CAPÍTULO 01
Conjuntos Numéricos

1. Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Chamamos de ***conjunto dos números naturais*** e indicamos com o símbolo $\mathbb{N}$, o conjunto dos seguintes números:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$$

Subconjunto de $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3,\ldots\}$

2. Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Chamamos de ***conjunto dos números inteiros*** e indicamos com o símbolo $\mathbb{Z}$, o conjunto dos seguintes números:

$$\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, 2,\ldots\}$$

Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^* = \{..., -1, 1, 2, 3,...\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

3. Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

São todos os números que podem ser escritos na forma de fração $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Indicamos o conjunto com o símbolo $\mathbb{Q}$.

De modo análogo ao proposto ao conjunto dos inteiros, temos: $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{Q}_-$ e $\mathbb{Q}_-^*$.

Exemplos:

a) 5, pois $\frac{10}{2} = 5$

b) 0,3; pois $0{,}3 = \frac{3}{10}$

c) 0,333... , pois $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\bar{3}$

<u>**Nota:**</u>

Os números que fazem parte desse conjunto devem:

1. ter representação decimal ***finita***;
2. ter representação decimal infinita e periódica, também conhecida como ***dízima periódica***.

4. Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

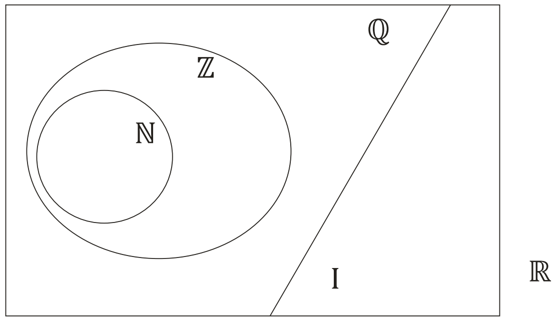
São todos os números que não podem ser escritos na forma de fração, ou seja, dízimas não-periódicas.

Exemplos:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π ,...

5. Números Reais ($\mathbb{R}$)

São todos os números racionais ou irracionais.



De modo análogo ao proposto ao conjunto dos racionais, temos: $\mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-$ e $\mathbb{R}_-^*$.

Observações:

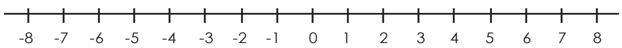
a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

b) $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$

d) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

Reta Real



Os números reais podem ser representados por pontos pertencentes a uma reta orientada.

Divisibilidade

Dados dois números a e b, tal que $a > b$, dizemos que a é divisível por b se, somente se, a divisão entre a e b resulta em resto igual a zero.

Exemplo:

8 é divisível por 2, pois $\frac{8}{2} = 4$.

Critérios de Divisibilidade

por 2*:* um número é divisível por **2** quando o algarismo da unidade desse número é par ou terminar em zero.

Exemplos:

0, 2, 4, 6, 8, 10.

por 3: um número é divisível por **3** quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for múltiplo de 3.

Exemplo:

7.626 é divisível por 3, porque a soma dos algarismos (7 + 6 + 2 + 6 = 21) é divisível por 3.

por 4: um número é divisível por **4** quando o numeral formado pelos dois últimos algarismos for divisível por quatro ou terminar em 00.

Exemplo:

764 é divisível por 4 porque 64, que é o número formado pelos seus dois últimos algarismos da direita, é divisível por 4.

por 5: um número é divisível por **5** quando o algarismo da unidade desse número terminar em 0 ou 5.

Exemplos: 30, 35, 75, 125, 150.

por 6: um número é divisível por **6** quando é divisível por **2** e **3** simultaneamente (ao mesmo tempo). Exemplos: 60, 96, 108, 222.

por 7: um número é divisível por **7** quando separando o primeiro algarismo da direita, multiplicando-se por **2** e subtraindo o produto obtido que restou à esquerda, e assim sucessivamente, resulta **0** ou **7**.

Exemplos:

588 é divisível por 7, pois:

$$\begin{array}{ll} 58.8 & 8\times2=16 \\ \underline{-16} & \\ 4.2 & 2\times2=4 \\ \underline{-4} & \\ 0 & \end{array}$$

18.351 não é divisível por 7, pois:

$$\begin{array}{ll} 1835.1 & 1\times2=2 \\ \underline{-2} & \\ 183.3 & 3\times2=6 \\ \underline{-6} & \\ 17.7 & 7\times2=14 \\ \underline{-14} & \\ 3 & \end{array}$$

por 8: um número é divisível por **8** quando o numeral formado pelos três últimos algarismos for divisível por **8** ou terminar em **000**.

Exemplo:

27.104 é divisível por 8, porque 104 é divisível por 8.

por 9: um número é divisível por **9** quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por **9**.

Exemplos:

97.731 é divisível por 9, pois a soma dos algarismos 9 + 7 + 7 + 3 + 1 = 27 é divisível por 9.

62.319 não é divisível por 9, pois a soma dos algarismos 6 + 2 + 3 + 1 + 9 = 21.

por 10: um número é divisível por **10** quando terminar em **0**.

Exemplos: 350; 1.500.

por 11: um número é divisível por **11** quando a soma dos algarismos de ordem ímpar (S_i) menos a soma dos algarismos de ordem par (S_p) for um número divisível por **11**.

Exemplo:

95.568

$$\left.\begin{array}{l} S_i = 8 + 5 + 9 = 22 \\ \\ S_p = 6 + 5 = 11 \end{array}\right\} S_i - S_p = 22 - 11 = 11$$

$\therefore$ 95.568 é divisível por 11.

Exercício Resolvido

01. (ESA) Para que o número $5a\,3b$ seja divisível, ao mesmo tempo, por 2, 3, 5 e 9, o valor absoluto do algarismo representado pela letra $\boldsymbol{a}$ deve ser:

a) 4. b) 7. c) 0. d) 1.

Resolução:

Se um número é divisível por 5, o último algarismo dever ser 0 ou 5; contudo, para ser também divisível por 2, deve terminar com 0. Logo $b = 0$.

Somando os algarismos temos:

$5+a+3+0=a+8$

Então, o menor valor que temos que substituir em a para que a soma seja divisível por 3 e 9 é:

$$a + 8 = 9$$
$$a = 9 - 8$$
$$a = 1$$

Alternativa **d**.

Exercícios Propostos

01. Classifique como V (verdadeiro) ou F (falso).

a) ( ) 243 é divisível por 3.
b) ( ) 543 é divisível por 4.
c) ( ) 720 é divisível por 2.
d) ( ) 127 é divisível por 9.
e) ( ) 1.248 é divisível por 8.
f) ( ) 24 é divisível por 3.
g) ( ) 321 é divisível por 7.
h) ( ) 663 é divisível por 3.
i) ( ) 240 é divisível por 5.
J) ( ) 243 é divisível por 6.
k) ( ) 326 é divisível por 11.
l) ( ) 552 é divisível por 6.

02. Um número racional qualquer:

a) tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
b) tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
c) não pode expressar-se em forma decimal exata.
d) nunca se expressa em forma de uma decimal inexata.
e) pode expressar-se em forma decimal inexata.

03. (ESPCEX) Calcule o menor valor de “a” natural, no número 2 a173, para que o resto da divisão dele por 11 seja 2.

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

04. (EPCAR) Seja o número m = 488a9b, sabe-se que m é divisível por 45, então a + b é igual a:

a) 1.
b) 7.
c) 9.
d) 16.
e) 5.

CAPÍTULO 02
Fatoração e Cálculo de MDC e MMC

Fatoração

Dizemos que **fatorar** é transformar uma **soma** de duas ou mais parcelas em um **produto** de dois ou mais fatores.
Observemos os seguintes casos de fatoração:

1. Fator comum

$ax + bx = x(a + b)$
O fator x foi colocado em evidência.

Exemplo:
$$a^2b + ab^2 + a^2b^3 = ab(a + b + ab^2)$$

2. Agrupamento
$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Exemplo:
$$a^2 + ab + a + b = a(a + b) + 1(a + b) = (a + b)(a + 1)$$

3. Diferença de quadrados

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemplo:
$$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 12 = (2x + 1)(2x - 1)$$

4. Quadrado perfeito

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Exemplo:
$a^2 + 4a + b^2 = a^2 + 2 \cdot 2a + b^2 = (a + 2)^2$

$$36 - 12x + x^2 = 6^2 + 2 \cdot 6x + x^2 = (6 - x)^2$$

5. Diferença de cubos
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemplo:
$$125 - x^3 = 5^3 - x^3 = (5 - x)(5^2 + 5x + x^2) = (5 - x)(25 + 5x + x^2)$$

6. Soma de cubos
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exemplo:
$$a^3 + 27 = a^3 + 3^3 = (a + 3)(a^2 - 3x + 3^2) = (a + 3)(a^2 - 3x + 9)$$

7. Cubo perfeito
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Exemplo:
$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3x^2 2 + 3x2^2 + 2^3 = (x + 2)^3$$

$$a^3 - 9a^2 + 27a - 27 = a^3 - 3a^2 3 + 3a3^2 - 3^3 = (a - 3)^3$$

Cálculos do MDC e MMC

Devemos realizar a decomposição em fatores primos.

- Máximo Divisor Comum.

O **MDC** será o produto dos fatores comuns de menores expoentes.

- Mínimo Múltiplo Comum.

O **MMC** será o produto de fatores comuns e não-comuns de maiores expoentes.

Exemplo:
01. (AEPOM) calcule o MDC dos números 132 e 68.

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

68	2
34	2
17	17
1	

$132 = 2^2.3.11$ $68 = 2^2.17$

Assim,
$$MDC(132;\ 68) = 22 = 4$$

$$MMC(132;\ 68) = 22 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$$

Notas:
- O MMC de dois ou mais números inteiros não-nulos é o menor dos inteiros positivos que dividem ao mesmo tempo estes números.
- Dados dois números A e B, temos:
$$A \cdot B = M.M.C\,(A, B) \cdot M.D.C\,(A, B)$$

Exercício resolvido

01. (AEPOM) O valor de n para que o número de divisores de x = $2^n.3^2.5^3.7$ seja 120 é:
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

Resolução:
O número de divisores de x é dado por:

$$N = (n+1)\times(2+1)\times(3+1)\times(1+1) = 120$$
$$N = (n+1)\times 24 = 120$$
$$\therefore n+1 = \frac{120}{24}$$
Logo:
$$n+1 = 5$$
$$n = 4$$
Alternativa **d.**

Exercícios propostos

01. (AEPOM) O MDC dos números 36, 40 e 56 é:
a) 6.
b) 8.
c) 9.
d) 4.

02. (ESA) Sabendo-se que $A = 2^x \cdot 3^2 \cdot 5, B = 2^{2x} \cdot 3 \cdot 5^2$ e que o MMC de A e B tem 45 divisores, o valor de x será:
a) 1.
b) 2.
c) 3 .
d) 5.
e) 8.

03. Sejam A = $2^3 . 3^2 . 5$ e B= $2 . 3^3 . 5^2$, então, MMC (A,B) é igual a:
a) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
c) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.
d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

04. (FEI - SP) Sabendo-se que a · b = 10584 e que o MMC (a, b) = 504, então MDC (a, b) é igual a:
a) 21.
b) 26.
c) 31.
d) 16.

05. (FUVEST) Sabendo-se que MDC (360, 300) = a e o MMC(360, 300)= b, então o produto a · b é igual a:
a) 1.080.000.
b) 10.800.
c) 108.000.
d) 1.080.

CAPÍTULO 03
Operações com os Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

1. Soma e Subtração.

Regra de Sinais:
I - Operação com números de mesmo sinal: somam-se os números e mantém o sinal.
Exemplos:

$$a) +2+8=+10$$
$$b) -3-5=-8$$

II - Operação com sinais contrários: subtrai os números e mantém o sinal do maior.
Exemplos:

$$a) +20-10=10$$
$$b) -34+14=-10$$

2. Multiplicação e Divisão

Regra de Sinais:
I - Multiplicação ou Divisão de números com sinais iguais, o resultado será sempre um número positivo.
Exemplos:

$$a)\ (+2)\cdot(+5)=+10 \qquad b)\ \frac{(+10)}{(+2)}=+5$$

$$c)\ (-2)\cdot(-5)=+10 \qquad d)\ \frac{(-10)}{(-2)}=+5$$

II - Multiplicação ou Divisão de números com sinais diferentes, o resultado será sempre um número negativo.
Exemplos:

$$a)\ (+2)\cdot(-5)=-10 \qquad b)\ \frac{(-10)}{(+2)}=-5$$

$$c)\ (-2)\cdot(+5)=-10 \qquad d)\ \frac{(+10)}{(-2)}=-5$$

Operações com Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

1. Soma e Subtração

1º. Caso: soma ou subtração de frações com denominadores iguais: repete-se o denominador e soma ou subtrai os numeradores.
Exemplos:

$$a)\ \frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$b)\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$

2º. Caso: Quando os denominadores forem diferentes, devemos igualar os denominadores através do MMC.
Exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left\{ \text{Calculando o MMC(2,3) = 6.} \right.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Observação:
Método emergencial: dados duas frações em que $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{(a\cdot d)\pm(b\cdot c)}{b\cdot d}$$

Exemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{(1\cdot 2)+(3\cdot 1)}{3\cdot 2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

2. Multiplicação

Operação: multiplicação entre frações: multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador.
Exemplos:

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1\cdot(-2)}{3\cdot 5}=-\frac{2}{15}$

3. Divisão

Operação: divisão entre frações: mantém-se a fração que está no numerador e multiplica-se pelo inverso da fração que esta no denominador.
Exemplos:

a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

b) $\frac{\frac{2}{5}}{\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)=-\frac{6}{5}$

Exercícios Propostos

01. (FUVEST-SP) Dividir um número por 0,0125 equivale a multiplicá-lo por:
a) 1/125.
b) 1/8.
c) 8.
d)12,5.
e) 80.

02. Dadas as frações $\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{4}{5},\frac{2}{3}$, podemos afirmar que a maior é:
a) $\frac{5}{6}$.
b) $\frac{4}{5}$.
c) $\frac{3}{4}$.
d) $\frac{2}{3}$.

03. (CFN) Assinale a alternativa abaixo que corresponde aos resultados das operações I e II respectivamente:

I - 0,625 + 0,5 - $\frac{1}{6}$

II - 0,1 - $\frac{1}{4}$ +(- 3)

a) $\frac{22}{12}$ e $\frac{64}{10}$.
b) $\frac{23}{24}$ e $\frac{-63}{20}$.
c) $\frac{18}{27}$ e $\frac{8}{12}$.
d) $\frac{23}{24}$ e $\frac{63}{20}$.
e) $\frac{16}{21}$ e $\frac{16}{21}$.

04. (CFN) Na forma de fração decimal, o valor da expressão $-\frac{6}{4}+\frac{1}{10}$ +1,5 é:
a) $\frac{6}{10}$.
b) $\frac{2}{10}$.
c) 0,1.
d) 1.

05. (CFN) Em $\frac{8}{10}$ de um caixote foram arrumados 160 azulejos. Quantos azulejos podem ser arrumados no caixote?
a) 100.
b) 140.
c) 200.
d) 240.

CAPÍTULO 04
Potenciação

Seja a um número real e n um número inteiro maior ou igual a 2, podemos definir potência enésima de n da seguinte maneira:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ fatores}$$

Exemplos:
a) $4^2 = 4\cdot 4$
b) $(-2)^4= (-2)(-2)(-2)(-2)$

Notas:

Para $a\in\mathbb{R}$ temos: $\begin{cases} a^1=a \\ a^0=1 \\ a^{-1}=\frac{1}{a}\end{cases}$, com $a\neq 0$

Exemplos:
a) $(-2)^1 = -2$
b) $3^0 = 1$
c) $6^{-3}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$

Propriedades:

Seja $a\neq 0$, $b\neq 0$ e m e n inteiros, temos:

P1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

P2) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

P3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, com $b\neq 0$

P4) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

P5) $(ab)^n=a^nb^n$

Observações:

$$a^{3^2} = a^9$$

$$(a^3)^2 = a^6$$

Nota:
Quando $a = 10$, dizemos que a potência está na base dez, ou seja, 10^n. Neste caso, se $n > 0$, o expoente indicará o número de zeros e se $n < 0$, o número de casas decimais.

Exemplos:

$10^5 = 1\underbrace{00000}_{\text{5 zeros}}$

$10^{-5} = 0,\underbrace{00001}_{\text{5 casas decimais}}$

Exercício resolvido

01. (FEI-SP) O valor da expressão
$A = (-2) + (-3)\cdot(-2) - 1:(-3)$ é:
a) 1.
b) -5/6.
c) -5/3.
d) -5/2.

Resolução:
Sabemos pela propriedade que $(-2)^{-1} = -1/2$. Logo:

$$A = (-2) + (-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right): (-3)$$
$$= (-2) + \left(\frac{3}{2}\right): (-3)$$
$$= (-2) - \left(\frac{3}{2\cdot 3}\right)$$

Cancelando o 3 na expressão entre parênteses - note que nas passagens das igualdades acima foram utilizadas as propriedades do produto de números relativos de mesmo sinal e a divisão de números relativos com sinais diferentes.
Assim,

$$A = (-2) - \frac{1}{2} = \frac{(-4-1)}{2} = -\frac{5}{2}$$

Alternativa **d**.

Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Calcule:

a) $2^3.2^4 =$ _____
b) $\frac{3^3}{3^2} =$ _____
c) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 =$ _____
d) $(7^2)^{-1} =$ _____
e) $(5.10)^2 =$ _____

Exercícios propostos

01. (PUC) O valor da expressão $\frac{10^{-3}.10^5}{10.10^4}$ é:
a) 10.
b) 1000.
c) 10^{-2}.
d) 10^{-3}.

02. (AEPOM) Simplificando a expressão $\frac{4.10^{-5}.10^{-2}.10^8}{4.10^{-3}.10^6}$, obteremos:
a) 10°.
b) 10^{-1}.
c) 10^{-2}.
d) 10^{-3}.

03. (AEPOM) Sabe-se que $33000000 = 3{,}3\cdot 10^m$. O valor inteiro de m vale:
a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

04. (AEPOM) Sabe-se que $0{,}00000023 = 2{,}3\cdot 10^n$. O valor inteiro de n vale:
a) 6.
b) 7.
c) -6.
d) -7.
e) -8.

05. (ESA) O número $(0{,}02)^x$ tem 20 casas decimais. O valor de x é:
a) 5.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

06. (ESPCEX) Efetue a operação $(10^{-2})^3 : 10^6$. Qual o expoente de base 10 resultante?
a) 1.
b) 6 .
c) 1/12.
d) 12.
e) -12.

07. (OBM) A metade do número $2^{11} + 4^8$ é igual a:
a) $2^5 + 4^4$.
b) $2^5 + 2^8$.
c) $1^{10} + 2^8$.
d) $2^{15} + 4^5$.
e) $2^9 + 4^7$.

CAPÍTULO 05
Radiciação

Seja a um número real positivo e n um número inteiro positivo, definimos como **raiz enésima de a**(e se escreve $\sqrt[n]{a}$) o número positivo b, tal que $b^n = a$.

No símbolo $\sqrt[n]{a}$ dizemos que:

$\sqrt{\ }$ é o **radical**.

a é o **radicando.**

n é o **índice da raiz.**

Exemplo:
$\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$, ou seja, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Notas:

1ª. Não se define $\sqrt[par]{negativo}$, por exemplo, $\sqrt{-4}$, pois não existe um número real que elevado a expoente **par** apresente resultado **negativo**.

2ª. Observe que $\sqrt{9} = 3$ e não $\sqrt{9} = \pm 3$, pois uma operação não pode apresentar mais de um resultado.

3ª. Para radicais de índice ímpar podemos admitir a seguinte propriedade:
$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Propriedades:

Sejam a e b números reais positivos e m, n e p números inteiros positivos, são válidas as seguintes propriedades:

P1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

P2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, com $b \neq 0$

P3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

P4) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

P5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

Potências de Expoentes Fracionários

Se $\dfrac{m}{n}$ for uma fração irredutível ($n > 0$) então $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exemplos:

a) $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

b) $8^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{4}$

Racionalização

Racionalizar uma fração consiste em eliminar o radical que estiver no denominador. Esta operação é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador da correspondente fração pelo **fator de racionalização.**

Exemplos:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4 \cdot 4^2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{3}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{3 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = 3 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)$

Exercícios resolvidos

01. (AEPOM) Calcule $\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{243} + 3\sqrt{3}$

Resolução:

$\sqrt{3} + \sqrt{3^2.3} + \sqrt{3^2.3^2.3} + 3\sqrt{3} =$
$= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (1+3+9+3)\sqrt{3} =$
$= 16\sqrt{3}$

02. (AEPOM) Racionalize $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

Resolução:

$\dfrac{5}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Exercícios propostos

01. (AEPOM) Efetue os seguintes cálculos:

a) $2^{4^{\frac{1}{2}}} =$

b) $\sqrt[3]{2^{4^2}} =$

c) $\sqrt[2]{\left(\frac{2^5}{3}\right)^0} =$

d) $\sqrt[4]{\left(\frac{2^{5^0}}{32}\right)} =$

02. (AEPOM) O valor de $\sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{243} + 3\sqrt{27}$ é igual a:

a) $24\sqrt{6}$.
b) $24\sqrt{3}$.
c) $22\sqrt{3}$.
d) $24\sqrt{6}$.
e) $20\sqrt{6}$.

03. (AEPOM) Racionalizando $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$ encontramos:

a) $\dfrac{3\sqrt{18}}{2}$.

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{3}$.

d) $\frac{3\sqrt{18}}{4}$.

e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

04. (EPCAR) Ao resolver a expressão numérica $\left(\sqrt[3]{\frac{(25.10^{-6}).0{,}000075}{10}}\right) \div \left(\frac{5\sqrt[3]{1{,}5}}{10^{4}}\right) * (-0001)^{0}$

o valor encontrado é:

a) $\sqrt[3]{2}$.

b) $\sqrt[3]{3}$.

c) 1.

d) 0,1.

05. (FUVEST) A expressão $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ é igual a:

a) 2.

b) 1.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $\sqrt{2}$.

06. (Cesgranrio) Racionalizando o denominador de $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$, temos:

a) $2+\sqrt{3}$.

b) $\sqrt{3}-1$.

c) $1+2\sqrt{3}$.

d) $2+2\sqrt{3}$.

e) $1-2\sqrt{3}$.

07. (ITA) O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é:

a) 2.499.

b) 2.501.

c) 2.500.

d) 3.600.

e) 4.900.

CAPÍTULO 06
Conjuntos

Na teoria de conjuntos usaremos duas noções primitivas:
- Conjunto.
- Elemento.

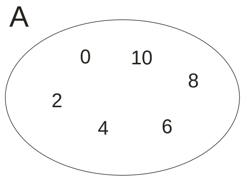
Definição: Como o próprio nome indica, conjunto nos dá uma idéia de coleção. Assim toda coleção ou agrupamento de pessoas, objetos, números ou outras coisas, constitui um conjunto.
Exemplos:
1. Conjunto de vogais.
2. Conjunto de algarismos.
3. Conjunto de números pares.
4. Conjunto de países.
5. Conjunto de continentes.
6. Conjuntos de Planetas do nosso sistema solar.
7. Conjunto de cadeiras de um colégio.

Temos que cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é definido como elemento. Assim, nestes exemplos citados, temos:
1. **a, e, i, o , u.**
2. **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.**
3. **2, 4, 6, 8, 10.**
4. **Brasil, Portugal, China, Irã, Paraguai.**
5. **América Latina, África, Europa, Oceania e Ásia.**
6. **Terra, Plutão, Vênus, Mercúrio.**
7. **Cadeira01, Cadeira02, Cadeira03.**

No exemplo 4, o país chamado Brasil corresponde a um elemento do conjunto de países.

Representações: Genericamente representamos conjunto por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

1. Geométrica: É comum representar um conjunto através de um diagrama formado de pontos interiores e uma linha fechada e não entrelaçada (linha convexa).



Veja a figura acima representando o conjunto dos números pares menores que 12.

2. Enumerativa: Outra forma de representarmos seria pela enumeração dos elementos entre chaves.

$$A=\{2,4,6,8,10\}$$

3. Pela sua formação: Utilizamos quando queremos escrever um determinado conjunto por meio de uma propriedade característica de seus elementos.

$$A=\{x \mid x \text{ é par menor ou igual a } 10\}$$

Relação entre elemento e conjunto

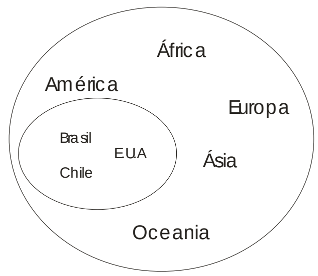
Quando um elemento está inserido em um conjunto, dizemos que o elemento pertence ao conjunto em questão, ou se não estiver inserido ao conjunto, dizemos que o elemento não pertence ao conjunto.

Notação: $\in \rightarrow Pertence$
$\notin \rightarrow Não\ Pertence$

Relação entre conjunto e conjunto

Existem situações como, por exemplo, ocorre no conjunto de continentes (C) e no conjunto dos países (P), percebe-se que em um continente existem vário países. Logo dentro dos conjuntos dos continentes, encontra-se inserido os conjuntos dos países.

Conjunto dos Continentes



Assim dizemos que P esta contido em C em contra partida C contém P.

Notação: $\subset \rightarrow Contido$
$\not\subset \rightarrow Não\ Contido$
$\supset \rightarrow Contém$
$\not\supset \rightarrow Não\ Contém$

Tipos de Conjuntos

Conjunto Vazio: Chama-se conjunto vazio aquele que não possui elemento algum.
Notação: $\{\ \}$ e $\varnothing$

Conjunto Unitário: Chama-se conjunto unitário aquele que possui apenas um elemento.
Exemplo: $A=\{1\}$
$B=\{Brasil\}$

Conjunto Universo: Quando estamos trabalhando com um tema (Ex.: algarismos ímpares) admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos inseridos no tema. Esse conjunto é chamado de Universo.

Exemplo: Dado o conjunto dos números naturais, formaremos o conjunto dos números ímpares.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5\ldots\}$$
$$A=\{1,3,5,7,9\ldots\}$$

Tendo em vista que todos os elementos do conjunto A foram extraídos do conjunto dos naturais, dizemos que este conjunto será o Universo.

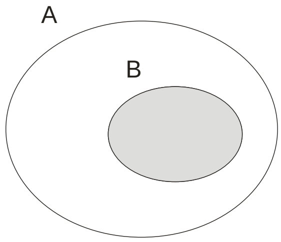
Conjuntos Iguais: Dois conjuntos são iguais se, somente se, todos os elementos de um conjunto pertencem ao outro ao mesmo tempo.

Exemplo: $\{a,b,c\} = \{d,e,f\}$

Logo: $a = d;\ b = e;\ c = f$.

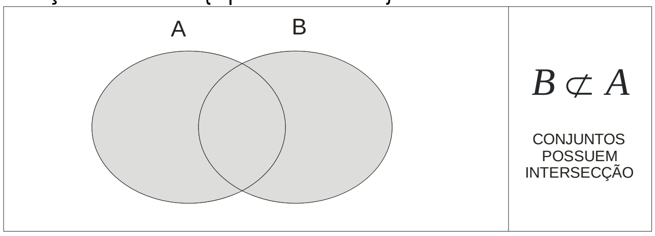
Subconjunto: Dados os conjuntos A e B.
O conjunto B é subconjunto de A se, somente se B estiver contido em A.

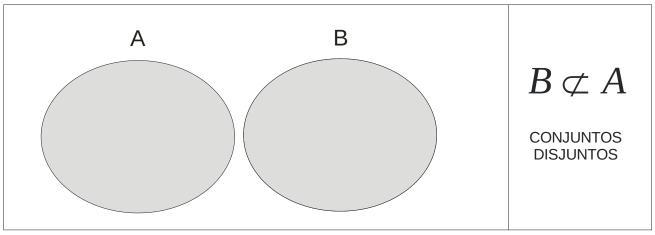
Notação: $B \subset A$.

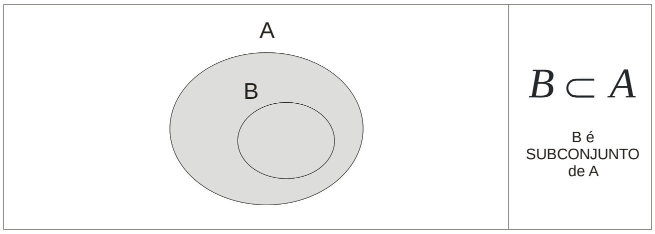


Operações com Conjuntos

a) União: Dados dois conjuntos A e B. Chama-se união de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao A ou ao B.
Notação: $A \cup B$ = {x | x $\in$ A ou x $\in$ B} $B \subset A$

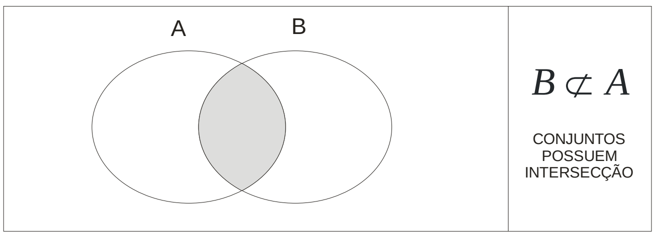


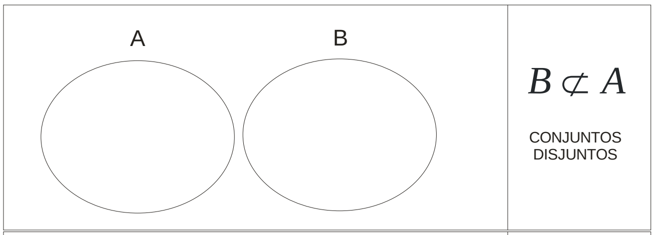


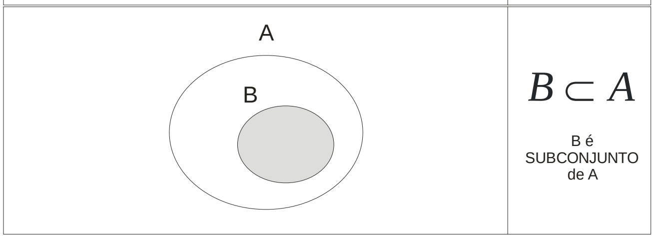


b) Intersecção: Dados dois conjuntos A e B. Chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao A e B ao mesmo tempo.

Notação: $A \cap B = \{x \mid x \in A\ e\ x \in B\}$

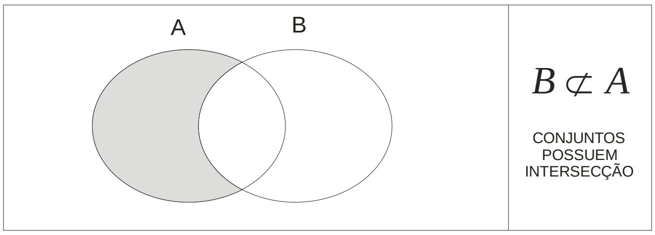


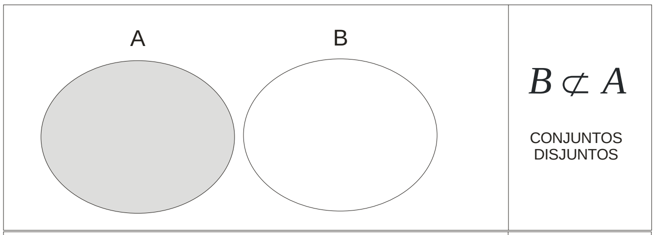


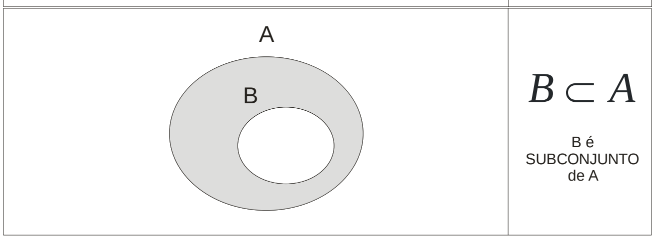


c) Diferença: Dados dois conjuntos A e B. Chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem ao B.

Notação: $A - B$ = {x | x $\in$ A ou x $\notin$ B}



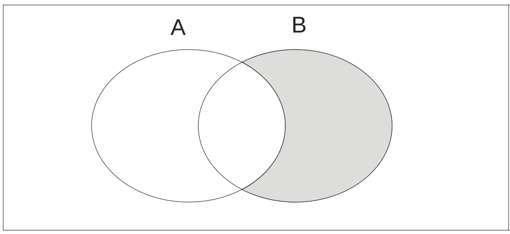




Importante lembrar que na operação de diferença entre conjuntos, ao contrário das outras, a ordem altera o resultado. Assim temos que:

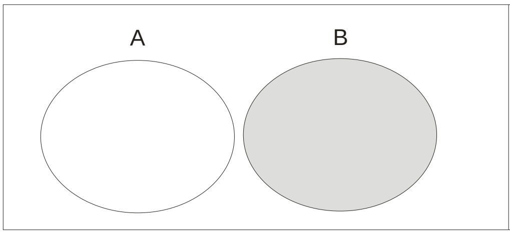
$$A - B \neq B - A$$

Notação: $B - A$ = {x | x $\in$ A ou x $\notin$ B}



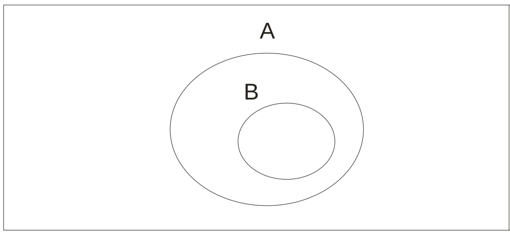
$B \not\subset A$

CONJUNTOS POSSUEM INTERSECÇÃO



$B \not\subset A$

CONJUNTOS DISJUNTOS



$B \subset A$

B é SUBCONJUNTO de A

d) Complementar: Dados dois conjuntos A e B. Chama-se complementar de B em relação ao A o conjunto A - B, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem ao B.

Notação: $C_A^B = A - B$

Exercícios Resolvidos

01. (EEAR) Numa pesquisa de mercado sobre o consumo de cerveja, obteve-se o seguinte resultado: 230 pessoas consomem a marca A; 200 pessoas consomem a marca B; 150 ambas as marcas e 40 não consomem cerveja. O número de pessoas pesquisadas foi:

Resolução:
Esta questão envolve o conhecimento da formula.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Dados:
230 pessoas consomem a marca A.
200 pessoas consomem a marca B.
150 pessoas consomem a marca A e B.
40 não consomem nenhuma marca.
- Pergunta-se o número de pessoas pesquisadas.

1º. Passo: Utilizando a formula:
$temos: n(A \cap B) = 150, n(A) = 230, n(B) = 200.$
$Substituindo:$
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 230 + 200 - 150$
$n(A \cup B) = 430 - 150$
$n(A \cup B) = 280$

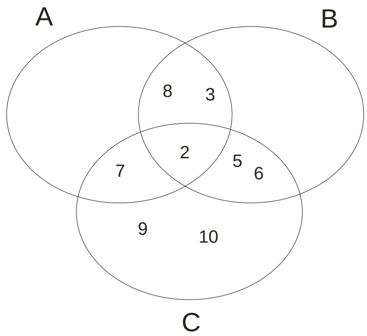
2º. Passo: Inclusão das pessoas que consomem as marcas A e B com as que não consomem nenhuma das marcas. Isto nos fornecerá o total de pessoas entrevistadas que chamamos de Conjunto Universo.
$n(A \cup B) = 280$

Não consomem nenhuma marca: 40.
Conjunto Universo: 280 + 40 = 320.
Resposta: alternativa **c.**

2. (ESPCEX) Considerando-se que:
$(A \cup B \cup C) = \{ n \in N / 1 \leq n \leq 10\}$.
$(A \cap B) = \{2, 3, 8\}$.
$(A \cap C) = \{2, 7\}$.
$(A \cup B) = \{n \in N / 1 \leq n \leq 8\}$.
Pode-se afirmar que o conjunto C é:

Resolução: Esta questão envolve o conhecimento do diagrama de Venn.
Definiremos os conjuntos:
$(A \cup B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$(A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1º. Passo: Faremos o diagrama: Lembrando sempre que o preenchimento começa com a intersecção dos três conjuntos $(A \cap B \cap C)$ e depois completamos com as intersecções dos conjuntos dois a dois.



Importante: Percebemos que todas as intersecções aparecem o elemento 2, isto quer dizer que:
$(A \cap B \cap C) = \{2\}$
Conclusão: $C = \{2,5,6,7,9,10\}$
Resposta: alternativa **c.**

Exercícios Propostos

1. (EEAR) Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F):

( ) $Z_+ \subset N$.

( ) $Z_+ \neq N$.

( ) $Z - Z_- = Z_+^*$.

( ) $(Z_+ \cap Z_-) \cup N^* = N$.

( ) $Z - Z_+ = Z_-$.

Assinale a sequência correta:
a) F – F – V – V – F.
b) F – F – V – V – V.
c) V – F – V – F – F.
d) V – F – V – V – F.

02. (AFA) Entrevistando 100 oficiais da AFA descobriu-se que 20 deles pilotam a aeronave tucano, 40 pilotam o helicóptero Esquilo e

50 não são pilotos. Dos oficiais entrevistados, quantos pilotam o Tucano e Esquilo?
a) 5.
b) 10.
c) 15.
d) 20.

03. (PM - SP) Foi feita uma pesquisa entre 540 jovens universitários sobre a preferência em assistir, durante o Pan-Americano, a competições de natação ou provas de atletismo. O resultado foi colocado na seguinte tabela.

Atividade	Preferência
Natação	313
Atletismo	217
Natação e Atletismo	75

O número de entrevistados que não assiste a nenhuma das competições pesquisadas é
a) 112.
b) 98.
c) 92.
d) 85.
d) 70.

04. (AEPOM) Dados os conjuntos A = {0,1}, B = {0,2,3} e C = {0,1,2,3}, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) cada afirmação abaixo:

( ) $A \subset B$.
( ) $\{1\} \in A$.
( ) $A \subset C$.
( ) $B \subset C$.
( ) $B \supset C$.
( ) $\{0,2\} \notin B$.

Assinale a sequência correta:
a) F – F – V – V – F – F.
b) F – F – V – V – V– F.
c) V – F – V – F – F– F.
d) V – F – V – V – F– F.

05. (FUVEST) Depois de n dias de férias, um estudante observa que:
- choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde.
- quando chove de manhã não chove à tarde.
- houve 5 tardes sem chuva.
- houve 6 manhãs sem chuva.
Podemos afirmar então que n é igual a:
a) 7.
b) 8.
c) 9.
d) 10.
e)11.

06. (AFA) Em um grupo de n cadetes da aeronáutica, 17 nadam, 19 jo-gam basquetebol, 21 jogam voleibol, 5 nadam e jogam bas-quetebol, 2 nadam e jogam voleibol, 5 jogam basquetebol e voleibol e 2 fazem os três esportes. Qual o valor de n, sabendo-se que todos os cadetes deste grupo praticam pelo menos um desses esportes?
a) 31.
b) 37.
c) 47.
d) 51.

07. (EFOMM) Uma pesquisa em que 500 pessoas foram entrevistadas revelou que:
235 compram o jornal X.
245 compram o jornal Y.
250 compram o jornal Z.
130 compram os jornais X e Y.
60 compram os jornais X e Z.
120 compram os jornais Y e Z.
30 não compram nenhum dos jornais.
Quantas pessoas compram os três jornais?
a) 40.
b) 45.
c) 50.
d) 55.
e) 60.

CAPÍTULO 07
Equação do 1º Grau

Chama-se equação do 1º grau na variável x toda sentença do tipo.

$$ax + b = 0 \text{ com } a \neq 0.$$

Resolvendo a equação $ax + b = 0$, obtemos:

$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Sendo $-\frac{b}{a}$ é chamada de raiz da equação.

Exemplo:

$3x - 9 = 0$

Resolução:

$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3$$

Conjunto Solução: $S = \{3\}$.

Exercícios de Treinamento

01. (AEPOM) Calcule o valor que representa o conjunto solução das equações abaixo:
a) $x + 3 = 5$
b) $2x - 4 = 8 - x$
c) $\frac{x}{2} + 1 = 2$
d) $x - \frac{1}{2} = 3$

e) $3x+1=\dfrac{1}{3}$

f) $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}=2$

g) $\dfrac{x+1}{x}=8$

h) $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x-3}{2}=5$

i) $\dfrac{2x+1}{2}+\dfrac{x-1}{3}=-4$

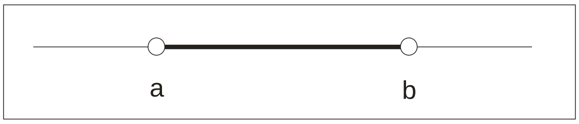
Intervalos

Tendo em vista que o conjunto solução de uma equação do 1° Grau pertence à reta Real, temos que a solução pode corresponder a um valor unitário ou a um conjunto de valores.
Assim veremos que para um conjunto de valores representaremos nosso conjunto solução através de um intervalo.

Dado que $a < b$.

1°. Caso: Intervalo Aberto.

- Representação Geométrica.

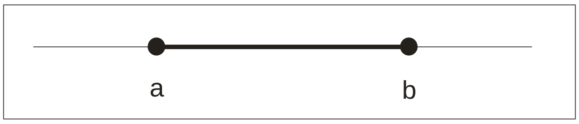


- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \; ou \; \,]a, b[$$

2°. Caso: Intervalo Fechado.

- Representação Geométrica.

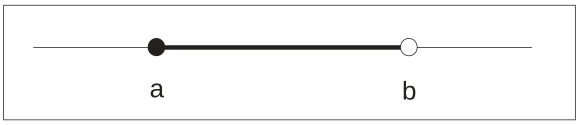


- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \; ou \; \, [a, b]$$

3°. Caso: Semiaberto à direita.

- Representação Geométrica.

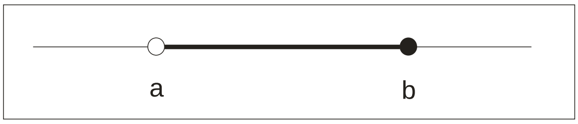


- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \; ou \; \, [a, b[$$

4°. Caso: Semiaberto à esquerda.

- Representação Geométrica.



- Representação Algébrica.

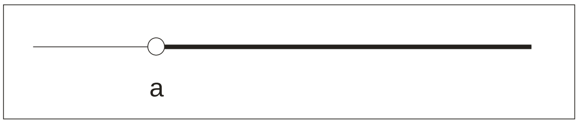
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \; ou \; \,]a, b]$$

Importante: Definimos também os intervalos infinitos na reta Real.

1°. Caso: Intervalo que tende ao infinito positivo.

- Representação Geométrica.

Intervalo aberto

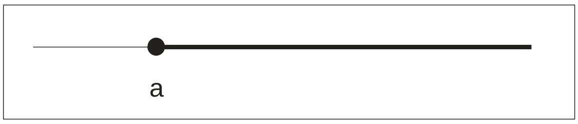


- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|x > a\} \; ou \; \,]a, +\infty[$$

- Representação Geométrica.

Intervalo Fechado



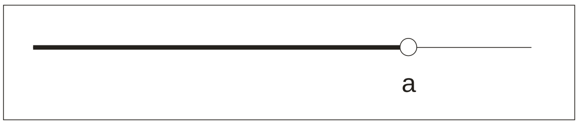
- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geq a\} \; ou \; \, [a, +\infty[$$

2° Caso: Intervalo que tende ao infinito positivo.

- Representação Geométrica.

Intervalo aberto

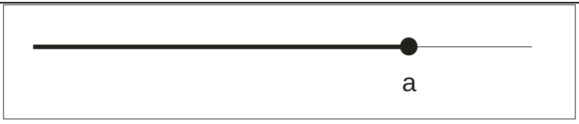


- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|x < a\} \; ou \; \,]-\infty, a[$$

- Representação Geométrica.

Intervalo Fechado



- Representação Algébrica.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|x \leq a\} \; ou \;\;]-\infty, a]$$

Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Usando a notação de conjuntos escreva os seguintes intervalos na forma geométrica e algébrica.
a) S = x é maior ou igual a 4 e menor que 7.
b) S= x é maior que 20.
c) S= x é menor ou igual a 5.
d) S= x é maior que -3 e menor ou igual a 15.

Inequação do 1º grau

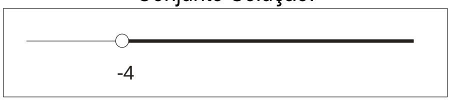
Chamamos de inequações todas as sentenças que possuem desigualdade. Assim, uma inequação que apresente como maior expoente da variável o expoente 1 (um) é denominada **inequação do primeiro grau.**
Exemplo:

01. (AEPOM) Dadas as inequações abaixo. Determine o conjunto solução.
a) $x + 4 > 0$
b) $2x + 1 \leq x + 3$

Resolução:

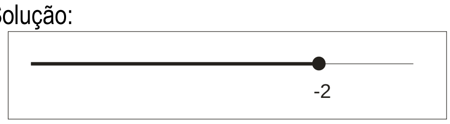
a) $x + 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > -4$

Conjunto Solução:



$$S = \{x \in \mathbb{R}/x > -4\}$$

b) $2x + 1 \leq x + 3$
$$2x - x \leq 3 - 1$$
$x \leq 2$
Conjunto Solução:



$$S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 2\}$$

02. (AEPOM) Calcule o conjunto solução da inequação:
$$(x - 3).(2 - x) > 0$$

Importante: Para resolver Inequações do tipo produto ou do tipo quociente, devemos fazer o estudo do sinal.

Interpretação de Intervalos

Valor que devemos substituir no lugar de x para que:

- Para que o resultado seja igual a zero.
$$x = 0$$
- Para que o resultado seja positivo.
$$x > 0$$
- Para que o resultado seja negativo.
$$x < 0$$

De acordo com a regra de sinais para multiplicação; para que o produto de dois fatores seja positivo, ambos devem ser positivos ou negativos. Para resolução verificaremos qual o valor que devemos substituir no lugar de x para que ambos os fatores sejam positivos.

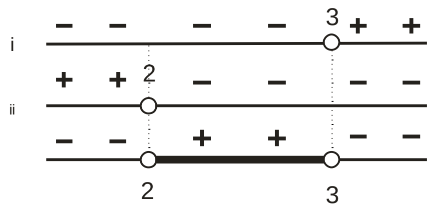
Resolução:

$x - 3 > 0 \quad \Rightarrow x > 3\ (i)$

Interpretação: O fator $(x - 3)$ será positivo se, somente se, substituirmos valores maiores que três no lugar do x.
$2 - x > 0 \quad \Rightarrow \; -x > -2 \;\; \Rightarrow x < 2\ (ii)$

Interpretação: O fator $(2 - x)$ será positivo se, somente se substituirmos valores menores que dois no lugar do x.

Fazendo os intervalos de ambos os fatores, verificaremos qual é o intervalo que torna ambos fatores positivos.



Logo: $S = \{x \in \mathbb{R}/2 < x < 3\}$ e $S =]2,3[$

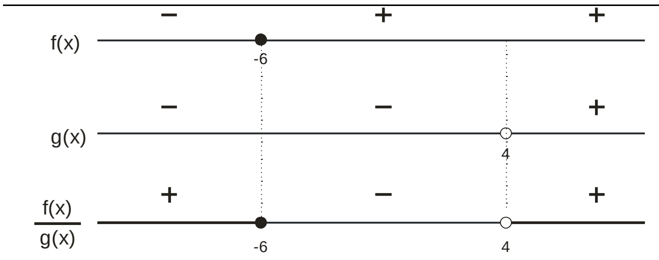
03. (AEPOM) Determine o conjunto solução da inequação $\dfrac{(x+6)}{(x-4)} \geq 0$.

Resolução:

1º. Passo: Construir os intervalos para cada fator da multiplicação.
$$f(x) = x + 6$$
$$x + 6 = 0$$
$$x = -6$$

Importante: O fator que representa o denominador não pode ser igual a zero.
$$g(x) = x - 4$$
$$x - 4 \neq 0$$
$$x \neq 4$$

Intervalos:



Resposta: $S = \{ x \in \mathbb{R} | \ x \leq -6 \ ou \ x > 4\}$

Exercícios Propostos

01. (AEPOM) O valor do número real "$\boldsymbol{a}$" para que as expres-sões $\frac{3a+6}{8}$ e $\frac{2a+10}{6}$; sejam iguais é: 07.

a) 21.
b) 22.
c) 23.
d) 24.
c) 25.

02. (EPCAR) A equação $\frac{3x-11}{x+2} - 2 = 0$:

a) admite as raízes – 2 e $\frac{13}{3}$.
b) admite 15 como solução única.
c) não possui raiz inteira.
d) não pode ser equação fracionária porque o segundo membro é inteiro.
e) não possui solução.

03. (ESA) O Valor de x na Igualdade:

$$\frac{x}{2+\frac{1}{3}} = \frac{3-\frac{1}{4}}{2{,}5} \text{ é:}$$

a) 0,77.
b) $\frac{67}{30}$.
c) 7,7.
d) $\frac{77}{30}$.
e) $\frac{7}{30}$.

04. (EPCAR) Os valores de x, para que se simultaneamente $\frac{x+4}{2} > 3$ e $1 + x \leq 9 - x$ pertencem ao conjunto:

a) $\{x \in IR / 2 < x \leq 4\}$.
b) $\{x \in IR / -4 \leq x < 2\}$.
c) $\{x \in IR / x \leq -4 \ ou \ x > 2\}$.
d) $\{x \in IR / x \leq 2 \ ou \ x > -4\}$.

05. (AEPOM) Sabendo que o quádruplo de um número somado com 9 é igual ao número somado com 6, esse número é:
a) 3.
b) 15.
c) -2.
d) -1.
e) -15.

06. (EPCAR) O valor de x que é solução da equação:

$$3x - 2(x-5) - \frac{5-3x}{2} = 0 \text{ é:}$$

a) $-6 < x < 0$.
b) $-12 < x < -8$.
c) $3 < x < 10$.
d) $12 < x < 18$.

07. (ETE) A raiz da equação:

$$2(2x+3) + 5(x+1) = 8 - 3(x-1) \text{ é:}$$

a) 0.
b) ${}^{11}/_{12}$.
c) ${}^{3}/_{2}$.
d) 12.
e) 15.

CAPÍTULO 08
Equação do 2º Grau

Chama-se equação do 2º grau na variável x toda sentença aberta do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{com } a \neq 0.$$

Fórmula Resolutiva

Para encontrarmos o valor de x na equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, devemos utilizar a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Na qual, $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Classificação das Raízes

$\Delta > 0 \Rightarrow$ A equação admite duas raízes reais e diferentes.
$\Delta = 0 \Rightarrow$ A equação admite duas raízes reais e iguais.
$\Delta < 0 \Rightarrow$ A equação não admite raízes reais.

Soma e Produto das Raízes

Sejam **S** a soma e **P** o produto das raízes (x_1 e x_2) da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos:

$$\mathbf{S} = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\mathbf{P} = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Assim, podemos escrever a equação do 2º grau da seguinte forma:

$$x^2 - \boldsymbol{S}x + \boldsymbol{P} = 0$$

Nota:
Se x_1 e x_2 são raízes de uma equação do 2º grau, então podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Resolução de Equações do 2° Grau incompletas

1°. Caso: Incompleta em b.

$$f(x) = ax^2 + c$$

Exemplo:

a) $f(x) = 2x^2 - 32$

Resolução:

$$0 = 2x^2 - 32$$
$$-2x^2 = -32$$
$$x^2 = \frac{-32}{-2}$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16}$$

Temos que verificar qual o número inteiro (ℤ) que multiplicado por ele mesmo resulta em 16.

$$4 \cdot 4 = 16$$
$$(-4) \cdot (-4) = 16$$

Concluindo: $x = \sqrt{16} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

b) $f(x) = x^2 - 64$

Resolução:

$$0 = x^2 - 64$$
$$-x^2 = -64$$
$$x^2 = \frac{-64}{-1}$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \sqrt{64}$$

Temos que verificar qual o número inteiro (ℤ) que multiplicado por ele mesmo resulta em 64.

$$8 \cdot 8 = 64$$
$$(-8) \cdot (-8) = 64$$

Concluindo:

$$x = \sqrt{64} \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

2°. Caso: Incompleta em c.

$$f(x) = ax^2 + bx$$

Exemplo:

a) $f(x) = 3x^2 - 9x$

Resolução:

Tendo em vista que todos os membros da equação possuem a incógnita x. Transformaremos o binômio de soma para produto através da fatoração por evidência.

Colocando o x em evidência:

$$0 = 3x^2 - 9$$
$$3x^2 - 9 = 0$$
$$3x(x - 3) = 0$$

Observação: Em um produto de dois termos, o resultado só será nulo quando um dos membros for igual a zero.

Assim temos:

$$3x = 0 \qquad x = \frac{0}{3} = 0$$

ou

$$x - 3 = 0 \qquad x = -3$$

Concluindo:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -3$$

3°. Caso: Incompleta em b e c.

$$f(x) = ax^2$$

Exemplo:

a) $f(x) = 4x^2$

Resolução:

$$0 = 4x^2$$
$$4x^2 = 0$$
$$x^2 = \frac{0}{4}$$
$$x^2 = 0$$
$$x = \sqrt{0}$$
$$x = 0$$

Se tentarmos calcular o discriminante desta equação, verificaremos que $\Delta = 0$. Assim a equação possui raízes reais iguais, que neste caso será igual a zero.

Concluindo:

$$x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

Resolução:
Temos:

$\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$ e sabemos que: $\Delta = b^2 - 4ac$

Assim:

$$\Delta = (-1)^2 - 4.3.(-2) \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25$$

Substituindo os valores na fórmula de Bhaskara, obtemos:

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2.3} \Rightarrow x_1 = \frac{1+5}{6} = 1$$

ou

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2.3} \Rightarrow x_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$$

Tendo em vista que $\Delta > 0$, as raízes são reais e diferentes.

Resposta: $\boldsymbol{S = \left\{1; -\frac{2}{3}\right\}}$.

02. (AEPOM) Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Resolução:
Temos:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$e sabemos que: $\Delta = b^2 - 4ac$

Assim:

$$\Delta = (4)^2 - 4.1.(4) \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0$$

Substituindo os valores na fórmula de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(4) + 0}{2.1}$$
$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

Tendo em vista que $\Delta = 0$ as raízes são reais e iguais.

Resposta: $\boldsymbol{S = \{-2\}}$.

03. (AEPOM) Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$x^2 - x + 2 = 0$$

Resolução:

Temos:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ e sabemos que: $\Delta = b^2 - 4ac$

Assim,

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.2$$
$$\Delta = 1 - 8$$
$$\Delta = -7$$

Tendo em vista que $\Delta < 0$, a equação não possui raízes no conjunto dos Reais.

Resposta: $\boldsymbol{S = \emptyset}$

Exercícios Propostos

01. (AEPOM) A equação do 2º grau $px^2 - 3px + 9 = 0$ terá duas raízes reais e iguais, se:
a) p = 9.
b) p = 3.
c) p = 1.
d) p = 2.
e) p = 4.

02. (EPCAR) A equação $ax^2 - 2bx + ab = 0$, com $a, b \neq 0$, admite raízes reais e iguais se, somente se:
a) $b = a^2$.
b) $b = 2a^2$.
c) $a = -b$.
d) $b^2 = 2a$.

03. (AEPOM) A soma e o produto das raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$ são, respectivamente:
a) –1 e 0.
b) 1 e – 1.
c) –1 e 1.
d) – 1 e –1.

04. (FUVEST) A equação do 2° grau $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. A outra raiz é:
a) 1.
b) 2.
c) – 1.
d) – 2.
e) – 3.

05. (AEPOM) O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, o valor do coeficiente c é:
a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.
e) 15.

06. (AEPOM) Quantas raízes reais têm a equação $2x^2 - 2x + 1 = 0$?
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.

07. (UNB) A soma das raízes da equação $3x^2 + 6x - 9 = 0$ é igual a:
a) 4.
b) 1.
c) – 2.
d) – 3.

08. (EEAR) Para que a equação $8x^2 - (a-1)x + a - 7 = 0$, na variável x, tenha duas raízes reais e iguais é necessário que a diferença dos valores de “a” seja:
a) 12.
b) 16.
c) 18.
d) 20.

CAPÍTULO 09
Introdução aos estudos de Função

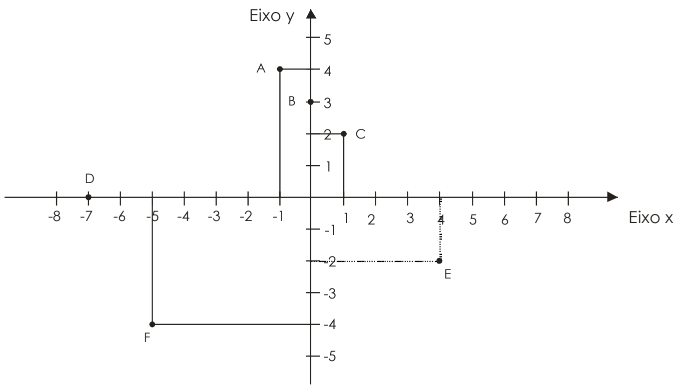
Plano Cartesiano

Par Ordenado: Chama-se par ordenado todo conjunto formado por dois elementos colocados entre parênteses e separados por vírgula. Ambos os elementos estão associados a duas retas reais perpendiculares no ponto zero e representam uma coordenada no plano.
Exemplo:

(1; 2), sendo que o elemento 1 representa o primeiro elemento (Eixo x) e 2 o segundo elemento (Eixo y).

SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Considere dois eixos x e y perpendiculares no ponto zero, os quais determinam um plano α.
Dado os pontos A, B, C e D, neste plano veremos que haverá duas associações a estes pontos nos eixos x e y.



➢ **<u>Os pontos representam:</u>**

$A\ (-1, 4) \rightarrow\ x = -1\ e\ y = 4.$

$B(0,3) \rightarrow\ x = 0\ e\ y = 3.$

$C(1, 2) \rightarrow\ x = 1\ e\ y = 2.$

$D(-7, 0) \rightarrow\ x = -7\ e\ y = 0.$

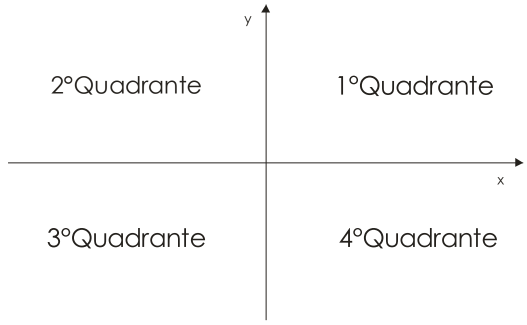
$E\ (4, -2) \rightarrow\ x = 4\ e\ y = -2.$

$F(-5, -4) \rightarrow\ x = -5\ e\ y = -4.$

➢ **<u>Nessas condições, definimos:</u>**

- Abscissa de A é um número real -1.
- Ordenada de A é um número real 4.
- A coordenada de um ponto P qualquer é representado por dois números reais x e y, geralmente indicados na forma de par ordenado (x, y).
- O eixo das abscissas é o eixo x.
- O eixo das ordenadas é o eixo y.
- A origem do sistema é o ponto 0.

Importante: Os eixos x e y dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes, a saber:

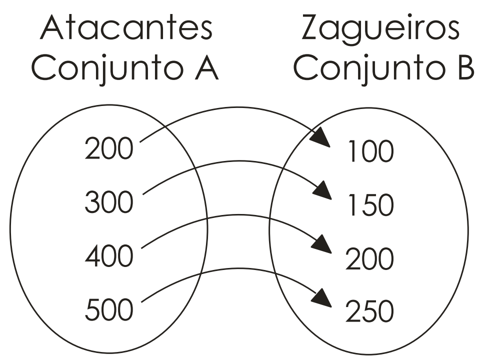


Noção Intuitiva de Função.

Dados os conjuntos:
A= {x ∈ R / x é a distância, em metros, percorrida por um atacante em uma partida de futebol}.

B= {y ∈ R / y é a distância, em metros, percorrida por um zagueiro em uma partida de futebol}.

Sabendo que o atacante percorre em média o dobro da distância que um zagueiro percorre, podemos relacionar estes conjuntos através de uma fórmula matemática.
Representando os conjuntos em forma de diagrama:

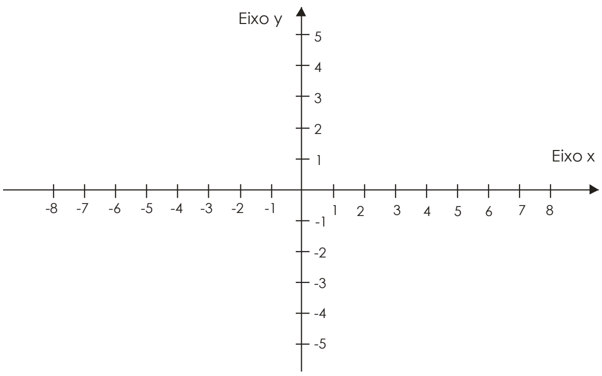


No diagrama, observamos que os elementos do conjunto A possui uma relação com o conjunto B, dada pela equação matemática $y = x/2$, sendo x os valores do grupo A, e y do grupo B.

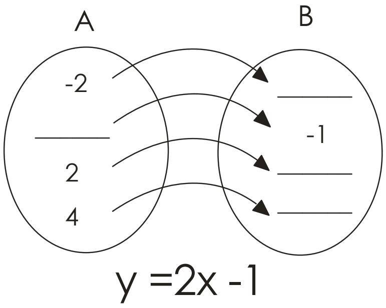
Quando isso ocorre, dizemos que a relação entre os conjuntos A e B é uma função.

Exercícios de Treinamento

01. Localize no plano cartesiano os pontos A(3, 2), B (-2, 5), C(0,-4) e D(5, 0).

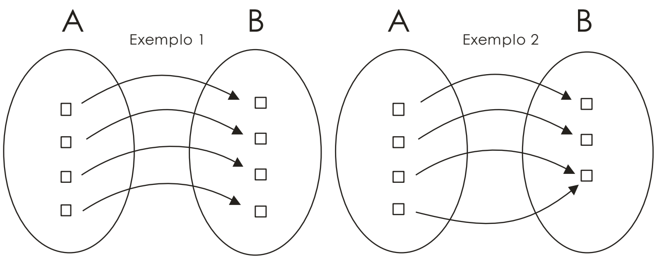


02. Dada a Equação matemática que relaciona dois conjuntos, determine os elementos de acordo com o diagrama abaixo.



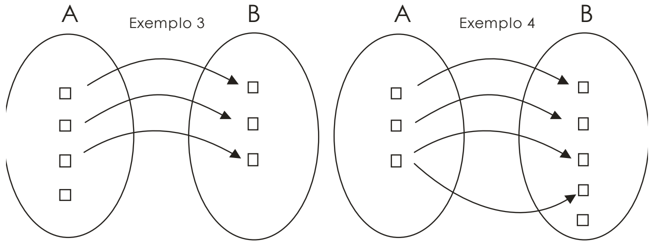
FUNÇÃO

Conceito: Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação de A em B recebe o nome de função de A em B se, somente se, para todo x ∈ A existe um só y ∈ B tal que (x, y) ∈ f.



1ª. Observação: No exemplo 1, cada elemento de A está relacionado com um único elemento de B o que caracteriza uma função. No exemplo 2, embora haja elementos de B sem relação com o conjunto A e um elemento de B tem relação com dois elementos de A não fere a definição de uma função.

Importante: Nem toda relação será considerada uma função, logo vamos verificar os tipos de relações entre conjuntos que não são consideradas funções.

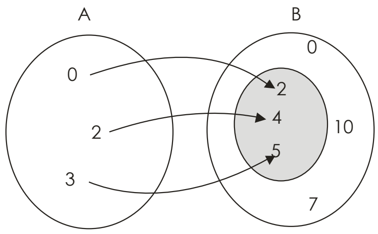


2ª. Observação: No exemplo 3, percebemos que um elemento do conjunto A não possui relação com nenhum elemento do conjunto B, por isso não representa uma função. No exemplo 4, existe um elemento do conjunto A que se relaciona com dois elementos do conjunto B e, por isso, não representa uma função.

Domínio, Imagem e Contradomínio

- **1°. Caso:** No diagrama de Venn.

Sejam os conjuntos:
$A = \{0, 2, 3\}$
$B = \{0, 2, 4, 5, 7, 10\}$
Vamos considerar a função $f: A \to B$ definida por $y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$



Observando o diagrama da função, vamos definir:

- O conjunto A é denominado Domínio da função, que representamos:

$$D(f) = \{0, 2, 3\}$$

- O conjunto B é denominado Contradomínio da função, que representamos:

$$CD\,(f) = \{0, 2, 4, 5, 7, 10\}$$

- De acordo com a relação indicada pelas setas, percebemos que somente os elementos do conjunto {2, 4, 5} que é subconjunto de B, possui relação com o conjunto A.

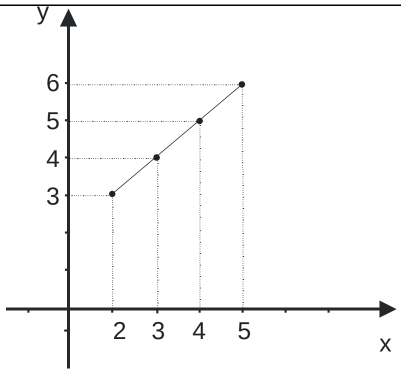
Este subconjunto determina a imagem da função que representamos:

$$Im\,(f) = \{2, 4, 5\}$$

- **2°. Caso**: Plano Cartesiano.

Vejamos o gráfico da função:

$$f(x) = x + 1, onde\ 2 \leq x \leq 5$$



De acordo com a função apresentada a fim de restringir nossa função em um intervalo, podemos trabalhar com qualquer valor de x entre 2 e 5.
Observando o gráfico da função, vamos definir:

- O eixo x é denominado Domínio da função, que representamos:
$$D\ (f)\ =\ \{x \in \mathbb{R} |\ 2 \leq x \leq 5\}$$

- O eixo y é denominado Contradomínio da função, que representamos:
$$CD\ (f)\ =\ \mathbb{R}$$

- De acordo com a relação indicada pelos pares ordenados, percebemos que somente alguns elementos do eixo y (3, 4, 5, 6) possuem relação com os elementos do eixo x.

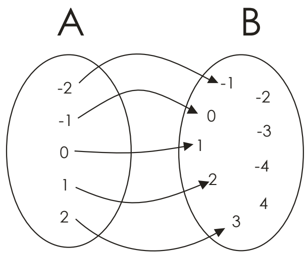
Estes elementos chamamos de imagem da função, que representamos:
$$Im\ (f)\ =\ \{x \in \mathbb{R} |\ 3 \leq x \leq 6\}$$

Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Dados os conjuntos:
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, \}$$
$$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Determinado o domínio da função, contradomínio e imagem da função $f(x) = x + 1$.

Resolução:
1º Passo: Calcular as imagens.
$f(-2) = -2 + 1 = -1$
$f(-1) = -1 + 1 = 0$
$f(0) = 0 + 1 = 1$
$f(1) = 1 + 1 = 2$
$f(2) = 2 + 1 = 3$
2º Passo: Construir o diagrama.



Concluindo:

$D(f)\ =\ \{-2, -1, 0, 1, 2, \}$
$CD\ (f)\ =\ \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
$Im(f)\ =\ \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

02. (AEPOM) Determinar, em $\mathbb{R}$, o domínio da função:
$$f(x)\ =\ \frac{x}{\sqrt{3x+4}}$$

Resolução:

Ao observar a função f, temos que considerar duas condições:
1ª. Observação: Condição de Existência do Denominador → O radicando do denominador da função deverá ser maior ou igual a zero, pois não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos Reais. Assim,
$$3x + 4 \geq 0$$
2ª. Observação: O denominador da função não poderá ser igual a zero, pois não existe divisão por zero. Assim,
$$3x + 4 \neq 0$$

Das condições acima, concluímos: para que $f(x)$ seja real, isto é, esteja definida, devemos ter:

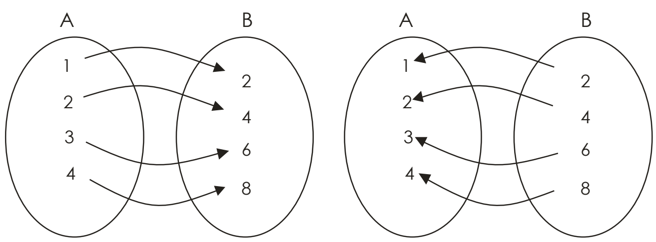
$$3x\ +\ 4\ >\ 0$$
$$\Rightarrow\ x\ >\ -\ \frac{4}{3}$$

Logo:
$$D(f(x))\ =]\ -\ \frac{4}{3}, +\infty\ [$$

Função Inversa

Dados A = {1, 2, 3, 4} e B= {2, 4, 6, 8}, considerando as funções.
$f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 2x$
$g: B \rightarrow A$ definida por $g(x) = {}^{x}/_{2}$

Notação: $f^{-1}(x) = {}^{x}\!/_{2}$



D(f)={1, 2, 3, 4}
Im(f)={2, 4, 6, 8}

D(g)={2, 4, 6, 8}
Im(g)={1, 2, 3, 4}

Vamos observar que a função g é obtida pela inversão das setas no diagrama acima e também:

$$D(f)\ =\ Im(g)$$
$$D(g)\ =\ Im(f)$$

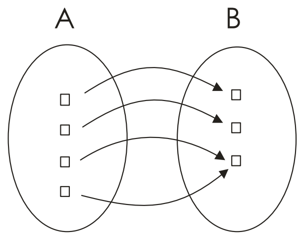
Então dizemos que a função g é a função inversa de f

$$\boxed{g(x) = f^{-1}(x)}$$

Nota: Definições importantes:

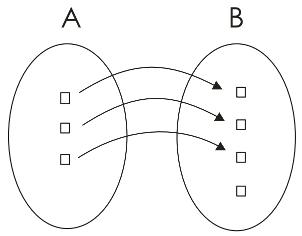
01.Função Sobrejetora: uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A.

Dado $f: A \to B$



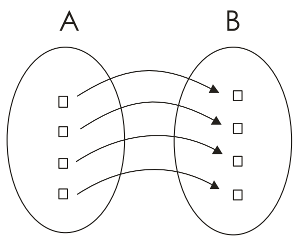
f é sobrejetora $\leftrightarrow Im(f) = B$

02. Função Injetora: uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.



Na injetora pode ocorrer $\to Im(f) \neq B$

03. Função Bijetora: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.



Observação: para que uma função tenha uma inversa, esta deverá ser bijetora.

Processo algébrico para o cálculo da função inversa.

Observe o exemplo:

01. (AEPOM) Achar a equação que representa a função inversa de.

a) $y = 2x$

1º. Passo: Inverter x e y e depois isolar a incógnita y.

$x = 2y$

$\frac{x}{2} = y$

Resposta: $y = \frac{x}{2}$ e a inversa da função $y = 2x$

b) $y = x + 2$

1º. Passo: Inverter x e y e depois isolar a incógnita y.

$x = y + 2$

$x - 2 = y$

Resposta: $y = x - 2$ é a inversa da função $y = x + 2$

Função Composta

Seja f uma função do conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C; chama-se função composta de g em f a função h de A em C definida por

$$\boxed{h(x) = g(f(x))}$$

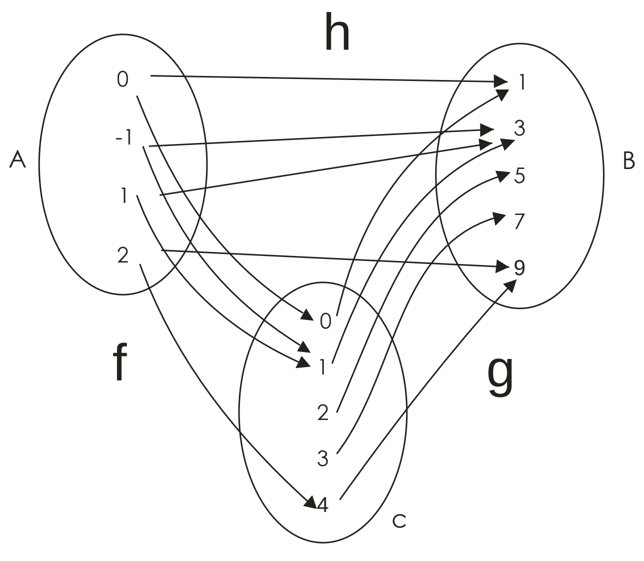
Indicaremos esta função h por $g \circ f$ (lê-se: g circulo f).

Exemplo: Sejam os conjuntos A={-1, 0, 1, 2}, e B={0, 1, 2, 3, 4} e C={1, 3, 5, 7, 9}, vamos considerar as funções:

$f: A \to C$ definida por $f(x) = x^2$

$g: C \to B$ definida por $g(x) = 2x + 1$

Calculando as respectivas imagens das funções f e g, teremos o seguinte diagrama



Notamos que, partindo do conjunto A em direção ao conjunto B, temos que passar pelo conjunto C assim definimos a função f de $A \to C$ e a função g de $C \to B$, contudo existe uma única função que nos leva diretamente de $A \to B$. Esta função h de $A \to B$ que substitui f e g. A nova função obtida é chamada de função composta.

Exemplo:

Cálculo algébrico da função $h(x)$.

Dados: $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$.

Temos que: $h(x) = g(f(x))$

Devemos substituir dentro da função:

$g(x) = 2x + 1$ a função:

$f(x) = x^2$ da seguinte maneira:

$g(x^2) = 2 \cdot x^2 + 1$

$h(x) = 2x^2 + 1$

Testando:
$$h(0) = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$
$$h(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 3$$
$$h(1) = 2 \cdot (1)^2 + 1 = 3$$
$$h(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 9$$

Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Dados $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 3x$, Calcular $g(f(x))$ e $f(g(x))$.

Resolução:

$g(f(x)) = g(x^2 + 2) = 3 \cdot (x^2 + 2)$

$g(f(x)) = 3x^2 + 6$

$f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 + 2$

$f(g(x)) = 9x^2 + 2$

02. (AEPOM) Considere três funções f, g e h, tais que:
- A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade.
- A função g atribui a cada país, a sua capital.
- A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Podemos afirmar que, das funções dadas, são injetoras:
a) $f, g \; e \; h$
b) $f \; e \; h$
c) $g \; e \; h$
d) apenas h
e) nenhuma delas.

Resolução:

Sabemos que numa função injetora, elementos distintos do domínio, possuem imagens distintas, ou seja:
$$x_1 \neq x_2 \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Logo, podemos concluir que:
- f não é injetora, pois duas pessoas distintas podem ter a mesma idade.
- g é injetora, pois não existem dois países distintos com a mesma capital.
- h é injetora, pois dois números naturais distintos, possuem os seus dobros também distintos.

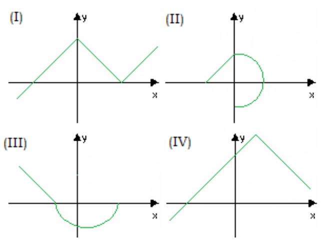
Assim, concluímos que a alternativa correta é a de letra C.

Exercícios Propostos

01. (AEPOM) Considere a função dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. O domínio e a imagem da função é:
a) $D(f) = [1; +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.
b) $D(f) =]1; +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.
c) $D(f) = [1; +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.
d) $D(f) =]1; +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}_-^*$.
e) $D(f) =]1; +\infty[$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

02. (AEPOM) Considere uma função dada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$ O domínio da função é:
a) $\left\{x \in R / x \leq -\dfrac{5}{2}\right\}$.
b) $\left\{x \in R / x > -\dfrac{5}{2}\right\}$.
c) $\left\{x \in R / x \geq -\dfrac{5}{2}\right\}$.
d) $\left\{x \in R / x < -\dfrac{5}{2}\right\}$.

03. Observe os gráficos a seguir:
:



Podemos afirmar que:
a) todos os gráficos representam funções.
b) os gráficos I, III e IV representam funções.
c) apenas o gráfico II representa uma função.
d) apenas os gráficos I e IV representam funções.
e) nda.

04. (EEAR) Se $f(n) = \dfrac{n}{2}$, se n é par e $f(n) = \dfrac{n+1}{2}$, se n é ímpar. Define uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, então:

a) f é apenas injetora.
b) f é bijetora.
c) f não é injetora, nem sobrejetora.
d) f é apenas sobrejetora.

05. (AFA) Se f e g são funções de IR em IR definidas por $f(3x + 2) = \dfrac{3x-2}{5}$ e $g(x - 3) = 5x - 2$, então $f(g(x))$ é:
a) $\dfrac{x-4}{2}$.
b) $\dfrac{5x+9}{5}$.
c) $5x + 13$.
d) $\dfrac{5x+11}{5}$.

CAPÍTULO 10
Função do 1º Grau

Chama-se *função do 1º. grau ou função Afim* toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo:
$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

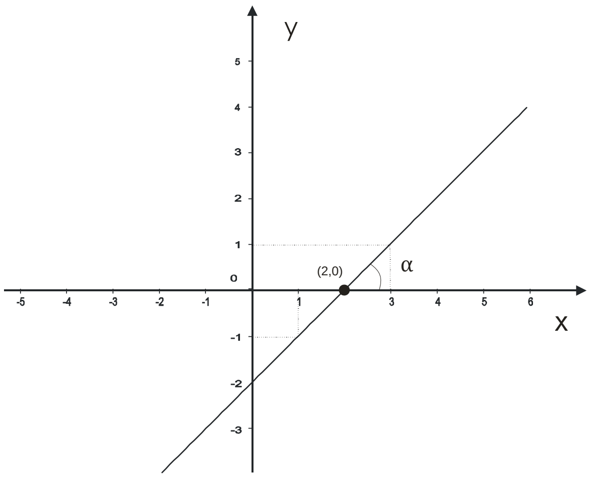
com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.
Termos:
a → Coeficiente Angular.
b → Coeficiente Linear ou termo independente.

Gráfico

O gráfico da função do 1°. Grau é uma reta.
Assim vamos considerar as seguintes funções:

a) A função $f(x) = ax + b$ é crescente quando a >0.

Exemplo:
Vamos esboçar o gráfico $f(x) = x - 2$.



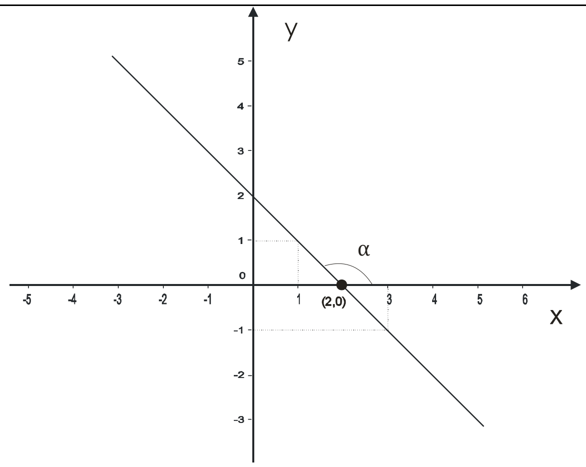
$$f(x) = x - 2$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-3	-2	-1	0	1

Características:
- $D = \mathbb{R}$.
- $Im = \mathbb{R}$.
- f é Crescente.
- O ponto $x = 2$ corresponde a Raiz da Equação.

b) A função $f(x) = ax + b$ é decrescente quando a < 0.

Exemplo:
Vamos esboçar o gráfico $f(x) = -x + 2$



$$f(x) = -x + 2$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0	-1

Características:
- $D = \mathbb{R}$.
- $Im = \mathbb{R}$.
- f é Decrescente.
- O ponto $x = 2$ corresponde a Raiz da Equação.

Cálculo dos termos de uma função do 1°. Grau

- Coeficiente Angular.

$$a = tg\alpha$$

α → ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas.

- Coeficiente Linear ou termo independente.

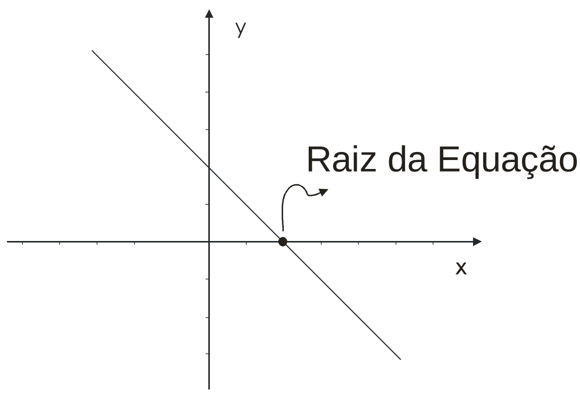
b → é o ponto da ordenada (eixo y) que o gráfico intercepta.

$$f(x) = ax + b$$
$$y = a.0 + b$$
$$y = b$$

Raiz ou Zero da Função

Calcular a raiz ou zero de uma função é determinar o valor de *x* que torna $f(x) = 0$ ou $y = 0$. Assim, para uma função do tipo:

$f(x) = ax + b$ temos:



$$f(x) = 0$$
$$ax + b = 0$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Assim: $-\frac{b}{a}$ é chamada raiz da função.
Exemplo:

01. (AEPOM) Calcule o zero da função:

$$f(x) = 2x + 6$$

Resolução:
Devemos encontrar x que torna y = 0. Assim,

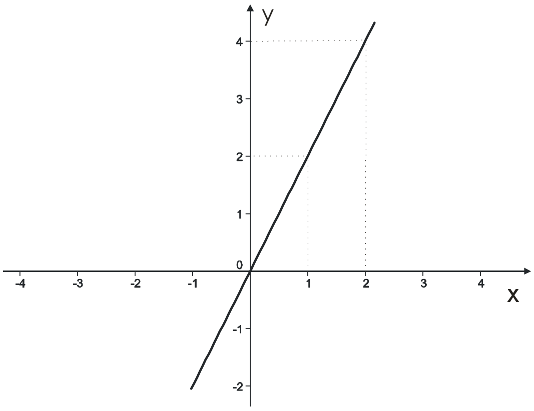
$$2x + 6 = y$$
$$2x + 6 = 0$$
$$2x = -6$$
$$x = -\frac{6}{2}$$
$$x = -3$$

Nota:
Concluímos que – 3 é o valor que devemos substituir no lugar de x para que y seja igual a zero.

Tipos de Funções

Função Linear é toda função do 1º. grau em que b = 0.
Exemplo:

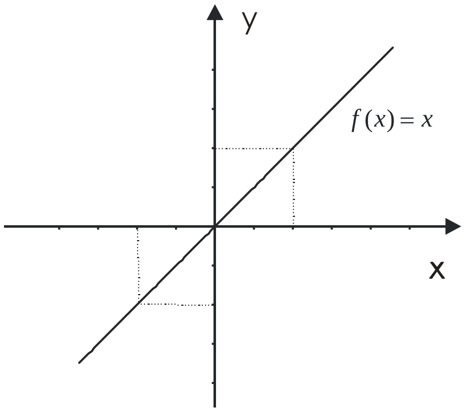
$$f(x) = 2x$$



Nota:
Na função linear,o gráfico passa pela origem do plano cartesiano.
Características:

- $D = \mathbb{R}$.
- $Im = \mathbb{R}$.
- f é Crescente.
- A Raiz da Equação tem Abscissa 0.

Importante:
<u>*Função identidade*</u>*:* é a função linear $f(x) = x$ em que o gráfico passa pela origem do plano cartesiano. Também o gráfico é considerado como a bissetriz do 1° e 4° quadrante.

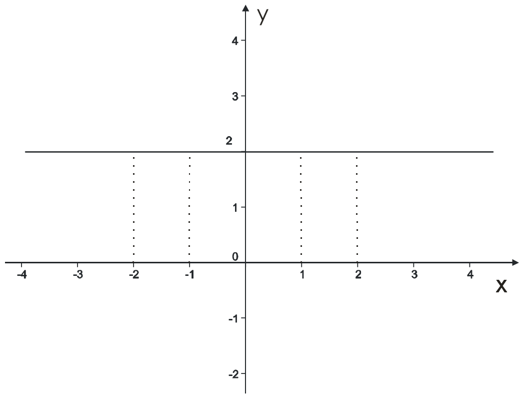


Características:

- $D = \mathbb{R}$.
- $Im = \mathbb{R}$.
- f é Crescente.
- A Raiz da Equação é igual a zero.

Função Constante é toda função do tipo $f(x) = b$.
Exemplo:

$$f(x) = 2$$



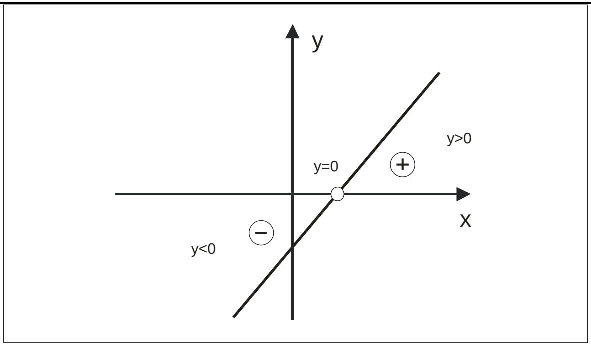
Características:

- $D = \mathbb{R}$.
- $Im = 2$.
- f é Constante.
- A Equação não possui raiz definida.

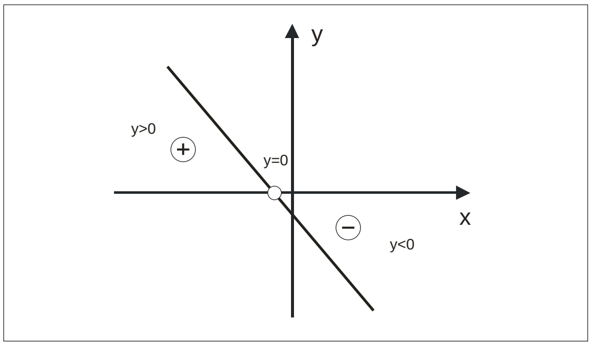
Nota:
Na função constante, o valor da imagem é sempre igual e independe do valor de x.

Estudo do Sinal

De acordo com o valor de x, poderemos ter uma imagem nula, positiva ou negativa.
1°. Caso: $a > 0$.



2°. Caso: $a < 0$.



Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Calcule o valor da Raiz da função:

$$f(x) = 2x - 8$$

Resolução:
Raiz é o valor de x quando y = 0.

$$y = 2x - 8$$
$$0 = 2x - 8$$
$$-2x = -8$$
$$x = \frac{-8}{-2}$$
$$x = 4$$

Concluindo: o valor da raiz da função é 4.

02. (AEPOM) Determine a função $f(x) = ax + b$, sabendo-se que $f(2) = 5$ e $f(3) = -10$

$y = 15x + 35.$
$y = -15x - 35.$
$y = -15x + 35.$
$y = -10x - 35.$

Resolução:
Sabendo que $y = ax + b$
Temos:

$$f(2) = 5;\ x = 2\ e\ y = 5$$

$$f(3) = -10; x = 3\ e\ y = -10$$

Assim podemos escrever:

$$\begin{cases} 5 = 2.a + b & (i) \\ -10 = 3.a + b & (ii) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro $(i)\ e\ (ii)$, vem:
$5 - (-10) = 2.a + b - (3.a + b)$
$15 = -a \Rightarrow a = -15$

Substituindo o valor de a na primeira equação (poderia ser na segunda), temos:
$5 = 2.(-15) + b \Rightarrow b = 35.$

Logo, a função procurada é: $y = -15x + 35$

Resposta: alternativa **c.**

03. (AFA) Seja f uma função Real do primeiro grau com $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$. Então, o valor de $f(3)$ é:
$a) -3.$
$b) -2{,}5.$
$c) -2.$
$d) -1{,}5.$

Resolução:

Sabendo que: $y = ax + b;\ t$emos:

$$f(0) = a.0 + b$$
$$f(0) = b \qquad (i)$$
$$f(1) = a.1 + b$$
$$f(1) = a + b\ (ii)$$
$$f(-1) = (-1).a + b$$
$$f(-1) = -a + b\ (iii)$$

Substituindo os valores de $(i), (ii)\ e\ (iii)$ nas equações dadas pelo problema, temos:

$$f(0) = 1 + f(1)$$
$$b = 1 + a + b$$
$$a = -1$$

$$f(-1) = 2 - f(0)$$
$$-a + b = 2 - (b)$$
$$-(-1) + b = 2 - b$$
$$b + b = 2 - 1$$
$$b = 1/2$$

Assim temos que a função é $f(x) = -x + 1/2.$

Concluindo:

$$f(3) = -3 + 1/2$$
$$f(3) = -5/2$$
$$f(3) = -2{,}5$$

Resposta: alternativa **b.**

04.(ESPCEX) Dada a função $f(x) = ax + b$, satisfaz a condição $f(5x + 2) = 5.f(x) + 2$, pode-se afirmar então que:
$a)\ a = 2b.$
$b)\ a = 2b + 2.$
$c) a = 2.(b + 2).$
$d) a = 2.(b + 1).$
$e) a = 2b + 1.$

Resolução:
Sabendo que: $y = ax + b;\ t$emos:

$$f(5x+2) = a.(5x+2) + b \text{ (i)}$$

$$5.f(x) + 2 = 5(ax+b) + 2 \text{ (ii)}$$

Fazendo (i) = (ii), temos:

$$a.(5x+2) + b = 5(ax+b) + 2$$
$$5ax + 2a + b = 5ax + 5b + 2$$
$$2a = 5b - b + 2$$
$$2a = 4b + 2 \quad \div (2)$$
$$a = 2b + 1$$

Resposta: alternativa **e**.

Exercícios Propostos

01. (PM) Dada a função, definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule a e b, sabendo-se que $f(1) = 4$ e $f(-1) = -2$.
a) 4 e 2.
b) 3 e 5.
c) 1 e 1.
d) 3 e 1.
e) 1 e 2.

02. (ESPCEX) Sabendo que a função é $y = ax + b$, pode-se afirmar que:
a) O gráfico da função passa sempre pela origem.
b) O gráfico da função corta sempre o eixo das ordenadas.
c) O zero da função é b/a.
d) A função é crescente para $a < 0$.
e) O gráfico nunca passa pela origem.

03. (ESPCEX) Seja a função real tal que $f(x-2) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 8$, então o valor de $a\,.\,b$ é:
a) -32.
b) -23.
c) -21.
d) 12.
e) 36.

04. (EEAR) O maior valor inteiro de k, que torna crescente a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 - (3 + 5k)x$, é:
a) 1.
b) 0.
c) -1.
d) 2.

05. (ESPCEX) Dada a função $f(x) = ax + b$, satisfeita a condição $f(5x+2) = 5f(x) + 2$, pode-se afirmar então que:
a) $a = 2b$.
b) $a = b + 2$.
c) $a = 2(b+2)$.
d) $a = 2(b+1)$.
e) $a = 2b + 1$.

06. (AFA) Seja f uma função definida para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes afirmações:

$$f(x) = \begin{cases} f(3) = 2 \\ f(x+3) = f(x) \cdot f(3) \end{cases}$$

Então $f(-3) + f(0)$ vale:
a) – 6.
b) 1.
c) $\frac{1}{2}$.
d) $\frac{3}{2}$.

07. (EEAR) Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} -1, se\ x = 2\ ou\ x = 3 \\ \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}, se\ x \neq 2\ e\ x \neq 3 \end{cases}$$

O valor de $\dfrac{f(1)}{f(3)}$ é:

a) $-\frac{3}{2}$.
b) $-\frac{1}{2}$.
c) $\frac{1}{2}$.
d) $\frac{3}{2}$.

CAPÍTULO 11
Função do 2º Grau

Chama-se *função do 2º grau ou função Quadrática* toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$.

Temos:

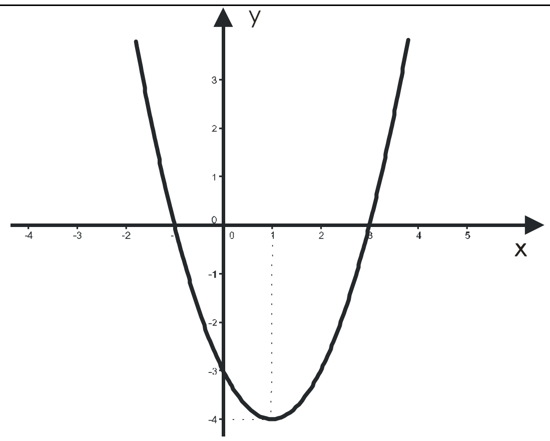
$a \to$ Coeficiente do x^2.
$b \to$ Coeficiente do x.
$c \to$ Termo independente.

Gráfico

O gráfico da função do 2° Grau é uma parábola.
Assim vamos considerar as seguintes funções:

a) Se $a > 0$, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Exemplo:
Vamos esboçar o gráfico $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

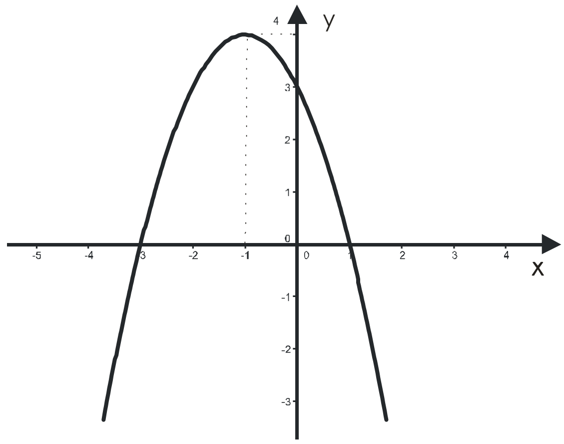


$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0

b) Se $a < 0$, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Exemplo:
Vamos traçar o gráfico $f(x) = -x^2 - 2x + 3$



$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	3	4	3	0	-5

Raiz ou Zero da Função

Como vimos anteriormente, devemos determinar o valor de x que torna $f(x) = 0$. Assim, para uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ utilizamos a fórmula de Bhaskara para encontrarmos as raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim temos que as raízes representam as seguintes equações:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

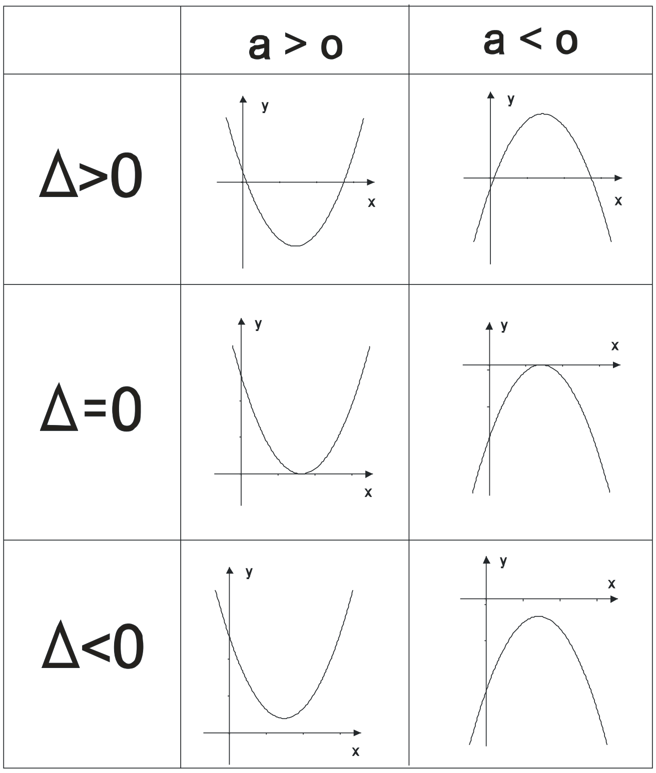
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estudo do Discriminante (Δ)

Na fórmula de Bhaskara, o radicando $b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante (Δ) da função. Assim, Δ poderá assumir três valores, a saber:

$\Delta > 0 \Rightarrow$ A função admite duas raízes reais e diferentes.
$\Delta = 0 \Rightarrow$ A função admite duas raízes reais e iguais.
$\Delta < 0 \Rightarrow$ A função não admite raízes reais.

Nota:
Dependendo dos valores de a e de Δ, o gráfico da função poderá ter seis tipos possíveis, a saber:



Vértice do Gráfico

O Vértice é o ponto da trajetória de uma parábola em que o valor de y atinge o seu valor máximo ou mínimo.

Importante: O vértice (V) da parábola é equidistante das raízes x_1 e x_2 e suas coordenadas são $V(x_v; y_v)$.

Fórmulas do ponto:

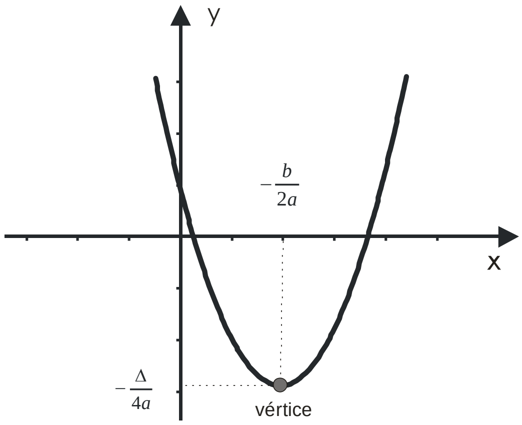
$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Vamos considerar os seguintes casos:

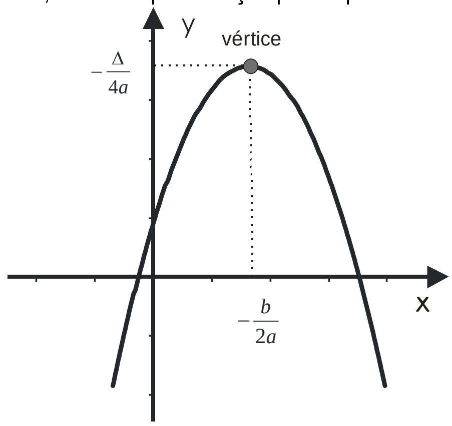
- 1°. Caso:

Quando $a > 0$, dizemos que a função possui ponto de mínimo.



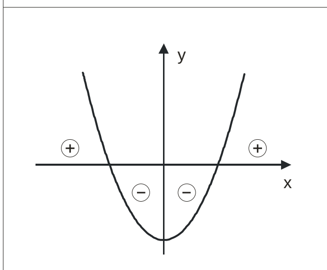
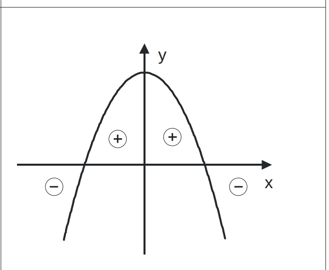
- 2°. Caso:

Quando $a < 0$, dizemos que a função possui ponto de máximo.

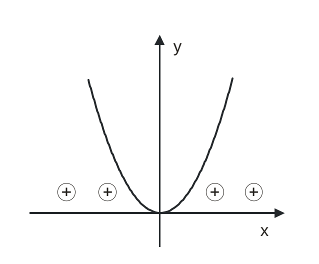
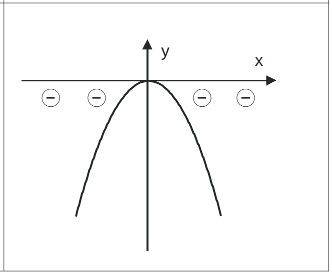


Estudo do Sinal

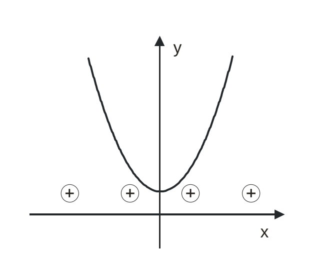
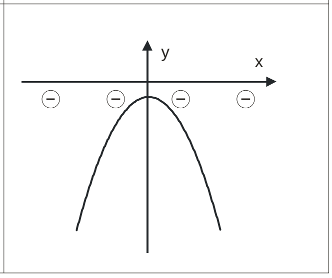
a) 1º. Caso: $\Delta > 0$.

a>0	a<0
	

b) 2º. Caso: $\Delta = 0$.

a>0	a<0
	

c) 3º. Caso: $\Delta < 0$.

a>0	a<0
	

Soma e Produto das Raízes da equação do 2° Grau

- Soma das Raízes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Produto das Raízes:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercício resolvido

01. (AEPOM) Calcule o valor das raízes da Equação.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$

Primeiramente identificar as termos **a**, **b** e **c**.

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = -6 \end{cases}$$

Resolvendo a equação temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

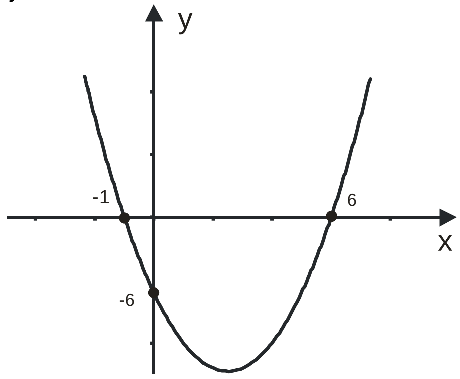
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{5+7}{2};x_2=\frac{5-7}{2}$$

$$x_1=6$$

$$x_2=-1$$

Esboçando o Gráfico



b) $-x^2+3x+4=0$

Primeiramente identificar as termos **a**, **b** e **c**.

$$-x^2+3x+4=0\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=4\end{cases}$$

Resolvendo a equação temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

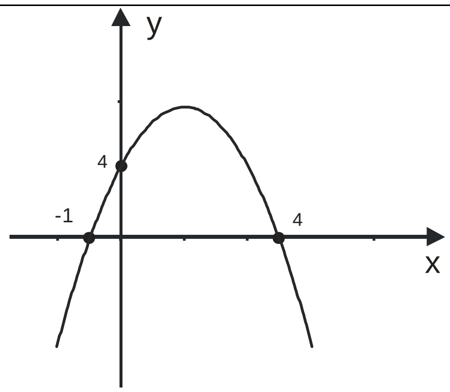
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot4}}{2\cdot(-1)}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2}\Rightarrow x_1=\frac{-3+5}{-2};x_2=\frac{-3-5}{-2}$$

$$x_1=-1$$

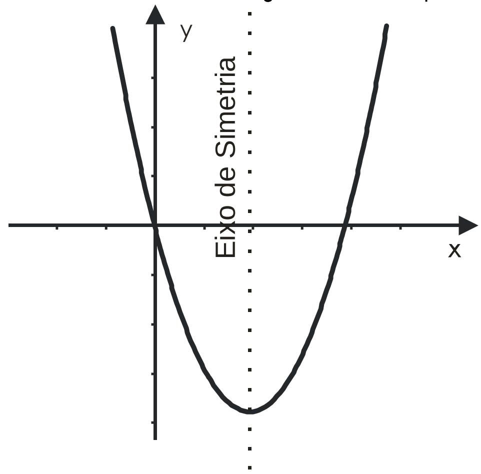
$$x_2=4$$

Esboçando o Gráfico



Eixo de Simetria

É o eixo que paralelo ao eixo y passa pelo vértice da parábola. Também o eixo de simetria divide o gráfico em duas partes iguais.

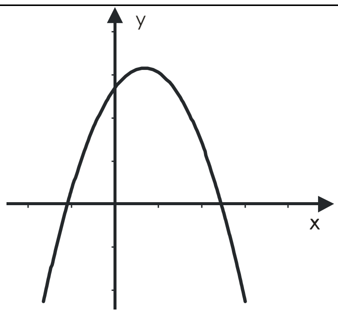


Exercícios Propostos

01. (ESPCEX) Seja a função real $f(x) = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x + 1$. Das afirmações:
I) f é função afim para $m = 2$.
II) f é função constante para $m = -2$.
III) f é função quadrática para $m \neq 2$ e $m \neq -2$.
IV) f tem uma raiz igual a –1 para $m = 3$.
São corretas:
a) I, II e IV.
b) I e III.
c) II, III e IV.
d) III e IV.
e) I, II e III.

02. (EEAR) A fórmula que define a função quadrática, cuja representação gráfica é uma parabólica, cuja concavidade é voltada para baixo e que não intercepta o eixo das abscissas é:
a) $-x^2 - 2x - 1$.
b) $x^2 - 5x + 7$.
c) $-2x^2 + 3x - 2$.
d) $-x^2 - 5x - 6$.

03. (AEPOM) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



a) $a < 0, b < 0\ e\ c > 0.$
b) $a > 0, b > 0\ e\ c < 0.$
c) $a > 0, b > 0\ e\ c > 0.$
d) $a < 0, b > 0\ e\ c < 0.$
e) $a < 0, b > 0\ e\ c > 0.$

04. (EPCAR) O vértice da parábola correspondente à função $f(x) = x^2 - 6x + 25$ está associado ao par:
a) (0, 25).
b) (-1, 32).
c) (-2, 52).
d) (3, 16).

05. (AEPOM) Um retângulo possui $(1 - x)\ metros$ de base e $x\ metros$ de altura. Sabendo que a área desse polígono é $(base \cdot altura)$, o valor de x para que esse retângulo tenha área máxima deve ser:
a) 1.
b) $1/4$.
c) $1/2$.
d) $3/4$.

06. (AEPOM) Sabe-se que -2 e 3 são raízes de uma função quadrática. Se o ponto (-1; 8) pertence ao gráfico dessa função, então:
a) o seu valor máximo é 1,25.
b) o seu valor mínimo é 1,25.
c) o seu valor máximo é 0,25.
d) o seu valor mínimo é 12,5.
e) o seu valor máximo é 12,5.

07. (EEAR) Para que a equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$ tenha uma raiz nula e outra positiva, o valor de m deve ser:
a) -4.
b) 4.
c) -3.
d) 3.

08. (ESPCEX) Sejam m e n dois números inteiros positivos tais que m e n são impares consecutivos com m.n = 483. Nestas condições, o valor de m + n é igual a:
a) 64.
b) 52.
c) 46.
d) 44.
e) 32.

CAPÍTULO 12

Relembrando as principais propriedades de potenciação.

Para $a \in \mathbb{R}$ temos: $\begin{cases} a^1 = a \\ a^0 = 1 \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \end{cases}$, com $a \neq 0$

Propriedades:
Seja $a \neq 0, b \neq 0, m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{Z}$, temos:

Propriedades e Regras		
P1)	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Repete-se a base e somam-se os expoentes.
P2)	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Repete-se a base e subtraem-se os expoentes.
P3)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$	Eleva-se o numerador e o denominador ao expoente comum.
P4)	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Repete-se a base e multiplicam-se os expoentes.
P5)	$(ab)^n = a^n b^n$	Eleva-se cada fator ao expoente comum.
P6)	$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$	Quando invertemos a base, muda-se o sinal do expoente.

Expoente fracionário

Sendo $\boldsymbol{a}$ um número real positivo e m e n números inteiros positivos, define-se:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \quad e \quad \boxed{a^{-\frac{m}{n}} = 1/\sqrt[n]{a^m}}$$

Equações Exponenciais

Chama-se equações exponenciais toda equação que contém incógnita no expoente do tipo:

$$a^x = b$$

Elementos:
$a \rightarrow$ Base.
$x \rightarrow$ Expoente.
$b \rightarrow$ Potência.

Exemplo de equação:

a) $2^x = 64$ b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 90$ c) $\frac{5^x}{100} = \frac{1}{4}$

Resoluções de Equações Exponenciais

O principal objetivo é igualar as bases de ambos os lados da igualdade para que seus expoentes também sejam iguais.
Exemplos:

a) $2^x = 64$

Resolução: fatorando para igualar as bases:

$$2^x = 2^5$$

→ Bases iguais, expoentes iguais.

Resposta: $x = 5$ ou $S = \{5\}$

b) $\left(\sqrt{5}\right)^x = 125$

Resolução: fatorando para igualar as bases:

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x = 5^3$$

$$\frac{x}{2} = 3 \therefore x = 6$$

Bases iguais, expoentes iguais.
Resposta: $x = 6$ ou $S = \{6\}$

c) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 90$

Resolução:
Usaremos as propriedades de potenciação para reduzir os expoentes e fatorar o que for necessário.

$3^x \times 3^1 + \frac{3^x}{3^1} = 90$ Colocaremos o 3^x em evidência.

$$3^x\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 90 \Rightarrow 3^x\left(\frac{10}{3}\right) = 90$$

$$3^x = 90 \times \frac{3}{10} \Rightarrow 3^x = 27$$

$$3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

Resposta: $x = 3$ ou $S = \{3\}$

d) $\frac{5^x}{100} = \frac{1}{4}$

Resolução:
Fazendo as transformações necessárias

$$\frac{5^x}{100} = \frac{25}{100} \Rightarrow 5^x = 100 \times \frac{25}{100}$$

$$5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

Resposta: $x = 2$ ou $S = \{2\}$

Função Exponencial

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$ é definida como função exponencial de base a para todo $x \epsilon \mathbb{R}$ se, somente se, obedecer a seguinte condição de existência:
Forma:
$f(x) = a^x$. Existe para todo $a \neq 1$ e $a > 0$, ou seja, a base não pode ser unitária e não pode ser negativa.

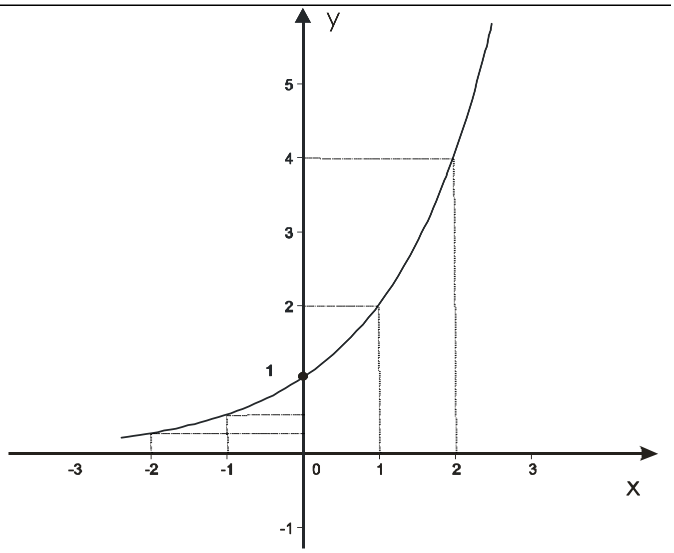
Exemplos de funções exponenciais.

$$f(x) = 5^x \quad e \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Gráfico da função exponencial

Representaremos o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x$

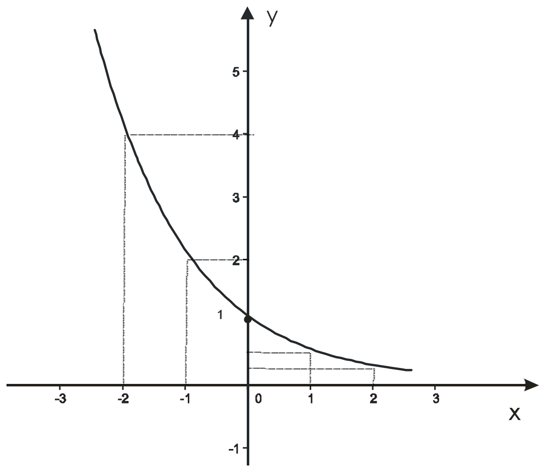


$f(x)=2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Características:
- $D = \mathbb{R}$
- $Im = \mathbb{R}_+^*$
- f é Crescente
- a curva passa pelo ponto (0, 1)

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Características:
- $D = \mathbb{R}$.
- $Im = \mathbb{R}_+^*$.
- f é Decrescente.
- a curva passa pelo ponto (0, 1).

Resumindo:

Classificação das funções Exponenciais.

- $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$.
- $f(x) = a^x$ é decrescente quando $0 < a < 1$.

Exercícios Resolvidos

01. (EEAR) O valor da raiz da equação abaixo é um número:

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 40$$

a) Inteiro positivo.
b) Irracional.
c) Inteiro negativo.
d) Imaginário puro.

Resolução:

Primeiramente reduzindo os expoentes.

$$2^x \cdot 2^1 + \frac{2^x}{2^1} = 40$$

$$2^x \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 40$$

$$2^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = 40 \Rightarrow 2^x = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot 40$$

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4$$

$$\therefore x = 4$$

Concluindo: $x \in \mathbb{Z}^+$
Alternativa **a.**

02. (AFA) A soma das raízes da equação $3^{2-x} + 3^{1+x} = 28$ é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

Resolução:

Primeiramente reduzindo os expoentes.

$$\frac{3^2}{3^x} + 3^1 \cdot 3^x = 28$$ →Artifício: Substituir 3^x por y

$$\frac{3^2}{y} + 3^1 \cdot y = \frac{28}{1}$$

$$9 + 3y^2 = 28y$$

$$3y^2 - 28y + 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -28 \\ c = 9 \end{cases}$$

Temos que:

$$\Delta = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9$$

$$\Delta = 784 - 108 \Rightarrow \Delta = 676$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-(-28) \pm \sqrt{676}}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{28 \pm 26}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{28 + 26}{6} = 9$$

$$y_2 = \frac{28 - 26}{6} = \frac{1}{3}$$

Retornando ao estado inicial temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \\ x = 2 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \\ x = -1 \end{array}}$$

Concluindo: $= 2 - 1 = 1$
Alternativa **a.**

Exercícios Propostos

01. (EEAR) Se $8^{x-9} = 16^{\frac{x}{2}}$, então x é um múltiplo de:

a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 7.

02. (CAP) Dadas as afirmativas abaixo, assinale a alternativa correta.

I. $5^2 + 5^2 = 5^4$

II. $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$

III. $(10^2)^3 = 10^6$

a) Todas estão corretas.
b) Apenas I e II são corretas.
c) Apenas II e III são corretas.
d) Apenas III e I são corretas.

03. (PUC) O valor de $x + y$ no sistema.

$$\begin{cases} 2^x = 4^y \\ 25^x = 25 \cdot 5^y \end{cases}$$

a) $\frac{4}{3}$.
b) $\frac{2}{3}$.
c) $\frac{1}{3}$.
d) 1.
e) 2.

04. (PUC) Resolvendo a equação abaixo obtemos:

$$4^x + 4 = 5 \cdot 2^x$$

a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.
b) $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.
c) $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.
d) $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$.

05. (AFA) A solução da Equação:

$$3 + 3^{1,5} \cdot x^{0,5} = \sqrt{48x}$$

a) 3^{-1}.

b) $3^{\frac{-1}{2}}$.

c) $3^{\frac{1}{2}}$.

d) 3.

06. (ESPCEX) O Valor da soma das raízes reais da equação $10^{\frac{3x-1}{x^2+1}}-10=0$ é:

a) 3.
b) 1.
c)) 0.
d) 9.

07. (PM) Calcule o valor da seguinte equação exponencial :

$$(10x)^{x-1}=\frac{1}{10^6}$$

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) ∅.

CAPÍTULO 13
Introdução ao estudo de Logaritmo

Anteriormente no estudo de equações exponenciais, vimos os casos que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Ex.: $\begin{cases} 5^x=25 \Rightarrow 5^x=5^2 \\ x=2 \end{cases}$

Porém existem casos que isto não é possível.

Ex.: $2^x=5$

Dentro de uma estimativa temos que o número 5 encontra- se entre $2^2<5<2^3$, ou seja, o valor de x encontra-se no intervalo $2<x<3$. A fim de resolver este problema, iremos iniciar o estudo de logaritmo.

Definição: Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente que se deve elevar a base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Forma: $$\underbrace{\log_a b = x}_{forma} \Leftrightarrow \underbrace{a^x=b}_{\substack{forma \\ exponencia}}$$

Elementos da Forma Logarítmica

$\log_a b = x$ $\begin{cases} a = \text{base do logaritmo.} \\ b = \text{logaritmando.} \\ x = \text{logaritmo.} \end{cases}$

Elementos da Forma exponencial

$a^x=b$ $\begin{cases} a = \text{base da potência.} \\ b = \text{potência.} \\ x = \text{expoente.} \end{cases}$

Exemplos:

Considerando a definição dada, vamos calcular o valor dos logaritmos:

a) $\log_{49} 7$

$\log_{49} 7 = x \Rightarrow 49 = 7^x$

$7^2=7^x \therefore x=2$

Portanto: $\log_{49} 7 = 2$

b) $\log_{10} 0{,}01$

$\log_{10} 0{,}01 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}01$

$10^x=\frac{1}{10^2} \Rightarrow 10^x = 10^{-2}$

$x=-2$

Portanto: $\log_{10} 0{,}01 = -2$

c) $\log_{\frac{1}{4}} 4\sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{4}} 4\sqrt{2} = x \Rightarrow 4\sqrt{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\sqrt{16\times 2}=\left(\frac{1}{2^2}\right)^x \Rightarrow \sqrt{2^4\times 2^1}=\left(2^{-2}\right)^x$

$\sqrt{2^5}=2^{-2x} \Rightarrow 2^{\frac{1}{5}}=2^{-2x}$

$-2x=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{1/5}{-2}$

$x=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{2}{1}\right) \therefore x=-\frac{2}{5}$

Portanto: $\log_{\frac{1}{4}} 4\sqrt{2} = -\frac{2}{5}$

Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Aplicando a definição, calcule os valores dos logaritmos abaixo.

a) $\log_6 36$
b) $\log_{16} 32$
c) $\log_{\sqrt{8}} 4$
d) $\log_{12} 144$
e) $\log_2 0{,}25$

02. (AEPOM) Calcular a soma nos seguintes casos.

a) $\log_{10} 100 + \log_{10} 0{,}0001 - \log_3 81$

b) $\log_{625} \sqrt{5} - 3\times\log_{0,25} 8 + \log_{125} 25$

c) $\log_4(\log_3 9) - \log_2(\log_{81} 3)$

Condição de existência dos Logaritmos

$\log_a b = x$ $\begin{cases} \text{base positiva.} \\ \text{base diferente de 1.} \\ \text{logaritmando positivo.} \end{cases}$

Assim definimos Condição de Existência (CE):

- $b > 0;\ a > 0\ e\ a \neq 1.$

Exemplo:
Dada a equação: $y = \log_3(x-5)$
De acordo com a CE, temos:

$$(x-5) > 0$$
$$x > 5$$

Interpretação: Este logaritmo só existe se no lugar do x seja substituído qualquer número real maior que 5.

Consequências da Definição

01. O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero.

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

02. O logaritmo que possui o logaritmando e a base iguais equivale a um.

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

03. O logaritmo que possui uma potência no logaritmando, o valor do logaritmo fica multiplicado pelo expoente do logaritmando.

$$\boxed{\log_a b^n = n \times \log_a b}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a a^n = n \log_a a \\ \log_a a^n = n \end{array}}$$

04. A potência de base *a* e expoente $\log_a b$ é igual a *b*.

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

05. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, somente se, os logaritmandos são iguais.

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c}$$

Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Determine o campo de existência das funções.

a) $y = \log_3(x-3)$

b) $y = \log_x(2x-1)$

c) $y = \log_x(x^2-1)$

d) $y = \log_{x+1}(4x+2)$

Propriedades dos Logaritmos

Vejamos agora as propriedades operatórias dos logaritmos.
Lembrando que: $b > 0;\ c > 0;\ a > 0\ e\ a \neq 1.$

01. Logaritmos do produto:
O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores tomados na mesma base.

$$\boxed{log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c}$$

02. Logaritmo de um quociente:
O logaritmo de um quociente é igual ao logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador tomados na mesma base.

$$\boxed{log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c}$$

03. Logaritmo de uma potência:
O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\boxed{log_a b^n = n \times log_a b}$$

De modo análogo:

$$\boxed{log_a \sqrt[n]{b} = log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times log_a b}$$

Exemplo:
01. Sendo: $\log_a b = 4$; $\log_a c = -3$ e $\log_a d = 6$, calcular $\log_a\left(\frac{c}{b \cdot d}\right)$.

Resolução:

$$\log_a\left(\frac{c}{b \cdot d}\right) = \log_a c - \log_a b \cdot d$$
$$= \log_a c - (\log_a b + \log_a d)$$
$$Substituindo:$$
$$= -3 - (4+6) \Rightarrow -3 - 10$$

Concluindo:

$$\log_a\left(\frac{c}{b \cdot d}\right) = 13$$

Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Sendo $\log_a b = 3$ e $\log_a c = -6$, encontre o valor de:

a) $\log_a(b \times c)$

b) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)$

c) $\log_a\left(\sqrt{b}\times c\right)$

d) $\log_a(b\times c)^{\frac{1}{2}}$

e) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-1}$

Mudança de Base

As propriedades operatórias só poderão ser utilizadas quando as bases forem iguais, com isto quando os logaritmos forem de bases diferentes, adotaremos esta regra para igualar as bases.

Assim, definimos a mudança de base do logaritmo para base *c*.

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Importante que $b > 0$; $1 \neq a > 0$ e $1 \neq c > 0$.

Observação:

Existem logaritmos que possuem base igual a 10; nesse caso, a indicação da base fica desnecessária.

Exemplo: $\log b = 4$

Elementos:
Logaritmo = 4
Logaritmando $= b$
Base = 10

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Sendo $\log 3 = 0{,}4$ e $\log 2 = 0{,}3$, Calcular $\log_2 12$.

Resolução:

Como temos o valor de logaritmos de base 10, vamos passar $log_2 12$ para base 10.

$$\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 2\times 2\times 3}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 2\times 2\times 3}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 2+\log 2+\log 3}{\log 2}$$

$$Substituindo:$$

$$= \frac{0{,}3+0{,}3+0{,}4}{0{,}3}$$

$$= \frac{1{,}3}{0{,}3}$$

$$\therefore \log_2 12 = \frac{13}{3}$$

Equações Logarítmicas

Equações logarítmicas são equações que possuem incógnitas na base e no logaritmando do logaritmo.

➢ Para resolver estes tipos de equações, adotaremos alguns critérios de resolução:
01. Indicaremos a condição de existência.
02. Resolveremos a equação.
03. Verifica-se a condição de existência dentro da solução encontrada.

Exemplo 01:

$$\log_3 x = 6$$

CE $\rightarrow x > 0$

$\log_3 x = 6 \Rightarrow 3^6 = x$

$\therefore x = 729$

$729 > 0$, é verdadeiro.

Resposta: $S = \{729\}$

Exemplo 02:

$$\log_6\left(x^2 - x\right) = 1$$

Resolução:

CE $\rightarrow x^2 - x > 0$

$\log_6\left(x^2-x\right)=1 \Rightarrow x^2 - x = 6^1$

$x^2 - x - 6 = 0$

$temos:$

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

Verificando a resolução na condição de existência:

➢ $x_1 = 3$

$3^2 - 3 > 0$

$6 > 0$

Verdadeiro

➢ $x_2 = -2$

$(-2)^2 - (-2) > 0$

$4 + 2 > 0 \therefore 6 > 0$

Verdadeiro

Exercício de treinamento

01. (AEPOM) Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $\log_5(x+1)=2$

b) $\log_2(x^2-x)=1$

c) $\log_6\left(\dfrac{x+3}{2}\right)=1$

Função logarítmica

Dado um número real ($\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq 1$) chamamos função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$ a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa cada x ao número $\log_a x$.

Assim $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \to \log_a x$

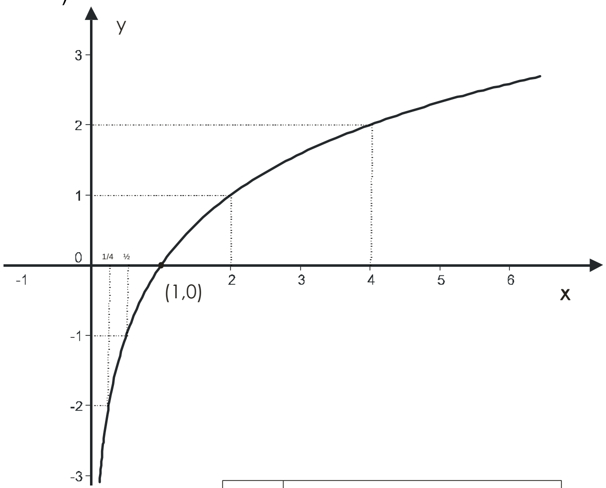
Exemplos:

$f(x)=\log_4 3$ e $f(x)=\log_{\frac{4}{3}} 3$

Gráfico de uma função logarítmica

Vamos considerar as seguintes funções:

a) A função $\log_2 x$ é crescente quando base é maior que $1(a > 1)$.

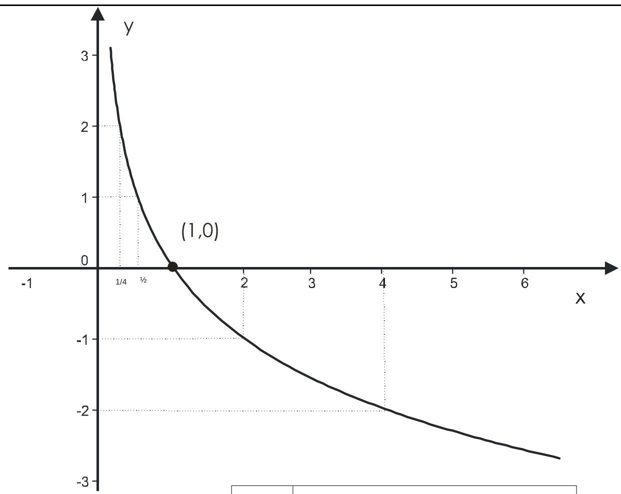


$f(x)=log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4
y	-2	-1	1	2

Observações:
- O gráfico corta o eixo x no ponto 1.
- O gráfico pertence ao 1° e 4° Quadrante.
- O gráfico no 4º Quadrante chega muito próximo do eixo das ordenadas (y), porém não o intercepta, pois $x \neq 0$.

b) A função $\log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente quando a base encontra-se entre 0 e $1(0 < a < 1)$.



$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

x	4	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	1	2

Observações:
- O gráfico corta o eixo x no ponto 1.
- O gráfico pertence ao 1° e 4° Quadrante.
- O gráfico no 1º Quadrante chega muito próximo do eixo das ordenadas (y), porém não o intercepta, pois $x \neq 0$.

Exercícios propostos

01. (CPC/PM SP) Calcular $\log 14$, sabendo-se que $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 7 = 0{,}8450$:

a) 0,2547.
b) 1.
c) 1,146.
d) 1,2543.

02. (AMAN) Se $\log_3 4 = a$ e $\log_4 5 = b$, então o valor de $\log_3 5$ em função de a e b é:

a) $\dfrac{1}{a+b}$.
b) $\dfrac{b}{a}$.
c) $\dfrac{1}{a \cdot b}$.
d) $\dfrac{a}{b}$.
e) $a \cdot b$.

03. (EEAR) Determinando $\log_{25} 0{,}008$, obtemos:

a) $\dfrac{3}{2}$.
b) $-\dfrac{3}{2}$.
c) $\dfrac{2}{3}$.
d) $-\dfrac{2}{3}$.

04. (CFS/PM SP) O conjunto solução da equação $\log_2(x^2+2x)=3$ é:

a) $\{-4,2\}$.
b) $\{-4,-2\}$.
c) $\{4,-2\}$.
d) $\{4,2\}$.

05. (CEFET) A solução da equação $\log(x+1)+\log(x-2)=1$ é:
a) - 3.
b) 4.
c) 3.
d) - 4.

06. (UFF) Pode-se afirmar que o valor de $\log 18$ é igual a:
a) $\log 20 - \log 2$.
b) $3\log 6$.
c) $\log 3 + \log 6$.
d) $(\log 36)/2$.
e) $(\log 3)/(\log 6)$.

07. (AFA) O valor de: $-\log_2\left[\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right]$ é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 7.

CAPÍTULO 14
Progressão Aritmética (PA)

É uma sequência de números reais em que a diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante). Essa constante é chamada de **razão da PA** e é indicada por $\boldsymbol{r}$.
Vejamos alguns exemplos.

- $(2, 4, 6, 8, \dots)$, temos $r = 2$.
- $(5, 1, -3, \dots)$, temos $r = -4$.
- $(3, 3, 3, 3, \dots)$, temos $r = 0$.

Classificação

$r > 0 \Longrightarrow$ PA crescente.
$r < 0 \Longrightarrow$ PA decrescente.
$r = 0 \Longrightarrow$ PA constante.

Segue da definição que:
$$r = a_n - a_{n-1}\text{ , com } n \geq 2$$

Termo Geral da PA

O **termo geral** de uma sequência é a lei de formação que define qualquer um dos seus termos. Assim, em uma PA o termo geral é dado por:
$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r\text{ , com } n \geq 2.$$
Nota:
Se $a_n\ e\ a_m$ são dois termos quaisquer de uma PA, com $n > m$, então:
$$a_n = a_m + (n-m)\cdot r$$

Termo Central

Considerando três elementos consecutivos de uma PA, o termo do meio (central) é sempre a média aritmética dos outros dois.
Seja a $P.A.\,(a_1, a_2, a_3)$, então:
$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Assim, de uma maneira geral, podemos escrever:
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\text{ , com } n \geq 2.$$

Soma dos n Primeiros Termos da PA

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$
$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$
Assim, a fórmula para obter a soma de todos os termos de uma PA será:
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Determine o 20º termo da PA (3, 9, 15,....).

Resolução:
Como $a_1 = 3$ e r = 6, temos:
$a_{20} = a_1 + (20-1)r \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19.r$
$a_{20} = 3 + 19.6 = 117 \Rightarrow a_{20} = 117$

02. (AEPOM) Encontre a soma dos 7 primeiros termos de uma PA em que o 5º termo é 17 e o 3º é 11.

Resolução:
Temos:
$a_3 = 11$; $a_5 = 17$; n = 7 ; S_7 = ?

Para determinar a soma dos termos de uma PA, sendo n = 7, é necessário conhecer o valor do 1º e do 7º termo.
Para tanto, precisamos descobrir o valor da razão:

$a_5 = a_3 + 2r \Rightarrow 17 = 11 + 2r \Rightarrow 2r = 6 \Rightarrow r = 3$

$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 11 = a_1 + 6 \Rightarrow \mathbf{a_1 = 5}$

$a_7 = a_5 + 2r \Rightarrow a_7 = 17 + 6 \Rightarrow \mathbf{a_7 = 23}$

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7).7}{2} = \frac{(5+23).7}{2} = 98$$

03. (EFOMM) Em uma PA o sétimo termo é o quádruplo do segundo termo. Calcule o décimo segundo termo, sabendo que a soma do quinto com o nono termo é 40.
a) 35.
b) 37.
c) 40.
d) 45.
e) 47.

Resolução:
Esta questão envolve o conhecimento da fórmula do termo geral.
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
Dados do exercício:
$a_7 = 4a_2$ e $a_5 + a_9 = 40$

Pergunta-se o valor de a_{12}.

1°. Passo: decompor os termos em função de a_1 e a razão r.

$a_7 = a_1 + (7-1)r$

$a_7 = a_1 + 6r$

$a_2 = a_1 + r$

$a_5 = a_1 + 4r$

$a_9 = a_1 + 8r$

2°. Passo: substituir nos dados acima e arranjar os termos na equação.

$a_7 = 4a_2$

$a_1 + 6r = 4(a_1 + r)$

$a_1 + 6r = 4a_1 + 4r$

$a_1 - 4a_1 + 6r - 4r = 0$

$-3a_1 + 2r = 0$

$a_5 + a_9 = 40$

$a_1 + 4r + a_1 + 8r = 40$

$2a_1 + 12r = 40$

3°. Passo: já que temos duas equações com duas incógnitas resolveremos este sistema do 1°grau.

$$\begin{cases} -3a_1 + 2r = 0 & (1) \\ 2a_1 + 12r = 40 & (2) \end{cases}$$

Na equação (2) iremos isolar o valor de a_1 e substituir na equação (1) para achar o valor de r.

$2a_1 + 12r = 40 \quad \div 2$

$a_1 + 6r = 20$

$a_1 = 20 - 6r$

$-3a_1 + 2r = 0$

$-3(20 - 6r) + 2r = 0$

$-60 + 18r + 2r = 0$

$20r = 60$

$r = \frac{60}{20} = 3$

$-3a_1 + 2r = 0$

$-3a_1 + 2 \times 3 = 0$

$-3a_1 + 6 = 0$

$-3a_1 = -6$

$a_1 = \frac{-6}{-3} = 2$

Finalizando: Se $a_{12} = a_1 + 11r$

logo : $a_{12} = 2 + 11 \times 3 = 35$

Resposta: alternativa **a**.

Importante:

*Interpolação Aritmética***:** Em toda sequência finita ($a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$), os termos a_1 e a_n são chamados extremos e os demais são chamados de meios. Assim, na PA (0, 3, 6, 9, 12, 15) os extremos são 0 e 15 enquanto os meios são 3, 6, 9 e 12. Interpolar, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre os números a e b significa obter uma PA de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b, com\ n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa PA é necessário calcular a razão.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$b = a + (k+1)r$$

Temos que a razão é:

$$r = \frac{b-a}{k+1}$$

Exemplo:

01. (AEPOM) Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.

Resolução:

Tendo em vista que temos 5 termos para interpolar, no final da sequência teremos 7 termos.

Assim, temos:

$a_1 = 1$ e $a_7 = 2$

Calculando os termos necessários:

$a_7 = a_1 + (7-1)r$

$a_7 = a_1 + 6.r$

Calculando a Razão:

$r = \frac{b-a}{k+1}$

$r = \frac{a_7 - a_1}{5+1}$

$r = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$

Construindo a sequência:

PA é (1, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{6}$, 2).

Exercícios Propostos

01. (PM) Isamar se propõe a depositar na poupança uma certa importância. No 1° dia deposita R$ 4,00, no 2° dia R$ 7,00, no 3° deposita R$ 10,00 e assim sucessivamente. Quanto depositara no trigésimo primeiro dia?
a) R$ 88,00.
b) R$ 94,00.
c) R$ 92,00.
d) R$ 97,00.
e) R$ 85,00.

02. (PM) Numa progressão aritmética $a_2 + a_6 = 20$ e $a_4 + a_9 = 35$. Calcule a razão e o primeiro termo:
a) 3 e 1.
b) 2 e 2.
c) 1 e 4.
d) 1 e 1.
e) 2 e 3.

03. (PM) Os múltiplos de 7 existentes entre 20 e 508 são números de:
a) 72.
b) 70.
c) 68.

d) 67.
e) 69.

04. (EEAR) A soma dos vinte primeiros termos da PA cujo termo geral tem para expressão $a_n = 3n + 5$ é:
a) 657.
b) 730.
c) 1460.
d) 803.

05. (EFOMM) Dada uma PA, sendo $a_1 = 12$ e r = 4. Qual o valor de n, se a média aritmética dos n primeiros termos dessa PA é 50?
a) 20.
b) 30.
c) 18.
d) 15.
e) 14.

06. (EFOMM) Se o 5° termo de uma PA de 9 termos é 16, então a soma de seus termos será:
a) 76.
b) 96.
c) 144.
d) 176.
e) 196.

07. (AFA) Se a soma dos 6 primeiros termos de um a PA é 21 e o sétimo termo é o triplo da soma do terceiro com o quarto termo, então o primeiro termo dessa progressão é:
a) – 7.
b) – 8.
c) – 9.
d) – 10.

08. (EEAR) A soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 20 e 300 é:
a) 6250.
b) 6300.
c) 6350.
d) 6400.

CAPÍTULO 15
Progressão Geométrica PG

É uma sequência de números reais não-nulos em que o quociente entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é constante. Essa constante será chamada de **razão da PG** e é indicada por q.
Vejamos alguns exemplos.

- $(2, 4, 8, 16, \dots)$, temos $q = 2$.
- $(-3, 6, -12, 24, \dots)$, temos $q = -2$.
- $(27, 9, 3, \dots)$, temos $q = \frac{1}{3}$.

Classificação

$q < 0 \Longrightarrow$ PG alternante.

$\left.\begin{array}{c} a_1 > 0 \; e \; q > 1 \\ \text{Ou} \\ a_1 < 0 \; e \; 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ PG crescente.

$\left.\begin{array}{c} a_1 > 0 \; e \; 0 < q < 1 \\ \text{Ou} \\ a_1 < 0 \; e \; q > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ PG decrescente.

$q = 1 \Longrightarrow$ PG constante.

Segue da definição que:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \text{ com } n \geq 2$$

Termo Geral da PG

Como vimos anteriormente, é uma lei de formação que define qualquer um dos seus termos. Assim, em uma PG o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \geq 2.$$

Nota:
Se $a_n \; e \; a_m$ são dois termos quaisquer de uma PG, com $n > m$, então:

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

Termo Central

Considerando três elementos consecutivos de uma PG, o termo do meio (central) é sempre a média geométrica dos outros dois.

Seja a $PG(a_1, a_2, a_3)$, então:

$$a_2 = \sqrt[2]{(a_1 \cdot a_3)}$$

Assim, de uma forma geral, podemos escrever:

$$a_n{}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}, \text{ com } n \geq 2.$$

Soma dos n primeiros termos da PG

A PG finita possui um número limitado de termos, como vemos abaixo:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n).$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Soma dos infinitos termos de uma PG

Dada uma PG com infinitos termos de razão q tal que $-1 < q < 1$, a soma desses termos será:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Calcule o valo de x na PG $\left(\frac{1}{8}, x, \frac{1}{4}\right)$

Resolução
O termo central é a média geométrica dos extremos.

$$x=\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{32}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$x=\frac{1}{4\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{4\times 2}$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Concluindo: O termo central é:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

02. (AEPOM) Calcule a soma dos infinitos termos da série $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}........$

Resolução

Observe que as parcelas dessa série formam uma PG infinita, pois a razão é constante e vale :

$$q=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\ldots=\frac{1}{3}$$

Como $a_1 = 1$, aplicando a fórmula teremos:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=1.\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Concluindo:

Soma da PG infinita é igual a $\frac{3}{2}$.

Importante:

Interpolação Geométrica: Interpolar k meios geométricos entre os números a e b significa obter uma PG de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b, com\ n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa PG é necessário calcular a razão.

Assim temos:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \qquad b = a.q^{k-1}$$

$$q=\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Exemplo:

01. (AEPOM) Interpolar 8 meios geométricos reais entre 5 e 2560.

Resolução:

Tendo em vista que temos 8 termos para interpolar, no final da sequência, teremos 10 termos.

Assim, temos:

$$a_1 = 5 \text{ e } a_{10} = 2560$$

Calculando os termos necessários:

$$a_{10} = a_1.q^{10-1}$$

$$a_{10} = a_1.q^{9}$$

Calculando a Razão:

$$q=\sqrt[8+1]{\frac{a_{10}}{a_1}}$$

$$q=\sqrt[9]{\frac{2560}{5}}$$

$$q=\sqrt[9]{512}$$

$$q=2$$

Construindo a sequência:

PG é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560)

Exercícios Propostos

01. (PM) Quantos termos tem a PG de q = 4 e cujos extremos são 5 e 1280?
a) 12.
b) 8.
c) 7.
d) 5.
e) 10

02. (EEAR) A soma: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 +...+ 2^{999} + 2^{1000}$ é igual a:
a) $2^{1000} - 1$.
b) $2^{1001} - 1$.
c) $2^{1000} + 1$.
d) $2^{1001} + 1$.

03. (AEPOM) Numa PG, o 5º termo é igual a 243. Calcule o seu 1º termo, sabendo que ele é igual à razão.
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

04. (ESPCEX) Numa PG crescente de 5 termos, o a_1 e a_5 são as raízes, respectivamente são as raízes da equação $x^2 - 51x + 144 = 0$. O valor da soma do segundo, terceiro e quarto termos dessa PG é:
a) 12.
b) 24.
c) 28.
d) 36.
e) 42.

05. (AFA) Numa progressão geométrica, com n termos, $a_1 = 2$, $a_n = 432, S_n = 518$, tem-se:
a) $q < n$.
b) $q = n$.
c) $q > n$.

d) $q < a_1$.

06. (AFA) Se a sequência de inteiros positivos $(2, x, y)$ é uma PG e $(x + 1, y, 11)$ uma PA, então, o valor de $x + y$ é:
a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.

07. (AEPOM) Sabe-se que x – 16, x – 10 e x + 14 são os três primeiros termos de uma PG. Calcule o seu 14º termo.
a)2^{23}.
b)2^{24}.
c)2^{25}.
d)2^{26}.
e)2^{27}.

08. (AEPOM) Considere uma PG em que o 3º termo é 40 e o 6º termo é – 320. Sabendo que a razão é negativa, determine a soma dos oito primeiros termos.
a) – 500.
b) – 650.
c) – 850.
d) 120.
e) – 720.

CAPÍTULO 16
GABARITO

Capítulo 01
01- V, F, V, F, V, V, F, V, V, F, F, V.
02 - e.
03 - d.
04 - b.

Capítulo 02
01 - b.
02 - b.
03 - d.
04 - a.
05 - c.

Capítulo 03
01 - e.
02 - a.
03 - b.
04 - c.
05 - c.

Capítulo 04
01 - d.
02 - c.
03 - b.
04 - d.
05 - e.
06 - e.
07 - d.

Capítulo 05
01- a) 4 b) $32\sqrt[3]{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$
02 - b.
03 - b.
04 - c.
05 - e.
06 - a.
07 - b.

Capítulo 06
01 - a.
02 - b.
03 - c.
04 - a.
05 - c.
06 - c.
07 - c.

Capítulo 07
01- b.
02- b.
03- d.
04- a.
05- d.
06- a.
07- a.

Capítulo 08
01 - e.
02 - a.
03 - d.
04 - d.
05 - e.
06 - a.
07 - c.
08 - b.

Capítulo 09
01 - a.
02 - b.
03 - b.
04 - d.
05 - b.
06 - a.

Capítulo 10
01 - d.
02 - b.
03 - c.
04 - c.
05 - e.
06 - d.
07 - d.

Capítulo 11
01 - e.
02 - c.
03 - e.
04 - d.
05 - c.
06 - e.
07 - c.
08 - d.
.

Capítulo 12
01 - b.
02 - c.
03 - e.
04 - c.

05 - d.
06 - a.
07 - e.

Capítulo 13

01 - c.
02 - e.
03 - b.
04 - a.
05 - b.
06 - c.
07 - c.

Capítulo 14

01 - b.
02 - a.
03 - b.
04 - b.
05 - a.
06 - c.
07 - c.
08 - b.

Capítulo 15

01) d.
02) b.
03) b.
04) e.
05) c.
06) b.
07) e.
08) c.