,}013^n - 1)} \leq 400$.

Por conveniência, adotemos ($1{,}013^n = x$), logo:

$\frac{5\,000\,.\,x\,.\,0{,}013}{(x-1)} \leq 400$ (x – 1 é positivo).

$$65x \leq 400(x-1) \Rightarrow$$
$$65x \leq 400x - 400 \Rightarrow$$
$$-335x \leq -400 \Rightarrow$$
$$335x \geq 400$$
$$335\,.\,1{,}013^n \geq 400$$
$$\log(335\,.\,1{,}013^n) \geq \log 400$$
$$\log 335 + \log(1{,}013^n) \geq \log 400$$
$$2{,}525 + n.\log(1{,}013) \geq 2{,}602$$
$$n\,.\,0{,}005 \geq 0{,}077$$
$$n \geq 15{,}4$$

Como **n** é natural, então teremos n = 16.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Dado que $E_0 = 7\,.\,10^{-3}$ kWh e sendo o terremoto de magnitude 8,9 graus na escala Ricther, temos que a energia liberada **E** foi de:

$$R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow 8{,}9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right) \Rightarrow$$

$13{,}35 = \log E - \log 7.\,10^{-3} \Rightarrow$

$13{,}35 = \log E - (\log 7 + \log 10^{-3}) \Rightarrow$

$13{,}35 = \log E - 0{,}84 + 3 \Rightarrow \log E = 11{,}19 \Rightarrow E = 10^{11{,}19}$ KWh

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Sabemos que $M(t) = A.(2{,}7)^{kt}$.

Para t = 30, temos $M(30) = \frac{A}{2}$. Então,

$$\frac{A}{2} = A.(2{,}7)^{k.30} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2{,}7^{k.30} \Rightarrow 2{,}7^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}} \quad \text{(I).}$$

Como queremos determinar **t** para o qual $M(t) = \frac{1}{10}A$, temos:

$$\frac{1}{10}A = A.(2{,}7)^{kt} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2{,}7^{kt} \Rightarrow \log\frac{1}{10} = \log 2{,}7^{kt} \Rightarrow$$

$$\log 10^{-1} = t.\log 2{,}7^k \Rightarrow$$

$$-1 = t.\log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}} \Rightarrow -1 = t.\log(2)^{-\frac{1}{30}} \Rightarrow$$

$$-1 = -\frac{1}{30}.t.\log 2 \Rightarrow 30 = t.(0{,}3) \Rightarrow t = 100$$

Portanto, são necessários 100 anos.

MÓDULO – B 13

Sistema Cartesiano e Ponto

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: Pela fórmula de distância entre dois pontos, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-8)^2 + (0-8)^2} = 10$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Sejam A(1, 1), B(1, 3) e C(2, 3), o perímetro do triângulo cujos vértices são A, B e C será $d_{AB} + d_{AC} + d_{BC}$, ou seja:

$$d_{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$d_{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Portanto, $d_{AB} + d_{AC} + d_{BC} = 3 + \sqrt{5}$.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Seja o ponto **G**, de coordenadas x_G e y_G, o baricentro de um triângulo de vértices nos pontos A(1, 1), B(3, –1) e C(5, 3), sabemos que:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \text{ portanto } x_G = \frac{1+3+5}{3} = 3.$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \text{ portanto } y_G = \frac{1+(-1)+3}{3} = 1.$$

Logo, **G** tem coordenadas (3, 1).

Questão 04 – Letra A

Comentário: As coordenadas dadas representam o mesmo ponto, então x + 3y = 4 + y (i) e –x – y = 2x + y (ii).

De (i), temos x = 4 – 2y. Substituindo em (ii):

$-(4 - 2y) - y = 2(4 - 2y) + y \Rightarrow -4 + 2y - y = 8 - 4y + y \Rightarrow$

$4y = 12 \Rightarrow y = 3$

Portanto, x = 4 – 2 . 3 = –2.

Logo, $x^y = (-2)^3 = -8$.

MATEMÁTICA

Questão 05 – Letra B

Comentário: Calculando a distância entre os pontos **A** e **C**, temos:

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \Rightarrow$$

$$d_{AC} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (2 - (-4))^2} \Rightarrow$$

$$d_{AC} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Sabendo que a diagonal do quadrado mede $\ell\sqrt{2}$, em que ℓ é o lado do quadrado, temos:

$$\ell\sqrt{2} = 10 \Rightarrow \ \ell = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ \ell = 5\sqrt{2}$$

Assim, o perímetro 2p do quadrado é dado por:

$$2p = 4\ell = 4 \,.\, 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Sendo **A** e **B** vértices consecutivos de um quadrado, o lado ℓ é a distância entre os pontos **A** e **B**. Logo:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (5 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Assim, a diagonal **D** é dada por:

$$D = \ell\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Por ser um triângulo equilátero, as distâncias entre os pontos são iguais. Ou seja:

d(A, B) = d(A, C) = d(B, C)

E as distâncias, por definição, são:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (0 - 0)^2} = 2$$

Como d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = 2, por transitividade, temos d(A, C) = 2.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Para calcular o deslocamento total **d** da pessoa, deve-se calcular a soma das distâncias AB, BC e CD. Dessa forma, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(5 - 15)^2 + (5 - 10)^2} = \sqrt{100 + 25} = 5\sqrt{5}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(15 - 0)^2 + (10 - 30)^2} = \sqrt{225 + 400} = 25$$

$$d_{CD} = \sqrt{(0 - 20)^2 + (30 - 40)^2} = \sqrt{400 + 100} = 10\sqrt{5}$$

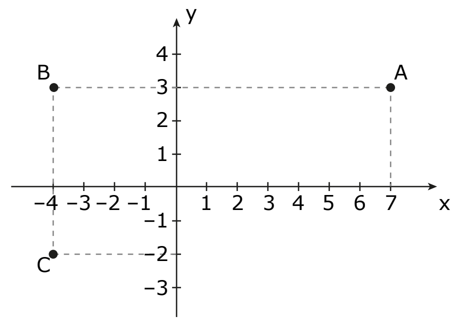
Assim, temos:

$$d = 5\sqrt{5} + 25 + 10\sqrt{5} = 15\sqrt{5} + 25 = 5(3\sqrt{5} + 5)\text{ m}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Marcando os pontos no plano cartesiano, temos a seguinte representação:



Calculando a medida de cada lado desse triângulo, temos:

$d_{AB} = x_A - x_B = 7 - (-4) = 11$

$d_{BC} = y_B - y_C = 3 - (-2) = 5$

Como o triângulo é retângulo, podemos encontrar a medida do segmento AC aplicando o Teorema de Pitágoras. Logo:

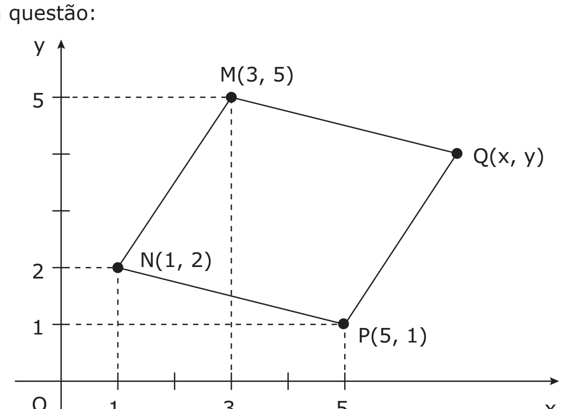
$(d_{AC})^2 = 25 + 121 = 146 \Rightarrow$

$d_{AC} = \sqrt{146}$

Como todos os lados têm medidas diferentes, esse triângulo é retângulo e escaleno.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir para resolução da questão:



Como o quadrilátero MNPQ é um paralelogramo, suas diagonais se interceptam no ponto médio T(a, b). Com isso, temos que: T(a, b) é ponto médio dos pontos **M** e **P** e dos pontos **N** e **Q**. Logo:

$$a = \frac{3 + 5}{2} = 4 \text{ e } b = \frac{5 + 1}{2} = 3 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1 + x}{2} = 4 \Rightarrow 1 + x = 8 \Rightarrow x = 7$$

$$b = \frac{2 + y}{2} = 3 \Rightarrow 2 + y = 6 \Rightarrow y = 4$$

Portanto, o ponto **Q** é dada por (7, 4).

Questão 03 – Letra C

Comentário: Sejam (x_A, y_A), (x_B, y_B) e (x_C, y_C) as coordenadas dos vértices **A**, **B** e **C**, respectivamente.

Devemos ter:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3 \Rightarrow x_A + x_B = 6$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 3 \Rightarrow y_A + y_B = 6$$
$$x_N = \frac{x_C + x_B}{2} = 7 \Rightarrow x_C + x_B = 14$$
$$y_N = \frac{y_C + y_B}{2} = 3 \Rightarrow y_C + y_B = 6$$
$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = 4 \Rightarrow x_A + x_C = 8$$
$$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = 0 \Rightarrow y_A + y_C = 0$$

Assim, teremos os sistemas:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 6 \\ x_C + x_B = 14 \\ x_A + x_C = 8 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_A + y_B = 6 \\ y_C + y_B = 6 \\ y_A + y_C = 0 \end{cases}$$

Resolvendo por substituições, encontraremos para o primeiro sistema:

$x_A = 0$; $x_B = 6$; $x_C = 8$.

Para o segundo sistema:

$y_A = 0$; $y_B = 6$; $y_C = 0$.

Assim, a abscissa do vértice **C** é 8.

Questão 04 – Letra D

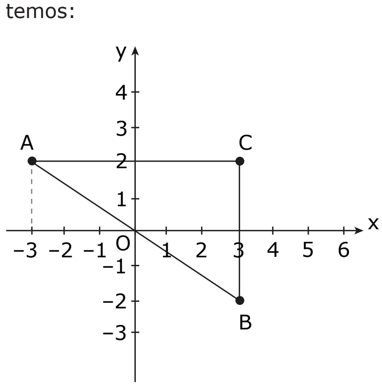
Comentário: Como os catetos desse triângulo estão sobre os eixos de um sistema cartesiano, o vértice relativo ao ângulo de 90° é a origem desse sistema, dessa forma, podemos supor os pontos B(x, 0) e C(0, y) como os outros vértices desse triângulo. Assim, usando a definição de ponto médio, temos:

$$\frac{x + 0}{2} = -1 \Rightarrow x = -2$$
$$\frac{y + 0}{2} = 3 \Rightarrow y = 6$$

Logo, a soma das coordenadas dos vértices desse triângulo é dada por $x_A + x_B + x_C + y_A + y_B + y_C = 0 + (-2) + 0 + 0 + 0 + 6 = 4$.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Seguindo as orientações constantes no enunciado, temos:

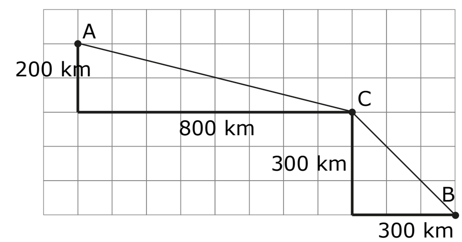


Assim, o triângulo ABC é retângulo de catetos medindo 4 e 6 u.c. Assim, sua área **A** é dada por:

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Considere a representação a seguir para o cálculo da distância percorrida pelo avião:



A distância de **A** até **B** passando por **C** será dada por $d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}$, ou seja:

$$d_{AC} = \sqrt{800^2 + 200^2} = \sqrt{680\,000} = 200\sqrt{17} \cong 825 \text{ km}$$
$$d_{CB} = 300\sqrt{2} \cong 424 \text{km}$$

Portanto, $d_{AB} = d_{AC} + d_{CB} \cong 1\,250$ km.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Calculando a medida de cada lado desse triângulo, temos:

$$\left(d_{BC}\right)^2 = (m - 0)^2 + (4 - 6)^2 = m^2 + 4$$
$$\left(d_{AB}\right)^2 = (m - 1)^2 + (4 - (-2))^2 = m^2 + 2m + 1 + 36$$
$$\left(d_{AC}\right)^2 = (1 - 0)^2 + (-2 - (6))^2 = 1 + 64 = 65$$

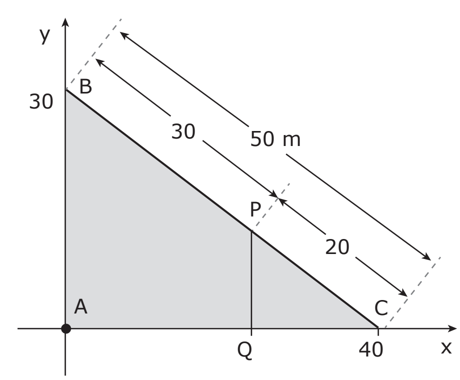
Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\left(d_{BC}\right)^2 = \left(d_{AB}\right)^2 + \left(d_{AC}\right)^2 \Rightarrow \cancel{m^2} + 4 = \cancel{m^2} - 2m + 37 + 65 \Rightarrow$$
$$2m = 98 \Rightarrow m = 49$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Como o perímetro da praça é 120 m e as duas pessoas percorreram distâncias iguais, cada um percorrerá 60 m.

Logo:



Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{50}{20} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{CQ} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{30}{PQ} = \frac{40}{CQ} \Rightarrow PQ = 12 \text{ m E } CQ = 16 \text{ m}$$

MATEMÁTICA

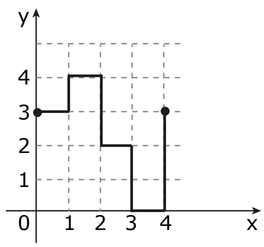
Assim:

$$P(40 - CQ, PQ) = P(24, 12); A(0, 0)$$

$$d(P, A) = \sqrt{(24, 0)^2 + (12 - 0)^2} = 12\sqrt{5} \cong 27 \text{ m}.$$

Questão 09 – Letra C

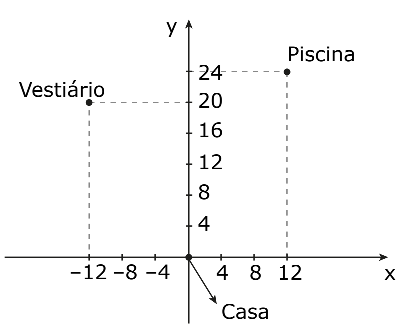
Comentário: Observando o plano cartesiano, percebe-se que a primeira parte do padrão acontece como visto a seguir:



Nesse padrão, a linha poligonal tem 12 cm de comprimento e deslocou-se 4 unidades no eixo x. Como o comprimento total é de 94 cm, pode-se encontrar as coordenadas de **Q** considerando 8 padrões menos duas unidades, (8 . 12 – 2 = 94), assim analisando o padrão, **Q** tem coordenadas x = 4 . 8 = 32 e y = 1.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Para encontrar a posição que atende ao pedido do Sr. Antônio, o engenheiro deve encontrar as coordenadas do circuncentro do triângulo cujos vértices são as posições da casa, piscina e vestiário, ou seja, encontrar um ponto P(x, y) cuja distância até cada um desses outros pontos seja igual. Seja **d** essa distância, temos:



Assim, temos:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \quad \text{(I)}$$

$$d = \sqrt{(x - (-8))^2 + (y - 20)^2} \quad \text{(II)}$$

$$d = \sqrt{(x - 12)^2 + (y - 24)^2} \quad \text{(III)}$$

Comparando II e III, temos:

$$(x + 8)^2 + (y - 20)^2 = (x - 12)^2 + (y - 24)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 40y + 400 = x^2 - 24x + 144 + y^2 - 48y + 576$$

$$40x + 8y - 256 = 0 \text{ (IV)}$$

Agora, comparando I e II, temos:

$$(x + 8)^2 + (y - 20)^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 40y + 400 = x^2 + y^2 \Rightarrow 16x - 40x + 464 = 0 \text{ (V)}$$

Agora, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 40x + 8y = 256 & \text{(IV)} \\ 16x - 40y = -464 & \text{(V)} \end{cases}$$

$$\text{Fazendo IV} + \left(-\frac{5}{2}\right).\text{V, temos}: 108y = 1\,416 \Rightarrow y \cong 13{,}1 \Rightarrow x \cong 3{,}8$$

Portanto, o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, aproximadamente, 3,8 m para o leste e 13,1 m para o norte.

Questão 11 – Letra B

Comentário: A inclinação da reta AB é $m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{4 - 0}{3 - 0} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{4}{3}$.

Como o segmento AB ⊥ AD, então:

$$m_{\overleftrightarrow{AB}}.m_{\overleftrightarrow{AD}} = -1 \Rightarrow \frac{4}{3}.m_{\overleftrightarrow{AD}} = -1 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AD}} = -\frac{3}{4}$$

Daí, a equação da reta AD é:

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

Como D = (a, b) $\in \overleftrightarrow{AD}$, então $b = -\frac{3}{4}a$.

Assim, $D = \left(a, -\frac{3}{4}a\right)$.

A distância de **A** até **B** é:

$$d_{A,\,B} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \Rightarrow d_{A,\,B} = 5$$

Como ABCD é um quadrado, então:

$$d_{A,\,D} = 5 \Rightarrow \sqrt{(a - 0)^2 + \left(-\frac{3}{4}a - 0\right)^2} = 5 \Rightarrow$$

$$a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

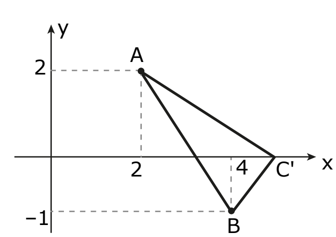
Como a < 0, então a = –4 e $b = -\frac{3}{4}(-4) \Rightarrow b = 3$

Portanto, as coordenadas do vértice **D** são:

D = (–4, 3) e, assim, –4 + 3 = –1.

Questão 12 – Letra C

Comentário: Considere os pontos **A**, **B** e um ponto genérico **C'**, de ordenada nula, num sistema de eixos ortogonais para a representação do problema:



O ponto **C'** está sobre o eixo x, pois possui ordenada nula. Os pontos **A**, **B** e **C'** determinam um triângulo ou um segmento de reta. Pela desigualdade triangular, temos que a soma de dois lados é sempre maior que a medida do outro lado de um triângulo. Agora, como **C'** pertence ao eixo x, podemos notar que, quando **C'** está alinhado com AB, temos AC + BC = AB e, para qualquer outra posição de **C'**, temos AC + BC > AB, o que determina o valor mínimo de AC + BC ocorrendo para **C'** alinhado com **A** e **B**, logo:

$d_{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$d_{AC} = \sqrt{(m-2)^2 + 2^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 8}$

$d_{BC} = \sqrt{(m-4)^2 + 1} = \sqrt{m^2 + 8m + 17}$

Agora, fazendo AC + BC = AB, temos:

$\sqrt{m^2 - 4m + 8} + \sqrt{m^2 - 8m + 17} = \sqrt{13} \Rightarrow$

$\sqrt{m^2 - 4m + 8} = \sqrt{13} - \sqrt{m^2 - 8m + 17} \Rightarrow$

$\cancel{m^2} - 4m + 8 = 13 + \cancel{m^2} - 8m + 17 - 2\sqrt{13}\sqrt{m^2 - 8m + 17} \Rightarrow$

$\cancel{4m} - \cancel{22} = -\cancel{2}\sqrt{13}\sqrt{m^2 - 8m + 17} \Rightarrow$

$11 - 2m = \sqrt{13}\sqrt{m^2 + 8m + 17} \Rightarrow$

$4m^2 - 44m + 121 = 13m^2 - 104m + 221 \Rightarrow$

$9m^2 - 60m + 100 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (-60)^2 - 4 . 9 . 100 = 0 \Rightarrow$

$m = \dfrac{60 \pm 0}{2 . 9} = \dfrac{60}{18} = \dfrac{10}{3}$

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Como o sanitário S está no ponto médio do segmento AB, as coordenadas do ponto B são tais que:

$\dfrac{1 + x}{2} = 5 \Rightarrow x = 9$

$\dfrac{2 + y}{2} = 10 \Rightarrow y = 18$

Logo, a loja **B** está localizada no ponto (9, 18).

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: O raio da semicircunferência indicada na figura da questão é igual a $\sqrt{2}$ km,então as construções em linha reta e via semicircunferência demorariam:

$2.\sqrt{2} . 10^3 . 1 = 2 . 1,4 . 1\,000 = 2\,800$ horas

$\pi . \sqrt{2} . 10^3 . 0,6 = 3 . 1,4 . 10^3 . 0,6 = 2\,520$ horas

Portanto, o menor tempo possível seria de 2 520 horas.

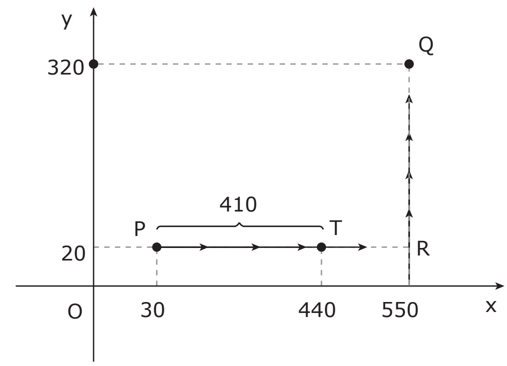
Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência na área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Pela figura a seguir, verificamos que a distância percorrida pelo ônibus para ir de **P** a **Q** é igual a PR + RQ, ou seja, 820.



O ponto **T** deve estar localizado na metade da distância, de modo que PT = 410. Portanto, a abscissa do ponto **T** deverá ser igual a 30 + 410 = 440. As coordenadas do novo ponto de parada mostrado na figura são (440, 20).

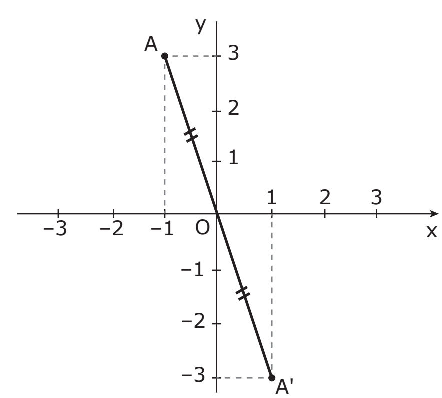
Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

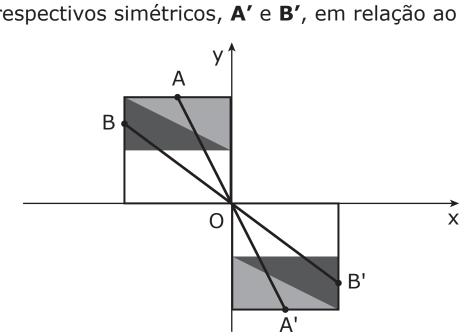
Habilidade: 6

Comentário: Considerando um plano cartesiano com origem no ponto **O**, o ponto simétrico ao ponto A = (x, y), em relação à origem, é o ponto A' = (−x, −y). Logo, por exemplo, o simétrico do ponto A = (−1, 3), em relação à origem, é o ponto A' = (1, −3), conforme ilustrado na figura a seguir:



Vale ressaltar que o ponto **A'** é colinear aos pontos **A** e **O**, e é tal que as distâncias AO e A'O são iguais.

Desse modo, verificamos que a única alternativa que apresenta a imagem simétrica da figura original, em relação ao ponto **O**, é a alternativa E. A figura a seguir ilustra dois pontos **A** e **B** e seus respectivos simétricos, **A'** e **B'**, em relação ao ponto **O**.



Questão 05 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Pelas coordenadas, temos A = (30, 20), B = (70, 20) e C = (60, 50).

Sendo P(x, y) o ponto procurado, temos:

$$\underbrace{(x-30)^2+(y-20)^2}_{\mathrm{I}}=\underbrace{(x-70)^2+(y-20)^2}_{\mathrm{II}}=\underbrace{(x-60)^2+(y-50)^2}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{II}\Rightarrow$$

$$(x-30)^2+\cancel{(y-20)^2}=(x-70)^2+\cancel{(y-20)^2}\Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}-60x+900=\cancel{x^2}-140x+4\,900\Rightarrow$$

$$x=50$$

$(x - 30)^2 + (y - 20)^2 = (x - 70)^2 + (y - 20)^2 = (x - 60)^2 + (y - 50)^2$

Substituindo, na igualdade, x = 50 em II = III, temos:

$$\mathrm{II}=\mathrm{III}\Rightarrow$$

$$(50-70)^2+(y-20)^2=(50-60)^2+(y-50)^2\Rightarrow$$

$$400+\cancel{y^2}-40y+400=100+\cancel{y^2}-100y+2\,500\Rightarrow$$

$$6\cancel{0}y=1\,80\cancel{0}\Rightarrow$$

$$y=\frac{180}{6}\Rightarrow$$

$$y=30$$

Logo, as coordenadas de **P** são (50, 30).

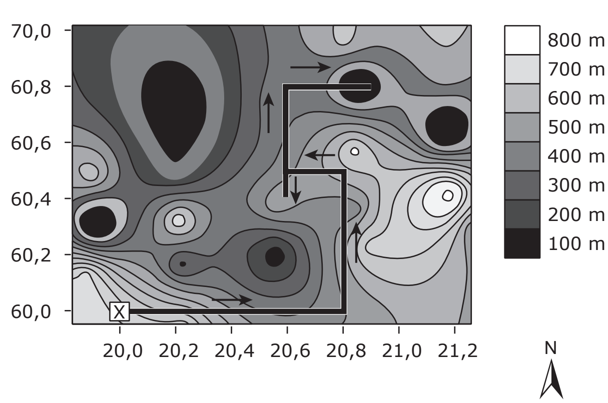
Questão 06 – Letra A

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Pela figura a seguir, temos as direções do helicóptero indicadas pelas setas.



Portanto, de acordo com a escala de tons apresentadas, conclui-se que o helicóptero pousou em um local cuja altitude é menor ou igual a 200 m.

MÓDULO – B 14

Estudo Analítico da Reta

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Utilizando a equação fundamental de uma reta:

Ponto A: $(x_0, y_0) = (0, 1)$

Ponto B: $(x_1, y_1) = (6, 8)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{8-1}{6-0}=\frac{7}{6}$$

$$y-1=\frac{7}{6}.(x-0)\Rightarrow y=\frac{7x}{6}+1$$

Questão 02 – Letra D

Comentário: As equações reduzidas das retas são:

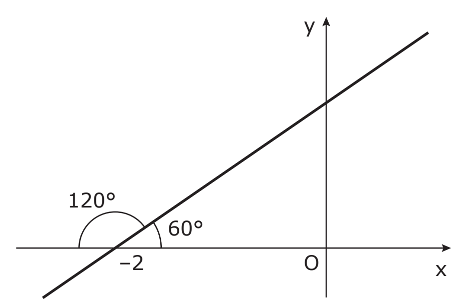
$$r:\ y=\frac{x-10}{2}\quad \text{e s:}\ \ y=\frac{6-3x}{2}$$

Igualando a equação das retas, temos:

$$\frac{x-10}{2}=\frac{6-3x}{2}\ \Rightarrow\ x-10=6-3x\ \Rightarrow\ 4x=16\ \Rightarrow\ x=4$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.



A inclinação da reta pode ser determinada da seguinte forma:

a = tg 60° $\Rightarrow$ a = $\sqrt{3}$

Como a reta passa pelo ponto (−2, 0) e sua inclinação é $\sqrt{3}$, temos:

$y - 0 = \sqrt{3}(x + 2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Igualando as equações das duas retas, temos:

$$5x+12=ax+4\ \Rightarrow\ x(5-a)=-8\ \Rightarrow\ x=-\frac{8}{(5-a)}$$

Como o ponto A(−1, b) é a interseção entre as duas retas,

$$x=-\frac{8}{(5-a)}=-1\ \Rightarrow 8=5-a\ \Rightarrow a=-3$$

$y = 5x + 12 \Rightarrow b = 5.(-1) + 12 \Rightarrow b = 7.$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Seja **x** o tempo, em anos, e **y** o número de casos de dengues registrados. Temos:

A(2 005, 400)

B(2 013, 560)

Encontramos a equação fundamental da reta.

$$y - 400 = \frac{560 - 400}{2\,013 - 2\,005}(x - 2\,005) \Rightarrow$$

$$y = \frac{160}{8}(x - 2\,005) + 400 \Rightarrow$$

$$y = 20(x - 2\,005) + 400 \Rightarrow$$

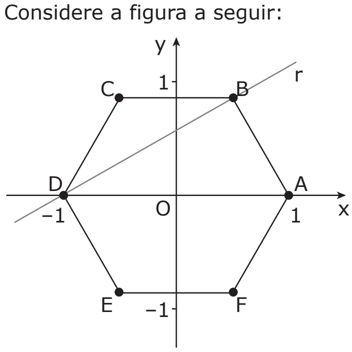
$$y = 20x - 40\,100 + 400 = 20x - 39\,700$$

Calculando a quantidade de casos de dengue para x = 2015:

$y = 20 \cdot 2\,015 - 39\,700 = 600$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



Como o hexagono é regular, temos que $B\hat{D}O = 30°$. Assim, o coeficiente angular da reta **r** é igual a:

$m = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Se **r** passa pelo ponto D(–1, 0) e sua inclinação é $\frac{\sqrt{3}}{3}$, temos:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Questão 07 – Letra E

Comentário: Como o ponto (–2, a) pertence à função quadrática $y = x^2 - 1$, temos:

$a = (-2)^2 - 1 \Rightarrow$

$a = 3$

As raízes da função $y = x^2 - 1$ são:

$0 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Com base nisso, deduzimos que a reta **r**, além de passar no ponto (–2, 3), também passa no ponto (1, 0).

Logo, temos dois pontos por onde a reta passa. Com esses dados, conseguimos determinar sua equação. Assim:

$$m = \frac{3 - 0}{-2 - 1} \Rightarrow m - 1 \text{ e}$$

$y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow$

$x + y - 1 = 0$

Portanto, a equação da reta **r** é $x + y - 1 = 0$.

Questão 08 – Letra A

Comentário:

$$r \cap s: \begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$-6y = 0 \Rightarrow y = 0$

$$2x + 0 + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

Logo, o ponto de interseção das duas retas tem coordenadas $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Utilizando a equação fundamental de uma reta:

Ponto A: $(x_0, y_0) = (1, 2)$

Ponto C: $(x_1, y_1) = (4, 5)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{5 - 2}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$y - 2 = 1.(x - 1) \Rightarrow \; y = x + 1$

Portanto, o coeficiente linear é igual a 1.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Para encontrar os pontos em que esta reta intercepta os eixos coordenados, vamos igualar cada variável a 0 separadamente.

Para x = 0, temos:

$2x - 3y = 12 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4$

Para y = 0, temos:

$2x - 3y = 12 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

Logo, sabendo as coordenadas dos pontos, o ponto médio do segmento tem coordenadas:

$$x_m = \frac{0 + 6}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{0 - 4}{2} = -2$$

Questão 03 – Letra E

Comentário: Encontrando as interseções por meio das equações das retas:

$x - y + 2 = 0 \Rightarrow x - 4 + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

A(2, 4)

$x - y + 2 = y + x + 4 \Rightarrow y = -1$

$x - y + 2 = 0 \Rightarrow x - (-1) + 2 = 0 \Rightarrow x = -3$

B(–3, –1)

$y + x = -4 \Rightarrow 4 + x = -4 \Rightarrow x = -8$

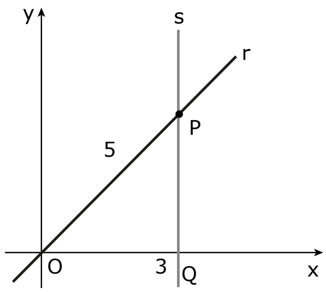
C(–8, 4)

Os pontos do triângulo são:

(2, 4); (–8, 4) e (–3, –1)

Questão 04 – Letra B

Comentário: Pelo enunciado, temos as informações na figura a seguir:



Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$PO^2 = OQ^2 + PQ^2 \Rightarrow$

$5^2 = 3^2 + PQ^2 \Rightarrow \; PQ = 4$

Agora podemos calcular a equação da reta **r**.

$m = \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{4}{3}$

$y - 0 = m.x \Rightarrow \; y = \dfrac{4}{3}x$

Questão 05 – Letra C

Comentário: A reta **r** passa pelos pontos (0, 4) e (1, 5), então:

$m_r = \dfrac{5-4}{1-0} = 1$

$y - 4 = 1(x - 0) \Rightarrow$

$y = x + 4 \Rightarrow$

$-x + y = 4$

Já a reta **s** passa pelos pontos (0, 6) e (6, 0), assim:

$m_s = \dfrac{-6}{6} = -1$

$y - 6 = -1(x - 0) \Rightarrow$

$y = -x + 6 \Rightarrow$

$x + y = 6$

Portanto, o sistema de equações lineares que pode representar as retas **r** e **s** é: $\begin{cases} -x + y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$.

Questão 06 – Letra B

Comentário:

$r: \begin{cases} m_r = tg\ 45° = 1 \\ P(-1, 0) \end{cases} \Rightarrow r: y - 0 = 1(x+1) \Rightarrow \; y = x + 1$

$s: \begin{cases} m_s = tg\ 60° = \sqrt{3} \\ Q(2, 0) \end{cases} \Rightarrow s: y - 0 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow \; y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

$r \cap s$:

$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = x + 1 \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)x = 2\sqrt{3} + 1 \Rightarrow$

$x = \dfrac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}{3-1} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{3}+7}{2}.$

Questão 07 – Letra D

Comentário:

$r: \begin{cases} P_1(-2, 1) \\ P_2(5, 3) \end{cases} \Rightarrow$

$r: y = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{11}{7} \begin{cases} M\left(-\dfrac{11}{2}, 0\right) \\ N\left(0, \dfrac{11}{7}\right) \end{cases}$

$\dfrac{14}{11}(n - m) = \dfrac{14}{11}\left(\dfrac{11}{7} + \dfrac{11}{2}\right) = 9.$

Questão 08 – Letra D

Comentário: Um modo de calcular a área do triângulo OAB é ter as coordenadas dos pontos **B** e **A**.

No enunciado, como a reta **s** passa pela origem, a equação da reta é $y = \dfrac{2}{3}x$.

Ponto **B**:

$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$

$x + 3.\left(\dfrac{2}{3}x\right) - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{3} . 2 = \dfrac{4}{3}$

$P_B\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$

- Ponto **A**:

$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$x + 3 . 0 - 6 = 0 \Rightarrow \; x = 6$

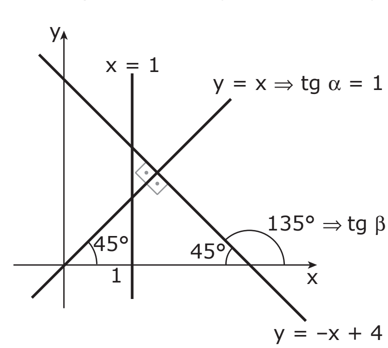
$P_A(6, 0)$

Assim, temos as medidas do triângulo e calculamos sua área:

$A_{OAB} = \dfrac{1}{2}.OA.h = \dfrac{1}{2} . 6 . \dfrac{4}{3} = 4$ u.a.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Observe no esquema a seguir que o triângulo formado possui um ângulo de 90°, logo ele é retângulo.



Questão 10 – Letra A

Comentário: Seja a reta da forma y = ax + b. Dessa maneira, para o ponto **A**, temos que:

$k = a \,.\, 0 + b \Rightarrow$

$b = k$

Para o ponto **B**, temos:

$0 = k \,.\, a + b \Rightarrow$

$0 = k \,.\, a + k \Rightarrow$

$-k = k \,.\, a \Rightarrow$

$a = -1$

A soma dos coeficientes da reta y = –x + k é, portanto, igual a k – 1.

Questão 11 – Letra E

Comentário: Seja $\mathbf{m_r}$ o coeficiente angular da reta **r**, **p** o coeficiente linear da retar **r**, $\mathbf{m_s}$ o coeficiente angular da reta **s** e **q** o coeficiente linear da reta **s**, temos:

$m_r = 10;\ m_s = 9$

Logo, podemos escrever as equações das retas como:

r: y = 10x + p

s: y = 9x + q

Agora, substituindo o ponto (0, a) na reta **r** e (0, b) na reta **s**, temos:

$a = 10 \,.\, 0 + p \Rightarrow a = p$

$b = 9 \,.\, 0 + q \Rightarrow b = q$

Agora, substituindo os valores encontrados para **p** e **q** e fazendo a interseção dessas retas, temos:

$10x + a = 9x + b \Rightarrow$

$x = b - a$

Dessa forma, utilizando a informação constante na questão, que diz que a abscissa da interseção dessas retas é igual a 6, temos:

$b - a = 6 \Rightarrow b = a + 6$

Questão 12 – Letra A

Comentário: A equação da reta AB é:

- A reta que contém o segmento AB tem coeficiente linear igual a 4.

$$y = ax + 4 \Rightarrow 7 = a.6 + 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} + 4$$

Equação da reta BC:

- O coeficiente angular do segmento BC vale metade do coeficiente angular do segmento AB.

$$y = \frac{1}{2} \,.\, \frac{x}{2} + b = \frac{x}{4} + b \Rightarrow 7 = \frac{6}{4} + b \Rightarrow b = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{11}{2}$$

- Ordenada do ponto **C**:

$$y = \frac{x}{4} + \frac{11}{2} = \frac{14}{4} + \frac{11}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

- O coeficiente angular do segmento CD é igual a –1.

  Equação da reta CD:

$$y = -x + b \Rightarrow$$

$$9 = -14 + b \Rightarrow b = 23$$

$$y = -x + 23$$

- A ordenada do ponto **D** é $\frac{2}{3}$ da ordenada do ponto **C**.

$$y = -x + 23 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3} \,.\, 9 = -x + 23 \Rightarrow$$

$$6 = -x + 23 \Rightarrow$$

$$x = 17$$

Portanto, a abscissa do ponto **D** vale 17.

Seção Enem

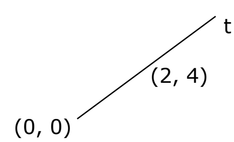
Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

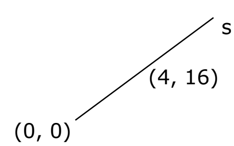
Habilidade: 24

Comentário: Observa-se, no gráfico, o coeficiente angular da reta dada que passa pelos pontos (0, 0) e (2, 4).



$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

Pelo enunciado, deve-se ajustar o coeficiente angular para garantir que a reta passa pelos pontos (0, 0) e o vértice da parábola dada por (4, 16).



$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16 - 0}{4 - 0} = 4$$

Com base nos valores, aumenta-se o coeficiente angular em 2 unidades.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Somente os pontos B = (–3, 1), D = (0, 4) e E = (2, 6) dos itens pertencem à reta de equação y = x + 4.

A distância do ponto **P** ao ponto **B** é:

$$d_{P,B} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P,B} = \sqrt{[-5 - (-3)]^2 + (5 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P,B} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} < 5$$

Portanto, a estação do metrô ser criada no ponto B = (–3, 1) satisfaz a solicitação da comunidade.

MÓDULO – B 15

Posições Relativas e Distância de Ponto a reta

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário: Essa questão é uma aplicação direta de distância de um ponto a uma reta. Temos o ponto de coordenadas $(20\sqrt{2} + 1; 1)$ e a reta na equação geral $-x + y = 0$.

Chamando de **d** a distância desse ponto a essa reta, temos:

$$d = \frac{|(-1)(20\sqrt{2}+1) + 1 \,.\, 1 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-20\sqrt{2} - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20$$

Questão 02 – Letra E

Comentário: A reta perpendicular à reta r: $y = 2x + 1$ possui coeficiente angular:

$$m = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2}$$

Para passar pelo ponto $P = (4, 2)$:

$$y = mx + b \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + b \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} \,.\, 4 + b \Rightarrow b = 4$$

Assim, a reta procurada possui equação $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Questão 03 – Letra C

Comentário: A reta **r**, cuja equação é $x + 2y + 3 = 0$, pode ser reduzida na forma $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, com coeficiente angular $m_r = -\frac{1}{2}$. Sabemos que $t \perp r$ e que $P(2, 3) \in t$, então:

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = 2$$

t: $y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow$ t: $2x - y - 1 = 0$

Questão 04 – Letra D

Comentário: A distância de **P** à reta **r** é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \,.\, 5 + (-3).6 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} =$$

$$\frac{|10 - 18 + 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-3|}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Escolhemos um ponto arbitrário que pertença à uma das duas retas. No caso (0, 0).

$3x + 4y = 0 \Rightarrow 3 \,.\, 0 + 4 \,.\, 0 = 0$

Agora, calculamos a distância deste ponto à outra reta.

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \,.\, 0 + 4 \,.\, 0 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|10|}{5} = 2$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Igualando as equações:

$5x + 8 = -5x + 8 \Rightarrow x = 0$

Substituindo o valor de **x** em qualquer uma das duas equações, temos $y = 8$.

Logo, as retas possuem um ponto em comum.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Para que as retas sejam paralelas:

$$\begin{cases} 2x + ky = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2}{k}x + \frac{3}{k} \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$-1 = \frac{-2}{k} \Rightarrow k = 2$$

Para que as retas sejam perpendiculares:

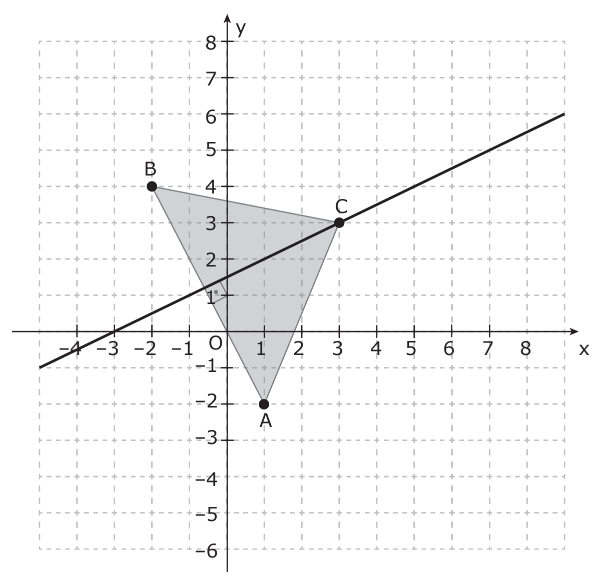
$$\begin{cases} 2x + ky = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2}{k}x + \frac{3}{k} \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$-1 = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{k}\right)} \Rightarrow k = -2$$

Portanto, os valores de **k** são 2 e −2.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir, que representa a geometria da situação.



$$m_{AB} = \frac{-2 - 4}{1 - (-2)} \Rightarrow$$

$$m_{AB} = -2$$

Sabemos que $r \perp AB$, então: $m_r = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{2}$. Temos ainda que o ponto (3, 3) pertence à reta **r**. Assim:

$$r: y - 3 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow$$

$$r: 2y - x - 3 = 0$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Escrevendo a equação dada na sua forma reduzida, temos:

$$y = 3x + 6 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 & \text{(coeficiente angular)} \\ n = 6 & \text{(coeficiente linear)} \end{cases}$$

$y = 0 \Rightarrow$

$3x + 6 = 0 \Rightarrow$

$x = -2$

A equação representa uma reta que intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 6) e das abscissas no ponto (–2, 0).

Questão 02 – Letra C

Comentário:

$$r: y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

Como $s \perp r$ e $P(2, 3) \in s$, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{3}{2}$$

$$s: y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow \quad s: 3x + 2y - 12 = 0$$

Questão 03

Comentário: A equação da reta que passa pelos pontos **A** e **B**, será:

$$m = \frac{7-2}{11-1} = \frac{1}{2}$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{x+3}{2}$$

Sendo **I** o ponto de interseção entre as retas $y = \frac{-x+17}{3}$ e $y = \frac{x+3}{2}$, temos:

$$\frac{-x+17}{3} = \frac{x+3}{2} \Rightarrow$$

$$-2x + 34 = 3x + 9 \Rightarrow$$

$$5x = 25 \Rightarrow$$

$$x = 5$$

Substituindo o valor de **x** na equação:

$$y = \frac{-5+17}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Portanto, as coordenadas do ponto de interseção **I** é (5, 4).

Questão 04 – Letra A

Comentário:

O ponto médio de AB é

$$M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+(-6)}{2}\right) = M(2, -1).$$

Chamemos de **r** a reta 2x – 5y + 3 = 0 e de **s** a reta desejada:

$$r: 2x - 5y + 3 = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

Como $r \perp s$ e $(2, -1) \in s$, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{5}{2}$$

$$s: y + 1 = -\frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow$$

$$s: 5x + 2y - 8 = 0$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: **A**, **B**, **C** e **D** são vértices consecutivos de um quadrado. As coordenadas no ponto **A** são A(1, 3), e **B** e **D** pertencem à equação x – y – 4 = 0.

Daí, a distância **d** do vértice A(1, 3) à reta x – y – 4 = 0 será a metade da diagonal do quadrado. Logo:

$$d = \frac{|x - y - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{|1 - 3 - 4|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$d = 3\sqrt{2}$ u.c.

Então, a diagonal do quadrado é:

$D = 2d \Rightarrow$

$D = 2 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow$

$D = 6\sqrt{2}$

A diagonal **D** do quadrado em função do seu lado ℓ é:

$D = \ell\sqrt{2} \Rightarrow$

$6\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6$ u.c.

Portanto, sua área **A** é $A = \ell^2 \Rightarrow A = 6^2 \Rightarrow A = 36$ u.a.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Como r_1 é paralela a r_2, então $m_1 = m_2 = m$.

$$r_1 : y = mx + b_1 \Rightarrow$$

$$2 = m \cdot 0 + b_1 \Rightarrow$$

$$b_1 = 2$$

$$r_2 : y = mx + b_2 \Rightarrow$$

$$0 = m \cdot 1 + b_2 \Rightarrow$$

$$m = -b_2$$

A reta ℓ, que passa pelos pontos **A** e **B**, possui a equação da reta:

$$y - 2 = \frac{0-2}{1-0} \cdot (x - 0) \Rightarrow$$

$$y = -2x + 2$$

Lembrando que ℓ é perpendicular às retas r_1 e r_2, temos:

$$m = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o produto procurado é dado por:

$$m_2 \cdot b_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (2) = 1$$

Questão 07 – Letra D

Comentário: Primeiro, vamos encontrar a equação da reta **r**, que passa pelos pontos **A** e **B**:

$$y - 20 = \frac{(-10) - 20}{20 - (-20)}.[x - (-20)] \Rightarrow$$

$$y = -\frac{30}{40}.(x + 20) + 20 = -\frac{3}{4}x + 5 \Rightarrow$$

$$r:\ y + \frac{3}{4}x - 5 = 0$$

Agora, calculamos a distância do ponto **P** até a reta **r**.

$$d(P, r) = \frac{\left|\frac{3}{4}\ .\ 0 + 1\ .\ 30 + (-5)\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}} = \frac{|25|}{\sqrt{\frac{5^2}{4^2}}} = 20$$

Considerando a escala 1 : 200, em metros, temos:

200 . d(P, r) = 200 . 20 = 4 000 m = 4 km

Questão 08 – Letra B

Comentário: Primeiro vamos encontrar os pontos em que a reta **s** intercepta os eixos coordenados.

$$2x - 3y + 12 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow 2\ .\ 0 - 3y + 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 3\ .\ 0 + 12 = 0 \Rightarrow x = -\frac{12}{2} = -6$$

O ponto de interseção entre as retas **t** e **s** é a média entre estes pontos:

$$x_m = \frac{0 + (-6)}{2} = -3$$

$$y_m = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Como a reta **t** é perpendicular à reta **s**, encontramos a equação dela:

$$s:\ 2x - 3y + 12 = 0 \Rightarrow\ y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m_t = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_m = m_t.(x - x_m) \Rightarrow$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}.[x - (-3)] \Rightarrow$$

$$2y - 4 = -3x - 9 \Rightarrow\ 3x + 2y + 5 = 0$$

$$t:\ 3x + 2y + 5 = 0$$

Finalmente, calculamos a distância do ponto M(1, 1) à reta **t**.

$$d(M, t) = \frac{|3\ .\ 1 + 2\ .\ 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Questão 09 – Letra C

Comentário: A reta **r**, com inclinação de 45°, possui a equação da reta na forma:

$y = tg\ 45°.x + c = x + c \Rightarrow x - y + c = 0$

a = 1

b = −1

Como a distância de **r** a **A** é a mesma de **r** a **B**, temos:

$$d(A, r) = d(B, r) \Rightarrow \frac{|ax_A + by_A + c|}{\cancel{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\cancel{\sqrt{a^2 + b^2}}} \Rightarrow$$

$$|8 - 2 + c| = |3 - 6 + c| \Rightarrow |6 + c| = |-3 + c|$$

Temos uma equação modular com 3 intervalos.

Se $c \geq 3$:

$$|6 + c| = |-3 + c| \Rightarrow$$

$$6 + c = -3 + c \Rightarrow\ 6 = -3\ \text{(Falso)}$$

Se $-6 \leq c < 3$:

$$|6 + c| = |-3 + c| \Rightarrow$$

$$6 + c = 3 - c \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

Se $c < -6$:

$$|6 + c| = |-3 + c| \Rightarrow$$

$$-6 - c = 3 - c \Rightarrow$$

$$-6 = 3\ \text{(Falso)}$$

Confirmando pelo gráfico que c < 0, temos a equação da reta:

$$x - y + c = 0 \Rightarrow x - y - \frac{3}{2} = 0$$

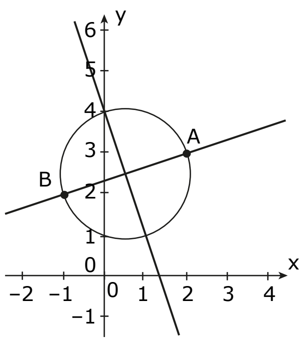
Finalmente, encontrando as coordenadas do ponto **C**.

$$y = 0\ \text{(conforme o gráfico)} \Rightarrow\ x - y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow\ x = \frac{3}{2}$$

$$C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

Questão 10 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir, com A(2, 3) e B(−1, 2):



A equação da reta AB tem coeficiente angular **a** dado por:

$$a = \frac{3 - 2}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

O centro da circunferência pertence à mediatriz da corda AB; logo, o ponto médio (x_m, y_m) de **A** e **B** pertence a essa mediatriz.

$$x_m = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2}\ \text{e}\ y_m = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$$

Além disso, a reta mediatriz é perpendicular à reta AB, o que faz com que seu coeficiente angular seja −3. Assim, a equação da mediatriz é dada por:

$$y - \frac{5}{2} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2y - 5 = -6x + 3 \Rightarrow$$

$$2y + 6x - 8 = 0\ \Rightarrow 3x + y - 4 = 0$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: A distância mínima é a distância de O(0, 0) à

$$\text{reta } r = \begin{cases} P(-5, 0) \\ Q(-1, -3) \end{cases}$$

$$m_{PQ} = \frac{0-(-3)}{-5-(-1)} = -\frac{3}{4}$$

$$r: y - 0 = -\frac{3}{4}(x-(-5)) \Rightarrow 3x + 4y + 15 = 0$$

$$d(O, r) = \frac{|3.(0)+4.(0)+15|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} \Rightarrow d(O, r) = \frac{15}{5} = 3 \text{ km.}$$

MÓDULO – B 16

Áreas e Teoria Angular

Exercícios de Aprendizagem

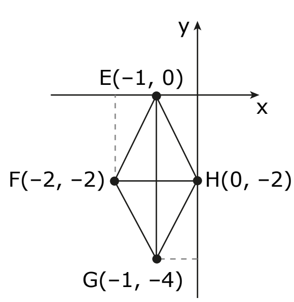
Questão 01 – Letra C

Comentário: A área **S** do triângulo de vértices (0, 0), (1, 2) e (2, 1) é igual a:

$$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.|-3| = \frac{3}{2}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário:



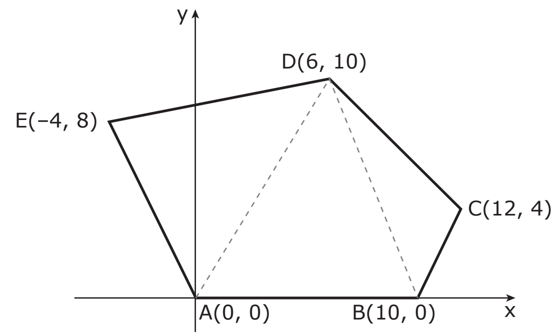
De acordo com as coordenadas, temos que o quadrilátero é um losango e a área de EFGH pode ser encontrada somando a área dos triângulos EFH e FGH. Assim:

$$A_{EFGH} = A_{\Delta EFH} + A_{\Delta FGH} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{EFGH} = \frac{1}{2} . 4 + \frac{1}{2} . 4 = 4 \text{ u.a.}$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Dividimos o polígono ABCDE em três triângulos, como na figura a seguir:



Dessa forma,

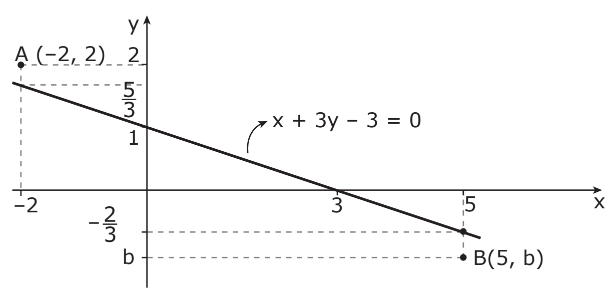
$$S_{ABCDE} = S_{ADE} + S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}|D_{ADE}| + \frac{1}{2}|D_{ABD}| + \frac{1}{2}|D_{BCD}|$$

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2}.|88| + \frac{1}{2}.|-100| + \frac{1}{2}.|36| = 112$$

Logo, a área do terreno é de 112 m².

Questão 04 – Letra D

Comentário: A reta x + 3y – 3 = 0 divide o sistema cartesiano em dois semiplanos opostos (o que está acima e o que está abaixo da reta).



Como foi dado que cada um dos pontos está situado em um dos semiplanos, e **A** pertence ao semiplano acima da reta. Para o ponto **B**, devemos ter $5 + 3 . b - 3 < 0 \Rightarrow b < -\frac{2}{3}$. Logo, entre os valores dados, somente $-\frac{3}{4}$ é menor que $-\frac{2}{3}$.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Coordenadas do ponto **A**:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x - 2 = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 1$$

A(3, 1)

Coordenadas do ponto **B**:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$$

B(2, 0)

Coordenadas do ponto **C**:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow x = 5$$

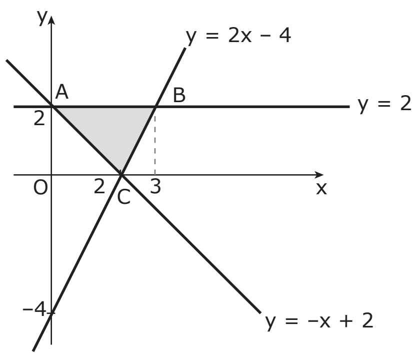
C(5, 0)

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \,.\, 3 = \frac{3}{2} = 1,5$$

Questão 06 – Letra C

Comentário: Os gráficos dados delimitam um triângulo ABC, como podemos perceber na figura a seguir:

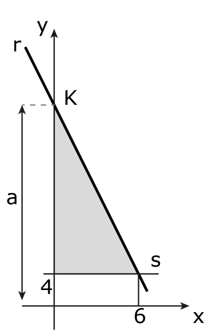


Logo:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}.\left|6\right| = 3 \text{ u.a.}$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: Observe a figura.



Por meio da área do triângulo, encontramos o valor da constante **a**:

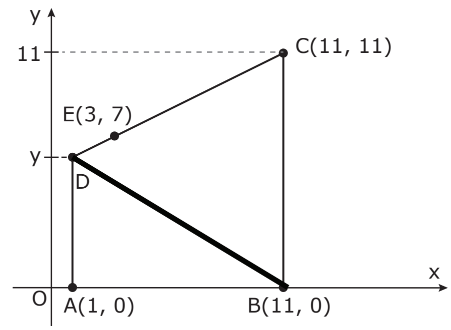
$$A = \frac{1}{2} \,.\, 6.(a - 4) = 36 \Rightarrow 3.(a - 4) = 36 \Rightarrow$$
$$a - 4 = 12 \Rightarrow a = 16$$

Logo, encontramos a equação da reta **r**:

$$y - a = \frac{4 - a}{6 - 0}.(x - 0) \Rightarrow y - 16 = \frac{4 - 16}{6} \,.\, x \Rightarrow$$
$$y = -2x + 16$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.



Como o ponto **B** está no eixo Ox, o lado BC é paralelo ao eixo Oy. Assim, se o ponto **C** tem abcissa 11, então B(11, 0).

Como AD é paralelo ao eixo Oy e A(1, 0), então a abscissa do ponto **D** é 1.

Como o ponto E(3, 7) pertence ao lado CD, a inclinação da reta CD vale:

$$a = \frac{11 - 7}{11 - 3} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Desse modo, a equação da reta CD é:

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$$

Como o ponto **D**, de abscissa 1, pertence à reta $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2}$, sua ordenada é $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{11}{2} \Rightarrow y = 6$. Logo, D(1, 6).

Observe que a área do quadrilátero pode ser calculada somando as áreas dos triângulos ADB e CDB. Sejam D_{ADB} o determinante dos pontos A, D e B e D_{CDB} o determinante dos pontos C, D e B. Assim, temos, calculando pela regra de Sarrus:

$$D_{ADB} = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 11 & 0 & 1 & 11 & 0 \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D_{ADB} = 1.6.1 + 0.1.11 + \Rightarrow 1.1.0 - (1.6.11 + 1.1.0 + 0.1.1) = -60$$

E, da mesma forma: $D_{CDB} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 110.$

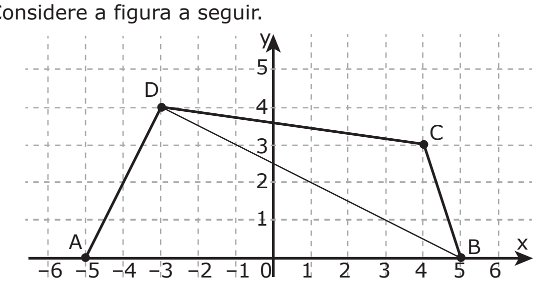
Portanto, $S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{CDB} = \frac{1}{2}\,|-60| + \frac{1}{2}\,|110| = 85.$

Exercícios Propostos

Questão 01

Comentário:

A) Considere a figura a seguir.

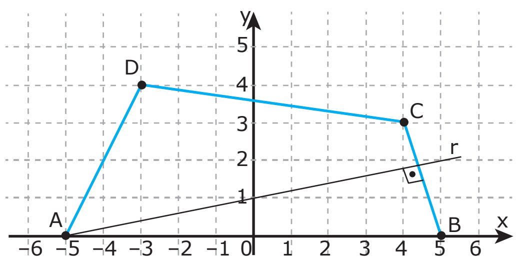


A área **S** do quadrilátero ABCD pode ser calculada somando as áreas dos triângulos ABD e BCD. Logo:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$S = \frac{1}{2}.|40| + \frac{1}{2}.|20| = 30$ u.a.

B)



Sendo r ⊥ s, temos:

$m_s = \frac{0-3}{5-4} = -3$

$m_r = \frac{1}{3}$

Logo, a equação da reta **r** é:

$y - 0 = \frac{1}{3}(x - (-5)) \Rightarrow$

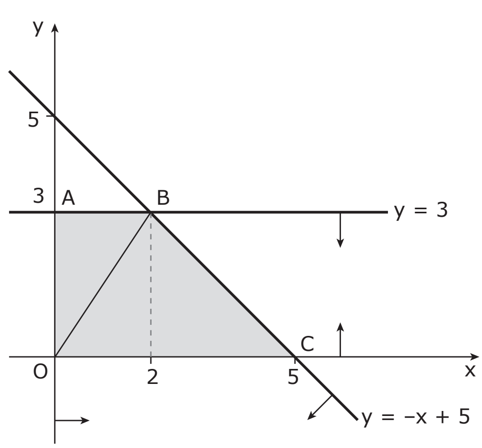
$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Questão 02 – Letra B

Comentário:

$$\begin{cases} x + y \le 5 \Rightarrow y \le -x + 5 \\ y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representando as inequações no plano cartesiano, temos:



A região que nos interessa corresponde ao trapézio OABC, no qual a área pode ser encontrada somando as áreas dos triângulos OAB e OBC. Logo:

$A = A_{OAB} + A_{OBC} = \frac{1}{2}|D_{OAB}| + \frac{1}{2}|D_{OBC}| = \frac{1}{2}.|-6| + \frac{1}{2}.|-15| = 10,5$

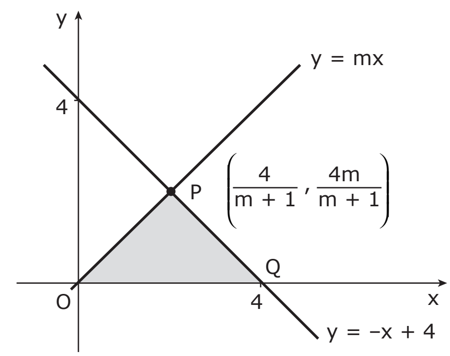
Questão 03 – Letra C

Comentário: Chamemos de **P** o ponto de interseção das retas $y = -x + 4$ e $y = mx$:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow mx = -x + 4 \Rightarrow x(m+1) = 4 \Rightarrow$$

$x = \frac{4}{m+1}$ e $y = \frac{4m}{m+1}$

Logo:



Assim, a região determinada pelas duas retas e o eixo das abscissas corresponde ao triângulo OPQ:

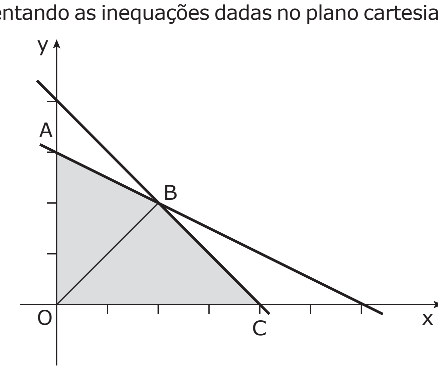
$$S_{OPQ} = \frac{1}{2}|D_{OPQ}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ \frac{4}{m+1} & \frac{4m}{m+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.4\frac{4m}{m+1} = \frac{8m}{m+1}$$

Questão 04 – Letra B

Comentário:

$$\begin{cases} x + 2y \le 6 \Rightarrow y \le -\frac{x}{2} + 3 \\ x + y \le 4 \Rightarrow y \le -x + 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representando as inequações dadas no plano cartesiano, temos:



Para encontrar o ponto **B**, vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + 3 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow -\frac{x}{2} + 3 = -x + 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 2$$

A área do quadrilátero OABC, com O(0, 0); A(0, 3); B(2, 2) e C(4, 0), pode ser dividida nos triângulos OAB e OBC:

$S_{OABC} = S_{OBA} + S_{OBC} = \frac{1}{2}|D_{OAB}| + \frac{1}{2}|D_{OBC}| = \frac{1}{2}.|6| + \frac{1}{2}.|-8| = 7$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Seja **r** a reta que passa pelos pontos (1, 0) e (0, 1).

Assim, sua inclinação é $a_r = \frac{1-0}{0-1} \Rightarrow a_r = -1$.

Logo, sua equação é $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$.

Seja **s** a reta que passa pelos pontos (0, 0) e (–2, –1).

Assim, sua inclinação é $a_s = \frac{-1-0}{-2-0} \Rightarrow a_s = \frac{1}{2}$.

Logo, sua equação é $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{2}$.

Portanto, a equação da reta **r** é $y = -x + 1$, e a da reta **s** é $y = \frac{x}{2}$.

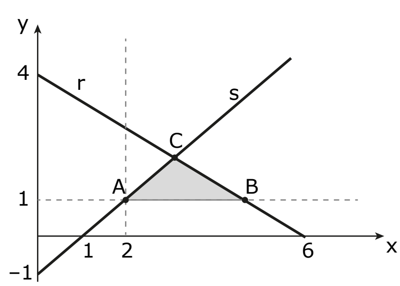
Como o ponto A(x, y) está localizado abaixo da reta **r**, $y < -x + 1$.

Como o ponto **A** está localizado acima da reta **s**, $y > \frac{x}{2}$.

Portanto, $\frac{x}{2} < y < -x + 1$.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Observe a figura.



Ponto A(2, 1).

Para encontrar o ponto **B**, vamos calcular a equação da reta **r**:

$$y - 4 = \frac{0-4}{6-0}.(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$\text{Se } y = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$B\left(\frac{9}{2}, 1\right)$$

Como **C** é o ponto de interseção de **r** com **s**, encontraremos a equação da reta **s**:

$$y - 0 = \frac{1-0}{2-1}.(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

Interseção entre as retas **r** e **s**:

$$y_r = y_s \Rightarrow -\frac{2}{3}x + 4 = x - 1 \Rightarrow \frac{5}{3}x = 5 \Rightarrow x = 3$$

$$y = x - 1 = 3 - 1 = 2$$

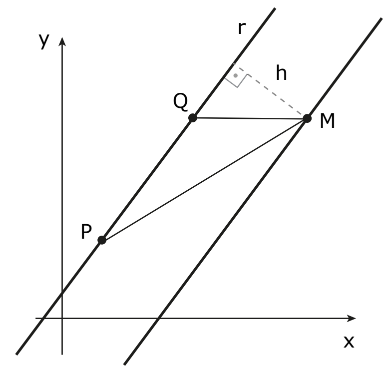
$$C(3, 2)$$

Portanto, a área do triângulo ABC é igual a:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{9}{2} & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Observe a figura.



A altura **h** do triângulo é a menor distância entre as retas paralelas implicando na distância entre o ponto **M** a reta que passa pelos pontos P(1, 2) e Q(4, 6).

Primeiro, vamos calcular a equação da reta **r**:

$$y - 2 = \frac{6-2}{4-1}.(x - 1) \Rightarrow$$

$$3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow$$

$$-4x + 3y - 2 = 0$$

Assim:

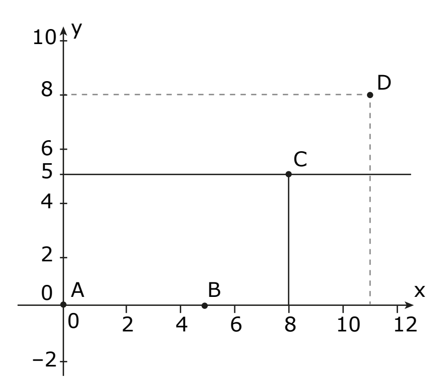
$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$h = d(M, r) = \frac{|(-4).8 + 3.6 + (-2)|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{16}{5}$$

$$A_{PQM} = \frac{1}{2}.\text{dist}(P, Q).h = \frac{1}{2} \,.\, 5 \,.\, \frac{16}{5} = 8 \text{ u.a.}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Definindo $P(x_P, y_P)$ com $x_P, y_P > 0$, pois pertencem ao primeiro quadrante. Com base nos dados do enunciado, temos:



Assim, a área do triângulo APB é:

$$A_{\Delta APB} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{25}{2} = \frac{1}{2}.|-5y_P| \Rightarrow y_P = 5$$

E a área do triângulo CPD é:

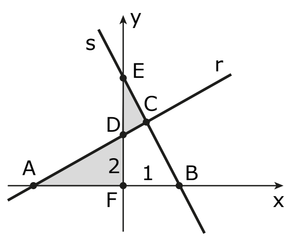
$$A_{\Delta CPD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 5 & 1 \\ x_P & 5 & 1 \\ 11 & 8 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}.|3x_P - 24| \Rightarrow$$

$12 = |3x_P - 24| \Rightarrow x_P = 12$ ou $x_P = 4$

Logo, o produto das coordenadas de **P** podem ser 20 ou 60.

Questão 09 – Letra C

Comentário: Observe a figura com os pontos e retas a seguir:



Ponto F(0, 0).

Ponto D(0, 2).

Ponto B(1, 0).

Encontrando as equações das retas **r** e **s**:

$m_r = \frac{1}{2}$

$y - y_D = m_r.(x - x_D) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}.(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 2$

$m_s = -3$

$y - y_B = m_s.(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = -3.(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3$

Como o ponto **A** está sobre **r**, temos:

$r\colon y = \frac{x}{2} + 2$

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x = -4$

$A(-4, 0)$

O ponto **E** está sobre **s**. Então:

$s\colon y = -3x + 3$

$x = 0 \Rightarrow y = -3 . 0 + 3 \Rightarrow y = 3$

$E(0, 3)$

O ponto **C** é a interseção de **r** com **s**:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 2 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

$\frac{x}{2} + 2 = -3x + 3 \Rightarrow \frac{7}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

$y = \frac{1}{2}.\frac{2}{7} + 2 = \frac{15}{7}$

$C\left(\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right)$

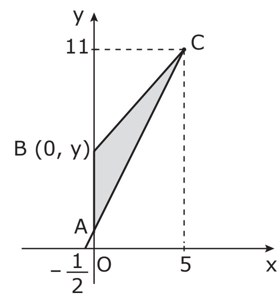
Agora podemos encontrar a área **S** da região hachurada, que será dada pela soma das áreas dos triângulos CDE e ADF. Assim:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{15}{7} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{7}\right| + \frac{1}{2}.|-8| = \frac{29}{7} \text{ u.a.}$$

Questão 10 – Letra D

Comentário:



$$m_{AC} = \frac{11 - 0}{5 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$\overleftrightarrow{AC}\colon y - 0 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2x + 1$

Então, A (0, 1).

Seja **y** a ordenada do ponto **B**, a área **S** do triângulo ABC é dado por:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & y & 1 \\ 5 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.|5 - 5y| \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}.|5 - 5y| \Rightarrow$$

$20 = |5 - 5y| \Rightarrow y = -3$ ou $y = 5$

Como $y > 0$, então $y = 5$.

Seção Enem

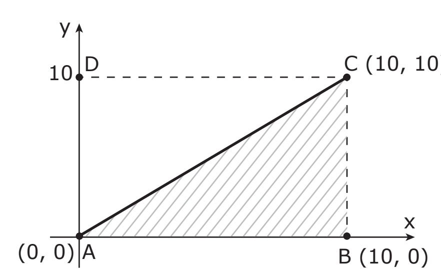
Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Tomemos os pontos **A**, **B**, **C** e **D** na figura:



A região sombreada é a solução do sistema entre as retas:

$\overline{AB}\colon y = 0$

$\overline{CD}\colon y = 10$

$\overline{AD}\colon x = 0$

$\overline{BC}\colon x = 10$

$\overline{AC}\colon y = x$

Se observarmos a região sombreada, veremos:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 10 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq 10$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 10$$

MATEMÁTICA

Na reta $\overline{AC}$: $x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$

Da interseção das três inequações, podemos afirmar que $0 \leq x \leq y \leq 10$.

A parte estabelecida na questão é um subconjunto da região encontrada. Contudo, satisfaz a condição estabelecida.

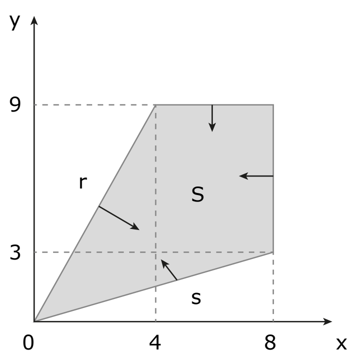
Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:



Na figura, temos que os limites superiores são:

$y \leq 9$ e $x \leq 8$

As equações das retas **r** e **s** são:

$$r: y - 0 = \frac{9-0}{4-0}.(x-0) \Rightarrow y = \frac{9}{4}x$$

$$s: y - 0 = \frac{3-0}{8-0}.(x-0) \Rightarrow y = \frac{3}{8}x$$

As inequações são:

$$y \leq \frac{9}{4}x \Rightarrow 4y \leq 9x \Rightarrow 4y - 9x \leq 0$$

$$y \geq \frac{3}{8}x \Rightarrow 8y \geq 3x \Rightarrow 8y - 3x \geq 0$$

Logo, $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$.

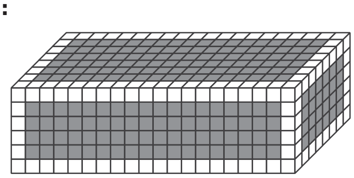
MÓDULO – C 13

Prismas

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário:



Os cubos com casca em apenas uma face são internos aos cubos que estão nas arestas.

Logo, o total é de $2(18 . 3 + 18 . 6 + 6 . 3) = 360$.

Questão 02 – Letra B

Comentário: O volume **V** de uma caixa-d'água que tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões $a = 3{,}20$ m, $b = 2{,}00$ m e $c = 1{,}25$ m é:

$V = abc \Rightarrow$

$V = 3{,}20 . 2{,}00 . 1{,}25 \Rightarrow$

$V = 8 \text{ m}^3 \Rightarrow V = 8\,000$ L

Portanto, a capacidade dessa caixa é de 8 000 litros.

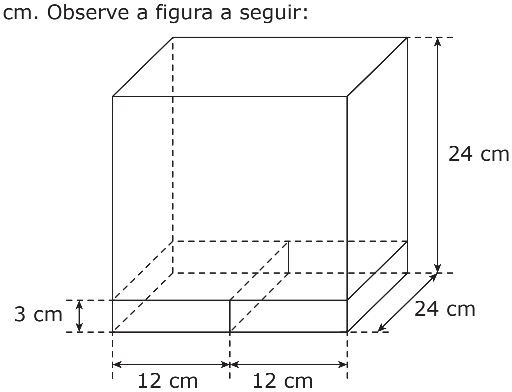
Questão 03 – Letra C

Comentário: O volume **V** da piscina, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo, é:

$500 . 250 . 30 = 3\,750\,000 \text{ dm}^3 = 3\,750\,000$ litros

Questão 04 – Letra D

Comentário: Em cada caixa, há duas pilhas de livros. Logo, podemos concluir que as arestas das caixas têm medida igual a 24 cm. Observe a figura a seguir:



A altura da caixa é igual a 24 cm e cada livro possui espessura de 3 cm. Logo, em cada pilha, há $\frac{24 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 8$ livros. Como temos duas pilhas de livros, cada caixa contém $2 . 8 = 16$ livros.

Portanto, no total de 45 caixas, temos $45 . 16 = 720$ livros.

Questão 05 – Letra D

Comentário: O volume da caixa-d'água é $5 \text{ m}^3 = 5\,000 \text{ dm}^3$. A lata é feita de uma base quadrada, logo seu volume é:

$V = A_b . h \Rightarrow$

$V = 40 . 40 . 50 \Rightarrow$

$V = 80\,000 \text{ cm}^3 = 80 \text{ dm}^3$

Sendo **n** o número de vezes que Laércio vai ao poço, ele irá transportar $n.80 \text{ dm}^3$ de água. Como queremos que $n.80 > 5\,000$, o menor inteiro que satisfaz tal relação é 63.

Questão 06 – Letra B

Comentário: Sendo **x** a aresta do cubo menor, temos que:

$x^3 = 343 \Rightarrow x = 7$ cm

Assim, sendo **y** a aresta do cubo maior, $y = 9$ cm. Portanto, a área total será:

$6y^2 = 486 \text{ cm}^2$

Questão 07 – Letra C

Comentário: A área total S_1 do paralelepípedo é:

$$S_1 = 2(2\ .\ 4 + 2\ .\ 4 + 4\ .\ 4)$$

$$S_1 = 64\,cm^2$$

Pela figura podemos perceber que há uma parte da aresta superior encoberta pelo prisma triangular. A área dessa parte é:

$$\frac{2\ .\ 4}{2} = 4\,cm^2$$

Portanto, a área visível do paralelepípedo é 64 – 4 = 60 cm². Usando o Teorema de Pitágoras, teremos que:

$$MN = 2\sqrt{5}\ cm$$

Sendo assim, a área visível do prisma triangular, S_2, será:

$$S_2 = \frac{2\ .\ 4}{2} + 2\ .\ 4 + 4\ .\ 4 + 4\ .\ 2\sqrt{5}$$

$$S_2 = 28 + 8\sqrt{5}$$

$$S_2 = 28 + 8\ .\ 2{,}2$$

$$S_2 = 45{,}6\,cm^2$$

Então, a área total da superfície do sólido é:

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = 105{,}6\,cm^2$$

Questão 08 – Letra A

Comentário: Pela figura percebemos que a base do prisma é um triângulo isósceles em que sua base mede 8 m. Traçando a altura relativa a essa base, notamos que ela também será mediana. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = 5\ m$$

A área total, **S**, do telhado será:

$$S = 2\ .\ 30\ .\ 5 = 300\ m^2 = 3\ .\ 10^6\ cm^2$$

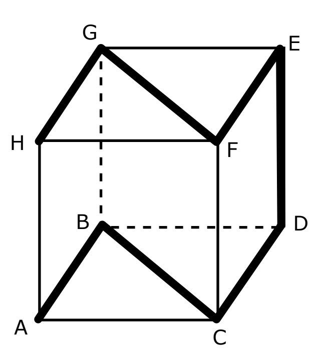
Portanto, a quantidade de telhas necessárias é:

$$n = \frac{3\ .\ 10^6}{15\ .\ 20} = \frac{3\ .\ 10^6}{3\ .\ 10^2} = 10^4$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir:



Sendo ABCDEFGH o caminho percorrido pela partícula, temos que AB = CD = DE = EF = GH = 1.

No triângulo ABC, temos:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}$

De forma análoga, no triângulo EFG, temos que FG = $\sqrt{2}$.

Logo, a distância **d** percorrida é:

$d = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH \Rightarrow$

$d = 1 + \sqrt{2} + 1 + 1 + 1 + \sqrt{2} + 1 = 5 + 2\sqrt{2}$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Como 18 000 L = 18 m³, $c = 2\ell$ e $h = \frac{\ell}{3}$, temos:

$$c.\ell.h = 18 \Rightarrow 2\ell.\ell.\frac{\ell}{3} = 18 \Rightarrow \ell^3 = 27 \Rightarrow \ell = 3\ m$$

Questão 03 – Letra E

Comentário: A aresta da base do prisma hexagonal vale 2.

A área da base A_B do prisma hexagonal é seis vezes a área do triângulo equilátero de lado 2. Assim:

$$A_B = 6.\frac{(2)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 6\sqrt{3}$$

Como a altura h do prisma hexagonal é 2, o volume **V** do prisma é:

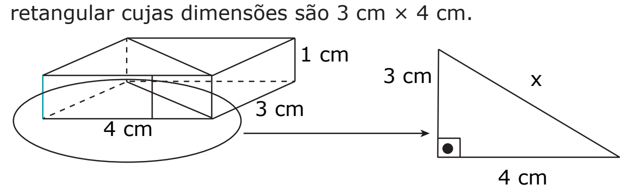
$V = A_B\ .\ h = 6\sqrt{3}\ .\ 2 = 12\sqrt{3}$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Primeiramente, vamos calcular a área total A_1 do prisma antes da separação:

$A_1 = 2(4\ .\ 3 + 4\ .\ 1 + 3\ .\ 1) = 2(12 + 4 + 3) = 38\ cm^2$

Considere a imagem a seguir para encontrar a diagonal da face retangular cujas dimensões são 3 cm × 4 cm.



Como o paralelepípedo é reto-retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a medida **x**:

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 9 + 16 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ cm

Portanto, na área total A_1 foram adicionadas duas faces de dimensões 5 cm × 1 cm.

Logo, a área A_2, após a separação, é dada por:

$A_2 = A_1 + 2\ .\ 5\ .\ 1 = 38 + 10 = 48\ cm^2$

Portanto, o aumento da área é:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{48}{38} \cong 1{,}26 = 26\%$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: ABCDEF é um prisma triangular, cujo volume **V** é determinado por:

$$V = A_b.h = \frac{DC.DD'}{2}.AD = \frac{2\ .\ 4}{2}.2 = 8\ cm^3$$

Questão 06 – Letra C

Comentário: Se chamarmos as medidas do paralelepípedo de **a**, **b** e **c**, sendo **a** largura e **b** a altura, teremos que o volume será:

$V_1 = abc$

Como as dimensões do novo paralelepípedo serão 1,1a, 1,1b e 0,8c, o novo volume V_2 será:

$V_2 = 1{,}1a \,.\, 1{,}1b \,.\, 0{,}8c = (1{,}1)^2 \,.\, 0{,}8abc$

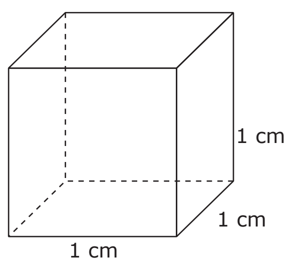
$V_2 = 0{,}968abc$

$V_2 = 0{,}968V_1$

Como $V_2 = 96{,}8\%V_1$, houve uma redução de aproximadamente 3%.

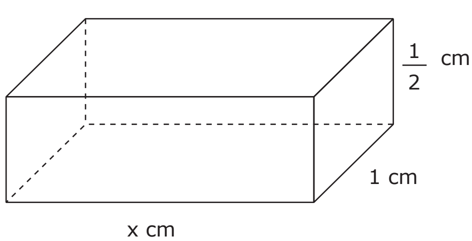
Questão 07 – Letra D

Comentário: Um cubo de volume igual a 1 cm^3 tem as seguintes dimensões:



Ele será transformado em um paralelepípedo cuja largura é igual à aresta do cubo, e a altura corresponde a 50% da aresta do cubo.

Logo:



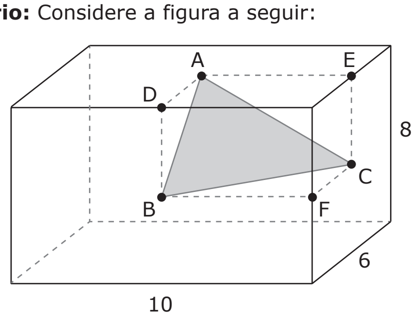
Como não houve perda do volume original, temos que os volumes do paralelepípedo e do cubo são iguais. Assim, podemos determinar o comprimento **x**:

$$x \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 1 = 1 \Rightarrow$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:



Temos que os triângulos ADB, BFC e AEC são retângulos em **D**, **F** e **E**, respectivamente, então pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$\triangle ADB$:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$ cm

$\triangle BFC$:

$BC^2 = BF^2 + CF^2 \Rightarrow BC^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \Rightarrow BC = \sqrt{34}$ cm

$\triangle AEC$:

$AC^2 = AE^2 + EC^2 \Rightarrow AC^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow AC = \sqrt{41}$ cm

Logo, o perímetro **P** do triângulo ABC é igual a:

$P = AB + BC + AC = 5 + \sqrt{34} + \sqrt{41} \cong 17$ cm

Portanto, 16 cm < P < 18 cm.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Em 2 horas, ou seja, 120 minutos, o tanque é preenchido com:

$$\frac{1\,000 \,.\, 120}{15} = 8\,000 \, dm^3$$

Sendo **h** o nível atingido pelo óleo, temos:

$$8\,000 = 80 \,.\, 30 \,.\, h$$

$$h = \frac{10}{3} \, dm = \frac{100}{3} \, cm \cong 33 \, cm$$

Questão 10 – Letra B

Comentário: Sendo **k** a razão entre as medidas lineares, a razão entre as medidas superficiais será k^2 e entre as medidas cúbicas será k^3. Logo:

$$k^3 = 2 \text{ e } k = \sqrt[3]{2}$$

Como a área total é uma medida superficial, a razão entre estas será:

$$k^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$$

Questão 11 – Letra B

Comentário: Sejam V_b e V_o os volumes, em cm^3, do bloco e do orifício. Foi exigido que o volume do bloco e o volume do orifício têm de ser iguais, ou seja, $V_b = V_o$.

Sendo **V** o volume, em cm^3, do bloco não vazado, temos:

$V_b = V_o \Rightarrow V - V_o = V_b = V_o \Rightarrow V = 2.V_o \Rightarrow$

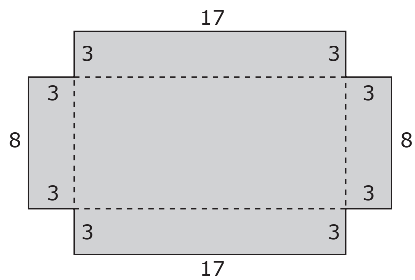
$(80)^3 = 2.L^2.80 \Rightarrow L = 40\sqrt{2}$, pois $0 < L < 80$

Portanto, o lado do orifício vale $40\sqrt{2}$ cm.

Questão 12

Comentário:

A) Observe a figura a seguir, que representa a folha de papelão após a retirada de um quadrado de lado igual a 3 u.c. de cada canto:



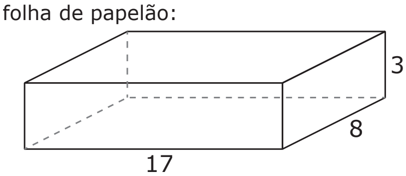
Logo, o perímetro da folha será:

$2 \cdot 17 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 74$ u.c.

B) A área da folha após a retirada dos quadrados é igual a:

$$A = 23 \cdot 14 - 4 \cdot \underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{Área do quadrado}} \Rightarrow A = 286 \text{ u.a.}$$

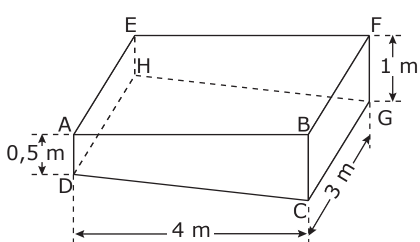
C) Observe a figura a seguir, que representa a caixa formada com a folha de papelão:



O volume da caixa é $17 \cdot 8 \cdot 3 = 408$ u.v.

Questão 13 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:



A piscina desenhada anteriormente é um prisma cuja base ABCD é um trapézio retângulo. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é:

$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = \frac{(1 + 0,5) \cdot 4}{2} \cdot 3 \Rightarrow V = 9 \text{ m}^3\text{, ou seja, } V = 9\,000 \text{ litros.}$$

Questão 14

Comentário: Observe, na figura, que o retângulo ABCD tem um lado que coincide com a aresta $\overline{DC}$ do cubo. Logo, podemos encontrar o valor de $\overline{AD}$ usando a área do retângulo:

$A_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow 32\sqrt{5} = AD \cdot 8 \Rightarrow AD = 4\sqrt{5}$ dm

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AED, obtemos:

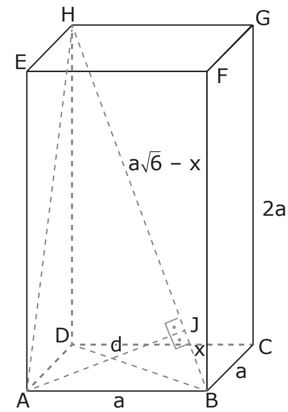
$$AE^2 + ED^2 = AD^2 \Rightarrow AE^2 + 8^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow AE^2 = 80 - 64 \Rightarrow AE = 4 \text{ dm}$$

Sendo o volume de água contido nesse cubo igual ao volume de um prisma de altura $\overline{DC}$ e base triangular AED, temos:

$$V_{água} = A_{AED} \cdot DC = \frac{4 \cdot 8}{2} \cdot 8 = 128 \text{ dm}^3$$

Questão 15 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle$BDH, temos que a diagonal $BH = a\sqrt{6}$. Seja d a distância do ponto A à diagonal BH e BJ = x, temos que os triângulos AJH e AJB são retângulos. Logo, utilizando as relações métricas no $\triangle$ABH, temos:

$$d^2 = \left(a\sqrt{6} - x\right) \cdot x \Rightarrow$$
$$d^2 = ax\sqrt{6} - x^2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle$ABJ, temos $a^2 = d^2 + x^2$. Logo:

$$\begin{cases} d^2 = ax\sqrt{6} - x^2 \\ a^2 = d^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = ax\sqrt{6} - x^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = ax\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Substituindo x em uma das equações do sistema:

$$d^2 = a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{6} - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 \Rightarrow$$

$$d^2 = a^2 - \frac{6a^2}{36} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

Seção Enem

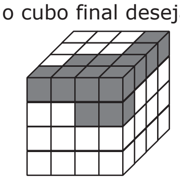
Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

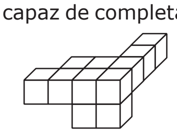
Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Observe o cubo final desejado:



Nele, foram hachuradas as peças faltantes em relação à peça existente. Logo, a peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$ é:



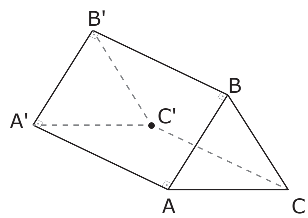
Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário:



A forma geométrica é um prisma triangular, pois possui base ABC e A'B'C' paralelas e as faces laterais são paralelogramos.

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O volume da piscina olímpica é igual a:

$V = 3 . 25 . 50 = 3\,750\ m^3$

E o volume da piscina original do clube é:

$V = 50 . 20 . 2 = 2\,000\ m^3$

Portanto, após a reforma, a piscina olímpica superará a capacidade da piscina original em $\frac{3\,750}{2\,000} = 1{,}875$, ou seja, em torno de 88%.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O volume total de petróleo contido no reservatório é $60 . 10 . 10 = 6{,}0 . 10^3\ m^3$.

Desse volume, após o vazamento, restarão apenas:

$\frac{2}{3} . 60 . 10 . 7 = 2{,}8 . 10^3\ m^3$

Logo, o volume de petróleo derramado terá sido de:

$6{,}0 . 10^3 - 2{,}8 . 10^3 = 3{,}2 . 10^3\ m^3$

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Sejam **a** e **b** as medidas das arestas da base dessa caixa-d'água e **c** a medida de sua altura, temos que o volume do modelo antigo é:

$V_{Antigo} = a.b.c$

O novo modelo terá as medidas das arestas da base duplicadas, ou seja, passam a ser 2a e 2b, portanto o volume novo será:

$V_{Novo} = 2a.2b.c = 4abc = 4 . V_{Antigo}$

Questão 06 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como o silo tem 2 m de altura, a largura do topo deve ser 1 m maior do que a largura do fundo. Como a largura do topo tem 6 m de largura, a largura do fundo mede 5 m. Logo, podemos calcular o volume do silo como o volume de um prisma reto trapezoidal:

$$V = \frac{(B + b)h}{2} . C = \frac{(6 + 5) . 2}{2} . 20 = 220\ m^3$$

Como cada tonelada de forragem ocupa 2 m³, 220 m³ podem ser ocupados por, no máximo, 110 toneladas de forragem.

Questão 07 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Se a aresta do cubo de baixo mede **L**, então o seu volume é L^3. Como a aresta do cubo de cima mede metade da anterior, seu volume será $\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{L^3}{8}$, ou seja, ele corresponde a um oitavo do volume do cubo de baixo. Consequentemente, a torneira levará um oitavo do tempo para encher o cubo de cima. Como ela levou 16 minutos para encher totalmente o de baixo, para encher o de cima, serão necessários 2 minutos. Logo, o tempo restante para que a torneira encha o restante do depósito é de 10 minutos.

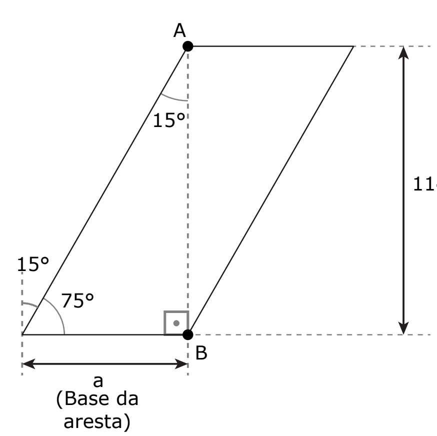
Questão 08 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Considere a figura extraída da geometria da situação:



$\text{tg } 15° = \frac{a}{114} = 0{,}26 \Rightarrow a = 29{,}64$

Logo, a área da base será de $(29{,}64)^2\ m^2 > 700\ m^2$.

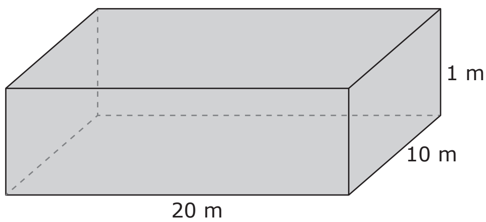
Questão 09 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Observe a figura a seguir:



Serão impermeabilizados o fundo e as laterais da piscina, logo:

$$\begin{cases} A_{Fundo} = 20\,.\,10 = 200\ m^2 \\ A_{Lateral} = (10\,.\,1 + 20\,.\,1).2 = 60\ m^2 \end{cases} \Rightarrow A_{Total} = 260\ m^2$$

Como 1 L é suficiente para 1 m^2, serão necessários $\frac{260}{10} = 26$ latas do fornecedor **A** e $\frac{260}{15} \cong 17,33 = 18$ latas do fornecedor **B**.

Logo, os custos de **A** e **B** serão, respectivamente, iguais a 26 . 100 = R$ 2 600,00 e 18 . 145 = R$ 2 610,00.

Serão utilizadas 26 latas, e o menor custo será de **A**.

Questão 10 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Se o paralelepípedo e o cubo têm o mesmo volume, então:

$V_p = V_c \Rightarrow 3\,.\,18\,.\,4 = a^3 \Rightarrow a = 6$ cm

MÓDULO – C 14

Cilindros

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: A área lateral **S** é dada por:

$$S = 2\pi Rh \Rightarrow S = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2} = \frac{6}{\sqrt{3}}\pi\,cm^2$$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Como os volumes das latas são iguais, temos:

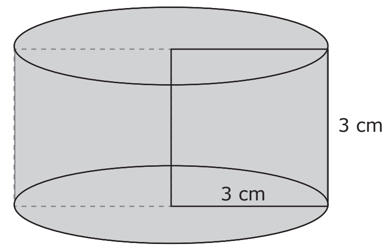
$V_1 = V_2 \Rightarrow \pi 6^2 h = \pi 8^2\,.\,4 \Rightarrow$

$$h = \frac{64\,.\,4}{36} = \frac{64}{9} \Rightarrow$$

$h \cong 7,11$ cm

Questão 03 – Letra E

Comentário: Na figura a seguir, observe que temos um cilindro cujo raio da base mede 3 cm e cuja altura também mede 3 cm.



Logo, o volume do sólido será:

$V = A_{base}\,.\,h = (\pi\,.\,3^2).\,3 = 27\pi\ cm^3.$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Podemos observar que, com 8 copos de 300 mL, a jarra fica completamente cheia. Logo, o seu volume é igual a 8 . 300 = 2 400 mL = 2 400 cm^3.

Como a jarra tem uma altura de 30 cm, sua área da base é igual a:

$A_{base}.\underbrace{30}_{altura} = 2\,400 \Rightarrow A_{base} = 80\ cm^2$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Sendo seu raio **R** da base do cilindro igual a 25 cm e a altura **H** desse sólido igual a 60 cm, para determinar sua massa, basta calcular sua área total, excluindo a tampa. Logo:

$A = A_L + A_B \Rightarrow A = 2\pi RH + \pi R^2$

$A = 2\pi\,.\,25\,.\,60 + \pi.25^2 \Rightarrow A = 50\pi\,.\,60 + 625\pi \Rightarrow$

$A = 3\,000\pi + 625\pi \Rightarrow A = 3\,625\pi\ cm^2$

Para a produção da lata, utiliza-se um metal que possui 0,8 g/cm^2 de área, logo:

0,8 g — 1 cm^2

x — 3 625π cm^2

Cada lata possui uma massa de 2 900π g.

Questão 06 – Letra D

Comentário: O volume de cada vasilhame, sendo $\pi = 3$, é $V = 3.(0,4)^2.1 \Rightarrow V = 0,48\ m^3$.

A quantidade de vasilhames para encher 12 000 litros, ou 12 m^3, de látex é $\frac{12}{0,48} = 25$.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Na maquete, a coluna cilíndrica possui raio R = 1 cm e altura h = 9 cm. Logo, essas duas medidas, em metros, utilizando a escala dada, serão:

$R = 1\,.\,100 = 100$ cm $\Rightarrow R = 1$ m

$h = 9\,.\,100 = 900$ cm $\Rightarrow R = 9$ m

A quantidade de concreto utilizada na coluna será igual ao volume do cilindro. Considerando $\pi = 3,14$, temos:

$V = \pi R^2.h \Rightarrow V = 3,14\,.\,1^2\,.\,9 \Rightarrow V = 28,26\ m^3.$

Questão 08 – Letra D

Comentário: Sabemos que a área lateral de um cilindro é dada por:

$$S_L = 2\pi Rh \Rightarrow 5\pi = 2\pi Rh \Rightarrow Rh = \frac{5}{2}\ (I)$$

O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow$$

$$10\pi = \pi R^2 h \Rightarrow$$

$$R^2 h = 10\ (II)$$

Dividindo a expressão (II) por (I), chegamos a:

$$\frac{R^2h}{Rh} = \frac{10}{\frac{5}{2}} \Rightarrow R = 4\,m = 40\,dm$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: A quantidade de volume **v** que aumentou corresponde a 5% do total de volume **V** do tanque, assim:

$v = \pi.2^2.\ 0,25 = \pi\ m^3$

Logo, pela regra de três, temos que:

$$V \text{ — } 100\%$$

$$\pi \text{ — } 5\%$$

$$\frac{\pi\ .\ 100\%}{5\%} = 20\pi \cong 63\ m^3$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Seja r_A o raio do barril do tipo **A**.

Logo, $2\pi r_A = 2a \Rightarrow r_A = \frac{a}{\pi}$.

Com base no valor de r_A, encontramos o volume do barril do tipo **A**.

$$V_A = \pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^2.a \Rightarrow V_A = \frac{a^3}{\pi}$$

Seja r_B o raio do barril do tipo **B**.

Logo, $2\pi r_B = a \Rightarrow r_B = \frac{a}{2\pi}$.

Com base no valor de r_B, encontramos o volume do barril do tipo **B**.

$$V_B = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2.2a \Rightarrow V_B = \frac{a^3}{2\pi}$$

Portanto, $\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{a^3}{\pi}}{\frac{a^3}{2\pi}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = 2 \Rightarrow V_A = 2V_B$.

Questão 03 – Letra A

Comentário: O volume do objeto inserido corresponde ao produto da base do tanque pela variação da altura. Logo, se o raio da base do cilindro é 10 cm e o nível subiu 10 cm, o volume é:

$$V_{objeto} = \pi.10^2\ .\ 10 = 1\,000\pi\ cm^3$$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Pode ser mostrado de forma rigorosa que o semiplano α divide o cilindro em duas partes de volumes iguais. No entanto, intuitivamente, se pensarmos na simetria do problema, tal argumento é razoável. Dessa maneira, sendo **V** o volume do cilindro, temos:

$$V = \pi.2^2\ .\ 10 = 40\pi\ cm^3$$

Logo, o volume entre a base inferior e o plano α é:

$$V = \frac{40\pi}{2} = 20\pi\ cm^3$$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Como o retângulo tem perímetro de 40 cm, suas medidas podem ser escritas como **x** e (20 – x).

A área **S** do retângulo será, portanto:

$$S = x.(20 - x) \Rightarrow S = -x^2 + 20x$$

O máximo valor de **S** ocorre quando x = 10. Logo, o retângulo de área máxima será um quadrado de lado 10 cm. Ao rotacionar o quadrado em torno de um dos seus lados, forma-se um cilindro de raio e altura iguais a 10 cm.

O volume desse cilindro será:

$$V = \pi.10^2\ .\ 10 = 1\,000\pi\ cm^3$$

Questão 06 – Letra D

Comentário: Para calcular a despesa da construção da calçada, basta determinar o volume de material utilizado e, para isso, devemos calcular o volume da calçada. Logo, basta, do volume do jardim adicionado ao da calçada, subtrairmos o volume do jardim, assim:

$$V_{calçada} = V_{jardim\ +\ calçada} - V_{jardim} \Rightarrow$$

$$V_{calçada} = \pi\ .\ 9^2\ .\ 0,1 - \pi\ .\ 8^2\ .\ 0,1 \Rightarrow$$

$$V_{calçada} = 8,1\pi - 6,4\pi \Rightarrow$$

$$V_{calçada} = \pi(8,1 - 6,4) \Rightarrow$$

$$V_{calçada} = \underbrace{\pi}_{3,14}.1,7 \Rightarrow$$

$$V_{calçada} = 5,338\ m^3$$

O preço médio do m³ é de R$ 100,00, logo o gasto na construção da calçada foi de 5,338 . 100 = 533,80 reais.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Sendo o índice 1 referente à antiga lata e o índice 2 referente à nova lata, teremos que:

$$V_1 = V_2 \text{ e } r_2 = 2r_1$$

Assim,

$$\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \Rightarrow$$

$$r_1^2 h_1 = (2r_1)^2\ h_2 \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{h_1}{4}$$

Logo, a medida da nova altura é um quarto da medida da altura das latas antigas.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Os volumes do paralelepípedo e do cilindro são $V_1 = 4x^2$ m³ e $V_2 = \pi(0,5)^2.4 = \pi$ m³.

Como $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$, temos que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{4x^2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Sendo o índice 1 referente à antiga lata e o índice 2 referente à nova lata 2, teremos que:

$h_1 = h_2$

$v_1 = 1 = \pi h_1 r_1^2$

$v_2 = 0,5 = \pi h_2 r_2^2$

$$\frac{1}{0,5} = \frac{\pi h_1 r_1^2}{\pi h_2 r_2^2} \Rightarrow \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2r_1}{2r_2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Questão 10 – Letra A

Comentário: O comprimento da circunferência da base é de 31 cm, então o raio **r** do cilindro mede:

$31 = 2.\pi.r \Rightarrow r = 5$ cm

Logo, o volume V do cilindro é igual a:

$V = 3,1 \,.\, 5^2 \,.\, 20 = 1\,550$ cm³

Questão 11 – Letra D

Comentário: Analisando cada uma das afirmativas, temos:

Verdadeira. O raio do cilindro é de 4 m e seu volume 314 m³. Portanto, $V = \pi r^2 h \Rightarrow 314 = 3,14.(4)^2.h \Rightarrow h = 6,25$ m.

Falsa. O lado maior do cilindro planificado será aquele que corresponde ao comprimento da circunferência, que será:

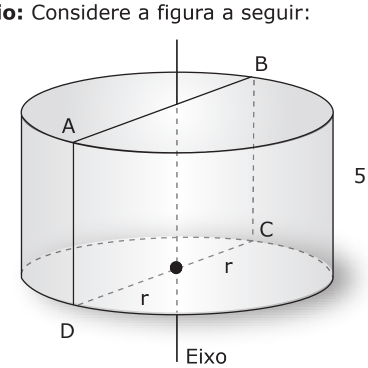
$x = 8 \,.\, 3,14 = 25,12$ m

Verdadeira. O número **n** de chapas utilizadas é:

$$n = \frac{25,12 \,.\, 6,25}{3,15 \,.\, 1,56} \cong 32$$

Questão 12 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



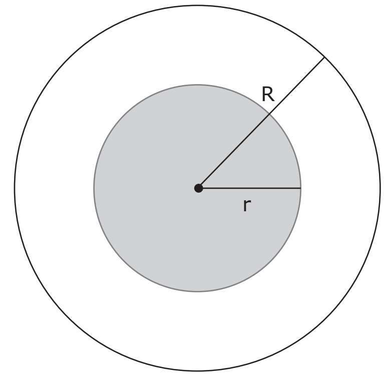
Temos que $A_B = A_{ABCD} \Rightarrow \pi r^2 = 2r \,.\, 5 \Rightarrow r = \frac{10}{\pi}$.

Logo, o volume do cilindro é:

$$V = \pi r^2 \,.\, 5 \Rightarrow V = \pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 .\, 5 \Rightarrow V = \frac{500}{\pi} \text{ cm}^3$$

Questão 13 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir:



Seja **V** o volume da coroa cilíndrica e **h** a altura, temos:

$V = \pi(R^2 - r^2).h \Rightarrow 4,25\pi = \pi(R^2 - r^2).4 \Rightarrow$

$R^2 - r^2 = 1,0625$ (I)

De acordo com o enunciado, temos que: $R + r = 4,25$ (II)

Logo, a área total **A** é de:

$A = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi \,.\, 4(R + r) = \Rightarrow$

$$2\pi \,.\, \underset{(I)}{1,0625} + 8\pi \,.\, \underset{(II)}{4,25} = 36,125\pi \text{ cm}^2$$

Questão 14 – Letra A

Comentário: Sendo **h** a altura dos cilindros menores, e como a altura do cilindro maior será o dobro dessa, então, igualando os volumes, chegamos a:

$N \,.\, \pi \,.\, 2^2 \,.\, h = \pi \,.\, 6^2 \,.\, 2h \Rightarrow N = 18$

Logo, $N > 15$.

Questão 15

Comentário:

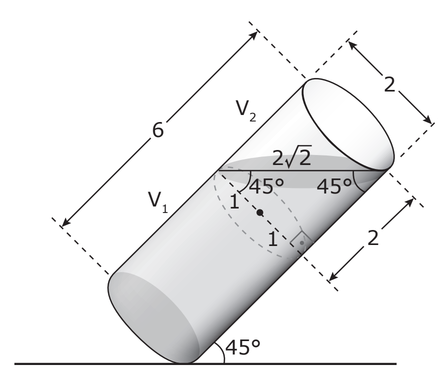
A) O lado **b** corresponde ao comprimento da circunferência. Logo, $b = D \,.\, \pi = 3,768$ m.

B) A altura **h** do retângulo será à altura **h** do cilindro. Como o volume deve ser de 1,5 m³ e o raio é de 60 cm, teremos que:

$$1,5 = \pi \,.\, (0,6)^2 \,.\, h \Rightarrow h = \frac{1,5}{3,14 \,.\, 0,36} = 1,33 \text{ m}$$

Questão 16

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.



O volume **V**, em m^3, que o cilindro pode conter antes de derramar é o volume V_1 mais a metade do volume V_2, pois a inclinação de 45° faz com que se tenha a metade do volume V_2.

Assim:

$$V = V_1 + \frac{V_2}{2} \Rightarrow$$

$$V = \pi(1)^2 . 4 + \frac{\pi(1)^2 . 2}{2} \Rightarrow$$

$$V = 5\pi \text{ m}^3$$

Seção Enem

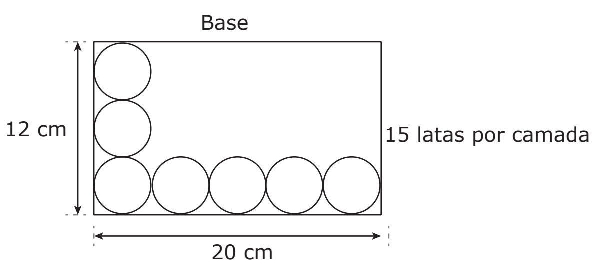
Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Para maximizar o número de potes, o modelo escolhido deve ter base retangular com dimensões que são múltiplos inteiros de 4 cm, que é o diâmetro do pote.



Como a altura da caixa organizadora é 12 cm, podemos colocar duas camadas, pois a altura da lata é 6 cm. Portanto, o modelo IV permite armazenar 30 potes, sendo este o maior número possível.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: A diagonal RS é o comprimento da circunferência da base do cilindro de raio igual a 0,2 m. Logo:

$$RS = 2 . \pi . 0,2 = 1,24 \text{ m}$$

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O volume da cisterna atual é de:

$$V = \pi . 1^2 . 3 \cong 9 \text{ m}^3$$

Mantendo-se a altura dessa cisterna, para que ela comporte 81 m^3, o raio da sua base deverá ser:

$$\pi . r^2 . 3 = 81 \Rightarrow r \cong 3 \text{ m}$$

O aumento deverá ser, então, de 2 metros.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Calculando os volumes V_1 e V_2, temos:

$V_1 = \pi . 6^2 . 4$ e $V_2 = \pi . 3^2 . x$

Como $V_1 = 1,6 . V_2$, temos que:

$$\pi . 6^2 . 4 = 1,6 . \pi . 3^2 . x \Rightarrow 144\pi = 14,4\pi x \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Questão 05 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Antes da construção da ilha, temos:

$\sqrt{6} \cong 2,45$

$V_{Piscina} = 12 \text{ m}^3$

$\frac{\pi}{3}.R^2.1 = 12 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \text{ m}$

Assim, após a construção da ilha, devemos ter:

$V_{Água} \geq 4 \text{ m}^3$

$$\frac{\pi}{3}.(2^2 - r^2).1 \geq 4 \Rightarrow 4 - r^2 \geq \frac{4}{3} \Rightarrow r^2 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow 0 < r \leq 1,63$$

Logo, o raio máximo da ilha deve ser, aproximadamente, igual a 1,6 m.

Questão 06 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O volume do copo em que será colocada a mistura é:

$$V_{Copo} = \pi . 2^2 . 10 \cong 3 . 4 . 10 = 120 \text{ cm}^3 = 120 \text{ mL}$$

Sejam **x** e **y** os volumes de açúcar e de água, em mL, respectivamente, que compõem a mistura. Sabemos que, para fazer a mistura, devemos usar uma parte de açúcar para cada cinco partes de água; logo, considerando que não houve redução de volume ao se dissolver o açúcar na água, temos:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 120 \\ 5x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 100 \end{cases}$$

Portanto, a quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de 100 mL.

Questão 07 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Seja V_c o volume, em cm^3, de café que será colocado no copinho de plástico. Logo:

$$V_c = \frac{1}{2}\pi r^2 h \Rightarrow V_c = \frac{1}{2}\pi(2)^2 . 4 \Rightarrow V_c = 8\pi$$

Seja V_L o volume, em cm³, da leiteira. Logo:

$V_L = \pi R^2 H \Rightarrow$

$V_L = \pi(4)^2 \cdot 20 \Rightarrow$

$V_L = 320\pi$

Como a diarista precisa preencher 20 copinhos de plástico, temos que ela precisa fazer $20 \cdot 8\pi = 160$ cm³ de café, que representa a metade da leiteira.

Questão 08 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Sejam A_1 e V_1 a área lateral e o volume do cilindro 1, respectivamente. Com base nisso, temos:

$A_1 = 2\pi r_1 h_1 \Rightarrow A_1 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow A_1 = 24\pi$ m² e

$V_1 = \pi r_1{}^2 h_1 \Rightarrow V_1 = \pi(2)^2 \cdot 6 \Rightarrow V_1 = 24\pi$ m³

Analogamente, sejam A_2 e V_2, respectivamente, a área e o volume do cilindro 2 e A_3 e V_3 esses mesmos conceitos matemáticos correspondentes ao cilindro 3. Logo:

$A_2 = 2\pi r_2 h_2 \Rightarrow A_2 = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 \Rightarrow A_2 = 32\pi$ m² e

$V_2 = \pi r_2{}^2 h_2 \Rightarrow V_2 = \pi(2)^2 \cdot 8 \Rightarrow V_2 = 32\pi$ m³

$A_3 = 2\pi r_3 h_3 \Rightarrow A_3 = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 8 \Rightarrow A_3 = 48\pi$ m² e

$V_3 = \pi r_3{}^2 h_3 \Rightarrow V_3 = \pi(3)^2 \cdot 8 \Rightarrow V_3 = 72\pi$ m³

Portanto, a relação área/capacidade dos cilindros 1 e 2 é igual a 1, ao passo que, para o cilindro 3, temos uma relação $\frac{48\pi}{72\pi} = \frac{2}{3}$, ou seja, este tem menor custo de capacidade de armazenamento.

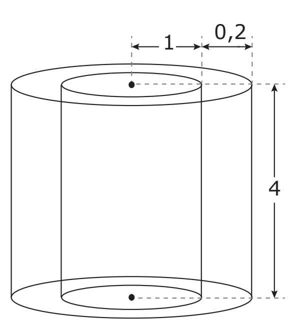
Questão 09 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: O volume de concreto pode ser calculado pela diferença entre o volume do cilindro externo e o cilindro interno.



Temos:

$V = \pi(R^2 - r^2)h = \pi(1,2^2 - 1^2).4 = 3,1 \cdot 0,44 \cdot 4 = 5,456$ m³

Se cada metro cúbico custa 10 reais, temos que o preço da manilha, em reais, é $5,456 \cdot 10 = 54,56$.

Questão 10 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Calculando os raios dos cilindros do tipo I e do tipo II, temos:

$C_I = 2\pi r_I \Rightarrow 20 = 2\pi r_I \Rightarrow \frac{10}{\pi} = r_I$

$C_{II} = 2\pi r_{II} \Rightarrow 10 = 2\pi r_{II} \Rightarrow \frac{5}{\pi} = r_{II}$

Sendo V_I e V_{II} os volumes dos cilindros do tipo I e do tipo II, respectivamente, temos que:

$V_I = \pi r_I^2 . h_I \Rightarrow V_I = \pi . \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 .10 \Rightarrow V_I = \frac{1\,000}{\pi}$ cm³ e

$V_{II} = \pi r_{II}^2 . h_{II} \Rightarrow V_{II} = \pi . \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 .20 \Rightarrow V_{II} = \frac{500}{\pi}$ cm³

O custo das velas do tipo I e do tipo II é diretamente proporcional aos volumes. Assim:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{\frac{1\,000}{\pi^2}}{\frac{500}{\pi^2}} = 2 \Rightarrow V_I = 2V_{II}$$

Como $V_I = 2V_{II}$, então o custo de produção de velas do tipo I é o dobro do custo de produção de velas do tipo II.

Questão 11 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Como a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume, as áreas dos segmentos circulares determinados por essas graduações nas bases do cilindro são iguais.

Assim, as graduações consecutivas diminuem conforme temos segmentos circulares mais próximos do centro da base do cilindro.

MÓDULO – C 15

Pirâmides

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: Seja uma pirâmide quadrangular e regular cujas arestas da base medem **a** e altura mede **h**. Temos que seu volume **V** é igual a:

$V = \frac{1}{3}.a^2.h \Rightarrow V = \frac{a^2.h}{3}$

Duplicando a medida da aresta e reduzindo à metade o valor da altura, temos uma nova pirâmide cujo volume V′ vale:

$$V' = \frac{1}{3}.(2a)^2.\frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$V' = \frac{2a^2.h}{3}$$

Fazendo a razão entre os volumes, temos que:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{a^2.h}{3}}{\frac{2a^2.h}{3}} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow V = 2V'$$

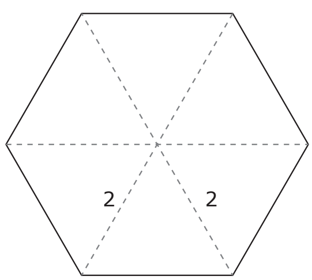
Logo, o volume da pirâmide será duplicado.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Como o prisma possui 17 faces e duas bases, o número de faces laterais é 15. Consequentemente, o polígono da base tem 15 lados. Tomando uma pirâmide com base de 15 lados, esta possui 15 arestas na base e 15 arestas laterais, totalizando 30 arestas.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:



A base da pirâmide é um hexágono regular, então a área da base A_b será igual a soma das áreas dos 6 triângulos equiláteros de lado 2 m, ou seja:

$$A_b = 6.\frac{2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,m^2$$

Sabendo que a altura h da pirâmide é de 3 m, logo:

$$v = 6.\frac{A_b.h}{3} = \frac{6\sqrt{3}.3}{3} = 6\sqrt{3}\,m^3$$

Portanto, a área da base e o volume dessa barraca medem, respectivamente, $6\sqrt{3}$ m² e $6\sqrt{3}$ m³.

Questão 04 – Letra C

Comentário: ACDH é uma pirâmide de base triangular. Se considerarmos sua base como ΔADC, teremos que seu volume **V** será:

$$V = \frac{S_{ADC}.DH}{3} = \frac{\frac{AD.DC}{2}.DH}{3} \Rightarrow$$

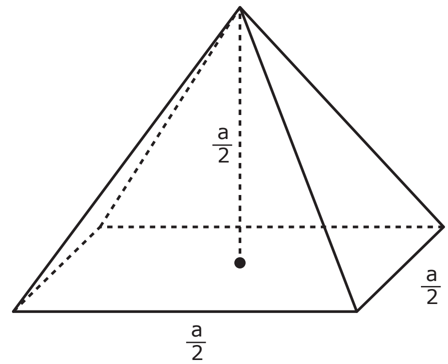
$$\frac{AD.DC.DH}{6} = \frac{3.10.6}{6} \Rightarrow$$

V = 30 u.v.

Questão 05 – Letra C

Comentário: A parafina é armazenada em caixas cúbicas de aresta **a**. Logo, o volume de parafina é igual a a^3.

A parafina será derramada em moldes em formato de pirâmides, o que está representado na figura a seguir:



Calculando o volume de cada molde, temos:

$$V_{Molde} = \frac{1}{3}.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a}{2} \Rightarrow V_{Molde} = \frac{a^3}{24}$$

Portanto, a quantidade de parafina pode encher $\frac{a^3}{\frac{a^3}{24}} = 24$ moldes.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Pelo enunciado e pelas propriedades das proporções, temos:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{6+4+2} = 3$$

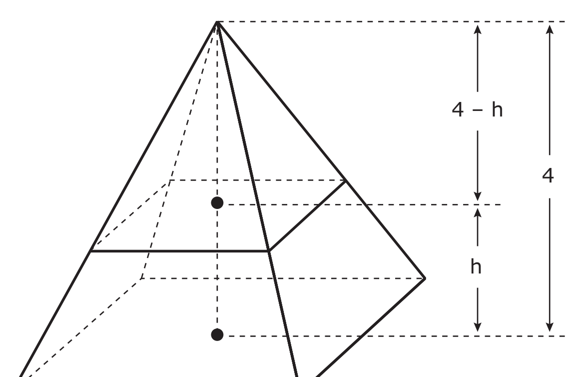
a = 18 cm; b = 12 cm; c = 6 cm

O volume **V** da pirâmide será o produto entre **a**, **b** e **c**, dividido por três.

$$V = \frac{abc}{3} = 432\ cm^3$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Na figura a seguir, temos uma pirâmide regular de base quadrangular e altura 4 cm secionada por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais.



Sejam **h** a altura do tronco da pirâmide e **V** o volume do tronco da pirâmide e da pirâmide pequena.

Assim, da semelhança das pirâmides grande e pequena, temos:

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{4}{4-h}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \frac{4}{4-h} \Rightarrow 4 - h = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow h = 4 - 2\sqrt[3]{4} \text{ cm}$$

Portanto, para que a pirâmide pequena tenha um volume igual ao tronco da pirâmide, temos de secionar a pirâmide grande por um plano paralelo ao plano da base, a uma altura de $4 - 2\sqrt[3]{4}$ cm do plano da base.

Questão 08 – Letra A

Comentário: As faces são triângulos equiláteros de lado igual 20 cm. Como serão pintadas três faces de platina e uma placa de prata, teremos que o preço total **P** será:

$$P = 50 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} + 30 \cdot 3 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = 50 \cdot 1\,700$$

$$P \cong \text{R\$ } 24\,000{,}00$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Sendo a pirâmide regular, a base será um quadrado de área $12 \cdot 12 = 144$ mm².

Usando do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado por apótema lateral, altura e apótema da base, que no caso medirá 6 mm por se tratara de um quadrado e ser metade do lado, temos que:

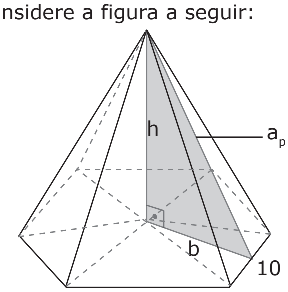
$$10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 8 \text{ mm}$$

Portanto, o volume **V** total da peça será:

$$V = \frac{144 \cdot 8}{3} - 78 \Rightarrow V = 306 \text{ mm}^2$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



Se a base da pirâmide está inscrita numa circunferência de raio 10 m, então os lados do hexágono regular medem 10 m.

Sabendo que a altura h da pirâmide é 30 m, temos que a apótema da base a_p será igual a:

$$a_p^2 = h^2 + b^2 \Rightarrow a_p^2 = 30^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$a_p^2 = 900 + 75 = 975 \Rightarrow a_p = 5\sqrt{39} \text{ m}$$

Portanto, a área **A** das faces triangulares é:

$$A = 6 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{39}}{2} = 150\sqrt{39} \text{ m}^2$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: O volume **V** da pirâmide é:

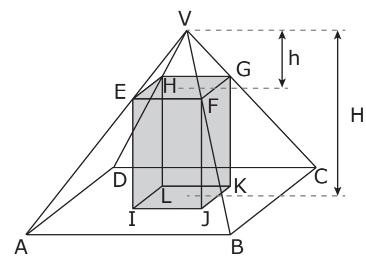
$$V = \frac{(2{,}2 \cdot 10^2)^2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^2}{3} = \frac{6{,}78 \cdot 10^6}{3} = 2{,}26 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

60 dias equivale a um sexto de ano. Sendo **t** o tempo, em anos, necessário para a construção da pirâmide, **t** é igual a:

$$\frac{2{,}26 \cdot 10^6}{t} = \frac{1{,}88 \cdot 10^4}{\frac{1}{6}} \Rightarrow t = \frac{1}{6} \cdot \frac{2{,}26 \cdot 10^6}{1{,}88 \cdot 10^4} = \frac{1{,}2 \cdot 10^2}{6} = 20 \text{ anos}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:



Temos que AB = 12 cm, EF = 4 cm e H = 15 cm, por razão de semelhança:

$$k = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3h = 15 \Rightarrow h = 5 \text{ cm}$$

Logo, o volume **V** de madeira é:

$$V = V_{\text{pirâmide}} - V_{\text{prisma}} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 15 - 4 \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$V = 720 - 160 = 560 \text{ cm}^3$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Como as faces laterais são triângulos equiláteros, a medida das arestas laterais é de 4 cm. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela altura **h** da pirâmide, o raio do quadrado (metade da diagonal) e a aresta lateral, temos:

$$h^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

O volume **V** da pirâmide será:

$$V = \frac{4 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{cm}^3$$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Como o plano é paralelo à base, as duas pirâmides formadas são semelhantes. Sendo **k** a razão entre as medidas lineares e k^3 a razão entre as medidas volumétricas, tem-se que:

$$k^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Chamando de **h** a altura da pirâmide menor,

$$\frac{2}{3} = \frac{h}{21} \Rightarrow h = 14 \text{ cm}$$

A distância é a diferença entre as duas alturas: 21 – 14 = 7 cm. Ou seja, um número primo.

MATEMÁTICA

Questão 07 – Letra B

Comentário: As faces laterais são triângulos equiláteros, de medida **q**. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pela altura **h**, a aresta lateral e pela metade da diagonal do quadrado (raio do quadrado), tem-se que:

$$q^2 = \left(\frac{q\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{q\sqrt{2}}{2}$$

Logo, o volume **V** da pirâmide é:

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{q^2 \cdot \frac{q\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{q^3\sqrt{2}}{6}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Como dito no enunciado, AD = 6 cm. Além disso, $\overline{DM}$ e $\overline{AM}$ são medianas de triângulos equiláteros. Portanto, também serão alturas. Assim, as medianas são tais que:

$$\overline{DM} = \overline{AM} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\text{ cm}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AMD chegamos a:

$$AD^2 = AM^2 + MD^2 - 2 \cdot AM \cdot MD \cdot \cos\left(A\hat{M}D\right) \Rightarrow$$

$$6^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(3\sqrt{3}\right)^2 \cdot \cos\left(A\hat{M}D\right) \Rightarrow$$

$$36 = 54 - 54 \cdot \cos\left(A\hat{M}D\right) \Rightarrow$$

$$\cos\left(A\hat{M}D\right) = \frac{1}{3}$$

Questão 09 – Letra C

Comentário: Seja **n** o número de lados do polígono da base. Logo, sabendo que as faces laterais de uma pirâmide qualquer são triângulos, teremos que:

$180°(n - 2) + n \cdot 180° = 3\,600° \Rightarrow$

$2n - 2 = 20 \Rightarrow$

$n = 11$ lados

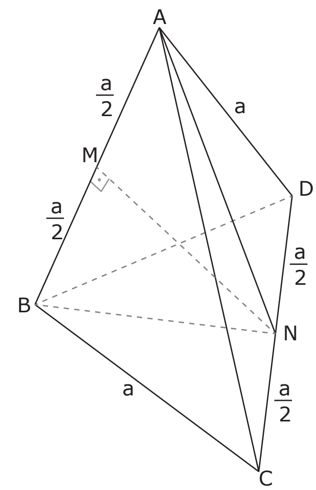
Questão 10 – Letra A

Comentário: Após o primeiro corte, cada um dos prismas congruentes tem a metade do volume do prisma maior. Isso pode ser visto pela razão entre as áreas da base, uma vez que as alturas são iguais. Portanto, o volume dos prismas congruentes é $\frac{1}{4}$ do volume do cubo. Após o segundo corte, cada um dos prismas congruentes é dividido em três pedaços, sendo dois deles congruentes – ao qual pertence o vértice – e com o volume sendo a metade do volume do outro pedaço. Então o volume da peça que contém o vértice **P** é:

$$V = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 12^3 = 144\text{ cm}^3$$

Questão 11 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir que representa a geometria da situação:



Sejam **M** e **N** os pontos médios das arestas reversas AB e CD do tetraedro de aresta **a**. Temos que o Δ ANB é isósceles, pois dois dos seus lados são alturas das faces do tetraedro. Logo:

$$AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Seja MN a distância entre as duas arestas reversas, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no Δ BNM. Assim:

$$(BN)^2 = (MN)^2 + (BM)^2 \Rightarrow (MN)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(MN)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow (MN)^2 = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Questão 12 – Letra D

Comentário: Como **M** é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, podemos escrever que $\overline{AM} = 0{,}5\ell$.

Sendo o triângulo ABV equilátero, VM é a altura e mediana.

Logo medirá $VM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Chamaremos de **H** a projeção de **V** sobre ABC. É fácil perceber que HV será a altura do poliedro. Além disso, $H \in CM$, uma vez que CM é mediana no triângulo ABC. Portanto, se atentarmos ao triângulo retângulo VHM, veremos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{VH}{VM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

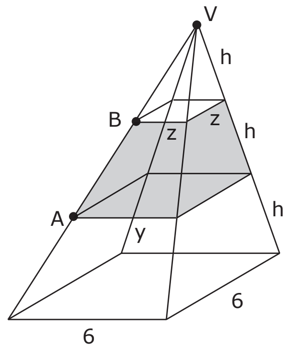
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{VH}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow VH = \frac{3\ell}{4}$$

Então o volume **V** da pirâmide será:

$$V = \frac{S_{ABC} \cdot VH}{3} = \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3\ell}{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{16}\ell^3$$

Questão 13 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:



Por semelhança:

$\frac{h}{3h} = \frac{z}{6} \Rightarrow z = 2$ cm

$\frac{V_1}{108} = \left(\frac{2}{6}\right)^3 \Rightarrow V_1 = 108 \cdot \frac{8}{216} = V_1 = 4\,cm^3$

$\frac{2h}{3h} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 4$ cm

$\frac{V_2}{108} = \left(\frac{4}{6}\right)^3 \Rightarrow V_2 = 108 \cdot \frac{64}{216} = 32\ cm^3$

Logo, o volume **V** da área compreendida entre os planos paralelos é:

$V = 32 - 4 = 28\ cm^3$

Questão 14 – Letra B

Comentário: O volume V do tetraedro AHFC será:

$V = V_{prisma} - V_{AEHF} - V_{ABCF} - V_{CFGH} - V_{DACH} \Rightarrow$

$$V = (4 \cdot 2 \cdot 3) - \frac{\frac{2 \cdot 4}{2} \cdot 3}{3} - \frac{\frac{2 \cdot 4}{2} \cdot 3}{3} - \frac{\frac{2 \cdot 4}{2} \cdot 3}{3} - \frac{\frac{2 \cdot 4}{2} \cdot 3}{3} \Rightarrow$$

$V = 24 - 16 = 8$ u.v.

Questão 15

Comentário:

A) Pela figura, sabemos que $C\hat{A}D = 60°$. Assim, usando a Lei dos Cossenos no ΔAND:

$$DN^2 = AN^2 + AD^2 - 2 \cdot AN \cdot AD \cdot \cos\left(N\hat{A}D\right) \Rightarrow$$

$$DN^2 = \left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + \ell^2 - 2 \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \ell \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow DN = \frac{\ell\sqrt{7}}{3}$$

B) Os triângulos BNA e DNA são congruentes por LAL. Portanto,

$$BN = \frac{\ell\sqrt{7}}{3} = DN.$$

Logo, o triângulo BDN é isósceles. Se atentarmos a sua base BD, podemos perceber que a altura relativa a essa base, de medida ℓ, também será mediana. Chamando o pé da altura por **H**, temos que HND é um triângulo retângulo. Sendo assim, usaremos do Teorema de Pitágoras:

$$DN^2 = HD^2 + HN^2 \Rightarrow \frac{7\ell^2}{9} = \frac{\ell^2}{4} + HN^2 \Rightarrow \frac{19\ell^2}{36} = HN^2 \Rightarrow HN = \frac{\ell\sqrt{19}}{6}$$

Dessa maneira, a área do triângulo BDN será:

$$S = \frac{HN \cdot BD}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{19}}{12}$$

Seção Enem

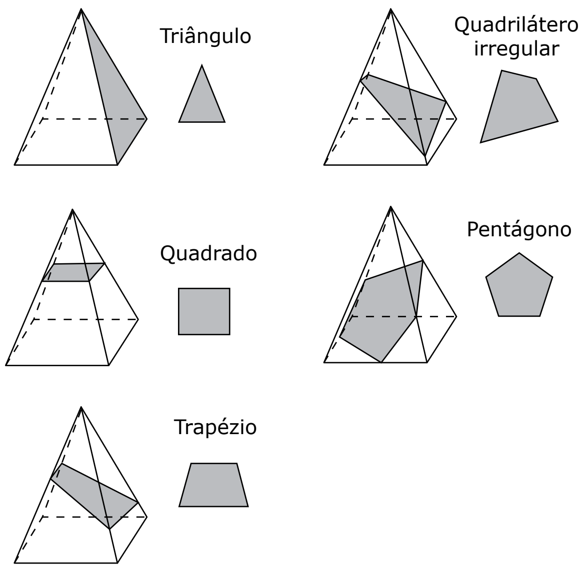
Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Conforme a figura, se supormos que quadriláteros irregulares e trapézios sejam polígonos distintos, temos que as possibilidades são triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos.



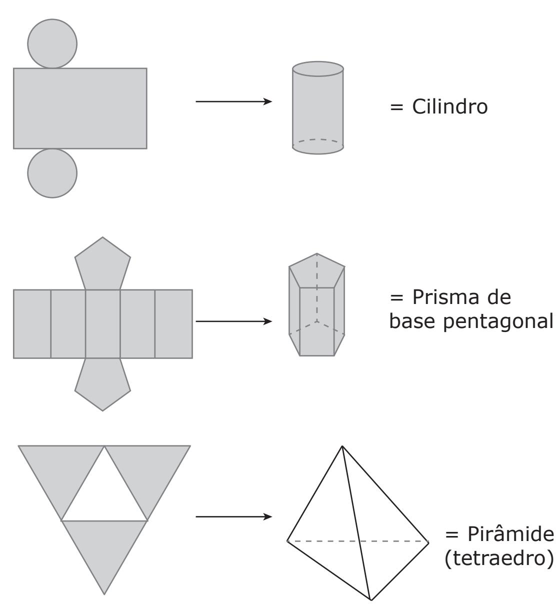
Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: A partir das planificações, podemos formar os seguintes sólidos:



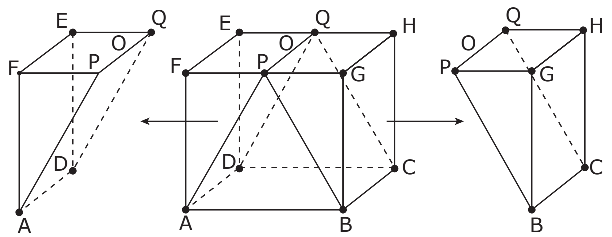
Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: I

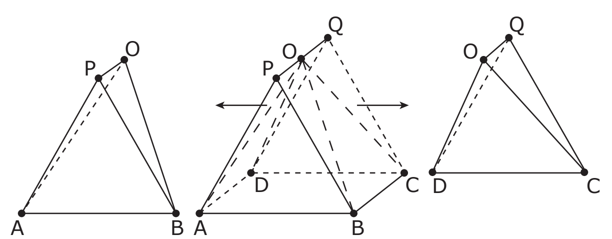
Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Os sólidos descartados após os dois primeiros cortes, que saem de **O** em direção às arestas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, são dois prismas triangulares congruentes, AFPQDE e BGPQCH.



Os outros dois sólidos descartados após os dois últimos cortes, que saem de **O** em direção às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, são dois tetraedros congruentes, ABOP e CDOQ.



Portanto, os formatos dos sólidos destacados são iguais dois a dois.

MÓDULO – C 16

Cones

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Sendo **q** a razão entre os volumes, temos:

$$q = \frac{V_{cilindro}}{V_{cone}} = \frac{\pi.4^2 . 20}{\frac{\pi.4^2 . 20}{3}} = 3$$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Perceba que a parte da casquinha contida no cilindro é um cone de altura **a** e raio da base **a**. Logo, seu volume **V** é dado por:

$$V = \frac{\pi.a^2.a}{3} = \frac{\pi a^3}{3}\ cm^3$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Sendo **h** a altura procurada:

$$\frac{\cancel{\pi}.8^2.9}{\cancel{3}} = 10 . 10.h \Rightarrow h = 5,76\ m$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Temos que $V_{cilindro} = V_{cone}$ e que o raio da base do cone é o dobro do raio da base do cilindro, logo:

$$V_{cilindro} = V_{cone} \Rightarrow$$

$$\pi.R^2.h_{cilindro} = \frac{1}{3}.\pi.(2R)^2.h_{cone} \Rightarrow$$

$$R^2.h_{cilindro} = \frac{4R^2}{3}.h_{cone} \Rightarrow$$

$$h_{cone} = \frac{3}{4}h_{cilindro}$$

Questão 05 – Letra A

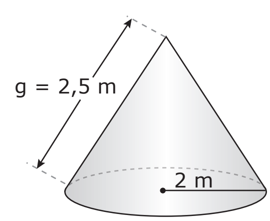
Comentário: O volume da peça **V** é a diferença entre o volume do cilindro de raio da base e altura medindo 3 cm e 10 cm, respectivamente, e o volume do cone de raio da base a altura medindo 3 cm e 6 cm, respectivamente. Logo, usando a aproximação indicada no enunciado, temos:

$$V = \pi.3^2.10 - \frac{\pi.3^2.6}{3} = 72\pi \cong 216\ cm^3$$

$$216 . 10^3\ mm^3 = 2,16 . 10^5\ mm^3$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Para o cálculo da área externa da cisterna, podemos dividi-la em um cilindro e em um cone cujos raios medem 2 m, logo:



$A_{lateral\ cone} = \pi.R.g = \pi.2 . 2,5 = 5\pi\ m^2$

Calculando a área lateral e a área da base do cilindro, temos:

$A_{\ell} = 2.\pi.2 . 2 = 8\pi\ m^2$

$A_b = \pi.2^2 = 4\pi\ m^2$

Considerando $\pi = 3,14$, temos que a área total da cisterna será:

$A_{total} = A_{lateral\ cone} + A_{\ell} + A_b \Rightarrow$

$A_{total} = 5\pi + 8\pi + 4\pi \Rightarrow$

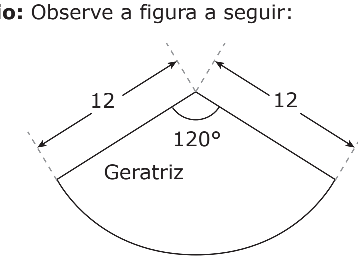
$A_{total} = 17 . 3,14 = 53,38\ m^2$

Como cada m^2 tem um custo de 40 reais, então, para a construção de 100 cisternas, teremos um custo igual a:

53,38 . 40 . 100 = 213 520 reais

Questão 07 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:



A área do setor circular corresponde à área lateral do cone cujo raio da base é igual a **R**. Logo:

$$A_{\text{lateral cone}} = A_{\text{setor}} \Rightarrow \pi.R.\underbrace{g}_{\text{geratriz}} = \pi.12^2.\frac{120°}{360°} \Rightarrow$$

$$\pi.R.12 \Rightarrow \pi.144.\frac{1}{3} \Rightarrow R = \frac{144}{3.12} \Rightarrow R = 4\text{ cm}$$

Sendo o raio do cone igual a 4 cm, temos que sua área da base é igual a:

$A_{base} = \pi.4^2 \Rightarrow A_{base} = 16\pi\text{ cm}^2$

Questão 08 – Letra E

Comentário: O volume V do sólido será:

$V = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Troco de cone}} = \Rightarrow$

$\pi.12\ .\ 30 + \frac{\pi.10}{3}\ (12^2 + 12\ .\ 6 + 6^2) \cong 15\ 480\text{ dm}^3 = 15\ 480\text{ L}$

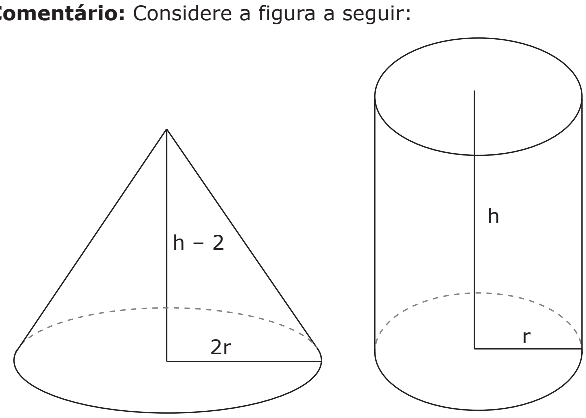
Como há um vazamento v que desperdiça $\frac{1}{3}$ do seu volume por semana, temos que:

$v = \frac{1}{3}\ .\ 15\ 480\text{ L} = 5\ 160\text{ litros}$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



Temos que a área lateral do cilindro é de $64\pi\text{ cm}^2$, então:

$2\pi rh = 64\pi \Rightarrow rh = 32$ (I)

O volume V_c do cone é igual a $128\pi\text{ cm}^3$, assim:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi\ .(2r)^2.(h-2) \Rightarrow$$

$$128\pi = \frac{4r^2\pi(h-2)}{3} \Rightarrow$$

$96 = r^2(h - 2)$ (II)

Substituindo I em II:

$r.32 - 2r^2 = 96 \Rightarrow$

$r^2 - 16r + 48 = 0 \Rightarrow r = 12\text{ cm ou } r = 4\text{ cm}$

Logo, r = 4 cm e h = 8 cm, pois, para r = 12 cm, a altura não seria um número inteiro.

Para calcular a área lateral A_L do cone, precisamos encontrar a geratriz g, portanto:

$g^2 = (h - 2)^2 + (2r)^2 \Rightarrow g^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow g = 10\text{ cm}$

$A_L = \pi\ .\ 2r\ .\ g = \pi\ .\ 8\ .\ 10 = 80\pi\text{ cm}^2$

Questão 02 – Letra B

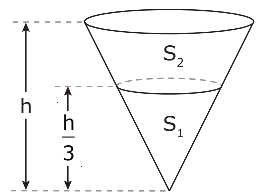
Comentário: Denotando por **V** o volume do cilindro, e **v** a soma dos volumes dos cones, procura a seguinte razão **q**:

$$q = \frac{V - v}{v} = \frac{\pi R^2 h - 2.\dfrac{\pi R^2\ .\frac{h}{2}}{3}}{2.\dfrac{\pi R^2\ .\frac{h}{2}}{3}} = \frac{\pi R^2 h\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\pi R^2 h.\frac{1}{3}} = 2$$

Logo, o volume da parte do cilindro sem os dois cones é igual ao dobro da soma dos volumes desses cones.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:



Sejam **V**, V_1 e V_2 os volumes do cone grande, do cone pequeno e do tronco do cone, respectivamente.

Logo, $V = V_1 + V_2$.

Assim, temos:

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{\frac{h}{3}}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$27V_1 = V_1 + V_2 \Rightarrow 26V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 26$$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Perceba que o volume do cilindro de raio da base e altura, **r** e **h,** respectivamente, é igual à soma dos volumes de dois cones de mesmas dimensões e um cilindro de raio da base **r** e altura 3 m. Logo:

$$\cancel{\pi r^2} h = 2.\frac{\cancel{\pi r^2} h}{3} + \cancel{\pi r^2}\, 3 \Rightarrow\ h = \frac{2h}{3} + 3 \Rightarrow\ h = 9\text{ m}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Como o círculo da base está circunscrito a um hexágono, tem-se que o raio do círculo é igual ao lado do hexágono (pois dois raios e um lado do hexágono formam um triângulo isósceles de ângulo da base $\frac{360°}{6} = 60°$, ou seja, equilátero). Logo, para o cone, r = 2 cm. Sua área lateral **S** é tal que:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow$

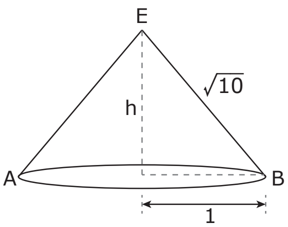
$g^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow$

$g = 2\sqrt{5}\text{ cm}$

$S = \pi\ .r.g \Rightarrow S = \pi\ .2\ .2\sqrt{5} = 4\pi\sqrt{5}\text{ cm}^2$

Questão 06 – Letra E

Comentário: O sólido representado é a junção de um cilindro de raio 1 e altura 2 e um cone, cuja medida do raio é, também, igual a 1 e sua altura pode ser determinada da seguinte maneira:



$$h^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 1^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

Portanto, o volume do sólido será igual a:

$$V = \pi \,.(1)^2.2 + \frac{1}{3}\pi \,.(1)^2.3 = 2\pi + \pi = 3\pi$$

Questão 07 – Letra E

Comentário: O comprimento **L** do arco do setor corresponde a $L = 2\pi r.\frac{x}{360°} = \pi.\frac{x}{9}$. Por outro lado, sabemos que o cone formado com a chapa tem 5 cm de raio da base, portanto:

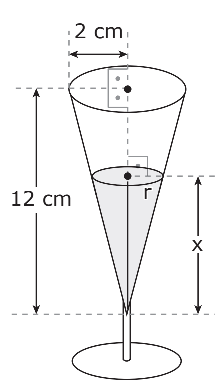
$$\pi.\frac{x}{9} = 2\pi.5 \Rightarrow x = 90°$$

Questão 08

Comentário:

A) Sendo a altura da taça igual a 12 cm e seu raio igual a 2 cm, temos o volume de líquido, quando ela está completamente cheia, igual a $V = \frac{1}{3}.\pi.2^2.12 \Rightarrow V = 16\pi\ cm^3$.

B) À medida que o nível de líquido na taça varia em função de **x**, o raio correspondente à superfície do líquido também varia. Logo, devemos expressar o valor do raio em função de **x**, assim utilizando a semelhança entre os cones, temos:



$$\frac{2}{r} = \frac{12}{x} \Rightarrow 12r = 2x \Rightarrow r = \frac{x}{6}\ cm$$

A expressão para o volume **V** de líquido nessa taça será:

$$V(x) = \frac{1}{3}.\left(\frac{x}{6}\right)^2.x = \frac{x^3\pi}{108}\ cm^3$$

Questão 09 – Letra B

Comentário: O sólido de revolução gerado é um cone de altura 4 cm e raio 3 cm. Aplicando-se $g^2 = h^2 + R^2$, conclui-se que a medida da geratriz é de g = 5 cm. Logo, a medida da área lateral será $S_{lat} = \pi Rg = 15\pi\ cm^2$ e o volume será $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = 12\pi\ cm^3$.

Questão 10 – Letra A

Comentário: O sólido de revolução obtido é um cone, cuja altura coincide com a medida do cateto de 6 cm. Logo, sendo **R** seu raio e **g** sua geratriz, tem-se:

$$V = \frac{\pi R^2.6}{3} = 128\pi \Rightarrow R = 8\ cm$$

$$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10\ cm$$

$$A_{total} = \pi R(R+g) = \pi.8(8+10) = 144\pi\ cm^2$$

Questão 11 – Letra A

Comentário: Quando a água atingir a metade da altura do cone, esta formará um cone circular C_1 de base paralela e com vértice comum ao cone circular C_2 descrito no enunciado. Logo, C_1 e C_2 são semelhantes. Sendo r_i e h_i o raio e altura do cone C_i, tem-se:

$$\frac{r_1}{h_1} = \frac{r_2}{h_2} \Rightarrow$$

$$\frac{r_1}{\frac{\frac{3\cancel{0}}{\cancel{\pi}}}{2}} = \frac{1}{\frac{3\cancel{0}}{\cancel{\pi}}} \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\ dm$$

O volume **V** de C_1 é tal que:

$$V = \frac{\pi r_1^2 h_1}{3} = \frac{\pi(0,5)^2.\frac{15}{\pi}}{3} = 1,25\ dm^3 = 1,25\ L$$

Como a torneira pinga um litro por hora, ela pingará 1,25 L em 1,25 h, ou seja, 1 hora e 15 minutos.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Denote por **h** a coluna de água. Perceba que o cone maior e cone preenchido com água são semelhantes (bases paralelas e mesmo vértice). Sendo **V** o volume de água, **V** será o volume de óleo e o volume do cone maior será 2V. Da semelhança, sabe-se que:

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{6}{h}\right)^3 \Rightarrow$$

$$2 = \left(\frac{6}{h}\right)^3 \Rightarrow$$

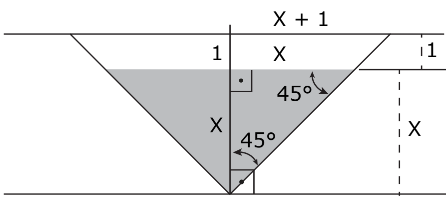
$$h = \frac{6}{\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{4}\ m$$

Para estimar **h**, é melhor trabalhar com a expressão $2 = \left(\frac{6}{h}\right)^3$.

Perceba que para h = 5 m, o membro direito da expressão transforma-se em $1,2^3 < 2$; para h = 4 m, o membro direito é $1,5^3 > 2$. Logo, **h** está entre 4 m e 5 m.

Questão 13

Comentário: Considere a figura a seguir:



A diferença entre o volume do cone antes da retirada do óleo e depois da retirada é igual a 19 m³, então:

$$19 = \frac{\pi.(X+1)^2(X+1)}{3} - \frac{\pi.X^2.X}{3} \Rightarrow$$

$19 = (X^2 + 2X + 1)(X + 1) - X^3 \Rightarrow$

$19 = X^3 + X^2 + 2X^2 + 2X + X + 1 - X^3 \Rightarrow$

$18 = 3X^2 + 3X \Rightarrow$

$X^2 + X - 6 = 0 \Rightarrow$

$X = 2$ ou $X = -3$ (Absurdo)

Portanto, a altura do nível de óleo é de X = 2 m.

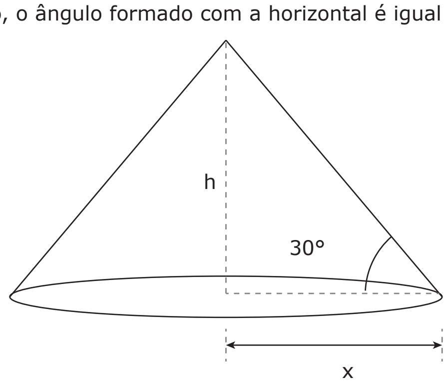
Questão 14 – Letra C

Comentário: Determinando, primeiramente, o volume da piscina, temos:

$$V = \frac{1}{2}\pi.r^2.h = \frac{1}{2}\pi.(6)^2.1{,}25 = \frac{45}{2}\pi\ m^3$$

Como o volume de terra retirada é 20% maior que o volume da piscina, o volume do cone equivale a 27π m³.

Sabemos que o ângulo formado entre a geratriz e a vertical é 60°, portanto, o ângulo formado com a horizontal é igual a 30°.



A medida de **h** em função de **x** é igual a:

$\text{tg } 30° = \frac{h}{x} \Rightarrow$

$x = \sqrt{3}h$

O volume do cone pode então ser determinado da seguinte maneira:

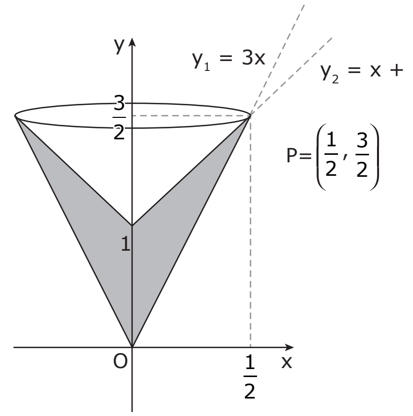
$V = \frac{1}{3}.\pi\left(\sqrt{3}h\right)^2.h = 27\pi \Rightarrow$

$h^3 = 27 \Rightarrow$

$h = 3$ m

Questão 15 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



$$y_1 = y_2 \Rightarrow 3x = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

O sólido **S** formado possui volume igual ao volume do cone maior, de raio $\frac{1}{2}$ e altura $\frac{3}{2}$, menos o volume do cone menor, de raio $\frac{1}{2}$ e altura $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Portanto, seu volume é igual a:

$$V_S = \underbrace{\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{3}{2}}_{\text{Volume do cone maior}} - \underbrace{\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{2}}_{\text{Volume do cone menor}} = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

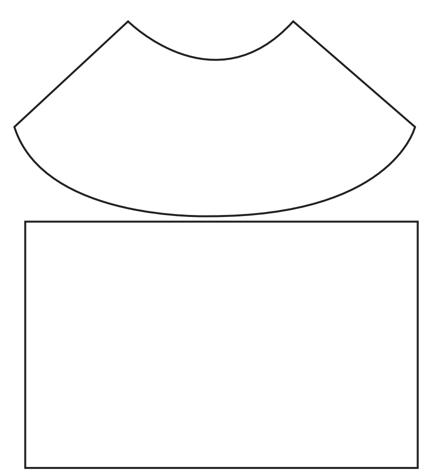
Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: A planificação da superfície lateral do cilindro corresponde a um retângulo, e do cone, a um setor circular.

Logo, o adesivo terá o formato a seguir:



MATEMÁTICA

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O silo é um sólido formado por um cilindro reto e um cone.

A capacidade total pode, então, ser determinada como:

$$V = \underbrace{\pi.3^2.12}_{\text{Volume do cilindro}} + \underbrace{\frac{1}{3}\pi.3^2.3}_{\text{Volume do cone}} = 108\pi + 9\pi = 117\,.\,3 = 351\text{ m}^3$$

Como a capacidade do caminhão é de 20 m^3, ele precisará fazer

$$\frac{351}{20} = 17{,}55 = 18\text{ viagens.}$$

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Seja **R** o raio do poço cilíndrico e **H** sua altura, temos que:

Volume do poço = $\pi R^2 H$

Volume do amontoado de terra = $\frac{1}{3}\pi.(3R)^2.\,2{,}4$

Sabemos que o volume do amontoado de terra é 20% maior que o volume do poço, então temos:

$$1{,}2\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi.(3R)^2.\,2{,}4 \Rightarrow$$

$$\cancel{1{,}2}\,\cancel{R^2}H = \frac{1}{\cancel{3}}\pi.\cancel{9}^{3}\,\cancel{R^2}.\,\cancel{2{,}4}^{2} \Rightarrow H = 6\text{ m}$$

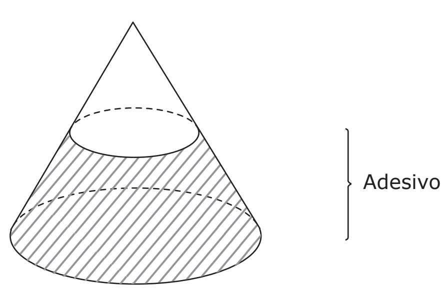
Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: II

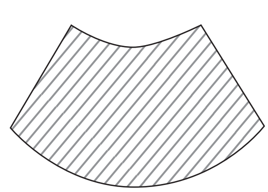
Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Observe que o adesivo deverá ser colado na metade inferior do sinalizador de trânsito cônico. A figura a seguir ilustra a situação:



A planificação do adesivo gera a seguinte figura:



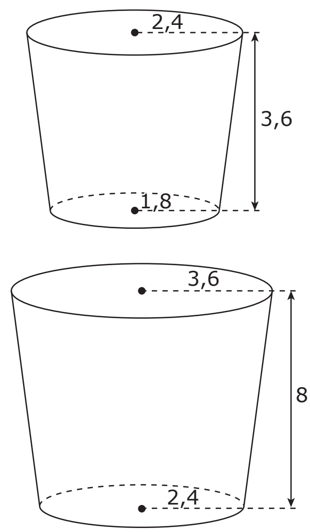
Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: A figura a seguir mostra os dois tipos de copos:



$\frac{\pi . 6}{3}(2,4^2 + 1,8^2 + 2,4 . 1,8) \Rightarrow$

$V_{Caneca} \leq \frac{\pi . 8}{3}(3,6 + 2,42 + 3,6 . 2,4)$

$26,64\pi \leq V_{Caneca} \leq 72,96\pi$

Caneca:

$V_{Caneca} = \pi y^2 . 6 \Rightarrow$

$26,64\pi \leq \pi y^2 6 \leq 72,96\pi$

$4,44 \leq y^2 \leq 12,16$

Como a caneca será utilizada tanto para tomar café quanto para beber água, o valor mínimo de y^2 deverá ser de 12,16 cm.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: O volume de álcool contido na figura 1 é igual ao da figura 2. Logo, vamos calcular, inicialmente, o volume de álcool contido no cone:

$V_{co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow$

$V_{co} = \frac{1}{3}\pi . 25 . 6 \Rightarrow$

$V_{co} = 50\pi \text{ cm}^3$

Assim, sobrarão 575π cm³ de álcool no cilindro. Sendo $V_{Ci} = \pi r^2 h$ o volume do cilindro, temos: $575\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = 23$ cm.

Portanto, o vasilhame cilíndrico, com 30 cm de altura, possui 23 cm de álcool. Logo, a distância **H** vale 7 cm.

Bernoulli
Colégio e Pré-vestibular

Rua Diorita, 43 - Prado
Belo Horizonte - MG
Tel.: (31) 3029-4949

www.bernoulli.com.br/sistema